

# **UNIVERSIDAD DE MÁLAGA**

**Facultad de Ciencias de la Educación**

**Departamento de Álgebra, Geometría y Topología**

## **UNA VISIÓN CREATIVA DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA EN EDUCACIÓN INFANTIL**

**Tesis doctoral presentada por:**

**M<sup>a</sup> Dolores Sánchez Segura**

**Dirigida por:**

**Dra. D<sup>a</sup> Emelina López González**

**Dra. D<sup>a</sup> Mercedes Siles Molina**

**Málaga, 2008**



# Índice

## TOMO I

|                        |       |
|------------------------|-------|
| Índice de figuras..... | XVII  |
| Índice de tablas.....  | XLVII |
| Agradecimientos.....   | LVII  |
| Introducción.....      | LXI   |

## I. MARCO TEÓRICO: FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA

|                                                                                                          |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Capítulo 1. Creatividad en la Educación Infantil: Didáctica de las Magnitudes y su Medida.....</b>    | <b>3</b> |
| 1.1. Introducción.....                                                                                   | 3        |
| 1.2. Creatividad.....                                                                                    | 4        |
| 1.3. Metodología Creativa.....                                                                           | 21       |
| 1.4. Técnica de Metodología Creativa.....                                                                | 24       |
| 1.5. Técnicas de Metodología Creativa aplicadas a “las Magnitudes y su Medida en Educación Infantil..... | 26       |
| 1.5.1. El arte de preguntar.....                                                                         | 27       |
| 1.5.2. El torbellino de ideas o brainstorming.....                                                       | 29       |
| 1.5.3. El método Delfos.....                                                                             | 31       |
| 1.5.4. La sinéctica.....                                                                                 | 33       |
| 1.5.5. Los métodos combinatorios.....                                                                    | 36       |
| 1.5.5.1. La lista de atributos.....                                                                      | 36       |
| 1.5.5.2. El análisis morfológico.....                                                                    | 37       |
| 1.5.5.3. El análisis funcional.....                                                                      | 38       |
| 1.5.6. El arte de relacionar.....                                                                        | 38       |
| 1.5.7. Solución de problemas.....                                                                        | 39       |
| 1.5.7.1. Comparación de las propuestas de Polya y de Gervilla.....                                       | 44       |
| 1.5.7.2. Nuestra propuesta.....                                                                          | 46       |
| 1.5.8. El entorno.....                                                                                   | 49       |

|                                                                                          |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.5.9. La biónica.....                                                                   | 52        |
| 1.5.10. La sinapsis.....                                                                 | 53        |
| 1.5.11. La serendipity.....                                                              | 53        |
| 1.5.12. La ideogramación.....                                                            | 55        |
| 1.5.13. El circept.....                                                                  | 56        |
| 1.5.14. Crear durmiendo o sleep-writting.....                                            | 57        |
| 1.5.15. Relax imaginativo.....                                                           | 59        |
| 1.5.16. Técnica de escenarios.....                                                       | 60        |
| 1.5.17. Síntesis creativa.....                                                           | 61        |
| 1.5.18. El juego como técnica.....                                                       | 62        |
| 1.5.19. Justificación del orden seguido en el comentario de las diferentes técnicas..... | 67        |
| <b>Capítulo 2. Las Magnitudes y su Medida: creatividad.....</b>                          | <b>69</b> |
| 2.1. Justificación.....                                                                  | 69        |
| 2.2. Introducción.....                                                                   | 78        |
| 2.3. Creatividad en “las Magnitudes y su Medida”.....                                    | 79        |
| 2.4. Semimódulo.....                                                                     | 84        |
| 2.4.1. Par ordenado.....                                                                 | 85        |
| 2.4.1.1. Igualdad de pares.....                                                          | 86        |
| 2.4.2. Producto cartesiano de dos conjuntos.....                                         | 87        |
| 2.4.2.1. Representación gráfica del producto cartesiano de dos conjuntos.....            | 89        |
| 2.4.3. Definición e igualdad de ternas.....                                              | 91        |
| 2.4.4. Producto cartesiano de tres conjuntos.....                                        | 92        |
| 2.4.4.1. Representación gráfica del producto cartesiano de tres conjuntos.....           | 93        |
| 2.4.5. Definición e igualdad de n-uplas.....                                             | 95        |
| 2.4.6. Generalización del producto cartesiano.....                                       | 95        |
| 2.4.7. Correspondencias o relaciones binarias entre dos conjuntos.....                   | 96        |
| 2.4.7.1. Igualdad de correspondencias.....                                               | 100       |
| 2.4.7.2. Original e imagen de una correspondencia....                                    | 101       |
| 2.4.8. Recíproca de una correspondencia.....                                             | 102       |
| 2.4.9. Clases de correspondencias.....                                                   | 103       |
| 2.4.9.1. Correspondencia unívoca.....                                                    | 104       |
| 2.4.9.2. Correspondencia biunívoca.....                                                  | 106       |
| 2.4.10. Aplicaciones.....                                                                | 108       |
| 2.4.11. Tipos de aplicaciones.....                                                       | 111       |
| 2.4.11.1. Aplicación inyectiva.....                                                      | 112       |
| 2.4.11.2. Aplicación sobreyectiva.....                                                   | 115       |
| 2.4.11.3. Aplicación biyectiva.....                                                      | 118       |



|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.4.12. Ley de composición interna.....                                          | 122 |
| 2.4.13. Semigrupo.....                                                           | 124 |
| 2.4.14. Grupo.....                                                               | 129 |
| 2.4.15. Semianillo.....                                                          | 135 |
| 2.4.16. Anillo.....                                                              | 137 |
| 2.4.17. Cuerpo.....                                                              | 139 |
| 2.4.18. Ley de composición externa.....                                          | 142 |
| 2.4.19. Semimódulo.....                                                          | 143 |
| 2.5. Módulo.....                                                                 | 147 |
| 2.6. Espacio vectorial.....                                                      | 152 |
| 2.7. Magnitudes y propiedades.....                                               | 154 |
| 2.7.1. Relación de equivalencia.....                                             | 154 |
| 2.7.2. Magnitud.....                                                             | 163 |
| 2.7.3. Propiedades de las magnitudes y ejemplos.....                             | 171 |
| 2.8. Tipos de magnitudes.....                                                    | 179 |
| 2.8.1. Magnitudes finitas e infinitas.....                                       | 180 |
| 2.8.2. Magnitudes absolutas y relativas.....                                     | 181 |
| 2.8.3. Magnitudes divisibles e indivisibles.....                                 | 184 |
| 2.8.3.1. Anuladores.....                                                         | 185 |
| 2.8.3.2. Semimódulo divisible.....                                               | 188 |
| 2.8.3.3. Magnitudes divisibles e indivisibles.....                               | 193 |
| 2.8.4. Magnitudes escalares y vectoriales.....                                   | 197 |
| 2.8.4.1. Relación de orden.....                                                  | 198 |
| 2.8.4.2. Relación de orden total.....                                            | 214 |
| 2.8.4.3. Relación de orden compatible con una ley<br>de composición interna..... | 219 |
| 2.8.4.4. Relación de orden arquimediana.....                                     | 228 |
| 2.8.4.5. Magnitudes escalares y vectoriales.....                                 | 230 |
| 2.8.5. Clases de magnitudes escalares.....                                       | 242 |
| 2.8.5.1. Semimódulo cíclico.....                                                 | 242 |
| 2.8.5.2. Magnitudes discretas y continuas.....                                   | 245 |
| 2.9. Ejemplos y ejercicios.....                                                  | 250 |
| 2.10. Medida de magnitudes escalares.....                                        | 251 |
| 2.10.1. Homomorfismos de semigrupos.....                                         | 252 |
| 2.10.2. Propiedades de los homomorfismos de semigrupos.....                      | 255 |
| 2.10.3. Homomorfismo de semimódulos.....                                         | 258 |
| 2.10.4. Propiedades de los homomorfismos de semimódulos.....                     | 260 |
| 2.10.5. Analogía entre las magnitudes discretas y $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ .. | 267 |
| 2.10.6. Medida de una magnitud escalar.....                                      | 270 |
| 2.10.6.1. Existencia de la medida.....                                           | 279 |

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| 2.10.6.2. Propiedades de la medida.....                  | 283 |
| 2.10.6.3. Cambio de unidad de medida.....                | 285 |
| 2.10.6.4. Medida de magnitudes escalares discretas.....  | 288 |
| 2.10.6.5. Medida de magnitudes escalares divisibles..... | 290 |
| 2.11. Proporcionalidad de magnitudes escalares.....      | 293 |
| 2.11.1 Proporcionalidad simple.....                      | 294 |
| 2.11.2 Razón entre dos cantidades.....                   | 299 |
| 2.11.3 Proporcionalidad compuesta.....                   | 302 |
| 2.11.4 Medida indirecta de magnitudes escalares.....     | 307 |
| 2.12 Medida de magnitudes vectoriales.....               | 310 |
| 2.12.1 Espacio métrico.....                              | 310 |
| 2.12.2 Medida de magnitudes vectoriales.....             | 314 |
| 2.13 Ejercicios.....                                     | 316 |

## II. MARCO TEÓRICO-PRÁCTICO: APLICACIONES PRÁCTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

|                                                                                                                                |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Capítulo 3. Actividades creativas sobre “las Magnitudes y su Medida” para Educación Infantil.....</b>                       | <b>321</b> |
| 3.1. Introducción.....                                                                                                         | 321        |
| 3.2. Génesis del concepto de medida.....                                                                                       | 322        |
| 3.2.1. Conservación y transitividad.....                                                                                       | 324        |
| 3.2.2. Unidad de medida.....                                                                                                   | 325        |
| 3.3. Estadios de desarrollo de la comprensión de la medida.....                                                                | 329        |
| 3.3.1. Estadio Inicial.....                                                                                                    | 330        |
| 3.3.2. Actividades sobre medida desde el nacimiento del niño hasta que empieza hablar.....                                     | 330        |
| 3.3.3. Actividades sobre medida desde que el niño empieza a hablar hasta que se inicia en la lecto-escritura.....              | 332        |
| 3.3.4. Actividades sobre medida desde que el niño se inicia en la lecto-escritura hasta que termina la Educación Infantil..... | 334        |
| 3.3.4.1. El número natural.....                                                                                                | 335        |
| 3.3.4.2. Longitud.....                                                                                                         | 336        |
| 3.3.4.3. Área.....                                                                                                             | 337        |
| 3.3.4.4. Peso.....                                                                                                             | 345        |
| 3.3.4.5. Volumen y capacidad.....                                                                                              | 347        |
| 3.3.4.6. Temperatura.....                                                                                                      | 349        |
| 3.3.4.7. Tiempo.....                                                                                                           | 350        |
| 3.3.4.8. Monedas.....                                                                                                          | 354        |

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.5. Estadio en el que el niño comienza a entender la conservación y la transitividad.....                                     | 359 |
| 3.3.6. Estadio en el que el niño se inicia en la conservación y en la transitividad.....                                         | 359 |
| 3.3.7. Estadio en el que el niño capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto que hay que medir                   | 360 |
| 3.3.8. Estadio del pensamiento operacional formal.....                                                                           | 360 |
| 3.4. Actividades Creativas.....                                                                                                  | 361 |
| 3.5. Actividades utilizando cada una de las técnicas de Metodología Creativa.....                                                | 362 |
| 3.5.1. Actividades utilizando la técnica el arte de preguntar.....                                                               | 363 |
| 3.5.2. Actividades utilizando el torbellino de ideas o brainstorming.....                                                        | 366 |
| 3.5.3. Actividades utilizando el método Delfos.....                                                                              | 369 |
| 3.5.4. Actividades utilizando la sinéctica.....                                                                                  | 371 |
| 3.5.4.1. Actividades utilizando convertir lo extraño en familiar.....                                                            | 371 |
| 3.5.4.2. Actividades utilizando hacer lo familiar extraño.....                                                                   | 372 |
| 3.5.5. Actividades utilizando los métodos combinatorios.                                                                         | 374 |
| 3.5.5.1. Actividades utilizando la lista de atributos.                                                                           | 374 |
| 3.5.5.2. Actividades utilizando el análisis morfológico.....                                                                     | 376 |
| 3.5.5.3. Actividades utilizando el análisis funcional.                                                                           | 377 |
| 3.5.6. Actividades utilizando el arte de relacionar.....                                                                         | 378 |
| 3.5.7. Actividades utilizando la técnica solución de problemas.....                                                              | 379 |
| 3.5.8. Actividades utilizando el entorno.....                                                                                    | 386 |
| 3.5.9. Actividades utilizando la biónica.....                                                                                    | 389 |
| 3.5.10. Actividades utilizando la sinapsis.....                                                                                  | 391 |
| 3.5.11. Actividades utilizando la serendipity.....                                                                               | 391 |
| 3.5.12. Actividades utilizando la ideogramación.....                                                                             | 392 |
| 3.5.13. Actividades utilizando el circept.....                                                                                   | 393 |
| 3.5.14. Actividades utilizando la técnica crear durmiendo o sleep-writting.....                                                  | 395 |
| 3.5.15. Actividades utilizando el relax imaginativo.....                                                                         | 396 |
| 3.5.16. Actividades utilizando la técnica de escenarios....                                                                      | 398 |
| 3.5.17. Actividades utilizando la síntesis creativa.....                                                                         | 399 |
| 3.6. Actividades utilizando el juego como técnica.....                                                                           | 400 |
| 3.7. Actividades sobre conservación, transitividad y unidad de medida utilizando todas las técnicas de Metodología Creativa..... | 404 |

## TOMO II

## III. DISEÑO Y DESARROLLO DEL ESTUDIO EMPÍRICO

|                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Capítulo 4. Diseño y recogida de datos.....</b>                                       | <b>497</b> |
| 4.1. Introducción.....                                                                   | 497        |
| 4.2. Evaluación Inicial.....                                                             | 498        |
| 4.2.1. Problema.....                                                                     | 499        |
| 4.2.2. Hipótesis.....                                                                    | 500        |
| 4.2.3. Objetivos.....                                                                    | 501        |
| 4.2.4. Diseño y tratamiento.....                                                         | 501        |
| 4.2.5. Muestra.....                                                                      | 503        |
| 4.2.6. Variables.....                                                                    | 504        |
| 4.2.7. Encuesta.....                                                                     | 509        |
| 4.3. Evaluación Final.....                                                               | 524        |
| 4.3.1. Encuesta.....                                                                     | 525        |
| <b>Capítulo 5. Análisis de los resultados.....</b>                                       | <b>541</b> |
| 5.1. Introducción.....                                                                   | 541        |
| 5.2. Estudio de Frecuencias de los Resultados de las Encuestas.                          | 541        |
| 5.2.1. Estudio de frecuencias de la Introducción.....                                    | 542        |
| 5.2.2. Estudio de frecuencias del primer apartado.....                                   | 547        |
| 5.2.2.1. Comparación de las opiniones sobre las Matemáticas.....                         | 554        |
| 5.2.3. Estudio de frecuencias del segundo apartado.....                                  | 557        |
| 5.2.3.1. Dominio de las Matemáticas.....                                                 | 557        |
| 5.2.3.2. Dominio de la Didáctica de la Matemática..                                      | 559        |
| 5.2.3.3. Dominio de la Didáctica.....                                                    | 561        |
| 5.2.3.4. Dominio de la Psicología.....                                                   | 563        |
| 5.2.3.5. Necesidad de conocer las técnicas de Metodología Creativa.....                  | 565        |
| 5.2.3.6. Comparación de los resultados de los dominios entre las distintas materias..... | 567        |
| 5.2.3.7. Comparación de los resultados de los dominios de cada una de las materias.....  | 581        |
| 5.2.4. Estudio de frecuencias del tercer apartado.....                                   | 587        |
| 5.2.5. Estudio de frecuencias del cuarto apartado.....                                   | 591        |
| 5.2.6. Estudio de frecuencias del quinto apartado de la Evaluación Inicial.....          | 601        |
| 5.2.7. Estudio de frecuencias del quinto apartado de la Evaluación Final.....            | 605        |

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.2.8. Estudio de frecuencias del sexto apartado.....                | 606 |
| 5.2.9. Estudio de frecuencias del séptimo apartado.....              | 610 |
| 5.2.10. Estudio de frecuencias del octavo apartado.....              | 617 |
| 5.2.11. Estudio de frecuencias del noveno apartado.....              | 621 |
| 5.2.12. Estudio de frecuencias del décimo apartado.....              | 626 |
| 5.2.13. Estudio de frecuencias del decimoprimer apartado.....        | 633 |
| 5.2.14. Estudio de frecuencias del decimosegundo apartado.....       | 637 |
| 5.2.15. Estudio de frecuencias del decimotercer apartado.....        | 638 |
| 5.2.16. Estudio de frecuencias del decimocuarto apartado.....        | 639 |
| 5.2.17. Estudio de frecuencias del decimoquinto apartado.....        | 639 |
| 5.2.18. Estudio de frecuencias del decimosexto apartado.....         | 640 |
| 5.3. Estudio estadístico de los resultados de las encuestas.....     | 643 |
| 5.3.1. Modelo lineal general de medidas repetidas.....               | 643 |
| 5.3.2. Análisis no paramétrico.....                                  | 648 |
| 5.3.2.1. Pruebas para dos muestras relacionadas....                  | 649 |
| 5.3.2.2. Prueba de Wilcoxon.....                                     | 649 |
| 5.3.2.3. Pruebas para dos muestras independientes.....               | 650 |
| 5.3.2.4. Prueba U de Mann-Whitney.....                               | 651 |
| 5.3.2.5. Pruebas para varias muestras independientes.....            | 652 |
| 5.3.2.6. Prueba H de Kruskal-Wallis.....                             | 653 |
| 5.3.3. Estudio estadístico del primer apartado de las encuestas..... | 654 |
| 5.3.3.1. Las Matemáticas son difíciles.....                          | 655 |
| 5.3.3.2. Las Matemáticas son odiosas.....                            | 664 |
| 5.3.3.3. Las Matemáticas son imprescindibles.....                    | 674 |
| 5.3.3.4. Las Matemáticas son un “tostón”.....                        | 683 |
| 5.3.3.5. Las Matemáticas son interesantes.....                       | 692 |
| 5.3.3.6. Las Matemáticas son precisas.....                           | 700 |
| 5.3.3.7. Las Matemáticas son engorrosas.....                         | 710 |
| 5.3.3.8. Las Matemáticas son formativas.....                         | 720 |
| 5.3.3.9. Las Matemáticas no son prácticas.....                       | 728 |
| 5.3.3.10. Las Matemáticas son divertidas.....                        | 739 |
| 5.3.3.11. Me gustan las Matemáticas.....                             | 748 |

|                                                                                 |      |
|---------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5.3.3.12. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado..... | 760  |
| 5.3.4. Estudio estadístico del segundo apartado de las encuestas.....           | 775  |
| 5.3.4.1. Dominio total de las Matemáticas.....                                  | 775  |
| 5.3.4.2. Dominio aceptable de las Matemáticas.....                              | 788  |
| 5.3.4.3. Conocimientos matemáticos del Instituto..                              | 798  |
| 5.3.4.4. Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto.....           | 810  |
| 5.3.4.5. Dominio total de la Didáctica.....                                     | 820  |
| 5.3.4.6. Dominio aceptable de la Didáctica.....                                 | 831  |
| 5.3.4.7. No es necesario saber Didáctica.....                                   | 840  |
| 5.3.4.8. Dominio total de la Didáctica de la Matemática.....                    | 849  |
| 5.3.4.9. Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática.....                | 858  |
| 5.3.4.10. No es necesario saber Didáctica de la Matemática.....                 | 868  |
| 5.3.4.11. Dominio total de la Psicología.....                                   | 877  |
| 5.3.4.12. Dominio aceptable de la Psicología.....                               | 888  |
| 5.3.4.13. No se necesita la Psicología.....                                     | 899  |
| 5.3.4.14. Es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa.....        | 910  |
| 5.3.4.15. No es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa.....     | 921  |
| 5.3.4.16. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado..... | 931  |
| 5.3.5. Estudio estadístico del tercer apartado de las encuestas.....            | 953  |
| 5.3.5.1. Creatividad.....                                                       | 953  |
| 5.3.5.2. Número de magnitudes.....                                              | 963  |
| 5.3.5.3. Precisión.....                                                         | 973  |
| 5.3.5.4. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado.....  | 984  |
| 5.3.6. Estudio estadístico del cuarto apartado de las encuestas.....            | 993  |
| 5.3.6.1. El cariño.....                                                         | 993  |
| 5.3.7. Estudio estadístico del quinto apartado de las encuestas.....            | 995  |
| 5.3.7.1. Exactitud en la definición de magnitud.....                            | 995  |
| 5.3.8. Estudio estadístico del sexto apartado de las encuestas.....             | 1006 |

|                                                                                                    |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5.3.8.1. Exactitud en la definición de medida de una magnitud.....                                 | 1006 |
| 5.3.8.2. Conclusiones de todos los aspectos considerados en los apartados quinto y sexto.....      | 1016 |
| 5.3.9. Estudio estadístico del séptimo apartado de las encuestas.....                              | 1024 |
| 5.3.9.1. Número de magnitudes.....                                                                 | 1024 |
| 5.3.9.2. ¿Cómo se miden?.....                                                                      | 1035 |
| 5.3.9.3. Número de unidades de medida.....                                                         | 1045 |
| 5.3.9.4. Magnitudes no medibles.....                                                               | 1055 |
| 5.3.9.5. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado.....                     | 1064 |
| 5.3.10. Estudio estadístico del octavo apartado de las encuestas.....                              | 1073 |
| 5.3.10.1. ¿“Las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para Educación Infantil?.....         | 1073 |
| 5.3.11. Estudio estadístico del noveno apartado de las encuestas.....                              | 1074 |
| 5.3.11.1. Número de magnitudes.....                                                                | 1074 |
| 5.3.11.2. Número de unidades.....                                                                  | 1085 |
| 5.3.11.3. Exactitud en los razonamientos.....                                                      | 1094 |
| 5.3.11.4. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado.....                    | 1104 |
| 5.3.12. Estudio estadístico del décimo apartado de las encuestas.....                              | 1112 |
| 5.3.12.1. Creatividad.....                                                                         | 1113 |
| 5.3.12.2. Número de magnitudes.....                                                                | 1124 |
| 5.3.12.3. Número de unidades.....                                                                  | 1133 |
| 5.3.12.4. Precisión.....                                                                           | 1142 |
| 5.3.12.5. Adecuadas.....                                                                           | 1152 |
| 5.3.12.6. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado.....                    | 1161 |
| 5.3.13. Estudio estadístico comparativo de algunos aspectos de los apartados tercero y décimo..... | 1171 |
| 5.3.13.1. Creatividad.....                                                                         | 1171 |
| 5.3.13.2. Precisión.....                                                                           | 1189 |
| 5.3.14. Estudio estadístico del undécimo apartado de las encuestas.....                            | 1208 |
| 5.3.14.1. Utilidad.....                                                                            | 1208 |
| 5.3.14.2. Precisión.....                                                                           | 1218 |
| 5.3.14.3. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado.....                    | 1229 |

|                                                                                      |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5.3.15. Estudio estadístico del decimosegundo apartado de las encuestas.....         | 1237 |
| 5.3.15.1. ¿Crees que necesitas saber mejor el tema "las Magnitudes y su Medida?..... | 1237 |

## V. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

|                                                                        |             |
|------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Discusión.....</b>                                                  | <b>1241</b> |
| <b>Conclusiones, propuestas y futuras líneas de investigación.....</b> | <b>1251</b> |
| 1. Conclusiones.....                                                   | 1251        |
| 2. Propuestas.....                                                     | 1261        |
| 3. Futuras líneas de investigación.....                                | 1263        |
| <b>Índices de términos.....</b>                                        | <b>1267</b> |
| <b>Bibliografía.....</b>                                               | <b>1273</b> |
| <b>Otras fuentes documentales.....</b>                                 | <b>1293</b> |
| 1. Bases de datos consultados.....                                     | 1293        |
| 2. Páginas web consultadas.....                                        | 1293        |
| <b>Anexos.....</b>                                                     | <b>1297</b> |
| Anexo I: Análisis comparativo de los planes de estudio.....            | 1299        |
| Anexo II: Opiniones sobre las Matemáticas antes.....                   | 1307        |
| Anexo III: Opiniones sobre las Matemáticas después.....                | 1315        |



# Índice de figuras

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1: Pictograma estructural de síntesis que resume nuestras aportaciones a la definición de creatividad.....                | 19  |
| Figura 2: Poligrama estructural de síntesis de las diferentes técnicas estudiadas.....                                           | 66  |
| Figura 3: Diagrama cartesiano.....                                                                                               | 89  |
| Figura 4: Diagrama sagital.....                                                                                                  | 90  |
| Figura 5: Diagrama de árbol.....                                                                                                 | 91  |
| Figura 6: Producto cartesiano de tres conjuntos.....                                                                             | 94  |
| Figura 7: Número de aplicaciones entre dos conjuntos.....                                                                        | 110 |
| Figura 8: Ejemplo de aplicación.....                                                                                             | 111 |
| Figura 9: Ejemplos de aplicaciones inyectiva y no inyectiva.....                                                                 | 113 |
| Figura 10: Número de aplicaciones inyectivas.....                                                                                | 115 |
| Figura 11: Ejemplos de aplicaciones sobreyectivas.....                                                                           | 117 |
| Figura 12: Poligrama relacional de síntesis de las posibles estructuras de un conjunto con dos leyes de composición interna..... | 141 |
| Figura 13: Semirrectas.....                                                                                                      | 161 |
| Figura 14: Segmento.....                                                                                                         | 161 |
| Figura 15: Vector.....                                                                                                           | 161 |
| Figura 16: Suma de segmentos 1.....                                                                                              | 174 |
| Figura 17: Suma de segmentos .....                                                                                               | 174 |
| Figura 18: Región angular.....                                                                                                   | 177 |
| Figura 19: Vectores.....                                                                                                         | 182 |
| Figura 20: Suma de vectores.....                                                                                                 | 183 |
| Figura 21: Producto de un número entero por un vector.....                                                                       | 184 |
| Figura 22: Diagrama de Hasse.....                                                                                                | 200 |
| Figura 23: Cono positivo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ .....                                                            | 210 |
| Figura 24: Relación de orden en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .....                                           | 212 |
| Figura 25: Poligrama relacional de síntesis de los distintos tipos de magnitudes.....                                            | 250 |
| Figura 26: Cantidad conmensurable.....                                                                                           | 273 |
| Figura 27: Unidades de medida de superficie.....                                                                                 | 287 |
| Figura 28: Ejemplo de conservación de la longitud.....                                                                           | 328 |
| Figura 29: Proceso seguido en el cálculo de áreas.....                                                                           | 338 |
| Figura 30: Medida de la superficie de un cuadrado.....                                                                           | 339 |
| Figura 31: Medida de la superficie de un rectángulo.....                                                                         | 340 |
| Figura 32: Medida de la superficie de un triángulo equilátero.....                                                               | 340 |
| Figura 33: Ejemplo de figuras con la misma área.....                                                                             | 341 |
| Figura 34: El tangram.....                                                                                                       | 341 |

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 35: Ejemplo de cálculo de área 1 .....                                                               | 342 |
| Figura 36: Ejemplo de cálculo de área 2.....                                                                | 342 |
| Figura 37: Ejemplo de cálculo de área 3.....                                                                | 342 |
| Figura 38: Ejemplo de cálculo de área 4.....                                                                | 342 |
| Figura 39: Ejemplo de cálculo de área 5.....                                                                | 343 |
| Figura 40: Ejemplo de cálculo de área 6.....                                                                | 343 |
| Figura 41: Ejemplo de un nuevo reloj.....                                                                   | 353 |
| Figura 42: Poligrama relacional de síntesis de las magnitudes del último estadio de Educación Infantil..... | 358 |
| Figura 43: Balanza.....                                                                                     | 363 |
| Figura 44: Objeto que puede servir para que el niño mida sus dimensiones.....                               | 366 |
| Figura 45: Columpio.....                                                                                    | 373 |
| Figura 46: Poligrama relacional de síntesis de los animales conocidos.....                                  | 392 |
| Figura 47: Pictograma estructural de síntesis de los animales conocidos.....                                | 393 |
| Figura 48: Circept sobre el dado.....                                                                       | 394 |
| Figura 49: Proceso seguido con la encuesta.....                                                             | 503 |
| Figura 50: Año de realización.....                                                                          | 543 |
| Figura 51: Evaluación.....                                                                                  | 543 |
| Figura 52: Especialidad.....                                                                                | 544 |
| Figura 53: Género de la muestra.....                                                                        | 545 |
| Figura 54: Bachiller cursado.....                                                                           | 545 |
| Figura 55: Curso en que está matriculado actualmente.....                                                   | 546 |
| Figura 56: Edad.....                                                                                        | 547 |
| Figura 57: Las Matemáticas son difíciles.....                                                               | 548 |
| Figura 58: Las Matemáticas son odiosas.....                                                                 | 549 |
| Figura 59: Las Matemáticas son imprescindibles.....                                                         | 549 |
| Figura 60: Las Matemáticas son “un tostón”.....                                                             | 550 |
| Figura 61: Las Matemáticas son interesantes.....                                                            | 550 |
| Figura 62: Las Matemáticas son precisas.....                                                                | 551 |
| Figura 63: Las Matemáticas son engorrosas.....                                                              | 551 |
| Figura 64: Las Matemáticas son formativas.....                                                              | 552 |
| Figura 65: Las Matemáticas no son prácticas.....                                                            | 552 |
| Figura 66: Las Matemáticas son divertidas.....                                                              | 553 |
| Figura 67: Me gustan las Matemáticas.....                                                                   | 553 |
| Figura 68: Comparación de las opiniones sobre las Matemáticas antes.....                                    | 555 |
| Figura 69: Comparación de las opiniones sobre las Matemáticas después.....                                  | 556 |
| Figura 70: Dominio total de las Matemáticas.....                                                            | 557 |
| Figura 71: Dominio aceptable de las Matemáticas.....                                                        | 558 |
| Figura 72: Los conocimientos del matemáticos del Instituto son suficientes.....                             | 558 |
| Figura 73: Necesidad de conocer las Matemáticas del libro de texto.....                                     | 559 |
| Figura 74: Dominio total de la Didáctica de la Matemática.....                                              | 560 |

|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 75: Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática.....                                         | 560 |
| Figura 76: No es necesaria la Didáctica de la Matemática.....                                              | 561 |
| Figura 77: Dominio total de la Didáctica.....                                                              | 562 |
| Figura 78: Dominio aceptable de la Didáctica.....                                                          | 562 |
| Figura 79: No es necesaria la Didáctica.....                                                               | 563 |
| Figura 80: Necesidad de un dominio total de la Psicología.....                                             | 563 |
| Figura 81: Dominio aceptable de la Psicología.....                                                         | 564 |
| Figura 82: No se necesita estudiar Psicología.....                                                         | 565 |
| Figura 83: Es necesario de conocer las técnicas de Metodología Creativa.....                               | 566 |
| Figura 84: No es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa.....                               | 566 |
| Figura 85: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica antes.....                            | 567 |
| Figura 86: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica después.....                          | 568 |
| Figura 87: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas con Didáctica, antes.....                       | 568 |
| Figura 88: Comparación del dominio de aceptable de Matemáticas con Didáctica, después.....                 | 569 |
| Figura 89: Comparación de no estudiar Matemáticas con no estudiar Didáctica, antes.....                    | 569 |
| Figura 90: Comparación de no estudiar Matemáticas con no estudiar Didáctica, después.....                  | 570 |
| Figura 91: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica de la Matemática antes.....           | 570 |
| Figura 92: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica de la Matemática después.....         | 571 |
| Figura 93: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas con Didáctica de la Matemática antes.....       | 571 |
| Figura 94: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas con Didáctica de la Matemática después.....     | 572 |
| Figura 95: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Didáctica de la Matemática antes.....   | 572 |
| Figura 96: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Didáctica de la Matemática después..... | 573 |
| Figura 97: Comparación de dominio total de Matemáticas con Psicología antes.....                           | 573 |
| Figura 98: Comparación de dominio total de Matemáticas con Psicología después.....                         | 574 |
| Figura 99: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas y de Psicología antes.....                      | 574 |
| Figura 100: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas y de Psicología después.....                   | 575 |

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 101: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Psicología antes.....    | 575 |
| Figura 102: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Psicología después.....  | 576 |
| Figura 103: Comparación del dominio total de las distintas materias antes.....               | 576 |
| Figura 104: Comparación del dominio total de las distintas materias después.....             | 577 |
| Figura 105: Comparación de dominio aceptable de las distintas materias antes.....            | 578 |
| Figura 106: Comparación de dominio aceptable de las distintas materias después.....          | 579 |
| Figura 107: Comparación de no es necesario el estudio de las distintas materias antes.....   | 580 |
| Figura 108: Comparación de no es necesario el estudio de las distintas materias después..... | 581 |
| Figura 109: Dominio de las Matemáticas.....                                                  | 582 |
| Figura 110: Dominio de la Didáctica de la Matemática.....                                    | 583 |
| Figura 111: Dominio de la Didáctica.....                                                     | 584 |
| Figura 112: Dominio de la Psicología.....                                                    | 585 |
| Figura 113: Dominio de las técnicas de Metodología Creativa.....                             | 586 |
| Figura 114: Tercer apartado de la encuesta.....                                              | 587 |
| Figura 115: Creatividad en el tercer apartado.....                                           | 588 |
| Figura 116: Número de magnitudes en el tercer apartado.....                                  | 589 |
| Figura 117: Precisión en el tercer apartado.....                                             | 590 |
| Figura 118: Cuarto apartado de la encuesta.....                                              | 591 |
| Figura 119: El cariño.....                                                                   | 592 |
| Figura 120: Si se pudiera medir el cariño, ¿sería magnitud?.....                             | 592 |
| Figura 121: La temperatura.....                                                              | 593 |
| Figura 122: Si se pudiera medir la temperatura, ¿sería magnitud?.....                        | 594 |
| Figura 123: La alegría.....                                                                  | 594 |
| Figura 124: Si se pudiera medir la alegría, ¿sería magnitud?.....                            | 595 |
| Figura 125: El dolor.....                                                                    | 595 |
| Figura 126: Si se pudiera medir el dolor, ¿sería magnitud?.....                              | 596 |
| Figura 127: La fama.....                                                                     | 596 |
| Figura 128: Si se pudiera medir la fama, ¿sería magnitud?.....                               | 597 |
| Figura 129: El interés.....                                                                  | 597 |
| Figura 130: Si se pudiera medir el interés, ¿sería magnitud?.....                            | 598 |
| Figura 131: Ayuda para responder al 4º apartado.....                                         | 598 |
| Figura 132: Material utilizado en la 4º apartado.....                                        | 599 |
| Figura 133: Personas a las que consulto para el apartado 4º.....                             | 599 |
| Figura 134: Cambios efectuados en la respuesta al 4º apartado.....                           | 600 |
| Figura 135: Añadidos en la respuesta al 4ª apartado.....                                     | 600 |
| Figura 136: Grupos para responder al 4º apartado.....                                        | 600 |
| Figura 137: Quinto apartado de la Evaluación Inicial.....                                    | 601 |
| Figura 138: Exactitud en la definición de magnitud.....                                      | 602 |

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 139: Ayuda en la definición de magnitud.....                                          | 602 |
| Figura 140: Material en la definición de magnitud.....                                       | 603 |
| Figura 141: Persona en la definición de magnitud.....                                        | 603 |
| Figura 142: Cambios en la definición de magnitud.....                                        | 604 |
| Figura 143: Añadidos a la definición de magnitud.....                                        | 604 |
| Figura 144: Grupos para la definición de magnitud.....                                       | 604 |
| Figura 145: Quinto apartado de Evaluación Final.....                                         | 605 |
| Figura 146: Variación para proponer actividades en la E. Final.....                          | 606 |
| Figura 147: Sexto apartadote la E. Inicial y séptimo de la Final.....                        | 607 |
| Figura 148: Exactitud en la definición de medida de una magnitud.....                        | 607 |
| Figura 149: Ayuda en la definición de medida de una magnitud.....                            | 608 |
| Figura 150: Materia en la definición de media de una magnitud.....                           | 608 |
| Figura 151: Persona en la definición de medida de una magnitud.....                          | 609 |
| Figura 152: Cambios en la definición de medida de una magnitud.....                          | 609 |
| Figura 153: Añadidos a la definición de medida de una magnitud.....                          | 610 |
| Figura 154: Grupos para la definición de medida de una magnitud.....                         | 610 |
| Figura 155: Séptimo apartado de la E. Inicial y octavo de la Final.....                      | 611 |
| Figura 156: Número de magnitudes.....                                                        | 611 |
| Figura 157: Número de magnitudes.....                                                        | 612 |
| Figura 158: ¿Cómo se mide?.....                                                              | 612 |
| Figura 159: ¿Con qué unidades se mide?.....                                                  | 613 |
| Figura 160: ¿Con qué unidades se mide?.....                                                  | 613 |
| Figura 161: Número de magnitudes no medibles.....                                            | 614 |
| Figura 162: Ayuda al poner ejemplos de magnitudes.....                                       | 614 |
| Figura 163: Material utilizado para poner ejemplos de magnitudes.....                        | 615 |
| Figura 164: Persona consultada para poner ejemplos de magnitudes....                         | 615 |
| Figura 165: Cambios realizados al poner ejemplos de magnitudes.....                          | 616 |
| Figura 166: Añadidos a los ejemplos encontrados de magnitudes.....                           | 616 |
| Figura 167: Grupos el los ejemplos de magnitudes medibles y no medibles.....                 | 616 |
| Figura 168: Octavo apartado de la E. Inicial y noveno de la Final.....                       | 617 |
| Figura 169: ¿"Las Magnitudes y su Medida" es un tema apropiado para Educación Infantil?..... | 618 |
| Figura 170: Ayuda para el octavo apartado.....                                               | 618 |
| Figura 171: Material para el octavo apartado.....                                            | 619 |
| Figura 172: Persona consultada en el octavo apartado.....                                    | 619 |
| Figura 173: Cambios hechos para responder al octavo apartado.....                            | 620 |
| Figura 174: Añadidos en la respuesta al octavo apartado.....                                 | 620 |
| Figura 175: Grupos para la respuesta a la octava pregunta.....                               | 620 |
| Figura 176: Noveno apartado de la E. Inicial y décimo de la Final.....                       | 621 |
| Figura 177: Número de magnitudes en el apartado noveno.....                                  | 622 |
| Figura 178: Número de magnitudes en la pregunta novena.....                                  | 622 |
| Figura 179: Número de unidades en el noveno apartado.....                                    | 623 |
| Figura 180: Número de unidades en el noveno apartado.....                                    | 623 |
| Figura 181: Exactitud en el noveno apartado.....                                             | 624 |
| Figura 182: Ayuda para responder al noveno apartado.....                                     | 624 |
| Figura 183: Material en el noveno apartado.....                                              | 625 |

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 184: Persona en el noveno.....                                                                  | 625 |
| Figura 185: Cambios en el noveno apartado.....                                                         | 625 |
| Figura 186: Añadidos en el noveno apartado.....                                                        | 626 |
| Figura 187: Grupos en el noveno apartado.....                                                          | 626 |
| Figura 188: Décimo apartado de la E. Inicial y decimoprimer de la Final.....                           | 627 |
| Figura 189: Creatividad en el décimo apartado.....                                                     | 627 |
| Figura 190: Número de magnitudes en el décimo apartado.....                                            | 628 |
| Figura 191: Número de unidades de medida en el décimo apartado.....                                    | 628 |
| Figura 192: Precisión a la hora de proponer actividades.....                                           | 629 |
| Figura 193: Adecuación de las actividades propuestas.....                                              | 630 |
| Figura 194: Ayuda en el décimo.....                                                                    | 630 |
| Figura 195: Material en la décima.....                                                                 | 631 |
| Figura 196: Persona en la décima.....                                                                  | 631 |
| Figura 197: Cambios en la décima.....                                                                  | 632 |
| Figura 198: Añadidos en la décima.....                                                                 | 632 |
| Figura 199: Grupos en la décima.....                                                                   | 633 |
| Figura 200: Apartado decimoprimer de la E. Inicial y decimosegundo de la Final.....                    | 633 |
| Figura 201: Utilidad de las actividades planteadas.....                                                | 634 |
| Figura 202: Precisión en la respuesta a la undécima pregunta.....                                      | 634 |
| Figura 203: Ayuda a la pregunta undécima.....                                                          | 635 |
| Figura 204: Material en la undécima pregunta.....                                                      | 635 |
| Figura 205: Persona en la undécima pregunta.....                                                       | 636 |
| Figura 206: Cambios en el undécimo apartado.....                                                       | 636 |
| Figura 207: Añadidos en el undécimo apartado.....                                                      | 636 |
| Figura 208: Grupos en la undécima pregunta.....                                                        | 637 |
| Figura 209: Decimosegundo apartado de la E. Inicial y decimotercero de la Final.....                   | 637 |
| Figura 210: Apartado decimotercero de E. Inicial y decimocuarto de E. Final.....                       | 638 |
| Figura 211: Apartado decimocuarto de Evaluación Inicial.....                                           | 639 |
| Figura 212: Apartado decimoquinto de Evaluación final.....                                             | 640 |
| Figura 213: Apartado decimosexto de Evaluación final.....                                              | 641 |
| Figura 214: ¿Qué consideras necesario para trabajar con niños de Educación Infantil?.....              | 642 |
| Figura 215: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después.....                           | 656 |
| Figura 216: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “género”.....             | 657 |
| Figura 217: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “año de realización”..... | 658 |
| Figura 218: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “curso”.....              | 659 |

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 219: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “edad”.....                         | 660 |
| Figura 220: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “edad”.....         | 661 |
| Figura 221: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “especialidad”.....                 | 662 |
| Figura 222: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “especialidad”..... | 662 |
| Figura 223: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “bachillerato”.....                 | 663 |
| Figura 224: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después.....                                       | 665 |
| Figura 225: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “género”.....                         | 666 |
| Figura 226: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “año de realización”.....             | 667 |
| Figura 227: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “curso”.....                          | 668 |
| Figura 228: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “curso”.....          | 669 |
| Figura 229: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “edad”.....                           | 670 |
| Figura 230: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “edad”.....           | 670 |
| Figura 231: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “especialidad”.....                   | 671 |
| Figura 232: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “especialidad”.....   | 672 |
| Figura 233: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “bachillerato”.....                   | 673 |
| Figura 234: Estimación de las “Matemáticas son imprescindibles” antes/después.....                               | 675 |
| Figura 235: Estimación de las “Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “género”.....                 | 676 |
| Figura 236: Estimación de las “Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “año de realización”.....     | 677 |
| Figura 237: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “curso”.....                  | 678 |
| Figura 238: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “curso”.....  | 678 |
| Figura 239: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “edad”.....                   | 679 |
| Figura 240: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “edad”.....   | 680 |



|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 241: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “especialidad” .....                 | 681 |
| Figura 242: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “especialidad” ..... | 681 |
| Figura 243: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “bachillerato” .....                 | 682 |
| Figura 244: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después.....                                            | 684 |
| Figura 245: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “género” .....                             | 685 |
| Figura 246: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “año de realización” .....                 | 686 |
| Figura 247: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “curso” .....                              | 687 |
| Figura 248: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “edad” .....                               | 688 |
| Figura 249: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “edad” .....               | 688 |
| Figura 250: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “especialidad” .....                       | 689 |
| Figura 251: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “especialidad” .....       | 690 |
| Figura 252: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “bachillerato” .....                       | 691 |
| Figura 253: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “bachillerato” .....       | 691 |
| Figura 254: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después.....                                         | 693 |
| Figura 255: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “género” .....                          | 694 |
| Figura 256: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “año de realización” .....              | 695 |
| Figura 257: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “curso” .....                           | 696 |
| Figura 258: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “edad” .....                            | 797 |
| Figura 259: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “edad” .....            | 797 |
| Figura 260: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “especialidad” .....                    | 798 |
| Figura 261: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “bachillerato” .....                    | 799 |
| Figura 262: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después.....                                             | 701 |



|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 263: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “género”.....                  | 702 |
| Figura 264: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “año de realización”.....      | 703 |
| Figura 265: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “curso”.....                   | 704 |
| Figura 266: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “edad”.....                    | 706 |
| Figura 267: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “edad”.....    | 707 |
| Figura 268: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “especialidad”.....            | 708 |
| Figura 269: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “bachillerato”.....            | 709 |
| Figura 270: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después.....                              | 711 |
| Figura 271: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “género”.....                | 712 |
| Figura 272: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “año de realización”.....    | 714 |
| Figura 273: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “curso”.....                 | 715 |
| Figura 274: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “curso”..... | 715 |
| Figura 275: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “edad”.....                  | 716 |
| Figura 276: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “edad”.....  | 717 |
| Figura 277: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “especialidad”.....          | 718 |
| Figura 278: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “bachillerato”.....          | 719 |
| Figura 279: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después.....                              | 720 |
| Figura 280: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “género”.....                | 721 |
| Figura 281: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “año de realización”.....    | 722 |
| Figura 282: Estimación de las “Matemáticas son formativas” antes/después, por “curso”.....                 | 723 |
| Figura 283: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “curso”..... | 724 |
| Figura 284: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “edad”.....                  | 725 |

|                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 285: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “edad” .....                 | 725 |
| Figura 286: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “especialidad” .....                         | 726 |
| Figura 287: Estimación de las “Matemáticas son formativas” antes/después, por “bachillerato” .....                         | 727 |
| Figura 288: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “bachillerato” .....         | 728 |
| Figura 289: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después .....                                           | 729 |
| Figura 290: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “género” .....                             | 730 |
| Figura 291: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “año de realización” .....                 | 731 |
| Figura 292: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “año de realización” ..... | 732 |
| Figura 293: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “curso” .....                              | 734 |
| Figura 294: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “edad” .....                               | 735 |
| Figura 295: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “edad” .....               | 735 |
| Figura 296: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “especialidad” .....                       | 736 |
| Figura 297: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “especialidad” .....       | 737 |
| Figura 298: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “bachillerato” .....                       | 738 |
| Figura 299: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “bachillerato” .....       | 738 |
| Figura 300: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después .....                                             | 740 |
| Figura 301: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “género” .....                               | 741 |
| Figura 302: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “año de realización” .....                   | 742 |
| Figura 303: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “curso” .....                                | 743 |
| Figura 304: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “edad” .....                                 | 744 |
| Figura 305: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “edad” .....                 | 744 |
| Figura 306: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “especialidad” .....                         | 745 |

|                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 307: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “especialidad”.....         | 746 |
| Figura 308: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “bachillerato”.....                         | 747 |
| Figura 309: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “bachillerato”.....         | 747 |
| Figura 310: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después.....                                                  | 749 |
| Figura 311: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “género”.....                                    | 750 |
| Figura 312: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”.....                        | 751 |
| Figura 313: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “curso”.....                                     | 752 |
| Figura 314: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “curso”.....                                   | 753 |
| Figura 315: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “edad”.....                                      | 754 |
| Figura 316: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “edad”.....                                    | 754 |
| Figura 317: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “especialidad”.....                              | 755 |
| Figura 318: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “especialidad”.....                            | 756 |
| Figura 319: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato”.....                              | 758 |
| Figura 320: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “bachillerato”.....                            | 759 |
| Figura 321: Estimación del “dominio total de las Matemáticas” antes/después.....                                          | 776 |
| Figura 322: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “género”.....                             | 777 |
| Figura 323: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”.....                 | 778 |
| Figura 324: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”..... | 779 |
| Figura 325: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “curso”.....                              | 780 |
| Figura 326: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “curso”.....              | 781 |
| Figura 327: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “edad”.....                               | 783 |
| Figura 328: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “edad”.....               | 784 |

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 329: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad” .....                                                  | 785 |
| Figura 330: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad” .....                                  | 785 |
| Figura 331: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato” .....                                                  | 786 |
| Figura 332: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato” .....                                  | 787 |
| Figura 333: Estimación del “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después .....                                                                 | 789 |
| Figura 334: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “género” .....                                                    | 790 |
| Figura 335: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización” .....                                        | 791 |
| Figura 336: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización” .....                        | 791 |
| Figura 337: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “curso” .....                                                     | 792 |
| Figura 338: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “curso” .....                                     | 793 |
| Figura 339: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “edad” .....                                                      | 794 |
| Figura 340: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “edad” .....                                      | 794 |
| Figura 341: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad” .....                                              | 795 |
| Figura 342: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad” .....                              | 796 |
| Figura 343: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato” .....                                              | 797 |
| Figura 344: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato” .....                              | 797 |
| Figura 345: Estimación de “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después .....                                           | 799 |
| Figura 346: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “género” .....                         | 800 |
| Figura 347: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “año de realización” .....             | 801 |
| Figura 348: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “año de realización” ..... | 802 |
| Figura 349: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “curso” .....                          | 803 |
| Figura 350: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “edad” .....                           | 804 |

|                                                                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 351: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “edad” .....             | 804 |
| Figura 352: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “especialidad” .....                 | 806 |
| Figura 353: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “especialidad” .....     | 807 |
| Figura 354: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficiente” antes/después, por “bachillerato” .....                  | 808 |
| Figura 355: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “bachillerato” .....     | 809 |
| Figura 356: Estimación de “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después .....                                       | 811 |
| Figura 357: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “género” .....                     | 812 |
| Figura 358: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “año de realización” .....         | 813 |
| Figura 359: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “curso” .....                      | 814 |
| Figura 360: Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “curso” .....          | 814 |
| Figura 361: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “edad” .....                       | 815 |
| Figura 362: Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “edad” .....           | 816 |
| Figura 363: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “especialidad” .....               | 817 |
| Figura 364: Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “especialidad” .....   | 817 |
| Figura 365: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “bachillerato” .....               | 818 |
| Figura 366: : Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “bachillerato” ..... | 819 |
| Figura 367: Estimación del “dominio total de la Didáctica” antes/después .....                                                                      | 821 |
| Figura 368: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “género” .....                                                         | 822 |
| Figura 369: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “año de realización” .....                                             | 823 |
| Figura 370: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “año de realización” .....                             | 823 |

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 371: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “curso”.....                        | 824 |
| Figura 372: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “curso”.....        | 825 |
| Figura 373: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “edad”.....                         | 826 |
| Figura 374: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “edad”.....         | 826 |
| Figura 375: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “especialidad”.....                 | 828 |
| Figura 376: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “especialidad”..... | 828 |
| Figura 377: Estimación de dominio total de la Didáctica antes/después, por “bachillerato”.....                   | 829 |
| Figura 378: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “bachillerato”..... | 830 |
| Figura 379: Estimación del “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después.....                                | 832 |
| Figura 380: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “género”.....                   | 833 |
| Figura 381: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “año de realización”.....       | 834 |
| Figura 382: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “curso”.....                    | 835 |
| Figura 383: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “edad”.....                     | 836 |
| Figura 384: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “edad”.....     | 836 |
| Figura 385: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “especialidad”.....             | 838 |
| Figura 386: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “bachillerato”.....             | 839 |
| Figura 387: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después.....                                   | 841 |
| Figura 388: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “género”.....                     | 842 |
| Figura 389: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “género”.....     | 842 |
| Figura 390: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “año de realización”.....         | 843 |
| Figura 391: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “curso”.....                      | 844 |
| Figura 392: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “edad”.....                       | 845 |



|                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 393: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “edad”.....                                  | 846 |
| Figura 394: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “especialidad”.....                                          | 847 |
| Figura 395: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “especialidad”.....                          | 847 |
| Figura 396: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “bachillerato”.....                                          | 848 |
| Figura 397: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después.....                                     | 850 |
| Figura 398: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “género”.....                       | 851 |
| Figura 399: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “año de realización”.....           | 852 |
| Figura 400: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.....                        | 853 |
| Figura 401: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.....                         | 854 |
| Figura 402: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.....         | 854 |
| Figura 403: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.....                 | 855 |
| Figura 404: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”..... | 856 |
| Figura 405: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de Matemática” antes/después, por “bachillerato”.....                    | 857 |
| Figura 406: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después.....                             | 859 |
| Figura 407: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “género”.....               | 860 |
| Figura 408: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “año de realización”.....   | 861 |
| Figura 409: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.....                | 762 |
| Figura 410: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”..   | 862 |
| Figura 411: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.....                 | 863 |
| Figura 412: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”...   | 864 |
| Figura 413: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.....         | 865 |
| Figura 414: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “bachillerato”.....         | 866 |

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 415: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “bachillerato”..... | 867 |
| Figura 416: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después.....                                                    | 869 |
| Figura 417: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “género”.....                                      | 870 |
| Figura 418: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “año de realización”.....                          | 871 |
| Figura 419: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.....                                       | 872 |
| Figura 420: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.....                       | 872 |
| Figura 421: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.....                                        | 873 |
| Figura 422: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.....                        | 874 |
| Figura 423: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.....                                | 875 |
| Figura 424: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.....                | 875 |
| Figura 425: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “bachillerato”.....                                | 876 |
| Figura 426: Estimación del “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después.....                                                           | 878 |
| Figura 427: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “género”.....                                              | 879 |
| Figura 428: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “año de realización”.....                                  | 880 |
| Figura 429: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “año de realización”.....                  | 881 |
| Figura 430: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “curso”.....                                               | 882 |
| Figura 431: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “curso”.....                               | 882 |
| Figura 432: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “edad”.....                                                | 883 |
| Figura 433: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “edad”.....                                | 884 |
| Figura 434: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “especialidad”.....                                        | 885 |
| Figura 435: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por especialidad.....                          | 886 |



|                                                                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 436: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.....                                  | 887 |
| Figura 437: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.....                  | 887 |
| Figura 438: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después.....                                           | 889 |
| Figura 439: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “género”.....                             | 890 |
| Figura 440: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “año de realización”.....                 | 891 |
| Figura 441: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “año de realización”..... | 892 |
| Figura 442: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “curso”.....                              | 893 |
| Figura 443: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “curso”.....              | 893 |
| Figura 444: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “edad”.....                               | 894 |
| Figura 445: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “edad”.....               | 895 |
| Figura 446: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por especialidad.....                         | 896 |
| Figura 447: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por especialidad.....         | 897 |
| Figura 448: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.....                       | 898 |
| Figura 449: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.....       | 898 |
| Figura 450: Estimación de “no es necesario conocimiento psicológico” antes/después.....                                                      | 900 |
| Figura 451: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “género”.....                                 | 901 |
| Figura 452: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “año de realización”.....                     | 902 |
| Figura 453: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “año de realización”.....     | 903 |
| Figura 454: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “curso”.....                                  | 904 |
| Figura 455: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “curso”.....                  | 904 |
| Figura 456: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “edad”.....                                   | 905 |
| Figura 457: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “edad”.....                   | 906 |

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 458: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por especialidad.....                                      | 907 |
| Figura 459: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por especialidad.....                      | 907 |
| Figura 460: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “bachillerato”.....                                    | 908 |
| Figura 461: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “bachillerato”.....                    | 909 |
| Figura 462: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después.....                                              | 911 |
| Figura 463: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “género”.....                                | 912 |
| Figura 464: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”.....                    | 913 |
| Figura 465: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”.....    | 913 |
| Figura 466: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.....                                 | 914 |
| Figura 467: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.....                 | 915 |
| Figura 468: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.....                                  | 916 |
| Figura 469: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.....                  | 916 |
| Figura 470: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.....                            | 918 |
| Figura 471: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.....            | 918 |
| Figura 472: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”.....                          | 919 |
| Figura 473: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”....           | 920 |
| Figura 474: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después.....                                           | 922 |
| Figura 475: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “género”.....                             | 923 |
| Figura 476: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”.....                 | 924 |
| Figura 477: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”..... | 924 |
| Figura 478: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.....                              | 925 |

|                                                                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 479: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.....        | 926 |
| Figura 480: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.....                         | 927 |
| Figura 481: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.....         | 927 |
| Figura 482: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.....                   | 928 |
| Figura 483: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.       | 929 |
| Figura 484: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”.....                 | 930 |
| Figura 485: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”..... | 930 |
| Figura 486: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después.....                                                             | 954 |
| Figura 487: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “género”.....                                               | 955 |
| Figura 488: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.....                                   | 956 |
| Figura 489: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.....                                                | 957 |
| Figura 490: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.....                                   | 958 |
| Figura 491: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.....                                                 | 959 |
| Figura 492: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.....                                    | 959 |
| Figura 493: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.....                                         | 960 |
| Figura 494: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.....                            | 961 |
| Figura 495: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                                         | 962 |
| Figura 496: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                            | 962 |
| Figura 497: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después.....                                                      | 964 |
| Figura 498: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “género”.....                                        | 965 |
| Figura 499: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.....                            | 966 |
| Figura 500: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.....             | 966 |

|                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 501: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “curso” .....                       | 967 |
| Figura 502: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “curso” .....        | 968 |
| Figura 503: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “edad” .....                        | 969 |
| Figura 504: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “edad” .....         | 969 |
| Figura 505: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad” .....                | 970 |
| Figura 506: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad” ..... | 971 |
| Figura 507: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato” .....                | 972 |
| Figura 508: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato” ..... | 972 |
| Figura 509: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después .....                                             | 974 |
| Figura 510: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “género” .....                               | 975 |
| Figura 511: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización” .....                   | 976 |
| Figura 512: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización” .....      | 977 |
| Figura 513: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “curso” .....                                | 978 |
| Figura 514: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “curso” .....                   | 978 |
| Figura 515: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “edad” .....                                 | 979 |
| Figura 516: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “edad” .....                    | 980 |
| Figura 517: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad” .....                         | 981 |
| Figura 518: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad” .....            | 982 |
| Figura 519: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato” .....                         | 983 |
| Figura 520: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato” .....            | 983 |
| Figura 521: Estimación del “cariño” antes/después .....                                                                        | 994 |
| Figura 522: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después .....                                      | 996 |
| Figura 523: Estimación de la exactitud en la definición de magnitud antes/después, por “género” .....                          | 997 |

|                                                                                                                                       |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 524: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “año de realización” .....                   | 988  |
| Figura 525: Ampliación de la comparación: exactitud en la definición de magnitud antes/después, por “año de realización” .....        | 999  |
| Figura 526: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “curso” .....                                | 1000 |
| Figura 527: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “curso” .....                   | 1000 |
| Figura 528: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “edad” .....                                 | 1001 |
| Figura 529: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “edad” .....                    | 1002 |
| Figura 530: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “especialidad” .....                         | 1003 |
| Figura 531: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “bachillerato” .....                         | 1004 |
| Figura 532: Ampliación de la comparación: exactitud en la definición de magnitud antes/después, por “bachillerato” .....              | 1005 |
| Figura 533: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después.....                                | 1007 |
| Figura 534: Estimación de la exactitud en la definición de medida de una magnitud antes/después, por “género” .....                   | 1008 |
| Figura 535: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “año de realización” .....     | 1009 |
| Figura 536: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “curso” .....                  | 1010 |
| Figura 537: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “curso” .....                   | 1011 |
| Figura 538: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “edad” .....                   | 1012 |
| Figura 539: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “edad” .....                    | 1013 |
| Figura 540: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “especialidad” .....           | 1014 |
| Figura 541: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “bachillerato” .....           | 1015 |
| Figura 542: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después.....                                            | 1025 |
| Figura 543: Estimación del “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “género” .....                            | 1027 |
| Figura 544: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “año de realización” .....                 | 1028 |
| Figura 545: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “año de realización” ..... | 1028 |
| Figura 546: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “curso” .....                              | 1029 |

|                                                                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 547: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “curso”.....             | 1030 |
| Figura 548: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “edad”.....                              | 1031 |
| Figura 549: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “edad”.....              | 1031 |
| Figura 550: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “especialidad”.....                      | 1032 |
| Figura 551: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “especialidad”.....      | 1033 |
| Figura 552: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                      | 1034 |
| Figura 553: Estimación de “cómo se miden” antes/después.....                                                                        | 1036 |
| Figura 554: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “género”.....                                                        | 1037 |
| Figura 555: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “año de realización”.....                                            | 1038 |
| Figura 556: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “año de realización”.....                            | 1038 |
| Figura 557: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “curso”.....                                                         | 1039 |
| Figura 558: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “curso”.....                                         | 1040 |
| Figura 559: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “edad”.....                                                          | 1041 |
| Figura 560: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “edad”.....                                          | 1041 |
| Figura 561: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “especialidad”.....                                                  | 1042 |
| Figura 562: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “especialidad”.....                                  | 1043 |
| Figura 563: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “bachillerato”.....                                                  | 1044 |
| Figura 564: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “bachillerato”.....                                  | 1044 |
| Figura 565: Estimación del “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después.....                                          | 1046 |
| Figura 566: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “género”.....                             | 1047 |
| Figura 567: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “año de realización”.....                 | 1048 |
| Figura 568: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “año de realización”..... | 1048 |
| Figura 569: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “curso”.....                              | 1049 |
| Figura 570: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “curso”.....              | 1050 |



|                                                                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 571: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “edad”.....                               | 1051 |
| Figura 572: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “edad”.....               | 1051 |
| Figura 573: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “especialidad”.....                       | 1052 |
| Figura 574: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “especialidad”.....       | 1053 |
| Figura 575: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “bachillerato”.....                       | 1054 |
| Figura 576: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “bachillerato”.....       | 1054 |
| Figura 577: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después....                                                                | 1056 |
| Figura 578: Ampliación de la comparación: “magnitudes no medibles” antes/después, por “género”.....                                 | 1057 |
| Figura 579: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “año de realización”.....                                     | 1058 |
| Figura 580: Ampliación de la comparación: “magnitudes no medibles” antes/después, por “año de realización”.....                     | 1059 |
| Figura 581: : Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “curso”.....                                                | 1060 |
| Figura 582: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “edad”.....                                                   | 1061 |
| Figura 583: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “especialidad”.....                                           | 1062 |
| Figura 584: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “bachillerato”.....                                           | 1063 |
| Figura 585: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después.....                                           | 1075 |
| Figura 586: Estimación del “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “género”.....                            | 1076 |
| Figura 587: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.....                 | 1077 |
| Figura 588: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “año de realización”..... | 1077 |
| Figura 589: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “curso”.....                              | 1078 |
| Figura 590: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.....                               | 1080 |
| Figura 591: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.....               | 1081 |
| Figura 592: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.....                       | 1082 |
| Figura 593: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.....       | 1082 |

|                                                                                                                                         |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 594: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                           | 1083 |
| Figura 595: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “bachillerato”.....           | 1084 |
| Figura 596: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después.....                                                 | 1086 |
| Figura 597: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “género”.....                                   | 1087 |
| Figura 598: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.....                       | 1088 |
| Figura 599: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “curso”.....                                    | 1089 |
| Figura 600: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “curso”.....                    | 1089 |
| Figura 601: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.....                                     | 1090 |
| Figura 602: : Ampliación de la comparación: “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.....                   | 1091 |
| Figura 603: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.....                             | 1092 |
| Figura 604: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.....             | 1092 |
| Figura 605: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                             | 1093 |
| Figura 606: Estimación de “exactitud en el noveno apartado” antes/después.....                                                          | 1095 |
| Figura 607: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “género”.....                             | 1096 |
| Figura 608: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.....                 | 1097 |
| Figura 609: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “año de realización”..... | 1097 |
| Figura 610: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “curso”.....                              | 1098 |
| Figura 611: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “curso”.....              | 1099 |
| Figura 612: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “edad”.....                               | 1100 |
| Figura 613: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “edad”.....               | 1100 |
| Figura 614: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.....                       | 1101 |
| Figura 615: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.....       | 1102 |
| Figura 616: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                       | 1103 |



|                                                                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 617: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después.....                                                 | 1114 |
| Figura 618: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “género”.....                                   | 1115 |
| Figura 619: : Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.....                     | 1116 |
| Figura 620: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.....          | 1116 |
| Figura 621: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.....                                    | 1117 |
| Figura 622: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.....                       | 1118 |
| Figura 623: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.....                                     | 1119 |
| Figura 624: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.....                        | 1119 |
| Figura 625: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.....                             | 1121 |
| Figura 626: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                             | 1122 |
| Figura 627: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                | 1123 |
| Figura 628: Estimación del “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después.....                                          | 1125 |
| Figura 629: Estimación del “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “género”.....                            | 1126 |
| Figura 630: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.....                 | 1127 |
| Figura 631: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”..... | 1127 |
| Figura 632: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.....                              | 1128 |
| Figura 633: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.....                               | 1129 |
| Figura 634: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.....               | 1130 |
| Figura 635: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.....                       | 1131 |
| Figura 636: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.....       | 1131 |
| Figura 637: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                       | 1132 |
| Figura 638: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después.....                                             | 1134 |
| Figura 639: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “género”.....                               | 1135 |

|                                                                                                                                    |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 640: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización” .....                 | 1136 |
| Figura 641: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización” ..... | 1136 |
| Figura 642: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “curso” .....                              | 1137 |
| Figura 643: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “curso” .....              | 1138 |
| Figura 644: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “edad” .....                               | 1139 |
| Figura 645: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “edad” .....               | 1139 |
| Figura 646: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad” .....                       | 1140 |
| Figura 647: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato” .....                       | 1141 |
| Figura 648: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después .....                                                 | 143  |
| Figura 649: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “género” .....                                   | 1144 |
| Figura 650: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización” .....                       | 1145 |
| Figura 651: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “curso” .....                                    | 1146 |
| Figura 652: Ampliación de la comparación: “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “curso” .....                    | 1146 |
| Figura 653: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “edad” .....                                     | 1147 |
| Figura 654: Ampliación de la comparación: “precisión en el décimo apartado” antes/después, por “edad” .....                        | 1148 |
| Figura 655: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad” .....                             | 1149 |
| Figura 656: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato” .....                             | 1150 |
| Figura 657: Ampliación de la comparación: “precisión en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato” .....                | 1151 |
| Figura 658: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después .....                                                    | 1153 |
| Figura 659: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “género” .....                                      | 1164 |
| Figura 660: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización” .....                          | 1155 |
| Figura 661: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “curso” .....                                       | 1156 |
| Figura 662: Ampliación de la comparación: “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “curso” .....                       | 1157 |

|                                                                                                                     |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 663: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.....                          | 1158 |
| Figura 664: Ampliación de la comparación: “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.....          | 1158 |
| Figura 665: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.....                  | 1159 |
| Figura 666: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                  | 1160 |
| Figura 667: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes.....                                      | 1172 |
| Figura 668: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después.....                                    | 1173 |
| Figura 669: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, género.....                              | 1174 |
| Figura 670: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, género.....                            | 1175 |
| Figura 671: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, año de realización.....                  | 1176 |
| Figura 672: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, año de realización..... | 1176 |
| Figura 673: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, año de realización.....                | 1177 |
| Figura 674: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, curso.....                               | 1178 |
| Figura 675: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, curso.....              | 1179 |
| Figura 676: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, curso.....                             | 1180 |
| Figura 677: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, curso.....            | 1180 |
| Figura 678: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, edad.....                                | 1181 |
| Figura 679: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, edad.....               | 1182 |
| Figura 680: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, edad.....                              | 1183 |
| Figura 681: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, edad.....             | 1183 |
| Figura 682: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, especialidad.....                        | 1185 |
| Figura 683: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, especialidad.....       | 1185 |
| Figura 684: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, especialidad.....                      | 1186 |
| Figura 685: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, bachillerato.....                        | 1187 |

|                                                                                                                     |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 686: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, bachillerato.....                      | 1188 |
| Figura 687: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes.....                                        | 1190 |
| Figura 688: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después.....                                      | 1191 |
| Figura 689: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “género”.....                              | 1192 |
| Figura 690: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “género”.....                            | 1193 |
| Figura 691: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “año de realización”.....                  | 1195 |
| Figura 692: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “año de realización”..... | 1195 |
| Figura 693: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “año de realización”.....                | 1196 |
| Figura 694: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “curso”.....                               | 1198 |
| Figura 695: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “curso”.....                             | 1199 |
| Figura 696: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “curso”.....            | 1199 |
| Figura 697: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “edad”.....                                | 1200 |
| Figura 698: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “edad”.....               | 1201 |
| Figura 699: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “edad”.....                              | 1202 |
| Figura 700: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “edad”.....             | 1202 |
| Figura 701: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “especialidad”.....                        | 1204 |
| Figura 702: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “especialidad”.....       | 1204 |
| Figura 703: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “especialidad”.....                      | 1205 |
| Figura 704: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “bachillerato”.....                        | 1206 |
| Figura 705: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “bachillerato”.....                      | 1207 |
| Figura 706: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después.....                                       | 1209 |
| Figura 707: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “género”.....                         | 1210 |
| Figura 708: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “año de realización”.....             | 1211 |

|                                                                                                                         |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figura 709: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “año de realización”..... | 1212 |
| Figura 710: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “curso”.....---                           | 1213 |
| Figura 711: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.....                               | 1214 |
| Figura 712: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.....               | 1215 |
| Figura 713: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “especialidad”.....                       | 1216 |
| Figura 714: : Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                     | 1217 |
| Figura 715: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después.....                                          | 1219 |
| Figura 716: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “género”.....                            | 1220 |
| Figura 717: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “año de realización”.....---             | 1221 |
| Figura 718: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “año de realización”..... | 1221 |
| Figura 719: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “curso”.....                             | 1222 |
| Figura 720: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “curso”.....              | 1223 |
| Figura 721: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.....                              | 1234 |
| Figura 722: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.....               | 1224 |
| Figura 723: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “especialidad”.....                      | 1226 |
| Figura 724: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “especialidad”.....       | 1226 |
| Figura 725: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “bachillerato”.....                      | 1227 |
| Figura 726: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, “bachillerato”.....           | 1228 |

# Índice de tablas

|                                                                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 1: Tabla cartesiana de doble entrada.....                                                                                                   | 90  |
| Tabla 2: Ley de composición interna.....                                                                                                          | 123 |
| Tabla 3: Ley de composición interna.....                                                                                                          | 126 |
| Tabla 4: Ejemplo de ley de composición interna.....                                                                                               | 131 |
| Tabla 5: Ejemplo de grupo.....                                                                                                                    | 133 |
| Tabla 6: La suma en $(\mathbb{N}_5, +)$ .....                                                                                                     | 159 |
| Tabla 7: El producto en $(\mathbb{N}_5, \cdot)$ .....                                                                                             | 159 |
| Tabla 8: Ejemplo de magnitud.....                                                                                                                 | 176 |
| Tabla 9: Ejemplo de magnitud.....                                                                                                                 | 176 |
| Tabla 10: Ejemplo de magnitud.....                                                                                                                | 180 |
| Tabla 11: Magnitud no cancelativa, con una relación de orden.....                                                                                 | 203 |
| Tabla 12: Ejemplo de magnitud absoluta totalmente ordenada.....                                                                                   | 222 |
| Tabla 13: Ejemplo de magnitud absoluta ordenada.....                                                                                              | 223 |
| Tabla 14: Magnitud absoluta ordenada.....                                                                                                         | 225 |
| Tabla 15: Elementos idempotentes en una magnitud finita.....                                                                                      | 236 |
| Tabla 16: Ejemplo de magnitud escalar.....                                                                                                        | 238 |
| Tabla 17: Ejemplos de magnitudes escalares.....                                                                                                   | 240 |
| Tabla 18: Ejemplo de magnitud escalar.....                                                                                                        | 247 |
| Tabla 19: El grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$ .....                                                                                                      | 253 |
| Tabla 20: Ejemplo de grupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ .....                                                                                   | 254 |
| Tabla 21: Ejemplo de magnitud escalar no medible.....                                                                                             | 280 |
| Tabla 22: Ejemplo de tabla cartesiana de doble entrada.....                                                                                       | 376 |
| Tabla 23: Preguntas, objetivos y actividades/tareas.....                                                                                          | 508 |
| Tabla 24: “Las Matemáticas son difíciles”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                             | 664 |
| Tabla 25: “Las Matemáticas son odiosas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                               | 674 |
| Tabla 26: “Las Matemáticas son imprescindibles”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                       | 683 |
| Tabla 27: “Las Matemáticas son un tostón”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                             | 692 |
| Tabla 28: “Las Matemáticas son interesantes”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                          | 700 |
| Tabla 29: Probabilidades de error en la significación de “las Matemáticas son precisa”, antes o después, por “edad”. Pruebas no paramétricas..... | 706 |
| Tabla 30: “Las Matemáticas son precisas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                              | 710 |

|                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 31: “Las Matemáticas son engorrosas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....   | 719 |
| Tabla 32: “Las Matemáticas son formativas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....   | 728 |
| Tabla 33: “Las Matemáticas no son prácticas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas..... | 738 |
| Tabla 34: “Las Matemáticas son divertidas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....   | 748 |
| Tabla 35: “Me gustan las Matemáticas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....        | 759 |
| Tabla 36: Variación experimentada por las variables intra-sujeto, en el primer apartado.....                             | 760 |
| Tabla 37: Variación experimentada por la variable “género”, en el primer apartado.....                                   | 761 |
| Tabla 38: Máximos de la variable “género”, en el primer apartado, antes/después.....                                     | 762 |
| Tabla 39: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el primer apartado.....                       | 763 |
| Tabla 40: Máximos de la variable “año de realización”, en el primer apartado, antes/después.....                         | 764 |
| Tabla 41: Mínimos de la variable “año de realización”, en el primer apartado, antes/después.....                         | 765 |
| Tabla 42: Variación experimentada por la variable “curso”, en el primer apartado.....                                    | 766 |
| Tabla 43: Máximos de la variable “curso”, en el primer apartado, antes/después.....                                      | 767 |
| Tabla 44: Mínimos de la variable “curso”, en el primer apartado antes/después.....                                       | 767 |
| Tabla 45: Variación experimentada por la variable “edad”, en el primer apartado.....                                     | 768 |
| Tabla 46: Máximos de la variable “edad”, en el primer apartado, antes/después.....                                       | 769 |
| Tabla 47: Mínimos de la variable “edad”, en el primer apartado, antes/después.....                                       | 770 |
| Tabla 48: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el primer apartado.....                             | 771 |
| Tabla 49: Máximos de la variable “especialidad”, en el primer apartado, antes/después.....                               | 772 |
| Tabla 50: Mínimos de la variable “especialidad”, en el primer apartado, antes/después.....                               | 772 |
| Tabla 51: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el primer apartado.....                             | 773 |
| Tabla 52: Máximos de la variable “bachillerato”, en el primer apartado, antes/después.....                               | 774 |
| Tabla 53: Mínimos de la variable “bachillerato”, en el primer apartado, antes/después.....                               | 774 |



|                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 54: Probabilidades de error en la significación de “dominio total de las Matemáticas”, antes o después, por “edad”. Pruebas no paramétricas..... | 782 |
| Tabla 55: “Dominio total de las Matemáticas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                               | 787 |
| Tabla 56: “Dominio aceptable de las Matemáticas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                           | 798 |
| Tabla 57: “Conocimientos matemáticos del Instituto”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                        | 809 |
| Tabla 58: “Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas....         | 819 |
| Tabla 59: “Dominio total de la Didáctica”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                                  | 830 |
| Tabla 60: “Dominio aceptable de la Didáctica”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                              | 839 |
| Tabla 61: “No es necesario saber Didáctica”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                                | 849 |
| Tabla 62: “Dominio total de la Didáctica de la Matemática”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                 | 858 |
| Tabla 63: “Dominio aceptable de Didáctica de la Matemática”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                | 867 |
| Tabla 64: “No es necesario saber Didáctica de la Matemática”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....               | 877 |
| Tabla 65: “Dominio total de la Psicología”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                                 | 888 |
| Tabla 66: “Dominio aceptable de la Psicología”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                             | 899 |
| Tabla 67: “No es necesario saber Psicología”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                               | 909 |
| Tabla 68: “Es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas....       | 920 |
| Tabla 69: “No es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....   | 931 |
| Tabla 70: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del segundo apartado.....                                                             | 932 |
| Tabla 71: Variación experimentada por la variable “género”, en el segundo apartado.....                                                                | 834 |
| Tabla 72: Máximos de la variable “género” en el segundo apartado, antes/después.....                                                                   | 935 |
| Tabla 73: Variación experimentada por la variable “año de realización” en el segundo apartado.....                                                     | 936 |
| Tabla 74: Máximos de la variable “año de realización”, en el segundo apartado, antes/después.....                                                      | 937 |
| Tabla 75: Mínimos de la variable “año de realización” en el segundo apartado, antes/después.....                                                       | 938 |

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 76: Variación experimentada por la variable “curso”, en el segundo apartado.....                                             | 939 |
| Tabla 77: Máximos de la variable “curso”, en el segundo apartado, antes/después.....                                               | 940 |
| Tabla 78: Mínimos de la variable “curso”, en el segundo apartado, antes/después.....                                               | 941 |
| Tabla 79: Variación experimentada por la variable “edad”, en el segundo apartado.....                                              | 943 |
| Tabla 80: Máximos de la variable “edad” , en el segundo apartado, antes/después.....                                               | 944 |
| Tabla 81: Mínimos de la variable “edad” , en el segundo apartado, antes/después.....                                               | 945 |
| Tabla 82: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el segundo apartado.....                                      | 946 |
| Tabla 83: Máximos de la variable “especialidad”, en el segundo apartado, antes/después.....                                        | 947 |
| Tabla 84: Mínimos de la variable “especialidad”, en el segundo apartado, antes/después.....                                        | 949 |
| Tabla 85: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el segundo apartado.....                                      | 950 |
| Tabla 86: Máximos de la variable “bachillerato”, en el segundo apartado, antes/después.....                                        | 951 |
| Tabla 87: Mínimos de la variable “bachillerato”, en el segundo apartado, antes/después.....                                        | 952 |
| Tabla 88: “Creatividad en el tercer apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....          | 963 |
| Tabla 89: “Número de magnitudes en el tercer apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas..... | 973 |
| Tabla 90: “Precisión en el tercer apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....            | 984 |
| Tabla 91: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del tercer apartado.....                                          | 985 |
| Tabla 92: Variación experimentada por la variable “género” en el tercer apartado, antes/después.....                               | 985 |
| Tabla 93: Máximos de la variable “género” en el tercer apartado, antes/después.....                                                | 986 |
| Tabla 94: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el tercer apartado.....                                 | 986 |
| Tabla 95: Máximos de la variable “año de realización” en el tercer apartado, antes/después.....                                    | 987 |
| Tabla 96: Mínimos de la variable “año de realización” en el tercer apartado, antes/después.....                                    | 987 |
| Tabla 97: Variación experimentada por la variable “curso”, en el tercer apartado.....                                              | 988 |
| Tabla 98: Máximos de la variable “curso” en el tercer apartado, antes/después.....                                                 | 988 |

|                                                                                                                                             |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tabla 99: Mínimos de la variable “curso” en el tercer apartado, antes/después.....                                                          | 988  |
| Tabla 100: Variación experimentada por la variable “edad” , en el tercer apartado.....                                                      | 989  |
| Tabla 101: Máximos de la variable “edad” en el tercer apartado, antes/después.....                                                          | 989  |
| Tabla 102: Mínimos de la variable “edad” en el tercer apartado, antes/después.....                                                          | 990  |
| Tabla 103: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el tercer apartado.....                                               | 990  |
| Tabla 104: Máximos de la variable “especialidad” en el tercer apartado, antes/después.....                                                  | 991  |
| Tabla 105: Mínimos de la variable “especialidad” en el tercer apartado, antes/después.....                                                  | 991  |
| Tabla 106: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el tercer apartado.....                                               | 992  |
| Tabla 107: Máximos de la variable “bachillerato” en el tercer apartado, antes/después.....                                                  | 992  |
| Tabla 108: Mínimos de la variable “bachillerato” en el tercer apartado, antes/después.....                                                  | 993  |
| Tabla 109: “Exactitud en la definición de magnitud”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....             | 1005 |
| Tabla 110: “Exactitud en la definición de medida de una magnitud”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas... | 1016 |
| Tabla 111: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del tercer apartado.....                                                  | 1017 |
| Tabla 112: Variación experimentada por la variable “género” en los apartados quinto y sexto.....                                            | 1017 |
| Tabla 113: Máximos de la variable “género” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                              | 1017 |
| Tabla 114: Variación experimentada por la variable “año de realización” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                 | 1018 |
| Tabla 115: Máximos de la variable “año de realización” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                  | 1018 |
| Tabla 116: Mínimos de la variable “año de realización” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                  | 1019 |
| Tabla 117: Variación experimentada por la variable “curso” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                              | 1019 |
| Tabla 118: Máximos de la variable “curso” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                               | 1020 |
| Tabla 119: Mínimos de la variable “curso” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                               | 1020 |
| Tabla 120: Variación experimentada por la variable “edad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                               | 1021 |
| Tabla 121: Máximos de la variable “edad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                                | 1021 |

|                                                                                                                                      |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tabla 122: Mínimos de la variable “edad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                         | 1021 |
| Tabla 123: Variación experimentada por la variable “especialidad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                | 1022 |
| Tabla 124: Máximos de la variable “especialidad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                 | 1022 |
| Tabla 125: Mínimos de la variable “especialidad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                 | 1023 |
| Tabla 126: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                | 1023 |
| Tabla 127: Máximos de la variable “bachillerato” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                 | 1023 |
| Tabla 128: Mínimos de la variable “bachillerato” en los apartados quinto y sexto, antes/después.....                                 | 1024 |
| Tabla 129: “Número de magnitudes en el séptimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas..... | 1034 |
| Tabla 130: “¿Cómo se miden?”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                             | 1045 |
| Tabla 131: “Número de unidades en el séptimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....   | 1055 |
| Tabla 132: “Magnitudes no medibles”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                      | 1063 |
| Tabla 133: Variación experimentada por las variables intra-sujeto, en el séptimo apartado.....                                       | 1064 |
| Tabla 134: Variación experimentada por la variable “género”, en el séptimo apartado.....                                             | 1065 |
| Tabla 135: Máximos de la variable “género”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                               | 1065 |
| Tabla 136: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el séptimo apartado.....                                 | 1066 |
| Tabla 137: Máximos de la variable “año de realización”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                   | 1066 |
| Tabla 138: : Mínimos de la variable “género”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                             | 1067 |
| Tabla 139: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el séptimo apartado.....                                 | 1067 |
| Tabla 140: Máximos de la variable “curso”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                                | 1068 |
| Tabla 141: Mínimos de la variable “curso”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                                | 1068 |
| Tabla 142: Variación experimentada por la variable “edad”, en el séptimo apartado.....                                               | 1069 |
| Tabla 143: Máximos de la variable “edad”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                                 | 1069 |
| Tabla 144: Mínimos de la variable “edad”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                                 | 1070 |

|                                                                                                                                            |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tabla 145: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el séptimo apartado.....                                             | 1070 |
| Tabla 146: Máximos de la variable “especialidad”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                               | 1071 |
| Tabla 147: Mínimos de la variable “especialidad”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                               | 1071 |
| Tabla 148: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el séptimo apartado.....                                             | 1072 |
| Tabla 149: Máximos de la variable “bachillerato”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                               | 1072 |
| Tabla 150: Mínimos de la variable “bachillerato”, en el séptimo apartado, antes/después.....                                               | 1073 |
| Tabla 151: Probabilidades de error en la significación de “número de magnitudes”, antes o después, por “edad”. Pruebas no paramétricas.... | 1080 |
| Tabla 152: “Número de magnitudes en el noveno apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....        | 1084 |
| Tabla 153: “Número de unidades en el noveno apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....          | 1094 |
| Tabla 154: “Exactitud en el noveno apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                   | 1103 |
| Tabla 155: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del noveno apartado.....                                                 | 1104 |
| Tabla 156: Variación experimentada por la variable “género” en el noveno apartado, antes/después.....                                      | 1105 |
| Tabla 157: Máximos de la variable “género” en el noveno apartado, antes/después.....                                                       | 1105 |
| Tabla 158: Variación experimentada por la variable “año de realización” en el noveno apartado, antes/después.....                          | 1106 |
| Tabla 159: Máximos de la variable “año de realización” en el noveno apartado, antes/después.....                                           | 1106 |
| Tabla 160: Mínimos de la variable “año de realización” en el noveno apartado, antes/después.....                                           | 1106 |
| Tabla 161: Variación experimentada por la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.....                                       | 1107 |
| Tabla 162: Máximos de la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.....                                                        | 1107 |
| Tabla 163: Mínimos de la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.....                                                        | 1108 |
| Tabla 164: Variación experimentada por la variable “edad” en el noveno apartado, antes/después.....                                        | 1108 |
| Tabla 165: Máximos de la variable “edad” en el noveno apartado, antes/después.....                                                         | 1109 |
| Tabla 166: Mínimos de la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.....                                                        | 1109 |
| Tabla 167: Variación experimentada por la variable “especialidad” en el noveno apartado, antes/después.....                                | 1110 |

|                                                                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tabla 168: Máximos de la variable “especialidad” en el noveno apartado, antes/después.....                                          | 1110 |
| Tabla 169: Mínimos de la variable “especialidad” en el noveno apartado, antes/después.....                                          | 1111 |
| Tabla 170: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en el noveno apartado, antes/después.....                         | 1111 |
| Tabla 171: Máximos de la variable “bachillerato” en el noveno apartado, antes/después.....                                          | 1112 |
| Tabla 172: Mínimos de la variable “bachillerato” en el noveno apartado, antes/después.....                                          | 1112 |
| Tabla 173: “Creatividad en el décimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....          | 1123 |
| Tabla 174: “Número de magnitudes en el décimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas..... | 1133 |
| Tabla 175: “Número de unidades en el décimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....   | 1142 |
| Tabla 176: “Precisión en el décimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....            | 1151 |
| Tabla 177: “Adecuada en el décimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....             | 1161 |
| Tabla 178: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del décimo apartado.....                                          | 1162 |
| Tabla 179: Variación experimentada por la variable “género” en el décimo apartado, antes/después.....                               | 1162 |
| Tabla 180: Máximos de la variable “género” en el décimo apartado, antes/después.....                                                | 1163 |
| Tabla 181: Variación experimentada por la variable “año de realización” en el décimo apartado, antes/después.....                   | 1163 |
| Tabla 182: Máximos de la variable “año de realización” en el décimo apartado, antes/después.....                                    | 1164 |
| Tabla 183: Mínimos de la variable “año de realización” en el décimo apartado, antes/después.....                                    | 1164 |
| Tabla 184: Variación experimentada por la variable “curso” en el décimo apartado, antes/después.....                                | 1165 |
| Tabla 185: Máximos de la variable “curso” en el décimo apartado, antes/después.....                                                 | 1165 |
| Tabla 186: Mínimos de la variable “curso” en el décimo apartado, antes/después.....                                                 | 1166 |
| Tabla 187: Variación experimentada por la variable “edad” en el décimo apartado, antes/después.....                                 | 1166 |
| Tabla 188: Máximos de la variable “edad” en el décimo apartado, antes/después.....                                                  | 1167 |
| Tabla 189: Mínimos de la variable “edad” en el décimo apartado, antes/después.....                                                  | 1167 |
| Tabla 190: Variación experimentada por la variable “especialidad” en el décimo apartado, antes/después.....                         | 1168 |



|                                                                                                                                                  |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tabla 191: Máximos de la variable “especialidad” en el décimo apartado, antes/después.....                                                       | 1168 |
| Tabla 192: Mínimos de la variable “especialidad” en el décimo apartado, antes/después.....                                                       | 1169 |
| Tabla 193: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en el décimo apartado, antes/después.....                                      | 1169 |
| Tabla 194: Máximos de la variable “bachillerato” en el décimo apartado, antes/después.....                                                       | 1170 |
| Tabla 195: Mínimos de la variable “bachillerato” en el décimo apartado, antes/después.....                                                       | 1170 |
| Tabla 196: “Creatividad en 3° y 10, antes”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                           | 1188 |
| Tabla 197: “Creatividad en 3° y 10, después”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                         | 1189 |
| Tabla 198: Probabilidades de error en la significación de “la precisión” en 3° y 10°, antes, por “año de realización”. Pruebas no paramétricas.. | 1194 |
| Tabla 199: Probabilidades de error en la significación de “la precisión” en 3° y en 10°, antes, por “curso”. Pruebas no paramétricas.....        | 1198 |
| Tabla 200: “Precisión en 3° y en 10, antes”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                          | 1207 |
| Tabla 201: “Precisión en 3° y 10, después”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                           | 1208 |
| Tabla 202: “Utilidad en el 11° apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                             | 1217 |
| Tabla 203: “Precisión en el 11° apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.....                            | 1228 |
| Tabla 204: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del undécimo apartado.....                                                     | 1229 |
| Tabla 205: Variación experimentada por la variable “género” en el undécimo apartado, antes/después.....                                          | 1230 |
| Tabla 206: Máximos de la variable “género” en el undécimo apartado, antes/después.....                                                           | 1230 |
| Tabla 207: Variación experimentada por la variable “año de realización” en el undécimo apartado, antes/después.....                              | 1231 |
| Tabla 208: Máximos de la variable “año de realización” en el undécimo apartado, antes/después.....                                               | 1231 |
| Tabla 209: Mínimos de la variable “año de realización” en el undécimo apartado, antes/después.....                                               | 1231 |
| Tabla 210: Variación experimentada por la variable “curso” en el undécimo primer apartado, antes/después.....                                    | 1232 |
| Tabla 211: Máximos de la variable “curso” en el undécimo apartado, antes/después.....                                                            | 1232 |
| Tabla 212: Mínimos de la variable “curso” en el undécimo apartado, antes/después.....                                                            | 1233 |
| Tabla 213: Variación experimentada por la variable “edad” en el undécimo primer apartado, antes/después.....                                     | 1233 |



|                                                                                                                      |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tabla 214: Máximos de la variable “edad” en el undécimo apartado, antes/después.....                                 | 1234 |
| Tabla 215: Mínimos de la variable “edad” en el undécimo apartado, antes/después.....                                 | 1234 |
| Tabla 216: Variación experimentada por la variable “especialidad” en el undécimo apartado, antes/después.....        | 1235 |
| Tabla 217: Máximos de la variable “especialidad” en el undécimo apartado, antes/después.....                         | 1235 |
| Tabla 218: Mínimos de la variable “especialidad” en el undécimo apartado, antes/después.....                         | 1235 |
| Tabla 219: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en el undécimo primer apartado, antes/después..... | 1236 |
| Tabla 220: Máximos de la variable “bachillerato” en el undécimo apartado, antes/después.....                         | 1236 |
| Tabla 221: Mínimos de la variable “bachillerato” en el undécimo apartado, antes/después.....                         | 1237 |

# Agradecimientos

La mejor manera de comenzar este trabajo es expresar mi enorme gratitud y afecto a todas las personas que, de una u otra forma, lo han hecho posible.

Por encima de todos los agradecimientos se encuentra el que le debo al auténtico Artífice de toda la obra, el que no necesita imitar a nadie para sus creaciones, el verdadero Creador, al que le debo todas las ideas que contiene este trabajo, el que me ha dado la vida y va guiando toda mi existencia: Dios todo poderoso.

En segundo lugar a la Dra. D<sup>a</sup> Ángeles Gervilla, por su empeño en que realizara la tesis, por ser ella la que despejó mis dudas sobre el tema, por su interés en seguir el proceso y por tantas cosas más; seguro que por mucho que me esfuerce me dejo siempre algo por lo que tendría que estar eternamente agradecida.

A la Dra. D<sup>a</sup> Mercedes Siles por su disponibilidad inmediata y sin reservas a dirigirme la tesis, por estar siempre atenta a escuchar todas las ideas que se me ocurrían y por su aportación personal a ellas, por sus correcciones concienzudas y por el trabajo científico profundo que ha propiciado.

A la Dra. D<sup>a</sup> Emelina López por estar dispuesta a seguir el trabajo ya iniciado con D<sup>a</sup> Ángeles Gervilla, por interesarse por él de forma seria y responsable, por sus imprescindibles orientaciones en el aspecto metodológico y por la importante labor de investigación que ha motivado.

Gracias a la Dra. D<sup>a</sup> Luisa Ruiz Higuera por facilitarme buena parte del material que necesité para iniciar este trabajo y por su interés en seguir su evolución.

A la Dra. D<sup>a</sup> Catalina Fernández Escalona que siempre se ha interesado por el proceso en que se encontraba el tema y me ha aportado "la ración" de ánimo necesaria para seguir adelante.

Gracias a Gonzalo Aranda Pino que ha sido otro de los compañeros que también ha aportado un granito de arena a esta tesis. Me ha

facilitado su ordenador y parte de su tiempo para que pudiera terminar de imprimir todo este documento.

A Miguel Ángel Gómez Lozano que me enseñó a pasar la tesis a PDF y me dejó su ordenador para este fin.

A la Dra. D<sup>a</sup> Remedios Portillo Cárdenas por ayudarme a entender algunas aplicaciones de algunos programas informáticos que me eran imprescindibles y por su interés en el proceso de la tesis.

También quiero expresar mi agradecimiento a mi amiga M<sup>a</sup> José Fernández Jiménez, maestra del Tarajal de Málaga, cuyos contactos facilitaron mi experimentación con los niños de Educación Infantil en el Colegio del Tarajal, y ella misma intentó seguir el tema en todas sus vertientes: teórica y metodológica.

A Laura Díaz Brezchi, amiga y maestra de Educación Infantil del Colegio San José de la Montaña de Málaga, por interesarse por todas las actividades que se me ocurrían, y por experimentar poniéndolas en práctica con sus niños.

A las antiguas alumnas, maestras de Educación Infantil del Colegio Público La Paz de Torremolinos: Gloria Galán y Yolanda Tamargo que me permitieron comprobar con sus alumnos si las actividades que proponía eran apropiadas para los niños de esas edades.

Quiero también expresar mi agradecimiento a mi amiga M<sup>a</sup> Lourdes Aguacil de la Blanca, profesora de Lengua y Literatura del Instituto de Armilla que estando de baja, luchando contra el cáncer, quiso leerse y corregir lo que llevaba de la tesis, se interesó por su evolución y me aportó el estímulo necesario para seguir adelante. Sin duda que hoy desde el Cielo me está ayudando.

A mi amiga y confidente M<sup>a</sup> Dolores Saíñz Marrodan —Lolita—, licenciada en Pedagogía, que siguió los pasos que daba a lo largo de todo el proceso, animándome constantemente, y que hoy desde el Cielo estará viendo el resultado.

Tengo que darle las gracias a Salvador, del Servicio Central de Informática de la Universidad de Málaga, pues él fue mi “salvador” cuando se me estropeó el ordenador, antes de Navidad, y tuve que pedir otro nuevo: me dejó el suyo para que continuara con los gráficos.

A Juan por facilitarme el tiempo que no tenía para poder “echar horas” en el ordenador, por dejarme buena parte de su tiempo para ir a los colegios a grabar cintas de video con los niños, por quedarse con mi

padre mientras yo estaba trabajando y por tantas y tantas otras cosas que si quisiera enumerarlas todas no acabaría.

Doy las gracias a mi madre, que empezó interesándose por el tema y que desde el Cielo seguro que lo está siguiendo; yo he sentido su insustituible ayuda.

A mi padre, que no se enteraba de nada, pero estaba algunas horas a mi lado, sentado, en silencio, esperando a que dejara el ordenador; otras veces decía que estaba mejor en el sofá que en la silla mirándome.

A mis hermanas Inmaculada y Ramona. A la primera por experimentar con sus niños de Educación Infantil en la Zubia (Granada) y por preocuparse por el proceso del trabajo. A la segunda por seguir el desarrollo del tema y facilitarme algunas horas para poder trabajar.

No puedo olvidar a los niños de Educación Infantil de los distintos colegios ya comentados, que tanto han disfrutado realizando las actividades que contiene nuestro trabajo.

Y por último, aunque son el centro de este trabajo, a todos los estudiantes de las asignaturas: "Introducción al Álgebra" y "Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil" por haber querido realizar la primera encuesta, estudiarse buena parte del tema y responder la segunda encuesta.

A todos MUCHAS GRACIAS.

# Introducción

Podemos afirmar, sin temor a exagerar, que las magnitudes y su medida constituyen un pilar fundamental de la cultura, por lo que suponen como bagaje necesario para entender el mundo en que vivimos, y por su presencia permanente en los diferentes ámbitos de nuestra vida. Podríamos resaltar su importancia en el desarrollo científico, tecnológico, cultural...

Nos atrevemos a decir que la medida es un concepto casi tan antiguo como el hombre, ya que desde siempre éste ha tenido necesidad de realizar mediciones para controlar sus posesiones, para poder tener un intercambio de sus productos y para que este intercambio se hiciera de modo que no dañara los intereses de ninguno de los intervinientes: comprador y vendedor. Buena prueba del temprano surgimiento de la medida es su asociación a ciertas partes del cuerpo. Así, vemos unidades de medida como la pulgada, el dedo, el palmo, el brazo, el pie, el paso, la cabeza —para definir el concepto clásico de belleza y perfección del cuerpo humano—, etc.

Por otro lado, pensamos que la creatividad, que tanto bien ha aportado —sigue y seguirá aportando— a la humanidad, hay que llevarla a cualquier parcela del saber humano, por lo que consideramos que puede ser tremendamente importante para fomentarla trabajar las Matemáticas con técnicas de Metodología Creativa. Y como creemos que nadie tiene que estar excluido del proceso creativo es por lo que, considerando que el maestro debe ser creativo para que pueda llevar a que el alumno lo sea, trabajamos la creatividad tanto con el alumno de Magisterio —futuro maestro—, como con el alumno de otras Facultades que esté interesado en el tema que nos ocupa —posible educador—, como con el niño de Educación Infantil —futuro creador. Para ello, hemos contado con la colaboración de los alumnos que han estado matriculados en las asignaturas: “Introducción al Álgebra” (optativa, común a todas las especialidades) y “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil” (optativa de la especialidad de Educación Infantil), ambas de Magisterio y de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga.

Hemos elegido el tema “las Magnitudes y su Medida” para trabajarlo con las técnicas de Metodología Creativa, por considerar que en él se puede ver una matematización de conceptos que todos tenemos

que utilizar con bastante frecuencia. Aunque, en general, a la gente no le llamen demasiado la atención las Matemáticas, quizá el realizar un estudio en profundidad de este tema utilizando las distintas técnicas de Metodología Creativa, pueda ser el aliciente necesario para que le gusten un poquito las Matemáticas. Es posible que el hecho de ser el alumno el que va descubriendo su propio saber de forma creativa constituya un aliciente para el estudio de las Matemáticas, y que consigamos que intente inventarse otras matematizaciones de otros conceptos que se utilicen en la vida diaria y que no estén aún matematizados.

Hemos pensado en trabajar “las Magnitudes y su Medida” con técnicas de Metodología Creativa, aprovechando que contamos con conocimientos tanto en este campo como en el de las Matemáticas. Las ideas que hemos adquirido de creatividad ha sido gracias al contacto con especialistas en esta materia cercanos a nosotros.

Pensamos que **las técnicas de Metodología Creativa** se pueden considerar como **un estímulo para estudiar “las Magnitudes y su Medida”**. Razonamos a continuación por qué hacemos esta afirmación.

Todos sabemos —por un motivo u otro— la importancia que tienen las Matemáticas como instrumento esencial del conocimiento, no sólo científico sino también de la vida diaria. De igual forma, nadie ignora su fama de complejas, quizá debido a su carácter abstracto y formal, por lo que la gente se siente poco inclinada a su estudio. Analizando a qué puede ser debido ese rechazo, encontramos que:

1º El conocimiento lógico-matemático tiene unas características peculiares que lo hacen diferente de cualquier otro tipo de conocimiento. Por ello, cuanto más se retrase la iniciación en él, más dificultades tendrán las personas para su comprensión.

2º El profesor no se encuentra suficientemente motivado cuando trabaja estos temas con sus alumnos, bien porque no le gustan las Matemáticas, o bien porque cree que no domina suficientemente esta parcela del saber. En cualquiera de ambos casos no podrá transmitir las Matemáticas de modo que ilusionen al alumnado.

3º Falta, en los primeros estadios, aprovechar la iniciación del niño en el conocimiento del entorno para que, con su actividad, curiosidad y creatividad, vaya introduciéndose en pequeñas, pero no desdeñables, parcelas de las Matemáticas.

A pesar de las dificultades que suelen tener las Matemáticas, consideramos que no podemos ni debemos eludir su estudio, ya que las

Matemáticas en general, y “las Magnitudes y su Medida” en particular, dotan a los individuos de un conjunto de instrumentos que potencian y enriquecen sus estructuras mentales y les facilitan explorar y actuar en la realidad, e incluso en la fantasía.

La dificultad que supone el estudio de las Matemáticas, creemos que es debido a que en cualquier razonamiento matemático se parte de unas hipótesis (condiciones abstractas generalmente) y se obtienen unas conclusiones (también abstractas por regla general). Para ello hay que mantener una coherencia entre las hipótesis previas y lo que en cada momento se va deduciendo como conclusión, mediante un razonamiento lógico. Por supuesto que para seguir un razonamiento hay que saber perfectamente de dónde se parte, qué pasos se pueden dar y a qué conclusiones queremos llegar. Con ello, el cerebro realiza una gimnasia análoga a la que hacen los músculos para su desarrollo. Pero todos sabemos que a los músculos no se les somete de golpe a estiramientos excesivos, ya que no los soportarían, sino que van gradualmente realizando la gimnasia conveniente. De forma análoga consideramos que debe tratarse al cerebro: se debe empezar iniciando a los niños, desde las primeras edades, en pequeños razonamientos, adaptados a su nivel de desarrollo, que progresivamente van haciéndose un poco más difíciles, según van madurando, para que puedan llegar en un futuro a realizar otros razonamientos mucho más complejos. También hay que fomentar su capacidad de abstracción, que no ha de ser poca, teniendo en cuenta su gran imaginación y la estrecha relación entre abstracción e imaginación.

Nos centramos en “las Magnitudes y su Medida” por ser un tema que cubre una buena parcela de la Matemática, tiene bastante repercusión en la vida diaria y con él podemos empezar a trabajar en el niño muchos conceptos desde las primeras edades, un punto que puede ser enmarcado en el tercero de los motivos que hemos señalado, sin descartar la repercusión que pueden tener los dos primeros.

También, para la elección de este tema hemos tenido en cuenta que “las Magnitudes y su Medida” forman parte relevante del currículum de las Matemáticas Elementales, incluso en la etapa de Educación Infantil, a lo largo de la Historia de la Educación en España (como puede verse, por ejemplo, en el libro: “Diseño Curricular Base”. Educación Infantil. Editado por el Ministerio de Educación y Ciencia (1984: 82 y siguientes). Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación Infantil (B.O.E. 4 de enero de 2007). Y en el Decreto 107/1992 de 9 de junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Infantil en Andalucía (B.O.J.A. 20 de junio de 1992).



Pensamos que la Metodología Creativa está teniendo un gran auge en las últimas décadas, y que a través de ella se llegan a conseguir resultados óptimos en Educación Infantil. Es por lo que consideramos que las técnicas de Metodología Creativa pueden ser un estímulo importante para entender “las Magnitudes y su Medida”.

En un principio, esta idea era ilusionante, pero nos preguntábamos: ¿cómo llevarla a cabo?; ¿por dónde empezar? Los dos temas a trabajar estaban decididos: comenzaríamos a elaborar “las Magnitudes y su Medida” a nivel del alumno de Magisterio y después, una vez conocido lo que se entiende por creatividad, trabajaríamos las técnicas de Metodología Creativa con actividades en cada una de ellas para el alumno de Educación Infantil.

Tras mucho pensarlo, razonamos: si queremos formar al futuro educador para que sea creativo, lo suyo sería trabajar el tema “las Magnitudes y su Medida” con las diferentes técnicas de Metodología Creativa, para lo cual tendríamos que invertir el orden a seguir y trabajar las técnicas antes que el tema, luego lo que hemos hecho ha sido lo siguiente:

a) En el Capítulo I, una vez analizado lo que se entiende por creatividad, estudiamos en profundidad la Metodología Creativa con sus diferentes técnicas, para después poder utilizarlas a lo largo de toda la tesis.

b) En el Capítulo II trabajamos el tema “las Magnitudes y su Medida” con objeto de afianzar el conocimiento del mismo en el alumno-profesor. Éste puede servirle para proponer actividades para Educación Infantil con soltura, sabiendo por qué propone esas actividades y no otras, y qué parte del tema abarca cada una de ellas. En todo el tema deberíamos utilizar dichas técnicas para contribuir a una formación más dinámica e innovadora del futuro educador.

c) En el Capítulo III, después de estudiar la génesis del concepto de medida viendo los estadios de desarrollo de comprensión del mismo, intentamos proponer actividades a resolver por el alumno de Educación Infantil con las citadas técnicas, al objeto de facilitar al alumno-profesor algún modelo para que pueda ver de forma concreta cómo emplear dichas técnicas en la enseñanza.

En todos los capítulos, pero sobre todo después de definir el concepto de magnitud en el Capítulo II, intentamos fomentar la creatividad dejando volar la imaginación del alumno-profesor para permitirle descubrir si pueden ser magnitudes ciertos conceptos que el niño maneja, pero para los que aún no tenemos ninguna forma objetiva

de medirlos, como el cariño, la alegría, el respeto, la bondad, el dolor, etc.

Con el nombre de alumno-profesor designamos al estudiante que se prepara para ser profesor en el futuro, cualquiera que sea el nivel en el que tenga que desarrollar su labor docente. Por tanto, es alumno-profesor tanto el estudiante de Magisterio de cualquier especialidad, como el de Matemáticas o el de Ingeniería que piense dedicarse posteriormente a la docencia.

Ahora nos planteamos: **¿qué interés tiene el estudio de “las Magnitudes y su Medida” con técnicas de Metodología Creativa?**

Se tiene en cuenta que cuando medimos una magnitud lo que hacemos es elegir una cantidad de la magnitud como unidad de medida, y comparar las demás cantidades con la unidad, asignándole un número que indica las veces que la cantidad objeto de la medición contiene a la cantidad elegida como unidad. Es por lo que la medida de una cantidad se expresa mediante un número seguido de la unidad de medida.

Creemos que con la terminología matemática que hoy se utiliza, se pueden refinar las definiciones que se daban anteriormente; una de ellas describe magnitud como todo aquello que se puede medir, y cantidad como lo que es capaz de aumentar o disminuir. Medir una magnitud se decía que es compararla con otra de la misma especie que se toma como unidad. Aunque casi siempre es cierto que las magnitudes se pueden medir, al no especificar a qué se refieren los términos “aquello” y “lo” que aparecen en estas definiciones, ha sido frecuente caer en un círculo vicioso al definir la magnitud en función de la medida y la medida haciendo referencia a la magnitud. También encontramos poco acertado definir cantidad sin relacionarla con magnitud, y no señalar si una cantidad se puede medir o no.

Interpretamos que este tipo de definiciones se daba porque se tenía en mente la idea de magnitud absoluta. Se creía que una magnitud puede aumentar o disminuir porque se podían comparar unas cantidades con otras mediante una relación de orden, y se veía que había cantidades más pequeñas y más grandes que una cantidad determinada; o también porque al sumar una cantidad a otra —siempre considerando magnitudes absolutas— se obtiene una nueva cantidad que al compararla con la primera se observa que es mayor que la de partida —o que la primera es menor que la obtenida.

Tenemos que pensar que, aunque no tuviésemos ningún conocimiento preciso de magnitud ni de su medida, deberíamos afirmar

que no nos pueden servir las definiciones de magnitud en las que se utilice el término medida sin ser definido previamente, es decir, que alguno de los dos términos —magnitud o medida— se tiene que definir independientemente del otro, y esto es lo que no sucede en bastantes de las definiciones encontradas. Ello puede ser debido a que los que se han preocupado de dar las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud, casi siempre lo han hecho mediante la observación de los aspectos físicos de ambos conceptos, sin entrar en el núcleo de su definición y en el trasfondo matemático que ella conlleva. Para nosotros, según vamos a definir en el Capítulo II, la magnitud no puede aumentar ni disminuir y, una vez definida, va a ser el término de partida para después considerar lo que entendemos por medida de una magnitud.

Pretendemos formalizar la definición de magnitud y su clasificación ya que, además de lo que hemos visto, nos detuvimos en hacer una búsqueda bibliográfica en Internet sobre magnitud y medida y nos encontramos definiciones del estilo de la que hemos comentado, y pensamos que hoy en día pueden darse definiciones más completas, precisas y adaptadas a la terminología matemática actual (después comentaremos con más detalle algunas de ellas en el Capítulo II, cuando elaboremos nuestra definición; entonces veremos en qué coinciden y en qué se diferencia de éstas, y por qué aceptamos o no lo que se proponía como definición).

A pesar de todo lo comentado, podemos afirmar que hay autores cuya definición coincide en buena parte con la nuestra; si bien en la clasificación de las magnitudes conseguimos, en algunos casos, resultados más adaptados a la terminología matemática actual que los encontrados. Ampliamos la idea de magnitud al tener que considerar magnitudes medibles y no medibles, y obtenemos una nueva clasificación en finitas e infinitas. Venimos, por tanto, a cubrir el hueco existente en la matematización de los conceptos de magnitud, de las clases de magnitudes, y de la medida de una magnitud, completándolo bajo el prisma del matemático.

Otro aspecto importante que nos ha motivado a la hora de hacer la elección del tema, ha sido la observación de que todos tenemos que afrontar con bastante frecuencia problemas de medida de una magnitud en la vida real, aunque no seamos conscientes de ello. Por ejemplo, cualquier persona tiene que organizar su tiempo para que le quepan todas las actividades que tiene que llevar a cabo a lo largo del día; el ama de casa, cuando se plantea el menú que quiere realizar, utiliza algunas magnitudes con sus correspondientes medidas, como las monedas, el volumen, el peso, la capacidad, el tiempo, etc.; el sastre, cuando tiene que hacer un traje, emplea las magnitudes longitud, superficie y volumen; el albañil, para hacer los edificios como se diseñaron, tiene que

interpretar los planos que le dan, lo que supone utilizar las magnitudes longitud, superficie, volumen, peso, etc.; el carpintero, para construir el armario lo más completo y útil posible, en un determinado espacio, necesita usar las magnitudes longitud, superficie, volumen, capacidad y peso; el conductor, si tiene que aparcar su coche o camión en un hueco determinado, antes, se ve obligado a calcular si es o no posible; el peluquero, para cortar el pelo con un estilo concreto y a una determinada longitud, emplea las magnitudes longitud y volumen, etc. Podemos afirmar, sin temor a equivocarnos, que “las Magnitudes y su Medida” han sido, son y serán imprescindibles en el desarrollo y en el progreso de la civilización.

También es cierto que la persona que tiene facilidad para la medida de una magnitud tiene también facilidad para interpretar su entorno. Por ejemplo, sabe cuál es el mejor camino que puede elegir para sus desplazamientos, lo que le lleva a poder desplazarse con mayor facilidad de un lugar a otro, incluso a orientarse debidamente.

El problema de introducir al niño de Educación Infantil en la medida viene de que la medida se realiza hoy día con instrumentos cada vez más refinados y complejos. Es por ello necesario que el niño, desde edades tempranas, vaya tomando contacto con todo tipo de objetos que puedan facilitarle su posterior aprendizaje. Salvo para las medidas de longitud, el niño no siente la necesidad de su uso. Además, no tiene conciencia de que para medir necesita repetir una unidad de medida a partir de la cual puede llegar a contar el número de veces que una cantidad contiene a la unidad elegida. Por otro lado, según sea la unidad de medida que elijamos, obtenemos los distintos números de veces que la cantidad elegida para medir contiene a la unidad que tomemos. Añadamos a todo esto la dificultad que podemos tener de comunicar, si no estamos en el mismo lugar, cual fue la unidad que elegimos. De aquí nació la necesidad de usar patrones de medida fijos.

Otra dificultad importante que tiene la medida es que casi siempre lleva consigo una aproximación y un error. Por ejemplo, al medir una longitud, puede que el objeto de la medida no quede bien alineado con la regla o que sus extremos no coincidan con divisiones de ésta; al pesar, puede que la cruz de la balanza no quede totalmente equilibrada con una masa dada; al medir la capacidad de un recipiente, puede que al transvasar el líquido objeto de medición de la vasija en que lo tengamos a la que tomamos como unidad de medida se nos derrame parte de él, etc.

Consideramos que con las técnicas de Metodología Creativa que hoy están tan en boga, vamos a conseguir una forma adecuada de presentar “las Magnitudes y su Medida”, lo que va a permitir que el

alumno-profesor las trabaje más y, en consecuencia, razone más sobre ellas. Tendrá así más facilidad para proponer actividades a los niños de Educación Infantil que sean más interesantes, formativas y originales, sobre el tema que nos ocupa, y que conlleven el redescubrimiento de estos conceptos matemáticos.

Podríamos concluir este punto diciendo algo análogo a lo que comenta Abellanas (1967: 232): una Matemática mejor razonada no tiene que ser más complicada para el alumno-profesor, sino que le proporcionará muchas posibilidades de organizar su enseñanza. *Organizaciones muy distintas pueden ser igualmente buenas, ya que no se centra el criterio de bondad en la selección de las materias, sino en el modo de presentarlas y en la finalidad de la presentación.* Pensamos que una buena presentación puede verse utilizando las técnicas de Metodología Creativa, con lo que podemos conseguir interés, cariño, afecto, entusiasmo... por las Matemáticas, aspectos que tiene que ser capaz de transmitir un buen profesor.

**Es el momento de preguntarnos: ¿qué aportan las técnicas de Metodología Creativa a “las Magnitudes y su Medida”?**

Nos hemos atrevido a realizar el estudio de “las Magnitudes y su Medida” con técnicas de Metodología Creativa por considerar que las Matemáticas no tienen que estar al margen del proceso creador, y de hecho no lo están. Todos conocemos profesores de las distintas ramas de esta ciencia que se dedican a la investigación —a la creatividad— y que han conseguido y siguen consiguiendo resultados sorprendentes. Pensemos en los profesores de Álgebra que trabajan con “Álgebras no Asociativas”, en los de Geometría que hablan de “Geometrías no Euclídeas”, etc., son muchos los avances que se están haciendo en Matemáticas gracias al esfuerzo de algunos creativos de esta ciencia.

También es cierto que, a otro nivel, todos somos un poco creativos en esta parcela del saber cuando tenemos que inventarnos nuestros propios recursos para resolver los problemas de cálculo que se nos plantean diariamente: cuando vamos al mercado y, a buen ritmo, debemos calcular el importe de la compra para estar seguros de que nos van a cobrar lo justo y de que llevamos dinero suficiente; cuando tenemos que analizar qué producto es más importante comprar, para lo cual es necesario comparar calidad-precio y hacer los cálculos pertinentes; cuando queremos hacer cualquier prenda y necesitamos saber qué anchura debe tener la tela y qué longitud debemos comprar para que nos sobre lo menos posible; cuando tenemos que elaborar un plato de comida y, además de tener en cuenta la cantidad de cada uno de los productos que debemos utilizar para que esté más rico, hay que ver el número de comensales, lo que puede comer cada uno de ellos, el

tiempo de cocción que necesitan cada uno de los alimentos, la capacidad del recipiente, etc. Es decir, son muchas las actividades de la vida diaria que, siguiendo un proceso creativo, conllevan la utilización de “las Magnitudes y su Medida”.

Por supuesto que la enseñanza de las Matemáticas no puede quedar, ni queda, excluida del proceso creativo, ya que cuando le planteamos al niño alguna actividad para que a través de ella vaya descubriendo alguna parcela de esta asignatura, lo estamos motivando para que utilice su creatividad, y como estimamos que es muy importante el modo de realizar esa motivación, es por lo que consideramos que el uso de las técnicas de Metodología Creativa puede ser la forma más oportuna e interesante de llevarla a cabo.

Pensamos que cuando se nos ha ocurrido alguna “idea feliz” que pueda ayudarnos, o ayudar a otros, a resolver algún problema, nos sentimos bien, consideramos que servimos para algo, que somos capaces de superar nuevos retos... Nada más que por esto, tenemos que fomentar la creatividad para que todos los educadores la conozcan a fondo y la tengan en cuenta en sus clases, pues con esto, no sólo ellos sino también los niños se van a sentir bien en las clases, van a pensar que son capaces de hacer cosas importantes, que son insustituibles. Además, la creatividad aumenta más cuanto más estimulada es; por ello debe estimularse desde que el niño nace y, por supuesto, no podemos abandonarla cuando empieza la escolarización, ya que tenemos que sacar lo mejor del educando.

Como nadie da lo que no tiene, si el profesor quiere formar alumnos que sean creativos, que no sean repetitivos, debe plantearse que antes debe serlo él, para lo cual conviene que esté pendiente de aquellas facetas en donde él pueda aportar algo al proceso creador: no conformarse con la forma tradicional de explicar un tema, sino analizarlo en profundidad para ver si sería mejor para ese grupo de alumnos darlo de otro modo, motivarlo de otra manera, proponer otras actividades, es decir, debe fomentar su creatividad y la de los niños. El educador debe dominar el tema que quiera hacer redescubrir a sus alumnos, darle vueltas para ver qué puede aportar de nuevo y plantearse cuál sería la mejor forma de transmitir al niño aquellos conceptos que, a su nivel, puede captar. Las ideas que le vayan surgiendo debe comunicarlas a sus compañeros o al niño, según el nivel, ya que esto es una manifestación de su potencial creador y una forma de fomentar su creatividad y la de los demás.

Los planteamientos que acabamos de considerar y nuestra experiencia docente, suscitan las siguientes **hipótesis**:



**Hipótesis 1.** El alumno-profesor de Educación Infantil, el de otra especialidad de Magisterio, el que cursa la licenciatura en Matemáticas y el que cursa otra diplomatura o licenciatura, no tiene ideas teóricas claras de lo que es una magnitud ni de lo que es la medida de una magnitud, aunque sepa poner ejemplos de ellas. El alumno-profesor no tiene claro si son magnitudes ciertos conceptos parecidos a otros que sí lo son, e incluso se pueden medir, como es la temperatura, y otros términos de los que aún hoy no se ha encontrado ningún instrumento apropiado para realizar su medición, como puede ser el cariño, el dolor, la bondad, la amistad, etc. Como el niño emplea estos conceptos en su lenguaje habitual, es importante que el futuro educador conozca si son o no magnitudes y por qué.

**Hipótesis 2.** Al iniciar el periodo escolar, el niño de Educación Infantil no tiene adquiridas las nociones de conservación, transitividad y unidad de medida. Es en esta etapa donde el educando empieza a asimilar estas nociones, y la práctica de la medida contribuye a facilitar su adquisición.

**Hipótesis 3.** Un conocimiento profundo por el docente sobre “las Magnitudes y su Medida” hace que las actividades que proponga a los niños de Educación Infantil sean más creativas y que puedan ser expresadas con mayor claridad y precisión.

**Hipótesis 4.** Los alumnos que conocen en profundidad los contenidos matemáticos y las técnicas de Metodología Creativa proponen unas actividades más creativas (son mejores didactas).

Destacamos, en primer lugar, que el **objetivo fundamental** de nuestro trabajo será confirmar lo que a todas luces parece que debería ser la forma más corriente de plantearse la exposición de un tema a cualquier nivel, aunque nos vamos a ceñir a Educación Infantil. Consideramos que si lo que quiere el maestro es educar, es decir, (desde el punto de vista pedagógico) extraer de dentro, sacar hacia fuera, necesita:

**Objetivo 1.** Tener un conocimiento del tema, a un nivel un poco superior al que intente transmitir. Esto repercute en la seguridad de saber de lo que está hablando, qué es lo que quiere sacar hacia fuera, por qué se plantean unas actividades o ejercicios determinados y no otros... Hay profesionales que plantean actividades a sus alumnos “a tontas y a locas”, sin saber por qué lo hacen, sólo porque los programas oficiales así lo dicen o porque hay que rellenar un espacio de tiempo. Otros, tienen una programación que está en función del grupo de alumnos con el que tienen que trabajar, para que consigan alcanzar unos determinados objetivos, no sólo porque así venga en los programas



oficiales, sino porque tienen perfecto conocimiento de dónde parten y hasta dónde deben llegar en cada tema. Por tanto, se puede afirmar que sería deseable que el maestro hubiera estudiado el tema antes de plantearse explicarlo.

**Objetivo 2.** Conocer la psicología del niño. Pues con ello sabría si está capacitado o no para entender lo que le intenta transmitir, y ponderaría si es el momento de trabajar una determinada parte del tema de forma más o menos experimental, según cuál sea el nivel en que se mueva. Aunque puede pasar que, conociendo que el niño no está aún preparado psicológicamente para entender una determinada materia, intente iniciarle con algunas actividades apropiadas para probar si el niño responde, ya que los estadios psicológicos no son tan rígidos como para que todos los niños a una determinada edad tengan que estar en un cierto nivel.

**Objetivo 3.** Conocer alguna metodología que fomente la creatividad, ya que con ello desarrollará la fluidez, la originalidad, la flexibilidad, etc., de los alumnos, y los motivará para trabajar, entusiasmándolos para que pretendan descubrir cosas nuevas.

**Objetivo 4.** Utilizar la metodología adecuada, buscando actividades apropiadas al tema en cuestión y al nivel de los alumnos. Para ello debería conocer algunas actividades que hayan planteado otros profesionales que hubiesen trabajado el tema con anterioridad, para proponer a sus alumnos alguna de ellas, si así lo estima oportuno, o inventarse otras nuevas que respondan mejor a los intereses de los alumnos en ese momento.

**Objetivo 5.** Analizar los conceptos que se parecen en algo a las magnitudes para ver si se pueden considerar como tales según el modelo teórico, y aquellos de los que aún no se ha encontrado ningún instrumento de medida, como por ejemplo el cariño.

**Objetivo 6.** Fomentar distintas situaciones, de modo experimental, para comprobar quién es más apto para proponer actividades creativas sobre “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil, si una persona preparada pedagógica y psicológicamente o una preparada matemáticamente.

**Objetivo 7.** Analizar en qué medida el conocimiento por parte del educador de los contenidos matemáticos y de las técnicas de Metodología Creativa puede ayudar a proponer actividades originales y con una terminología precisa para facilitar al alumno de Educación Infantil el redescubrimiento de “las Magnitudes y su Medida”.

Después de todo esto, pensamos que podemos añadir un último objetivo que quizá sea el más importante:

**Objetivo 8.** Proponer un modelo de Formación de Educadores en este área.

Para conseguir los objetivos que nos hemos marcado se necesita formular una **organización de la investigación**. Queremos detallar los contenidos concretos de cada una de las partes en que hemos dividido la tesis.

Empezamos con la primera parte a la que llamamos **Marco teórico: fundamentación científica**.

En el **Capítulo I** se consideran algunas aportaciones de la creatividad a la persona: es un bien social, una necesidad vital, favorece la salud mental, el bienestar personal, la autoestima...

Como la idea que tenemos de creatividad, en general, puede ser algo ambigua, en principio vemos algunas definiciones de creatividad que dan distintos estudiosos del tema y nos atrevemos a aportar nosotros también las nuestras: podemos decir que es sacar algo desconocido para nosotros a partir de lo conocido; el proceso mental mediante el cual la persona es capaz de producir una información que antes no tenía y que por tanto puede considerarse nueva para ella, aunque no lo sea para los demás; salirse de los moldes establecidos, hacer que surja lo mejor de nosotros para darlo a los demás, para llevarlo a aquella idea, a aquella situación, a aquella obra, etc.; profundizar en lo que creemos conocer para lograr observarlo desde otro punto de vista. Es, fundamentalmente, la capacidad de despertar en los demás interés por lo que hacemos.

Pensamos que es muy difícil saber si una persona es o no creativa, por esto consideramos algunos indicadores que pueden servirnos para medir la creatividad. Entre ellos tenemos: la fluidez, la originalidad o innovación, la flexibilidad, la elaboración, la apertura, la comunicación, la sensibilidad y la receptibilidad, la imaginación, la intuición, el impacto y la redefinición del problema. Con lo que no nos planteamos su medición a “ojo de buen cubero” sino teniendo en cuenta estos indicadores.

Nuestro siguiente objetivo es estudiar la diferencia entre método y metodología. Más tarde, analizamos a qué llamamos técnica y cuándo esa técnica será creativa.

Al fin, estudiamos distintas técnicas de Metodología Creativa que pueden sernos útiles en Matemáticas, aportando nosotros “el entorno” como otra técnica nueva. Utilizamos las técnicas de Metodología

Creativa por considerar que constituyen el modelo ideal para obtener una enseñanza creativa y, por tanto, nos suministran un material sumamente importante para seguir unas pautas concretas con objeto de alcanzar la creatividad. Consideramos que *las técnicas son estrategias concretas o modos de proceder valiéndose de pasos o fases debidamente organizados y sistematizados para alcanzar determinados objetivos*, (según Marín y De la Torre, 1991: 66-71), en nuestro caso, para alcanzar la creatividad. Si analizamos cada una de las técnicas que nosotros abordamos, podemos afirmar que:

1. Mediante “el arte de preguntar” tomamos la pregunta como una herramienta sumamente útil para fomentar la creatividad y sugerimos distintos tipos de preguntas que se pueden plantear.

2. Con “el torbellino de ideas” o “brainstorming” elegimos un modo para responder a las preguntas planteadas que fomente la creatividad y que no coarte la participación de los niños.

3. Si con “el torbellino de ideas” había alguna posibilidad de que algún niño monopolizara la producción de ideas, ahora con “el método Delfos” se dan algunas sugerencias para que esto no pueda ser posible.

4. A través de “la sinéctica”, en su aspecto de “convertir lo extraño en familiar”, se ven los pasos que son más convenientes dar para conseguir que el niño se familiarice con algo que tiene dificultad de entender en un primer momento. Y con “la sinéctica”, en su aspecto de “hacer lo familiar extraño”, llevamos al niño a conseguir ideas abstractas a partir de cosas familiares para él.

5. Mediante “la lista de atributos”, que es uno de “los métodos combinatorios”, se analizan los atributos que tiene, o podría tener —aquí entra la creatividad— la realidad que es objeto de estudio.

Con “el análisis morfológico”, que también es otro de “los métodos combinatorios”, se organizan los atributos de la realidad objeto de estudio para que sean el punto de partida para intentar mejorar esta realidad.

A través del “análisis funcional”, el último de “los métodos combinatorios” que vamos a considerar, se analizan las cualidades del objeto de estudio y se ve qué mejoras podrían introducirse en función del fin al que esté destinado o se pueda destinar.

6. Mediante “el arte de relacionar” analizamos las conexiones o los lazos de unión que puedan existir entre datos en apariencia dispares.

7. A través de “la solución de problemas” se intentan resolver los problemas planteados, se ve cuál sería la mejor forma y se evalúan los resultados.

8. “El entorno” hace que llevemos el objeto de estudio —o el problema— en la mente y que vayamos comparándolo con todo lo que encontremos a nuestro alrededor, por si hallamos algo que pueda ser la mejor solución.

Esta técnica podemos considerarla original; es fruto de utilizar “la serendipity” para intentar encontrar las actividades que incluimos en el Capítulo III.

9. Con “la biónica” nos servimos de los seres vivos como material para descubrir o inventar aparatos tecnológicos.

10. “La sinapsis” nos recuerda que si queremos aportar algo original a lo que estamos investigando, tenemos que poner a funcionar todas las neuronas de nuestro cerebro.

11. Al trabajar con “la serendipity”, iremos pensando que podemos descubrir algo que no pretendíamos y, por tanto, tenemos que estar pendientes de todo lo que vaya surgiendo.

12. A través de “la ideogramación” conseguimos ideas que pueden servirnos para inventarnos formas originales de organizar la información que tenemos del tema en el que estamos trabajando.

13. En “el circept” utilizamos los círculos para poder hacer descripciones del tema que nos ocupa lo más completas y novedosas posibles.

14. La técnica “crear durmiendo” nos recuerda que el descanso puede ser un gran aliado para que surjan las mejores ideas sobre el tema que nos preocupa.

15. “El relax imaginativo” nos ayuda a aprender conceptos utilizando la relajación, recurriendo a la imaginación para vivenciar lo aprendido.

16. Mediante “la técnica de escenarios” nos atrevemos a pronosticar, a partir de lo que ocurre hoy, lo que podrá ocurrir en el futuro.

17. Con “la síntesis creativa”, después de estudiar a fondo un asunto, se puede llegar a enunciar un slogan que lo resuma.

18. Aunque “el juego” es algo más que una técnica, ya que es una necesidad natural del niño y una fuente permanente de aprendizaje, también tenemos que considerarlo como una técnica de Metodología Creativa, pues el juego es fundamental para la creatividad. A través de él el niño descubre el mundo en que vive y aprende nuevos modos de razonar.

Continuamos con el **Capítulo II**, donde introducimos las definiciones matemáticas que vamos a considerar de magnitud y de medida de una magnitud, todo ello utilizando las distintas técnicas de Metodología Creativa, ya conocidas del Capítulo I. Procuramos sacarles partido para trabajar con el alumno-profesor el tema. En concreto, ponemos distintos ejemplos y ejercicios, antes y después de cada apartado, para motivar las definiciones o demostraciones que estudiamos.

Empezamos dando algunas definiciones básicas que son necesarias para poder llegar a entender lo que es un semimódulo o un módulo, tales como: par ordenado, producto cartesiano, correspondencias o relaciones binarias entre dos conjuntos, clases de correspondencias (entre ellas estudiamos las aplicaciones con sus distintos tipos), ley de composición interna, semigrupo, grupo, anillo, cuerpo y ley de composición externa. A continuación, definimos semimódulo, módulo y espacio vectorial. Con todo esto tenemos las estructuras algebraicas necesarias para poder definir y entender el concepto de magnitud. Como las magnitudes que conocían algunos de nuestros alumnos, antes de que nosotros le definiéramos dicho concepto, procedían de tener establecida una relación de equivalencia, decimos lo que entendemos por relación de equivalencia, para pasar después a dar el concepto de magnitud como un semigrupo unitario y conmutativo —con lo que podrá ser un  $\mathbb{N}$ -semimódulo—, o como un grupo abeliano —con lo que podrá ser un  $\mathbb{Z}$ -módulo o un  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial. Comparamos otras definiciones encontradas con la nuestra y vemos las propiedades que tienen las magnitudes.

El siguiente paso es analizar los distintos tipos de magnitudes:

Como entre las magnitudes encontradas hasta ahora hay algunas que están definidas sobre un conjunto finito y otras sobre un conjunto infinito, definimos magnitud finita si el conjunto en donde la definimos es finito, e infinita si no es finita.

Al tener en cuenta que una magnitud puede ser tanto un grupo abeliano como un semigrupo unitario y conmutativo, consideramos otra

clasificación: absolutas si sólo tienen la estructura de semigrupo unitario y conmutativo, y relativas si no son absolutas.

Para fundamentar algebraicamente la definición de magnitudes divisibles consideramos necesario, antes, saber lo que es un anulador, lo cual nos va a permitir definir semimódulo divisible, y vamos a decir que una magnitud es divisible si el semimódulo es divisible, llegando a partir de aquí, a través de algunos razonamientos matemáticos, a la definición cuya forma verbal es de todos conocida: una magnitud es divisible si cualquier cantidad, no nula, de la magnitud se puede dividir en cualquier número, no nulo, de partes iguales. Esto nos permite considerar que si la magnitud divisible es un  $\mathbb{N}$ -semimódulo, puede ser dotada de la estructura de  $\mathbb{Q}^+$ -semimódulo. Y vamos a decir que una magnitud es indivisible si no es divisible.

Para dar la definición de magnitud escalar, también necesitamos algunos conceptos previos como: relación de orden, relación de orden total y máximo y mínimo de una relación de orden. Para tener en una magnitud una ordenación definimos la ordenación natural del semigrupo como una ordenación definida a partir de la ley de composición interna, y demostramos que esta relación es reflexiva y transitiva, y si el semigrupo es cancelativo, siendo el elemento neutro el único elemento con opuesto, entonces es una relación de orden. Sin embargo, podemos encontrar algunas magnitudes en las que es posible definir una relación de orden sin que el semigrupo sea cancelativo.

Demostramos que una magnitud que no es la nula, con la ordenación natural del semigrupo, no puede ser relativa. Esto nos obliga a tener que definir en una magnitud relativa el orden inducido en el grupo por un semigrupo de elementos positivos o cono positivo. Analizamos cuándo una relación de orden es compatible con una ley de composición interna, lo que nos permite decir cuándo una magnitud absoluta o relativa está totalmente ordenada.

Probamos que si una magnitud absoluta, con la ordenación natural del semigrupo, es totalmente ordenada, entonces el único elemento con opuesto es el neutro; siempre hay un elemento que sumado con uno de ellos nos da el otro, pero no tiene que ser cancelativa. Algo análogo probamos en la magnitud relativa totalmente ordenada, con cono positivo. En este caso vemos que el cono positivo es un subsemigrupo unitario y conmutativo de la magnitud, que cualquier elemento de la magnitud verifica que o bien él o su opuesto está en el cono positivo, que el único elemento del cono positivo con opuesto es el neutro y que dados dos elementos cualesquiera de la magnitud existe siempre un elemento del cono positivo que sumado con uno de ellos nos da el otro.

Definimos semimódulo y módulo totalmente ordenado. Vemos que una magnitud relativa finita no puede estar totalmente ordenada. Finalmente definimos relación de orden arquimediana y magnitud absoluta o relativa arquimediana. Todo esto nos permite decir que una magnitud absoluta es escalar si es un semigrupo unitario, conmutativo, totalmente ordenado y arquimediano. De forma análoga podemos decir que una magnitud relativa es escalar si es un grupo abeliano, totalmente ordenado y arquimediano.

Llamamos magnitud vectorial a la que no es escalar. Analizamos distintas definiciones encontradas de magnitud escalar por considerar que este tipo de magnitudes son muy importantes, ya que son las más usuales.

Con objeto de intentar ver algunas características que tienen las magnitudes escalares, para buscar algunos ejemplos, damos la definición de elemento idempotente (el 0 con la suma y el 1 con el producto) y demostramos que en una magnitud escalar los únicos elementos que pueden ser idempotentes son el neutro y el máximo. Por otro lado, probamos que un semigrupo unitario y conmutativo finito, con la ordenación natural del semigrupo, no puede ser una magnitud escalar, salvo que sea la trivial o sea una magnitud absoluta que verifique que haya un elemento que operado con cualquier otro nos dé ese elemento, y para cualquier elemento no nulo podamos encontrar un número natural que multiplicado por él nos dé el elemento anteriormente encontrado.

Dentro de las magnitudes escalares distinguimos dos clases: discretas y continuas. Para definir las magnitudes discretas, basándonos en los conocimientos algebraicos utilizados habitualmente, definimos previamente semimódulo cíclico. Decimos que una magnitud es discreta si, y sólo si, es un  $\mathbb{N}$ -semimódulo o un  $\mathbb{Z}$ -semimódulo cíclico. Una magnitud escalar vamos a decir que es continua cuando no sea discreta.

Con todo lo que ya conocemos sobre magnitud podemos plantearnos a qué llamamos medida de dicha magnitud. Empezamos viendo la medida de una magnitud escalar, ya que son las medidas más usuales; además, no hemos encontrado autores que definan la medida de una magnitud vectorial. Para ello definimos algunos conceptos matemáticos previos como: homomorfismo de semigrupos, homomorfismo de grupos, monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo y automorfismo.

Después vemos las propiedades de los homomorfismos de semigrupos. Estudiamos lo que es un homomorfismo de semimódulos y de semimódulos ordenados, y pasamos a ver las propiedades de los



homomorfismos de semimódulos. Esto nos permite estudiar la analogía entre las magnitudes discretas y  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$ .

Con todo esto ya podemos pasar a definir medida de una magnitud escalar como un isomorfismo de semimódulos entre la magnitud que queremos medir y un submódulo de  $\mathbb{R}$  que sea una magnitud del mismo tipo que la dada. Llamamos unidad de medida a la cantidad de la magnitud que tenga como imagen el 1 de  $\mathbb{R}$ , y la medida de una cantidad la definimos como la imagen mediante el homomorfismo. Esto nos permite decir cuándo una cantidad es conmensurable y cuando es inconmensurable. A continuación comparamos nuestra definición de medida de una magnitud escalar con algunas de las que hemos encontrado.

Pensando que puede haber magnitudes escalares que no verifiquen la condición que hemos dado para que sean medibles, nos planteamos cuándo existe la medida de una magnitud escalar. Descubrimos que hay algunas magnitudes escalares que no son medibles. Esto nos lleva a desechar con mayor razón que una magnitud se defina como todo lo que se puede medir.

Vemos algunas propiedades que verifica cualquier medida, entre ellas que una magnitud escalar que sea medible puede admitir varias medidas, cada una de las cuales queda completamente determinada cuando se fija la unidad de medida. Esto da pie a plantearnos cómo podemos realizar el cambio de unidad de medida, llegando a obtener, entre otras cosas, que las medidas de una misma cantidad con unidades distintas están en razón inversa a dichas unidades.

Una vez definida la medida de una magnitud escalar estamos en condiciones de poder plantearnos cómo podemos realizar las medidas de algunos tipos de magnitudes: escalares discretas y escalares divisibles. Comenzamos por las escalares discretas por ser las más sencillas, y según las características de ellas la medida se establecería mediante un isomorfismo entre  $(\mathbb{N}, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ , si la magnitud  $M$  es absoluta, o entre  $(\mathbb{Z}, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ , en el caso de que  $M$  sea relativa. También llegamos a que para tener la medida de una magnitud escalar divisible tendríamos que tener un isomorfismo entre  $(\mathbb{Q}_+, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_+, +, \cdot, \leq)$ , si la magnitud es absoluta, o entre  $(\mathbb{Q}, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ , si la magnitud es relativa.

Pasamos a ver proporcionalidad de magnitudes. Decimos que dos magnitudes  $(X, A, +, \cdot)$  y  $(X, B, +, \cdot)$  son proporcionales si existe un isomorfismo de  $X$ -semimódulos entre ellas, luego la aplicación biyectiva tendría que respetar las dos operaciones. En el caso en que las

magnitudes  $(X, A, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, B, +, \cdot, \leq)$  fuesen escalares la definición sería análoga, sólo le añadiríamos que tendría que respetar la relación de orden.

Intentando reducir las condiciones para que dos magnitudes sean proporcionales, razonamos que cuando tengamos un isomorfismo entre dos magnitudes, si el conjunto de operadores sobre la magnitud es un subconjunto de  $\mathbf{R}$ , la igualdad entre la imagen del producto de un escalar por una cantidad de la magnitud y el producto del escalar por la imagen de dicho escalar, se deduce de la igualdad entre la imagen de la suma de dos cantidades y la suma de las imágenes de dichas cantidades. Además, cuando las magnitudes sean escalares y verifiquen que si una cantidad es mayor o igual que cero, su imagen también lo es —en particular cuando las magnitudes sean absolutas—; también deducimos que respeta la relación de orden y la igualdad entre la imagen de la suma de dos cantidades y la suma de las imágenes de dichas cantidades.

En el caso en que tengamos un isomorfismo entre dos magnitudes escalares, siendo ambas magnitudes medibles, demostramos que también se verifica que si respeta el producto por un escalar, respeta la suma, con lo que para probar que dos magnitudes escalares absolutas y medibles son proporcionales, es suficiente con ver que tenemos una aplicación biyectiva entre ellas y que respeta la suma o el producto por un escalar.

Razonamos que una proporcionalidad entre dos magnitudes escalares medibles queda unívocamente determinada cuando se conoce la imagen de una cantidad cualquiera distinta de la nula.

Damos la definición de razón entre dos cantidades y demostramos que si dos magnitudes medibles son proporcionales, la razón entre dos cantidades medibles de la primera magnitud es igual a la razón entre sus imágenes en la segunda magnitud.

Antes y después de cada definición o proposición vemos siempre algún ejemplo, en este caso, aparte de los ejemplos de proporcionalidad tenemos, como aplicación de ella, un ejemplo de repartos proporcionales.

Como en la vida corriente, nos encontramos con otros problemas de proporcionalidad que no podríamos resolver con los conocimientos que tenemos hasta ahora; vemos proporcionalidad compuesta definiéndola como una aplicación bilineal o multilineal.

Según los ejemplos o ejercicios que proponemos, se puede ver que no necesitamos definir otro tipo de proporcionalidad, ya que los ejemplos típicos de lo que antes se estudiaba como proporcionalidad inversa los

resolvemos como una proporcionalidad compuesta, para lo cual buscamos una magnitud a la que sean proporcionales todas las demás.

Utilizamos la proporcionalidad para poder realizar la medida de algunas magnitudes escalares que no se puede hacer directamente, a lo que llamamos medida indirecta de magnitudes escalares.

Intentando buscar una medida para las magnitudes vectoriales, aunque no hemos encontrado ninguna medida de estas magnitudes, pensamos que si las pudiéramos considerar como espacios métricos, tendríamos una distancia que daría lugar a una medida. Empezamos dando la definición de distancia de dos formas distintas y probando que son equivalentes. Esto nos permite tener un espacio métrico. Llamamos medida de una magnitud vectorial a la aplicación de la magnitud en  $R$  que asocia a cada cantidad la distancia entre ella y la cantidad nula. Mediante algunos ejemplos vemos que no se cumple que la imagen de la suma de dos cantidades sea la suma de las imágenes, ni la imagen de un escalar por una cantidad sea igual al escalar por la imagen de la cantidad.

Seguimos con el **marco teórico-práctico: aplicaciones prácticas en Educación Infantil.**

Después de todo lo que hemos visto anteriormente sobre técnicas de Metodología Creativa, en el Capítulo I, y sobre “las Magnitudes y su Medida”, en el Capítulo II, estamos preparados para poder proponer en el **Capítulo III** actividades para la Educación Infantil sobre “las Magnitudes y su Medida” con técnicas de Metodología Creativa.

Para saber qué tipo de actividades podemos proponer en Educación Infantil estudiamos la génesis del concepto de medida. Antes de meternos a fondo en ello, nos planteamos algunas actividades que se realizan en el entorno del niño, aunque él no sea aún consciente de ello.

Como aspectos fundamentales en el desarrollo de la comprensión del concepto de medida por el niño estudiamos la conservación, la transitividad y la unidad de medida. Con esta última, vemos la relación que hay entre la medida y el número, analizando la controversia entre las dos escuelas: la de Piaget y la de la Unión Soviética, sobre si el papel dominante en los procesos de medida debe corresponder o no a los conceptos numéricos.

Analizamos los distintos estadios de desarrollo de la comprensión de la medida para tener claro en qué periodo se encuentra el niño. Nos detenemos más en el inicial por corresponder a la Educación Infantil. Aquí consideramos tres subestadios: desde que el niño nace hasta que empieza a hablar, desde que el niño empieza a hablar hasta que se inicia

en la lecto-escritura y desde que el niño se inicia en la lecto-escritura hasta que termina la Educación Infantil. En los dos primeros, aunque todavía es prematuro hablar de adquisición de conceptos de medida, vemos algunas actividades que se realizan en su entorno o realiza el niño y que son la base de futuros conocimientos.

Nos detenemos en el tercer subestadio del estadio inicial porque ya son muchas las actividades de medida que podemos llevar a cabo con el niño sobre las distintas magnitudes y por ser el objetivo de nuestro estudio. Analizamos las medidas que son objeto de estudio en este último subestadio: número de elementos, longitud, área, peso, volumen y capacidad, temperatura, tiempo y monedas, proponiendo distintas actividades que se pueden llevar a cabo con cada una de ellas.

Comentamos los demás estadios con objeto de completar los estadios cognitivos del niño sobre “las Magnitudes y su Medida”. Además, tenemos en cuenta que, como indica Piaget, los periodos cronológicos son siempre indicativos, pudiendo haber variaciones considerables de unos niños a otros.

Como queremos utilizar la creatividad para proponer actividades, consideramos que antes debemos analizar qué entendemos por actividades creativas.

En este punto ya debemos considerarnos capacitados para poder proponer algunas actividades sobre “las Magnitudes y su Medida”, utilizando las distintas técnicas de Metodología Creativa vistas anteriormente, para niños de Educación Infantil de 3 a 6 años. Proponemos al menos una actividad para trabajar con cada una de las técnicas. En el caso del juego, por ser algo más que una técnica, estudiamos las etapas evolutivas en que se encuentra el niño de Educación Infantil para poder planificarlo: etapa sensoriomotriz, etapa del juego simbólico y etapa del juego de reglas. No proponemos actividades específicas de esta técnica por considerar que todas las anteriores, aunque no lo hayamos dicho, se trabajan con ella.

Finalmente proponemos 10 actividades sobre conservación, transitividad y unidad de medida utilizando todas las técnicas de Metodología Creativa. Queremos destacar que aunque estas actividades no se puedan llevar a cabo, de este modo, con los niños, hemos podido observar que se enriquecen grandemente todas ellas cuando se trabajan así.

En la parte titulada **diseño y desarrollo del estudio empírico** se pretende saber, entre otras cosas, si el alumno que conoce en profundidad el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de

Metodología Creativa propone actividades sobre dicho tema a los niños de Educación Infantil que sean más creativas y las expresa con mayor claridad y precisión que antes de conocer ambas materias.

Para comprobar si son ciertas o no las hipótesis que nos planteamos, hacemos una investigación empírica descriptiva y comparativa, para lo cual hemos llevado a cabo dos encuestas, a las que hemos llamado Evaluación Inicial y Evaluación Final, que constituyen la parte experimental de nuestra investigación.

El objetivo de la **Evaluación Inicial** es comprobar en qué situación se encuentran, respecto de su interés por la Matemática en general y por el tema “las Magnitudes y su Medida” en particular, los alumnos que son objeto de nuestro estudio: estudiantes universitarios que han elegido las asignaturas, optativas o de libre configuración, siguientes: “Introducción al Álgebra” o “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil”, entre ellos están alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y de otras especialidades, de la Facultad de Ciencias de la Educación, de varios cursos de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y de otras Facultades, todos ellos de la Universidad de Málaga.

Vamos a intentar demostrar experimentalmente que una persona, antes de dominar el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa, tiene más dificultad para proponer actividades, a nivel de Educación Infantil, que sean interesantes, formativas y originales, que cuando lo domina. Todo esto pensamos que puede servir para validar que el alumno mejor preparado matemáticamente es más apto para explicar un tema de esta materia —o por lo menos para proponer actividades—, incluso en Educación Infantil, que otro que no lo domina.

Después de haberse estudiado el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa, volvemos a proponer a los mismos grupos de alumnos, en la **Evaluación final**, una serie de actividades, análogas a las que hicieron en la Evaluación Inicial, sobre “las Magnitudes y su Medida”, con objeto de estudiar si con estos nuevos conocimientos adquiridos han mejorado sus aptitudes a la hora de proponer actividades que puedan ser formativas, interesantes y originales, para un niño de Educación Infantil —de 3 a 6 años— con respecto a las que se les plantearon en la Evaluación Inicial.

El comentario de cada uno de los puntos de que consta cada una de las encuestas y el porqué se realizan estas preguntas figura en cada una de ellas, y, por tanto, no vamos a destacarlo aquí.

Para ver si es o no cierta la hipótesis de la que partimos se han realizado varios **estudios estadísticos**:

1° Se ha llevado a cabo un **estudio de frecuencias** de todos los apartados de las dos encuestas. Como en la mayoría de los casos se trabaja con preguntas análogas, se han comparado los resultados de ambas Evaluaciones. Hemos empleado como software el programa SPSS, aunque los gráficos, para que resulten más claros y expresivos, se han realizado con el programa Excel.

2° Al no poder comparar con el estudio de frecuencias cómo quedan los subconjuntos que determinan las variables independientes (género, año de realización, curso, edad, especialidad y bachillerato), se ha realizado otro estudio estadístico, para el cual también se ha usado como software el programa SPSS, analizando los resultados con el modelo lineal general de medidas repetidas. En algunos casos se obtienen diferencias significativas pero no queda muy claro entre qué pares de subconjuntos se producen.

3° Para completar el estudio (en el caso en que los estadísticos anteriores no hubieran detectado entre qué submuestras existen diferencias significativas o hubiera alguna diferencia entre los resultados obtenidos mediante el modelo lineal general de medidas repetidas y lo que se obtuvo con el estudio de frecuencias) se pasan a analizar los resultados mediante pruebas no paramétricas. Según el estudio que necesitemos hacer con dichas pruebas, usamos:

i) Pruebas para muestras relacionadas, con las que se emplea la prueba de Wilcoxon. Son usadas para los casos en los que se ha necesitado estudiar lo que ocurre con las respuestas dadas por los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

ii) Pruebas para dos muestras independientes, en las que se utiliza la prueba *U de Mann-Whitney*. Son usadas en el caso de querer comparar los resultados de las respuestas de los alumnos en las dos encuestas y en la variable independiente género.

iii) Pruebas para varias muestras independientes, con las que se utiliza la prueba *H de Kruskal-Wallis*. Son muy prácticas cuando queremos analizar los resultados de las respuestas dadas en las dos encuestas teniendo en cuenta cada una de las variables independientes: año de realización, curso, edad, especialidad y bachillerato.

Debido a que el estudio que se hace es descriptivo y comparativo, no pretenden hacerse inferencias ni extrapolaciones de los resultados más allá de lo que los índices y estadísticos calculados permiten.

Es por ello que no hemos hecho un estudio exhaustivo de la validez de los instrumentos empleados. Bien es cierto que, como comentamos, todos los estadísticos utilizados han sido diseñados teniendo en cuenta las características concretas de nuestro trabajo.

Se efectúa una **discusión** de las diferencias existentes entre los planteamientos que hicimos al inicial el presente trabajo de investigación y los resultados obtenidos: en qué medida hemos superado —o no hemos llegado a conseguir— las propuestas iniciales, y por qué no se han alcanzado los resultados que se pretendían.



# **I. MARCO TEÓRICO: FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA**



## *Capítulo 1*

# **Creatividad en la Educación Infantil: Didáctica de las Magnitudes y su Medida**

### **1.1. Introducción**

El presente capítulo trata de mostrar la importancia que puede tener la creatividad en el conocimiento lógico-matemático concretado en “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil. Es éste un concepto de gran trascendencia, ya que el niño empezará familiarizándose con él a través de las distintas actividades que se le vayan proponiendo —o le vayan surgiendo— en las primeras edades, y no lo abandonará a lo largo de toda su vida. Además, independientemente de que en el futuro le interesen o no las Matemáticas, tendrá que emplearlo en multitud de ocasiones, por ejemplo: al contar, al medir el tiempo, al medir cualquier objeto, al realizar inversiones de cualquier tipo, etc.

Para trabajar nuestro tema: “las Magnitudes y su Medida”, consideramos sumamente interesante conocer distintas técnicas de Metodología Creativa, que nos van a ser de gran utilidad ya que después nos servirán a la hora de motivar cada una de las partes de que consta el tema, al intentar proponerle algunas actividades tanto a los alumnos de Magisterio, como a los de otras Facultades a los que les interese esta parcela de las Matemáticas, como a los niños de Educación Infantil.

Con ello pretendemos acercar la creatividad, que ya impregna muchas parcelas del saber, a la enseñanza de las Matemáticas, sin que pierdan nada del rigor que siempre llevan consigo, y utilizar las técnicas de Metodología Creativa con los universitarios y con los niños de Educación Infantil para que sean ellos los que redescubran “las Magnitudes y su Medida”.

En este primer capítulo veremos qué entendemos por creatividad. A continuación estudiaremos qué se entiende por Metodología Creativa y por técnicas de Metodología Creativa. Seguidamente haremos un comentario general de cada técnica.

No abordaremos en el presente capítulo ninguna de las actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil sobre “las Magnitudes y su Medida” con técnicas de Metodología Creativa, ya que para ello consideramos que debemos tener un conocimiento aceptable del tema “las Magnitudes y su Medida”, objetivo que no conseguiremos hasta que estudiemos el Capítulo II. Es por lo que, después de la asimilación correspondiente de ambos temas (las técnicas de Metodología Creativa y “las Magnitudes y su Medida”), nos consideraremos preparados para proponer en el Capítulo III algunas actividades para Educación Infantil con cada una de las citadas técnicas.

Estuvimos dudando si deberíamos cambiar el orden de los Capítulos I y II para que quedara más próximo el comentario de cada una de las técnicas a su aplicación inmediata en Educación Infantil. Si bien, hemos considerado que el actual debe ser el primer Capítulo para poder después, al menos, comentar qué técnicas podríamos utilizar en cada uno de los apartados del Capítulo II. Siempre es bueno el empleo de las técnicas de Metodología Creativa que, por supuesto, también se pueden usar para estudiar el tema “las Magnitudes y su Medida” a nivel universitario: con estudiantes de Magisterio, de otras Escuelas Universitarias o de otras Facultades.

## 1.2. Creatividad

Si se nos pregunta, todos diremos que queremos ser creativos en cualquier faceta de nuestra actividad familiar o profesional, ya que toda persona busca inventar, progresar, superar lo ya conocido... Además, las nuevas maquinarias y los ordenadores están haciendo hoy día gran parte del trabajo que antes hacían los hombres, dejándoles a éstos ese tiempo libre para realizar el trabajo creativo que esos instrumentos no pueden hacer.

Por otro lado, cuando una persona intenta ser creativa al resolver o plantear problemas, o descubrir algo que pueda serle útil a otros, aumenta su autoestima, se siente bien —psicológica y físicamente— al pensar que ese esfuerzo merece la pena, que eso dignifica a la persona.

Para Marín (Marín y De la Torre, 1991: 98) *todos en alguna medida o en algún aspecto, son o pueden ser creativos. (...) todos tienen*

*algunas capacidades que no han sido suficientemente cultivadas o no se les ha dado la oportunidad de proyectarse o, al menos, no en la medida en que podrían hacer una aportación para un ámbito mayor en la sociedad.*

Según Barcia y Rodríguez (2002: 235) *todos somos creativos en mayor o menor medida, es decir, todos tenemos la capacidad de crear, capacidad que, por ende, es susceptible de estimulación y desarrollo. Esta facultad nos es muy útil tanto para resolver problemas como para favorecer nuestra salud mental, el bienestar personal y la autoestima. Esto último se debe a que la experiencia de vernos envueltos en una actividad creadora produce satisfacciones incomparables.*

Lo que dicen estas dos citas bibliográficas tendría que servirnos de estímulo para fomentar la creatividad, ya que si pensamos que todos podemos ser creativos y cuando lo somos favorecemos nuestra *salud mental*, nuestro *bienestar personal* y nuestra *autoestima*, nada más que por sentirnos bien psicológica y físicamente, deberíamos esforzarnos por intentar ser creativos y ayudar a que los demás lo fueran al considerar que la creatividad es *susceptible de estimulación y desarrollo*.

Para completar los comentarios de la cita anterior, es importante analizar lo que se entiende por problema. Dejando aparte lo que significa en Matemáticas, encontramos que Héctor Fainstein en la dirección

<http://www.hfainstein.com.ar/articul/creatividad.html>

da la siguiente definición: *Un **problema** es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo. Este objetivo no se puede alcanzar con el repertorio del comportamiento actual del individuo; éste debe crear nuevas acciones o integraciones. Cuando se encuentra ese medio se dice que se ha resuelto el problema. (...) La sola visión de un problema ya es un acto creativo. En cambio su solución puede ser producto de habilidades técnicas.*

El concepto de problema en esta página web es bastante amplio, no se limita a los problemas matemáticos, sino que se extiende a cualquier tipo de problemas, incluidos también los matemáticos. En Matemáticas, cuando queremos resolver un problema (como se dice en la dirección anterior) *se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo*. Además, también en esta asignatura, *la sola visión de un problema ya es un acto creativo y plantearse un problema es ponerse en camino de poder resolverlo*, si bien la solución puede ser, en algunos casos, resultado de la aplicación de una fórmula obtenida previamente, en otros puede ser el resultado del descubrimiento de una nueva teoría matemática... Por esto creemos que no se puede decir que encontrar la solución de un problema sea menos importante que el camino seguido para resolverlo; esto dependerá en

cada caso del problema que se plantee y de la dificultad que suponga su solución.

En la siguiente dirección

[http://www.biopsychology.org/tesis\\_pilar05.html](http://www.biopsychology.org/tesis_pilar05.html),

Pilar González en su tesis sobre: “La educación de la creatividad” (1981, Capítulo 3: 3), dice lo siguiente: *“La creatividad como actitud de vida busca la verdad, la belleza, el amor, la libertad, la expresión del sentir. Entonces, a las necesidades vitales se añade una más: la de la expresión. Nace una nueva higiene, una manera distinta de ser: la de ser uno mismo. La creatividad entendida así sirve para el fomento de la salud...*

*La súper-sanidad o más vida sería entender la creatividad como un complejo de síndromes que apuntarían a determinadas cualidades (sensibilidad, espontaneidad, imaginación, capacidad reflexiva, empatía, etc.) como fin en sí mismas...*

*El límite entre lo patológico y la salud es vago, aunque deseable, el límite entre la salud y la súper-sanidad está determinado por la adquisición y el desarrollo de la actitud de vida creativa.*

También en esta página hace referencia a que una actitud de vida creativa sirve para el fomento de la salud, favorece la *sensibilidad*, la *espontaneidad*, la *imaginación*, la *capacidad reflexiva*, la *empatía*, etc., aspectos que ya hemos comentado anteriormente.

Además, por otro lado, la sociedad demanda para el mercado laboral en la actualidad profesionales que no sean repetitivos, que sean capaces de resolver los problemas que se vayan planteando de forma original, que superen lo ya conocido y que vayan progresando.

Por todo esto, la educación, cuya finalidad principal es integrar al individuo en la sociedad a la que pertenece, no tiene más remedio que preocuparse de formar individuos que tengan todas estas características para incorporarlos a la sociedad participando de su evolución de forma constructiva. Esto difícilmente se puede lograr sin una enseñanza que favorezca la creatividad en los niños desde las primeras edades, ya que la creatividad no es algo que se pueda improvisar, sino que se va adquiriendo progresivamente a través del entrenamiento, de la educación.

En la actualidad existe un especial interés por la creatividad, no sólo en el arte, lo que sería lógico esperar, sino también en la empresa, en la política, en el comercio, en la ciencia, en la tecnología, en la construcción, en la medicina, en la enseñanza, etc. Pero ¿qué es la creatividad? Veamos algunas definiciones:

Para Marín (1984: 3 y 138) *Crear es crearse, recrearse, en el sentido etimológico y lúdico de la palabra. (...) Entendemos por enseñanza creativa la que lleva a que cada cual aporte algo personal, valioso e innovador.*

De la Torre (Marín y De la Torre, 1991: 24, 22 y 21) define la creatividad como: *Capacidad y actitud para generar ideas nuevas y comunicarlas. (...) Educar creativamente es educar para el cambio, capacitar para la innovación. (...) La creatividad ha pasado de ser un fenómeno psicológico a un hecho social. (...) si el hombre no fuera creativo, viviríamos aún en las cavernas. La creatividad ha pasado de ser un atributo individual a un bien social. (...) La riqueza de un país comienza a valorarse en términos del potencial innovador.*

Para Gervilla (1992: 52) *Crear es dar la mano al futuro. Creatividad es la capacidad para engendrar algo nuevo, ya sea un producto, una técnica, un modo de enfocar la realidad... La creatividad impulsa a salirse de los cauces trillados, a romper las convenciones, las ideas estereotipadas, los modos generalizados de pensar y actuar. (...) Son muchos los escolares creativos que pasan desapercibidos y son infravalorados por el profesorado...*

Camina (1994: 26) define la creatividad como *la capacidad o posibilidad del hombre de superar en cada momento el estadio de sus realizaciones. (...) De cualquier forma la creatividad es el elemento decorativo de la ciencia y de la tecnología, pero es la esencia del ARTE. (...) En los tiempos pasados se asumía que no existía arte sin belleza. Hoy, en cambio, se asume que no existe arte sin CREATIVIDAD.*

Creemos que la creatividad no debe considerarse sólo el elemento decorativo de la ciencia, sino también su esencia. De hecho, no se puede decir que la creatividad sea *el elemento decorativo de la ciencia y de la tecnología*, ya que sin creatividad no hay investigación y todos sabemos que gracias a la creatividad se están haciendo importantes avances en todos los aspectos de la vida, incluidos éstos, y se harían aún mayores si todos nos implicásemos en ella (cada uno según sus posibilidades). Pretendemos que la creatividad llegue a ser la esencia de la enseñanza en general, en especial de las Matemáticas y su Didáctica, y en concreto de “las Magnitudes y su Medida”. La educación es el mejor camino para alcanzar esta meta: transmitir la idea de que no existe ciencia sin creatividad...

Para Romo (1997: 115) la creatividad es *una forma de pensar cuyo resultado son cosas que tienen a la vez novedad y valor.*



Nos gusta especialmente la definición que da Gervilla (2003: 75): *Creatividad es dejar huella: hacer cosas nuevas en beneficio de los demás... Enriquecer nuestra vida utilizando el potencial que llevamos dentro.*

En estas dos últimas definiciones, como en algunas anteriores, se pone de manifiesto la idea de que el producto creativo tiene que ser algo nuevo. En Matemáticas y en Educación Infantil no podemos pretender que el conocimiento sea nuevo para el profesor o para cualquier otra persona con algún nivel cultural, aunque sí debemos intentar presentarlo de forma original, distinta a como se está enseñando ahora y, por supuesto, tiene que ser motivador para el niño con objeto de que se anime a redescubrirlo.

Buscando en Internet nos encontramos muchas páginas web relacionadas con la creatividad; al no poder enumerarlas todas, hemos elegido aquéllas que pueden ser un referente de lo que allí se puede hallar que tenga alguna relación con los comentarios que nos pueden interesar para aplicarlos a “las Magnitudes y su Medida”; entre ellas tenemos:

En la dirección

<http://www.colciencias.gov.co/redcom/CREATIVIDAD.html>

la Fundación Epsón dice: *La creatividad se comienza a ver desde algunas teorías como un hecho ontológico más que cognitivo; es la presencia del hombre ante su realidad la que importa y no tanto su eficacia sobre ella. Es el hombre total el que participa en el evento creativo y esto define el carácter de ese evento, no es sólo un problema de conocimiento; en ese sentido el hombre se torna transformador y creador de ámbitos y esto precisamente porque participa de la dinámica real de la vida que es caos y desorden.*

Por supuesto que si queremos ser creativos en alguna situación o problema tenemos que meternos de lleno en lo que requiera nuestra participación e innovación. Si no conocemos a fondo una teoría matemática —no nos hemos enterado bien de ella—, difícilmente podremos descubrir los problemas que conlleva ni mucho menos resolverlos.

En la siguiente dirección:

<http://joventurini.com/Creatividad.html>

Jorge Venturini se cuestiona: *¿Qué es la creatividad? Imaginemos la psiquis humana como una esfera enorme, con una superficie consciente llena de facetas con marcas y colores, rellena de contenidos inconscientes, y con un núcleo central que es el YO interior o sí-mismo. Imaginemos en ese núcleo anidando las verdaderas necesidades y*

*posibilidades de “ser hombre”. Podemos decir que la creatividad es lograr conectarse desde la superficie con ese YO, con ese sí-mismo, con ese núcleo luminoso interior, y descubrir o escuchar lo que allí tenemos. Así de simple y así de difícil...*

*Somos un gran iceberg, del cual asoma una pequeña porción, todo lo demás descansa en el fondo del inconsciente. Y las posibilidades están allí, esperando que las descubramos. Cualquier ser humano posee las mismas capacidades que los genios que han descollado. Sólo debemos permitir que esas capacidades afloren para tener la posibilidad de crear.*

*Ese sería el camino de la creatividad: encontrar la manera de acceder a ese núcleo luminoso que forma nuestro sí-mismo.*

*Creatividad es la capacidad que tiene el ser humano de enfrentarse con un problema nuevo y encontrar la solución; de enfrentarse con una necesidad expresiva y lograr comunicarla; de descubrir un nuevo aspecto del suceder humano y lograr transmitirlo; de encontrar una nueva visión de las relaciones interpersonales; de percibir un matiz en la relación del hombre con el cosmos y transformarla en una obra de arte, o en un ensayo, o en un camino filosófico; de enfrentarse con la hoja vacía y elaborar una idea; de enfrentarse con la olla vacía y elaborar un rico manjar. (...)*

*Para ser creativos hay que trabajar, y trabajar muy duramente. Es verdad que siempre habrá creativos natos que no necesitarán de tanto esfuerzo. Siempre existirán los Mozart, los Einstein, los Kant que con su actuación marcarán rumbos en el desarrollo de la especie. Pero seguirán siendo una ínfima minoría, al resto sólo nos queda el esfuerzo denodado. Lo cual no significa que esos genios no hayan trabajado también para lograr lo que lograron. Lo que tienen de ventaja, es que esos canales de conexión de los cuales hablamos estaban más abiertos...*

*Más tarde, hablando de la importancia de la intuición para la creatividad, comenta: Todos hablan de una capacidad del ser humano sin la cual, las Matemáticas no existirían. ¿Hay algo más respetable en la vida científica moderna que las Matemáticas? Pues sin la intuición intelectual con todos sus conocimientos “a priori” no existirían.*

Resulta tremendamente acertada —desde nuestro punto de vista— la descripción que hace en esta página web de la creatividad, pues cuando intentamos ser creativos lo que hacemos es procurar sacar lo que tenemos dentro de nosotros. Además nos anima a ser creativos cuando dice que, con esfuerzo, todos podemos ser creativos, aunque, por supuesto, a los genios les costará mucho menos que a los demás. Al final vuelve a ilusionarnos para trabajar creativamente, para progresar en

Matemáticas, cuando indica que sin creatividad no existirían. Es por lo que tendremos que trabajar con tesón para ser creativos en esta parcela que es la que nos ha correspondido.

Nos ilusiona que valore tanto las Matemáticas cuando pregunta *¿Hay algo más respetable en la vida científica moderna que las Matemáticas?*, aunque por el comentario que le sigue: *Pues sin la intuición intelectual con todos sus conocimientos “a priori” no existirían*, más que una pregunta resulta ser una afirmación. La verdad es que coincidimos plenamente con esto; además, entendemos que las Matemáticas impregnan cualquier rama de la ciencia.

Agustín de la Herrán Gascón, profesor de la Universidad Autónoma de Madrid, en

<http://www.ieh.com/imprimir/doc200207140301.html>

dice lo siguiente: *La creatividad es una experiencia profundamente imbricada en el propio acto de aprender, porque tiene su asiento en la capacidad de descubrir, o sea, de hallar, manifestar, hacer patente o formalizar ideas o experiencias relativamente novedosas u originales. La creatividad tiene que ver con el trazado de nuevas rutas neurológicas, entendidas como desarrollo y expresión de procesos y acciones asociados al encuentro personal y al asombro relativo. Globalmente, por creatividad se ha entendido la capacidad de dar respuestas, elaborar o inventar producciones originales, valiosas o de cuestionarse y resolver problemas de un modo inusual...*

Herrán destaca la importancia de la creatividad en el aprendizaje, puesto que todo aprendizaje, y por supuesto el aprendizaje matemático, supone la adquisición de ideas *novedosas u originales*. Todo producto inusual, novedoso u original es consecuencia de un acto creativo.

La prensa en la dirección

<http://mensual.prensa.com/mensual/contenido/2002/08/02/hoy/opinion/653128.html>

habla de las emociones que produce la creatividad: *La creatividad implica pasión y, además, autoestima. Romper moldes, someterse a la crítica, y continuar equivocándose y aprendiendo hasta lograr el propósito; eso es de gente creativa. La creatividad se enriquece con las experiencias y perspectivas diversas; por eso es importante viajar con la mente abierta, con enfoque educativo.*

En especial, de esta página web, aparte de que señala el beneficio que aporta la creatividad por *implicar autoestima* y la importancia de *romper los moldes*, queremos destacar lo que dice de que la creatividad *implica someterse a la crítica y continuar equivocándose y aprendiendo hasta lograr el propósito*. Esto en Matemáticas no podemos obviarlo, ya que hay veces en que cuando pensamos que hemos resuelto un

problema y lo analizamos bajo otro punto de vista o se lo enseñamos a un compañero o intentamos comentarlo en clase, descubrimos que nos hemos equivocado. Ya con eso hemos aprendido y si volvemos a planteárnoslo, andamos en camino de solucionarlo. Lo más seguro es que con otro nuevo intento lo consigamos.

También habla de *viajar con la mente abierta, con enfoque educativo*. Queremos indicar que el mejor creador no tiene que ser el mejor educador, ni a la inversa, pues puede haber una persona que sea muy creativa, en el sentido de descubrir cosas novedosas e impactantes, y que no sepa comunicar sus ideas, y al contrario, puede haber una persona que enseñe muy bien lo que conoce y que no sea muy creativa en el sentido anteriormente descrito. Por supuesto que la persona que, además de ser creativa, sabe comunicarlo, será mucho más creativa. Es por lo que nos aconseja *viajar con la mente abierta, con enfoque educativo*, ya que no todo lo conocemos, son muchas cosas las que podemos aprender, mucho lo que podemos aportar a lo que hoy se conoce y mucho lo que podemos enseñar de lo que vamos conociendo o descubriendo.

Alejandra Trillo en

<http://www.terra.es/personal/asstib/mes/creativ.htm>

siguiendo estas ideas dice: *La creatividad estaría muy relacionada con lo novedoso, original y sorprendente. Los productos creativos se diferencian de los que llamaríamos “raros” por su calidad. Las personas creativas tienen una forma de comportamiento poco habitual, rayando en ocasiones la excentricidad.*

En esta página web se distinguen los productos *creativos* de los *raros*, considerando que los raros no son creativos. Nosotros consideramos que también algo creativo puede ser algo raro, y viceversa. Y coincidimos con el hecho de que a veces algunas personas creativas pueden ser algo excéntricas. Sin embargo, para ser creativo, lo fundamental es que se sea original en los planteamientos habituales. Más tarde la autora considera dos enfoques:

*Enfoque filosófico-humanista: Que considera la creatividad como una de las características de la personalidad humana recogiendo parte de la concepción popular pero ampliándola y explicitándola. Los autores hablan de personalidad creadora perfilando la misma con características como apartamiento de lo convencional, tenacidad, curiosidad casi compulsiva y carácter lúdico entre otras. Como puede apreciarse, todas estas características son de tipo no intelectual y tienen muy en cuenta aspectos motivacionales, disposicionales y de actitud.*

*El segundo enfoque sitúa la creatividad dentro del marco cognitivo, es decir, la concibe como una forma de pensamiento o procesamiento de la información. No formaría parte de la personalidad del individuo más allá de las características intelectuales.*

*La creatividad sería pues una determinada forma de elaborar o manipular mentalmente la información, que daría lugar a un cierto tipo de productos que recogerían las características antes mencionadas de originalidad y calidad. (...)*

*Podríamos de este modo resumir que el primer enfoque situaría los productos creativos en elementos ligados a la motivación, personalidad y actitudes del individuo, todos modificables por el entorno. Sin embargo, el segundo enfoque generaría la producción creativa de la cognición o inteligencia, siendo así menos o nada mutable o modificable.*

*(...) podemos recalcar que el término creatividad, puede ser usado en un doble sentido: como un proceso que lleva a la realización de productos originales y como la capacidad para producir muchas ideas (fluidez) diferentes (flexibilidad) y reestructuradas (elaboración). Estas son dos condiciones que permiten evaluar si un producto, idea o enfoque es o no creativo.*

*En esta línea, Marín (1984: 30 y 31), hablando de lo que debemos tener en cuenta para valorar si una persona es o no creativa, dice lo siguiente: Precisamente uno de los indicadores para medir el nivel de creatividad es la cantidad de respuestas dadas (...) la fertilidad productiva que se designa como fluidez. Otro rasgo apuntado es la novedad (...) Es el rasgo que viene designándose como originalidad. (...) hay un tercer criterio ya clásico que es el de la flexibilidad (...) Los tres criterios enumerados: la fluidez, la originalidad, la flexibilidad, son generalmente aceptados y subyacen en todos los campos.*

*Gervilla (1992: 54 y 55) completa los elementos ya señalados para medir la creatividad y da los siguientes indicadores:*

*1. Fluidez: cantidad total de palabras, pensamientos, ideas, figuras, etc.*

*2. Originalidad: palabras o ideas poco frecuentes, que se salgan de lo común.*

*3. Flexibilidad: capacidad para pasar de una idea a otra; de una categoría a otra; producir soluciones dispares y adaptar la mente a dichas soluciones.*

4. Elaboración: riqueza de detalles que matizan la intuición original.

5. Apertura: las mentes creativas están siempre abiertas a nuevas investigaciones y enjuician la realidad desde numerosas posibilidades.

6. Comunicación: las personas creadoras dan forma a lo que saben y lo comunican a los demás.

7. Sensibilidad y receptibilidad: estos individuos son muy receptivos; captan hasta los pequeños detalles y reaccionan ante ellos.

Con respecto a la comunicación pueden surgir dudas de si una persona que no comunica lo que descubre se puede considerar creativa. Por supuesto que será creativa, pero la verdad es que creemos que se debe considerar más creativa a la persona que investiga obteniendo los frutos correspondientes y los comunica que a la que no los comunica, ya que la primera, aparte de crear, sabe cómo hacer partícipes a los demás de sus descubrimientos y por tanto es doblemente creativa, pues también puede considerarse que hay cierta dosis de creatividad en saber transmitir conocimientos.

En la página web

<http://www.hfainstein.com.ar/articul/creatividad.html>

Héctor Fainstein dice lo siguiente respecto de los **indicadores para medir la creatividad**: *La fluidez, flexibilidad, elaboración y originalidad, son también elementos insoslayables. También están presentes la incubación, la eliminación y la evaluación...*

*Fluidez es dar respuestas, es generar muchas ideas. Como cuando uno ve o escucha a alguien que no se queda con una única respuesta, aunque sea correcta, e intenta elaborar alguna más, uno percibe que esa persona está más allá de los cómodos caminos tradicionales de “las únicas alternativas” posibles. Por lo que es la disposición o la intención para hacer algo creativamente. Si bien, este es el objetivo, la búsqueda de la fluidez es una de las formas de transformar este enfoque global en una intención creativa con un “sub-objetivo” alcanzable...*

*La flexibilidad es la medida de las “categorías” utilizadas. Estas implican universos de ideas, mundos diferentes de ideas. La flexibilidad se logra superando los límites tradicionales de nuestra experiencia y nuestro conocimiento. (...) Una actitud hacia la flexibilidad puede expresarse como el poder de adaptarse a varias situaciones. (...)*

*Una respuesta original es una respuesta diferente dentro de una muestra dada. Decir lo que nadie dijo, hacer lo que nadie hizo. (...)*



*Una respuesta elaborada es una buena respuesta en la que se pone cuidado. Una respuesta sobre la cual se trabaja una vez generada (...) La elaboración es la capacidad de “tratar” algo cuidadosa y minuciosamente. (...)*

*La imaginación es de vital importancia cuando buscamos generar respuestas innovadoras. (...) El valor de la imaginación está en que no puede ir más allá de los límites de lo entendible, lo razonable, lo verdadero o lo lógico. (...)*

*El impacto tiene que ver con qué es lo que produce nuestras respuestas más allá de lo que nosotros podemos manejar. (...) **En creatividad hay muchas cosas que no se pueden explicar.** Incluso una idea muy común comunicada de una manera especial puede tener más impacto que una idea brillante mal comunicada...*

*Redefinir el problema es como hacer una pausa y preguntarnos ¿qué es lo que en realidad nos están pidiendo? ¿qué es lo que en realidad tenemos que lograr? (...) Es trabajar creativamente sobre el problema en lugar de comenzar a trabajar directamente sobre las respuestas. (...)*

*Innovación es la capacidad que tiene una empresa para hacer cosas distintas, lo que genera mayor valor económico. (...) la innovación es la creatividad de las ideas (...)*

*Hay que manejarse con dos tipos de consignas: por un lado la fluidez, la flexibilidad, etc., pero por otro lado no perder de vista nuestro objetivo final. Por más que estemos “volando” en la búsqueda de fluidez, flexibilidad, redefiniciones, elaboraciones, impacto, originalidad o respuestas imaginativas, debe existir una idea constante de que todo eso tiene un sentido, una orientación.*

Respecto de la definición que da de fluidez como: *dar respuestas, generar muchas ideas*, queremos destacar que el tiempo que se dedique para dar respuestas o generar ideas hay que tenerlo en cuenta también. No es lo mismo dar todas las respuestas que se nos ocurran a un problema utilizando sólo 5 minutos, que empleando todo el tiempo que queramos.

En resumen, los indicadores que tenemos para medir la creatividad son:

i) **Fluidez:** Es la capacidad para producir abundantes ideas, palabras, pensamientos, figuras, etc., en el menor tiempo posible.



ii) **Originalidad e innovación:** Es la facilidad para emitir palabras, ideas, pensamientos, figuras, etc. que se salgan de lo común. Es la capacidad que tiene una persona para hacer cosas distintas, lo que genera mayor valor. Es la creatividad de las ideas.

iii) **Flexibilidad:** Es la capacidad para producir ideas diferentes; para pasar de una idea a otra; de una categoría a otra; para producir soluciones dispares y adaptar la mente a dichas soluciones.

iv) **Elaboración:** Es la capacidad para reelaborar ideas. Es la riqueza de detalles que matizan la intuición original a través de una presentación bien estructuradas.

v) **Apertura:** Es la capacidad para aceptar o incluir en el razonamiento nuevas ideas, aunque sean ideas de otros, y enjuiciar la realidad desde diversos puntos de vista, algunos de los cuales no se nos habían ocurrido con anterioridad.

vi) **Comunicación:** Es la facilidad para dar forma y dar a conocer a los demás de manera comprensible lo creado.

vii) **Sensibilidad y receptibilidad:** Es la capacidad para captar los pequeños detalles y reaccionar ante ellos.

viii) **Imaginación:** Es la capacidad para “ver” lo que a simple vista no se destaca por no estar presente en la realidad. El valor de la imaginación está en que no puede ir más allá de los límites de lo entendible, lo razonable, lo verdadero o lo lógico.

ix) **Intuición:** Es la capacidad para anticiparse a la comprensión de una cosa, una idea o una verdad, sin utilizar el razonamiento.

x) **Impacto:** Es la capacidad de asombrar de manera intensa al mayor número posible de personas, y si estas personas están preparadas para entender sobre el tema en cuestión mejor aún. Una idea muy común, comunicada de una manera especial, puede tener más impacto que una idea brillante mal comunicada.

xi) **Redefinición del problema:** Es la capacidad para, cambiar algunos —o todos— datos, cambiar el problema, enunciarlo de forma distinta. También es hacer una pausa y preguntarse ¿qué es lo que en realidad se está pidiendo?, ¿qué es lo que en realidad hay que lograr? Es trabajar creativamente sobre el enunciado del problema en lugar de comenzar a trabajar directamente sobre sus posibles respuestas.

Nos identificamos totalmente con estas ideas de creatividad y con los indicadores para medirla. Y al hilo de las consideraciones que hemos hecho, añadiríamos que creatividad proviene de crear, etimológicamente es sacar algo de la nada, si bien no siempre tenemos que entender esta nada en términos absolutos, sino que podemos obtener algo partiendo de otras cosas ya conocidas, luego nosotros entenderemos crear como lo siguiente:

**a) Sacar algo desconocido para nosotros a partir de lo conocido**, y por esto la creatividad será también para nosotros: recrear, redescubrir, reelaborar... En este sentido, cuando el niño redescubre cualquier concepto matemático, aunque sea elemental, pensamos que está siendo creativo.

La UNESCO en la dirección

<http://www.unesco.org/culture/creativity/html>

haciendo referencia a que la creatividad no tiene que surgir de la nada, dice: *Pero la creatividad no brota de la nada. Debe alimentarse, dársele libertad de existir y prosperar al amparo de una protección jurídica y no debe reprimirse ni censurarse.*

**b) El proceso mental mediante el cual la persona es capaz de producir una información que antes no tenía** y que por tanto puede considerarse nueva para ella aunque no lo sea para los demás. Por esto podemos considerar que casi todo el mundo es creativo, ya que cuando nos centramos en dar una respuesta a una situación, es corriente que algunas veces “surja la chispa”, sobre todo si el tema nos interesa, y se descubra algo que no pensábamos se nos podía ocurrir.

También es cierto que no todos podemos ser creativos en todas las materias ni en todas las facetas de la vida, y que unos tienen más facilidad para ser creativos que otros. Para poder crear se necesitan unas determinadas condiciones, como pueden ser: tener unas aptitudes especiales, estar motivado, tener gran interés por el tema en cuestión, necesitar resolver un problema ya que la necesidad agudiza el ingenio, darle vueltas al asunto sin cansarse, echarle imaginación, pensar en cuál sería la respuesta más acertada para el problema que nos ocupa, etc.

En la siguiente dirección:

<http://juventurini.com/Creatividad.html>,

Jorge Venturini al hilo de las consideraciones anteriores, comenta lo siguiente: *La creatividad es la capacidad humana de modificar la visión que tiene de su entorno a partir de la conexión con su yo esencial.*

*Esto le permite al hombre generar nuevas formas de relacionarse con ese entorno, crear nuevos objetos, generar nuevas propuestas de*

*vida. Esta capacidad, si bien está fuertemente determinada por los genes y la historia personal, también puede ser estimulada y desarrollada.*

*Los nuevos conocimientos que la investigación biológica proporciona en cuanto al funcionamiento del cerebro, y del sistema nervioso en general, nos dicen que la arquitectura del mismo, o sea el conexionado de las neuronas se modifica con la actividad que tenga. El estímulo creativo enriquece el cerebro.*

Es por lo que pensamos que no se puede dejar la educación en la creatividad para más tarde, el tiempo es fundamental, y desde que el niño nace, y por supuesto en Educación Infantil, hay que cuidar el potencial creativo que tiene.

Héctor Fainstein en la dirección

<http://www.hfainstein.com.ar/articul/creatividad.html>

respecto de que las personas inteligentes suelen ser más creativas, comenta: *La creatividad es un proceso, una característica de la personalidad y un producto. Las personas que hacen cosas creativas (productos) lo hicieron con determinados procedimientos (procesos) y actuaron de determinada manera (características de personalidad). El problema aquí es que al parecer no hay elementos comunes en todos los creativos. Sin embargo, sí hay algunos elementos comunes como la inteligencia. Sí, es necesario una **inteligencia** sobresaliente para ser creativo, una inteligencia sobresaliente en el campo donde se es creativo. No es necesario ser un genio de las matemáticas para ser un genio de la danza, el bailarín es inteligente en su campo. La **persistencia**, la tenacidad es sin duda otro factor común en la creatividad. A lo anterior también puede llamársele motivación o cualquier término que hable de una fuerza constante que obligue a actuar hacia el cumplimiento de un objetivo.*

Si una persona sabe de antemano la solución de un problema no podemos considerar que haya sido creativa al dárnosla, aunque sea la mejor solución para el problema que nos ocupe. Para considerar que ha sido creativa es condición imprescindible que no conozca la solución y si la conoce que sea capaz de superarla de algún modo: completándola, generalizándola, simplificándola, aplicándosela a otra situación completamente distinta, etc.

**c) Salirse de los moldes establecidos.** Es, por ejemplo, resolver un problema de forma original, aunque sea por “la cuenta de la vieja” si con ello está rompiendo con la forma establecida para resolverlo.

**d) Hacer que surja lo mejor de nosotros para darlo a los demás,** para llevarlo a aquella idea, a aquella situación, a aquella obra, etc.

El profesor, si quiere formar alumnos que sean creativos, debe tener una actitud de vida permanentemente creativa. Necesita: o bien ser creativo o educar su creatividad, ambas pueden resumirse en fomentar la creatividad. Tener ideas y comunicarlas es una manifestación del potencial creador y una forma de fomentar nuestra creatividad y la de los demás.

M<sup>a</sup> del Pilar González, en su tesis doctoral: “Educación de la creatividad”, en

[http://www.biopsychology.or/tesis\\_pilar/o5.html](http://www.biopsychology.or/tesis_pilar/o5.html)

(1981, Capítulo I: 15, 16), comentada anteriormente, dice: *Se han acumulado evidencias en todos los campos de que toda suerte de capacidades, incluso si estuviesen genéticamente fijadas, tales como la inteligencia, están influenciadas por el ambiente, es decir, por el aprendizaje y la experiencia. (...) Sabemos que la inteligencia es, en gran manera, interiorización de lo suministrado por una cultura dada. De ello surgen diferencias en el desarrollo cognitivo. Si esto es válido, es innegable que se podrían encontrar también diferencias en la creatividad según la cultura.*

**e) Profundizar en lo que creemos conocer para lograr observarlo desde otro punto de vista.** Si no profundizamos en lo que pensamos que conocemos, sólo llegamos a donde han llegado los demás, sin permitir que nuestro conocimiento sea el motor de un cambio, de una transformación, de una innovación. Cuando hemos estudiado algo y nos ha interesado, lo lógico es que, si podemos, busquemos más cosas relacionadas con el tema. Después de esto, podemos dejarlo ahí, o pensar con insistencia sobre el tema para ver si le podemos sacar más partido. Si no lo hacemos así, perdemos la posibilidad de disfrutar intentando o, en algunos casos, de lograr obtener algo original.

**f) Capacidad de despertar en los demás interés por lo que hacemos.** Esto se puede poner de manifiesto cuando se observan los siguientes síntomas:

En nosotros:

- ♣ Deseos de progresar en el campo en que trabajamos. En nuestro caso sería tremendamente útil lograr esto en Matemáticas.
- ♣ Interés por los avances que otros realizan en nuestro campo.
- ♣ Interés por aplicar nuestros resultados a otros campos...

En los demás:

- ♣ Admiración por lo que hacemos.
- ♣ Admiración por cómo lo hacemos.
- ♣ Deseos de trabajar en nuestro tema.

Pensando en estructurar nuestras aportaciones de algún modo, se nos ocurrió el siguiente pictograma estructural de síntesis:

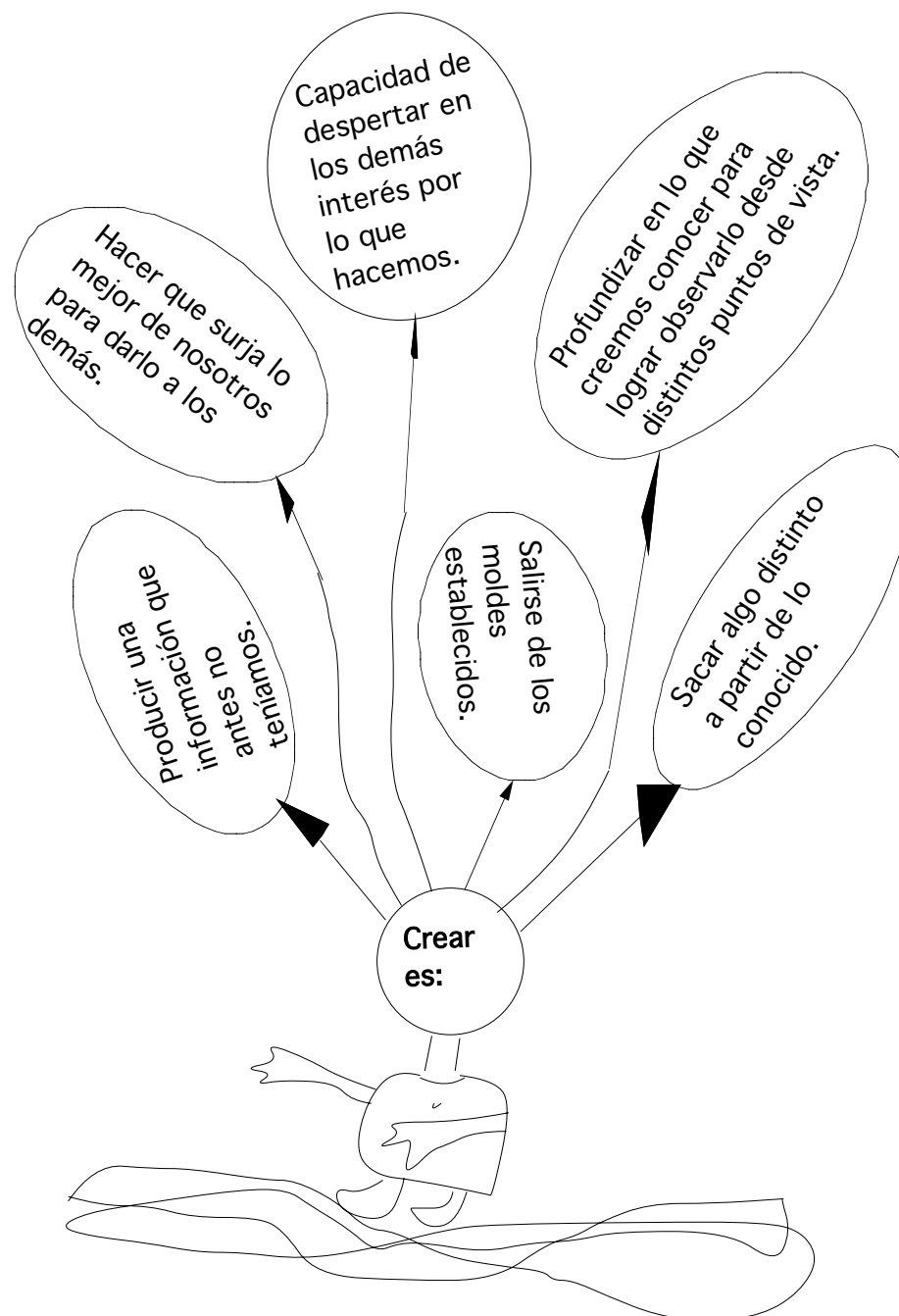


**Figura 1: Pictograma estructural de síntesis que resume nuestras aportaciones a la definición de creatividad.**

La idea surgió al considerar que son las personas las que crean y que de la cabeza nacen todas las ocurrencias y, por tanto, entre ellas, las

definiciones de creatividad que nos pueden venir a la mente. Si bien no todas surgen del mismo modo. Por ello no están todas escritas en el mismo sentido, ni al mismo nivel... Se elevan como globos hacia las estrellas, como nosotros nos elevamos cuando se nos ocurre alguna idea nueva y original. El niño va marchando, ya que la persona creativa tiene su mente continuamente activa pensando en algo que le preocupa y considera que es ella la que puede aportar la solución. Casi no se sostiene en el suelo; está como en una nube. Cuando surge la chispa, la persona no mira hacia abajo, no sabe donde están apoyados sus pies.

**El ambiente puede motivar la creatividad.** Se es creativo en un ambiente de libertad, receptivo, estimulante, valorativo, de ayuda, de exploración, etc., sin presiones, ni prisas, ni represiones, ni críticas negativas, ni tensiones, etc. Aunque un ambiente que no tenga todas estas características puede también ser propicio para la creatividad, ya que en muchos casos el ser humano se crece en la adversidad o en un ambiente salpicado de obstáculos.

**La creatividad no tiene fin.** Siempre podemos incorporar algo nuevo, algo distinto a lo que nos encontramos. Todos podemos ser imprevisibles, inagotables. Tenemos múltiples posibilidades para poder ver las cosas de forma original. Lo único que tenemos que hacer es proponérselo.

Es el momento de plantearnos la pregunta: ¿se puede ser creativo en Matemáticas con el tema “las Magnitudes y su Medida”, cuando trabajamos con niños de Educación Infantil? La verdad es que la cuestión es complicada desde cualquier punto de vista que se mire. En este periodo el niño empieza a asistir a la escuela, con los problemas de adaptación que ello conlleva. Probablemente no sea el momento más crítico para el estímulo del pensamiento creativo, pero si dijéramos que no podemos fomentar la creatividad del niño en Matemáticas, ya que en esta disciplina y a este nivel está todo inventado, y además los niños son muy pequeños para que pensemos que puedan ser creativos, no tendríamos nada más que tirar la toalla y dedicarnos a otra profesión que no fuese la enseñanza. Debemos ser nosotros los primeros en encontrar el estímulo, el aliciente, las ganas... para poder motivar a los demás y, fundamentalmente, a nuestros alumnos.

Si no dejamos que el alumno sea el investigador de su propio saber y, por tanto, quien redescubra todo lo que va aprendiendo mediante la manipulación y el juego, estaríamos haciendo nuestra asignatura monótona y aburrida y, como consecuencia, seguiría ocurriendo lo que hasta ahora: que las Matemáticas producen muchos fracasos y son rechazadas por gran número de escolares. Pensamos que hay que empezar a acostumbrar al niño a disfrutar con las Matemáticas desde los

cimientos. Hay que trabajar las Matemáticas jugando creativamente, para que el estudio de esta signatura no sea un fastidio sino algo atractivo, e incluso divertido. Por tanto, tenemos que ponerle originalidad a la enseñanza de las Matemáticas y fomentar en el niño el uso de la imaginación, ya que ésta se vuelve más eficaz cuanto más se practica.

Entendemos que es en Educación Infantil donde debemos presentar actividades a los alumnos, en las diferentes áreas, a través de una Metodología Creativa. “Las Magnitudes y su Medida” se prestan bastante bien a ello. Con esto estamos facilitando que el niño sea expresivo, comunicativo, original, espontáneo, etc., a la vez que va sintiendo la necesidad de iniciarse, sin ser forzado, en el uso de los patrones que se emplean para la medida de las distintas magnitudes, y se le va motivando con objeto de que invente otros instrumentos para realizar dichas medidas, e incluso otras magnitudes que se puedan medir. Es más, puede que descubra instrumentos que faciliten la medida de otros entes que no son magnitudes y que en la actualidad no son medibles, pero cuya medida puede aportar grandes beneficios a la humanidad.

### 1.3. Metodología Creativa

Es corriente confundir el método con las modalidades que puede adoptar para la explicación de la variabilidad con que se produce. Quizá pueda ser debido a que los términos método y metodología se emplean tanto para hablar de aspectos didácticos como de aspectos científicos. Empezamos planteándonos la definición de los términos método y metodología.

Para Moreno (1988: 103) el **método** es un procedimiento estructurado, *un conjunto de medios que aporta los materiales necesarios para la constitución de cualquier disciplina elaborada por el ser humano*, y **metodología** sería el estudio de los métodos utilizados para obtener conocimientos. Por tanto, denominamos metodologías a las estrategias (modalidades según Delgado y Prieto, 1997) de las que se sirve el método. Así, cuando se habla de método observacional, método selectivo o método experimental, estamos refiriéndonos a las metodologías o modalidades del método de investigación.

Según De la Torre (Marín y De la Torre, 1991: 56-59) *el método representa siempre modos o vías generales (...) Entendemos el método como la trayectoria mental, vía seguida, manera de hacer el recorrido que nos conduce a la meta. (...) No podemos olvidar que el método es un medio instrumental de eficacia procesual. (...) Hablar de método es hablar de procesos mentales, de estrategias cognitivas. (...) Lo*



*calificamos de **creático** cuando dicha manera de proceder facilita el proceso creativo. (...) lo creativo no se opone a procesos lógicos, sino a lo irrelevante y rutinario. Un método resulta creativo en la medida que sobrepasa la esperanza de eficacia didáctica obtenida por los métodos racionales en la consecución de unos objetivos. (...) El método creativo ha de tener el poder de concentrar las energías mentales, de estimularlas, de facilitar los procesos de ideación, de romper la lógica cuando sea preciso, de provocar y sorprender al discente, de distanciarse del problema.*

*Caracterizamos la metodología creativa, diferenciándola a su vez de las técnicas y actividades (...) por:*

*1) Su generalidad en los fines propuestos y en las líneas demarcadoras en su proceso. (...)*

*2) Su amplitud le permite integrar técnicas diferenciadas y ejercicios de todo tipo. (...)*

*3) La heterogeneidad de sus procedimientos, desde la coherencia lógica de la heurística a los métodos ilógicos, intuitivos, aleatorios u oníricos.*

*4) La indeterminación en los pasos que han de seguirse, quedándose en esbozar la vía procedimental, sin bajar al detalle operativo. “Un método no es en absoluto una serie de operaciones predeterminadas, sino un proceso mental”.*

*5) Su diversificación en variantes procedimentales, que llevan a los autores a hablar de “métodos” heurísticos, inventivos, analógicos, antitéticos, aleatorios, etc.; en plural, en lugar de utilizar el singular, empleado preferentemente al referirse a las técnicas.*

*6) Su independencia respecto a los problemas. Ciertamente, podemos aplicar métodos diferentes para resolver un problema o con un mismo método dar solución a problemas distintos.*

Nos parece, en cierto modo, clarificadora la definición de método que da De la Torre, aunque creemos que no queda clara la diferencia entre método y metodología, ya que, como puede observarse en toda esta cita, parece ser que De la Torre identifica método con metodología, según las definiciones que vimos al comienzo de este apartado.

**Definición:** Nosotros vamos a considerar **el método** como el modo de obrar o de proceder que cada uno tiene y observa para llegar a ciertas metas. Así se puede hablar de métodos de enseñanza como los modos

de proceder para comunicar un conocimiento. También se puede definir el método como el camino a seguir para conseguir un objetivo. De este modo se puede hablar de métodos eurísticos como el camino a seguir para conseguir un conocimiento científico, o de métodos didácticos cuando se considera el camino a seguir para la transmisión de un conocimiento. Como la investigación se puede considerar como un proceso para obtener la creatividad, es por lo que se puede hablar de métodos de investigación. También se habla de métodos de demostración como el camino a seguir para demostrar una proposición. No nos vamos a detener a ver ninguna clasificación de los métodos creativos, esto puede encontrarse en Marín y De la Torre (1991: 60 a 65).

Intentando ampliar con lo que aparece en la web la diferencia entre método y metodología, nos encontramos que José Rodríguez de la Rivera, profesor de la Universidad de Alcalá de Henares, en la dirección

[http://www2.uah.es/estudios\\_de\\_organizacion/epistemologia/metodo\\_concepto\\_problemas.htm#\\_Clasificación\\_de\\_los](http://www2.uah.es/estudios_de_organizacion/epistemologia/metodo_concepto_problemas.htm#_Clasificación_de_los)

comenta lo que vienen a continuación: *Dado el confusionismo habitual en que en lugar de metódicas (por ejemplo, de investigación empírico-estadística de mercados) se habla de “metodología”, al asumir el nivel de una observación metateórica habrá que distinguir aquí tres términos que designan tres formas de comprender el método:*

(1) Método, en el sentido indicado, de camino o procedimiento racional para llegar a ciertas metas.

(2) Metódica como conjunto de métodos (por ejemplo; en la gestión integral de la calidad, de la logística, en la investigación de mercados etc., se emplean no un método o herramienta única, sino conjuntos de métodos que se complementan). En este caso los métodos de demostración, indicados anteriormente, deberían ser metódicas de demostración.

(3) Metodología (de *metodos* y de *logos*, razón sobre el método): que se sitúa al nivel de la meta-observación y que se desarrolla como análisis (meta-teórico) de las condiciones y exigencias de y al método.

Tanto la definición de método como la de metodología puede verse que coinciden con las que dimos anteriormente. En el caso del método dijimos que era el camino a seguir para conseguir un objetivo, es análogo a *camino o procedimiento racional para llegar a ciertas metas*.

**Definición:** Para nosotros la **metodología** se define como el estudio de los métodos. Coincide con el *análisis (...) de las condiciones y exigencias de y al método*. Vamos a considerar, en adelante, el término metodología

también como estrategias de actuación concreta en la enseñanza-aprendizaje, el modo de seguir el proceso de enseñanza-aprendizaje, distinguiéndolo del término método aclarado anteriormente. Por tanto, hablaremos de **Metodología Creativa** cuando la estrategia de actuación en la enseñanza-aprendizaje sea fomentar la creatividad.

## 1.4. Técnicas de Metodología Creativa

Nuestro objetivo es aplicar las técnicas de Metodología Creativa a la enseñanza de “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil, por tanto nos interesa saber lo que se entiende por técnicas y cuándo estas se consideran creativas.

Según De la Torre (Marín y De la Torre, 1991: 56-57) *la técnica representa procedimientos concretos. La dificultad vendrá, sin embargo, al abordar técnicas complejas que cuentan a su vez con modalidades o subprocedimientos. (...) Las técnicas son formas de proceder, específicas en sus objetivos y detalladas en la descripción de los pasos que han de seguirse, lo cual no es atribuible a los métodos. (...) Más tarde (págs. 66-71) comenta: las técnicas son estrategias concretas o modos de proceder valiéndose de pasos o fases debidamente organizados y sistematizados para alcanzar determinados objetivos. (...) El verdadero núcleo de la técnica creativa ha de buscarse en los mecanismos de su desarrollo y aplicación...*

*Los sistemas legitiman la acción, los programas la desarrollan, los modelos la organizan, las técnicas la llevan a la práctica. (...) bien podemos decir que los sistemas y los modelos se asumen conceptualmente, los programas se implementan o desarrollan, los métodos se siguen, las técnicas se aplican y las actividades se ejecutan. (...) Las dimensiones o componentes que debiéramos analizar al aplicar una técnica creativa son:*

- a) Sus fundamentos teóricos, que la legitiman.*
- b) Sus objetivos específicos, que la orientan.*
- c) Su aplicación, que la conforma.*

*El valor de una técnica viene dado por su eficacia en la consecución de los objetivos... No resulta excesivo afirmar que la creatividad está en la intención de quien aplica la técnica más que en el contenido de la misma.*

*Toda técnica creativa puede ser descrita como un proceso, como una cadena o secuencia de pasos a seguir, de reglas a aplicar. Se suele iniciar con la clarificación de la meta o problema. ¿Qué se quiere resolver, averiguar o conseguir? En una segunda fase entran en juego los mecanismos o pasos particulares de cada técnica. ¿De qué mecanismos se valen para provocar la ideación, el cambio de actitud? La técnica demoledora quebrantará el problema, lo descompondrá al máximo en todas las situaciones posibles. La aleatoria los yuxtapondrá artificialmente para buscar relaciones. La analógica buscará planteamientos semejantes que den luz al problema. En una fase final se llega a la síntesis, la clarificación, la sistematización o la elaboración buscada. (...)*

*Las técnicas no hacen que las personas sean creativas. No dan directamente el potencial creativo a quien no lo tiene. Este vendrá conformado por el conjunto de rasgos individuales y de estilo (...) Ellas nos desinhibirán, desbloquearán y nos facilitarán el acceso a la reserva preconscious, cuando existan dificultades por vía lógico-racional...*

Según Gervilla y Prados (2003: 390) podemos afirmar lo siguiente: *Las técnicas son las estrategias concretas que se aplican de forma organizada y sistematizada, que tienen por objetivo favorecer el pensamiento creativo* (definición que consideramos análoga a la anterior).

Entendemos por **técnicas** los modos concretos de proceder en la adquisición de un conocimiento que debe ir debidamente organizado y sistematizado. Decimos que la **técnica** es **creativa** si tiene como fin favorecer la creatividad.

La aplicación de cualquier técnica creativa debe ir acompañada de una forma de pensar y de actuar que sea original. El objetivo es conseguir incorporar la creatividad a nuestro modo de pensar y de actuar en cualquier aspecto o circunstancia de la vida, para poder abordar ahora y en el futuro cualquier problema que se plantee o se pueda plantear.

La actividad escolar debe apostar esencialmente por tareas creativas desde las que los alumnos puedan profundizar para encontrar nuevos conocimientos, inventar y reconstruir problemas para llegar a conclusiones válidas mediante relaciones sencillas o relaciones entre relaciones, sin accidentalidad, sin adivinación y sin arbitrariedad. (...) La creatividad como forma de conocimiento no consiste en permitir que el alumno haga todo lo que se le ocurra, sino en conseguir que al alumno se le ocurra todo lo que científicamente se le pueda permitir. (Fernández, 1997: 44).

Según De la Torre (Marín y De la Torre, 1991: 79-86): *En cualquier ámbito del currículum (matemáticas, ciencias sociales, lengua, idiomas, manualidades, dibujo) es posible la actividad creativa. (...) la creatividad nos facilita la respuesta a necesidades y problemas que a diario se plantean en nuestra sociedad.*

Queremos acercar las técnicas de Metodología Creativa a las Matemáticas comentando cada una de ellas en este primer Capítulo y servirnos de ellas para, después en el Capítulo III, proponer una serie de actividades que puedan ser utilizadas por cualquier profesional de la enseñanza en Educación Infantil. Actividades divertidas pero que no sean un simple pasatiempo para el niño, que tengan que ser la base de los conocimientos matemáticos que después vaya adquiriendo, que puedan formar parte de lo que se le enseñó al niño en un momento dado para que le sea útil en el futuro.

Las actividades no las proponemos aquí porque consideramos que después, cuando estudiemos el tema de “las Magnitudes y su Medida”, estaremos mucho más capacitados para poder inventar actividades que realmente sean un reflejo en Educación Infantil de la preparación adquirida al estudiar el tema a nivel universitario.

## 1.5. Técnicas de Metodología Creativa aplicadas a las Magnitudes y su Medida en Educación Infantil

Emplearemos distintas técnicas de Metodología Creativa. Preferentemente seguimos, en parte, las que recogen Marín y De la Torre (1991: 231-510) y Gervilla (1992: 72-79). Elegimos entre ellas, y las adaptamos, aquéllas que consideramos más apropiadas e interesantes para el tema que nos ocupa: “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil. Además, añadimos una propia, que recoge los aspectos más destacados de las anteriores.

Puede ser que no queden muy claras las distintas técnicas en este primer Capítulo, al no poder poner las actividades a continuación del comentario de cada técnica, ya que, aunque su estudio sea bastante detallado, consideramos necesario un conocimiento del tema sobre el que van a versar dichas actividades: “las Magnitudes y su Medida”. Si bien, pensamos que en el tercer Capítulo, cuando se vean las actividades que proponemos para cada una de las técnicas, debe quedar todo claro. La mejor forma de entender cada una de las técnicas es verla utilizada en una o varias actividades.

De las actividades que propongamos, unas irán dirigidas al alumno de Educación Infantil y otras al alumno-profesor; para éste último hay también algunas actividades o ejercicios en el Capítulo II.

Para poder considerar cómo se pueden usar las distintas técnicas a la vez, al final del Capítulo III, veremos utilizadas todas ellas en distintas actividades relacionadas con “las Magnitudes y su Medida”. Trabajaremos cada actividad con todas y cada una de las técnicas que comentamos en este Capítulo. Con ello observaremos desde otro ángulo distinto el interés que tienen las técnicas de Metodología Creativa.

### 1.5.1. El arte de preguntar

Cualquier persona a lo largo de su vida se plantea (o le plantean) múltiples cuestiones en su actividad diaria; algunas de ellas no tendrán ningún interés ni para ella ni para los demás, otras pueden ser la causa de grandes descubrimientos. Si una persona no conoce un tema concreto y formula preguntas sobre ese tema, normalmente son de escaso interés. Las personas que tienen mayor información sobre un tema son las que suelen hacer las preguntas más interesantes.

Cuando el profesor explica cualquier tema en clase, con las preguntas motiva a los alumnos para que se interesen por él. Y por las preguntas que realiza un alumno en clase el profesor puede saber —o al menos eso cree— el nivel de conocimientos que tiene y el que está dispuesto a adquirir —salvo excepciones. Se puede afirmar que, generalmente, aquellos alumnos que llevan la asignatura al día son los que hacen las mejores preguntas, de las cuales no sólo se benefician sus compañeros sino también el profesor.

Para Gervilla-Prado (2002: 395) *La pregunta es un elemento clave puesto que rompe el aislamiento, establece la comunicación, dinamiza el grupo y convierte la pregunta en una conquista.*

Según Marín (1984: 73) *...las condiciones que frenan o paralizan la pregunta. La primera es la soberbia intelectual. Cuando se cree que ya se sabe todo ¿para qué seguir preguntando? ...*

Para aplicar esta técnica Gervilla (1992: 74) realiza un esquema en donde se le presenta al niño una cosa o persona X, que lo motive, para preguntarle sobre los siguientes puntos:

- i) **Sustancia:** Su esencia es ser... ¿Qué es? ¿Por qué X es X?



ii) **Fin:** ¿Para qué...? ¿Para qué es...? ¿Para qué sirve...?; ¿se podría usar para otros fines?

iii) **Persona:** ¿Quién lo hizo? ¿Cómo lo harías tú? ¿Quién lo usa?; ¿lo podrían utilizar más personas? ¿Para quién se hizo? ¿Con quién...? ¿De quién es? ¿Por quién se podría manejar? ¿Cómo o para qué lo usaría un profesor?

iv) **Materia:** ¿De qué está hecho?; ¿podría hacerse con otros materiales? ¿De qué color es? ¿Qué otros colores podría tener?

v) **Relación:** Otras cosas o personas con que tiene relación. ¿A qué se parece?; ¿se podría parecer a otra cosa? ¿Con qué se relaciona? ¿Con quién se relaciona?

vi) **Medios:** ¿Cómo cumple su función? ¿Cómo se usa?; ¿de qué otra forma se podría utilizar? ¿Por medio de qué se puede usar?

vii) **Acción:** ¿Qué produce o podría producir? ¿Se mueve?; ¿qué pasaría si se moviese? ¿Tiene vida? ¿Qué pasaría si no se muriese?

viii) **Cantidad:** ¿Puede ser mayor, menor, de otra manera? ¿Cómo es de grande?; ¿podría ser mas grande? ¿Cuánto vale? ¿Cuánto pesa? ¿Podría ser tan ligero como una pluma? ¿Cuántas veces es más grande? ¿Es más pequeño? ¿A qué distancia está?

ix) **Cualidad:** ¿Qué defectos tiene?; ¿cómo se podrían corregir? ¿Qué beneficios conlleva? ¿Cómo te beneficiarías mejor de él? ¿Puede ser más perfecto o de otra manera?

x) **Tiempo:** El X de ayer, de hoy, de mañana. ¿Cuándo se utiliza...? ¿Cuándo...? ¿Por cuánto tiempo...? ¿Más a menudo...?

xi) **Lugar:** ¿En qué otro lugar...? ¿A qué distancia...? ¿Dónde...? ¿De dónde...? ¿Hacia dónde...?

xii) **Valores:** Consecuencias si no existiera o dejara de existir. ¿Qué pasaría si no existiera...? ¿Qué pasaría si dejara de existir...? ¿Qué pasaría si existiera...?

xiii) **Recepción:** ¿Qué influye sobre X? ¿Cómo se puede perfeccionar?

Se sobreentiende que no tenemos que hacer a los niños de Educación Infantil todas las preguntas que planteamos al comentar esta técnica, ya que hemos planteado más de cuarenta. Sería suficiente con



hacerles cuatro o cinco de cada tema en el que quisiéramos indagar con ellos, que podrían ser sobre lo que hay o sucede hoy —es decir de lo real—, o bien de lo que podría pasar en el futuro o en la fantasía —es decir de lo posible o fantástico. Tenemos que dejar claro al niño cuándo estamos hablando de la realidad y cuándo de lo futurible o de la fantasía. A esta técnica, por estar constituida por preguntas, se le llama también **la interrogación** —si se trata sólo de lo real— o **la interrogación divergente** —cuando nos referimos a lo posible o fantástico.

Es importante hacer preguntas claras y bien redactadas para evitar ambigüedades, aunque no importa que la pregunta parezca no estar muy relacionada con el tema, ya que de preguntas en apariencia absurdas se pueden sacar resultados sorprendentes.

Cuando estemos trabajando el tema “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil, es muy interesante aplicar esta técnica para estimular el pensamiento creador, la fantasía, la originalidad, la imaginación, etc., ya que en la medida de una magnitud no está todo descubierto. Piénsese, por ejemplo, cómo ha evolucionado la medida del tiempo desde el reloj solar al reloj digital. Lo mismo se podría decir de la medida de cualquier otra magnitud. Si nuestros alumnos están suficientemente bien motivados, podrían ser los futuros inventores de otros instrumentos que nos permitieran medir las magnitudes usuales más cómodamente, o descubrir nuevas magnitudes, o fabricar instrumentos que hagan posible medir otros conceptos que no son magnitudes, que podrían ser medibles y todavía no sabemos cómo hacerlo...

### 1.5.2. El torbellino de ideas o brainstorming

Fue ideada por Alex F. Osborn (especialista en creatividad y publicidad) alrededor de 1930 —publicada en 1963 en el libro “Applied Imagination” (<http://www.fonendo.com/noticias/45/2001/08/3.shtml>)— para aplicarlo a la publicidad y a la industria. Chorness en 1971 lo utilizó en el campo de la enseñanza interactiva en el aula, para cualquier materia. Consiste en lanzar un tema para reflexionar en grupo. Cada uno de los miembros del grupo participa exponiendo todo lo que se le ocurre. Se le llama **torbellino de ideas, tormenta de ideas, promoción de ideas, lluvia de ideas**, etc.; dicho nombre deriva del inglés **brainstorming**, por lo que también se le designa con este nombre. El objetivo es conseguir el mayor número de ideas que sean variadas y originales de donde poder escoger para resolver el problema que hayamos planteado. Debemos tener en cuenta las reglas de oro del brainstorming:

a) **Toda crítica está prohibida** durante la fase productiva de ideas (sólo se permite cuando se procede a su clasificación).

b) **Toda idea es bienvenida.** En un primer momento no se admiten críticas negativas.

c) **Se admiten tantas ideas como sean posibles,** cuantas más mejor.

d) **Es deseable el desarrollo y la asociación de ideas.**

e) **Nadie debe quedarse sin intervenir.** A todos se les debe dar las mismas oportunidades de participar. Por tanto, nadie puede monopolizar la producción de nuevas ideas.

f) **Hay que eliminar todas las timideces;** ningún pensamiento, por extraño que parezca, debe quedar sin exponer. Cualquier ocurrencia, por absurda que resulte, debe ser aprovechada.

g) Todos debemos **escuchar atentamente a los demás** para mejorar nuestras ideas o las de los otros y así comunicarlo cuando nos toque exponerlas.

El profesor actúa como **secretario**, ya que por estar en Educación Infantil, el secretario no puede ser un alumno. El recoge lo esencial de cada una de las ideas por escrito, dándole un número a cada nueva ocurrencia con objeto de saber cuántas ideas tiene el grupo. También puede llevarse una grabadora para ir recogiendo las aportaciones de todos.

Aunque la crítica esté prohibida en un primer momento, sí se pueden aprovechar, en una segunda etapa, las ideas de los demás para mejorarlas. Nadie se tiene que ofender porque sus ocurrencias sean utilizadas total o parcialmente por otros para mejorarlas; lo que importa es que del grupo salgan las mejores ideas.

El torbellino de ideas se puede considerar como una reflexión en grupo ausente de toda crítica en un primer momento.

Para que esta técnica pueda llevarse a cabo en una clase es necesario no detenerse en discusiones ni largas explicaciones; se debe actuar con rapidez, eliminando las represiones. No deben tratarse varias cuestiones a la vez. Cuando se lleve un **tiempo prudencial** con el tema, que puede ser para Educación Infantil de diez a veinte minutos, o cuando se observe que se han agotado todas las ideas, o que los niños se aburren, se trabaja con las respuestas: se pasa a ordenarlas, para

refundir las que se puedan, contraponer las que lo sean y clasificarlas, puntuándolas de uno a cinco, o aplicar las que se consideren más valiosas e incluso aquéllas que no sean válidas para nuestro caso, con objeto de llegar a reconocer, sin lugar a dudas, que hay que rechazarlas.

Todos participan en la **clasificación y organización** de las ideas. Ven los pros y los contras de cada respuesta; si es posible se mejoran o amplían, se **evalúan** con los criterios fijados por el grupo y se eligen las mejores.

En Matemáticas en general y en “las Magnitudes y su Medida”, como caso particular, es una técnica que emplea habitualmente cualquier educador para motivar a los alumnos al iniciar cada tema, con objeto de que estén atentos, pendientes de observar si la respuesta que dieron a la pregunta que le hicimos al principio era o no la correcta.

Para aplicar esta técnica en el tema “las Magnitudes y su Medida” se puede presentar a los alumnos un problema o se puede dejar alguna pregunta pendiente o alguna actividad por hacer sobre dicho tema. Al día siguiente, o el mismo día, cada uno dice cómo la ha resuelto. Si todas las respuestas son correctas hemos terminado. Si un alumno se ha equivocado, puede ser que al oír a sus compañeros reconozca su error y lo manifieste, al intervenir, en una segunda oportunidad o cuando se clasifiquen las ideas. Si no es así, se necesita, en otra segunda fase, plantear la auto-corrección, con lo cual el alumno se dará cuenta por sí mismo del error. Si a pesar de todo no se ha dado cuenta de su equivocación, reflexionamos y lanzamos de nuevo otro torbellino de ideas preguntándoles sobre la respuesta errónea. Aunque Marín (1984: 45) desaconseja el empleo de esta técnica en los problemas que admiten una única solución, y en nuestro caso la respuesta habitualmente tenga que ser única, nosotros consideramos que podemos utilizarla del modo que hemos comentado.

Esta técnica también se aplica de modo individual cuando le dejamos un problema al alumno para que intente resolverlo, recordando todas las formas posibles de llegar a la solución o todas las soluciones que se le ocurran sin ninguna limitación. Después se resuelve el problema en grupo, aportando cada uno su forma —formas— de resolverlo o su solución —soluciones.

### 1.5.3. El método Delfos

Es un proceso para la formación controlada de la opinión de un grupo a través del uso repetido de cuestiones y la aportación seleccionada de respuestas de otros grupos. Como en la técnica

torbellino de ideas, cada cual puede expresar sus ideas con total libertad. Para que todos intervengan, en el torbellino de ideas se separa la fase de producción de ideas de la de evaluación de las mismas. El método Delfos lo que hace es separar a los individuos que se puedan sentir cohibidos por la presencia de otros, e incluso separar individualmente a aquéllos que puedan ser más productivos en soledad que en grupo.

Es importante tener muy en cuenta la selección de individuos y observar las siguientes reglas:

**i) Se trabaja en grupo, pero no están presentes los integrantes del grupo.** Cada cual trabaja a su ritmo y puede exponer su pensamiento libremente.

**ii) Los contactos se realizan por teléfono, por escrito o presencialmente.** El correo es el medio más empleado, hoy sustituido por el fax, el correo electrónico, etc. Mediante mensajes se envían las respuestas a un ordenador central y después de ser elaboradas se pasan a cada uno de los integrantes del grupo. Cada uno de los participantes envía sus respuestas al coordinador. Si trabajamos en Educación Infantil, esta técnica no se puede llevar a cabo, si los contactos se realizan por escrito, hasta que el niño no se inicie en la escritura, a no ser que el profesor sea el que anote y lea las respuestas de los distintos grupos. Puede llevarse a cabo esta técnica presencialmente, pero separando a los alumnos con objeto de que ninguno pueda ser obstáculo para que otro llegue a tener ideas brillantes.

**iii) El coordinador agrupa las soluciones por categorías, las sintetiza y se las envía a los demás,** sin decir de quién proceden y eliminando los valores extremos.

**iv) Cada uno, a la vista de las respuestas de los demás, piensa en la suya propia y se la envía al coordinador.**

**v) El coordinador es el encargado de ir cerrando el problema tras las respuestas cruzadas que se han ido obteniendo.**

La primera experiencia con la técnica Delfos se realizó sobre 1952 con un asunto militar.

El objetivo fundamental del método es conseguir que, sin tener contacto personal, después de algunos mensajes por escrito, la respuesta del grupo sea lo más unánime posible. No es necesario que se conozcan los integrantes del grupo.

Esta técnica se aplica en Matemáticas y, concretamente, en “las Magnitudes y su Medida”. Por ejemplo, cuando al final de la clase se plantea algún ejercicio a los alumnos (alumnos-niños o alumnos-profesores) y se deja para el día siguiente. Cada uno busca su solución individualmente y al día siguiente trae pensado o por escrito —o escrito por algún familiar— lo que se le ha ocurrido y lo comenta. El profesor, que actúa de coordinador, recoge las soluciones que sean válidas para resolver el problema y rechaza, de forma razonada, las que supongan conocimientos superiores para el alumno y las que no solucionen el problema o sean erróneas. En Educación Infantil no puede traerse la respuesta escrita por el niño, si no está aún iniciado en la lecto-escritura. A parte de que algún familiar escriba lo que se le ha ocurrido al niño, también se le puede dejar que el alumno de Infantil piense una determinada cuestión, para decirnos al día siguiente lo que se le ha ocurrido y, como él recuerda todo, se lo puede contar al profesor sin dificultad para que éste anote la respuesta.

#### 1.5.4. La sinéctica

Es a William J. J. Gordon al que se le atribuye la creación de esta técnica, hacia 1961, cuando intentaba mejorar la producción empresarial. Reunió a una serie de personas creativas para trabajar en un problema concreto con objeto de grabar el momento en que surgía la idea original, para después seguir los mismos pasos con otros grupos, esperando que les llevara al descubrimiento. Es decir, la idea consiste en seguir pasos similares a los que siguieron las personas creadoras y que les llevaron al éxito.

La palabra sinéctica viene del griego y significa unir dos seres u objetos conocidos, pero que en ningún momento se han visto antes juntos, para formar uno nuevo, con lo cual se consigue originalidad y novedad en lo ordinario y familiar.

Para Prado (1988: 115) *lo sinéctico es eminentemente conjunción de imágenes superpuestas de dos realidades distintas en armoniosa simbiosis.*

Se fundamenta en que en el proceso creativo el componente emocional e irracional puede llegar a ser tan importante como el intelectual y racional.

Se pueden observar dos posibilidades para aplicar esta técnica:

i) **Convertir lo extraño en familiar:** El niño compara lo extraño que se le presenta con lo que él conoce y transforma lo raro en

conocido. Cualquier persona a la que se le cuenta algo, para entender de qué se le habla, tiene que adaptar a su forma de pensar, aquella información tiene que hacerla suya. Para ello sigue los siguientes pasos:

**1. Análisis:** Descompone en sus elementos un objeto o problema que se le presenta desconocido. Al ser más sencillos los elementos, le resultan más familiares. Por esto se llama también a este paso **descomposición**.

**2. Búsqueda de modelos:** Se trata de comparar el problema con un esquema o secuencia ya conocido, que le permite observar la dificultad desde otro ángulo más familiar, lo que contribuye a comprender el caso.

**3. Generalización:** Es la búsqueda de nuevas respuestas tratando de situar el problema en una dimensión más amplia. De esta forma las ideas más extrañas se convierten en familiares.

En Matemáticas en general y en “las Magnitudes y su Medida” en particular, esta técnica se aplica con bastante frecuencia. Es normal utilizarla cuando se pone un ejemplo después de dar una definición. Ya que las definiciones que se dan suelen ser bastante precisas y, en muchos casos, no demasiado claras para el alumno, se pueden considerar como extrañas. Sin embargo, cuando se pone un ejemplo, como éste, se elige de cosas ya conocidas por el alumno, se consigue hacer familiar la definición.

Si empezamos diciéndole a nuestro alumno-profesor que una magnitud es un semigrupo unitario y conmutativo, definición que es correcta, como veremos en el segundo Capítulo, es fácil que no entienda de qué estamos hablando. Pero si le decimos que la longitud es una magnitud y razonamos por qué, al pasar a lo familiar, seguro que lo entiende.

Otras veces se simplifican los conceptos, haciendo su representación gráfica. Por ejemplo, si se le dice al niño que un cuadrado es un paralelogramo cuyos lados y ángulos miden lo mismo, puede que el alumno no entienda nada, pero si hacemos una representación de uno de ellos mediante un dibujo, seguro que conseguimos que entienda lo que le decimos. En este caso estamos definiendo el cuadrado a partir de otro conjunto de figuras más amplias: los paralelogramos; así tenemos un caso de generalización para llegar a que la idea de cuadrado pueda serle familiar.

**ii) Hacer lo familiar extraño:** Lo esencial de este procedimiento es distorsionar, invertir o transformar la manera cotidiana

de ver la realidad. Para tal fin se emplea la metáfora, que se utiliza de cuatro maneras:

**1. Analogía personal:** El sujeto se identifica con los elementos de un problema y trata de vivirlo desde dentro.

**2. Analogía directa:** Consiste en comparar el problema que nos preocupa con alguna situación parecida que pueda ayudarnos a resolverlo o a enfocarlo desde otro punto de vista.

**3. Analogía simbólica:** Trata de conseguir relaciones con otros objetos o situaciones para que nos simplifiquen el problema que teníamos, con los que se pueda observar alguna analogía aunque sea remota.

**4. Analogía fantástica:** Consiste en hacer reales nuestros sueños o deseos, sin tener en cuenta si se dispone o no de medios para llevarlos a cabo.

Este aspecto de la sinéctica es aún más interesante que el anterior ya que con ello tiene que relacionar el alumno el dato conocido con algo sorprendente, insólito, irreal, algo que no tenga aparentemente ninguna relación con el objeto presentado. Para ello se suele recurrir a la analogía, a la semejanza, a la oposición, a la simbolización y a la fantasía.

También en este caso es habitual aplicar esta técnica en Matemáticas, y más concretamente en “las Magnitudes y su Medida”. Por ejemplo, cuando después de establecer una relación de equivalencia en un conjunto conocido por los alumnos —familiar—, obtenemos un concepto abstracto —extraño. Cuando acordamos representar un término matemático de una determinada forma, por ejemplo, en lugar de poner centímetro, escribimos cm solamente, o para decir que tenemos cinco objetos en un conjunto ponemos 5. Cada vez que queremos que el alumno redescubra algo es esta técnica la que aplicamos.

Pensamos que si no hubiera sido por esta técnica no se habrían inventado todos los aparatos que en la actualidad se utilizan para la medida de las magnitudes, como por ejemplo, la báscula que nos dice (a la vez de dárnoslo por escrito) nuestro peso, nuestra altura y además nos da un régimen alimenticio.

Es muy importante el empleo de esta técnica en Educación a todos los niveles, y por supuesto en Educación Infantil, ya que con ella es con la que el niño vive desde dentro cualquier problema al identificarse con los seres y objetos que va conociendo, va ampliando su vocabulario,



aprendiendo a simbolizar los términos matemáticos, desarrolla su imaginación y su fantasía, etc.

### 1.5.5. Los métodos combinatorios

Las técnicas que se enmarcan en este apartado, como su nombre indica, son aquéllas mediante las cuáles se realizan combinaciones más o menos insólitas (Marín, 1975). Entre los métodos combinatorios están los siguientes:

#### 1.5.5.1. La lista de atributos

Esta técnica fue ideada por R. P. Crawford para la generación de nuevos productos (<http://www.fonendo.com/noticias/45/2001/08/3.shtml>). También se puede usar en la mejora de servicios o utilidades de productos ya existentes.

Consiste en:

**1. Definir los atributos fundamentales de la realidad objeto de estudio** que se quieran mejorar mediante “torbellino de ideas”. Hay que considerar todos los componentes de la realidad objeto de estudio para ver sus propiedades.

**2. Analizar los atributos y planteamiento de mejora:** Se analizan cada uno de los atributos y se plantean preguntas sobre la forma en que se podrían mejorar. Los atributos suelen ser forma, color, tamaño, posición, propiedades, funciones que puede realizar, etc.

**3. Sustituir unos atributos por otros, o asignar a otro objeto o situación distinta, o pasar de los atributos reales a los posibles:** A continuación se pueden sustituir unos atributos por otros, o se les pueden asignar a otro objeto o situación distinta, o pasar de los atributos reales a los posibles, con lo que se pueden conseguir nuevos y mejores resultados.

El recuento de los atributos nos estimula para conseguir una mejora, de aquí el aspecto positivo de esta técnica.

Las Matemáticas utilizan esta técnica cuando, por ejemplo, después de estudiar las propiedades que puede tener una relación binaria definida en un conjunto, se define una determinada relación y se analiza cuáles de esas propiedades tienen, y al darle nombre a la relación que cumple unas propiedades determinadas, se ve si la relación propuesta es o no de ese tipo. Lo mismo podríamos decir de una operación y, en el

caso que nos ocupa, de una magnitud, pues después de estudiar lo que es una magnitud y los tipos de magnitudes, se puede elegir una magnitud concreta y analizar de qué tipo es.

En el tema “las Magnitudes y su Medida” podríamos utilizar esta técnica, por ejemplo, planteándole a los niños la forma de medir un objeto conocido y las magnitudes que podríamos medir en dicho objeto. Se podría ver si se ha medido bien y si se podría mejorar. Después se podría considerar otro objeto y comparar si se podrían medir las mismas dimensiones, si es más fácil efectuar las medidas en uno que en el otro, si tendríamos que tener aparatos nuevos que nos permitirán medir más cómodamente...

### 1.5.5.2. El análisis morfológico

Parte de una lista de atributos y considera todas las posibles combinaciones entre ellos. Para el análisis morfológico bidimensional, se construye una tabla cartesiana de doble entrada con los atributos colocados en una primera fila y en una primera columna. Se establecen relaciones de uno o varios elementos con los atributos de la primera fila y columna, que se anotan en el recuadro intersección de ambos. Si el análisis morfológico fuese tridimensional, los atributos que quisiéramos considerar se tendrían que colocar en el espacio, en las tres aristas distintas de un ortoedro que coincidan en un mismo vértice, y obtendríamos unas celdillas dentro de las cuales pondríamos las relaciones de los elementos a considerar con los tres atributos correspondientes a cada celdilla. En otras ocasiones puede ser que interese considerar muchos atributos y muchas interrelaciones y la representación gráfica puede resultar muy complicada.

El análisis morfológico no es más que la generación de ideas por medio de una matriz bidimensional, tridimensional, etc.

El nombre de análisis morfológico se debe a Zwicky (1969), que colocó en puntos de los dos ejes cartesianos todos los tipos de energías existentes (atómica, eléctrica, calorífica, solar, eólica, etc.), con objeto de hacer un análisis para ver si se habían explotado correctamente. Resultó que algunas no se habían utilizado y pareció que fueran a ser las energías del futuro.

No basta con hacer un cuadro en donde todas las características objeto de estudio estén interrelacionadas, aunque esto se puede considerar el punto de partida. Lo importante es que, partiendo de ahí, los expertos pueden detectar los fallos, proponer objetivos nuevos,

buscar otros materiales y métodos, asignar distintos papeles a las características que intervienen en el proceso...

En casi todas las estructuras algebraicas que requieren más de una ley de composición interna, incluidas en el Capítulo II, es esta técnica la que nos puede ayudar a estudiarlas en profundidad, y a utilizarla para razonar si un caso en concreto tiene una estructura determinada.

En Educación Infantil nos conformaremos con conseguir completar un cuadro con algunas características relacionadas con “las Magnitudes y su Medida” que sean conocidas por los alumnos.

### 1.5.5.3 El análisis funcional.

El creador de esta técnica fue Crawford (1954), aunque quien le dio mayor difusión fue Fustier (1957). En ella se trata de descomponer un objeto, situación social o problema, en sus diferentes partes, teniendo en cuenta las diferentes funciones que es capaz de realizar, para obtener ideas innovadoras con el fin de mejorarlo o cambiarlo. Las preguntas que nos hacemos para introducirnos en esta técnica son: ¿para qué sirve? o ¿podría tener otros usos? Se estudian detalladamente las componentes del objeto o planteamiento, se analizan las cualidades de sus funciones y se evalúan las mejoras introducidas en función del fin a que esté destinado o se pueda destinar.

El uso de esta técnica en Matemáticas es de todos conocida: ¿quién no se ha planteado para que sirve cualquier concepto que le hayan definido?, o después de decirle el profesor esto sirve para tal cosa, no le ha dicho, o se ha preguntado ¿podría tener otros usos?

Por supuesto que se puede utilizar en el tema “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil, y podría ser el detonante de que el niño, pensando en las preguntas que le hacemos, descubra otros instrumentos que sirvan para medir algunas magnitudes con mayor precisión y más cómodamente.

### 1.5.6. El arte de relacionar

Según Marín (1984: 91) *Uno de los rasgos definitorios de la mente humana es la capacidad de relacionar y para algunos en especial, los asociacionistas, el fundamento. (...) Descubrir los enlaces entre datos en apariencia dispares, ocultos a una primera mirada, suele ser un buen indicador del poderío intelectual.*

La teoría asociacionista fundamenta la creatividad en la asociación de ideas. Esta técnica consiste en descubrir los enlaces entre datos en apariencia dispares. Las relaciones son innumerables; indicamos algunas: semejanza o similitud, como analogías de forma, de color, de finalidad, de modo de actuar, de origen, de utilidad, de precio, etc.; contraste u oposición: ironía, humor; contigüidad o proximidad: espacio, tiempo, simultaneidad; etc.

En Matemáticas estamos aplicando casi siempre esta técnica ya que con frecuencia se buscan relaciones entre lo que conocemos y lo que queremos descubrir. Por ejemplo, conociendo los primeros términos de una sucesión deducimos de ellos el término general.

En el tema que nos ocupa, “las Magnitudes y su Medida”, se aplica esta técnica, en concreto, cuando decimos que algo tiene una determinada estructura o cuando afirmamos que algo es o no es una magnitud. Para ello tenemos que ver si satisface o no una serie de condiciones previamente establecidas y que son análogas a las que verifican otra serie de objetos en apariencia dispares.

Para los niños de Educación Infantil el llegar a reconocer que dos objetos tienen la misma longitud, el mismo peso, etc., lleva consigo la aplicación de esta técnica. Vamos a dar en el Capítulo III otros ejemplos bastante menos lógicos, menos esperados, para fomentar la creatividad.

### 1.5.7. Solución de problemas

Este caso será el que se nos presente con más frecuencia en Matemáticas. Aparte de los problemas interpersonales a los que se les puede aplicar esta técnica y que también se dan en Matemáticas, tenemos los problemas:

- ◆ entre la asignatura y nosotros (dificultades de acomodar los conoci-mientos al nivel del alumno),
- ◆ entre nosotros y el alumno (dificultades de transmitir),
- ◆ entre el alumno y la asignatura (dificultades de comprensión),
- ◆ los propios de la asignatura (conceptos interrelacionados y abstractos).

Uno de los modelos más difundidos en relación con la creatividad es el desarrollado por el matemático G. Polya (1979: 18) que, como buen profesor, se interesó por el problema de la enseñanza de su

asignatura, y propuso un modelo que sirviera, con carácter general, para la solución de cualquier problema matemático y a cualquier nivel. Su planteamiento no tiene que limitarse al fin para el que fue pensado, sino que puede extenderse a otros tipos de problemas de la vida real. Las pautas que nos indica que se deben seguir para resolver un problema son:

## 1. Comprender el problema

Para lo cual Polya plantea las siguientes cuestiones: ¿cuál es la incógnita?; ¿cuáles son sus datos?; ¿cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?; ¿es insuficiente?; ¿redundante?; ¿contradictoria?

Evidentemente si no se comprende un problema, no se llegará a resolverlo, y si se resuelve, es porque se comprende. Pero puede comprenderse un problema y no saber cómo resolverlo.

Al nivel en que nosotros estamos trabajando, y también a otros niveles, no es imprescindible decirle al alumno que si quiere resolver un problema tiene antes que comprenderlo, aunque pensamos que sería aconsejable hacerlo, si bien el profesor debe enunciar la actividad las veces que sea necesario y observar —por el comportamiento o haciéndole algunas preguntas— si el alumno ha entendido o no el problema que intenta resolver, y si no lo comprende es absurdo que se esfuerce en que lo resuelva. En estos casos es mejor plantearle otro que esté a su alcance y que le facilite una posterior comprensión del primero.

## 2. Concebir un plan

**a) Determina una relación entre los datos y la incógnita:** ¿Has encontrado un problema semejante?; ¿has visto el mismo? ¿Conoces un problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil? Mira atentamente la incógnita y trata de recordar un problema que te sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. He aquí un problema relacionado con el tuyo y que se ha resuelto ya, ¿podrías utilizarlo?; ¿podrías utilizar su resultado?; ¿podrías emplear su método? ¿Te haría falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? ¿Podrías enunciar el problema de otra forma?; ¿podrías plantearlo de forma diferente nuevamente? Refiérete a las definiciones.

**b) De no encontrarse una relación inmediata, puedes considerar problemas auxiliares:** Si no puedes resolver el problema propuesto, trata de resolver primero algún problema similar. ¿Podrías imaginarte un problema análogo un tanto más accesible?; ¿un problema

más general?; ¿un problema más particular?; ¿un problema análogo? ¿Puedes resolver una parte del problema? Considera sólo una parte de la condición; descarta la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada?; ¿en qué forma puede variar? ¿Puedes deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puedes pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puedes cambiar la incógnita? ¿Puedes cambiar la incógnita, o los datos, o ambas cosas si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?

**c) Obtén finalmente un plan de solución:** ¿Has empleado todos los datos? ¿Has empleado todas las condiciones? ¿Has considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?

En este caso tampoco hay que informar necesariamente al alumno de que tiene que concebir un plan, pero el profesor tiene que saber que el alumno debe concebirlo. Para que el alumno llegue a concebir un plan es importante que la enseñanza no se haga a través de “fórmulas” para aplicarlas cuando se dan unas determinadas condiciones con las que lo que menos se consigue es que aprenda algo. El niño no tiene por qué seguir los mismos pasos que el profesor, y mucho menos que el autor de un libro de texto, para adquirir un conocimiento. Lo que tenemos que hacer es facilitarle el desarrollo de su propio pensamiento, subministrándole las actividades necesarias para que pueda llegar a él. Según Fernández (1997: 40) *descartar los paradigmas que oprimen la creatividad y la intuición del alumno es principio prioritario para aprender a concebir un plan. (...) La función del profesor no es la de transmitir la información que posee, sino la de provocar su realización.*

### 3. Ejecución del plan

Al ejecutar tu plan para encontrar la solución, comprueba cada uno de los pasos. ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?; ¿puedes demostrarlo?

### 4. Examen de la solución obtenida o visión retrospectiva

Después de obtener la solución, ¿puedes verificar el resultado?; ¿puedes verificar el razonamiento? ¿Puedes obtener el resultado de forma diferente? ¿Puedes verlo de golpe? ¿Puedes emplear el resultado o el método en algún otro problema?

En Educación Infantil la visión retrospectiva consistirá en razonar si le sirve o no la solución obtenida; en comparar la solución que el niño ha obtenido, y cómo la ha obtenido, con la de sus compañeros mediante la comunicación; en estudiar si lo podría haber resuelto de otro modo; en

ver la posibilidad de aplicación del resultado o del método utilizado en otro problema distinto. El profesor debe actuar como intermediario para facilitar el diálogo. A esta fase se le podría llamar también **revisión**.

Para Garrote, Hidalgo y Blanco (2004: 37) *obtener un resultado coherente con las condiciones de un problema es el objetivo fundamental de la resolución del mismo, sin embargo para muchos de nuestros alumnos el objetivo es encontrar un procedimiento para llegar a una solución que en ningún momento es necesario comprobar ya que el propio procedimiento justifica su validez.*

Estamos totalmente de acuerdo con lo que nos dicen y es por esto que desde pequeños tenemos que acostumbrarlos a que comprueben si el método que hemos seguido es el correcto, si les sirve la solución obtenida, si podrían haber resuelto el problema de otro modo...

Bransford y Stein (1987) amplían el concepto de problema de tal forma que cualquier aprendizaje puede plantearse como situación problemática. Según ellos cualquier persona puede aprender a resolver problemas y el modelo ideal es el que viene dado por el acrónimo de la palabra ideal:

- ◆ **Identificación del problema.**
- ◆ **Definición y representación del problema.**
- ◆ **Exploración de posibles estrategias.**
- ◆ **Actuación fundada en una estrategia.**
- ◆ **Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.**

La propuesta de Bransford y Stein es análoga a la de Polya ya que I y D corresponden a 1 (comprender el problema), E es análoga a 2 (concebir un plan), A es lo mismo que 3 (ejecución del plan), y L corresponde a 4 (examen de la solución obtenida o visión retrospectiva).

Con posterioridad Gervilla (1992: 78) nos sugiere los pasos que podemos seguir en la resolución de un problema, y según ella son los siguientes:

i) **Definir el problema:** ¿Quién está implicado? ¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema? ¿Qué información necesitamos? ¿Es controlable el problema?



Einstein decía que plantear correctamente un problema era lo más decisivo a la hora de encontrar la solución.

ii) **Descubrir resultados deseados:** ¿Cómo saber cuándo hemos solucionado el problema? ¿Qué resultados deseamos? a) Condiciones. b) Comportamientos. c) Actitudes.

iii) **Proponer alternativas:** ¿De cuántas formas podría alcanzar los resultados deseados? ¿Hemos agotado todas las formas de previsión del éxito?

iv) **Analizar las alternativas:** ¿Qué recursos necesitamos para cada alternativa? —personas, tiempo, dinero, materiales—. ¿Ventajas de cada alternativa? ¿Dificultades de cada alternativa?

v) **Seleccionar las mejores alternativas:** ¿Por qué éstas y no otras? ¿Necesitan evaluación los resultados deseados?

vi) **Establecer los pasos de acción:** ¿Qué procedimiento se adopta? ¿De qué es responsable cada uno? ¿Cuándo llega la hora de la acción? ¿Necesitamos un plan de control?

vii) **Ejecución:** ¡Acción!

viii) **Evaluación:** ¿Hemos conseguido los resultados deseados? ¿Qué pasos favorecieron o impidieron nuestro programa? ¿Hemos procurado la “retroalimentación” necesaria? ¿Será necesario redefinir el problema?

Pensamos que Gervilla con su planteamiento pretende tener un esquema válido para aplicar cuando se quiera resolver cualquier tipo de problema, no descartando los matemáticos, si bien parece ser que ella quiere trabajar los problemas de la vida real preferentemente. Por ejemplo, la pregunta: ¿quién está implicado?, planteada de este modo, creemos que tiene más sentido en un problema interpersonal que en un problema matemático, si bien en un problema matemático no tenemos más remedio que tener en cuenta los datos que nos dan, que serán los que están implicados en el problema, aunque no sea ¿quién está implicado? sino ¿qué está implicado?, lo que podemos considerar análogo.

Por la riqueza de matices que introduce Gervilla creemos que puede ser importante hacer un estudio comparativo con las consideraciones de Polya.

### 1.5.7.1. Comparación de las propuestas de Polya y de Gervilla

Siguiendo la técnica “el arte de relacionar” vamos a comparar las propuestas de Polya y de Gervilla, considerando su eficacia en el planteamiento y la solución de problemas matemáticos. Para ello en lo sucesivo denotaremos, como hemos hecho hasta ahora, con 1, 2, 3 y 4 los pasos que sugiere Polya y con i), ii), iii), iv), v), vi), vii) y viii) los de Gervilla.

Como hemos comentado anteriormente, las pautas que sugiere Polya para resolver un problema van dirigidas preferentemente a problemas matemáticos y las de Gervilla a cualquier tipo de problemas, incluidos los matemáticos. Por eso tenemos i) definir el problema. En Matemáticas cuando se nos plantea un problema éste ya está definido, luego lo que necesitamos es 1 comprender el problema.

Las preguntas 1 de Polya ¿cuál es la incógnita? y ¿cuáles son sus datos? son análogas a la i) de Gervilla ¿quién está implicado?, si bien en 1 esto viene expresado en un lenguaje más matemático.

Es necesario tener en cuenta la pregunta i) de Gervilla ¿qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?, ya que al estar en Educación Infantil, la observación del comportamiento de los niños nos indicará el nivel de comprensión en que se encuentran. Esto, sin embargo, no se ve reflejado en Polya, pues los problemas que trata este autor en su libro son de un nivel superior.

Las preguntas de 1 ¿cuál es la condición?; ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?; ¿es insuficiente?; ¿redundante?; ¿contradictoria?, vienen a decirnos lo mismo que las de i) ¿qué información necesitamos?; ¿es controlable el problema? aunque, como hemos comentado anteriormente, en 1 aparece en un lenguaje más matemático y más detallado.

Luego, por lo que respecta a ambos planteamientos, aunque el planteamiento de Polya va dirigido preferentemente a problemas matemáticos, el de Gervilla también nos sirve para problemas matemáticos, y la cuestión de ¿qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?, nos resulta necesaria para el nivel al que va dirigido nuestro trabajo. Esta pregunta vendría a completar las de Polya, de forma que quedaría como comentamos en el siguiente párrafo:

**Comprensión del problema y comportamiento frente a él:**  
¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son sus datos? ¿Qué comportamiento

describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?; ¿es insuficiente?; ¿redundante?; ¿contradictoria?

En Gervilla tenemos la propuesta ii) descubrir resultados deseados, que sugiere un análisis a priori del problema, lo que consideramos sumamente interesante en Matemáticas, y que no tiene su correspondiente en Polya.

Por lo que respecta a los apartados 2 de Polya: Concebir un plan: ¿cómo saber cuándo hemos solucionado el problema?; ¿qué resultados deseamos (condiciones; comportamientos; actitudes)?; ¿de cuántas formas podría alcanzar los resultados deseados?; ¿hemos agotado todas las formas de previsión del éxito?; ¿qué recursos necesitamos para cada alternativa (personas, tiempo, dinero, materiales)?; ¿ventajas de cada alternativa?; ¿dificultades de cada alternativa?; ¿por qué éstas y no otras?; ¿necesitan evaluación los resultados deseados?; ¿qué procedimiento se adopta?; ¿de qué es responsable cada uno?; ¿cuándo llega la hora de la acción?; ¿necesitamos un plan de control? Estos corresponden a los de Gervilla: iii) proponer alternativas; iv) analizar las alternativas; v) seleccionar las mejores alternativas; vi) establecer los pasos de acción. Por el detalle con que vienen las preguntas en Gervilla y por considerar que pueden ser más apropiadas para el nivel de Educación Infantil, nos decidimos por éstas, aunque según sea el problema, dentro de ellas, tendremos que plantear unas cuestiones u otras.

Los apartados 3 y 4 de Polya son análogos a vii) y viii) de Gervilla respectivamente

Aunque para Gervilla-Prado (2002: 19) *los problemas, para que estimulen el pensamiento creativo, tienen que ofrecer por definición múltiples soluciones*, nosotros entendemos que, a pesar de que en Matemáticas casi siempre la solución tenga que ser única, no así la forma de llegar a ella, aquí es precisamente donde más cabida tiene esta técnica. Además ésta es la parcela del saber que le ha suministrado dicha técnica a la creatividad, ya que en Matemáticas ha existido siempre la solución de problemas, aunque sin haber sido descrita. Sin embargo las técnicas de Metodología Creativa han surgido con posterioridad, pues la creatividad se incorporó a los dominios del arte en el siglo XIX. Entonces el término creador era sinónimo de artista y en el siglo XX el concepto de creatividad se aplicaba a toda la cultura humana (Camina, 1994: 25). Además, a la hora de resolver un problema los alumnos no tienen que seguir un camino único, con tal de que lo resuelvan correctamente. Esto muestra la diversidad que exige la creatividad. Por otro lado, según Fernández (1997: 44), *las situaciones problemáticas deben desplegar la capacidad inventiva del alumno para que la capacidad de diálogo sea*

*eficaz, alcanzando el gozo que este actuar proporciona, independientemente del éxito obtenido.*

En Matemáticas es aconsejable huir de la elaboración de reglas, con las que no se consigue comprensión alguna sino sólo saber cómo se hace —si es que se llega a eso—, pero no por qué se hace, que es lo fundamental en el aprendizaje de las mismas. Según Fernández (1997: 39) *el celo de explicar al niño las distintas formas de hacer anula, en cierto modo, la creatividad*. El profesor tiene que preparar ciertas actividades, sin indicar las distintas formas de realización que permitan a los alumnos llegar a descubrir ciertas leyes. El alumno, a través de estas actividades, compara la nueva información con la que ya posee, se hace preguntas, utiliza analogías y modelos que le ayuden a la comprensión. Es el alumno el que tiene que llegar a descubrir las leyes; el profesor escribe estas leyes con simbología matemática, pero después de que hayan sido descubiertas por el alumno.

### 1.5.7.2. Nuestra propuesta

La comparación entre los planteamientos de Polya y Gervilla nos lleva a pensar en un primer paso en el siguiente modelo:

#### I. Definición y comprensión del problema y comportamiento frente a él.

♥ Definición del problema: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son sus datos?

♥ Análisis de las condiciones: ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?; ¿es insuficiente?; ¿redundante?; ¿contradictoria?

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: ¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?

#### II. Análisis de resultados a priori.

♥ ¿Qué resultados deseas obtener? ¿Cuándo tendrías resuelto el problema? Suponiendo que llegues a resolver el problema, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas? ¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a resolver el problema?

#### III. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: ¿De cuántas formas podrías resolver el problema?

♥ Análisis de las mismas: ¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?; ¿todas te conducen a la solución?

♥ Selección de las mejores alternativas: ¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo? ¿Has utilizado todos los datos del problema?; ¿por qué éstas y no otras?

♥ Pautas a seguir: ¿Qué pasos tienes que dar para alcanzar la solución?; ¿en qué orden? ¿Podrías equivocarte?; ¿cuándo?

#### **IV. Ejecución.**

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?; ¿puedes demostrarlo? ¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?

#### **V. Evaluación de resultados.**

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: ¿los resultados son los deseados?; ¿puedes verificarlos? ¿Alguno de los pasos que diste eran innecesarios? ¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil? ¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo? ¿Puedes emplear el resultado o el método en algún problema análogo?

Aunque pensamos que, puestos a actuar “como Dios” viendo a los individuos “desde arriba”, el estudio del comportamiento podría realizarse no sólo en el punto I, sino en cada uno de los demás. Por otro lado, y teniendo en cuenta que conocer la historia nos hace comprender mejor el presente, creemos que un estudio del desarrollo histórico del problema nos llevará a una mejor disposición para afrontar su solución. Así nuestra propuesta puede quedar como sigue:

#### **I. Definición y comprensión del problema.**

♥ Definición del problema: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son sus datos?

♥ Análisis de las condiciones: ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?; ¿es insuficiente?; ¿redundante?; ¿contradictoria?

#### **II. Desarrollo histórico del mismo.**

♥ Inicio (si es conocido): ¿Cuándo surgieron este tipo de problemas?

♥ Evolución: ¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior? ¿Se podrá resolver como se resolvía hace siglos? ¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ ¿Qué resultados deseas obtener? ¿Cuándo tendrías resuelto el problema? Suponiendo que llegues a resolver el problema, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas? ¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a resolver el problema?

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: ¿De cuántas formas podrías resolver el problema?

♥ Análisis de las mismas: ¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas? ¿todas te conducen a la solución?

♥ Selección de las mejores alternativas: ¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo? ¿Has utilizado todos los datos del problema? ¿por qué éstas y no otras?

♥ Pautas a seguir: ¿Qué pasos tienes que dar para alcanzar la solución? ¿en qué orden? ¿Podrías equivocarte? ¿cuándo?

### V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿puedes demostrarlo? ¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?

### VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: ¿Los resultados son los deseados? ¿puedes verificarlos? ¿Alguno de los pasos que diste eran innecesarios? ¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil? ¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones del problema resuelto a otros campos: ¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: ¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: ¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?

Utilizaremos nuestra propuesta en el Capítulo III para resolver problemas sobre “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil. Por supuesto que esta técnica se puede utilizar aunque haya apartados de ella que debamos soslayar, o por lo menos verlos de forma más cercana al proceso de aprendizaje del niño, como puede ser “el desarrollo histórico”, en el que se vería cómo hemos ido teniendo conciencia del problema que pretendemos resolver.

### 1.5.8. El entorno

Entre las técnicas de Metodología Creativa creemos que podemos considerar ésta, que se fundamenta en que cualquier idea que queramos obtener la podemos sacar, con un poco de imaginación, de los objetos o de los acontecimientos que hay o que suceden a nuestro alrededor.

Esta técnica la dimos a conocer en el IV Congreso Mundial de Educación Infantil y Formación de Educadores, celebrado en Benalmádena los días 30 y 31 de Octubre y 1 de Noviembre de 2003.

Al estar trabajando con otras técnicas nos surgió la que comentamos. Pensábamos: ¿de dónde podemos decirles a los niños que intentamos sacar las ideas que tenemos que aportar para resolver los problemas que nos plantean casi todas las demás técnicas? Y la respuesta nos la dio la técnica que comentamos: Cualquier problema se puede solucionar con la observación de nuestro entorno más inmediato, que puede ser el de los objetos que nos rodean o el de las situaciones que podemos encontrar sin mucho esfuerzo. Si estudiamos cualquier



problema, la solución la podemos hallar en los libros que manejamos, o en el ordenador con el que trabajamos, o en los objetos que observamos...

Las modas que cada temporada salen a la calle las obtienen los diseñadores observando a las personas o a los objetos que tienen cerca y “dándole vueltas” a la imaginación, o inspirándose en estilos de otras épocas, libros, etc. Las empresas que se dedican al diseño contratan a jóvenes que sean creativos —cada vez más jóvenes— para obtener información sobre las tendencias que siguen ellos y los de su generación.

Si queremos resolver cualquier problema y lo pensamos con cierta frecuencia, puede ser que por algo que veamos en nuestro entorno se nos ocurra la solución. En ocasiones se hace de manera inconsciente. Si no hemos intentado resolverlo y lo dejamos en el olvido, es difícil que lleguemos a concluirlo. No ocurre lo mismo si hemos pensado en buscarle una solución, aunque, es cierto que, a veces, “el barbecho” es bueno.

En la dirección

[http://web.jet.es/amozarrain/Que\\_es\\_creatividad.html#persona](http://web.jet.es/amozarrain/Que_es_creatividad.html#persona)

se menciona: *En muchas ocasiones, los grandes descubrimientos no se deben únicamente a la pericia del creador. Recordemos el caso de Alexander Fleming y su descubrimiento de la penicilina (lo llevó a cabo con más de 50 años). El azar le colocó en su camino las claves para ello.*

*El mérito de los creativos es que siempre parecen estar atentos a estas señales, y aprovechan cualquier novedad del ambiente para añadirla al problema, y con ello definirlo mejor o alcanzar una solución. El conocimiento que tienen sobre el tema, debido a una gran cantidad de horas de trabajo sobre él, hacen que aprovechen esta oportunidad, que para otros pasaría desapercibida.*

*Como decía Pasteur: “La suerte favorece a las mentes preparadas”.*

Consideramos que es tan importante que las personas estén muy preparadas para que la suerte les favorezca con los descubrimientos, como que sean trabajadoras. Llevar siempre algún problema en la mente, observar nuestro entorno más inmediato y sacar conclusiones, mejorándolas si es posible, es señal de que las cosas nos preocupan y queremos hacer lo que esté en nuestras manos para que mejoren. Podemos afirmar que buscando lo imposible el hombre siempre ha conseguido lo posible.

Finalmente, quisiéramos destacar que juventud no necesariamente implica creación ni vejez lo contrario (véase el ejemplo de Fleming).

Tanto el ímpetu de la juventud como la experiencia de la persona mayor puede ayudar a lograr ser creativos, lo importante es esforzarse en ello. Cualquier edad es buena para la creatividad.

Los pasos que debemos seguir para utilizar esta técnica son:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema.** Es necesario conocer que existe un problema para poder buscarle una solución creativa. Por tanto, sería conveniente entrenar la sensibilidad a los problemas. Esto se facilita mediante la realización de ejercicios donde se intente plantear el máximo de preguntas sobre una situación dada en forma de foto o texto.

Una vez que tenemos el problema, debemos definirlo de la forma más clara posible. Pensaremos en él con la seguridad de que podemos resolverlo creativamente.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado.** Hemos de tener claro que no podemos desaprovechar lo que tenemos más cerca. A veces pensamos en buscar la solución lejos de nosotros, y después nos damos cuenta de que las cosas son más simples de lo que pensamos.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema.** Si el problema nos preocupa debemos tenerlo presente cuando damos un paseo, cuando leemos algo, cuando vemos la televisión, cuando trabajamos con el ordenador, etc. El esfuerzo es fundamental, ya que en ocasiones no se encuentra la solución hasta que no se está cansado y se empiezan a reorganizar las ideas. Es en esos momentos cuando nos damos un respiro, ya que al descansar no nos olvidamos del problema y puede pasar que al reanudar el trabajo encontremos la solución.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones.** Si hemos estado pendientes de nuestro entorno, tenemos que comparar lo que encontremos con nuestro problema, y valorar si eso nos da la solución o tenemos que seguir pensando en encontrarla.

Para trabajar los pasos 3 y 4 nos podemos ayudar, a su vez, de otra técnica de Metodología Creativa ya comentada anteriormente: “el arte de relacionar”.

**5. Mejorar el resultado si es posible.** Si hemos encontrado una solución, podemos ver si se puede ampliar, si se puede llevar a otros casos, si se puede generalizar, etc.

En Matemáticas esta técnica la usamos con bastante frecuencia, por ejemplo, cuando nos planteamos buscar un ejemplo concreto de magnitud de una clase determinada: finita, infinita, absoluta, relativa, escalar, vectorial, discreta, continua..., y cuando obtenemos una de ellas, volvemos a plantearnos si puede ser o no de otro tipo.

En Educación Infantil es importante que el niño observe lo que le rodea para ir conociendo su entorno y descubriendo cosas nuevas. En Matemáticas en general y en “las Magnitudes y su Medida”, como caso particular, es tremendamente importante que el niño se fije en todo lo que tiene a su alcance, compare los objetos, los mida y vaya sacando conclusiones. Así, a la vez que va conociendo lo que le rodea, va adquiriendo la conservación, la transitividad y va sintiendo la necesidad de tener una unidad de medida.

### 1.5.9. La biónica

Palabra que viene de **biología** y **electrónica**. Esta técnica se inspira en el comportamiento de los seres vivos para descubrir nuevos aparatos tecnológicos. Si se analiza el comportamiento de los animales o vegetales, se encuentran respuestas sencillas para los problemas que surgen en los aparatos. Con esta técnica es con la que se ha conseguido avanzar en el desarrollo de las nuevas tecnologías.

Para trabajar en esta técnica a nivel de grandes investigaciones, se requiere que participen biólogos, zoólogos, naturalistas, etólogos, matemáticos, ingenieros y especialistas en nuevas tecnologías. Se siguen los siguientes pasos:

i) **Estudio detallado del comportamiento de los seres vivos** que, en determinado aspecto, guarden alguna relación con lo que nos preocupe, observando aquellas propiedades que nos interesen.

ii) **Traducción de las propiedades de los seres vivos a modelos** lógicos, matemáticos, gráficos o simbólicos.

iii) **Desarrollo de los modelos** intentando reproducir al máximo las funciones de los seres vivos.

Pensamos que todos los instrumentos que se utilizan hoy en día para la medida, y que son bastante complejos, pueden haber surgido con el uso de esta técnica.

En general en Educación Infantil solamente se puede y se debe trabajar el primer punto y una pequeña aportación al segundo o al tercero. Es importante que el niño observe los seres vivos que hay en su entorno y se observe a sí mismo como el ser vivo más perfecto (desde nuestro punto de vista). De estas observaciones pueden surgir cuestiones relacionadas con “las Magnitudes y su Medida”. Se sobreentiende que no podemos pasar en este pequeño estudio a descubrir nuevos aparatos tecnológicos. Lo más elevado a lo que podemos aspirar es a que se invente algún juguete articulado que se parezca a algún miembro del cuerpo de algún animal, por ejemplo.

### 1.5.10. La sinapsis

En Histología —rama de la medicina que estudia los tejidos— se llama sinapsis a la zona en la que se realiza la transmisión de impulsos entre dos neuronas —células del sistema nervioso. Son puntos del sistema nervioso muy importantes para que lleguen al cerebro las informaciones procedentes de los órganos sensoriales.

El funcionamiento de la sinapsis hizo pensar en esta técnica de Metodología Creativa, ya que el innovador pone a funcionar todas las neuronas de su cerebro para que las nuevas ideas lleguen, trabaja a buen ritmo, estudia, se preocupa de resolver aquello que llega a obsesionarle y al final, no sin tesón, salta la chispa.

En Matemáticas esta técnica se aplica con bastante frecuencia, concretamente nos cuenta Poincaré (1952: 53) que estuvo intentando resolver un problema difícil, lo dejó para darse un paseo y cuando fue a subirse a un vehículo vio con toda claridad cuál era la solución. Después de un periodo de concentración intensa puede presentarse una clarificación total de aquello que nos preocupa.

Esta técnica tiene que ser utilizada en Educación Infantil, ya que hay que acostumbrar al niño a que encuentre solución a los problemas que le van surgiendo a lo largo de la vida, en particular los problemas matemáticos, y para ello tendrá que pensar en ellos e interesarse por ellos.

### 1.5.11. La serendipity

Fue ideada por Horace Walpole en el siglo XVIII. Se trata de descubrir por azar algo valioso, cuando lo que se buscaba era otra cosa. Por esto es por lo que realmente no se debería considerar como técnica, pero al fomentar el espíritu investigador, es algo más que una técnica: es

mantener constantemente una actitud de búsqueda, de superación, valorando los logros que se alcanzan aunque no sean los esperados.

A lo largo de la historia ha habido descubrimientos inesperados de los que se han obtenido grandes beneficios sociales y culturales. De hecho a nosotros también nos ha ocurrido que cuando pretendíamos resolver un problema o demostrar un teorema, se nos ha cruzado otra situación por medio y, o bien, hemos llegado a una contradicción mediante un contraejemplo o hemos demostrado algo que no pretendíamos. A veces, cuando preparamos una clase no pensamos decir algunas cosas que después son las que mejor entienden los alumnos. El que llega a descubrir algo no es el que está sin pensar en nada, sino el que se prepara, se esfuerza, se exige y razona con sentido crítico.

Citemos a Yela en un artículo en el que habla del problema del método científico en Psicología (1996, Vol. 8: 354 y 355) *...parece claro que una de las bases irrenunciables del método científico es la observación sistemática, es decir, la observación natural, ayudada, en general, por medios artificiales, preparada, ordenada, repetible y, en lo posible, precisa y matemática. No se trata, conviene subrayarlo, de eliminar o menospreciar las observaciones casuales e imprevistas, tan frecuentes y a veces decisivas en el comportamiento real del científico. Se trata de someterlas, cuando surgen, a la comprobación sistemática y repetida. Por ejemplo, el 8 de noviembre de 1895 Roentgen se dio cuenta casualmente de que, mientras hacía experimentos con un tubo de rayos catódicos en plena oscuridad, se tornaba fluorescente una hoja de papel cubierta de platinocianuro de bario que impremeditadamente había dejado en una mesa próxima. Descubrió así los rayos X. La observación fue inesperada y casual. Pero la incorporación de los rayos X al acervo de la ciencia sólo se estableció después de pasar por la prueba de numerosas observaciones sistemáticas.*

*Hace no muchos años, Severo Ochoa descubrió casualmente que la encima polinucleótido-fosforilasa permitía sintetizar in vitro el ARN. De nuevo, la admisión y desarrollo de su técnica para la investigación del código genético sólo se ha logrado mediante la comprobación sistemática del hallazgo. Hace bien Skinner si, como confiesa, cuando le sale inesperadamente al paso un hecho imprevisto e interesante, deja todo lo demás y se dedica a estudiarlo. Tal actitud constituye un momento importante del método científico: la alerta constante a lo inesperado, el asombro, como señalaron Platón y Aristóteles, ante los enigmas de la realidad. Con tal de que, por supuesto, la alerta y el asombro sean seguidos por la observación rigurosa y sistemática.*

Como puede observarse, lo que aquí destaca Yela es la aplicación de la serendipity en los procesos creativos anteriormente descritos,

aunque perfeccionando su “aparición” con la comprobación sistemática y repetida, la cual es totalmente necesaria si no queremos equivocarnos. En Matemáticas, si una persona comprueba mediante un ejemplo que se cumple una determinada propiedad, si no generaliza esa situación y demuestra que es cierta no puede afirmar que se verifica esta propiedad. Le tiene que quedar muy claro al alumno-profesor que para demostrar una propiedad no basta con poner un ejemplo en donde se verifique; sin embargo, para demostrar que una propiedad no es cierta sí basta con encontrar un ejemplo en donde no se verifique (lo que se denomina contraejemplo).

### 1.5.12. La ideogramación

Consiste en representar gráficamente las relaciones existentes entre un conjunto de objetos o ideas.

En unos casos se atiende a la organización de los miembros de un colectivo, por lo que se le da el nombre de **organigrama**; en otros se tiene en cuenta la relación de los elementos implicados y se le llama **diagrama**. A esto hay que añadir esquemas, resúmenes, guiones, etc. que cada estudiante o investigador realiza como forma de estructurar su estudio y que puede variar con cada persona. Es lo que sugirió a De la Torre (1982: 204) desarrollar esta idea como algo que capacita al alumno para que no se limite a copiar los esquemas que aparecen en cualquier libro de texto, sino que al ser una técnica creativa, analítico-sintética, organizadora de las ideas, estructurante y transformadora de la realidad, vaya, con la práctica, inventando nuevos esquemas que le faciliten, de una forma rápida, poder tener toda la información necesaria de un tema.

Los diagramas, atendiendo a la **forma de realizar el gráfico**, se clasifican de la siguiente manera:

**a) Diagramas de flechas:** Cuando utiliza segmentos o flechas para relacionar los objetos o las ideas.

**b) Poligramas o diagramas poligonales:** Emplea figuras geométricas como triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos, hexágonos, circunferencias, elipses, etc. Cuando se realizan a base de circunferencias se denominan **ciclogramas**.

**c) Pictogramas:** Aparecen figuras significativas que ayudan a retener las ideas.

Teniendo en cuenta el **contenido** los ideogramas se clasifican en:

**i) Estructurales o sistémicos:** Reflejan los componentes esenciales en forma de sistema.

ii) **Funcionales:** Reflejan las funciones de los elementos que los integran.

iii) **Relacionales o de implicación:** Destacan las dependencias de las ideas y la intensidad de las relaciones de los elementos.

Según **el momento** en que se lleven a cabo los ideogramas se clasifican en:

- 1) **Inicial:** Cuando se realiza para empezar a comentar algo.
- 2) **Procesual:** Si se hace en medio de un trabajo.
- 3) **De síntesis:** Es el que surge como conclusión de un estudio o trabajo.

Los pasos que se deben seguir para aplicar la técnica ideogramación son:

1. **Anotar los títulos que recojan las ideas importantes.**
2. **Recoger las ideas secundarias y su relación con las principales.**
3. **Expresar las ideas principales y secundarias en nuestro lenguaje y mediante ideas sugerentes.**
4. **Estructuración de las ideas.**
5. **Interpretación gráfica.**

Con el tema “las Magnitudes y su Medida” podemos utilizar esta técnica, tanto con los alumnos de Magisterio y de otras Facultades que estén interesados en el tema, como con los alumnos de Educación Infantil.

Cuando se va estudiando un concepto podemos empezar con un esquema de lo que vamos a ver que puede ser con dibujos en la pizarra o en el patio de recreo, si se trata de Educación Infantil. Otra opción es, a mitad de la exposición, cuando tenemos bastantes conceptos, hacer un diagrama indicando hasta donde hemos llegado y qué relación guardan los conceptos que hemos visto. También podemos recoger todo lo que hemos visto mediante un diagrama al final de un apartado importante o al final de un tema.

### 1.5.13. El circept

Esta técnica, según Fresneda (en Marín y de la Torre (1991: 283)) fue ideada por Kaufmann, Fustier y Drevet; su nombre proviene de las palabras **circulaire concept** —concepto circular. El objetivo es hacer descripciones lo más completas y novedosas posible sobre las personas o entes físicos o sociales objeto de estudio. Los pasos a seguir para aplicar esta técnica son:



**1. Elección del tema:** Se elige aquello que queremos estudiar, los participantes se documentan bien para que el objeto de estudio no guarde ningún secreto para nadie y se intenta encontrarle algo nuevo e interesante.

**2. Etapa imaginativa:** Se le da rienda suelta a la imaginación anotando todas las analogías, semejanzas, diferencias y oposiciones que vayamos encontrando. Es normal que cuando a alguien se le ocurra una analogía de ahí salga otra y otra..., como al caer una piedra en el agua el impacto produce un círculo y éste da lugar a otro y éste a otro...

**3. Etapa crítica:** Se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y se clasifican por categorías, haciendo después una representación gráfica mediante círculos, colocando las ideas análogas en el interior del mismo círculo. A este tipo de gráfica se le da el nombre de **circept**.

**4. Uso de las analogías:** Se realiza un estudio minucioso, tanto de las semejanzas como de las diferencias, que ya estaban ordenadas y clasificadas, para aplicarle al objeto de nuestra investigación las sugerencias que obtengamos. Las diferencias lo enriquecen y las semejanzas hacen que unas se vayan aproximando a las otras, llegando a poder observar una interconexión entre todos los seres y objetos del universo.

Aunque hasta ahora no ha sido habitual utilizar esta técnica en Matemáticas pensamos que es posible utilizarlo al inicio de cualquier tema, puede ser muy importante su uso ya que conlleva un estudio en profundidad del tema para el que se empleé.

En “las Magnitudes y Medida” en Educación Infantil se puede aplicar esta técnica pero hay que tener en cuenta que no se podría llegar a que el objeto de estudio no tuviera ningún secreto, ya que los conceptos los va construyendo el niño, y las ideas que tiene de la mayoría de las cosas son sólo intuitivas, de todos modos haremos todo lo posible por sacarle el máximo partido en el tema que nos ocupa.

### 1.5.14. Crear durmiendo o sleep-writting

Esta técnica pretende aprovechar todas las ideas que se producen durante el periodo que precede al sueño o entre sueño y sueño. Fue promovida por Aznar (1974).

Casi todas las personas emplean esta técnica cuando se les plantea un problema importante, por eso se suele decir: “tengo que

consultarlo con la almohada”, indicando que con la tranquilidad del sueño se ven las cosas más claras.

A todos nos ha pasado algunas veces que hemos querido resolver un problema durante el día y no le hemos encontrado ninguna solución, y al llegar la noche, en el presueño, cuando el inconsciente se manifiesta con más facilidad y desaparecen los bloqueos mentales existentes en la conciencia, hemos visto con toda claridad la solución, pero si no hemos tenido a mano ningún bolígrafo se nos pudo olvidar al día siguiente cuál era. Otras veces, al ver con claridad cuál era la solución, nos hemos tenido que levantar de la cama, porque ya no podíamos dormir, ¡la chispa ha saltado! y hay que ir a tomar nota de ella.

A pesar del insomnio que puede producir esta técnica, no podemos prescindir de ella, ya que las ideas que surgen durante este periodo suelen ser, en algunos casos, mucho mejores que las que se producen durante el periodo de vigilia.

Por todo esto, se recomienda a las personas que tengan que resolver algún problema lleven a mano algo para apuntar las ideas que surjan en cualquier momento.

A este respecto Guzmán (2005: 14) nos dice: *Con la imaginación hago Geometría, incluso despierto en la cama, a oscuras. No necesitas papeles ni nada; realmente es un placer. (...) Pienso cuando tengo tiempo y estoy interesado en un problema, sobre todo por la mañana, cuando me despierto, mucho más que por la noche. Pero a los problemas hay que dedicarles mucho tiempo, no se resuelven sobre la marcha (como suelen pensar los jóvenes). Cuando me despierto me pongo a pensar en algún problema que tengo pendiente y lo paso estupendamente. (...) Desde luego es obvio que hay que dejar dormir a los problemas, antes o después acaba viniendo una cosa u otra.*

Los pasos que se deben seguir para aplicar esta técnica son los que se indican a continuación:

### **1. Estar interesado por un tema.**

**2. Organización de las sesiones:** Si se quiere resolver el problema en grupo, hay que organizar las sesiones de creatividad durante el día para ir pensando en cómo resolver el problema antes de ir a dormir.

**3. Dejar a mano, antes de ir a dormir, papel y lápiz** para poder anotar las ideas que nos surjan en el presueño, en el intersueño o al despertar.

**4. Análisis de los resultados:** Al día siguiente se llevará a cabo un análisis, por el grupo, de las ideas que surgieron, para aprovechar las que se puedan.

El niño en Educación Infantil es muy creativo por naturaleza, es por lo que no necesita del sueño para crear. De todos modos podemos, después de haber visto algún problema, decirle que cuando se vaya a dormir piense en encontrarle una solución, ya que al día siguiente nos tiene que decir lo que se le ha ocurrido. Sin embargo, mediante los ejemplos que pondremos en el Capítulo III veremos una forma más clara de aplicar esta técnica en el tema “las Magnitudes y su Medida”.

### 1.5.15. Relax imaginativo

Esta técnica se basa en que la fuerza de la imaginación es tan importante para el aprendizaje como la práctica real.

En esta técnica se incluye, según De Prado (en Marín y Torre (1991: 306)), “la sinéptica” bajo el aspecto “hacer lo familiar extraño” en el apartado de “analogía personal”, para tratar de identificar mentalmente a la persona *con los fenómenos, la relajación por concentración de Schultz y el pensamiento visual de McKim, generándose un estado de duermevela propio de la relajación.*

Bajo esta técnica el niño aprende de forma totalmente distinta a los aprendizajes convencionales, al ser éste un aprendizaje placentero y relajado, recurriendo a la imaginación para vivenciar lo aprendido.

En Educación Infantil esta técnica debe ir acompañada de la dramatización de los conceptos de que se trate. La explicación de los contenidos puede favorecer el proceso imaginativo.

Las consecuencias beneficiosas del relax imaginativo son las siguientes:

- i) Relajación de los alumnos.
- ii) Armonización integrada de palabra-imagen.
- iii. Inclusión de los aprendizajes en sus vivencias a través de la fantasía.
- iv) Identificación con los fenómenos sociales sometidos a representación.

Los pasos que se deben seguir en el relax imaginativo son:

- 1. Ambientación.**
- 2. Relajación muscular.**

3. Preparación para la narración.
4. Narración.
5. Vuelta a la realidad.
6. Aplicaciones didácticas.

Son muchos los conceptos relativos al tema “las Magnitudes y su Medida” que se pueden trabajar con esta técnica a nivel de Educación Infantil. Puede aprovecharse muy bien el tiempo que se dedica a relajar al niño, como puede ser el de después del recreo o cuando queramos que el niño esté tranquilo, para utilizar esta técnica comentándole algún experimento que se haya llevado a cabo durante la clase o contándole algún cuento en el que aparezca el concepto que pretendamos que adquiera el niño.

A nivel de la enseñanza universitaria no ha sido habitual utilizar esta técnica, aunque cuando hemos estado preocupados por resolver un problema, con bastante frecuencia las mejores soluciones —sabemos por experiencia propia— nos han surgido cuando estábamos más tranquilos y no esperábamos resolverlo.

### 1.5.16. Técnica de escenarios

Esta técnica, utilizada por Torrance en el programa de Solución de Problemas del Futuro dirigido a superdotados, tiene por objetivo predecir, pronosticar, extrapolar e imaginar el futuro.

El análisis de cómo son las cosas o de lo que acontece hoy, nos puede inducir a predecir cómo serán o lo que sucederá en el futuro.

Los participantes deben poner de manifiesto la situación actual de los acontecimientos objeto de trabajo, y a partir de ahí tienen que describir una serie de acontecimientos que posiblemente acontezcan en el futuro, relativos a la situación problemática planteada. Las pretensiones de esta técnica, según Menchén (en Marín y de la Torre (1991: 298)), son, *entre otras cosas: desarrollar habilidades para solucionar problemas, visualizar imágenes del futuro, trabajar en equipo, estimular el pensamiento interdisciplinar y, en definitiva, llegar a ser más creativos en la forma de ser y pensar.*

Los pasos que se deben seguir en esta técnica, por tanto, son:

**i) Planteamiento actual y análisis:** Planteamiento de una situación problemática y análisis de la situación actual.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Utilizando un “torbellino de ideas” intentar ver, mirando al futuro, una solución. Para ello se pregunta, mediante “el arte de preguntar”: ¿qué debe hacerse?; ¿cómo?; ¿por quién?

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Se anotan todas las soluciones y se realiza una selección de las mejores, en función de los criterios previamente seleccionados y se puntúan de 1 —la peor— a 10 —la mejor.

Esta técnica podría utilizarse en Educación Infantil en el tema “las Magnitudes y su Medida”, por ejemplo, después de realizar medidas de una determinada magnitud, y una vez vistas las dificultades que suponen dichas medidas, se les podría plantear cómo podríamos llegar a medir en el futuro y con qué aparatos. Esta puede ser una de las técnicas más valiosas, ya que puede llevarles a obtener grandes descubrimientos, si no ahora, en el futuro.

### 1.5.17. Síntesis creativa

Una de las características más importantes de una mente creadora es la facilidad para concretar. Es conveniente que el educador oriente los pasos a seguir hasta llegar al slogan. La síntesis es una actividad del entendimiento que se ejercita de una manera espontánea; si bien como técnica de Metodología Creativa tendrá un interés especial.

Cuando hay que hacer propaganda de algún artículo o idea se recurre al slogan comercial o político; es una forma de aplicar esta técnica. Otra sería el ponerle un título sugerente a una obra. El periodista está utilizando constantemente la síntesis creativa al poner los titulares de los periódicos o en la televisión. En la elaboración de un proyecto de tesis también se utiliza esta técnica.

En Matemáticas, y más concretamente en “las Magnitudes y su Medida”, se suele emplear esta técnica en bastantes ocasiones. Por ejemplo, cuando después de estudiar uno o varios conjuntos con una o varias leyes de composición interna o externa, se reconoce que hemos conseguido tener una determinada estructura algebraica.

Con el niño de Educación Infantil es tremendamente interesante emplear esta técnica, y tendremos que aplicarla cuando queramos sacar una conclusión de un experimento llevado a cabo. Puede ser, por ejemplo, cuando después de observar varios conjuntos equipotentes concluimos que tienen el mismo número de objetos, y se inventa un nombre —en este caso un número— para designar la propiedad que

tienen en común todos ellos. Ésta es una manera de que el niño vaya descubriendo los números.

### 1.5.18. El juego como técnica

Todas estas técnicas son importantes pero sobre todo, teniendo en cuenta que estamos en Educación Infantil, merece mención aparte una técnica que no podemos olvidar: la actividad lúdica. El juego es una necesidad natural del niño y una fuente de aprendizaje. El juego es fundamental para la creatividad, y jugar es fundamental para el desarrollo del niño. Los niños pasan la mayor parte de su tiempo libre jugando. A través del juego el niño va captando el mundo que le rodea, se acomoda a la realidad que le ha tocado vivir, se descubre a sí mismo, descubre su entorno y descubre nuevos modos de razonar. Al jugar, el niño tiene que relacionarse con otras personas, va saliendo de su egocentrismo y va aprendiendo a socializarse.

Según Chateau (1973: 4) *el niño se desarrolla por el juego. Mediante él realiza las potencialidades que afloran sucesivamente a la superficie de su ser, las asimila y desarrolla, las une y relaciona, coordina su ser y le da vigor..., gracias al juego crecen el yo y la inteligencia del niño. Un niño que no juega será un adulto que no sabrá pensar.*

Para Piaget (1985), *el juego es básicamente una relación entre el niño y su entorno, un modo de conocerlo, de aceptarlo e incluso de modificarlo y construirlo.*

Entendemos por juego cualquier actividad que se lleve a cabo con el fin de divertirse. El juego puede ser libre o dirigido. En el primero, los niños no se ajustan a ningunas reglas, y en el segundo, se siguen determinadas reglas que, según los casos, el niño puede aceptar o modificar. Para Gervilla (1997: 21) *el hecho de someterse a las reglas e imposiciones externas que suponen los juegos hace evolucionar al niño desde el principio del placer al principio de la realidad.*

El objetivo didáctico del juego en Educación Infantil es conectar al niño con su entorno social. Para ello suele explorar los objetos que le rodean e imitar las acciones que realizan los adultos.

Glutton (1982) nos describe el juego como: *la forma privilegiada de expresión infantil en la que el niño proyecta su mundo imaginario, el niño en sus juegos intenta imitar a los adultos y sus comportamientos.*

Se pueden distinguir distintas clases de juegos:

1. Juegos que sirven para favorecer el desarrollo físico de las personas: juegos deportivos; juegos malabares; en general todo tipo de juegos al aire libre.

2. Los que estimulan las facultades intelectuales: juegos de ingenio; juegos que utilizan diferentes estrategias; juegos que desarrollan las capacidades mentales de inducción, deducción, análisis, síntesis y pensamiento creativo.

3. Juegos de azar: juegos de mesa en su mayoría, aunque algunos de ellos no tienen por qué jugarse sobre la mesa: naipes, dados, parchís... Estos juegos sirven para estimular las diferentes cualidades personales y sociales, como la autoafirmación, la confianza en sí mismo, la cooperación, la comunicación, el trato, la aceptación de normas, el reconocimiento de los éxitos de los compañeros, etc.

Estas categorías se hallan a menudo interrelacionadas.

En el juego el niño suele emplear “la sinéctica” —técnica de Metodología Creativa antes mencionada—, ya que cualquier objeto puede ser utilizado en lugar de otro. Por ejemplo, la escoba puede ser un caballo; la muñeca puede ser la abuela; una caja puede ser un coche; un papel puede ser una alfombra voladora; un lápiz puede ser un arma; etc. Todo esto le ayuda a ver la realidad de forma distinta, sin normas ni leyes que encorseten su imaginación, para poder hacer cosas novedosas, cosas insólitas que entusiasmen y diviertan.

Piaget, en su teoría sobre el juego, nos dice que *el niño jugando elabora y desarrolla sus propias estructuras mentales*.

Según Guzmán (1984): *El interés de los juegos en la educación no es sólo divertir, sino más bien extraer de sus enseñanzas materias suficientes para impartir un conocimiento, interesar y lograr que los escolares piensen con cierta motivación*.

El juego es uno de los mejores medios educativos para favorecer el aprendizaje, ya que mediante la actividad lúdica el niño recoge información por medio de los sentidos, mantiene la atención activa, está concentrado y memorizando los procesos que se van dando, condiciones imprescindibles para un buen aprendizaje.

Con el juego el niño aprende a captar ideas de forma amena ya que, en esta situación, el niño se encuentra relajado y sin ataduras, se siente libre y feliz, condiciones favorables para que se produzca la creatividad. Si bien, el juego no debe entenderse como un conjunto de actividades que se realizan sin orden ni concierto cuando no tenemos



otra cosa mejor que hacer, sino que debe ir orientado a la consecución de unos objetivos educativos concretos.

Nos planteamos: ¿por qué hablamos de juegos trabajando una parte de las Matemáticas?; ¿qué relación puede haber entre el juego y las Matemáticas?; ¿se puede jugar con las Matemáticas?; ¿las Matemáticas nos pueden proporcionar algunos juegos? Todos los que nos hemos metido de lleno en alguna parcela de las Matemáticas, cuando le hemos tomado el gusto, hemos tenido la sensación de que no era demasiado esfuerzo el que nos suponía, y que era como si estuviéramos jugando, en lugar de trabajando. También nos hemos encontrado con determinados juegos, que nos han supuesto tener que razonar con la misma intensidad que cuando hemos intentado demostrar un teorema o resolver un problema. Todos conocemos algunos libros de juegos de razonamiento tan denso como el matemático.

Guzmán (2005: 23 a 28) nos dice al respecto: *El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña física, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. (...)*

*La Matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividades que se dan en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimenta en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.*

*Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y Matemática, que a veces los hace indescirnibles, haya dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos Matemática profundamente seria. (...).*

*Estas muestras de interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos matemáticos, que se podrían ciertamente multiplicar, apuntan a un hecho indudable con dos vertientes. Por una*

*parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente, y por otra parte una gran porción de la Matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego. (...)*

*La Matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la Matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la Matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea liviana. Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. De hecho (...) han sido numerosos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, a fin de poner más en claro las conexiones entre juegos y Matemáticas.*

*Desafortunadamente para el desarrollo científico en nuestro país, la aportación española en este campo ha sido casi nula. Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes.*

Creemos que todo profesor que tiene que impartir algún contenido matemático, tiene que estar interesado en motivar a sus alumnos para que sean ellos los que vayan redescubriéndolo; y consideramos que la mejor forma de hacerlo puede ser a través del juego, sobre todo a nivel de Educación Infantil y Primaria. Además, si dicho profesor pretende ser creativo, difícilmente podría serlo si no es capaz de inventarse juegos que le permitan introducir las distintas parcelas de las Matemáticas. Aunque para ello sea necesario una buena preparación, por parte del enseñante, en los contenidos a impartir, para que le permita poder ser crítico con los distintos juegos que pueda encontrar en los libros, se le

puedan ocurrir, pueda encontrar en el mercado o puedan inventarse entre toda la clase.

Por supuesto que la idea no es “jugar por jugar” sino jugar para aprender o jugar para enseñar, teniendo claro qué objetivo matemático conseguimos con dicho juego. Creemos que está bien hacerle la asignatura agradable al alumno, pero las Matemáticas tienen la dificultad que tienen (que por supuesto irá aumentando con la edad), y lo que no podemos hacer es engañarlos (a los niños de Educación Infantil o a los universitarios) haciéndoles creer que no tiene esta asignatura la precisión, el rigor y la complejidad que tiene. Está bien jugar y debemos hacerlo, pero con juegos bien pensados para que el alumno llegue a adquirir con ellos algún conocimiento matemático, de lo contrario habremos perdido el tiempo.

Hacemos, a continuación, un poligrama estructural de síntesis para recoger las diferentes técnicas que hemos estudiado y con las que vamos a trabajar en el Capítulo III:

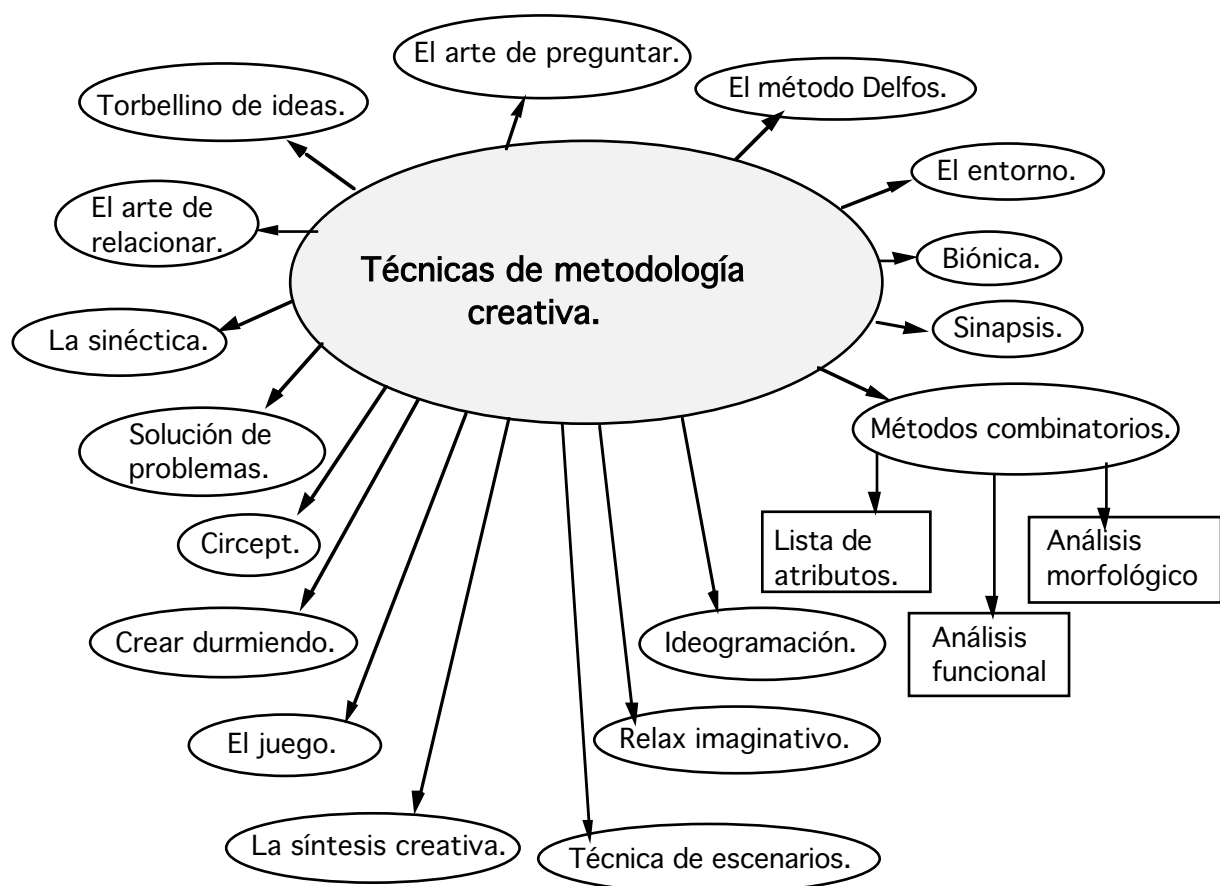


**Figura 2: Poligrama estructural de síntesis de las diferentes técnicas estudiadas.**

### 1.5.19. Justificación del orden seguido en el comentario de las diferentes técnicas

Cuando uno se plantea el comentar las técnicas de Metodología Creativa, cree que no es necesario seguir orden alguno. Sin embargo, la propia dinámica de la docencia, pone de manifiesto que, en realidad, y de manera natural, éstas se van aplicando en un determinado orden.

Cuando iniciamos un tema —o una parte de él— normalmente se empieza preguntando, se buscan aquellas preguntas que pueden motivar el tema; de aquí que **el arte de preguntar** sea la primera de las técnicas que comentamos.

A continuación se deja que los alumnos respondan a las preguntas, por eso **el torbellino de ideas** es la segunda de las técnicas comentadas. En otros casos se dejan las preguntas planteadas para que las piense el alumno en su casa, es por lo que ponemos después **el método Delfos**.

Si lo que tratamos de comentar es extraño para el alumno, hacemos que le resulte familiar acercándolo a cosas conocidas, aplicando **la sinéctica**; y se busca algún ejemplo, familiar para el niño, que responda al modelo, extraño, también mediante “la sinéctica”.

Después, mediante **los métodos combinatorios**, se ven las propiedades que verifica el objeto de nuestro estudio, bien mediante **la lista de atributos** o mediante **el análisis morfológico**; también es el momento de preguntarnos mediante **el análisis funcional**: ¿para qué sirve? o ¿podría tener otros usos?

Al ir adquiriendo nuevos conceptos, surge la necesidad de relacionarlos con los ya conocidos empleando **el arte de relacionar**. Seguro que con todo lo que llevamos a cabo surgen problemas y para resolverlos utilizaremos la técnica **solución de problemas**.

Tendremos que buscar o investigar algo en nuestro mundo más próximo relacionado con el tema que trabajemos; para ello emplearemos la técnica **el entorno**.

Si tenemos que construir aparatos tecnológicos en nuestro estudio, podemos ver el comportamiento de los seres vivos, para lo cual utilizaremos **la biónica**.

Como todo estudio supone esfuerzo, preocupación, trabajar a buen ritmo etc., aplicaremos **la sinapsis**.

Es lógico que el esfuerzo sea recompensado con el descubrimiento de algo que no esperábamos; tenemos **la serendipity**.

La ordenación de todas las ideas dará lugar a la aplicación de **la ideogramación o el circept**.

Como no podemos estar todo el tiempo trabajando, por mucho que nos guste un tema, tendremos que irnos a descansar, pero el tema no se nos irá de la cabeza, podemos aplicar la técnica **crear durmiendo**. También en medio o al final de un tema tendremos que relajarnos, sin olvidarnos del tema que “llevamos entre manos”, utilizando para ello **el relax imaginativo**.

Mediante **la técnica de escenarios** nos plantearemos cómo evolucionarán en el futuro los conceptos que estudiamos.

Y por fin, al tener muy claro todos los conceptos que forman parte de nuestro tema, podremos llegar al slogan utilizando **la síntesis creativa**. De todos modos puede utilizarse una técnica antes que otra aunque nosotros la comentemos en sentido inverso.

Al estar en Educación Infantil **el juego** será uno de los recursos más utilizados a lo largo de todo el proceso de enseñanza, para hacerle al alumno el tema de trabajo divertido, ameno, participativo..., por esto lo comentamos al final e independientemente de las demás técnicas, ya que será “el ingrediente” fundamental de todas ellas, pues la forma de usar cada una de las técnicas será a través del juego.

## Capítulo 2

# Las Magnitudes y su Medida: creatividad

### 2.1. Justificación

Una educación podemos decir que es creativa cuando el profesor que la lleva a cabo anima y dinamiza la clase para que todos investiguen y redescubran su propio saber, induce acciones participativas de los alumnos, son ellos los que construyen sus saberes a partir de conocimientos anteriores o experiencias previas, todos aprenden de todos, todos se expresan de forma original...

En la sociedad necesitamos personas creativas en todos los campos del saber; además, todos tenemos que inventarnos, en algún momento, nuestras propias formas de resolver determinadas situaciones que se nos plantean en la convivencia diaria; por tanto debemos fomentar la creatividad en cualquier etapa de la vida y, desde luego, lo mejor sería iniciarse en las primeras edades, para lo cual sería bueno empezar por el educador, que debería ser creativo para ayudar a que el alumno lo fuera. Nadie duda de la importancia que tiene que el profesor sea investigador, aunque quizás la faceta que consideramos más relevante sea la de la creatividad, ya que si es investigador, es creativo, pues con sus descubrimientos puede llegar a obtener resultados sorprendentes; si además presenta las conclusiones de sus investigaciones de modo creativo, está siendo doblemente creativo.

Nosotros nos planteamos: ¿se puede ser creativo a la hora de explicar un concepto si éste no se conoce? Es razonable pensar que si una persona no domina un concepto, difícilmente lo podrá transmitir a un nivel aceptable, y sería mucho pedir conseguir un alto grado de originalidad y una capacidad de ilusionar a los niños para que con su creatividad vayan redescubriéndolo. Estamos seguros de que si conseguimos que los maestros dominen “las Magnitudes y su Medida”,

serán más originales a la hora de aplicar técnicas de Metodología Creativa, sobre este tema, en el aula. Esto posibilitará a los niños evolucionar mucho mejor hacia la comprensión de “las Magnitudes y su Medida”, lo que repercutirá favorablemente en su desenvolvimiento en la vida.

Nadie duda de que para ser un buen profesor a cualquier nivel se debe tener un conocimiento en profundidad de Pedagogía y Psicología de la Educación bastante mayor de lo que la intuición puede suministrarle a cualquier profesional sin conocimientos en estos temas. Es por lo que no dejamos la educación de nuestros hijos en manos de personas que no tienen estos conocimientos y los exigimos en su currículum.

No sabemos por qué se pone en duda la necesidad de que el profesor que quiera transmitir algún conocimiento de un tema, en el nivel que sea, tiene que dominar muy en profundidad ese tema. A dicho profesor no le basta con conocer el tema al nivel que quiera transmitirlo. Seguro que cualquier padre domina el tema a ese nivel y no se autoriza al padre para que sea él el que lo explique en clase. Esto se agrava si del tema de que hablamos es de Matemáticas, asignatura que es de suma importancia en el aprendizaje y que provoca tantas “satisfacciones” a las personas que “les toman el gusto” porque las entienden y tantos “odios” a los que les resulta difícil acercarse a ellas.

Nosotros pensamos, por otra parte, que nadie está excluido del conocimiento en profundidad de cualquier tema de Matemáticas Elementales, si bien para enseñarlo se tienen que encontrar verdaderos profesionales que dominen el tema a un nivel bastante superior al que lo tienen que transmitir y que disfruten con las Matemáticas porque les resulten agradables. Esto es evidente para nosotros, nos atreveríamos a considerarlo como el primer axioma de la enseñanza de cualquier materia, ya que nadie puede hablar con conocimiento de causa de lo que no conoce y si se atreve, mejor es no escucharlo. Casas (2000: 17) nos dice lo siguiente: *Para poder hablar de algo, lo primero que hay que saber es en qué consiste ese algo. (...) no se puede hablar de algo que no se conoce.* ¡Y qué diríamos si de lo que se trata es no sólo de hablar sino de enseñar y además creativamente!

Huelga decir que el papel del alumno no debe reducirse a hacer de mero receptor de los conocimientos, es fundamental que adopte una postura activa para que el esfuerzo de los transmisores no resulte baldío.

Tratando algunos aspectos sobre la enseñanza de “las Magnitudes y su Medida”, Fernández Biarge (1970: 80 y 81) comenta: *(...) la elección acertada de las actividades que han de dar una base sólida de naturaleza concreta, a las futuras abstracciones, sólo puede hacerla un*



*profesor que tenga una idea clara de la estructura abstracta subyacente en la materia que se está estudiando, y esas actividades, que al principio han de ser llevadas a cabo con objetos materiales, han de ser una representación lo más fiel posible de esa estructura abstracta.*

*(...) el profesor debe decidirse a ordenar sus propias ideas sobre esta cuestión de una manera cualquiera, pero bien determinada. De otro modo, las ideas que sugiera, aunque no las exponga sino en un aspecto muy elemental, habrán de ser necesariamente confusas, Y confuso no es sinónimo de elemental, como podría creer, ingenuamente a la vista de ciertos tratados elementales. Pretendemos con nuestra investigación poner de relieve esta circunstancia que, por otro lado, para nosotros no ofrece ninguna duda.*

Analizando cómo ha ido la enseñanza-aprendizaje del tema objeto de nuestro interés, podemos decir que las instituciones escolares han ido recogiendo distintos aspectos de “las Magnitudes y su Medida” y a distintos niveles en sus programas de Matemática Elemental de forma sistemática —aunque no en la Matemática Universitaria. Si bien en el último cuarto del pasado siglo se han trabajado conceptos bastante cercanos al de Magnitud (pensamos, por ejemplo, en el de semimódulo, módulo y espacio vectorial) que podríamos considerar que se ha conseguido organizar algebraicamente, no por esto se han logrado resolver los problemas que conlleva su enseñanza-aprendizaje. Varios puntos pueden ser considerados como motivos:

1. Pensando en el papel de las Matemáticas en los planes de estudio, creemos que no se le han transmitido suficientes conocimientos sobre “las Magnitudes y su Medida” al maestro, ya que no hay ninguna asignatura troncal de contenidos matemáticos en los actuales planes de estudio de Magisterio. Concretamente en Málaga, la asignatura “Matemáticas” ha pasado de ser obligatoria para la especialidad de Maestro en Educación Primaria, hasta 1992, a ser optativa en dicha especialidad; hay una asignatura optativa para la especialidad de Maestro en Educación Infantil: “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil”; los alumnos de Magisterio tienen las asignaturas optativas comunes a todas las especialidades: “Introducción al Álgebra” y “Elementos de Geometría” en los planes de estudio recientes, pero el alumno que no tiene interés por las Matemáticas, no se le dan bien o les suponen demasiado esfuerzo, puede concluir sus estudios con los conocimientos que le queden de secundaria (después de tres —si eligió un bachiller de Ciencias— o cinco años —si su bachiller no tenía contenidos matemáticos— sin acordarse de las Matemáticas para nada —salvo su utilización en la vida real, de lo cuál no se puede librar—), y la verdad es que suelen ser muy pocos, si es que queda alguno. Sin embargo, las Matemáticas han estado presentes anteriormente en los

planes de estudio de Magisterio, como podemos observar en el análisis comparativo de los contenidos matemáticos de dichos planes de estudio, cuyo estudio iniciamos a partir de 1945 hasta la actualidad, y que incluimos en el Anexo I.

2. No se ha motivado suficientemente al alumno-profesor para que se preocupe de estudiar el tema “las Magnitudes y su Medida” por su cuenta. Quizá sea por el rechazo a lo que se piensa que tiene alguna dificultad, y nadie le ha hecho que observe que si no conoce el tema a su nivel, tendrá más dificultades en transmitir su conocimiento y será muy difícil que ilusione al niño para que le guste esta parte de las Matemáticas. El único que podría haberle hecho ver que debe conocer este tema hubiera sido el profesor que imparte contenidos matemáticos y a éste los actuales planes de estudio no le dan la oportunidad de estar a su lado.

También hay alumnos que después de estar matriculados en alguna de las asignaturas de contenidos matemáticos, al ver que les supone un esfuerzo mayor que las demás asignaturas de su especialidad, en lugar de pensar que en estas asignaturas están aprendiendo algo que no saben —por esto les cuesta—, y que sería muy difícil adquirir todos estos conocimientos por ellos mismos, las abandonan al poco tiempo de asistir a clase.

A veces los alumnos no se matriculan en las asignaturas de contenido matemático porque piensan que les van a resultar difíciles, y no llegan a saber, hasta que no se enfrentan con su futuro profesional, lo cual puede ser demasiado tarde, que parte de estos conocimientos, que no saben ni quieren aprender, son los que, adaptándolos al nivel correspondiente de Infantil o Primaria, tienen que enseñar.

3. No se han analizado en profundidad las dificultades que comporta su enseñanza-aprendizaje. Esto debería ser un trabajo conjunto del profesor de Álgebra, del de Didáctica de la Matemática (ambos de la Facultad) y del maestro, pero si este último no conoce bien el tema o no le interesa, ¿cómo podría colaborar para llevar a cabo dicho análisis?

4. Tampoco se le ha dado este tema a los licenciados en Matemáticas, si bien es de suponer que éstos tienen conocimientos suficientes para prepararlo individualmente a partir de otros temas que sí forman parte de su currículum y que guardan bastante relación con “las Magnitudes y su Medida” como pueden ser: semimódulos, módulos, espacios vectoriales, homomorfismos, etc.

Entre los que destacan la importancia de una buena preparación matemática del educador nos encontramos con De Guzmán, M. (2005:19 y siguientes) que dice: *...Desde luego, la formación de los profesores es la base, la raíz de todo, y debería cambiar, lo vengo diciendo hace mucho tiempo. La formación inicial es la más importante, por supuesto. La de los profesores de Primaria es totalmente insuficiente; (...) aquella que resulta útil para la pedagogía matemática sigue teniendo muchos déficits. Y eso a pesar de que la preparación didáctica que reciben los profesores de Primaria es inmensa en comparación con la educación matemática que se les brinda; sin embargo, la parte útil que podrían utilizar luego en el aula es muy escasa. E incluso está cuantificada: hay maestros generalistas que han aprendido matemáticas el 3% o el 4% de su tiempo, lo que resulta claramente insuficiente. (...)*

*Pero existe un grave problema con las horas dedicadas a Matemáticas. Cuando yo estudiaba (alrededor de 1950) eran seis horas semanales (también los sábados) durante siete años; ahora son tres. No se pueden hacer milagros.*

Pensamos que el déficit en contenidos matemáticos, que como podemos ver en el Anexo I es mayor, en algunos casos, que los que Gúzman considera, no sólo se da en los profesores de Primaria; también en los de Infantil, ya que aunque en Infantil el profesor no tenga que profundizar tanto en algunos contenidos matemáticos, sí tiene que alcanzar un dominio suficientemente amplio de aquellos conceptos que tenga que impartir, pues si no los domina, le dominan. Y no podrá tener un espíritu crítico con los contenidos de los libros de texto, ni será capaz de razonar por qué para explicar un determinado concepto es mejor realizar una determinada actividad, otra o ninguna de las que ha encontrado en los libros o en internet, y en muchos casos quizá opine que es mejor crearse él las actividades o los juegos que mejor se adapten a ese grupo de alumnos y a esa parcela de las Matemáticas. Por supuesto que para poder llevar a cabo este planteamiento tendrá que tener un dominio total de aquella parte de las Matemáticas que quiera hacer redescubrir a sus alumnos.

También De Guzmán aporta soluciones: *Poner el énfasis en Primaria y Secundaria allí donde debe estar: en Lengua y Matemáticas. Y dedicar más días de clase al año. En Alemania seguro que existen 20 días lectivos más al año, y en Japón muchos más. (...) creo que el mal de raíz se encuentra en la formación de los profesores de Primaria, ya que muchos de ellos (sin culpar a nadie, ya que el sistema es así) salen aborreciéndolas o son incapaces de enfrentarse a una clase de Matemáticas con gusto, demostrando agilidad y flexibilidad. Por eso o no la darán, o lo harán muy mal, o se les notará tantísimo que eso se*

*traspasará a los alumnos. Es como una ósmosis. Por eso existe el fenómeno de personas adultas muy inteligentes que presentan un rechazo total a las Matemáticas, con un bloqueo absoluto; sin embargo, si a estas mismas personas se les propone una actividad matemática sin que se den cuenta, la resolverán sin problema.*

Estamos completamente de acuerdo con lo que comenta Guzmán de que el énfasis debe ir en que se incremente el número de clases de Matemáticas. Nosotros creemos que no sólo se debe incrementar el número de clases de Matemáticas en Primaria, como él dice, también en Infantil, y por supuesto en todos los estudios de Magisterio, si es que en los futuros planes de estudio hubiese alguno más, ya que si el maestro está bien preparado matemáticamente sabrá transmitir las ganas y la ilusión por el estudio de dicha asignatura y quizá con ello podría resolverse, en el futuro, el problema de esas *personas adultas muy inteligentes que presentan un rechazo total a las Matemáticas*.

Además se debe reconocer la importancia que tiene su estudio, tanto por parte de la sociedad como por parte del profesor de estos dos niveles, para que los padres y los maestros reclamen mayor número de horas de clase de Matemáticas al Ministerio y que estas clases las imparta una persona que esté suficientemente preparada en dicha materia.

Nos preguntamos: ¿es más importante la Música, la Educación Física o los Idiomas, por ejemplo, que las Matemáticas para que haya una especialidad en Educación Musical, otra de Educación Física y otra de Lengua Extranjera y sin embargo no haya ninguna especialidad en Educación Matemática? ¿Necesitará la sociedad, en el futuro, más atletas, músicos o políglotas que científicos? Y hoy día, ¿necesita la sociedad que los alumnos dominen mejor la Música, la Gimnasia o el Idioma Extranjero que las Matemáticas? Estamos seguros de que a los niños se les da mejor la Música, la Gimnasia, los idiomas y otras muchas asignaturas que las Matemáticas. Esta materia es la que cuesta más a los alumnos generalmente, luego si se tiene que intensificar el estudio de alguna asignatura, debería ser de la que le resulta más difícil.

Quizá si hubiera una especialidad en Maestro de Educación Matemática y se intensificara el número de horas que los niños dedican a esta parcela del saber, podría llegar el día en que el maestro que imparte esta docencia estuviera preparado matemáticamente y supiera motivar bien a los niños para que, cada uno a su ritmo, fueran redescubriendo las Matemáticas, no tendríamos el fracaso escolar en Matemáticas que hay en la actualidad, con lo cual se elevaría el nivel científico de la sociedad, pero hoy por hoy tenemos claro que el tiempo que se dedica a las

Matemáticas es insuficiente tanto a nivel de Educación Infantil como a nivel de Magisterio.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas también se ha pronunciado al respecto (Suma, Febrero (2005:125)) y opinando sobre la nueva reforma que propone el Ministerio de Educación y Ciencia dice lo siguiente: *El currículo en general y el de Matemáticas en particular debe perseguir la satisfacción y el desarrollo personal pero también la satisfacción de las necesidades de la sociedad (integración de los alumnos en la sociedad, formación de trabajadores, profesionales, científicos, etc. que aseguren el progreso e independencia económica de nuestro país).*

Desde luego que si nuestra sociedad necesita personas capacitadas matemáticamente, lo menos que podemos hacer es no llegar a que, en las primeras edades, el niño pueda aborrecer las Matemáticas porque al observar que al maestro no les gustan y se las presenta de forma poco atractiva y sin ningún interés y entusiasmo por ellas, genere un rechazo en él que pueda ser la causa de que tampoco le gusten en el futuro.

Más adelante (página 129) comenta algo que nosotros ya hemos dicho, en parte, antes: *Ningún cambio en la enseñanza es posible sin tener en cuenta a los profesores. A nuestro entender deben modificarse urgentemente las carreras de Formación del Profesorado en los diferentes niveles, aunque el cambio más urgente debe realizarse en los programas de formación de profesores de Educación Primaria. Es imprescindible crear una especialidad de Matemáticas en la titulación de Maestro.*

Sobreentendemos que el cambio que propone en las especialidades de Maestro en Educación Primaria, que nosotros extendemos también a Maestro en Educación Infantil, es que haya algunas asignaturas troncales que sean de contenidos matemáticos. Pensamos que no sólo debe haber en estas dos especialidades, sino en todas las especialidades de Magisterio —en caso de que en el futuro hubiese algunas más.

Estamos totalmente de acuerdo con la idea de *crear una especialidad de Matemáticas en la titulación de Maestro*, esto sería fenomenal, ya que de este modo tendremos profesionales cualificados para impartir la docencia de la asignatura de Matemáticas en las primeras edades, con lo que podremos conseguir que el niño se ilusione con la asignatura, y si al niño desde pequeño se le hace que le gusten las Matemáticas, podremos descollar a nivel mundial y no pasará como ahora que vamos a la cola del mundo en preparación matemática. A este respecto el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación —INCE—, en

<http://www.ince.mec.es/tim.ss/global.htm>

comentando los resultados globales en Matemáticas en la Evaluación Pisa 2003, de los cursos de 7º y 8º dice: *El rendimiento medio internacional de los alumnos de 8º es de 513 con valores entre 643 —puntuación de Singapur— y 354 —Sudáfrica. El rendimiento medio de los alumnos de 7º es de 484 con valores entre 601 —Singapur— y 348 —Sudáfrica. (...)* Viendo la posición en que queda España comenta: *La puntuación media de los alumnos españoles es 487 en 8º y 448 en 7º, en ambos casos por debajo del rendimiento medio internacional. Si se ordenan los países por orden decreciente de rendimiento en 8º, España ocupa el puesto 31 de 41 países y en 7º el 32 de 39.* Lo cual deja mucho que desear. Esperamos que en los próximos años se pueda elevar el nivel matemático de nuestros alumnos y lleguemos a alcanzar una puntuación más alta.

Por otro lado, el Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales, en la dirección

<http://www.clacso.edu.ar>

se dice lo siguiente: *Hoy día, cuando los avances cuantitativos en el sector educativo son reconocidos por muchos, la calidad aparece como un reclamo de todos. Pero una educación de calidad requiere de un docente capacitado para comprender la realidad educativa desde su cuestionamiento y problematización, y en consecuencia tomar decisiones y actuar para su transformación en beneficio de todos los que participan en ella. (...)*

*La formación y superación de los maestros desde la perspectiva del desarrollo de competencias adecuadas para investigar es una preocupación común para la comunidad educativa internacional. Ellas deben orientarse al fomento y optimización del sistema educativo guiándolo hacia metas más exigentes de calidad, de equidad y de eficacia, para contribuir al desarrollo de un potencial científico propio, capaz de garantizar la producción del conocimiento social útil y de asimilar apropiadamente el que produce la humanidad en su conjunto. (...)*

*De lo anterior se desprende que el maestro debe prepararse para investigar su realidad como parte de su desarrollo profesional. La función investigativa del maestro está llamada a convertirse en una de sus herramientas básicas para alcanzar éxito en su labor educadora; esta función contribuye al autoperfeccionamiento del maestro, lo prestigia y profesionaliza. (...)*

Destacamos la importancia de que el educador tenga un potencial científico propio que le permita investigar su docencia, ya que pensamos que es sumamente interesante para su profesionalización, pues será más crítico, creativo, original, competitivo, reflexivo, etc.



Por todo ello, para estudiar y analizar en profundidad “las Magnitudes y su Medida” en la Educación Infantil, conviene empezar haciendo un estudio, en lo que al alumno-profesor se refiere, de lo que se entiende por creatividad, y una recopilación de las diferentes técnicas de Metodología Creativa —que es lo que hacemos en el Capítulo I—, de los conceptos de magnitud y de medida de una magnitud —que lo llevamos a cabo en este Capítulo. Intentaremos resolver las dificultades que alumno-profesor pudiera tener, pues pensamos que esto facilitará poder expresarse con más claridad y libertad, sabrá la razón de proponer algunas actividades en lugar de otras, podrá ser más original y además trabajará mucho mejor estos conceptos si los domina que si solamente tiene una idea intuitiva de ellos.

Si lo que quiere el profesor —o el alumno-profesor— es explicar un tema o preparar actividades para un grupo de alumnos, aparte del dominio del tema, nos parece coherente que antes de trabajarlo con los niños se plantee cómo fue aproximándose él a ese conocimiento. Para hacerle reflexionar sobre su iniciación en el concepto de magnitud y de medida de una magnitud, para que se dé cuenta de cómo llegó al conocimiento que hoy tiene, podríamos plantearle, siguiendo las técnicas de Metodología Creativa “el arte de preguntar” y “el torbellino de ideas”, las siguientes cuestiones: ¿cómo te iniciaste en el conocimiento de las magnitudes? O lo que es igual, ¿cuándo empezaste a usar magnitudes?; ¿te acuerdas de lo que hiciste?

Si pensamos en cualquier magnitud de las que usamos con frecuencia, como puede ser la longitud, el peso, la superficie, el volumen, la capacidad, el tiempo, etc., cuando nos iniciamos en ellas, lo primero que hicimos fue oír hablar de ellas a las personas de nuestro entorno, quizá por ello después no nos sonó extraño el vocabulario que posteriormente empleamos con más precisión. Después participamos nosotros, comparando objetos que pudieron ser trabajados con ellas. Por ejemplo, en el caso de la longitud, lo que hicimos fue ver si un objeto era igual de largo que otro, es decir establecimos una relación de equivalencia entre los objetos. Posteriormente comparamos los elementos del conjunto cociente a través de los objetos que había en las clases de equivalencia, para ver si un objeto es más largo o es igual de largo que otro, es decir, establecimos una relación de orden. Más tarde sumamos longitudes —estrictamente hablando cantidades de longitud— y pasamos a multiplicar una cantidad de longitud por un número.

¿Hasta dónde podemos llegar a matematizar estos conceptos? Llegaremos a que una magnitud es un semigrupo unitario y conmutativo o un grupo abeliano y por tanto un semimódulo o un módulo —según se trate de una magnitud absoluta o relativa— unitario, conmutativo y, en



algunos casos, totalmente ordenado y arquimediano. La medida de una magnitud será un isomorfismo entre semigrupos unitarios y conmutativos o entre grupos abelianos y por tanto entre semimódulos o módulos, según el tipo de magnitud.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, el concepto de magnitud queda englobado en el de semimódulo. Esta noción es ampliamente estudiada a nivel abstracto —véase el libro de Golan, 1991. Desde el punto de vista de la enseñanza, el concepto de magnitud proporciona el enlace entre el mundo experimental y el mundo matemático.

Todo esto es fundamental para el conocimiento de la magnitud, como se verá dentro de poco, pero si queremos ser creativos tendremos que plantearnos: ¿se podría introducir al niño en el tema “las Magnitudes y su Medida” de otro modo para que su enseñanza fuera más eficaz, más provechosa, menos frustrante, etc.? Para responder a esta pregunta creemos que puede ser interesante tener en cuenta la repercusión que hoy en día está teniendo la Metodología Creativa y estudiar lo que ésta puede aportarle.

## 2.2. Introducción

Ya hemos señalado en la Justificación de este Capítulo la importancia que tiene el dominio de un tema, por parte del profesor, para después poder llevarlo, parte de él o todo, a la clase, sea al nivel que sea.

Abellanas (1967: 232), buen conocedor del tema que nos ocupa, da su opinión sobre el estudio de “las Magnitudes y su Medida”, al respecto dice lo siguiente: *...las magnitudes desempeñan un papel esencial en todas las ciencias, hasta el punto de que se podría hablar del grado de desarrollo de una ciencia por el grado de elaboración alcanzado por su teoría de magnitudes correspondiente. (...) la finalidad de la teoría de magnitudes será la de justificar al alumno la ventaja de las estructuras matemáticas para el estudio y resolución de variados problemas, presentándoles un ejemplo útil del proceso de matematización de un concepto.*

Teniendo en cuenta todas estas razones y considerando que nosotros podemos aportar algo, nos vamos a detener a estudiar “las Magnitudes y su Medida”. Pretendemos hacerlo a un nivel que pueda ser entendido por casi todos los alumnos de cualquier curso de Magisterio, de Matemáticas o de otra diplomatura o licenciatura universitaria, como son los alumnos que han elegido las asignaturas “Elementos de Álgebra y

Geometría en la Educación Infantil” o “Introducción al Álgebra”, ambas de Magisterio. Para comprender el tema sólo se necesita saber algo de Lógica Matemática y de Teoría de Conjuntos, ya que será trabajado desde los niveles más elementales.

Como vamos a intentar fundamentar todos los razonamientos que hagamos para llegar a presentar los postulados, las definiciones, las proposiciones y sus demostraciones de manera formal, en algunos apartados quizás se lleguen a alcanzar resultados que no sean completamente comprensibles o asimilables por todos los alumnos. En caso de que algunas partes del tema les resulten demasiado difíciles, para ayudarles un poco a seguir todos los razonamientos, pueden consultarnoslos, o ver detenidamente el resultado final y su aplicación sin entrar en la demostración.

Justificaremos las definiciones que demos de magnitud y de medida de una magnitud, así como las de los distintos tipos de magnitudes, basándonos para ello en la similitud que pueda existir con otras estructuras matemáticas cuyo estudio en la actualidad esté más avanzado.

Analizaremos algunas de las definiciones que nos hemos encontrado comparándolas con las que nosotros propongamos.

Para la exposición del tema “las Magnitudes y su Medida” utilizaremos las distintas técnicas de Metodología Creativa, material sumamente interesante para animar al alumno a ser creativo, original, y conseguir que el tema no resulte aburrido. Si bien, en la mayoría de los casos sólo diremos qué técnicas vamos a usar, no indicaremos la forma de llevarlas a cabo por no hacer excesivamente extenso este tema.

## 2.3. Creatividad en “las Magnitudes y su Medida”

Aunque quizás a muchos les parezca que las Matemáticas y por tanto su enseñanza, debido al rigor de sus razonamientos, están reñidas con la creatividad, nosotros vamos a intentar hacerlas compatibles. En este apartado vamos a comentar cómo utilizaremos las distintas técnicas de Metodología Creativa en la exposición de la parte de ellas que nos corresponde trabajar: “las Magnitudes y su Medida”. Lo que aquí decimos puede hacerse extensivo, sin lugar a dudas, a cualquier parcela de esta disciplina.

En nuestra exposición vamos a ir haciéndole al alumno una serie de preguntas sobre los distintos apartados del tema “las Magnitudes y su Medida” para motivarlo y con ello fomentar la creatividad. Usaremos la

técnica de Metodología Creativa llamada “el arte de preguntar” (pueden verse todas las técnicas en el Capítulo I), y sería muy importante que el lector las respondiera antes de ver nuestra respuesta, y si coincide con la nuestra o es mejor aún, puede pasar esta parte del tema y entrar en la siguiente.

También emplearemos “el torbellino de ideas” o “Brainstorming”, ya que dejaremos que cada una de las preguntas que propongamos al iniciar cada uno de los apartados del tema que nos ocupa —y si es preciso en medio de algún apartado— dé lugar a un “torbellino de ideas”. Participan todos los alumnos, los cuales exponen su opinión sobre cada una de las preguntas en un tiempo prudencial, con total libertad; uno de ellos actúa como secretario y va anotando las respuestas de los demás y la suya propia. Después, entre todos, clasifican, organizan y evalúan todas las aportaciones. En caso de que hubiera algún error, cosa que no es difícil que ocurra por tratarse de razonamientos matemáticos, se podría corregir proponiendo algún ejemplo o ejercicio del entorno del alumno y, si fuese necesario, trabajando esta teoría a un nivel un poco más cercano a él.

En algunos casos podremos utilizar “el método Delfos”, ya que en determinadas ocasiones quedarán pendientes, para realizar al día siguiente, ciertas actividades, demostraciones o ejercicios sobre algunos de los apartados de que consta el tema “la Magnitudes y su Medida”, al final de la clase. Cada alumno deberá pensar en casa en ellos y traerá el resultado encontrado por escrito para dárselo al profesor. El profesor actúa de coordinador, agrupa las soluciones por categorías, las sintetiza y se las comenta a todos eliminando los valores extremos. Cada alumno, a la vista de las respuestas de los demás, piensa en la suya, que puede modificar o no. El profesor cierra el problema después de cruzar las respuestas.

Otra técnica que utilizaremos será “la sinéctica” en sus dos vertientes: “hacer lo familiar extraño” y “convertir lo extraño en familiar”, por ejemplo, pasando de lo conocido por el maestro —magnitud y medida— a lo desconocido —concepto matemático de magnitud y de medida—; y de lo desconocido —semimódulo y homomorfismo entre semimódulos— a lo conocido —magnitud concreta y su medida.

El alumno compara el concepto de magnitud que se le presenta con las distintas magnitudes que él conoce y transforma lo extraño en familiar. Para ello analiza la definición que le damos; busca algún modelo de magnitud que le resulte familiar y lo compara con la definición dada; y finalmente generaliza, lo que le lleva a definir los distintos tipos de magnitudes.

También se puede partir de lo que es familiar al alumno, como son las medidas de las distintas magnitudes con las que ya ha trabajado, y transformarlas en extraño. Para conseguirlo, el alumno, mediante la analogía personal, se identifica con las medidas de las distintas magnitudes que conoce para sacarles todo el partido que pueda. Mediante la analogía directa compara estas medidas con las aplicaciones lineales u homomorfismos ya conocidos para ver las medidas de las magnitudes desde otro punto de vista. Intentando simplificar la definición de medida de una magnitud, el alumno deberá utilizar la analogía simbólica para conseguir relaciones entre las medidas de las distintas magnitudes. Finalmente, mediante la analogía fantástica, llegará a la definición de medida de una magnitud y a los distintos tipos de medidas de las distintas clases de magnitudes.

“El método combinatorio” será otra de las técnicas que emplearemos, ya que, por ejemplo, daremos un conjunto y en él una ley de composición interna y mediante la técnica “lista de atributos” veremos las propiedades que se verifican y, como consecuencia, diremos la estructura que se tiene; dicha estructura se irá enriqueciendo hasta obtener la estructura “más completa” posible según nuestros propósitos. También, cuando tengamos clasificadas las magnitudes, dando unos atributos vamos a colocar, si es posible, alguna magnitud concreta que verifique esos atributos, bien mediante “lista de atributos” o mediante “análisis morfológico”. “El análisis funcional” lo utilizaremos, por ejemplo, cuando nos planteemos para qué sirve la medida de una magnitud.

En multitud de ocasiones haremos uso de la técnica “el arte de relacionar”, utilizada permanentemente en Matemáticas —y por tanto en el tema que nos ocupa: “las Magnitudes y su Medida”— ya que generalmente, salvo conceptos primitivos o fundamentales, cada definición se basa en lo anterior, y para demostrar una proposición nos basamos en otras proposiciones anteriores, o en otras definiciones y otros axiomas que vimos previamente, es decir, casi todo lo relacionamos de algún modo. También los ejemplos que se piden tendrán que compararse con las definiciones para ver si se corresponden con ellas. Son muchas las partes de nuestro tema que descubrirá el alumno aplicando esta técnica.

Y, por supuesto, utilizaremos también “la solución de problemas”, pues por ser una parcela de la Matemática lo que trabajaremos, es lógico que debamos dejar ejercicios pendientes para afianzar el conocimiento del tema. Una vez comprendido el problema planteado, se verán las distintas formas que se les ocurran a los alumnos para resolverlo y, en caso de no ocurrírseles ninguna, se propondrá la retroalimentación necesaria, ya sea facilitándoles una mejor comprensión del tema o

proponiéndoles algún ejemplo o ejercicio más simple. Se buscará el mejor camino para llegar a la solución y se llevará a cabo. Después se analizarán los resultados obtenidos para ver si se ajustan a lo que esperábamos. En todos los pasos que demos estudiaremos el comportamiento de los alumnos frente al problema.

La técnica “el entorno” no podemos olvidarla, pues todos los ejemplos de magnitud y de medida de una magnitud los vamos a obtener de la vida real y de los conocimientos que tenemos hasta el momento. Incluso aquellos ejemplos que no permitan decidir rápidamente si corresponden a magnitudes o podrían serlo en un futuro, debido a la analogía que tienen con los que sí lo son, como: la temperatura, el cariño, el dolor, la alegría, el respeto, etc., los obtenemos de nuestro entorno más inmediato.

“La biónica” la empleamos, por ejemplo, cuando utilizamos como unidad de medida de longitud cualquier parte de nuestro cuerpo, o cuando nos fijamos en la forma que tienen los animales de marcar su territorio, ya que con ello realizan una medida de los dominios a los que sólo ellos tienen acceso, o cuando se descubren aparatos para realizar pesadas inspirándose en el mecanismo de los músculos del organismo de algún animal...

Otra técnica que sin duda utilizamos, aunque sea inconscientemente, es “la sinapsis” pues tanto el alumno como el profesor, al querer trabajar de forma creativa el tema “las Magnitudes y su Medida”, tienen que comprender una serie de conceptos e innovar en múltiples ocasiones y, por tanto, tienen que poner a funcionar todas las neuronas de su cerebro para que las nuevas ideas lleguen. Debe el alumno trabajar a buen ritmo, pues si no lo hace así, puede olvidar los conocimientos adquiridos y, a la hora de estudiar otros nuevos, tendría que empezar recordando los anteriores, y no terminaría nunca. Tiene que estudiar y preocuparse por resolver aquello que se le plantea, y seguro que hay casos que llegan a obsesionarle. Al final, no sin esfuerzo y tensión, es posible que salte la chispa.

Serán múltiples las ocasiones en las que el alumno y el profesor apliquen “la serendipity” ya que al estar imbuidos intentando resolver o plantear un problema de alguna parte del tema “las Magnitudes y su Medida”, buscar magnitudes de un tipo en concreto, estudiar si algo determinado es o no magnitud, si es o no medible, etc., seguro que otra idea ronda por la cabeza y se descubre algo que no se esperaba.

Siempre que queramos organizar los conceptos que vayamos viendo del tema “las Magnitudes y su Medida” utilizaremos “la ideogramación”, por ejemplo, cuando tengamos clasificadas las

magnitudes haremos un “poligrama relacional de síntesis” y quizá habrá otros momentos en los que, en medio de un apartado, para organizar de alguna forma los conocimientos que se van estudiando, los alumnos o el profesor consideren necesario hacer un “diagrama estructural procesual”, o cualquier otro tipo de diagrama.

“El circept” se podría aplicar al concepto de magnitud o a cualquier otro concepto sobre el que se trabaje en el tema “las Magnitudes y su Medida”, después de haber dado su definición. Para hacer un circept sobre magnitud los alumnos se documentan bien sobre lo que es y sobre lo que no es una magnitud, de modo que no guarde secretos para nadie y se intenta encontrarle algo nuevo e interesante. Se le da rienda suelta a la imaginación anotando todas las analogías, semejanzas, diferencias y oposiciones a la idea de magnitud que vayan encontrando. Se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y clasifican por categorías, haciendo después una representación gráfica mediante círculos, colocando las ideas análogas en el interior del mismo círculo. Se realiza un estudio minucioso tanto de las semejanzas como de las diferencias, que ya estaban ordenadas y clasificadas, para aplicarle al concepto de magnitud las sugerencias que obtengamos, ya que las diferencias enriquecen el conocimiento del objeto en estudio y las semejanzas hacen que todas las conclusiones obtenidas se vayan aproximando entre sí.

La técnica “crear durmiendo” será de aplicación casi continua en el tema “las Magnitudes y su Medida” ya que al meternos en un tema nos interesamos por él, van apareciendo problemas que tenemos que intentar resolver y que debemos dejar pendientes para el día siguiente. Sugeriremos a los alumnos que dejen a mano, antes de ir a dormir, papel y lápiz para anotar las ideas que les surjan en el presueño, en el intersueño y al despertar. Al día siguiente se analizarán, por todo el grupo, las ideas que surgieron con objeto de aprovechar las que se puedan.

Cuando estemos saturados de conceptos nuevos relativos al tema “las Magnitudes y su Medida”, o de resolver problemas sobre una parte del tema, o al introducir algún concepto relativo al mismo, haremos un “relax imaginativo”. Para ello elegimos un punto concreto que puede ser, por ejemplo, la medida de una magnitud. Después se crea un ambiente agradable, nos relajamos y pensamos en la medida de una magnitud, narrando cosas relacionadas con ella. Se vuelve a la realidad y se buscan aplicaciones didácticas.

La técnica de “escenarios” se aplicará, por ejemplo, cuando nos planteemos si podrán ser magnitudes en el futuro algunos de los



términos que hemos considerado: alegría, dolor, respeto, cariño, odio... O si podrán llegar a medirse y cómo.

“La síntesis creativa” puede ser considerada una de las técnicas más utilizadas, ya que cada vez que damos una definición, enunciamos una proposición, sacamos una conclusión... sobre “las Magnitudes y su Medida” estamos aplicándola, pues tenemos que concretar todo lo que podamos, llegando al eslogan en multitud de ocasiones.

Las técnicas que hemos comentado que podemos utilizar en distintos momentos de nuestra exposición no tiene carácter exclusivo, ya que en cualquier ocasión se pueden emplear otras distintas. También se pueden utilizar varias técnicas a la vez, concretamente en el Capítulo III trabajaremos una misma actividad usando todas las técnicas que comentamos, lo que, lejos de ser un obstáculo, consideramos que no hace más que enriquecer dicha actividad. De forma análoga, trabajando cualquier contenido matemático con las distintas técnicas sacaríamos más partido a dicho contenido. No lo hacemos para no ser demasiado pesados, pues el tema “las Magnitudes y su Medida” ya es, sin esto, bastante largo y no queremos alargarlo aún más.

Para no repetirnos demasiado no haremos, en todos los casos, un estudio detallado de cómo utilizaremos las técnicas que comentamos que se pueden usar en cada parte del tema. El porqué y la forma en que usamos una determinada técnica van implícitos en dicha técnica.

Nos alegraría que cualquier futuro educador que tuviera que manejar estos conceptos los dominara, al menos a este nivel, y consiguiera utilizar las distintas técnicas de Metodología Creativa con total fluidez.

## 2.4. Semimódulo

Vamos a comenzar a estudiar las estructuras matemáticas que después utilizaremos para definir el concepto de magnitud. Construiremos la estructura lineal más sencilla, que va a ser la de semimódulo, y después veremos la de módulo, para pasar, posteriormente, al concepto de magnitud.

Empezaremos utilizando las técnicas: “el arte de preguntar”, “el arte de relacionar” y “el entorno”, planteándole al alumno las siguientes cuestiones: ¿conoces alguna estructura algebraica? En caso afirmativo, señala cada una de las estructuras algebraicas que conoces, indicando las leyes de composición interna o externa que posee. ¿Sabes lo qué es un semimódulo? Si es así, pon un ejemplo y razona que lo es. No es fácil



responder rápidamente a estas preguntas. La noción de semimódulo generaliza la de semigrupo abeliano. Vamos a ir definiendo cada uno de los conceptos que utilizaremos.

### 2.4.1. Par ordenado

Empezaríamos planteándoles a los alumnos las siguientes cuestiones: ¿sabes lo que es un par?; ¿conoces alguno? Si es así, cita varios que conozcas. ¿Los pares que conoces son ordenados? ¿Cuándo un par es ordenado?

Utilizaríamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el entorno” —al buscar pares—, “el arte de relacionar” —un par con un par ordenado— y “la síntesis creativa” —al dar la definición de par y de par ordenado.

En el mundo real nos encontramos con pares de objetos que tienen la propiedad de que si ponemos primero uno y después otro el resultado no cambia, es por lo que en estos casos vamos a hablar de pareja. Por ejemplo, si tenemos un par de manzanas da lo mismo considerar el conjunto formado por ellas tomando una antes que otra o al contrario. Sin embargo, si se trata de un par de zapatos, no da igual colocar uno en un pie y otro en el otro que cambiarlos de pie; en este caso diremos que se trata de un par ordenado.

**Definición:** Se llama **pareja** a todo conjunto formado por dos elementos  $\{a,b\}$ .

En el conjunto  $\{a,b\}$  no podemos distinguir el papel que juegan cada uno de sus elementos, ya que  $\{a,b\}=\{b,a\}$  según el axioma de extensionalidad que nos dice que dos conjuntos son iguales si, y sólo si, tienen los mismos elementos, luego el conjunto  $\{a,b\}$  no está ordenado. Tenemos, por tanto, que definir otro ente matemático que sea un par y que varíe al cambiar de lugar sus elementos.

**Definiciones:** Dados dos elementos  $a, b$ , de un conjunto, llamamos **par ordenado** —o simplemente **par**— formado por  $a$  y  $b$ , al que denotamos por  $(a,b)$ , a:

$$(a,b)=\{\{a\}, \{a,b\}\}.$$

La forma de definir el par ordenado no es única; elegimos ésta por comodidad.

Una definición análoga a la dada puede encontrarse, por ejemplo, en Remi Ziglon (1975: 37).

La existencia de este conjunto la tenemos garantizada por el axioma de apareamiento, que nos dice que, dados dos objetos, existe un conjunto cuyos elementos son estos dos objetos.

A esto sí podemos llamarle par ordenado, ya que es una pareja y además si  $a \neq b$  se verifica que  $(a,b) \neq (b,a)$ , pues

$$(b,a) = \{\{b\}, \{b,a\}\}$$

son conjuntos distintos, ya que si bien  $\{a,b\} = \{b,a\}$ , sin embargo  $\{a\} \neq \{b\}$ . Los **pares**  $(a,b)$  y  $(b,a)$  se dicen **transpuestos** el uno del otro.

### 2.4.1.1. Igualdad de pares

Para analizar la igualdad de pares ordenados le diremos al alumno: teniendo en cuenta la definición que hemos dado de pares ordenados, ¿se te ocurre alguna idea que nos permita razonar cuándo dos pares ordenados son iguales? Si es así, hazlo y di a qué conclusión has llegado.

En este caso podríamos emplear las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar” —al ir relacionando la definición de par ordenado con la igualdad de conjuntos—, “la solución de problemas” y “la síntesis creativa” —al concretar cuándo dos pares ordenados son iguales.

**Lema:**  $a=b \mid\!\!\!\mid (a,b)$  tiene sólo un elemento, que a su vez es un conjunto unitario.

Supongamos que  $a=b$  y veamos que  $(a,b)$  tiene sólo un elemento.

$$(a,a) = \{\{a\}, \{a,a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

Supongamos que  $(a,b)$  tiene sólo un elemento:

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \Rightarrow \{a\} = \{a,b\} \Rightarrow b \in \{a\} \Rightarrow b=a.$$

**Proposición:**  $(a,b) = (c,d) \mid\!\!\!\mid a=c \wedge b=d$ .

Supongamos que  $(a,b) = (c,d)$  y tenemos que probar que  $a=c \wedge b=d$ . Vamos a hacerlo en dos pasos:

i) Si los pares tienen sólo un elemento, entonces  $a=b$  y  $c=d$

$$(a,b) = \{\{a\}\} \text{ y } (c,d) = \{\{c\}\}.$$

Como  $(a,b) = (c,d) \Rightarrow \{\{a\}\} = \{\{c\}\} \Rightarrow a=c=d=b$ , tenemos lo que queríamos.

ii) Si los pares tienen dos elementos,  $a \neq b$ , como  $(a,b) = (c,d)$ ,  $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$  y  $(c,d) = \{\{c\}, \{c,d\}\} \Rightarrow \{a\} = \{c\} \wedge \{a,b\} = \{c,d\} \Rightarrow a=c \wedge b=d$ .

Supongamos que  $a=c$  y que  $b=d$ ; en ese caso es trivial que  
 $(a,b)=\{\{a\}, \{a,b\}\}=\{\{c\}, \{c,d\}\}=(c,d)$ .

**Definiciones:** En el par  $u=(a,b)$ ,  $a$  es la **primera componente** del par, **original**, **abscisa**, o **primera proyección** del par, y se denota:

$$a=\text{pr}_1(u) \text{ o } a=\pi_1(u);$$

$b$  es la **segunda componente** del par, **extremo**, **ordenada**, o **segunda proyección** del par, y se denota:

$$b=\text{pr}_2(u) \text{ o } b=\pi_2(u).$$

**Observación:** Esta definición de par ha sido introducida únicamente para justificar la existencia del par ordenado y la igualdad de dos pares. Decimos que dos pares ordenados son iguales si, y sólo si, son iguales las primeras y las segundas componentes, respectivamente.

## 2.4.2. Producto cartesiano de dos conjuntos

Empezaríamos preguntándole a los alumnos: ¿sabes a qué cosa se le llama producto cartesiano de dos conjuntos? ¿Conoces algún producto cartesiano? Siempre que te dan dos conjuntos, ¿puedes obtener su producto cartesiano? Si es así, toma dos conjuntos y forma su producto cartesiano.

Para las cuestiones planteadas y para el resto del apartado utilizamos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el método Delfos” —ya que dejaremos ejercicios pendientes para resolver al día siguiente—, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” —al poner los ejemplos—, “el crear durmiendo”, “la síntesis creativa” —ya que concretaremos la definición de producto cartesiano y concluiremos que es un conjunto— y “la solución de problemas” —al plantear otros ejercicios.

Podemos considerar, por ejemplo, el conjunto de las horas que trabajamos al día y el conjunto de las actividades que podemos realizar a lo largo del día. Nos podríamos plantear estudiar las posibilidades que tenemos para organizarnos el trabajo, esto no sería otra cosa más que formar todos los pares ordenados posibles en donde la primera componente del par sería una hora de las que dedicamos a trabajar en el día y la segunda componente una actividad de las que tenemos que realizar. Al conjunto formado por todos estos pares ordenados es a lo que vamos a llamar producto cartesiano del conjunto de las horas que trabajamos al día por el conjunto de las actividades que podemos realizar a lo largo del día.

**Definición:** Dados dos conjuntos cualesquiera  $A$  y  $B$ , y los elementos cualesquiera  $a \in A$  y  $b \in B$ , sabemos que

$$\{a\} \subset (A \cup B) \text{ y } \{a,b\} \subset (A \cup B) \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \text{ y } \{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \Rightarrow \\ \Rightarrow \{\{a\}, \{a,b\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B) \Rightarrow (a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)),$$

donde  $\mathcal{P}(A \cup B)$  denota el conjunto de las partes de  $A \cup B$ .

Podemos definir el **producto cartesiano** de  $A$  por  $B$  como

$$A \times B = \{u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) / u = (a,b), a \in A \wedge b \in B\}.$$

Por el axioma de comprensión o especificación (que nos dice que dado un conjunto  $C$  y una forma proposicional  $p(x)$ , existe otro conjunto cuyos elementos son los del conjunto  $C$  que verifiquen  $p(x)$ ) podemos decir que  $A \times B$  es un conjunto, y por el axioma de extensionalidad podemos afirmar que es único.

Esta formalización a la hora de definir el producto cartesiano la hemos hecho solamente para razonar su existencia y unicidad, si bien podemos decir que el producto cartesiano  $A \times B$  es el conjunto formado por todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a  $A$  y cuya segunda componente pertenece a  $B$ .

Si  $A=B$ , se tiene el producto cartesiano de un conjunto por él mismo; se denota por  $A \times A$  o  $A^2$  y sería el conjunto de pares ordenados en donde la primera y la segunda componente pertenecen a  $A$ . Como ejemplo tenemos  $\mathbb{R}^2$ , llamado plano euclídeo.

Esta definición puede encontrarse entre otros, por ejemplo, en Halmos (1967:37).

**Ejemplo:** Sean los conjuntos  $A=\{1,2,3\}$  y  $B=\{a,b\}$ ; vamos a obtener los productos cartesianos  $A \times B$  y  $A \times A$ :

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\} \\ A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

**Ejercicio:** Sean los conjuntos  $A=\{a,1,x\}$  y  $B=\{3,n,m,p\}$ . Indica si tenemos los productos cartesianos que escribimos a continuación:

$$A \times B = \{(a,3), (a,n), (1,3), (1,n), (m,a), (x,3), (x,n)\} \text{ y} \\ B \times B = \{(3,3), (p,n), (n,3), (n,n)\}.$$

Si no los tenemos, señala si sobra o falta algún par. Completa o suprime los elementos que necesites hasta obtener los productos cartesianos correspondientes.

**Ejercicio:** Toma dos conjuntos  $A$  y  $B$  y obtén todos los productos cartesianos que puedas realizar entre ellos.

**Ejercicio:** Pon un ejemplo de producto cartesiano y da un subconjunto de él.

### 2.4.2.1. Representación gráfica del producto cartesiano de dos conjuntos

Ahora nos planteamos: ¿cómo podríamos representar el producto cartesiano para poder ver con mayor comodidad si están todos los pares ordenados o si hemos olvidado alguno? Vamos a utilizar “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño en familiar”. Para ello el alumno tendría que analizar los elementos de que consta el producto cartesiano de dos conjuntos. Tendrá que buscar algún modelo conocido para que le resulte más fácil observarlo. Si no se le ocurre ninguna idea se le puede aconsejar que recuerde cómo se representaban los conjuntos. Esto le debe llevar a inventarse nuevos modelos y a la generalización, planteándose la forma de representar cualquier producto cartesiano.

**a) Diagrama cartesiano:** Sean los conjuntos finitos  $A=\{a,b,c\}$  y  $B=\{1,2\}$ . Entonces, representando ambos conjuntos en un diagrama lineal, mediante líneas que se corten, los elementos de  $A \times B$  son los puntos de intersección de las paralelas a las rectas tomadas como conjuntos A y B y que pasen por los respectivos elementos considerados como puntos sobre las mismas.

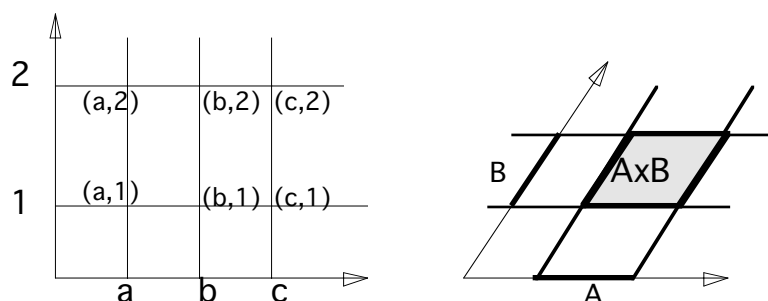


**Figura 3: Diagrama cartesiano.**

Si los conjuntos tienen un número infinito de elementos, también los podemos representar mediante un diagrama cartesiano, como en el caso que tenemos en el gráfico de la derecha, en que tanto A como B son dos segmentos.

Observemos que hacemos sólo representaciones gráficas de conjuntos finitos o, a lo sumo, numerables.

Este tipo de representación gráfica, o diagrama cartesiano, es el que justifica los nombres de primera y segunda proyección dados a las

componentes de cada par ordenado. Y la de producto cartesiano, por la representación inspirada en la Geometría Analítica de Descartes.

**b) Tabla cartesiana de doble entrada:** Se puede usar también la tabla cartesiana de doble entrada, que es equivalente al diagrama cartesiano. La utilización de uno u otro método auxiliar depende de la materia a tratar, o del tipo de conjuntos que se manejen aunque, por otra parte, no son excluyentes entre sí.

Normalmente se colocan los elementos del primer conjunto A uno debajo del otro en columna y los elementos del segundo conjunto B en fila, trazamos líneas horizontales y verticales para separar los elementos de ambos conjuntos, como aparece en la figura, y en los recuadros que van dejando tendríamos los distintos elementos de  $A \times B$ .

| $\begin{array}{c} B \\ \diagdown \\ A \end{array}$ | 1     | 2     |
|----------------------------------------------------|-------|-------|
| a                                                  | (a,1) | (a,2) |
| b                                                  | (b,1) | (b,2) |
| c                                                  | (c,1) | (c,2) |

Tabla 1: Tabla cartesiana de doble entrada.

**c) Diagrama sagital o de flechas:** Representamos los dos conjuntos mediante un diagrama de Euler-Venn, y mediante flechas vamos uniendo los distintos pares que aparecen en el producto cartesiano.

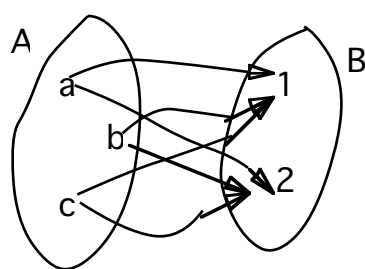


Figura 4: Diagrama sagital.

El nombre de diagrama sagital —sagita significa flecha en latín— viene de que enlazamos mediante flechas los elementos del primer conjunto con los del segundo, también llamado, por este motivo, diagrama de flechas.

d) **Diagrama de árbol:** Desde un punto sacamos ramas que van a los elementos del primer conjunto A, y de cada elemento volvemos a sacar tantas ramas como elementos tenga el segundo conjunto B.

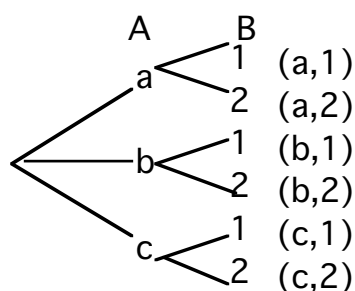


Figura 5: Diagrama de árbol.

El gráfico nos da idea del nombre que recibe este tipo de representación gráfica.

**Ejercicio:** Representa gráficamente los productos cartesianos que has calculado en los ejercicios anteriores, cada uno con un tipo de diagrama diferente.

**Ejercicio:** Si tenemos un conjunto A con a elementos y otro conjunto B con b elementos, ¿cuántos elementos tiene  $A \times B$ ? ¿Y  $A \times A$ ?

### 2.4.3. Definición e igualdad de ternas

Para trabajar este concepto vamos a utilizar “el método Delfos”. Dejamos para el día siguiente para que piensen las cuestiones: ¿sabes lo que es una terna?; ¿y una terna ordenada? ¿Podrías definir la terna ordenada de forma análoga a como hemos definido el par ordenado? Si es así, hazlo. Cada alumno debe pensar en casa en la definición que podría dar de terna y de terna ordenada y traer el resultado encontrado por escrito para dárnoslo. El profesor actúa de coordinador, agrupa las soluciones por categorías, las sintetiza y se las comenta a todos eliminando aquellas definiciones que no guarden parecido con la definición de par ordenado. Cada alumno, a la vista de las respuestas de los demás, piensa en la suya, que puede modificar o no. El profesor cierra el problema después de cruzar las respuestas.

También se podría aplicar “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño —terna ordenada— en familiar —conjunto—”. Siguiendo esta técnica puede que el alumno llegue, en la generalización, a la definición de n-upla.



**Definición:** Siguiendo con la idea de la definición de par ordenado, llamamos **terna ordenada** —o simplemente **terna**— al conjunto:

$$(a,b,c)=\{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}.$$

La llamamos terna por estar formada por tres elementos y ordenada porque si tomamos estos elementos en otro orden, nos resulta otro conjunto.

Esta definición puede encontrarse, por ejemplo, en Fregoso (1977: 271).

Según hemos definido par ordenado, y teniendo en cuenta la igualdad de pares ordenados, no podríamos decir que  $(a,(b,c))=((a,b),c)$ , y, por tanto, no sería lógico decir que  $(a,b,c)=((a,b),c)$  ni que  $(a,b,c)=(a,(b,c))$ . Por necesidades de las Matemáticas, al considerar espacios vectoriales  $n$ -dimensionales, nos vemos obligados a definir terna y  $n$ -upla, para poder generalizar a  $n$  conjuntos el producto cartesiano de dos conjuntos.

Siguiendo el mismo razonamiento que hemos hecho para pares, sólo que en este caso tendríamos que pensar en que la terna se puede reducir a un conjunto con un solo elemento, o con dos, o con tres, deberíamos decir que dos ternas son iguales si, y sólo si, son iguales las primeras, las segundas y las terceras componentes, respectivamente. Esto se puede dejar como ejercicio.

**Ejercicio:** ¿Es  $(a,b,c)=(b,a,c)$ ? ¿Podrías encontrar alguna terna ordenada en donde aparezcan los elementos  $a$ ,  $b$  y  $c$  en orden distinto al de la terna  $(a,b,c)$  y que sea igual a ella?

Para este ejercicio utilizaríamos las técnicas: “el arte de relacionar” (en este caso la igualdad de conjuntos con definición de terna ordenada) además de “solución de problemas”.

#### 2.4.4. Producto cartesiano de tres conjuntos

Podemos comentarle al alumno: ¿sabes lo que es la propiedad asociativa? Dicho concepto se verá después. Si conoces la propiedad asociativa, razona que el producto cartesiano no es asociativo. Necesitamos obtener un conjunto que sea el producto cartesiano de tres conjuntos (éste no podría ser el producto cartesiano de los dos primeros por el tercero ni el producto cartesiano del primero por el resultado del producto del segundo y el tercero), ¿se te ocurre alguna idea para definirlo?

Podemos emplear “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, para lo cual debería:

1. Tener en cuenta todos los datos de que parte: definición de producto cartesiano de dos conjuntos, definición de terna ordenada y tener claro cuándo tiene un conjunto.

2. Analizar cada uno de los datos que tenemos y plantear preguntas sobre la forma en que se podría definir el producto cartesiano de tres conjuntos, y si lo que obtenemos es o no un conjunto.

3. Asignar a otro número de conjuntos los atributos que tenemos y pasar, si es posible, a definir el producto cartesiano de  $n$  conjuntos.

**Definición:** La definición de terna nos daría pie a definir el **producto cartesiano de tres conjuntos**, que denotamos por  $A \times B \times C$ , como el conjunto de ternas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a  $A$ , el segundo a  $B$  y el tercero a  $C$ , luego

$$A \times B \times C = \{u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B \cup C)) / u = (a, b, c), a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}.$$

Por el axioma de comprensión o especificación podemos decir que  $A \times B \times C$  es un conjunto, y por el axioma de extensionalidad podemos afirmar que es único.

**Ejercicio:** Encuentra una justificación que nos permita afirmar que, efectivamente,  $u = (a, b, c) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B \cup C))$ .

Si  $A=B=C$ , se tiene el producto cartesiano de  $A \times A \times A$  —también llamado  $A^3$ — y sería el conjunto de ternas ordenadas en donde la primera, la segunda y la tercera componente pertenecen a  $A$ .

**Ejemplo:**  $\mathbb{R}^3$  es el denominado espacio euclídeo tridimensional.

#### 2.4.4.1. Representación gráfica del producto cartesiano de tres conjuntos

Podríamos emplear “el arte de relacionar” y “la sinéctica”, bajo el aspecto “hacer lo familiar extraño”, para estimular al alumno a que descubra él solo las formas de representar el producto cartesiano de tres conjuntos. Lo haríamos de manera análoga a como lo hemos hecho en el caso del producto cartesiano de dos conjuntos.

La representación gráfica del producto cartesiano de tres conjuntos se realizaría en el espacio. Sólo vamos a hacer la representación utilizando el diagrama cartesiano. Cada terna ordenada

nos determinaría un único punto del espacio. Así, si el conjunto  $X=A \times B$ , representado en un diagrama cartesiano, es el cuadrado del plano horizontal y el conjunto  $C$  es un segmento del eje vertical, el producto de  $X \times C=(A \times B) \times C$  nos da un prisma.

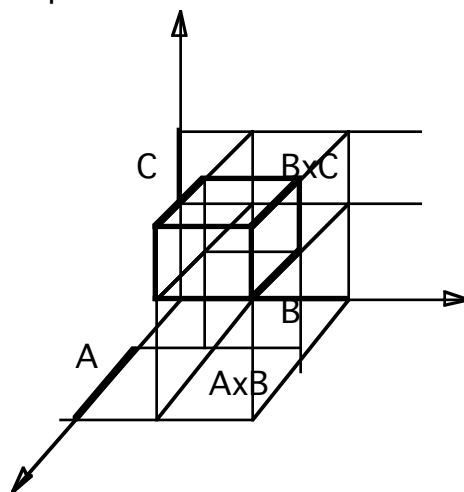


Figura 6: Producto cartesiano de tres conjuntos.

Y si representamos  $Y=B \times C$  mediante un diagrama cartesiano, nos da el cuadrado del plano vertical. Si luego hacemos el producto cartesiano  $A \times Y=A \times (B \times C)$ , obtenemos el mismo prisma que si hiciésemos el producto cartesiano  $A \times B$  y luego el producto cartesiano de éste por  $C$ , por esta razón algunos autores aceptan la propiedad asociativa del producto cartesiano.

Por si antes alguien no logró llegar a verlo, razonamos por qué nosotros decimos que no se verifica la propiedad asociativa. Para ello utilizamos las técnicas: “el arte de relacionar” (en este caso la definición de producto cartesiano de dos conjuntos y la igualdad de pares ordenados con el producto cartesiano que ahora necesitamos) además de “solución de problemas”.

Sabemos que si  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $c \in C$ ,  $(b,c) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B \cup C))$ , y por tanto tendremos que  $(a,(b,c)) \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(B \cup C)))]$ , luego

$A \times (B \times C) = \{u \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(B \cup C)))] / u = (a,(b,c)), a \in A \wedge (b,c) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B \cup C))\}$   
y razonando de forma análoga tendremos que

$(A \times B) \times C = \{t \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \cup C] / t = ((a,b),c), (a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \wedge c \in C\}$ ,  
aparte de que los conjuntos  $\mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(B \cup C)))]$  y  $\mathcal{P}[\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \cup C]$  no tienen que ser iguales, los elementos que consideramos  $(a,(b,c))$  y  $((a,b),c)$  tampoco lo pueden ser ya que  $a \neq (a,b)$  y  $(b,c) \neq c$ .

### 2.4.5. Definición e igualdad de n-uplas

Puede que el alumno haya conseguido definir la n-upla, cuando intentaba definir la terna ordenada, como una generalización de ésta al aplicar “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño en familiar”. Si no es así, mediante “el arte de relacionar” podríamos plantearle: ya hemos definido lo que es un par ordenado y lo que es una terna ordenada, ¿te atreverías a generalizar la definición para el caso en que tuviésemos n elementos ordenados? A esto le vamos a llamar n-upla. De forma análoga a como hemos visto la igualdad de pares ordenados y de ternas ordenadas, ¿podríamos considerar la igualdad de n-uplas? ¿Qué condiciones tendrían que cumplirse para que dos n-uplas sean iguales?

**Definición:** Una **n-upla** consiste en n elementos ordenados. Siguiendo la definición de par ordenado y de terna ordenada deberíamos definir la n-upla de la forma siguiente:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}.$$

Con el mismo proceso que seguimos anteriormente deberíamos decir que dos n-uplas son iguales si, y sólo si, son iguales las primeras, las segundas... y las n-ésimas componentes, respectivamente.

### 2.4.6. Generalización del producto cartesiano

En este caso también podríamos tener definido ya el producto cartesiano de n conjuntos como generalización del de tres, al aplicar “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”. Si no es así, utilizamos las técnicas “el arte de preguntar” y “el arte de relacionar” para lo cual le diríamos a los alumnos: ya hemos definido el producto cartesiano de dos conjuntos y el de tres conjuntos, ¿se te ocurre alguna idea para definir el producto cartesiano de cualquier número de conjuntos?; ¿cómo lo definirías? ¿Lo que has definido sería también otro conjunto?

Generalizando podemos definir

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) / u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n), a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

En la n-upla  $u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , será  $a_i$  la **i-ésima componente** o **i-ésima proyección** de la n-upla, y se denota:

$$a_i = \text{pr}_i u \text{ o } a_i = \pi_i(u).$$

Si  $\forall i,j \in \{1,2,\dots, n\}, A_i=A_j$  entonces el producto cartesiano de  $n$  factores se suele representar por  $A^n$ .

**Ejemplo:**  $\mathbb{R}^n$ , que es el llamado espacio euclídeo  $n$ -dimensional.

### 2.4.7. Correspondencias o relaciones binarias entre dos conjuntos

Podríamos empezar planteándole a los alumnos: ¿conoces algún otro concepto del que pueda formar parte el producto cartesiano o algún subconjunto suyo? ¿Has oído hablar de correspondencias?; ¿sabrías definir este concepto? Si es así, hazlo. ¿A qué se llama conjunto inicial y final de una correspondencia? Si lo tienes claro, pon un ejemplo y destaca los conjuntos inicial y final. ¿Cuál es el original y la imagen de un elemento? Pon un ejemplo. ¿Para qué sirven las correspondencias?; ¿podrían tener otros usos?

Utilizamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el arte de relacionar” y “el método combinatorio” llamado “análisis funcional”, este último método nos sirve para resolver los dos últimos interrogantes.

En el ejemplo que hemos visto antes de producto cartesiano de los conjuntos: horas que trabajamos al día por actividades que podemos realizar a lo largo de él, vamos a elegir el subconjunto formado por el plan que hemos decidido llevar a cabo para tener completa nuestra jornada laboral. Los elementos de este subconjunto serán algunos pares ordenados elegidos entre todos los que teníamos antes. Este va a ser un ejemplo de correspondencia entre los conjuntos antes mencionados.

**Definición:** Una **relación binaria** de un conjunto  $A$  en otro conjunto  $B$ , o una **correspondencia** de  $A$  en  $B$ , es la terna  $(A,B,R)$ , en donde  $R$  es una forma proposicional en dos variables  $x$  e  $y$ , sustituibles respectivamente por elementos de  $A$  y de  $B$ . Se puede decir también que es una terna formada por  $(A,B,R)$  en donde  $R$  es una forma proposicional en una variable sustituible por elementos de  $A \times B$ :  $p(u)$ ,  $u \in A \times B$ . Esta forma proposicional se denota por  $R(x,y)$ , o  $p(x,y)$ , o  $xRy$ , es por lo que también se puede considerar como una forma proposicional en dos variables  $x \in A$  e  $y \in B$ .

Esta definición y los conceptos que de ella se derivan pueden verse, por ejemplo, en Condamine (1971: 70 y siguientes).

**Ejemplos:**

1° Sea  $A$  el conjunto de personas que estudian en nuestra Facultad y sea  $B$  el conjunto de las puertas que hay en ella. Una correspondencia podría ser: “ $x$  entra por la puerta  $y$ ”.

2° Sea  $A$  el conjunto de personas de Málaga y sea  $B$  el de ciudades de España. Definimos la correspondencia: “ $x$  ha visitado la ciudad  $y$ ”.

3° Sea  $A$  el conjunto de personas que estudian en nuestra Facultad y sea  $B$  el de aulas que hay en ella. Una correspondencia podría ser: “ $x$  está en el aula  $y$ ”.

4° Sea  $A=B=\mathbb{N}$  el conjunto de los números naturales. Podríamos definir en este momento la correspondencia: “ $x$  es menor que  $y$ ”, lo que se suele denotar por  $x < y$ . En este caso decimos que hemos definido sobre  $\mathbb{N}$  la relación menor que.

5° En el conjunto  $\Pi$  de las rectas del plano definimos la relación: “ $r$  es paralela a  $s$ ”, que suele denotarse por  $r \parallel s$  (en lugar de  $ll(r,s)$  que sería lo más adecuado usando formas proposicionales).

Podríamos pensar también en formas proposicionales de más de dos variables. En el caso de tres variables la forma a emplear es  $R(x,y,z)$  y daría lugar a las **correspondencias** o **relaciones ternarias** entre tres conjuntos  $(A,B,C,R)$ , siendo  $R$  la forma proposicional  $R(x,y,z)$ .

**Ejemplos:**

1° Si los tres conjuntos  $A=B=C$  son el conjunto de personas de la clase y la relación es “ $x$  está sentado entre  $y$  y  $z$ ”; por ejemplo, podríamos tener: “María está entre Juan y Luís” que sería una proposición.

2° En el conjunto de personas del mundo podemos definir: “ $x$  es hijo de  $y$  y de  $z$ ”, por ejemplo: “Caín es hijo de Adán y Eva”, que es una proposición.

A toda correspondencia  $C=(A,B,R)$  se le asocia su **grafo**, que denotamos por  $G_R$  o simplemente por  $G$ , y es el conjunto de pares ordenados  $(x,y) \in A \times B$  que verifican la forma proposicional  $xRy$ , luego  $G_R$  es el conjunto de verdad de  $xRy$

$$G_R = \{(x,y) \in A \times B / xRy\}.$$

Escribimos  $xRy$  si es verdadera y  $x \nmid Ry$  o  $\cancel{xRy}$  si es falsa.

Inversamente, a todo subconjunto  $G \subset A \times B$  se le asocia una correspondencia de A en B, definida por:

$$\forall (x,y) \in A \times B \quad xRy \iff (x,y) \in G.$$

Observemos que una relación binaria está determinada por:

- a) Un conjunto A, llamado **conjunto inicial** o **de salida** de la correspondencia.
- b) Un conjunto B, llamado **conjunto final** o **de llegada** de la correspondencia.
- c) Un grafo  $G \subset A \times B$  o una forma proposicional  $xRy$  definida sobre  $A \times B$ .

En lo sucesivo hablaremos de correspondencias o de relaciones binarias entre dos conjuntos y daremos la forma proposicional o el grafo indistintamente. Se denotará la relación binaria por  $(A,B,R)$  o  $(A,B,G)$  y el conjunto de todas las relaciones binarias de A en B por  $R_{A,B}$ .

Habrán tantas relaciones binarias de A en B como elementos tenga  $\mathcal{P}(A \times B)$ , es decir, si  $\text{card}(A)=a$  y  $\text{card}(B)=b$ ,  $\text{card}(R_{A,B})=2^{a \times b}$ . Los conjuntos  $\emptyset$  y  $A \times B$  nos darán los grafos de las **relaciones binarias triviales**.

**Definición:** Cuando tengamos que  $xRy$  o  $(x,y) \in G$ , se dice que x tiene como **imagen** a y e y tiene como **original** a x; luego para un elemento  $x \in A$  la imagen de x va a ser:

$$\text{img}(x) = \{y \in B / (x,y) \in G\},$$

y para un elemento  $y \in B$  el original de y va a ser:

$$\text{org}(y) = \{x \in A / (x,y) \in G\}.$$

### Ejemplos:

1° Sea E cualquier conjunto y sea R el conjunto de todas las parejas  $(x,A) \in E \times \mathcal{P}(E)$  para las cuales  $x \in A$ . Esta relación binaria es la de pertenencia entre los elementos de E y los subconjuntos de E; si  $x \in E$  y  $A \in \mathcal{P}(E)$ , entonces  $xRA$  significa lo mismo que  $x \in A$ . Luego podemos decir que la correspondencia establecida es  $(E, \mathcal{P}(E), \in)$ . Si tomamos un elemento  $x \in E$  será

$$\text{img}(x) = \{Y \in \mathcal{P}(E) / x \in Y\}.$$

Y para  $A \in \mathcal{P}(E)$  podemos afirmar que

$$\text{org}(A) = \{x \in E / x \in A\}.$$

2° Sean los conjuntos  $A = \{1,2,3,4\}$ ;  $B = \{a,b,c,d\}$ . Pueden establecerse distintas relaciones de A en B sin más que tomar subconjuntos de  $A \times B$ . Así por ejemplo:



$$R_1 = \{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d)\}.$$

$$R_2 = \{(1,a), (2,a), (3,a), (4,a)\}.$$

$$R_3 = \{(1,b), (2,a), (3,c), (4,d)\}.$$

$$R_4 = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (3,a), (3,b), (3,d), (4,c)\}.$$

Según hemos dicho antes podemos afirmar que en este caso podemos establecer  $2^{16}$  correspondencias. Si tomamos la relación  $R_4$  y queremos calcular  $\text{img}(3)$  y  $\text{org}(c)$ , resulta que  $\text{img}(3)=\{y \in B / (3,y) \in R_4\}=\{a,b,d\}$  y  $\text{org}(c)=\{x \in A / (x,c) \in R_4\}=\{1,4\}$ .

3° Sean los conjuntos  $A=\{1,2,3,4\}$  y  $B=\{0,1,2,3\}$ . Entre otras, pueden establecerse las relaciones binarias:

i)  $(x,y) \in R_5 \Leftrightarrow x \geq y+1$ , cuyo grafo será:

$$R_5 = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}.$$

ii)  $xR_6y \mid\!\!\!\mid x+y$  es par.

iii)  $xR_7y \iff 3 < 2x + y < 7$ .

iv)  $xR_8y \mid\!\!\!\mid 2x-y \in B$ .

¿Cuántas relaciones podemos establecer además de éstas? Calcula los grafos de las tres últimas relaciones y los originales e imágenes del 2 mediante cada una de ellas.

**Ejercicio:** Da una correspondencia no trivial  $(A,B,G)$ . Indica cuáles son el conjunto inicial, el conjunto final y la forma proposicional. Calcula el original y la imagen de alguno de los elementos.

**Ejercicio:** Sea  $A$  el conjunto de las personas de la clase y  $B$  el conjunto de las asignaturas que cursaron el año anterior. Vamos a decir que  $x$  se relaciona con  $y$  si, y sólo si,  $x$  consiguió aprobar en Junio la asignatura  $y$ . Indica cuáles son el conjunto inicial, el conjunto final y el grafo. ¿A qué conjunto perteneces tú? Calcula si es posible tus originales o tus imágenes mediante dicha correspondencia.

**Ejercicio:** Sea A el conjunto de las personas de la clase y B el conjunto de los pupitres de dicha clase. Decimos que  $x$  se relaciona con  $y$  si, y sólo si,  $x$  se sienta habitualmente en el pupitre  $y$ . Indica cuáles son el conjunto inicial, el final y el grafo. Elige un pupitre y calcula sus originales e imágenes en caso de que existan, y si no existen, justifícalo.

Hay relaciones binarias, definidas dando las formas proposicionales, que emplean símbolos particulares, como por ejemplo:

= "es igual a";

I——I “es equivalente a”;

⇒ "implica";

$\leq$  “es menor o igual que”:

$\subset$  "está incluido en":

| “divide a”:

$\in$  "pertenece a";

⊥ “es perpendicular a”...

**Observación:** Con los ejemplos que hemos visto de correspondencias, y los que veremos, parece lógico que sea un tema cuyo estudio no podíamos eludir. Además, aplicando la técnica de Metodología Creativa “el entorno”, observamos que en la vida ordinaria son muchas las situaciones en las que si no se hubieran inventado las correspondencias, tendríamos que plantearnos el hacerlo. Veamos algunos casos:

### Ejemplos:

1. Sea A el conjunto de todas las enfermedades y sea B el conjunto de las molestias que puede tener una persona. Decimos que  $xRy$   $\iff$  “x produce y”, es decir, cuando la enfermedad x produce la molestia y. El médico emite un diagnóstico porque conoce con toda precisión esta relación.

2. Sea A el conjunto de medicinas y sea B el conjunto de enfermedades. Podemos considerar la relación  $xRy$   $\iff$  “x cura y”. Si esta relación fuera totalmente conocida, siempre que surgiera una enfermedad tendríamos a qué recurrir.

3. Sea A el conjunto de autores, B el conjunto de libros y digamos que  $xRy$   $\iff$  “x ha escrito y”. Conocer esta relación supone conocer bastante Literatura y otras materias.

4. En el conjunto A, de palabras de un idioma, como conjunto inicial y final, definimos la relación  $xRy$   $\iff$  “x empieza por la misma letra que y”. Esta relación es tremendamente importante ya que, con algunas precisiones posteriores, es la que da lugar al orden que tenemos en el diccionario, llamado orden lexicográfico.

**Ejercicio:** Describe alguna relación que para ti haya sido muy importante.

El objetivo de formalizar el estudio de las relaciones es poder hacer un estudio más preciso y concienzudo de ellas.

#### 2.4.7.1. Igualdad de correspondencias

Para trabajar este punto podríamos utilizar “el método Delfos” y “el arte de relacionar”, para lo cual dejamos a los alumnos que piensen en la siguiente cuestión: según la igualdad de terna ordenada y la definición dada de correspondencia, ¿podrías decirnos cuándo dos correspondencias son iguales?, y que nos digan, al día siguiente, lo que se les haya ocurrido al respecto.

**Definición:** Dadas las correspondencias  $(A,B,G)$  y  $(A',B',G')$ , al ser ternas ordenadas, diremos que son **iguales** si, y sólo si, son iguales cada una de sus componentes en el orden en que figuran, es decir,  $A=A'$ ,  $B=B'$  y  $G=G'$ .

**Observación:** Si en lugar de  $G$  y  $G'$  nos hubieran dado las formas proposicionales  $R$  y  $R'$ , habríamos tenido que exigir que fuese  $RI \text{---} IR'$  (la equivalencia entre ambas) porque entre dos formas proposicionales lo que se considera es la equivalencia, no la igualdad.

### 2.4.7.2. Original e imagen de una correspondencia

Para empezar este apartado podríamos comenzar planteándoles a los alumnos la siguiente cuestión: si observas bien la definición que hemos dado de correspondencia, ¿habría otros conjuntos o subconjuntos que serían importantes destacar en ella?; ¿cuáles?; ¿sabes cómo se llaman? En caso afirmativo, dilo.

Para resolver estas preguntas podemos utilizar las técnicas “el arte de preguntar” y “el arte de relacionar” (la idea que tenían de conjunto y subconjunto con la de original e imagen de un elemento de una correspondencia). También tendremos que usar: “la sinapsis” (ya que han visto suficientes contenidos como para que sea necesario poner a funcionar todas las neuronas de su cerebro para conseguir razonar si existen o no los subconjuntos que les pedimos) y “la síntesis creativa” (al concretar las definiciones que tendrían que dar).

Sea, por ejemplo, la correspondencia “ $x$  ha visitado la ciudad  $y$ ” establecida entre el conjunto de las personas de la clase y el conjunto de las ciudades de España. Tendremos el grafo que será el conjunto de los pares formados por un alumno y una ciudad de las que haya visitado. Podemos pensar en dos conjuntos: el de las primeras componentes de los pares que figuran en el grafo y el de las segundas. Al conjunto cuyos elementos son las primeras componentes de los pares que aparecen en el grafo le vamos a llamar conjunto original de la correspondencia; en este caso estará formado por los alumnos que han visitado alguna ciudad de España, y al conjunto de las segundas componentes le vamos a llamar conjunto imagen de la correspondencia; en este caso estará formado por las ciudades de España que han sido visitadas por algún alumno de la clase.

**Definiciones:** Sea la relación binaria  $(A,B,R)$ . El conjunto formado por las primeras proyecciones de los elementos del grafo, se suele llamar **dominio u original**, luego:

$$\text{Org}(R) = \text{pr}_1 G = \{x \in A / \exists y \in B (x, y) \in G\} \subset A.$$

Es decir, es el subconjunto de A formado por aquellos elementos para los que hay algún elemento de B con el que se relaciona.

Al conjunto formado por las segundas proyecciones de los elementos del grafo se suele llamar **recorrido, contradominio, rango o imagen**:

$$\text{Img}(R) = \text{pr}_2 G = \{y \in B / \exists x \in A (x, y) \in G\} \subset B.$$

Es decir, es el subconjunto de B formado por aquellos elementos para los que hay un elemento en A que se relaciona con él.

Estas definiciones pueden verse, entre otros, por ejemplo en Pinilla (1971: 14 y siguientes).

**Ejercicio:** Sea A el conjunto de las personas de la clase y sea B el conjunto de los números racionales. Vamos a decir que x se relaciona con y si, y sólo si, x mide y centímetros. Indica cuáles son los conjuntos inicial, final, original e imagen.

**Ejercicio:** En los ejemplos y ejercicios anteriores de correspondencias, determina el original y la imagen de cada una de ellas.

## 2.4.8. Recíproca de una correspondencia

Decimos a los alumnos: si cambiáramos el orden de los pares que aparecen en el grafo de una correspondencia, ¿obtendríamos otra correspondencia? Si es así, razónalo, y si no, di qué otra cosa tendríamos que hacer para que ese conjunto de pares fuera el grafo de una correspondencia. ¿Cuáles serían los conjuntos inicial, final y el grafo de la nueva correspondencia?

Utilizamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas” y “el arte de relacionar”.

**Definición:** Vamos a llamar **recíproca de una correspondencia**  $(A, B, G)$  a la correspondencia que obtenemos cambiando el conjunto inicial por el final, el conjunto final por el inicial y cuyo grafo, que denotamos por  $G^-$ , tiene los pares del grafo G pero en orden contrario; luego será  $(B, A, G^-)$ , en donde  $G^-$  vendrá dado por:

$$\forall (x, y) \in A \times B \quad (y, x) \in G^- \iff (x, y) \in G$$

Según esta definición, será

$$\text{Org}(G^-) = \text{Img}(G) \text{ e } \text{Img}(G^-) = \text{Org}(G).$$

Esta definición puede verse, por ejemplo, en Queysanne-Revuz (1974: 25).

### Ejemplos:

1° Si tenemos una correspondencia de  $A=\{1,2,3\}$  en  $B=\{a,b,c\}$  cuyo grafo es  $G=\{(1,b), (2,b)\}$ , su recíproca sería la correspondencia de  $B$  en  $A$  cuyo grafo es  $G^-=\{(b,1), (b,2)\}$ .

2° Sean  $A=B=\mathbb{N}^*$  y sea la relación  $R$ : “divide a”, entonces la relación  $R^-$  será: “es múltiplo de”.

3° Si los conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales y son ambos un conjunto de proposiciones, y la forma proposicional  $R$  es la equivalencia, entonces  $R^-$  es también la equivalencia.

**Ejercicio:** Invéntate una correspondencia, calcula su recíproca, indicando cuál es el conjunto inicial y cuál el final; y calcula también los conjuntos original e imagen de la correspondencia dada y de la recíproca.

## 2.4.9. Clases de correspondencias

En el concepto de relación binaria o correspondencia entre dos conjuntos cualesquiera  $(A,B,R)$  hemos podido observar que nada se exigía respecto a que el original o la imagen de un elemento de  $B$  o de  $A$ , respectivamente, fuese o no único. De hecho, un elemento del conjunto  $A$  podía tener ninguna, una o varias imágenes en  $B$  y un elemento de  $B$  podía tener ninguno, uno o varios originales en  $A$ . Simplemente se imponía que  $R \subset A \times B$ . Al ir obteniendo las clases de correspondencias iremos imponiéndole limitaciones al número de imágenes de un elemento de  $A$  y de originales de un elemento de  $B$ .

Para utilizar las técnicas “crear durmiendo” y “la serendipity” dejamos planteadas a los alumnos, para que lo piensen y al día siguiente nos digan lo que se les ha ocurrido, aconsejándoles dejen a mano, antes de ir a dormir, papel y lápiz para anotar lo que se les ocurra en el presueño, en el intersueño y al despertar, las siguientes cuestiones: ¿conoces alguna relación que imponga alguna restricción al número de originales o al de imágenes? Si es así, anótala y si no la conoces, ¿se te ocurre alguna limitación?; ¿cuál? ¿Cómo se podría llamar la correspondencia así obtenida? Al día siguiente se analizan por todo el grupo las ideas que surgieron, sean o no del tema, con objeto de aprovechar las que se puedan.

Existen tipos de relaciones de máximo interés para las Matemáticas y son aquéllas que imponen restricciones decisivas al número de imágenes u originales de un elemento y son las que vamos a estudiar a continuación.

### 2.4.9.1. Correspondencia unívoca

Preguntaríamos a los alumnos: para obtener las correspondencias unívocas vamos a ponerle limitaciones a las imágenes que puede tener un elemento, ¿se te ocurre alguna limitación? ¿Serías capaz de poner un ejemplo de correspondencia que tenga la limitación que has impuesto? Si es así, hazlo. ¿Cuál es el grafo de dicha correspondencia? ¿Hay algunos subconjuntos que merece la pena destacar en estas correspondencias? ¿cuáles?

Estas preguntas las podríamos trabajar mediante la técnica “torbellino de ideas”, el profesor actúa como secretario y recoge todas las ideas de los alumnos, que después se clasifican, organizan y evalúan con vista a que puedan ser útiles para llegar a tener una correspondencia unívoca e incluso una aplicación.

Podemos pensar, por ejemplo, en la correspondencia definida en el conjunto de personas de Málaga: “x tiene por madre a y”, entendiendo únicamente que x tiene por madre a y si, y sólo si, x ha sido dada a luz por y. Si nos fijamos bien podemos ver que una persona, si tiene alguna madre, tiene una sola. Por verificarse esta condición decimos que esta correspondencia es unívoca.

**Definiciones:** Una correspondencia  $(A,B,R)$  diremos que es **unívoca** o que es una **función** si cada elemento de A se relaciona a lo sumo con un elemento de B. Es decir, no puede haber dos pares en el grafo que tengan la misma primera componente: no podrían existir dos pares en el grafo de la forma  $(a,x)$  y  $(a,y)$ , luego si una correspondencia es unívoca se cumple que:

$$\forall a \in A \quad \forall b, b' \in B \quad aRb \wedge aRb' \Rightarrow b=b',$$

o lo que es igual: cuando cada elemento de A tiene a lo sumo una imagen, esto es,  $\forall a \in A$ , el conjunto  $\{b \in B / aRb\}$  es vacío o se reduce a un elemento.

Una definición análoga a ésta puede encontrarse, por ejemplo, entre otros, en Lelong-Ferrand J. y Arnaudès (1979: 13).

Si el elemento único b asociado a un elemento a existe, se llama **imagen de a por la función R**. Se dice también, en lenguaje geométrico, a veces, **valor de la función R en el punto a**.

Para escribir una relación funcional o función entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ , en lugar de las letras  $R, S, T, \dots$  suelen utilizarse las minúsculas  $f, g, h, \dots$  y en lugar de escribir  $xfy$  o  $(x,y) \in f$ , se suele escribir  $f(x)=y$ . Para indicar que la función  $f$  va de  $A$  en  $B$ , se suele poner:  $f:A \rightarrow B$  o también  $A \xrightarrow{f} B$ .

Aquí dado un elemento  $x$  del conjunto de partida, la imagen única  $y$ , en caso de que exista, del conjunto de llegada  $B$ , asociada por  $f$  a  $x$ , se denota por  $f(x)$  y se lee: “ $f$  de  $x$ ”, lo que se indica entonces también por  $x \rightarrow f(x)$  o  $x \rightarrow y=f(x)$ .

Con esta terminología podemos decir que una correspondencia  $(A,B,f)$  es unívoca si, y sólo si,

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2).$$

El **grafo de una función**  $f:A \rightarrow B$  es el subconjunto de  $A \times B$  que tiene por elementos los pares  $(x, f(x))$ , lo cual se suele expresar:

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B / y = f(x)\}.$$

En este caso el conjunto **original** o **dominio de la función** será el subconjunto de  $A$  formado por los elementos que tienen una imagen:

$$\text{Org}(f) = \{x \in A / \exists! y \in B, y = f(x)\} \subset A.$$

El original o dominio también se dice que es el lugar donde está definida la función.

Entonces el conjunto **imagen** o **codominio** de  $f$  será:

$$\text{Img}(f) = \{y \in B / \exists x \in A, y = f(x)\} \subset B.$$

La **imagen de un subconjunto**  $X \subset A$  mediante la función  $f$  la denotamos por

$$f(X) = \{y \in B / \exists x \in X, f(x) = y\},$$

aunque hay autores que la denotan de forma diferente, algunos por  $f^*(X)$ , para indicar que no es la misma función  $f:A \rightarrow B$ , sino que aquí  $f^*:P(A) \rightarrow P(B)$ . Nosotros, para simplificar la escritura, la vamos a denotar como lo hicimos al principio. En particular será  $f(A) = \text{Img}(f)$ .

Si  $X = \{x\} \Rightarrow f(X)$  tiene a lo sumo un elemento; se denota simplemente por  $f(x)$ .

El **original de un subconjunto**  $Y \subset B$  por la función  $f$  lo expresamos:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A / \exists y \in Y, f(x) = y\} = \{x \in A / f(x) \in Y\}.$$

Si  $Y = \{y\}$ , se denota por  $f^{-1}(\{y\})$  o simplemente por  $f^{-1}(y)$ , que puede tener varios elementos, uno o ninguno.



Algunos autores, en lugar de  $f(Y)$  y  $f(y)$ , utilizan  $f^{-1}(Y)$  y  $f^{-1}(y)$ , nosotros reservaremos estas últimas expresiones para emplearlas en el caso en que  $f$  sea una aplicación biyectiva, concepto que veremos después, pues en este caso  $f^{-1}$  será realmente la aplicación inversa.

### Observaciones:

1. No se puede decir “la función  $f(x)$ ”, ya que  $f(x)$  no es una función, sino que es el elemento único de  $B$  asociado al elemento  $x \in A$  por la función  $f$ .

2. Para que tengamos definida una función necesitamos precisar cuáles son el conjunto inicial  $A$ , el conjunto final  $B$  y la relación que liga a cada elemento  $x \in A$  con un elemento  $y \in B$ . Dicho de otro modo, una fórmula no define una función.

**Ejemplo:** La función  $f$  “definida”, por ejemplo, por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , no tiene sentido si no se precisan los conjuntos inicial y final.

**Ejemplo:** Nos dan la correspondencia entre los conjuntos  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{x, y\}$ , cuyo grafo es  $G = \{(a, y), (c, y)\}$ . Esta correspondencia podemos afirmar que es unívoca.

**Ejemplo:** Sea la correspondencia de  $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$  en  $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$  dada por:  $xRy \iff x+2y=8$ . Vamos a ver si es unívoca, para ello veamos cuál es su grafo:  $G = \{(2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$ . ¿Es unívoca? Justifica por qué.

**Ejercicio:** De las correspondencias estudiadas en el apartado anterior, ¿alguna es unívoca?

**Ejercicio:** Di si es unívoca la correspondencia  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, R)$  definida:

$$xRy \iff x < y.$$

### 2.4.9.2. Correspondencia biunívoca

De nuevo podemos utilizar la técnica “el arte de preguntar” y “el arte de relacionar” para resolver las cuestiones que a continuación planteamos a los alumnos. En la correspondencia unívoca nos fijábamos en el número de imágenes que podían tener los elementos del conjunto inicial. Si te dan una correspondencia de  $A$  en  $B$ , ¿cuántos originales puede tener un elemento de  $B$ ? ¿Hay alguna correspondencia que tenga

nombre especial por tener todos los elementos de B un cierto número de originales?; ¿cómo se llama?

También podríamos utilizar “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, ya que podemos analizar las correspondencias que tenemos y las condiciones que verifican cada uno de sus elementos, después se plantean preguntas sobre la forma de mejorarlas, y por último se razona si se le puede exigir a la recíproca de una correspondencia la misma condición que le pedíamos a la correspondencia para que fuese unívoca.

Podríamos plantearnos, por ejemplo, la correspondencia: “x mide de alto y”, establecida entre el conjunto de personas de la clase y el conjunto de los números reales. En este caso a cada persona le corresponde uno y sólo un número real, que es la medida de su altura, y a cada número real le puede corresponder uno, ninguno o varios alumnos que tengan por medida de su altura esa cantidad. Esta correspondencia es unívoca. Si todos y cada uno de los alumnos tuvieran distinta medida de alto, a cada alumno le correspondería uno y sólo un número real, y a su vez los números reales que son medida de la altura de algún alumno, son de uno sólo. En este caso tendríamos una correspondencia biunívoca.

**Definición:** Una **correspondencia**  $(A,B,R)$  diremos que es **biunívoca** si cada elemento de A se relaciona a lo sumo con un elemento de B y a la vez cada elemento de B se relaciona a lo sumo con un elemento de A, o lo que es igual cada elemento de A tiene a lo sumo una imagen y cada elemento de B tiene a lo sumo un original. Luego una correspondencia es biunívoca si son unívocas ella y su recíproca. Por tanto, si una correspondencia es biunívoca no podrían existir dos pares de la forma  $(a,x)$  y  $(a,y)$  ni tampoco de la forma  $(a,x)$  y  $(b,x)$ . Luego si una correspondencia es biunívoca se cumple:

- i)  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 = a_2 \Rightarrow R(a_1) = R(a_2),$
- ii)  $\forall b_1, b_2 \in B \quad b_1 = b_2 \Rightarrow R^{-1}(b_1) = R^{-1}(b_2).$

Esta definición puede verse, entre otros, por ejemplo en Etayo (1972: 87).

**Ejemplo:** Sea A el conjunto de todas las ciudades del mundo y sea B el conjunto de todos los países del mundo. Vamos a decir que:

$xRy \iff$  “x es la capital de y”.

Esta correspondencia es biunívoca, ya que toda ciudad es capital, como mucho, de un país y todo país tiene, como mucho, a una ciudad por capital.

**Ejercicio:** Di si alguna de las correspondencias anteriores es biunívoca y, en caso de no encontrar ninguna, busca entre los conceptos que hayas utilizado, no tiene que ser de esta asignatura, algún ejemplo. Este ejercicio se lo proponemos al alumno para aplicar la técnica “el entorno”.

## 2.4.10. Aplicaciones

Iniciamos este apartado utilizando la técnica “el arte de preguntar”. Para ello, podemos empezar planteándole al alumno las siguientes cuestiones: ¿todavía puedes exigirle algo más a una correspondencia unívoca?; ¿qué le pedirías?; ¿sabes cómo se llama el nuevo concepto que obtienes? Si lo sabes, dilo y pon un ejemplo. Estas preguntas pueden dar lugar a un “torbellino de ideas”. Para concretar la definición de aplicación emplearemos además “la síntesis creativa”.

La correspondencia que hemos visto en el apartado anterior: “x mide de alto y”, establecida entre el conjunto de personas de la clase y el conjunto de los números reales, es unívoca, y el conjunto original coincide con el inicial. Por verificar estas dos condiciones vamos a decir de esta correspondencia que es una aplicación.

**Definición:** Una correspondencia  $(A, B, R)$  diremos que es una **aplicación** si es una correspondencia unívoca y además el conjunto inicial y original —o dominio— coinciden; por tanto, tendrá que cumplir las dos condiciones:

$$\text{i) } \forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 = a_2 \Rightarrow R(a_1) = R(a_2),$$

$$\text{ii) } \text{Org}(R) = A.$$

O lo que es igual, si para cada elemento  $a$  de  $A$ , existe un único elemento  $b$  en  $B$  tal que  $a$  se relaciona con  $b$ , ya que por i) un elemento tiene a lo sumo una imagen, y por ii) tiene solamente una, lo que escribimos:

$$\forall a \in A \quad \exists ! b \in B \quad (a, b) \in R.$$

Como consecuencia, podemos decir que una aplicación  $f$  de  $A$  en  $B$  es una función  $f: A \rightarrow B$  definida  $\forall x \in A$ , por tanto  $\text{pr}_1 G = A = \text{Org}(f)$  y  $\text{pr}_2 G = \text{Im}(f) \subset B$ . Todo elemento del conjunto inicial está en una, y solamente en una, pareja del grafo, luego todo el estudio que hemos hecho en funciones es válido para las aplicaciones; además, la restricción de una función  $f: A \rightarrow B$  a su dominio,  $D$ , es una aplicación de  $D$  en  $B$ .

Una definición análoga a ésta puede encontrarse, por ejemplo, en Mufafian (1979: 21 y siguientes).

Es corriente dar la aplicación indicando cuáles son el conjunto inicial, el conjunto final y la forma proposicional en dos variables a la que se denota por  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ... como en las correspondencias unívocas. Igual que en las funciones, en lugar de denotar la imagen,  $y$ , de un elemento,  $x$ ,

mediante una aplicación  $f$ , por  $xfy$  o  $(x,y) \in f$  o  $(x,y) \in R$ , se suele denotar por  $f(x)=y$  o  $y=R(x)$ .

Daremos una aplicación de  $A$  en  $B$  por la terna  $(A,B,f)$ , y cuando tengamos claro cuales son los conjuntos inicial y final, diremos solamente “la aplicación  $f$ ”.

Ahora podemos plantearle a los alumnos la siguiente cuestión para trabajarla mediante “el método Delfos” o mediante “la sinéctica”, en su aspecto “hacer lo familiar extraño”: si tenemos una aplicación entre dos conjuntos finitos y sabemos el número de elementos que tienen el conjunto inicial y final, ¿podríamos saber cuántas aplicaciones podemos establecer entre ellos?

En principio, mediante “la analogía personal”, tendrían que identificarse con el problema para llegar a ver cómo van eligiendo las imágenes de los distintos elementos del conjunto inicial.

Después, mediante “la analogía directa” podemos darles dos conjuntos determinados y concretos para que intenten ver cuántas aplicaciones pueden establecer.

Más tarde deberían comparar, mediante “la analogía simbólica”, la forma de obtener el número de elementos del producto cartesiano de dos conjuntos con el número que les ha ido saliendo de aplicaciones.

Al final, mediante “la analogía fantástica”, tendrían que razonar si les sirven para todos los casos posibles los resultados que han ido intuyendo.

Los grafos de las aplicaciones de  $A$  en  $B$  pertenecen a  $\mathcal{P}(A \times B)$ , y por tanto constituyen un subconjunto de  $\mathcal{P}(A \times B)$ ; este subconjunto se suele denotar por  $B^A$ .

Si el conjunto  $A$  tiene  $r$  elementos y el conjunto  $B$  tiene  $s$  elementos, vamos a ver cuántos elementos tiene el conjunto  $B^A$ . Si tomamos un primer elemento de  $A$ , podríamos elegir la imagen de  $s$  formas distintas, y una vez elegida la imagen del primero, para tomar la imagen del segundo tendríamos también  $s$  posibilidades, y así con cada uno de ellos, luego  $B^A$  tendría el producto de  $s$  por él mismo  $r$  veces elementos, es decir, tendría variaciones con repetición de  $s$  elementos tomados de  $r$  en  $r$ :

$$n(B^A) = V_{R_s}^r = n(B \times B \times \dots \times B) = s^r$$

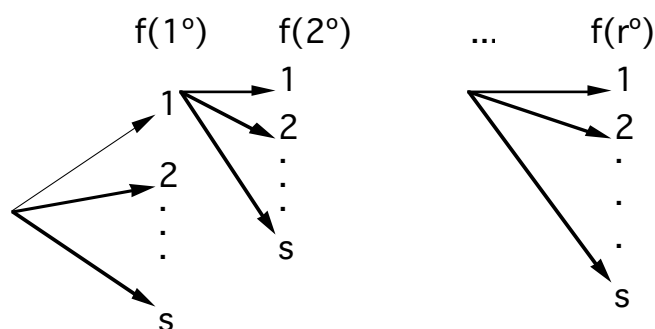


Figura 7: Número de aplicaciones entre dos conjuntos.

Quizás debido a este resultado se denote por  $B^A$  al conjunto de las aplicaciones de  $A$  en  $B$ , ya que su número de elementos es el número de elementos de  $B$  elevado al número de elementos de  $A$ .

**Ejercicio:** Dados los conjuntos  $A=\{a,b,c,d\}$  y  $B=\{1,x,2,y,3,z\}$ , ¿cuántas aplicaciones podemos establecer de  $A$  en  $B$ ?

**Ejemplos:** Vamos a destacar los siguientes ejemplos de aplicaciones:

1° La **aplicación identidad** sobre el conjunto  $A$  es la aplicación:  
 $i_A: A \rightarrow A$  tal que  $\forall x \in A \quad i_A(x) = x$ .

2° Una **aplicación**  $f$  de  $A$  en  $B$  se llama **constante** si  
 $\exists b \in B \quad \forall x \in A \quad f(x) = b$ ,  
 es decir, si hay un elemento en  $B$  que es imagen de todos los elementos de  $A$ .

**Observación:** Si comparamos la definición que teníamos de aplicación de  $A$  en  $B$  que era:  $\forall x \in A \quad \exists! y \in B \quad f(x) = y$  con la de aplicación constante, podemos afirmar que los cuantificadores están invertidos y además en la aplicación constante aparece el existencial en lugar del existencial exclusivo.

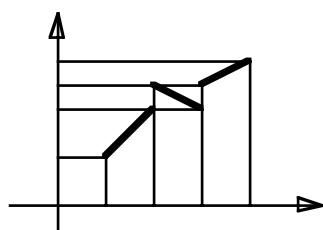
Hemos utilizado “el arte de relacionar” para obtener esta observación.

3° La **aplicación característica** de  $X \subset A$  es la aplicación, denotada por  $f_X$ , de  $A$  en  $V = \{0,1\}$ , tal que  
 $\forall x \in A$  si  $x \in X$ ,  $f(x) = 1$  y si  $x \notin X$ ,  $f(x) = 0$ .

4° Sea la aplicación  $f: [1,4] \rightarrow [1,3]$  tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ f(x) &= -x/2 + 7/2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ f(x) &= x/2 + 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Representada gráficamente será:



Esta aplicación no está expresada por una fórmula única.

Figura 8: Ejemplo de aplicación.

**Ejercicio:** ¿Podemos decir que la correspondencia  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, f)$  definida por  $f(x) = -x$  es aplicación?

**Ejemplo:** Sea la aplicación  $f$  del conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  en el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$  definida por:  $f(x) = -2x + 3$ . Es realmente una aplicación, ya que si tomamos un número natural cualquiera y lo multiplicamos por  $-2$ , nos da un único número entero, y si le sumamos  $3$ , el resultado sigue siendo un número entero único.

**Ejercicio:** Estudia si son aplicaciones las correspondencias siguientes:

1)  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $(a, b) \rightarrow a - b$

2)  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $x \rightarrow 2x$

3)  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $x \rightarrow \sqrt{x}$

4)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$   
 $x \rightarrow x^2$

5)  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $(a, b) \rightarrow a + b$

6)  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $x \rightarrow 2x$

7)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow 2x$

$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $x \rightarrow \frac{x-2}{3}$

Representa gráficamente 2), 6) y 7) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian sus diagramas cartesianos?

**Ejercicio:** Escribe alguna aplicación que hayas utilizado anteriormente y razona que es realmente una aplicación.

Este ejercicio puede resolverlo el alumno utilizando la técnica “el entorno”.

### 2.4.11. Tipos de aplicaciones

Para obtener las funciones les hemos impuesto a las correspondencias la condición de que los elementos del conjunto inicial

tuvieran como máximo una imagen, y al llegar al concepto de aplicación le imponemos “el máximo de condiciones” a los elementos del conjunto inicial, respecto de cuántas imágenes debe tener: que todo elemento tenga una imagen y solamente una. Es decir, que el conjunto original de la función coincida con el conjunto inicial, y que cada elemento tenga solamente una imagen. Vamos a presentar ahora los tipos de aplicaciones y para ello iremos imponiéndoles condiciones a los elementos del conjunto final, respecto de cuántos originales diferentes han de tener.

### 2.4.11.1. Aplicación inyectiva

Comenzamos planteándole al alumno las cuestiones siguientes: ¿cuántos originales puede tener un elemento en una aplicación?; ¿podrían tener más o menos originales? ¿Conoces algún tipo especial de aplicación de A en B que tenga que cumplir alguna condición respecto del número de originales de los elementos de B?; ¿esta aplicación es una correspondencia?; ¿de qué tipo? Pon un ejemplo.

Vamos a usar las técnicas “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa” para ver los tipos de aplicaciones.

El ejemplo de aplicación visto en el apartado anterior: “x mide de alto y” establecido entre el conjunto de alumnos de la clase y el conjunto de los números reales no era una correspondencia biunívoca; pero si todos y cada uno de los alumnos tuvieran distinta medida, hemos visto que la correspondencia sí era biunívoca, por esto esta aplicación la vamos a llamar inyectiva.

**Definición:** Una aplicación  $f:A \rightarrow B$  decimos que es **inyectiva** si es correspondencia biunívoca, es decir, si:

- a)  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2),$
- b)  $\forall b_1, b_2 \in B \quad b_1 = b_2 \Rightarrow f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2),$
- c)  $\text{Org}(f) = A.$

Como decíamos, en la recíproca de una aplicación, que

$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x,$  será

$f^{-1}(b_1) = a_1 \iff f(a_1) = b_1, \quad f^{-1}(b_2) = a_2 \iff f(a_2) = b_2;$

luego podremos decir que una aplicación es inyectiva si

- i)  $\forall a \in A \quad \exists! b \in B \quad f(a) = b$  por a) y c),
- ii)  $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$  por b).

Según esto, diremos que una aplicación es inyectiva si todo elemento del conjunto final tiene, como máximo, un original. O también, si todo



elemento del conjunto final es imagen, como mucho, de un elemento del conjunto inicial. Así, los elementos de  $B$  que son imágenes de algún elemento de  $A$  lo son de uno solo.

Además, como una implicación era equivalente a su contrarrecíproca, también diremos que una aplicación es inyectiva si dos elementos distintos del conjunto inicial tienen imágenes distintas, es decir, si se verifica:

- 1)  $\forall a \in A \exists ! b \in B \ f(a)=b$ ,
- 2)  $\forall a_1, a_2 \in A \ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ .

Esta definición puede verse, entre otros, en Rubio (1969: 22).

**Ejemplo:** Dadas las aplicaciones:

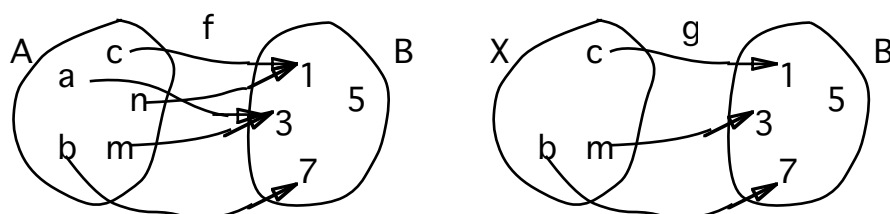


Figura 9: Ejemplos de aplicaciones inyectiva y no inyectiva.

se puede observar que  $f$  no es aplicación inyectiva, ya que tenemos, por ejemplo,  $c \neq n$  y sin embargo  $f(c)=f(n)=1$ , y  $g$  sí es inyectiva. Se puede observar que  $g$  se puede considerar como la restricción de  $f$  a  $X=\{b, c, m\}$ , luego la restricción de una aplicación no inyectiva puede ser inyectiva.

**Ejemplo:** Dada la correspondencia  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1}$$

es una aplicación, ya que  $\forall x \in \mathbb{Z} \ x^2+1 \neq 0$ , pues  $\forall x \in \mathbb{Z} \ x^2 \neq -1$ , y por tanto

$\forall x \in \mathbb{Z} \ \frac{x+1}{x^2+1} \in \mathbb{Q}$ . Además

$$x=x' \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x'+1}{x'^2+1} \Rightarrow f(x)=f(x'),$$

luego se cumple que  $\forall x \in \mathbb{Z} \ \exists ! y \in \mathbb{Q} \ f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}=y$ . Pero no es inyectiva, pues  $f(0)=f(1)=1$  y  $0 \neq 1$ .

**Ejercicio:** Estudia si las correspondencias siguientes son aplicaciones inyectivas:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \rightarrow f(x) = -x$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \rightarrow x+1$$

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \rightarrow \frac{2x-1}{x+1}$$

**Ejercicio:** Dada la correspondencia  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$x \rightarrow f(x) = -x^2,$$

¿es aplicación inyectiva?

**Ejercicio:** Busca alguna aplicación que hayas utilizado en algún momento, no tiene que ser de este tema, que sea inyectiva. Razona que, efectivamente, lo es.

Este ejercicio puede resolverlo el alumno utilizando “el entorno”.

De forma análoga a como antes analizábamos mediante “el método Delfos” o mediante “la sinéctica”, en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, el número de aplicaciones que se podían establecer entre dos conjuntos finitos, ahora podríamos ver el número de aplicaciones inyectivas.

Dados los conjuntos A con r elementos y B con s elementos, siendo  $r \leq s$ , vamos a ver cuántas aplicaciones inyectivas podemos establecer de A hacia B.

Tiene que ser  $r \leq s$ , pues al tener que cumplirse que dos elementos distintos de A deben tener imágenes distintas, habremos de tener tantas posibilidades para elegir las imágenes como elementos tenga A, como mínimo, luego en B tiene que haber tantos elementos como en A, como mínimo.

Si fuese  $r > s$  no podríamos establecer ninguna aplicación inyectiva, ya que todo elemento de A tiene que tener una imagen, y dos elementos distintos de A tienen que tener imágenes distintas, y no tendríamos suficientes elementos B para que esto fuese posible.

Si tomamos un primer elemento de A y le asociamos una imagen, tenemos s posibilidades para elegir esta imagen, para el segundo tenemos s-1, ya que la imagen que antes le asignamos al primer elemento no nos sirve para imagen del segundo elemento, y así sucesivamente; para el r-ésimo elemento nos quedan s-(r-1) posibilidades. En consecuencia, tendremos variaciones de s elementos tomados de r en r:

$$V_s^r = s(s-1) \dots [s-(r-1)] = s(s-1) \dots (s-r+1)$$

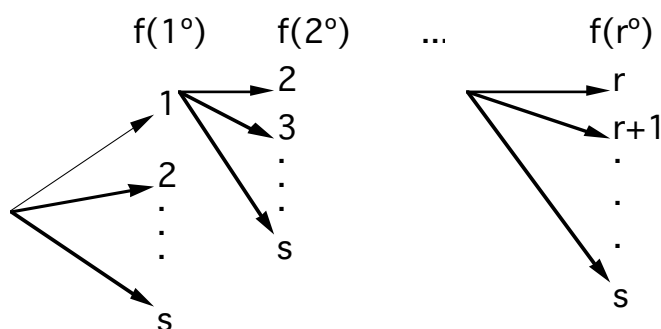


Figura 10: Número de aplicaciones inyectivas.

**Ejercicio:** Dados los conjuntos  $A=\{1,2,3,4\}$  y  $B=\{m,n,p,q,r\}$ , ¿cuántas aplicaciones podemos establecer de A hacia B? ¿Cuántas de ellas son inyectivas?

### 2.4.11.2. Aplicación sobreyectiva

Continuamos planteándoles a los alumnos preguntas sobre los originales que podrían tener los elementos del conjunto final de una aplicación, si conocen cómo se llaman y si podrían poner algún ejemplo.

Este epígrafe lo trabajaremos con las técnicas de Metodología Creativa “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el método Delfos”, “el arte de relacionar” y “la síntesis creativa”.

Quizá sea el momento de trabajar la técnica “ideogramación”, ya que habrá alumnos para los que sea conveniente recordar el concepto de correspondencia, lo que exigíamos para tener una aplicación, para que ésta fuese inyectiva y, ahora, para que sea sobreyectiva. Lo podemos hacer mediante un “diagrama estructural procesual”.

Es bastante fácil obtener una aplicación sobreyectiva. Podemos, por ejemplo, volver a considerar la correspondencia “x mide de altura y”, establecida entre el conjunto de las personas de la clase y el conjunto de los números reales que obtenemos realizando cada una de las mediciones. Se trata de una aplicación y en este caso, como hemos elegido como conjunto final de la correspondencia el conjunto de los números reales obtenidos realizando cada una de dichas mediciones, se verifica que el conjunto final coincide con el conjunto imagen. Por satisfacerse esto, decimos que esta aplicación es sobreyectiva.

**Definición:** Una aplicación  $f:A \rightarrow B$  decimos que es **sobreyectiva**, **suprayectiva** o **exhaustiva** si es aplicación y además el conjunto final coincide con el conjunto imagen. Esto lo indicaremos:

$$i) \forall a \in A \exists ! b \in B \quad f(a)=b.$$

ii)  $f(A)=B$ .

También podríamos decir:

$$1) \forall a \in A \exists ! b \in B \ f(a)=b.$$

$$2) \forall b \in B \exists a \in A \ f(a)=b.$$

Es decir, todo elemento de  $B$  tiene, como mínimo, un original. Se dice entonces que  $f$  **aplica  $A$  sobre  $B$** .

Esta definición puede verse, por ejemplo, en De Lorenzo (1972: 68).

**Ejercicio:** Dada la correspondencia  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$x \rightarrow f(x) = -x,$$

di si es aplicación y, en caso afirmativo, estudia si es sobreyectiva. ¿Es inyectiva?

**Ejercicio:** Estudia la correspondencia  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+$

$$x \rightarrow f(x) = |x|,$$

di si es aplicación y, en caso afirmativo, de qué tipo.

**Ejercicio:** Dada la correspondencia  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$x \rightarrow f(x) = x^2,$$

¿es aplicación sobreyectiva? ¿Es inyectiva?

Si  $f$  es una aplicación de  $A$  hacia  $B$ , es posible definir una nueva aplicación  $f^*$ , sobreyectiva, conservando el conjunto inicial  $A$  y tomando como conjunto final el conjunto imagen,  $B' = \text{Img}(f)$ .

**Ejercicio:** ¿Es suprayectiva la aplicación  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$x \rightarrow 2x+1?$$

Si no es suprayectiva, limita el conjunto final hasta llegar a obtener una aplicación suprayectiva.

**Ejercicio:** Busca entre los conceptos conocidos, no tienen que ser de este tema, alguna aplicación que sea sobreyectiva.

Este ejercicio se puede resolver aplicando la técnica “el entorno”.

No vamos a ver en términos generales el número de aplicaciones sobreyectivas que podemos establecer entre dos conjuntos finitos, por ser más complicado que en los casos de aplicaciones y de aplicaciones inyectivas, pero sí vamos a ver, en los ejemplos que vienen a continuación, el número de aplicaciones sobreyectivas que podemos establecer entre dos conjuntos finitos fijados previamente. Podemos seguir para ello la técnica “solución de problemas”.

**Ejemplo:** Dados los conjuntos  $A=\{1,2,3\}$  y  $B=\{m,n\}$  vamos a ver cuántas aplicaciones sobreyectivas podemos establecer de A en B.

Para que f sea aplicación todos los elementos de A tienen que tener una imagen y sólo una, y para que sea sobreyectiva todos los elementos de B tienen que tener como mínimo un original, luego podríamos tener casos como los de los diagramas:

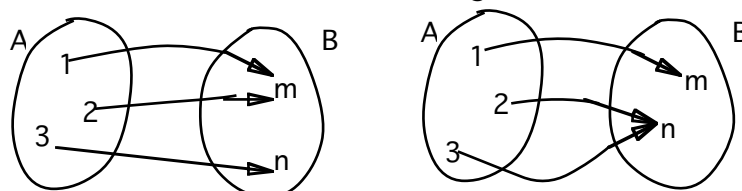


Figura 11: Ejemplos de aplicaciones sobreyectivas.

Para hacer el razonamiento, indicamos por  $(m_1, m_2, n)$  que tomamos como imagen de 1 la m, de 2 también la m y de 3 la n, que es lo que sucede con la primera aplicación. Esto sería lo mismo que  $(m_2, m_1, n)$ . En consecuencia, pudiendo tener m dos originales, tendríamos permutaciones de tres elementos en donde el primero se repite dos veces y el otro una:

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3 \text{ aplicaciones suprayectivas distintas.}$$

La segunda aplicación la pondríamos  $(m, n_2, n_3)$ , que sería la misma que  $(m, n_3, n_2)$ . Por tanto, pudiendo tener n dos originales tendríamos permutaciones de tres elementos en donde el segundo se repite dos veces y el otro una:

$$P_3^{1,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3 \text{ aplicaciones suprayectivas distintas;}$$

luego tendríamos  $3+3=6$  aplicaciones suprayectivas distintas. Y no hay más aplicaciones sobreyectivas, pues todos los elementos de A tienen que tener una imagen y todos los elementos de B tienen que tener algún original. Si un elemento de B tiene 1 original, el otro tendría que tener 2. Como en el conjunto final tenemos 3 elementos, tendremos que descomponer el 3 en suma de dos sumandos en que ninguno sea cero, y no habría más posibilidades de descomponerlo que  $3=1+2=2+1$ .

**Ejemplo:** Dados los conjuntos  $A=\{1,2,3,4,5\}$  y  $B=\{m,n,p\}$ , ¿cuántas aplicaciones podemos establecer de A en B? ¿Cuántas de ellas son inyectivas? ¿Cuántas son sobreyectivas?

Las dos primeras preguntas se dejan como ejercicio, y vamos a ver cuántas aplicaciones de las que podemos establecer son sobreyectivas. Todos los elementos de A tienen que tener una imagen y todos los

elementos de B tienen que tener algún original. Puede darse el caso de que tres elementos de A tuvieran como imagen m (o n, o p) y entonces los dos elementos de A restantes tendrían que tener como imágenes n y p [o (m y p), o (m y n)]; en este caso tendríamos

$$P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 20,$$

ya que el número de formas distintas de colocar  $(m_1, m_2, m_3, n, p)$  es  $5!$ , pero la situación  $(m_1, m_2, m_3, n, p)$  es la misma que  $(m_2, m_3, m_1, n, p)$ , y ambas nos quieren decir que las imágenes del 1, 2 y 3 son m, y si sólo cambiamos  $m_2$ ,  $m_3$  y  $m_1$  tendremos  $3!$ . Esta situación se repite si n tiene tres originales y si p tiene tres originales, luego en total, para el caso en que tres elementos de A tuvieran la misma imagen, tendríamos:

$$3 \cdot 20 = 60 \text{ aplicaciones sobreyectivas.}$$

En este caso hemos descompuesto  $5 = 3 + 1 + 1$  ó  $5 = 1 + 3 + 1$  ó  $5 = 1 + 1 + 3$ .

Para el caso en que dos elementos tuvieran como imagen a m, dos a n y uno a p [o (dos a m, uno a n y dos a p) o (uno a m, dos a n y dos a p)] tendríamos:

$$P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30,$$

luego, en total, para el caso en que dos parejas de elementos de A tuvieran la misma imagen, tendríamos:

$$3 \cdot 30 = 90 \text{ aplicaciones sobreyectivas.}$$

En este caso hemos descompuesto  $5 = 2 + 2 + 1$  ó  $5 = 2 + 1 + 2$  ó  $5 = 1 + 2 + 2$ .

Como ya no tenemos más posibilidades de descomponer el 5 como suma de tres sumandos en que ninguno sea cero, podemos decir que el número de aplicaciones suprayectivas es:

$$60 + 90 = 150.$$

**Ejercicio:** Dados dos conjuntos A con r elementos y B con s elementos, ¿qué relación tendría que existir entre r y s para poder establecer una aplicación sobreyectiva entre A y B? Razónalo.

**Ejercicio:** Sean los conjuntos  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  y  $B = \{a, b, c\}$ . ¿Puedes establecer alguna aplicación sobreyectiva entre ellos? En caso afirmativo, ¿cuántas? Para resolver este ejercicio se pueden utilizar las técnicas “el arte de relacionar” y “solución de problemas”.

### 2.4.11.3. Aplicación biyectiva

Volvemos a plantearle a los alumnos si pueden exigirle algo más a una aplicación respecto al número de originales de un elemento del conjunto final. Consideramos el máximo de exigencias.

Utilizamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”. Terminaríamos empleando la técnica “ideogramación”, proponiéndoles que hagan un “diagrama relacionar de síntesis” que recoja los conceptos de: producto cartesiano, correspondencia, tipos de correspondencias, aplicación y tipos de aplicaciones, con un ejemplo de cada uno de ellos.

Si continuamos el proceso seguido para obtener un ejemplo de aplicación inyectiva y otro de aplicación sobreyectiva cuando iniciamos los apartados correspondientes, podríamos pensar en la correspondencia “ $x$  mide de alto  $y$ ”, pero en este caso consideramos que el conjunto inicial está formado por los alumnos de la clase cuya altura tenga distinta medida, y el conjunto final es el de los números reales que obtenemos realizando las medidas de dichas alturas. En este caso, se trata de una aplicación que es a la vez inyectiva —por ser biunívoca la correspondencia— y sobreyectiva —por coincidir el conjunto final con el imagen—; por ocurrir esto vamos a decir que la aplicación es biyectiva.

**Definiciones:** Una aplicación  $f:A \rightarrow B$  decimos que es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva. Por ser inyectiva, todo elemento de  $B$  tiene como máximo un original, y por ser sobreyectiva todo elemento de  $B$  tiene como mínimo de un original; al ser biyectiva, todo elemento de  $B$  tendrá exactamente un original.

Esta definición puede encontrarse, entre otros, en Goujon (1975: 43).

A las aplicaciones biyectivas de un conjunto sobre él mismo se les suele llamar **permutaciones, sustituciones o transformaciones**.

**Ejercicio:** Di si la siguiente aplicación  $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  con  $x \rightarrow f(x)=2x$ , es biyectiva. En caso de que no sea biyectiva, ¿podrías elegir un subconjunto  $\mathbb{A}$  de  $\mathbb{N}$  para conseguir que  $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$  sea biyectiva? ¿Cuál es dicho subconjunto? Si fuese  $f:\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  con  $x \rightarrow f(x)=2x$ , ¿sería biyectiva?

**Ejercicio:** Analiza las aplicaciones anteriores para ver si alguna es biyectiva.

**Ejercicio:** Pon un ejemplo de aplicación biyectiva y de otra que no lo sea.

Puede resolver este último ejercicio utilizando la técnica “el entorno”.



Analizamos mediante “el método Delfos” o mediante “la sinéctica”, en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, el número de aplicaciones biyectivas que se pueden establecer entre dos conjuntos finitos.

Si tenemos un conjunto  $A$  con  $r$  elementos y otro  $B$  con  $s$  elementos, para poder establecer aplicaciones inyectivas tenía que ser  $r \leq s$  y para poder establecer aplicaciones sobreyectivas tenía que ser  $r \geq s$ , luego para poder establecer aplicaciones biyectivas tendrá que ser  $r = s$ . El número de aplicaciones biyectivas de  $A$  en  $B$ , ambos con  $r$  elementos, es el número de permutaciones de  $r$  elementos

$$P_r = r! = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

**Ejercicio:** ¿Cuántas aplicaciones biyectivas se pueden establecer de  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  en él mismo?

**Ejercicio:** Razona que, efectivamente, es  $r!$  el número de aplicaciones biyectivas de un conjunto  $A$  en otro  $B$ , ambos con  $r$  elementos.

Analizamos, mediante la técnica de Metodología Creativa “el entorno”, las aplicaciones que tenemos, y planteamos los ejercicios que viene a continuación, para resolverlos aplicando esta técnica y “solución de problemas”. Todo esto nos dará pie a la proposición que a continuación enunciamos y que puede resolverse, también, con la técnica “solución de problemas”.

**Ejercicio:** Da un ejemplo de aplicación biyectiva de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}$  que no sea la identidad, otro de aplicación inyectiva que no sea sobreyectiva y otro de aplicación sobreyectiva que no sea inyectiva.

**Ejercicio:** Pon un ejemplo de aplicación que sea una permutación en  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , y de otra aplicación que no lo sea. ¿Podrías establecer una aplicación inyectiva de un conjunto finito en él mismo que no fuese sobreyectiva? ¿Y una aplicación sobreyectiva que no fuese inyectiva?

**Proposición:** Toda aplicación inyectiva de un conjunto finito en otro con el mismo cardinal es sobreyectiva, y recíprocamente.

**Demostración:** En efecto, sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos con el mismo cardinal. Supongamos que la aplicación  $f: A \rightarrow B$  es inyectiva, entonces  $\text{card}(A) = \text{card}(f(A))$ , pero la aplicación de  $A \rightarrow f(A)$  en que  $x \mapsto f(x)$ , es biyectiva. Como  $f(A) \subset B$  y  $\text{card}(B) = \text{card}(A) = \text{card}(f(A))$ , tendrá que ser  $B = f(A)$  y por tanto  $f$  es sobreyectiva.

Supongamos que la aplicación  $f: A \rightarrow B$  es sobreyectiva, entonces  $B = f(A)$  y por tanto  $\text{card}(B) = \text{card}(f(A))$ . Si  $B$  es un conjunto finito,  $f(A)$  es finito. Si  $B$  tiene  $n$  elementos,  $f(A)$  tiene  $n$  elementos. Si  $f$  no fuese

inyectiva, tendríamos dos elementos  $x \neq y$  con  $f(x)=f(y)$ . Como  $f(A)=\{f(a)/a \in A\}$ ,  $f(x) \in f(A)$  y  $f(y) \in f(A)$ , y si  $f(x)=f(y)$ , será  $\text{card}(f(A)) < \text{card}(B)$ , en contra de ser  $\text{card}(B) = \text{card}(f(A))$ , luego la aplicación es inyectiva.

**Observación:** Como consecuencia inmediata de la proposición que acabamos de demostrar podemos decir que toda aplicación inyectiva de un conjunto finito en él mismo es sobreyectiva y recíprocamente.

Los ejercicios que vienen a continuación los proponemos con objeto de que sirvan a los alumnos para repasar algunas de las ideas estudiadas. Se pueden resolver mediante las técnicas: “el método Delfos”, “la solución de problemas” y “el arte de relacionar”.

**Ejercicio:** Dados los conjuntos  $A=\{1,2,3,4,5\}$  y  $B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ , se pide:

- ¿Cuántos elementos tiene  $A \times B$ ?
- ¿Cuántas correspondencias de  $A$  en  $B$  podemos establecer?
- ¿Cuántas de ellas son aplicaciones?
- ¿Cuántas son aplicaciones inyectivas?
- ¿Cuántas son aplicaciones sobreyectivas?
- ¿Cuántas son aplicaciones biyectivas?

**Ejercicio:** Idem con  $A=B=\{a,b,c\}$ .

**Ejercicio:** Idem con  $A=\{a,b,c,d,e,f\}$  y  $B=\{1,2\}$ .

**Ejemplos:** 1º Las aplicaciones  $p_1: A \times B \rightarrow A$  y  $p_2: A \times B \rightarrow B$   
 $(x,y) \rightarrow x$   $(x,y) \rightarrow y$

son suprayectivas.

2º  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $x \rightarrow x^2$  es suprayectiva.

3º  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $x \rightarrow 2^x$   $x \rightarrow 2^x$  son inyectivas.

4º  $f: A \times B \rightarrow B \times A$   
 $(x,y) \rightarrow (y,x)$  es biyectiva.

5º  $f: A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$   
 $(x,(y,z)) \rightarrow ((x,y),z)$  es biyectiva.

6º  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow 2x+3$  es biyectiva.

**Ejercicio:** Razona que las aplicaciones anteriores son del tipo que decimos y encuentra alguna nueva aplicación que sea biyectiva.

Para resolver este ejercicio se pueden utilizar las técnicas “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la sinapsis”.

### 2.4.12. Ley de composición interna

Empezamos con un “torbellino de ideas” preguntándoles a los alumnos: aparte de las aplicaciones que hemos considerado anteriormente, ¿hay alguna aplicación importante que puedas establecer entre dos conjuntos?; ¿cuál? ¿Sabes lo que es una operación? ¿Conoces algún conjunto sobre el que puedas establecer una operación? Indica los que conozcas. ¿Se puede considerar la operación que has definido como una aplicación? Si es así, ¿cuáles son los conjuntos inicial, final, original e imagen?

Para resolver todas estas cuestiones podemos usar las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinapsis” y “la sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar (operación) extraño (operación vista como aplicación)”, ya que mediante “la analogía personal” el alumno se identifica con el concepto de operación y trata de vivirlo desde dentro. Con “la analogía directa” el alumno compara la idea que tiene de operación con la de aplicación, lo que le ayuda a enfocarlo desde otro punto de vista. Mediante “la analogía simbólica” trata de conseguir ver la operación como una aplicación, observando las analogías existentes entre ambos conceptos. Mediante “la analogía fantástica” se intentará ver cualquier operación como una aplicación e incluso llegará a inventarse operaciones nuevas y distintas de las conocidas hasta ahora.

Las diferentes operaciones que realizamos habitualmente son leyes de composición interna si, y sólo si, el resultado de operar dos elementos de un conjunto es siempre un elemento de dicho conjunto. Por ejemplo, el cociente, en el conjunto de los números racionales menos el cero, es una ley de composición interna, ya que si dividimos dos números racionales no nulos nos da siempre un número racional no nulo. No será ley de composición interna en el conjunto de los números enteros no nulos, pues si dividimos dos números enteros no nulos no nos tiene que dar siempre un número entero no nulo; para que nos dé un número entero no nulo tendría que ser el dividendo múltiplo del divisor.

**Definición:** Una **ley de composición interna**  $*$  en un conjunto  $S \neq \emptyset$ , o también una **operación** en  $S$ , va a ser una aplicación

$$*: S \times S \rightarrow S$$

$$(a, b) \rightarrow a * b$$

que a cada par  $(a, b) \in S \times S$  le asocia un único elemento  $a * b \in S$ .

**Ejemplo:** En el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  la adición es una ley de composición interna, ya que es una aplicación

$$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

pues a todo par de números naturales, mediante la suma, le asociamos un único número natural.

**Ejercicio:** Además de la suma de números naturales, ¿has trabajado anteriormente con alguna ley de composición interna? Si es así, di la que hayas utilizado y prueba que es, efectivamente, una ley de composición interna.

Este ejercicio lo pueden resolver usando la técnica “el entorno”.

Cuando el conjunto es finito la ley de composición interna suele venir dada mediante una tabla cartesiana de doble entrada; para ello colocamos los elementos del conjunto en la primera fila y en la primera columna, y el resultado de operar un elemento de la primera fila con uno de la primera columna se coloca en el recuadro intersección de la fila con la columna en donde están estos elementos.

**Ejemplo:** Sea el conjunto  $A = \{a, b, c\}$ ; en él definimos la ley de composición interna siguiente:

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | a | b |
| b | c | c | a |
| c | b | c | a |

Tabla 2: Ley de composición interna.

Efectivamente es una ley de composición interna ya que el resultado de operar un elemento con otro, ambos del conjunto  $A$ , nos da un resultado, y sólo uno de  $A$ , ya que no tenemos en la tabla ningún recuadro vacío, no hay ningún recuadro en el que haya dos elementos de  $A$  y tampoco hay en la tabla ningún recuadro ocupado por otro elemento que no sea de  $A$ .

**Ejercicio:** ¿Puedes definir otra ley de composición interna sobre el conjunto  $A$  del ejemplo anterior? Si es así, hazlo.

**Ejercicio:** ¿Es la multiplicación una ley de composición interna en el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales? ¿Y la sustracción en  $\mathbb{Z}$ ? ¿Y en  $\mathbb{N}$ ? Da un ejemplo de ley de composición interna en  $\mathbb{N}$ .

### 2.4.13. Semigrupo

Mediante “el arte de preguntar” le planteamos las siguientes cuestiones al alumno: ¿sabes alguna propiedad que pueda tener una ley de composición interna? Di todas las propiedades que conozcas. ¿Conoces lo que es un semigrupo? Enuncia lo que entiendes por tal, y si coincide con la definición que damos a continuación, puedes pasar hacia adelante. En caso contrario, ejercítate con las siguientes definiciones.

Para ir trabajando estas cuestiones podríamos aplicar “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, ya que veríamos, primero en general y después en algunos casos particulares —o al contrario, según sea el nivel que tengan nuestros alumnos—, las propiedades que puede tener una ley de composición interna y, como consecuencia, la estructura que tiene el conjunto dotado de esta ley.

Un conjunto con una ley de composición interna puede verificar una serie de propiedades; según las que verifique vamos a decir que el conjunto con esa ley de composición interna tiene una determinada estructura.

Para tener un semigrupo el conjunto con la ley de composición interna debe verificar la propiedad asociativa. Esta propiedad es la que nos permite realizar la operación de tres elementos sin tener en cuenta cuáles de ellos vamos a operar primero (sólo hay que tener en cuenta el orden en qué están colocados los elementos), ya que nos dice que si queremos operar tres elementos podemos hacer la operación de los dos primeros y lo que nos resulte con el tercero o bien operar el segundo con el tercero y después operar el primero con el resultado obtenido, pues si se verifica dicha propiedad, ambos resultados son iguales. Por ejemplo, la unión en el conjunto  $\mathcal{P}(E)$  —de las partes de un conjunto  $E$ — verifica la propiedad asociativa, luego  $(\mathcal{P}(E), \cup)$  es un semigrupo.

#### Definiciones:

Dado un conjunto  $S \neq \emptyset$ , con una ley de composición interna  $*$ , decimos que  $(S, *)$  es un **semigrupo** si la operación verifica la propiedad **asociativa**:

$$\forall a, b, c \in S \quad a * (b * c) = (a * b) * c.$$

**Ejemplo:** En el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  definimos la siguiente operación:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \circ b = a$$

es decir, el resultado de operar  $a$  con  $b$  mediante  $\circ$  es el primero de ellos. Esta operación es asociativa, como puede verse sin dificultad. Por tanto  $(\mathbb{N}, \circ)$  es un semigrupo.

Si además se verifica la propiedad **conmutativa**:

$$\forall a, b \in S \quad a * b = b * a,$$

decimos que el **semigrupo** es **conmutativo**.

**Ejemplo:** En el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  definimos la siguiente operación:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a * b = \max\{a, b\}$$

es decir, el resultado de operar  $a$  con  $b$  mediante la operación  $*$  es el máximo de ellos. Esta operación es conmutativa. ¿Es asociativa? ¿Es  $(\mathbb{N}, *)$  un semigrupo conmutativo?

**Ejercicio:** La operación  $\circ$ , definida anteriormente, no es conmutativa. ¿Por qué?

**Ejercicio:** Di si es conmutativa o asociativa la operación  $\#$  definida en  $\mathbb{N}$ :

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \# b = \max\{a, b\} + 2.$$

¿Es  $(\mathbb{N}, \#)$  un semigrupo conmutativo?

**Ejercicio:** ¿Es asociativa la operación que dimos anteriormente mediante la tabla cartesiana? ¿Es conmutativa? ¿Qué tendría que pasar para que una ley de composición interna dada mediante una tabla fuese conmutativa? Define sobre el conjunto  $A = \{a, b, c\}$  una ley de composición interna que sea conmutativa.

Mediante “el arte de relacionar” vamos a observar que casi siempre que damos un concepto obtenemos otro considerando un subconjunto del conjunto que aparece; así ocurre en las definiciones que vienen a continuación también, y le damos un nombre a dicho concepto.

**Definición:** Dado un semigrupo  $(S, *)$  y dado un conjunto  $T \subset S$ , decimos que  $(T, *)$  es un **subsemigrupo** de  $(S, *)$  si  $(T, *)$  es también un semigrupo.

**Ejercicio:** Encuentra un subsemigrupo de alguno de los semigrupos vistos anteriormente.

**Ejercicio:** Si un semigrupo es conmutativo, ¿podría tener algún subsemigrupo que no fuese conmutativo? En caso afirmativo, encuentra alguno.

**Ejercicio:** En las operaciones con las que has trabajado en cursos anteriores, ¿tienes algún ejemplo de semigrupo conmutativo? ¿cuál? ¿Puedes encontrar algún subsemigrupo de él? ¿es también conmutativo? En este ejercicio utilizaremos la técnica “el entorno”.

Decimos que **existe elemento neutro por la izquierda** si

$$\exists e \in S \forall a \in S \quad e * a = a.$$

De forma análoga decimos que **existe elemento neutro por la derecha** si

$$\exists e \in S \forall a \in S \quad a * e = a.$$

Y decimos que **existe elemento neutro** si

$$\exists e \in S \forall a \in S \quad e * a = a * e = a.$$

Para ir resolviendo todas las cuestiones que vienen a continuación podemos seguir aplicando “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”.

**Ejercicio:** En el conjunto  $E = \{a, b, c, d\}$  tenemos definida la ley de composición interna  $*$  mediante la siguiente tabla:

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | a | b |
| b | a | b | c | d |
| c | a | b | c | d |
| d | c | d | d | d |

**Tabla 3: Ley de composición interna.**

Estudia si es asociativa, conmutativa, si tiene algún elemento neutro por algún lado y si tiene elemento neutro. ¿Qué le tiene que pasar a una tabla para que la ley de composición interna, dada mediante ella, tenga algún elemento neutro por la izquierda? ¿Y para que tenga algún elemento neutro por la derecha? ¿Y para que tenga algún elemento neutro?

**Ejercicio:** ¿Puede tener una ley de composición interna más de un elemento neutro por la izquierda? ¿Y más de un elemento neutro por la derecha? ¿Y un elemento neutro por la izquierda y otro elemento neutro



por la derecha distinto? ¿Y más de un elemento neutro? Si es así, da un ejemplo de cada uno de ellos y si no, razona por qué.

Para utilizar la técnica “el entorno” proponemos los dos ejercicios que vienen a continuación:

**Ejercicio:** Entre los semigrupos que conoces de antes, ¿hay alguno que sea unitario? Si es así, di cuántos elementos neutros tiene. ¿Es conmutativo?

**Ejercicio:** Intenta dar una ley de composición interna en el conjunto  $E=\{a,b,c,d\}$  con dos elementos neutros. ¿Es posible? ¿por qué?

**Proposición:** Si un semigrupo  $(S,*)$  tiene elemento neutro, éste es único.

**Demostración:** En efecto, supongamos que  $e$  y  $e'$  son elementos neutros en el semigrupo  $(S,*)$ ; tendremos entonces que

$$\forall a \in S \quad a * e = e * a = a \quad (i),$$

$$\forall b \in S \quad b * e' = e' * b = b \quad (ii),$$

para  $a=e'$  tendríamos en (i) que

$$e' * e = e * e' = e'$$

y para  $b=e$  tendríamos en (ii) que

$$e * e' = e' * e = e$$

pero como decíamos que una ley de composición interna era una aplicación de  $S \times S$  en  $S$ , será único el resultado de operar dos elementos, por tanto al operar  $e$  con  $e'$  tendrá que dar un único elemento de  $S$ , luego deberá ser  $e=e'$ .

**Ejercicio:** ¿En algún caso hemos necesitado, para la demostración anterior, la propiedad asociativa? Si tenemos sólo un conjunto  $S \neq \emptyset$  con una ley de composición interna, ¿el elemento neutro es único? Si tienes que precisar la proposición anterior, precísala y, en tal caso, di cual sería su enunciado.

También en este ejercicio volveremos a aplicar las técnicas de Metodología Creativa “lista de atributos” y “el arte de relacionar”.

Si se verifica la asociativa y la existencia de elemento neutro decimos que el **semigrupo** es **unitario**, también llamado **monoide**, como puede verse en Cohn (1974: 39).

Si se verifican las tres propiedades decimos que el **semigrupo** es **conmutativo y unitario**, o también un **monoide conmutativo**.

**Ejemplo:** En el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  la operación:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a * b = \max\{a, b\}$$

tiene elemento neutro, que es el 0. Es por tanto un monoide conmutativo.

**Ejercicio:** Si la operación definida en  $\mathbb{N}$  hubiese sido:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \bullet b = \min\{a, b\},$$

¿existiría elemento neutro? ¿Sería conmutativa? ¿Sería asociativa?

**Ejercicio:** Prueba que el conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ , con la adición como ley de composición interna, es un semigrupo. ¿Es unitario? ¿Y conmutativo? ¿Es  $(\mathbb{N}, *)$  un semigrupo unitario y conmutativo? ¿Conoces algún otro semigrupo?; ¿cuál?

**Ejercicio:** Encuentra algún monoide entre las operaciones que hayas efectuado anteriormente y di si es, o no, conmutativo.

Este ejercicio y el que viene a continuación podrían resolverse utilizando la técnica “el entorno”.

**Ejercicio:** Si un semigrupo es unitario, ¿podría tener algún subsemigrupo sin elemento neutro? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Dado el conjunto  $S \neq \emptyset$ , diremos que la operación  $*$  definida en el conjunto  $S$  es **cancelativa, regular o simplificable por la izquierda** si

$$\forall a, b, x \in S \quad x * a = x * b \Rightarrow a = b.$$

De forma análoga, diremos que es **cancelativa, regular o simplificable por la derecha** si

$$\forall a, b, x \in S \quad a * x = b * x \Rightarrow a = b.$$

Y diremos que es **cancelativa, regular o simplificable** si lo es por la izquierda y por la derecha.

Si  $(S, *)$  es un semigrupo que verifica la propiedad cancelativa, diremos que el **semigrupo es cancelativo, regular o simplificable**.

**Ejemplo:**  $(\mathbb{N}, +)$  es un semigrupo cancelativo, ya que

$$\forall a, b, x \in \mathbb{N} \quad a + x = b + x \Rightarrow a = b \quad \text{y} \quad \forall a, b, x \in \mathbb{N} \quad x + a = x + b \Rightarrow a = b.$$

**Ejercicio:** ¿Es cancelativo el producto en  $\mathbb{N}$ ? ¿Y en  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ?

**Ejercicio:** Estudia alguna de las operaciones anteriores y comprueba si es cancelativa. ¿Es un semigrupo cancelativo? ¿Es unitario? En caso de

ser unitario, ¿has tenido que probar que  $\exists e \in S \quad \forall a \in S \quad a * e = e * a = a$ , o ha sido más fácil verlo? ¿Siempre que el semigrupo sea cancelativo, tienes que probar sólo eso?

Este ejercicio lo trabajaríamos mediante “el arte de relacionar” y “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño en familiar”, y mediante “la síntesis creativa” llegaríamos a enunciar la proposición que viene a continuación.

**Proposición:** Si un semigrupo  $(S, *)$  es cancelativo y se verifica que

$$\exists e, a \in S / a * e = a \quad \text{ó} \quad \exists e, a \in S / e * a = a,$$

entonces tiene elemento neutro que es  $e$ .

En efecto, supongamos que  $\exists e, a \in S / a * e = a$ , y tenemos que ver que

$$\forall b \in S \quad b * e = e * b = b.$$

Como es asociativa

$$\forall b \in S \quad a * b = (a * e) * b = a * (e * b),$$

de donde se deduce, por ser el semigrupo cancelativo, que

$$\forall b \in S \quad b = e * b \quad (1).$$

Por tanto, como  $a \in S$ ,

$$a = e * a;$$

operando con  $\forall b \in S$  por la izquierda, en ambos miembros de la igualdad

$$\forall b \in S \quad b * a = b * (e * a) = (b * e) * a;$$

por cancelativa tenemos que

$$\forall b \in S \quad b = b * e \quad (2);$$

y al ser ciertos (1) y (2),  $e$  es el elemento neutro.

Si se verificara que  $\exists e, a \in S / e * a = a$ , la demostración se haría de forma análoga.

#### 2.4.14. Grupo.

Vamos a definir la estructura “más rica” que puede tener un conjunto con una ley de composición interna; antes de ello, para continuar aplicando “el método combinatorio” llamado “lista de atributos” junto con la técnica “el arte de relacionar”, preguntaríamos a los alumnos: ¿una ley de composición interna podría tener otras propiedades además de las que hemos visto hasta ahora?; ¿cuáles? ¿Conoces algún ejemplo de conjunto con una ley de composición interna que tenga esas propiedades? Si es así, descríbelo. ¿Sabes lo que es un grupo? Por supuesto la palabra grupo tiene que ser conocida, aunque

quizá no con la acepción que le vamos a dar nosotros. Aquí también aparecerá una subestructura, ¿se te ocurre cuál podría ser?

Para tener la estructura de grupo necesitamos tener más propiedades que para tener un semigrupo unitario; además de las propiedades que teníamos entonces vamos a pedir que cada elemento tenga su simétrico, por esto vamos a necesitar saber a qué llamamos simétrico de un elemento.

**Definición:** Dado un conjunto  $S$  con una ley de composición interna  $*$  que tenga elemento neutro  $e$ , decimos que un elemento  $x \in S$  tiene **simétrico por la izquierda** si

$$\exists x' \in G \quad x' * x = e.$$

De forma análoga diremos que  $x \in S$  tiene **simétrico por la derecha** si

$$\exists x' \in G \quad x * x' = e.$$

Y diremos que  $x \in S$  tiene **simétrico** si

$$\exists x' \in G \quad x * x' = x' * x = e.$$

Si la operación es la suma, al simétrico de un elemento se le suele llamar **opuesto**, y si es el producto, **inverso**.

En los ejemplos y ejercicios que vienen a continuación vamos a utilizar “la sinéctica” en sus dos aspectos: “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo familiar extraño”.

**Ejemplo:** En el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  con la suma el 0 tiene simétrico, que es él mismo. ¿Los demás números naturales tienen simétrico?

**Ejercicio:** Dado un conjunto  $A$  con una ley de composición interna  $*$  para la que existe elemento neutro  $e$ , ¿ $e$  tiene simétrico? Si tiene, indica cuál es.

**Ejercicio:** Encuentra los elementos de  $\mathbb{Z}$  que tengan simétrico con el producto.

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{Z}, +)$  todo elemento tiene simétrico.

**Ejercicio:** Sea el conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$ ; en él tenemos definida la ley de composición interna dada mediante la tabla

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| * | a | b | c | d |
| a | b | a | a | b |
| b | a | b | c | d |
| c | b | c | c | d |
| d | c | d | b | d |

Tabla 4: Ejemplo de ley de composición interna.

Prueba que tiene elemento neutro. ¿Hay algún elemento que tenga simétrico por algún lado?; ¿y que tenga simétrico? Si alguno tiene simétrico, indícalo. ¿Qué tiene que pasar en la tabla para que un elemento tenga simétrico por la izquierda?; ¿y para que tenga simétrico por la derecha?; ¿y para que tenga simétrico?

Este último ejercicio podría dejarse para el día siguiente con objeto de aplicar “el método Delfos”.

En los apartados que vienen a continuación volvemos a aplicar “el método combinatorio” llamado “lista de atributos” y “la síntesis creativa”.

**Ejercicio:** En un conjunto con una ley de composición interna, con elemento neutro, ¿un elemento puede tener más de un simétrico por la izquierda?; ¿y por la derecha?; ¿y más de un simétrico? ¿Un elemento puede tener un simétrico por la izquierda y otro por la derecha distintos? Si es cierto, pon un ejemplo y si no, demuéstalo.

**Proposición:** Sea  $S$  un conjunto con una ley de composición interna  $*$  asociativa y con elemento neutro  $e$ ; si un elemento  $x$  tiene simétrico por la izquierda y por la derecha, los dos coinciden y éste es el simétrico de  $x$ .

En efecto, sean  $x'$  y  $x''$  los simétricos de  $x$  por la izquierda y por la derecha respectivamente; entonces tendremos:

$$x' * x = e \quad x * x'' = e.$$

Como se verifica la propiedad asociativa

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''.$$

**Corolario:** En un conjunto con una ley de composición interna asociativa y con elemento neutro, si un elemento tiene simétrico, éste es único.

La demostración la dejamos como ejercicio.

**Corolario:** En un conjunto con una ley de composición interna asociativa, conmutativa y con elemento neutro, si un elemento tiene simétrico por un lado, éste es el simétrico.

La demostración queda como ejercicio.

Para tener un grupo necesitamos que el conjunto con la ley de composición interna verifique casi todas las propiedades que nosotros hemos estudiado anteriormente; la única que no le exigimos es la conmutativa.  $(\mathbb{P}(E), \cup)$  no será un grupo, ya que no verifica que todo elemento tenga simétrico. Sin embargo  $(\mathbb{Z}, +)$  sí es un grupo; como además, en este caso se verifica la propiedad conmutativa, vamos a decir que el grupo  $(\mathbb{Z}, +)$  es conmutativo o abeliano.

**Definición:** Dado un conjunto  $G \neq \emptyset$  con una ley de composición interna  $*$ , decimos que  $(G, *)$  es un **grupo** si la operación  $*$  verifica las propiedades:

- a) Asociativa:  $\forall x, y, z \in G \quad (x*y)*z = x*(y*z)$ .
- b) Existencia de elemento neutro  $\exists e \in G \quad \forall x \in G \quad e*x = x*e = x$ .
- c) Todo elemento tiene simétrico:  $\forall x \in G \quad \exists x' \in G \quad x*x' = x'*x = e$ .

Si además se verifica:

- d) Conmutativa:  $\forall x, y \in G \quad x*y = y*x$ ,

decimos que el **grupo** es **conmutativo o abeliano**.

**Observación:** Todo grupo  $(G, *)$  es no vacío. Es evidente por el axioma b).

A continuación vamos a proponernos buscar algunos ejemplos de grupos, para lo cual podemos aplicar las técnicas de Metodología Creativa: “sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño —concepto de grupo— en familiar” —ejemplos concretos—, “el arte de relacionar” y “el entorno”.

**Ejercicio:** ¿Podemos tener un grupo con un elemento? Si es así, construye la tabla de dicho grupo e indica qué papel debería tener dicho elemento.

**Ejemplo:** Consideramos el conjunto  $A = \{0, 1\}$ . Vamos a tratar de dotarlo de estructura de grupo. Para ello, supondremos que 1 nos indica que modificamos la posición en que esté un interruptor y 0 que no la modificamos, y definimos una operación

$$\begin{aligned} *: A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\rightarrow a*b \end{aligned}$$

en donde  $a*b$  nos dice que cambiamos la posición del interruptor según nos comunique primero  $a$  y  $b$  a continuación. La tabla de la operación es la siguiente:

| * | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Tabla 5: Ejemplo de grupo.

En el recuadro correspondiente a la intersección de una fila con una columna ponemos el resultado de operar el elemento de la fila con el de la columna.

Como puede verse fácilmente,  $(A,*)$  es un grupo conmutativo.

**Ejercicio:** Construye la tabla para un grupo con dos elementos, para un grupo con tres elementos y para un grupo con cuatro elementos. Observa que en caso de pedir que el conjunto tenga dos o tres elementos “sólo” puedes tener un grupo, pero para el caso en que tenga cuatro elementos puedes tener dos grupos distintos (excepto cambio de nombre de los elementos). (Si no sabes resolver el ejercicio, puedes consultar Fraleigh (1989: 23 a 26).)

**Ejercicio:** ¿Es  $(\mathbb{N}, +)$  un grupo? ¿Y  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ? ¿Son abelianos? ¿Conoces algún otro grupo?

Les preguntamos a los alumnos si podríamos reducir o cambiar las propiedades que hemos exigido para tener un grupo y cómo. Esto constituiría el apartado “generalización” de la técnica “convertir lo extraño en familiar”, lo cual viene recogido en las dos proposiciones siguientes.

**Proposición:** Un conjunto con una ley de composición interna  $(G,*)$  asociativa, para la que existe elemento neutro por un lado y tal que cada elemento tiene simétrico por el mismo lado, es un grupo.

**Demostración:** Supongamos que tiene elemento neutro por la izquierda  $e$  y que todo elemento tiene simétrico por la izquierda:

$$\begin{aligned} \exists e \in G \quad \forall x \in G \quad e * x &= x, \\ \forall x \in G \quad \exists x' \in G \quad x' * x &= e. \end{aligned}$$

Vamos a ver que  $x'$  es también el simétrico por la derecha. Como  $x'$  es un elemento de  $G$  y todo elemento tiene simétrico por la izquierda

$$\exists x'' \in G \quad x'' * x' = e,$$

entonces



$$\begin{aligned} x * x' &= (e * x) * x' = e * (x * x') = (x'' * x') * (x * x') = x'' * [(x' * x) * x'] = \\ &= x'' * (e * x') = x'' * x' = e, \end{aligned}$$

luego  $x'$  es el simétrico de  $x$ .

Veamos que  $e$  es también neutro por la derecha; para ello operamos

$$x * e = x * (x' * x) = (x * x') * x = e * x = x.$$

Así que  $e$  es el neutro y por tanto  $(G, *)$  es un grupo.

**Proposición:** Sea  $G$  un conjunto no vacío con una ley de composición interna  $*$  asociativa;  $(G, *)$  es un grupo si, y sólo si,  $\forall a, b \in G$  las ecuaciones

$$1) a * x = b \text{ y } 2) y * a = b \text{ tienen solución en } G.$$

**Demostración:** Si  $(G, *)$  es un grupo, todo elemento tiene simétrico; operamos con el simétrico de  $a$  por la izquierda en la primera ecuación y con el simétrico de  $a$  por la derecha en la segunda ecuación

$$a' * (a * x) = a' * b \text{ --- } (a' * a) * x = a' * b \text{ --- } e * x = a' * b \text{ --- } x = a' * b$$

$$(y * a) * a' = b * a' \text{ --- } y * (a * a') = b * a' \text{ --- } y * e = b * a' \text{ --- } y = b * a'.$$

Si  $\forall a, b \in G$  las ecuaciones  $a * x = b$  e  $y * a = b$  tienen solución en  $G$ ,  $\forall a \in G \exists e_a \in G / a * e_a = a$ . Veamos que  $e_a$  es el elemento neutro por la derecha. Tomamos  $\forall b \in G$ , por tener solución las ecuaciones de la forma 2),  $\exists y \in G / y * a = b$ , entonces

$$b * e_a = (y * a) * e_a = y * (a * e_a) = y * a = b,$$

luego  $e_a$  es el elemento neutro por la derecha de  $(G, *)$ , y como ya no depende del elemento  $a$ , elegido al principio, le vamos a llamar  $e$ .

Veamos que todo elemento de  $G$  tiene simétrico por la derecha:

$\forall a \in G$ , por tener solución toda ecuación de la forma 1),  $\exists a' \in G / a * a' = e$ , luego todo elemento tiene simétrico por la derecha, y por la proposición anterior  $(G, *)$  es un grupo.

**Ejercicio:** Demuestra que todo grupo es cancelativo. Este ejercicio lo proponemos para emplear la técnica “el arte de relacionar” (en este caso, la idea de grupo con la propiedad cancelativa).

Utilizando las técnicas “el arte de preguntar” y “el torbellino de ideas” podríamos ahora plantearle al alumno: ¿para qué nos pueden servir cada una de las estructuras hasta ahora definidas? ¿Podríamos tener alguna otra estructura de un conjunto con una ley de composición interna “más perfecta” que la de grupo?

**Ejercicio:** Haz un esquema para organizar las posibles estructuras que puede tener un conjunto con una ley de composición interna.

Este último ejercicio nos sirve para utilizar la técnica “ideogramación”, pues podría hacerse “un diagrama relacional de síntesis”.

**Definición:** Dado un grupo  $(G,*)$  y dado un conjunto  $H \subset G$ , decimos que  $(H,*)$  es un **subgrupo** de  $(G,*)$  si  $(H,*)$  es también un grupo.

**Ejercicio:** Encuentra un subgrupo de alguno de los grupos vistos anteriormente.

**Ejercicio:** Si un grupo es abeliano, ¿puede tener algún subgrupo que no sea abeliano? En caso afirmativo, encuentra alguno.

### 2.4.15. Semianillo

Vamos a pasar a definir otras estructuras algebraicas, pero en este caso con dos leyes de composición interna. Le preguntamos al alumno: si tenemos un conjunto con dos leyes de composición interna, ¿conoces alguna propiedad que nos sirva para relacionar estas dos operaciones? ¿Has visto algún conjunto en el que se puedan definir dos leyes de composición interna? Explica cada uno de los que hayas visto diciendo las propiedades que cumplen, y si sabes la estructura que se consigue, dilo también.

Vamos a aplicar las técnicas: “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la lista de atributos”, “el entorno” y “la síntesis creativa” para resolver las cuestiones antes planteadas y las que vienen a continuación.

Seguro que has utilizado la propiedad distributiva que relaciona la suma con el producto, por ejemplo, en el conjunto de los números naturales. Esta propiedad va a ser la que sirva para relacionar las dos leyes de composición interna que tengamos definidas en un conjunto, y dará lugar a otras nuevas estructuras en este conjunto cuando con cada una de dichas leyes de composición interna tenga una determinada estructura.

**Definición:** Dada la terna  $(X, \perp, \otimes)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $\perp$  y  $\otimes$  dos leyes de composición interna definidas sobre él, diremos que la operación  $\otimes$  es **distributiva por la izquierda** respecto de la operación  $\perp$  si

$$\forall x, y, z \in X \quad x \otimes (y \perp z) = (x \otimes y) \perp (x \otimes z).$$

Decimos que la operación  $\otimes$  es **distributiva por la derecha** respecto de la operación  $\perp$  si

$$\forall x, y, z \in X \quad (x \perp y) \otimes z = (x \otimes z) \perp (y \otimes z).$$

Y decimos que la operación  $\otimes$  es **distributiva** respecto de la operación  $\perp$  si lo es por la izquierda y por la derecha.

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  sabemos que la operación  $\cdot$  es distributiva respecto de  $+$ .

**Ejercicio:** En  $\mathbb{Z}$  definimos las operaciones siguientes:

$$a \perp b = a + b + ab, \quad a * b = a.$$

Estudia si se verifica alguna propiedad distributiva de la operación  $\perp$  respecto de la operación  $*$ , o de  $*$  respecto de  $\perp$ . Este ejercicio lo dejamos para resolverlo al día siguiente con “el método Delfos”.

El semianillo es la estructura “más sencilla” que puede tener un conjunto con dos leyes de composición interna. Para ello necesitamos que con la primera operación sea semigrupo abeliano, con la segunda semigrupo y que se verifique la propiedad distributiva de la segunda respecto de la primera. Por ejemplo,  $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$  es un semianillo, ya que  $(\mathcal{P}(E), \cup)$  es semigrupo abeliano —la unión es asociativa y conmutativa—,  $(\mathcal{P}(E), \cap)$  es semigrupo —la intersección es asociativa— y se verifica la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión. Esta estructura es fundamental para el tema “las Magnitudes y su Medida”.

**Definición:** Una terna  $(X, \perp, \otimes)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $\perp$  y  $\otimes$  dos leyes de composición interna definidas sobre él, diremos que es un **semianillo** si, y sólo si,:

1°  $(X, \perp)$  es un semigrupo abeliano.

2°  $(X, \otimes)$  es un semigrupo.

3° La operación  $\otimes$  es distributiva respecto de  $\perp$ , es decir:

$$\forall x, y, z \in X \quad x \otimes (y \perp z) = (x \otimes y) \perp (x \otimes z); \quad (x \perp y) \otimes z = (x \otimes z) \perp (y \otimes z).$$

Si la operación  $\otimes$  es conmutativa, decimos que el **semianillo** es **conmutativo**. Y si  $X$  tiene elemento neutro respecto de la operación  $\otimes$ , decimos que el **semianillo** es **unitario**.

**Observación:** No tenemos que exigir que el conjunto  $X$  no sea vacío pues para que  $(X, \perp)$  fuese un semigrupo abeliano ya se le exigía esta condición.

Este concepto puede verse, entre otros, en Golan (1992: 1).

**Ejemplo:**  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$  es un semianillo conmutativo —por ser el producto conmutativo— y unitario —por tener el producto elemento neutro que es el 1.

**Ejercicio:** Sea la operación  $\circ$  la potenciación en el conjunto de los números naturales, definida como sigue:

$$\circ: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(a, b) \rightarrow a \circ b = a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_b$$

¿Es  $(\mathbb{N}, \cdot, \circ)$  un semianillo?; ¿es conmutativo?; ¿es unitario?

**Ejercicio:** ¿ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  es un semianillo?; ¿es conmutativo? ¿y unitario?

Estos dos últimos ejercicios los vamos a resolver aplicando la técnica “solución de problemas”.

**Definición:** Dado un semianillo  $(X, +, \cdot)$  y dado un conjunto  $Y \subset X$ , decimos que  $(Y, +, \cdot)$  es un **subsemianillo** de  $(X, +, \cdot)$  si  $(Y, +, \cdot)$  es también un anillo.

**Ejercicio:** Encuentra un subsemianillo de alguno de los anillos vistos anteriormente.

**Ejercicio:** Todo subsemianillo de un anillo unitario, ¿es unitario? Si es cierto, demuéstalo y si no, pon un ejemplo.

## 2.4.16. Anillo

Vamos a ver otra estructura que puede tener un conjunto con dos leyes de composición interna. Le preguntamos a los alumnos: ¿podríamos tener otra nueva estructura en un conjunto con dos leyes de composición interna? ¿Qué estructura crees que debería tener el conjunto con cada una de las leyes de composición interna? Seguro que has oído hablar de anillo, pero ¿podrías decirnos cuál es el concepto matemático de anillo? ¿Qué nombre le daríamos a la subestructura correspondiente? ¿Qué propiedades tendría que cumplir dicha subestructura?

En este apartado vamos a emplear las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, que dará lugar a un “torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

La estructura de anillo va a ser muy importante en todo el tema de “las Magnitudes y su Medida”. Para tener un anillo necesitaremos más

propiedades que para un semianillo, debemos tener un conjunto con dos leyes de composición interna, con la primera operación tiene que ser grupo abeliano, con la segunda semigrupo y tiene que ser distributiva la segunda respecto de la primera. Por ejemplo,  $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$  no es un anillo ya que con la unión no es un grupo abeliano (no se verifica que todo elemento tenga simétrico, pues el elemento neutro de la unión es el vacío, y dado un conjunto no vacío no podemos encontrar otro conjunto que al unirlo con él nos dé el vacío). Sin embargo,  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  sí es un anillo.

**Definición:** Dado un conjunto  $X$  y dos leyes de composición interna  $\perp$  y  $\otimes$ , decimos que  $(X, \perp, \otimes)$  es un **anillo** si, y sólo si,:

1°  $(X, \perp)$  es un grupo abeliano.

2°  $(X, \otimes)$  es un semigrupo.

3° La operación  $\otimes$  es distributiva respecto de  $\perp$ , es decir:

$$\forall x, y, z \in X \quad x \otimes (y \perp z) = (z \otimes y) \perp (x \otimes z); \quad (x \perp y) \otimes z = (x \otimes z) \perp (y \otimes z).$$

Si la operación  $\otimes$  es conmutativa, decimos que el **anillo** es **conmutativo**. Y si  $X$  tiene elemento neutro respecto de la operación  $\otimes$ , decimos que el **anillo** es **unitario**.

**Observación:** No tenemos que exigirle que el conjunto  $X$  no sea vacío pues para que  $(X, \perp)$  fuese un grupo abeliano ya se le exigía esta condición.

Esta definición puede encontrarse, por ejemplo, en Jacobson (1985: 86).

**Ejemplo:** Sea  $\mathbb{Q}$  el conjunto de los números racionales,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  es un anillo conmutativo y unitario.

Estamos aplicando en este ejemplo “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño —anillo— en familiar —números racionales—”. En el ejercicio siguiente también la utilizaremos.

**Ejercicio:** ¿ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$  es un anillo? Razona por qué  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  hemos dicho antes que es un anillo. ¿Son conmutativos? ¿Y unitarios?

Son muchas las propiedades que podríamos ver que se deducen de la estructura de anillo y que podríamos trabajar con la técnica “lista de atributos”. Por no hacer demasiado largo este apartado, sólo vamos a ver la propiedad que necesitaremos posteriormente y que enunciamos en la proposición que viene a continuación.

**Proposición:** Sea  $(X, \perp, \otimes)$  un anillo y sea  $e$  el elemento neutro de  $(X, \perp)$ , entonces  $\forall x \in X \quad x \otimes e = e \otimes x = x$ .

Demostración:  $\forall x \in X \quad (x \otimes a) \perp e = (x \otimes a) = x \otimes (a \perp e) = (x \otimes a) \perp (x \otimes e)$ , por ser  $e$  el elemento neutro de  $(X, \perp)$  y por la propiedad distributiva de  $\otimes$  respecto de  $\perp$ ; y como todo grupo es cancelativo, aplicando ésta propiedad en la igualdad anterior tenemos que

$$\forall x \in X \quad e = x \otimes e.$$

Probaríamos de forma análoga que  $e = e \otimes x$ .

**Definición:** Dado un anillo  $(A, \perp, \otimes)$  y dado un conjunto  $B \subset A$ , decimos que  $(B, \perp, \otimes)$  es un **subanillo** de  $(A, \perp, \otimes)$  si  $(B, \perp, \otimes)$  es también un anillo.

**Ejercicio:** Encuentra un subanillo de alguno de los anillos vistos anteriormente.

**Ejercicio:** ¿Un subanillo de un anillo conmutativo tiene que ser conmutativo? ¿Y un subanillo de un anillo unitario será unitario?

**Observación:** Un subanillo de un anillo no conmutativo puede ser conmutativo. Por ejemplo  $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ , siendo  $M_2(\mathbb{Z})$  el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos, es un anillo no conmutativo, y sin embargo el subanillo de las matrices diagonales, es decir, las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}$ , sí es conmutativo.

### 2.4.17. Cuerpo

Vamos a estudiar la estructura “más completa” que puede tener un conjunto con dos leyes de composición interna. Hablamos de “más completa” en el sentido de que le exigimos todas las propiedades que podemos al conjunto respecto de cada una de las leyes de composición interna.

Empezamos preguntando al alumno-profesor: ¿sabes lo que es un cuerpo? ¿Podrías añadirle más propiedades a un anillo para tener otra estructura?; ¿cuáles? ¿Conoces algún conjunto que tenga dichas propiedades?; ¿cuál? Prueba que las cumple. Una vez obtenido un cuerpo, ¿podrías seguir añadiéndole más propiedades?; ¿cuáles?; ¿cómo se llamaría la subestructura correspondiente?; ¿qué propiedades tendría que verificar dicha subestructura?

Para responder a todas estas cuestiones utilizaremos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar” que dará lugar a un “torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el método combinatorio”

llamado “lista de atributos”, “el entorno”, “la sinapis”, “la serendípy” y “la síntesis creativa”.

Si pensamos, por ejemplo, en el anillo  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , vemos que  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo abeliano, luego no podemos pedirle que cumpla más propiedades. Pero  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  sólo es un semigrupo unitario y conmutativo, los únicos elementos que tienen simétrico son el 1 y el -1. Además, se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Pensando en conseguir una estructura más completa, podríamos buscar otro conjunto que con la primera operación fuese también grupo abeliano; con la segunda sólo podríamos pedirle que todo elemento, menos el neutro de la primera operación, tuviera simétrico (ya que el neutro de la primera operación al operarlo con cualquier otro elemento mediante la segunda operación, según la propiedad que hemos visto anteriormente, siempre nos va a dar el elemento neutro de la primera operación, luego el neutro de la primera operación no puede tener simétrico con la segunda operación). Además tendría que verificarse la propiedad distributiva de la segunda operación respecto de la primera. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, en  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ .

**Definición:** Dado un conjunto  $X$  y dos leyes de composición interna, decimos que  $(X, \perp, \otimes)$  es un **cuerpo** si, y sólo si,

1°  $(X, \perp)$  es un grupo abeliano.

2°  $(X \setminus \{e\}, \otimes)$ , siendo  $e$  el elemento neutro respecto de la operación  $\perp$ , es también un grupo abeliano.

3° La operación  $\otimes$  es distributiva respecto de  $\perp$ , es decir:

$$\forall x, y, z \in X \quad x \otimes (y \perp z) = (x \otimes y) \perp (x \otimes z); \quad (x \perp y) \otimes z = (x \otimes z) \perp (y \otimes z).$$

**Observación:** No tenemos que exigirle que el conjunto  $X \neq \emptyset$  pues para que  $(X, \perp)$  fuese un grupo abeliano ya se le exigía esta condición.

Esta definición puede encontrarse, por ejemplo, en Mac Lane y Birkhoff (1983: 1152).

**Ejemplo:**  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  es un cuerpo, ya que  $(\mathbb{Q}, +)$  es un grupo abeliano;  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  es también un grupo abeliano y el producto es distributivo respecto de la suma. Está claro que  $\mathbb{Q} \neq \emptyset$ .

**Ejercicio:** ¿Es  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  un cuerpo? ¿Por qué?

**Ejercicio:** Razona por qué, en las condiciones para tener un cuerpo  $(X, \perp, \otimes)$ , se ha pedido que sea  $(X \setminus \{e\}, \otimes)$  un grupo abeliano, siendo  $e$  el elemento neutro respecto de la operación  $\perp$ , en lugar de que lo sea  $(X, \otimes)$ .



Este ejercicio lo dejaríamos para el día siguiente, y lo resolveríamos utilizando “el método Delfos” y “el arte de relacionar”.

Aplicando las técnicas de Metodología Creativa “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas” y “la técnica de escenarios” decimos a los alumnos: ¿para qué puede servir haber obtenido todas estas estructuras algebraicas?

Queremos aplicar después la técnica “ideogramación” para organizar, de forma lógica, todas las estructuras obtenidas. Para ello proponemos el siguiente

**Ejercicio:** Haz un esquema para organizar las posibles estructuras que puede tener un conjunto con dos leyes de composición interna.

Por si no se les ocurre nada, les damos una posible solución. Dada la terna  $(A, *, o)$  (denotamos por  $e$  al elemento neutro respecto de la operación  $*$ , en caso de que exista), podemos representarlo mediante el siguiente “poligrama relacional de síntesis”:

| $(A, *) \backslash (A \setminus \{e\}, o)$ | semigrupo  | grupo abeliano |
|--------------------------------------------|------------|----------------|
| semigrupo conmutativo                      | semianillo | semicuerpo     |
| grupo abeliano                             | anillo     | cuerpo         |

**Figura 12:** Poligrama relacional de síntesis de las posibles estructuras de un conjunto con dos leyes de composición interna.

siempre que se verifique la propiedad distributiva de la operación  $o$  respecto de  $*$ .

**Definición:** Dado un cuerpo  $(X, +, \otimes)$  y dado un conjunto  $Y \subset X$ , decimos que  $(Y, +, \otimes)$  es un **subcuerpo** de  $(X, +, \otimes)$  si  $(Y, +, \otimes)$  es también un cuerpo.

**Ejercicio:** Encuentra un subcuerpo de alguno de los cuerpos vistos anteriormente.

**Observación:** El ejercicio anterior tiene sentido porque todo cuerpo contiene un subcuerpo de la forma  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  o de la forma  $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  con  $p$  primo.

La demostración de esta proposición no la vamos a hacer por no extendernos demasiado; puede verse en Fraleigh (1987: 262 y 263).

**Definición:** Todo cuerpo contiene un subcuerpo isomorfo a  $\mathbb{Q}$  (si tiene característica cero) o a  $\mathbb{Z}_p$  (si es de característica  $p$ , con  $p$  primo). A estos cuerpos “más pequeños”:  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Z}_p$ , se les da el nombre de **cuerpos primos**.

Esta definición puede encontrarse en Fraleigh (1987: 263).

Ya conocemos las distintas estructuras algebraicas que puede tener un conjunto con una o dos leyes de composición interna; para utilizar “la técnica de escenarios” le podríamos plantear a los alumnos: ¿en el futuro podríamos tener otra estructura “más rica” —con más propiedades— que las que tenemos hasta ahora? Indica las propiedades que creas que podría tener.

#### 2.4.18. Ley de composición externa

Para pasar a definir lo que es un semimódulo necesitamos previamente introducir la noción de ley de composición externa. Antes, empezamos preguntando a los alumnos: ¿conoces alguna operación que no se realice entre elementos del mismo conjunto? ¿Has realizado alguna operación con elementos de dos conjuntos distintos y cuyo resultado esté en uno de esos dos conjuntos? Si es así, di cuáles son dichos conjuntos e indica cómo operabas en ellos.

Para responder todas estas cuestiones vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, que dará lugar a un “torbellino de ideas”, y “el arte de relacionar”. Posteriormente, cuando pongamos el ejemplo para que se comprenda mejor este concepto, aplicaremos “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “el entorno” al buscar entre las operaciones que se hayan realizado alguna que tenga estas características.

Seguro que has hecho operaciones con elementos de dos conjuntos. Por ejemplo, has multiplicado un vector por un número real y el resultado era un vector. Este es un ejemplo de ley de composición externa.

**Definición:** Dados dos conjuntos  $S \neq \emptyset$  y  $X \neq \emptyset$ , una **ley de composición externa** en  $S$  por elementos de  $X$  es una aplicación

$$\begin{aligned} f: X \times S &\rightarrow S \\ (x, a) &\rightarrow x \circ a \end{aligned}$$

que hace corresponder a cada par  $(x,a) \in X \times S$  otro elemento  $x \circ a \in S$ . Por operar  $X$  por la izquierda de  $S$ , se habla de **ley de composición externa por la izquierda** de  $S$ . Si hubiese sido

$$f: S \times X \rightarrow S$$

$$(a,x) \rightarrow a \circ x$$

que hace corresponder a cada par  $(a,x) \in S \times X$  otro elemento  $a \circ x \in S$ , se hablaría de **ley de composición externa por la derecha** de  $S$ .

Esta definición puede verse en Queysanne (1974: 143). Otros autores, como Ziglon (1976: 10), no distinguen ley de composición externa por la izquierda y ley de composición externa por la derecha y hablan simplemente de ley de composición externa. Creemos que pueda ser debido a que la definición es análoga, sólo es cuestión de notación. Cuando exijamos que se verifiquen una serie de propiedades, necesarias para las estructuras que después estudiaremos, tendremos que distinguir entre izquierda y derecha.

**Ejemplo:** Tenemos el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales y el conjunto  $M$  cuyos elementos son conjuntos de monedas y billetes de curso legal, en nuestro caso conjuntos de billetes de 500, 200, 100, 50, 20, 10 y 5 euros y monedas de 1 y 2 euros y de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos de euro. Tenemos la ley de composición externa  $\bullet$  definida como sigue:

$$\bullet: \mathbb{N} \times M \rightarrow M$$

$$(n,m) \rightarrow n \bullet m$$

El resultado de operar el número natural  $n$  con un conjunto de monedas  $m$ , nos da un conjunto de monedas que tendrá  $n$  monedas iguales a cada una de las que tenga  $m$  (o  $n$  veces tantas monedas como tenga  $m$ ), y esto lo representamos por  $n \bullet m$ .

**Ejercicio:** ¿Es una ley de composición externa la siguiente aplicación:

$$\bullet: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(n,a) \rightarrow n \bullet a?$$

**Ejercicio:** Define otra ley de composición externa.

## 2.4.19. Semimódulo

La estructura que vamos a definir ahora va a tener una ley de composición interna y una ley de composición externa. ¿Sabes de alguna estructura que necesite tener estas dos operaciones? Di las que conozcas. La noción de semimódulo generaliza la de semigrupo abeliano. ¿Conoces lo que es un semimódulo? Si lo sabes, di lo que entiendas por tal y pon un ejemplo. ¿Qué nombre recibirá la subestructura correspondiente?

Para responder a estas cuestiones vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, “el entorno” y “la síntesis creativa”. Este es uno de los casos en los que “el arte de relacionar” juega un importante papel ya que vamos a tener un semigrupo unitario y conmutativo, un semianillo unitario y una ley de composición externa, y nos vamos a ver obligados a relacionar todas las operaciones para que la estructura que tengamos no sea un caos, sino algo con sentido.

En este caso vamos a obtener otra nueva estructura algebraica con una ley de composición externa, teniendo a su vez cada uno de los dos conjuntos que intervienen una o dos leyes de composición interna, todo esto relacionado de algún modo. Por ser más complicada esta estructura que las que hemos visto hasta ahora, no adelantamos ningún ejemplo, sino que lo vamos a dejar para verlo después de dar la definición.

**Definición:** Si  $(S,*)$  es un semigrupo unitario y conmutativo, con elemento neutro  $e$ , y tenemos un semianillo unitario  $(X, \perp, \otimes)$ , cuyo elemento neutro respecto de  $\otimes$  va a ser denotado por  $e'$ , y una ley de composición externa en  $S$  por elementos de  $X$ :

$$\begin{aligned} \alpha: X \times S &\rightarrow S \\ (x, s) &\mapsto xos \end{aligned}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1) Pseudodistributiva de la ley de composición externa respecto de la ley de composición interna del semigrupo:

$$\forall x \in X \quad \forall s, t \in S \quad xos(st) = (xos)s * (xot).$$

2) Pseudodistributiva de la ley de composición externa respecto de la primera ley de composición interna del semianillo

$$\forall x, y \in X \quad \forall s \in S \quad (x \perp y)os = (xos) * (yos).$$

3) Pseudoasociativa:

$$\forall x, y \in X \quad \forall s \in S \quad xos(yos) = (x \otimes y)os.$$

4) Elemento neutro de la ley de composición externa

$$\forall s \in S \quad e'os = s,$$

decimos que la cuaterna  $(X, S, *, o)$  es un **semimódulo por la izquierda**, o que  $(S, *, o)$  es un **X-semimódulo por la izquierda**, o simplemente que  $S$  es un X-semimódulo por la izquierda.

Si el semianillo operase por la derecha hablaríamos de **semimódulo por la derecha**.

Podríamos plantearle a los alumnos la pregunta: ¿todo semimódulo por la izquierda puede ser considerado como un semimódulo por la derecha? Para resolverla tendríamos que volver a utilizar la técnica “el arte de relacionar” y “solución de problemas”.

**Observación:** Si el semianillo no es conmutativo, es importante distinguir X-semimódulo por la izquierda de X-semimódulo por la derecha, ya que en el X-semimódulo por la izquierda tendremos los resultados de la ley de composición externa de la forma  $xos$ , y si se define  $sox:=xos$ , para la 3ª propiedad tendríamos:

$$\forall x,y \in X \quad \forall s \in S \quad xo(yos) = (x \otimes y)os$$

y con el X-semimódulo por la derecha tendríamos:

$$\forall x,y \in X \quad \forall s \in S \quad (sox)oy = (xos)oy = yo(xos) = (y \otimes x)os = so(y \otimes x)$$

que no verifica la 3ª propiedad y, por tanto, no sería un X-semimódulo por la derecha.

Cuando el semianillo sea conmutativo, como en los casos que nos ocuparán, la diferencia entre X-semimódulo por la izquierda y X-semimódulo por la derecha es meramente de notación. Por ello se hablará simplemente de **X-semimódulo o semimódulo**.

La definición análoga puede verse, por ejemplo, en Golan (1992: 138).

En los ejemplos que vamos a ver a continuación vamos a utilizar “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

### Ejemplos:

1. Todo semigrupo unitario y conmutativo  $(S,*)$  puede ser considerado como un  $\mathbb{N}$ -semimódulo, siendo la operación de un número natural  $n$  por un elemento  $s$  de  $S$  definida de la forma:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \forall s \in S \quad nos = s * s * \dots^{(n)} \dots * s, \quad 0os = 0_S.$$

Demostración: Puede que el alumno se forme lío con las operaciones que tenemos; para evitarlo vamos destacando en cada punto en que aplicamos la definición de semimódulo, las operaciones que en ese momento intervienen y por qué. La ley de composición externa verifica las siguientes propiedades:

$$i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall s,t \in S \quad no(st) = (nos) * (not).$$

Ya que si  $n=0$  es inmediato. Si  $n \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} no(s \star t) &= (s \star t) \star (s \star t) \star \dots (n \dots \star (s \star t)) = \\ &= (s \star s \star \dots (n \dots \star s)) \star (t \star t \star \dots (n \dots \star t)) = (nos) \star (not) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la definición de la ley de composición externa y las propiedades conmutativa y asociativa de la ley de composición interna en  $S$ .

$$\text{ii) } \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \forall s \in S \quad (n+m)os = (nos) \star (mos).$$

En efecto, si  $n=0$  o  $m=0$ , es inmediato, en caso contrario

$$\begin{aligned} (n+m)os &= s \star s \star \dots (n+m \dots \star s) = \\ &= (s \star s \star \dots (n \dots \star s)) \star (s \star s \star \dots (m \dots \star s)) = (nos) \star (mos). \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \forall s \in S \quad no(mos) = (n \bullet m)os.$$

Ya que si  $n=0$  o  $m=0$ , es inmediato, en caso contrario

$$\begin{aligned} no(mos) &= (mos) \star (mos) \star \dots (n \dots \star (mos)) = \\ &= (s \star s \star \dots (m \dots \star s)) \star (s \star s \star \dots (m \dots \star s)) \star \dots (n \dots \star \\ &\star (s \star s \star \dots (m \dots \star s)) = s \star s \star \dots (n \bullet m \dots \star s) = (n \bullet m)os. \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \forall s \in S \quad 1os = s.$$

Es inmediata ya que, según la definición de la ley de composición externa, “ $1os$ ” sería el resultado de operar “ $s$ ” con él mismo una vez, luego sería igual a “ $s$ ”.

**Observación:** Como todo semigrupo conmutativo puede verse como un  $\mathbb{N}$ -semimódulo por el procedimiento anterior, la teoría de semigrupos unitarios y conmutativos queda contenida en la de semimódulos.

2. Un caso particular del ejemplo anterior es  $(\mathbb{N}, +)$ , que puede verse como un  $\mathbb{N}$ -semimódulo. La ley de composición externa será el producto de números naturales, y por tanto es una ley de composición interna.

3. Todo semianillo unitario  $(S, +, \bullet)$ , con elemento neutro respecto de  $+$ , se puede considerar como semimódulo sobre sí mismo, siendo la ley de composición externa en este caso

$$\begin{aligned} \bullet: S \times S &\rightarrow S \\ (s, t) &\rightarrow s \bullet t. \end{aligned}$$

**Observación:** Todo semimódulo puede verse como  $\mathbb{N}$ -semimódulo, al ser un semigrupo unitario y conmutativo con la ley de composición interna.

**Ejercicio:** En  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \bullet)$  definida la adición de la forma:

$$\forall (a,b); (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

y la ley de composición externa por elementos de  $\mathbb{N}$ , de la forma:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \bullet (a,b) = (n \bullet a, n \bullet b).$$

Prueba que  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  es un  $\mathbb{N}$ -semimódulo.

Para resolver este ejercicio y el que viene después podemos utilizar las técnicas “el arte de relacionar” y “solución de problemas”.

**Ejercicio:** Encuentra algún ejemplo nuevo de semimódulo e indica cuáles son las leyes de composición interna y externa.

Para resolver este ejercicio puede utilizarse además la técnica “el entorno”.

**Definición:** Dado un semimódulo  $(X, S, *, o)$  y dado un conjunto  $T \subset S$ , decimos que  $(X, T, *, o)$  es un **subsemimódulo** de  $(X, S, *, o)$ , si  $(X, T, *, o)$  es también un semimódulo.

**Ejercicio:** Encuentra un subsemimódulo de alguno de los semimódulos vistos anteriormente.

## 2.5. Módulo

La noción de módulo generaliza la de grupo abeliano y es más rica que la de semimódulo. Le preguntaríamos a los alumnos: ¿podríamos completar de alguna forma la estructura de semimódulo?; ¿cómo? Indica cuándo obtendríamos un módulo y pon un ejemplo. ¿En qué se parece la idea de módulo a la de semimódulo? ¿En qué se diferencia? ¿Cuál sería la subestructura correspondiente?

Para dar respuesta a estas cuestiones vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Vamos a intentar obtener una estructura algebraica “más completa”, de forma análoga a como lo conseguíamos anteriormente cuando pasábamos de semianillo a anillo y de éste a cuerpo. En este caso, si queremos pasar de semimódulo a módulo, habremos de tener



otras estructuras. En lugar de tener un semigrupo unitario y conmutativo, necesitaremos un grupo abeliano; en lugar de un semianillo unitario, para avanzar un poco vamos a exigirle que sea un anillo unitario; todas las demás condiciones van a ser prácticamente análogas a las que teníamos en el semimódulo.

**Definición:** Consideremos un grupo abeliano  $(M, *)$ , cuyo elemento neutro llamamos  $e$ , y una ley de composición externa en  $M$  por elementos de un anillo unitario  $(A, +, \otimes)$  con elemento neutro  $e'$  respecto de  $\otimes$ :

$$\begin{aligned} o: A \times M &\rightarrow M \\ (a, m) &\rightarrow a \circ m \end{aligned}$$

que verifique las siguientes propiedades:

1) Pseudodistributiva de la ley de composición externa respecto de la ley de composición interna del grupo:

$$\forall a \in A \quad \forall m, n \in M \quad a \circ (m * n) = (a \circ m) * (a \circ n).$$

2) Pseudodistributiva de la ley de composición externa respecto de la primera ley de composición interna del anillo

$$\forall a, b \in A \quad \forall m \in M \quad (a + b) \circ m = (a \circ m) + (b \circ m).$$

3) Pseudoasociativa:

$$\forall a, b \in A \quad \forall m \in M \quad a \circ (b \circ m) = (a \otimes b) \circ m.$$

4) Elemento neutro de la ley de composición externa

$$\forall m \in M \quad e' \circ m = m.$$

En este caso decimos que  $(A, M, *, \circ)$  es un **módulo por la izquierda** sobre el anillo  $A$ , o también que  $(M, *, \circ)$  es un **A-módulo por la izquierda**, o simplemente que  $M$  es un **A-módulo por la izquierda**.

**Observación:** Todo A-módulo por la izquierda es un A-semimódulo por la izquierda.

Si el anillo operara por la derecha hablaríamos de **A-módulo por la derecha**.

Cuando el anillo sea conmutativo, como en los casos que nos ocuparán, la diferencia entre A-módulo por la izquierda y A-módulo por la derecha es meramente de notación. Por ello se hablará simplemente de **módulo**.

Esta definición puede verse, por ejemplo, en Cohn (1974: 226).

Volveríamos a plantear a los alumnos una pregunta análoga a la que les planteamos cuando hablábamos de semimódulos: ¿todo módulo por la izquierda puede ser considerado como un módulo por la derecha? Tendríamos que volver a utilizar la técnica “el arte de relacionar”.

La observación que hemos hecho en semimódulos respecto de semimódulos por la izquierda y semimódulos por la derecha nos sirve para el caso de módulos y no la vamos a repetir.

**Ejercicio:** Prueba que en el caso de ser el anillo  $A$  conmutativo, si tenemos un  $A$ -módulo por la izquierda, lo es también por la derecha.

**Ejercicio:** ¿Podrías encontrar algún ejemplo de módulo? A continuación tienes algunos que pueden sugerirte otros. Si es así, indícalos.

En este ejercicio podemos utilizar la técnica “el entorno” y en los ejemplos que vienen a continuación “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

### Ejemplos:

1. Todo grupo abeliano  $(G, *)$ , puede ser considerado como un  $\mathbb{Z}$ -módulo si definimos la ley de composición externa de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{Z} \times G &\rightarrow G \\ (z, x) &\rightarrow z \circ x, \text{ siendo} \\ z \circ x &= x * x * \dots * x \quad (z \text{ veces}) & \text{si } z > 0 \\ z \circ x &= 0_G & \text{si } z = 0 \\ z \circ x &= (-x) * (-x) * \dots * (-x) \quad (-z \text{ veces}) & \text{si } z < 0. \end{aligned}$$

La demostración es análoga a la que hemos hecho anteriormente para probar que todo semigrupo unitario y conmutativo puede ser dotado de estructura de  $\mathbb{N}$ -semimódulo. La dejamos como ejercicio.

**Observación:** Recíprocamente, todo  $\mathbb{Z}$ -módulo es un grupo abeliano ya que para ser  $\mathbb{Z}$ -módulo tiene antes que ser un grupo abeliano con la ley de composición interna.

Así, la teoría de grupos abelianos queda incluida en la de módulos.

2. El conjunto de los números enteros, que es uno de los ejemplos más sencillos de anillo unitario y conmutativo, es también un  $\mathbb{Z}$ -módulo,  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, +, \cdot)$ , considerando la multiplicación como ley de composición externa. Éste es un caso particular del ejemplo anterior.

3. Todo anillo unitario puede considerarse como un módulo sobre sí mismo.

**Ejercicio:** En el conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  se define la adición de la forma:

$$\forall (a,b); (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

y la ley de composición externa por elementos de  $\mathbb{Z}$ , de la forma:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad z \bullet (a,b) = (z \bullet a, z \bullet b).$$

Prueba que  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \bullet)$  es un módulo.

Este ejercicio lo vamos a resolver aplicando la técnica “solución de problemas”.

Para que tenga sentido el ejercicio que viene a continuación preguntamos a los alumnos: ¿todo grupo puede ser considerado también como un  $\mathbb{Z}$ -módulo? Si es así, razonadlo y si no, buscad un contraejemplo. En todo esto van a utilizar las técnicas “el arte de relacionar” y “el entorno”.

**Ejemplo:** Vamos a tomar un grupo no conmutativo: el grupo de las isometrías del triángulo equilátero con la composición como ley de composición interna, es decir, el grupo formado por todos los movimientos que podemos hacer en el plano que dejen invariante al triángulo, que son las rotaciones de  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $240^\circ$  y las simetrías axiales, con ejes las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto. Este grupo coincide con el grupo de las permutaciones — aplicaciones biyectivas de un conjunto en él mismo — del conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ , se le suele llamar  $S_3$ , y sus elementos son:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}; \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}; \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}; \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}; \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}; \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}.$$

Vamos a ver que  $(S_3, o)$  no es un  $\mathbb{Z}$ -módulo con la ley de composición externa definida en el ejemplo 1. Si lo fuese, la siguiente correspondencia sería una ley de composición externa

$$\mathbb{Z} \times S_3 \rightarrow S_3$$

$$(z, s) \rightarrow zs \text{ siendo:}$$

$$zs = so so \dots (z \dots os = s^z \text{ si } z > 0;$$

$$zs = \rho_0 \text{ si } z = 0 \text{ y}$$

$$zs = s^{-1} o s^{-1} o \dots (-z \dots os^{-1} = s^{-z} \text{ si } z < 0.$$

Y debería verificar la pseudodistributiva de la ley de composición externa respecto de la composición de permutaciones, y por tanto tendría que ser

$$2(\rho_1 \mu_1) = (2\rho_1)(2\mu_1), \text{ pero}$$

$$2(\rho_1 \mu_1) = (\rho_1 \mu_1)^2 = (\rho_1 \mu_1)(\rho_1 \mu_1) = \mu_3^2 = \rho_0, \text{ mientras que}$$

$$(2\rho_1)(2\mu_1) = \rho_1^2 \mu_1^2 = \rho_1^2 \rho_0 = \rho_1^2 = \rho_2.$$

Otra forma de verlo sería probando que el grupo  $(S_3, o)$  no es abeliano, ya que tenemos la proposición que viene a continuación, a la que podríamos llegar utilizando la técnica “síntesis creativa”.

Esto no significa que no podamos dotar a  $S_3$  de estructura de  $\mathbb{Z}$ -módulo. Por ejemplo, definiendo la ley de composición externa como:

$$\begin{aligned} \bullet: \mathbb{Z} \times S_3 &\rightarrow S_3 \\ (z, s) &\rightarrow z \bullet s = \rho_0 \end{aligned}$$

podemos probar que  $(\mathbb{Z}, S_3, +, \bullet)$  es un módulo. A este  $\mathbb{Z}$ -módulo le vamos a llamar trivial.

**Definición:** Sea  $(A, M, *, o)$  un módulo, vamos a decir que es **trivial** si, y sólo si,

$$\forall a \in A \quad \forall m \in M \quad a \circ m = e_M,$$

siendo  $e_M \in M$  el elemento neutro respecto de la operación  $*$ .

**Proposición:** Todo grupo  $(G, +)$  que sea  $\mathbb{Z}$ -módulo no trivial, es, necesariamente, abeliano.

**Demostración:** Por ser grupo, el opuesto de la suma es igual a la suma de los opuestos pero en orden inverso y el opuesto del opuesto de un elemento es ese elemento

$$\forall a, b \in G \quad -(a + (-b)) = -(-b) + (-a) = b + (-a).$$

Por otro lado, como  $G$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo, por la pseudodistributiva

$$\forall a, b \in G \quad -(a + (-b)) = (-a) + (-(-b)) = (-a) + b$$

Así, tendrá que ser

$$b + (-a) = (-a) + b;$$

sumando  $a$  por la izquierda y por la derecha en ambos miembros de la igualdad, tenemos que

$$a + b + (-a) + a = a + (-a) + b + a;$$

por ser  $-a$  el opuesto de  $a$

$$a + b + 0 = 0 + b + a, \text{ lo que nos dice que}$$

$$\forall a, b \in G \quad a + b = b + a,$$

luego un grupo que sea  $\mathbb{Z}$ -módulo tiene que ser abeliano.

**Observación:** La relación entre módulos y semimódulos es inmediata ya que todo  $A$ -módulo es un  $A$ -semimódulo. Es más, como todo módulo es un grupo abeliano, en particular todo módulo es un  $\mathbb{N}$ -semimódulo y un  $\mathbb{Z}$ -semimódulo.

**Definición:** Dado un módulo  $(A, M, *, o)$  y dado un conjunto  $P \subset M$ , decimos que  $(A, P, *, o)$  es un **submódulo** de  $(A, M, *, o)$  si  $(A, P, *, o)$  es también un módulo.

**Ejercicio:** Encuentra un submódulo de alguno de los módulos vistos anteriormente.

Una vez que están bien informados los alumnos acerca del concepto de módulo podríamos aplicar la técnica “el circept” para que, al tener que seguir los pasos indicados en la técnica, en el Capítulo I: “buscarle semejanzas y diferencias” al concepto de semimódulo, “seleccionar las mejores” y “realizar un estudio minucioso de las semejanzas y diferencias”, se les quede aún mejor la idea de lo que es un módulo.

## 2.6. Espacio vectorial

La estructura que vamos a ver ahora es “la más completa”, en cierto sentido, que puede tener un conjunto con una ley de composición interna y otra ley de composición externa. Para empezar, podemos preguntarle al alumno-profesor: ¿podrías exigirle algo más a las condiciones que teníamos para módulo con el fin de obtener otra estructura? Si es así, di lo que creas necesario. ¿Sabes lo que es un espacio vectorial?; ¿qué es? ¿Has trabajado con algún espacio vectorial?; ¿con cuál? ¿Todo espacio vectorial por la izquierda lo es también por la derecha?; ¿por qué? ¿Cuál será la subestructura correspondiente?

Utilizamos las siguientes técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Si pensamos en la estructura de módulo, podemos imaginar la forma de completar dicha estructura para tener la de espacio vectorial. Sería lógico seguir teniendo un grupo abeliano igual que antes ya que, en este caso, no podemos pensar en otra estructura “más completa”. Pero en lugar de tener un anillo, podemos exigirle que sea un cuerpo sobre el que establezcamos la ley de composición externa; el resto de las condiciones van a ser análogas. Como puede verse ya no es posible exigirle más.

**Definición:** En el caso particular en que  $(K, +, \otimes)$  sea un cuerpo, si  $M$  es un  $K$ -módulo diremos que  $(K, M, *, o)$  es un **espacio vectorial sobre el cuerpo  $K$** , o que  $M$  es un **espacio vectorial sobre  $K$** , o simplemente que  $M$  es un  **$K$ -espacio vectorial**.

Aquí no hay que hablar de espacio vectorial por la izquierda o por la derecha, según el cuerpo esté operando por uno u otro lado, por ser la operación  $\otimes$  conmutativa.

A los elementos de  $M$  se les llama **vectores** y a los elementos del cuerpo  $K$  **escalares**.

### Ejemplos:

1. El conjunto  $\mathbb{Q}^2 = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{Q}\}$  con la ley de composición interna:

$$\forall (a,b); (c,d) \in \mathbb{Q}^2 \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

y la ley de composición externa por elementos de  $\mathbb{Q}$ , de la forma:

$$\forall z \in \mathbb{Q} \quad \forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \quad z \cdot (a,b) = (z \cdot a, z \cdot b)$$

es un  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.

2. Si  $K$  es un cuerpo,  $K^n$  es el conjunto de  $n$ -uplas de elementos de  $K$  y definimos la suma de  $n$ -uplas y el producto de un elemento de  $K$  por una  $n$ -upla por componentes (de forma análoga a como lo hacemos en el ejemplo 1 con los pares), entonces  $K^n$  es un espacio vectorial sobre  $K$ .

**Ejercicio:** Sea  $K$  un cuerpo y  $M_2(K)$  el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 con entradas en  $K$ . Prueba que  $M_2(K)$  es un  $K$ -espacio vectorial.

**Ejercicio:** ¿Conoces algún otro espacio vectorial? Indícalo.

**Definición:** Dado un espacio vectorial  $(K,V,*,o)$  y dado un conjunto  $U \subset V$ , decimos que  $(K,U,*,o)$  es un **subespacio vectorial** de  $(K,V,*,o)$  si  $(K,U,*,o)$  es también un espacio vectorial.

**Ejercicio:** Encuentra un subespacio vectorial de alguno de los espacios vectoriales vistos anteriormente.

No hemos ido indicando, en todos los casos, algunas técnicas que, por supuesto, hemos ido empleando, una de ellas es “la síntesis creativa”, que hemos utilizado cuando hemos dado las distintas definiciones o hemos concretado ciertas propiedades. Otra es “la sinapsis”, ya que el alumno tiene que trabajar a buen ritmo para conseguir asimilar todas las estructuras, poner ejemplos de cada una de ellas y razonar, en los distintos casos, si algo que le damos verifica las propiedades necesarias para poder afirmar que tiene o no una determinada estructura.

Tenemos que decirle que aproveche bien el sueño, además de para descansar, por si le surge alguna idea nueva que pueda servirle para trabajar bien el tema; en este caso estaría utilizando la técnica “crear durmiendo”. También iremos inculcándole que observe si, con los

ejercicios que le dejamos pendientes, ha descubierto por azar algo distinto de lo que pretendía y que sea valioso, empleando “la serendipity”.

## 2.7. Magnitudes y propiedades

Seguro que el alumno conoce varias magnitudes, pero nos gustaría que, antes de ver nuestra definición, intentara decirnos qué es una magnitud, cuáles son sus elementos y cómo definiría las operaciones que realiza en ella, si es que considera que realiza alguna.

Para trabajar todas estas cuestiones vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de relacionar”, “el método Delfos”, pues dejaremos pendiente para el día siguiente estas cuestiones para que se lo piensen; después, cuando trabajemos bien este concepto, entre todos haremos “un circept”.

### 2.7.1. Relación de equivalencia

Las relaciones de equivalencia son de sumo interés en la vida ordinaria —ya que todo concepto abstracto procede de una relación de equivalencia— y, por supuesto, en cualquier parcela de la Matemática, pues aquí los conceptos que trabajamos son, en general, abstractos, y resultan de establecer una relación de equivalencia —de aquí su dificultad.

Empezaríamos preguntando al alumno: ¿sabes qué es una relación binaria entre dos conjuntos? Exprésalo. ¿Qué necesitamos para tener una relación binaria en un conjunto? ¿Qué propiedades podría tener una relación binaria definida en un conjunto?; ¿cuáles de esas son necesarias para que la relación sea de equivalencia? ¿A qué llamamos conjunto cociente? ¿Conoces algún caso en que se puedan definir una o varias operaciones sobre el conjunto cociente?

Todas estas cuestiones las vamos a trabajar con las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, lo que dará lugar a un “torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su dos aspectos: “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo familiar extraño”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Todos hemos utilizado de algún modo las relaciones binarias, por ejemplo, cuando tenemos dos conjuntos y establecemos alguna conexión entre los elementos de ambos, cuando establecemos algunas comparaciones entre los elementos de un mismo conjunto... Si



consideramos, por ejemplo, el conjunto de los alumnos de la clase y el conjunto de frutas que existen en el mercado, podemos establecer la relación: “x ha probado la fruta y”. Cada niño se relacionará con cada una de las frutas que haya probado. También, cuando decimos, por ejemplo, en el conjunto de los alumnos de una clase, que un niño es más alto que otro, estamos estableciendo una relación binaria.

**Definición:** Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una **relación binaria de A en B** es cualquier subconjunto del producto cartesiano de  $A \times B$ .

**Ejemplos:** Como  $\emptyset \subset A \times B$ , podemos afirmar que  $\emptyset$  es una relación binaria de A en B. También es una relación binaria de A en B todo  $A \times B$ . A estas dos relaciones las vamos a llamar **relaciones binarias triviales**.

**Ejemplo:** Sean los conjuntos  $A=\{1,3,5\}$  y  $B=\{2,4,6\}$ . El conjunto  $G=\{(1,2), (1,4), (5,6)\}$  es una relación binaria de A en B.

**Ejercicio:** Busca alguna otra relación binaria entre los dos conjuntos A y B del ejemplo anterior. ¿Podrías dar algún ejemplo más?; ¿cuántos?

**Ejercicio:** Si el conjunto A tiene m elementos y el B tiene n elementos, ¿cuántas relaciones binarias de A en B existen? (Ten en cuenta que si un conjunto tiene n elementos, tiene  $2^n$  subconjuntos.)

**Definición:** Dado un conjunto  $A \neq \emptyset$ , una **relación binaria en A** es un subconjunto del producto cartesiano de  $A \times A$ .

**Ejemplos:** Como  $\emptyset \subset A \times A$  y  $A \times A \subset A \times A$ , podemos afirmar que  $\emptyset$  y  $A \times A$  son relaciones binarias en el conjunto A, que serían las relaciones binarias triviales.

**Ejemplo:** Sea  $A=\{x,y,z,t\}$ . Una relación binaria en A podría ser, por ejemplo,  $G=\{(x,x), (x,y), (z,y)\}$ .

**Ejercicio:** Da otra relación binaria en el conjunto A del ejemplo anterior. ¿Cuántas relaciones binarias distintas podrías establecer en A?

**Ejercicio:** Si el conjunto A tiene n elementos, determina el número de relaciones binarias que podrías considerar sobre el conjunto A.

Vamos a estudiar ahora un tipo de relación que es de suma importancia para llegar a obtener conceptos abstractos: son las relaciones de equivalencia, que dan lugar a todas las clasificaciones conocidas.

**Definición:** Una **relación**  $R$  definida en un conjunto  $A$ , no vacío, decimos que es **de equivalencia** si verifica las propiedades:

- a) Reflexiva:  $\forall a \in A \ aRa$ .
- b) Simétrica:  $\forall a, b \in A \ aRb \Rightarrow bRa$ .
- c) Transitiva:  $\forall a, b, c \in A \ aRb \text{ y } bRc \Rightarrow aRc$ .

Para un elemento  $a \in A$  definimos su **clase de equivalencia** respecto de la relación  $R$ , y la denotamos por  $[a]$ , o  $cl(a)$ , o  $\dot{a}$  como el subconjunto de  $A$  formado por todos los elementos que se relacionan con  $a$ , es decir

$$[a] = \{x \in A / xRa\}.$$

Al conjunto cuyos elementos son cada una de las clases de equivalencia lo llamamos **conjunto cociente**, y lo denotamos por  $A/R$ , esto es,

$$A/R = \{[a] / a \in A\}.$$

Estas definiciones pueden verse, por ejemplo, en Jacobson (1985: 11 y 12).

En los ejemplos y ejercicios que vienen a continuación vamos a utilizar las técnicas: “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinéctica”, “crear durmiendo” y “la síntesis creativa”.

**Ejemplo:** Supongamos que tenemos un camión lleno de frutas distintas. Si queremos comercializarlas, tendremos que clasificarlas, esto es establecer una relación de equivalencia. Decimos que dos frutas se relacionan si, y sólo si, son de la misma clase y en este caso las metemos en la misma caja. De esta manera separamos las peras, las manzanas, las ciruelas, las cerezas, los melocotones, los melones, las sandías, etc., formando subconjuntos distintos —las cajas—, que serían las clases de equivalencia. El conjunto cociente tendría por elementos cada uno de estos subconjuntos —cajas.

Los conceptos de pera o ciruela, por ejemplo, son conceptos abstractos, resultado de haber establecido una relación de equivalencia.

**Ejemplo:** Si tenemos un conjunto de lápices de distintos colores y tamaños, podemos pensar en dibujar con ellos; para eso nos vendría bien organizarlos según el color, esto no es más que establecer la relación diciendo que dos lápices se relacionan si tienen el mismo color. Esta relación es de equivalencia, y las clases de equivalencia serían cada uno de los subconjuntos formados por los lápices que tengan el mismo color. También podríamos ordenarlos por su longitud; para ello, diremos que dos lápices se relacionan si al poner uno al lado del otro su altura

coincide. Sobre el conjunto de los lápices hemos establecido dos relaciones de equivalencia, pero podríamos haber establecido más.

**Ejercicio:** Mediante la técnica “el entorno” busca algún concepto que manejes habitualmente y que tenga que ser definido mediante una relación de equivalencia.

**Ejercicio:** El conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ , también se puede obtener estableciendo una relación de equivalencia. En un conjunto  $E$ , cuyos elementos son conjuntos, definimos la **relación de coordinabilidad** que nos dice:

$\forall A, B \in E \quad A R B \iff \exists f: A \rightarrow B$  que es una aplicación biyectiva.

Prueba que esta relación es de equivalencia y razona cuáles serían las clases de equivalencia. El conjunto cociente es el conjunto de los **números naturales**.

**Ejercicio:** El conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ , lo obtenemos a partir del conjunto de los números naturales, estableciendo en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  la siguiente relación

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad (a,b) R (c,d) \iff a+d=b+c.$$

a) Prueba que esta relación es de equivalencia y representa en el plano algunos pares que se relacionen.

b) ¿Cuál es la clase de equivalencia que define el número entero +1? ¿Y la del -1? Razona que el conjunto formado por todas las clases de equivalencia sería el conjunto de los **números enteros**.

c) Indica algunos pares que formen las clases de los números enteros +5 y -9. ¿Cómo tendría que ser una clase de equivalencia para que el número entero fuese positivo? ¿Y para que fuese negativo?

**Ejercicio:** De forma análoga a como hemos obtenido  $\mathbb{Z}$  podemos obtener el conjunto de los números racionales,  $\mathbb{Q}$ ; para lo cuál establecemos en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , siendo  $\mathbb{Z}^*$  el conjunto de los números enteros no nulos, la siguiente relación:

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad (a,b) R (c,d) \iff a \cdot d = b \cdot c.$$

a) Prueba que esta relación es de equivalencia.

b) ¿Serías capaz de decirnos que pares definirían el número racional  $\frac{-3}{4}$ ? Pon otro número racional e indica los pares que forman esa clase de equivalencia. Razona cuál sería la clase de equivalencia en la que estuviera el par  $(a,b)$ .

Llamamos **fracción** a los pares  $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  y **número racional** a la clase de equivalencia. El conjunto cociente es, por tanto, el conjunto de los números racionales.

**Ejercicio:** En el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ , definimos la siguiente relación:

$\forall a,b \in \mathbb{N} \quad aRb \iff a \text{ y } b \text{ dan el mismo resto al dividirlos por } 5.$

Prueba que esta relación es de equivalencia. ¿Cuáles son las clases de equivalencia? ¿y el conjunto cociente? Al conjunto cociente, en este caso, le vamos a llamar  $\mathbb{N}_5$ .

**Ejercicio:** Igual que obtenemos  $\mathbb{N}_5$  podríamos obtener cualquier  $\mathbb{N}_n$  con  $n > 1$  diciendo que dos elementos se relacionan si dan el mismo resto al dividirlos por  $n$ . Intenta determinar, por ejemplo,  $\mathbb{N}_6$  y, en general,  $\mathbb{N}_n$ .

**Ejercicio:** La relación de equivalencia podríamos haberla establecido en  $\mathbb{Z}$  en lugar de en  $\mathbb{N}$ , diciendo que:

$\forall a,b \in \mathbb{Z} \quad aRb \iff a \text{ y } b \text{ dan el mismo resto al dividirlos por } n,$   
o también que:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \quad aRb \iff a-b \in n\mathbb{Z},$$

siendo  $n\mathbb{Z}$  el conjunto formado por todos los múltiplos enteros de  $n$ , es decir  $n\mathbb{Z} = \{nx / x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n \dots\}$ . Prueba que las dos formas de dar esta relación son equivalentes. Calcula para  $n=6$  las clases de equivalencia y obtén  $\mathbb{Z}_6$ .

**Ejercicio:** ¿Conoces otra relación que sea de equivalencia? Indica alguna.

Preguntamos a los alumnos: ¿podríamos definir algunas operaciones sobre los conjuntos  $\mathbb{N}_n$  con  $n > 1$ ? Toma algún  $\mathbb{N}_n$  e indica cómo definirías dichas operaciones.

Todo ello lo trabajamos con la técnica “solución de problemas”.

El conjunto  $\mathbb{N}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ , al que para facilitar su escritura vamos a llamar simplemente  $\mathbb{N}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , podemos dotarlo de estructura de  $\mathbb{N}$ -semimódulo, definiendo la suma en  $\mathbb{N}_5$  sumando dos representantes de cada una de las clases y viendo en qué clase está el resultado, es decir:

$$\forall [a], [b] \in \mathbb{N}_5 \quad [a] + [b] = [a+b].$$

**Ejercicio:** Prueba que la suma está bien definida, esto es, que

$$\forall [a],[b] \in \mathbb{N}_5 \quad [a]=[a'] \text{ y } [b]=[b'] \Rightarrow [a+b]=[a'+b'].$$

Para sumar dos clases tomamos dos elementos cualesquiera de dichas clases, los sumamos y vemos en qué clase está el resultado. Por ser la suma compatible con la relación de equivalencia, al sumar dos elementos cualesquiera de cada una de las clases siempre nos va a dar un elemento de la misma clase, es por lo que podemos sumar dos clases de la forma que hemos indicado. Así, tenemos la tabla:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Tabla 6: La suma en  $(\mathbb{N}_5, +)$ .

Se puede comprobar fácilmente que es un semigrupo unitario y conmutativo, y por tanto es un  $\mathbb{N}$ -semimódulo.

También podemos definir el producto en  $\mathbb{N}_5$  de forma análoga a como lo hacíamos al definir la suma:

$$\forall [a],[b] \in \mathbb{N}_5 \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

**Ejercicio:** Prueba que esta operación está bien definida, esto es, que

$$\forall [a],[b] \in \mathbb{N}_5 \quad [a]=[a'] \text{ y } [b]=[b'] \Rightarrow [a \cdot b] = [a' \cdot b'].$$

Para multiplicar dos clases tomamos dos elementos cualesquiera de dichas clases, los multiplicamos y vemos en qué clase está el resultado. Como el producto es compatible con la relación de equivalencia, tenemos la tabla:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Tabla 7: El producto en  $(\mathbb{N}_5, \cdot)$ .

Podemos probar sin ninguna dificultad que  $(\mathbb{N}_5, +, \cdot)$  es un cuerpo. Queda como ejercicio.

**Ejercicio:** Comprueba que  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  es un cuerpo. ¿Podrías decirnos otro ejemplo de cuerpo?

**Ejercicio:** Prueba que  $(\mathbb{N}_6, +, \cdot)$  es un anillo. ¿Qué otras propiedades verifica? ¿Es un cuerpo? ¿por qué?

**Ejercicio:** Estudia las propiedades que verifica  $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ . ¿Tiene la misma estructura que  $(\mathbb{N}_6, +, \cdot)$ ?

**Ejercicio:** Demuestra que  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_6, +, \cdot)$  es un semimódulo.

Indicación: define la ley de composición externa multiplicando un número natural  $\lambda$  por un elemento cualquiera de la clase  $[x]$  y determina en qué clase está el resultado, es decir:  $\lambda[x] = [\lambda x]$ .

**Ejemplo:** Vamos a ver que el conjunto  $S$  de los vectores libres sobre una recta real es un espacio vectorial (este ejemplo no pudimos verlo antes por necesitar establecer una relación de equivalencia, concepto que aún no teníamos). Para ello definimos cada uno de los elementos que aparecen.

Un **punto**  $A$  en el plano es un par  $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Una **recta**  $r$  que pasa por los puntos  $A = (a_1, a_2)$  y  $B = (b_1, b_2)$ , siendo  $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ , es el conjunto

$$r = \{(a_1, a_2) + \alpha(b_1 - a_1, b_2 - a_2) / \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Un punto  $(x, y) \in r \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} / (x, y) = (a_1, a_2) + \alpha(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ .

Un punto  $A = (a_1, a_2)$  determina, en una recta que pasa por un punto  $B = (b_1, b_2)$ , dos **semirrectas**. Si  $\alpha \geq 0$  tenemos una de las semirrectas y si  $\alpha \leq 0$  tenemos la otra (Fig. 13), luego serán:

$$\begin{aligned} &\{(a_1, a_2) + \alpha(b_1 - a_1, b_2 - a_2) / \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0\} \\ &\{(a_1, a_2) + \alpha(b_1 - a_1, b_2 - a_2) / \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq 0\}. \end{aligned}$$

Al punto  $A$  se le llama **origen** de las semirrectas.

La **dirección de la recta**  $r$  es el conjunto

$$\{\alpha(b_1 - a_1, b_2 - a_2) / \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Dados dos puntos distintos A y B, sobre una recta, la intersección de la semirrecta de origen A y que contiene a B, con la que tiene origen B y que contiene a A, es el **segmento**  $S_{AB}$  (Fig. 14). Expresado de forma algebraica, el segmento  $S_{AB}$  es:

$$S_{AB} = \{(1-\alpha)A + \alpha B / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

ya que si  $\alpha=0$ ,  $(1-\alpha)A + \alpha B = A$  y para  $\alpha=1$ ,  $(1-\alpha)A + \alpha B = B$  y para los valores de  $\alpha$  entre 0 y 1 vamos obteniendo todos los puntos intermedios.

Si sobre el segmento elegimos un **sentido**, es decir, elegimos como **origen** el de alguna de las semirrectas que lo determinan, y como **extremo** el origen de la otra, tenemos el **segmento orientado o vector fijo** (Fig. 15).

Gráficamente tendríamos:

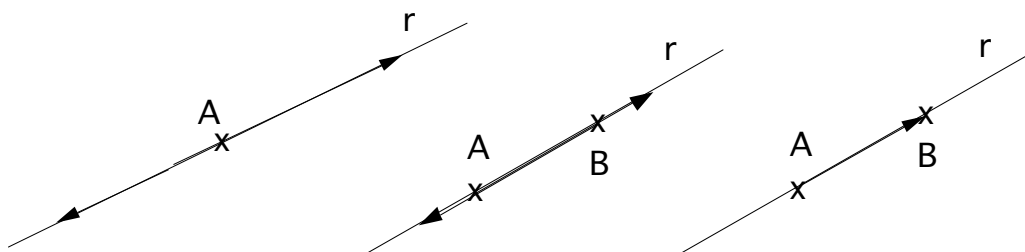


Figura 13: Semirrectas. Figura 14: Segmento. Figura 15: Vector.

Cuando consideramos los puntos del segmento ordenados según el valor de  $\alpha \in [0,1]$  obtenemos el segmento orientado o vector fijo. En este caso tenemos el segmento orientado o vector fijo de **origen** el punto  $A=(a_1, a_2)$  y **extremo** el punto  $B=(b_1, b_2)$ , al que denotamos por  $S_{(A,B)}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$ , siendo  $(b_1-a_1, b_2-a_2)$  las **componentes** del segmento orientado  $S_{(A,B)}$ . Al conjunto de los segmentos orientados o vectores fijos del plano le vamos a llamar SO.

**Observación:** Se puede ver sin dificultad que los conjuntos  $S_{AB}=S_{BA}$ , ya que tienen los mismos elementos. Sin embargo  $S_{(A,B)} \neq S_{(B,A)}$ .

**Ejercicio:** Sobre los segmentos orientados o vectores fijos de una recta establecemos la siguiente relación:

$\forall S_{(A,B)}, S_{(A',B')} \in SO$  con  $A=(a_1, a_2)$ ,  $B=(b_1, b_2)$ ,  $A'=(a'_1, a'_2)$ ,  $B'=(b'_1, b'_2)$ ,

$$S_{(A,B)} R S_{(A',B')} \iff (b_1-a_1, b_2-a_2) = (b'_1-a'_1, b'_2-a'_2),$$

es decir, dos vectores fijos se relacionan si, y sólo si, tienen las mismas componentes. Prueba que esta relación es de equivalencia. A esta relación se le llama **relación de congruencia** y los segmentos orientados o vectores fijos que sean equivalentes diremos que son **congruentes**.



La clase de equivalencia que contiene al elemento  $S_{(A,B)}$  la vamos a denotar por

$$\overline{S_{(A,B)}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \text{ o simplemente por } \vec{AB},$$

ya que todos los vectores fijos congruentes tienen las mismas componentes, que serán las componentes de la clase de equivalencia. Cada clase de equivalencia va a ser un **segmento libre orientado o vector** sobre la recta  $r$ , y al conjunto cociente, es decir, al conjunto de todos los segmentos libres orientados o vectores le vamos a llamar  $S$ .

**Ejemplo:** Sean  $A=(2,3)$  y  $B=(-1,2)$ . La recta que pasa por  $A$  y  $B$  es  $r=\{(2,3)+\alpha(-1-2,2-3)/\alpha\in\mathbb{R}\}=\{(2,3)+\alpha(-3,-1)/\alpha\in\mathbb{R}\}$ , es decir,  $(x,y)\in r \iff (x,y)=(2,3)+\alpha(-3,-1)$ .

Las componentes del vector  $\vec{AB}$  son  $(-3,-1)$ .

Definimos la adición de segmentos libres orientados o vectores:

$\forall \vec{AB}; \vec{A'B'}\in S$  elegimos otro segmento de la misma clase que  $\vec{A'B'}$  con origen en  $B$ , y

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC},$$

es decir, la suma es el segmento libre orientado o vector de origen el origen del primer sumando y de extremo el extremo del segundo. Las componentes de la suma serán la suma de las componentes, es decir, si  $\vec{AB}=(x,y)$  y  $\vec{BC}=(z,t)$ , entonces será  $\vec{AC}=(x+z,y+t)$ .

**Ejercicio:** Prueba que la adición está bien definida y que dota a  $S$  de estructura de grupo abeliano.

Observa que es un semigrupo unitario y conmutativo y cada segmento libre orientado o vector  $\vec{AB}$ , tiene su opuesto  $\vec{BA}$ .

La ley de composición externa por elementos de  $\mathbb{Q}$  —conjunto de los números racionales— se define de la forma siguiente:

$$\forall \vec{AB}\in S \quad \forall \frac{a}{b}\in\mathbb{Q} \quad \frac{a}{b}\circ\vec{AB} = a\circ\frac{\vec{AB}}{b},$$

es decir, dividimos  $\vec{AB}$  en  $|b|$  partes iguales y tomamos  $|a|$ ; el sentido es el de  $\vec{AB}$  si  $\frac{a}{b}>0$ , el opuesto si  $\frac{a}{b}<0$  y 0 si  $\frac{a}{b}=0$ .

**Ejercicio:** Prueba que  $(\mathbb{Q}, S, +, \circ)$  es un espacio vectorial.

**Ejercicio:** Encuentra algún otro concepto que tenga que ser definido mediante una relación de equivalencia y tal que sobre el conjunto cociente puedas definir alguna operación.

Este ejercicio se resolvería aplicando la técnica “el entorno”.

## 2.7.2. Magnitud

Planteamos a los alumnos las cuestiones siguientes: ¿sabes lo qué es una magnitud? Si lo sabes, define lo que entiendes por tal y pon algún ejemplo; y si no lo sabes, busca en algún libro, diccionario o enciclopedia dicho término. Piensa en una magnitud conocida; ¿se necesita una relación de equivalencia para tener dicha magnitud?; ¿por qué? ¿Qué propiedades consideras necesarias para tener una magnitud? ¿Verifican dichas propiedades la magnitud que consideraste?

Para responder a estas cuestiones utilizamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el método Delfos” (ya que nos interesa que piensen tranquilamente en casa el concepto de magnitud y, si es necesario, que busquen en enciclopedias u otros libros dicho término para que razonen lo mejor posible lo que les planteamos), “la sinéctica” en sus dos aspectos: “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo familiar extraño”, “el entorno”, “crear durmiendo” y “la síntesis creativa”.

Para dar el concepto de magnitud nos encontramos con cierta dificultad ya que los autores que hablan del tema no se ponen del todo de acuerdo en su definición. Algunos parten de un conjunto  $A$ , no vacío, en el que establecen una relación de equivalencia  $R$ ; con ello obtienen un conjunto cociente  $A/R$  y sobre él definen la magnitud. Otros no consideran la necesidad del conjunto cociente, pero añaden una serie de propiedades que nosotros reservamos para ir obteniendo los distintos tipos de magnitudes. Todo esto lo veremos después de dar nuestra definición, comentando las que nos presentan algunos de los autores que hemos consultado.

Si nos fijamos en las magnitudes que todos conocemos, por ejemplo: la longitud, la superficie, el volumen, la capacidad, el peso..., seguro que observamos que en todas ellas es importante poder operar con sus elementos: tenemos la suma de longitudes, de superficies, de volúmenes, de capacidades, de pesos... Si no tuviésemos una operación, no tendríamos la posibilidad de poder medir, ya que al medir observamos las veces que podemos llevar la unidad de medida sobre cada uno de los elementos de la magnitud, y por tanto sumamos la unidad con ella misma un cierto número de veces. Además, se verifican en todas esas operaciones las propiedades asociativa, conmutativa y existencia de

elemento neutro. Esto nos da pie a dar la definición que viene a continuación.

**Definición:** Llamamos **magnitud** a todo semigrupo unitario y conmutativo  $(M,*)$ . A los elementos de  $M$  les vamos a llamar **cantidades** de la magnitud.

Según B. Russell (1983: 195) —versión original: (1948) The principles of Mathematics—: *...una magnitud se definirá como todo lo que es mayor o menor que algo. (...)*

*Pero encontraremos razones para pensar —paradójica como puede parecer la idea— que lo que puede ser mayor o menor que algún término, nunca puede ser igual a término alguno, y viceversa. Esto exigirá una distinción, cuya necesidad resultará más y más evidente a medida que avancemos, entre las clases de términos que pueden ser iguales (puede ser que se refiera a equivalentes, ya que otros autores consideran necesaria una relación de equivalencia) y las clases de los que pueden ser mayores o menores. (Quizá en este caso esté comparando los elementos mediante una relación de orden.) Los primeros recibirán el nombre de “cantidades”; los últimos, de “magnitudes”. Un doble decímetro es una cantidad; su longitud es una magnitud. Estas son más abstractas que las cantidades: cuando dos cantidades son iguales tienen la misma magnitud. (...)*

*Cantidad es todo lo susceptible de igualdad cuantitativa con algo.*

Esta definición parece no ser adecuada, por ejemplo, si pensamos en una mesa; ésta es más grande que una hormiga, luego una mesa sería una magnitud según la definición que nos da. Quizá sea por la dificultad que tiene definir este concepto por lo que en la página 201 nos dice: *Toda magnitud es un concepto simple e indefinible*. Nosotros hemos tratado de formalizar la definición de magnitud intentando recoger en ella el mayor número posible de las distintas ideas que sobre la misma hemos ido encontrando.

Para Abellanas (1963: 62) una magnitud es: *un grupo (o semigrupo) aditivo y abeliano. A los elementos del grupo se les llama cantidades de la magnitud.*

Esta definición, en parte, coincide con la nuestra, si bien nosotros reservamos el que sea un grupo para cierto tipo de magnitudes, como veremos más adelante.

Sin embargo, Rey Pastor (1966: 199) definía el concepto de magnitud como: *“un concepto abstracto nacido de un conjunto*

*homogéneo —conjunto cociente—, entre cuyos elementos no sólo está definida la igualdad —relación de equivalencia— sino también la suma. A lo mismo equivale esta otra definición: Magnitudes son los entes abstractos (aquí, por ejemplo, los entes abstractos son los segmentos del plano, que necesitamos para obtener la magnitud longitud) entre los que está definida la igualdad y la suma.*

*Cada uno de los estados (elementos del conjunto cociente o clases de equivalencia) de la magnitud se llama cantidad de esta magnitud".* Queda claro que considera necesaria una relación de equivalencia para tener una magnitud.

Roanes (1972: 402) también añade algo más a la definición de magnitud. Para él una magnitud es: *un semigrupo unitario, conmutativo y ordenado.*

En nuestra definición no le pedimos que el semigrupo esté ordenado, la ordenación con alguna condición más dará lugar a otro tipo de magnitudes.

Después de algunas consideraciones sobre las magnitudes que se trabajan en Matemática elemental, Aizpún y otros (1976: 10) concluyen que: *una magnitud se define como un semigrupo aditivo conmutativo con elemento neutro, formado por clases de equivalencia, que son sus cantidades.*

Entendemos que esto es debido a que las magnitudes que se estudian en Matemática elemental, por ejemplo: la longitud, el peso, la capacidad, el volumen, etc., como veremos, suelen necesitar partir de un conjunto  $A$  en el que se define una relación de equivalencia, no trivial,  $R$ , obteniendo un conjunto cociente  $M:=A/R$ , al que llamamos magnitud, con una ley de composición interna llamada adición —que puede ser cualquier ley de composición interna—, respecto de la cual es un semigrupo unitario y conmutativo; en este caso las clases de equivalencia van a ser las cantidades. Al conjunto  $A$  le vamos a llamar **conjunto soporte de la magnitud**.

En Chamorro-Belmonte (1988: 135) nos encontramos con la siguiente definición: *el conjunto  $A$  (para ellos  $A$  es un conjunto cociente, como puede verse en pág. 131), que define la magnitud, con la composición  $*$  y el orden  $\leq$  es un semigrupo conmutativo con elemento neutro, absoluto y totalmente ordenado.* Un semigrupo dicen que es absoluto, pág. 134, si *dados  $a, b \in A$  existe  $c \in A$  que verifica  $a = b * c$  o bien  $b = a * c$ .*

También consideran la necesidad de tener un conjunto cociente y una relación de orden total.

Para Prada (1990: 11) el concepto de magnitud es el siguiente: *un conjunto  $M$  de elementos, en el cual está definida una operación adición que tiene las propiedades asociativa y conmutativa y una relación de orden  $R$  compatible con la operación adición.*

Prácticamente esta última definición coincide con la que da Roanes. No exige que el semigrupo sea unitario, aunque sí ordenado.

En su tesis, Chamorro (1997: 72 a 80) concluye que *como estructura matemática,  $(M, \oplus, <)$  es un semigrupo ordenado arquimadiano y que  $(M, \oplus, <, \bullet)$ , es un semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ .*

Esta definición nos resulta confusa, ya que no nos queda claro si, para ella, una magnitud tiene que ser un semigrupo ordenado o un  $\mathbb{N}$ -semimódulo. Además, hacemos notar que para tener un semimódulo no se necesita una relación de orden que no sea la trivial (no hemos encontrado ningún autor que se la exija).

Hemos consultado algunas enciclopedias y, por ejemplo La Gran Enciclopedia Larousse (1977, tomo 6: 844), después de algunos comentarios sobre las magnitudes nos dice: *El término magnitud nace de un conjunto de elementos comparables respecto de una relación previamente definida, esto es, homogeneizados, entre los cuales está definida la igualdad y la suma. Este concepto puede ampliarse incluyendo aquellos entre los que sólo puede establecerse una relación de igualdad o desigualdad o magnitudes intensivas, para distinguirlas de las anteriores o extensivas (B. Russell).*

En esta definición hace referencia a B. Russell aunque parece ser que esta clasificación en intensivas y extensivas más bien que de B. Russell, la enciclopedia, ha debido tomarla directamente de Rey Pastor, (1966: 200), pues viene exactamente igual. Pone como ejemplo la temperatura y el nivel del terreno, —dos puntos tienen el mismo nivel cuando están sobre el mismo plano horizontal—. Con nuestra definición no es del todo acertado llamarles magnitudes intensivas, ya que realmente no son magnitudes, pues no pueden ser semigrupos unitarios y conmutativos. De la misma forma tampoco será una magnitud la dureza de los materiales, estaríamos en un caso análogo.

En la Enciclopedia Universal Ilustrada Europea Americana (1981, tomo 32: 241) son pocas las acepciones que encontramos de la palabra magnitud; entre ellas elegimos la que hace referencia al tema que nos

ocupa, que es la siguiente: *Tamaño de un cuerpo*. No hemos encontrado nada más aproximado. Consideramos que esto no merece comentario.

Buscamos también en dicha enciclopedia la palabra cantidad para ver si la relaciona con magnitud de algún modo, y nos encontramos (1981, tomo 11: 256) con varias acepciones de dicho término; elegimos las que hacen referencia al tema que nos ocupa y son las siguientes: *Todo lo que es capaz de aumento o disminución, y que puede, por consiguiente, medirse o numerarse. Se define la cantidad diciendo que es todo lo que es susceptible de medida*. En los comentarios que hemos hecho antes ya hacíamos referencia a una definición de este tipo.

Incluso en el Diccionario de la Real Academia Española, 1993, nos encontramos con la siguiente definición de magnitud: *Propiedad física que puede ser medida (ejemplo: temperatura, peso, etc.)*. Los comentarios anteriores nos sirven para este caso.

Pensábamos que en internet íbamos a encontrar el concepto de magnitud expresado de una manera más precisa; por ser muchas y muy parecidas las definiciones que hemos encontrado, comentamos sólo algunas:

a) Según Angel Martínez Recio en

<http://www.uco.es/~ma1mare/profesor/primaria/medidas/matemati/indice.htm>

*las magnitudes son las propiedades de los objetos materiales que se pueden cuantificar. Por ejemplo, la longitud, la superficie o el volumen de un cuerpo. O la capacidad de un recipiente. No son magnitudes, por ejemplo, la belleza o la armonía. La asignación de valores numéricos a las cantidades de una magnitud se hace mediante el proceso de medida de dichas cantidades.*

En este caso la definición de magnitud lleva implícita la de medida de dicha magnitud. Ahora bien nosotros nos preguntamos: ¿si se inventaran instrumentos que pudieran medir la belleza y la armonía serían magnitudes? Además, todavía no han definido lo que son las cantidades de una magnitud cuando utilizan dicho término.

*Este proceso comienza con una clasificación de los objetos atendiendo a la propiedad que se pretende cuantificar (...) Cada clase de equivalencia así obtenida recibe el nombre de cantidad de magnitud...*

Creemos que habla de empezar estableciendo una relación de equivalencia y después define lo que son las cantidades de la magnitud.

*Matemáticamente el concepto de magnitud se suele definir de forma abstracta, atendiendo a las relaciones que implica, prescindiendo de los objetos y fenómenos concretos a los que afecta. Por ello, desde un punto de vista matemático abstracto, una magnitud —escalar— se suele definir simplemente como un conjunto dotado de una operación interna, respecto a la que tiene estructura de semigrupo conmutativo, dotado de elemento neutro...*

Para nosotros esta definición no será la de magnitud escalar, sino simplemente la de magnitud. De todos modos, y desde nuestro punto de vista, ésta es una de las mejores definiciones que nos hemos encontrado en la red.

b) En la dirección:

<http://roble.pntic.mec.es/csoto/medida.htm>

Carmen Soto Prados, profesora del I.E.S. Mirasierra de Madrid, dice:  
*...llamaremos magnitud a las propiedades físicas que se pueden medir...*

Nos preguntamos: ¿qué es medir? No tenemos que añadir nada, nos sirven los mismos comentarios que ya hemos hecho anteriormente.

c) © Vernet, inc y Orozco Carmona en las direcciones:

[http://salonhogar.com/ciencias/fisica/cienciasfisicasymedida/magcant\\_unidad.htm](http://salonhogar.com/ciencias/fisica/cienciasfisicasymedida/magcant_unidad.htm)

<http://www.lafacu.com/apuntes/fisica/medidas/default.htm>

coinciden en las siguientes definiciones: *La noción de magnitud está inevitablemente relacionada con la medida. Se denominan magnitudes ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. En otros términos, las magnitudes son propiedades o atributos medibles.*

*La longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de sustancia, son ejemplos de magnitudes físicas. La belleza, sin embargo no es una magnitud, entre otras razones porque no es posible elaborar una escala y mucho menos un aparato que permita determinar cuántas veces una persona o un objeto es más bello que otro.*

*La sinceridad o la amabilidad tampoco lo son. Se trata de aspectos cualitativos porque indican cualidad y no cantidad.*

*En el lenguaje de la física la noción de cantidad se refiere al valor que toma una magnitud dada en un cuerpo o sistema concreto; la longitud de esta mesa, la masa de aquella moneda, el volumen de ese lapicero, son ejemplos de cantidades.*

*Una cantidad de referencia se denomina unidad y el sistema físico que encarna la cantidad considerada como una unidad se denomina patrón.*



Aparte de los comentarios que ya hemos hecho en casos anteriores y que podrían aplicarse a esta definición, pensamos que deberían haber empezado definiendo lo que es un sistema físico. En otros lugares los autores definen sistema de unidades y sistema internacional, pero en ningún momento sistema físico.

d) Para José Antonio Blesa

[http://www.edulat.com/3eraetapa/fisica/temas\\_consulta/6.htm](http://www.edulat.com/3eraetapa/fisica/temas_consulta/6.htm)

*la noción de magnitud está inevitablemente relacionada con la de medida. Se denominan magnitudes ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresadas en forma numérica. En otros términos, las magnitudes son propiedades o atributos medibles.*

*La longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de sustancia son ejemplos de magnitudes físicas.*

*En el lenguaje de la física la noción de cantidad se refiere al valor que toma una magnitud dada en un cuerpo o sistema concreto; la longitud de esta mesa, la masa de aquella moneda, el volumen de ese lapicero, son ejemplos de cantidades; la cantidad de referencia se denomina unidad y el sistema físico que encarna la cantidad considerada como una unidad se denomina patrón.*

Como podemos observar, esta definición coincide con la anterior y, por tanto, los comentarios anteriores podemos aplicarlos aquí.

e) Isidoro Martínez en

[http://imartinez.etsin.upm.es/ot1/Units\\_es.htm](http://imartinez.etsin.upm.es/ot1/Units_es.htm)

*da la siguiente definición: Magnitud es algo cuantificable, es decir, medible, ponderable (ya en el libro de la Sabiduría se dice: Tú lo has regulado todo con medida, número y peso, Sab. XI-20). Las magnitudes pueden ser directamente apreciables por nuestros sentidos, como los tamaños y pesos de las cosas, o más indirectas (aceleraciones, energías). Medir implica realizar un experimento de cuantificación, normalmente con un instrumento especial (reloj, balanza, termómetro).*

*Cuando se consigue que la cuantificación sea objetiva (no dependa del observador y todos coincidan en la medida) se llama magnitud física (tiempos, longitudes, masas, temperaturas, aceleraciones, energías). Hay otras magnitudes que no resultan cuantificables universalmente: gustos, sabores, colores, ruidos, texturas, aunque puede existir alguna propiedad física relacionada, como la potencia sonora con el ruido, la longitud de onda de la luz con el color, etc.*

Otra vez nos encontramos con que define magnitud como algo medible, si bien aquí considera dos tipos de magnitudes: magnitudes físicas y otras magnitudes. En este caso, en otras magnitudes no sabemos todo lo que podría abarcar. Por tanto no nos queda nada claro cuándo ese *algo* es una magnitud y cuándo no lo es.

f) En la página del ayuntamiento de La Coruña

<http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/física/físicaInteractiva/medidas/medidasíndice.htm#magnitud>

José Villasuso dice que: *Magnitud es todo aquello que se puede medir, que se puede representar por un número y que puede ser estudiado en las ciencias experimentales (que observan, miden, representan...).*

*Ejemplos de magnitudes: velocidad, fuerza, temperatura, energía física (no la energía espiritual), etc.*

A la vista de esta definición podríamos volver a repetir lo que ya hemos comentado anteriormente: pensamos que el concepto de magnitud no debe definirse a partir de la medida de dicha magnitud. Además nos podemos preguntar: ¿en qué consiste esa representación por un número?; ¿dónde están los números en las magnitudes?; ¿cómo se hace?

**Observación:** Para definir magnitud no es necesario considerar un conjunto cociente  $A/R$ , ya que se puede considerar la igualdad como relación de equivalencia, con lo que obtenemos, como conjunto cociente, un conjunto “prácticamente igual” que  $A$ , pues en cada clase de equivalencia tendríamos un único elemento; la suma de dos clases sería otra clase que tendría como único elemento a la suma de los dos elementos de las dos clases que actuarían como sumandos y habría tantas clases de equivalencia como elementos tuviera  $A$ .

Hemos llegado a esta conclusión utilizando las técnicas “el arte de relacionar” y “la síntesis creativa”.

**Ejercicio:** Haz un “circept” sobre el concepto de magnitud. Para ello tienes que “documentarte bien” sobre lo que es y lo que no es una magnitud, de modo que no guarde secretos para ti e intenta encontrarle algo nuevo e interesante.

“Da rienda suelta a tu imaginación” anotando todas las analogías, semejanzas, diferencias y oposiciones que vayas encontrando con la definición de magnitud.

“Selecciona las mejores respuestas” que se te hayan ocurrido sobre magnitud, “reordénalas” y “clasifícalas” por categorías, haciendo

después una representación gráfica mediante círculos de las ideas obtenidas, colocando las que sean análogas en el interior del mismo círculo.

“Realiza un estudio minucioso tanto de las semejanzas como de las diferencias”, de los ejemplos de magnitud que ya han dado y que estaban ordenados y clasificados, para “aplicarle al concepto de magnitud las sugerencias que obtengas”, ya que las diferencias enriquecen el conocimiento de lo qué es una magnitud y las semejanzas hacen que todas las conclusiones obtenidas se vayan aproximando entre sí.

**Definición:** Dada una magnitud  $(M,*)$  y dado un conjunto  $A \subset M$ , decimos que  $(A,*)$  es una **submagnitud** de  $(M,*)$  si  $(A,*)$  es también una magnitud.

**Ejercicio:** Encuentra una submagnitud de alguna de las magnitudes vistas anteriormente.

Utilizamos “el arte de relacionar” para dar la definición de submagnitud y “el entorno” para resolver este ejercicio.

### 2.7.3. Propiedades de las magnitudes y ejemplos

Para motivar a los alumnos a que descubran ellos mismos algunas propiedades que después vamos a considerar, podríamos empezar preguntándoles lo siguiente: las magnitudes que hemos considerado, o alguna otra que hayas visto tú, ¿tienen alguna propiedad que merezca la pena ser destacada?; ¿cuál? ¿Podrían ser las magnitudes un semimódulo? En caso afirmativo, ¿sobre qué semianillo?

Vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

En una magnitud  $M$  se puede definir fácilmente una ley de composición externa por elementos de  $\mathbb{N}$  (de forma análoga a como lo hicimos anteriormente para ver que todo semigrupo unitario y conmutativo era un  $\mathbb{N}$ -semimódulo) que llamaremos multiplicación de números naturales por elementos de  $M$ , y va a ser una aplicación

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} \times M &\rightarrow M \\ (n, a) &\rightarrow n \bullet a \end{aligned}$$

que hace corresponder a cada par  $(n, a) \in \mathbb{N} \times M$  otro elemento  $n \bullet a \in M$ , que vamos a llamar producto del número natural  $n$  por el elemento  $a$  de  $M$ , y

que vamos a definir a partir del semigrupo  $(M,+)$  de la misma forma que entonces:

$$\forall a \in M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \bullet a = a + a + \dots \quad (n \dots + a \text{ si } n \neq 0 \text{ y } 0 \bullet a = 0_M.$$

Al conjunto  $\mathbb{N}$  se le llama **conjunto de operadores sobre la magnitud  $M$** .

**Observación:** Llamamos producto a la ley de composición externa, pero de forma análoga a lo que pasaba en la ley de composición interna, tampoco será igual, en general, al producto de  $\mathbb{N}$  o de  $\mathbb{Z}$  —aquí con mayor razón— ya que ni siquiera los dos conjuntos tienen que ser iguales. Para ser más rigurosos tendríamos que haber denotado de otra forma a la ley de composición externa, por ejemplo con  $\circ$ , y denotaríamos por  $noa$  al resultado de operar un número natural  $n$  por un elemento  $a$  de  $M$ .

Tenemos un par  $(M,+)$  que es un semigrupo unitario y conmutativo, además  $(\mathbb{N},+,\bullet)$  es un semianillo unitario y la multiplicación de los números naturales por elementos de  $M$  verifica las cuatro propiedades necesarias para tener un  $\mathbb{N}$ -semimódulo, como hemos visto de modo general anteriormente. Por tanto toda magnitud puede ser dotada de una estructura de semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ .

**Observación:** De la definición se deduce que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \bullet 0_M = 0_M$ , ya que

$$n \bullet 0_M = 0_M + 0_M + \dots \quad (n \dots + 0_M = 0_M.$$

**Observación:** Si hubiéramos exigido, en la definición de magnitud, que  $(M,+)$  cumpliera además la propiedad cancelativa, es decir:

$$\forall a, b, c \in M \quad a + c = b + c \Rightarrow a = b,$$

no tendríamos que haber dado en la definición de la ley de composición externa que  $\forall a \in M \quad 0 \bullet a = 0_M$  ya que por la pseudodistributiva

$$n \bullet a = (n+0) \bullet a = n \bullet a + 0 \bullet a, \text{ luego } n \bullet a + 0_M = n \bullet a + 0 \bullet a \Rightarrow 0_M = 0 \bullet a$$

por la propiedad cancelativa.

Con el siguiente ejercicio intentamos aplicar la técnica de Metodología Creativa “el arte de relacionar”.

**Ejercicio:** Prueba que la ley de composición externa así definida verifica las cuatro propiedades de los semimódulos. Si no lo consigues, mira la ley de composición externa que anteriormente teníamos en semimódulos; allí está probado.

Con los siguientes ejemplos intentamos aplicar “la sinéctica” bajo su aspecto “hacer lo familiar extraño”.

## Ejemplos:

1. El conjunto de los números naturales o el de los números enteros o el de los racionales o el de los reales o el de los complejos, con las operaciones suma o producto son magnitudes. Razona por qué. Un número natural será una cantidad de la magnitud  $(\mathbb{N}, +)$ .

2. Sea  $S$  el conjunto de los segmentos del plano, sean  $a$  y  $b$  dos elementos cualesquiera de  $S$ , definimos una relación binaria: “ $a$  es **congruente** con  $b$ ”, que denotamos por:  $aCb$ , si, y sólo si, podemos hacer coincidir  $a$  con  $b$  mediante un movimiento —composición de traslaciones, simetrías y rotaciones— en el plano. Es fácil comprobar que la relación así definida es una relación de equivalencia, ya que cumple las propiedades:

a) Reflexiva:  $\forall a \in S \quad aCa$ , ya que la identidad es un movimiento en el plano que permite llevar  $a$  sobre  $a$ .

b) Simétrica:  $\forall a, b \in S \quad aCb \Rightarrow bCa$ , ya que si hay un movimiento en el plano que nos permite pasar de  $a$  a  $b$ , el inverso nos permite pasar de  $b$  a  $a$ .

c) Transitiva:  $\forall a, b, c \in S \quad aCb \text{ y } bCc \Rightarrow aCc$ , pues si hay un movimiento en el plano que nos permite pasar de  $a$  a  $b$  y otro que permite pasar de  $b$  a  $c$ , la composición de ellos nos hará pasar de  $a$  a  $c$ .

Obtenemos el conjunto cociente  $S/C=L$ . Para cada elemento  $a \in S$  vamos a denotar por  $I_a=[a]=\{x \in S/ aRx\}$  a la clase de equivalencia que contiene al elemento  $a$  y a todos los que sean congruentes con él. Un representante de una clase será cualquier segmento que pertenezca a esa clase. En cada clase habrá infinitos elementos, ya que por cada punto del plano puede trazarse por lo menos uno. Todos los segmentos que están en la misma clase decimos que tienen la misma longitud.

Hemos obtenido una magnitud llamada **longitud**, cuyo conjunto soporte es el conjunto de los segmentos del plano  $S$ . Los elementos del conjunto cociente son las distintas cantidades de la magnitud longitud. Algunos autores suelen llamar a  $L=S/C$  el **conjunto de los segmentos generales del plano**; también podríamos llamarle conjunto de los **segmentos libres del plano**.

Evidentemente se verifica que dadas dos clases  $[a]$ ,  $[b]$ , sobre una misma recta, existen dos representantes de cada uno de ellos  $AB \in [a]$ ,  $BC \in [b]$  que son consecutivos.

Definimos una aplicación de  $L \times L$  en  $L$ , que llamamos adición, de la forma siguiente: dadas dos clases  $[a]$ ,  $[b]$ , tomamos sobre una recta dos representantes de cada uno de ellas  $AB \in [a]$ ,  $BC \in [b]$ , el segmento  $AC$  determinado por los extremos no comunes, representa a una clase,  $AC \in [s]$ , a la que vamos a llamar suma de las dos dadas, lo que expresamos:

$$[s] = [a] + [b]$$

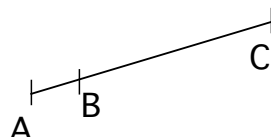


Figura 16: Suma de segmentos 1.

La adición está bien definida, ya que no depende de los representantes que elijamos, pues si tomamos otros representantes  $A'B' \in [a]$  y  $B'C' \in [b]$ , consecutivos, el segmento  $A'C'$  determinado por los extremos no comunes será congruente con  $AC$ , y será también otro representante de la clase  $[s]$ , como puede observarse en la figura adjunta:



Figura 17: Suma de segmentos 2.

podríamos desplazar el segmento  $AB$  sobre el  $A'B'$ , el  $BC$  sobre el  $B'C'$  y quedaría automáticamente el  $AC$  sobre el  $A'C'$ , con lo que tendríamos probado que los segmentos  $AC$  y  $A'C'$  están en la misma clase.

La adición en  $L$  es una ley de composición interna, ya que la suma de dos cantidades de longitud no depende de los representantes elegidos y, por tanto, nos da solamente una cantidad. En consecuencia a todo par de cantidades de longitud le asociamos, mediante la adición, una nueva cantidad, y solamente una. Además  $(L, +)$  es un semigrupo conmutativo y unitario ya que la suma es:

a) Asociativa:  $\forall [a], [b], [c] \in L \quad ([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$ .

Es decir, es lo mismo sumar las dos primeras cantidades y el resultado con la tercera, que sumar la primera con el resultado obtenido de sumar la segunda y la tercera.

b) Conmutativa:  $\forall [a], [b] \in L \quad [a] + [b] = [b] + [a]$ .

Es decir, es lo mismo sumar la primera con la segunda que sumar la segunda con la primera.

c) Existe la cantidad de longitud  $[0_L]$  cuyos elementos serían todos los segmentos  $AA$ , de extremos coincidentes, siendo  $A$  un punto arbitrario del plano, que verifica que

$$\forall [a] \in L \quad [a] + [0_L] = [0_L] + [a] = [a].$$

Ya hemos probado, con carácter general, que todo semigrupo unitario y conmutativo puede ser dotado de estructura de semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ , luego  $L$  es un semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ . Aquí lo único que vamos a hacer va a ser repetir la demostración en este caso particular, por si a alguien le resultó antes difícil.

De forma análoga a como hicimos en semigrupos, definimos una ley de composición externa en  $L$  por elementos de  $\mathbb{N}$ , a la que llamaremos multiplicación de números naturales por longitudes

$$\mathbb{N} \times L \rightarrow L$$

$$(n, [a]) \rightarrow n \bullet [a]$$

que hace corresponder a cada par  $(n, [a]) \in \mathbb{N} \times L$  otro elemento  $n \bullet [a] \in L$ , que vamos a llamar producto del número natural  $n$  por la cantidad de longitud  $[a]$ , y que vamos a definir a partir del semigrupo  $(L, +)$  de la forma:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall [a] \in L \quad n \bullet [a] = [a] + [a] + \dots \quad (n \dots + [a] \text{ si } n \neq 0 \text{ y } 0 \bullet [a] = [0_L])$$

**Observación:** No podemos definir  $n \bullet [a] = [n \bullet a]$  ya que  $n \bullet a \neq a + a + \dots$  ( $n \dots + a$  porque no tenemos definida la suma en  $S$  sino en  $L$ ; además,  $a$  es un segmento fijo del plano y no se puede sumar con él mismo al no poder ponerse a continuación de él mismo.

Con esta operación  $L$  tiene estructura de semimódulo sobre el semianillo de los números naturales, ya que verifica las cuatro propiedades que relacionan las leyes de composición interna del semigrupo  $(L, +)$  y del semianillo  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ , con la ley de composición externa:

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall [a], [b] \in L \quad n \bullet ([a] + [b]) = n \bullet [a] + n \bullet [b].$$

Ya que  $n \bullet ([a] + [b]) = ([a] + [b]) + ([a] + [b]) + \dots$  ( $n \dots + ([a] + [b]) = ([a] + [a] + \dots$  ( $n \dots + [a]) + ([b] + [b] + \dots$  ( $n \dots + [b]) = n \bullet [a] + n \bullet [b]$  si  $n \neq 0$  teniendo en cuenta la definición de la ley de composición externa y las propiedades conmutativa y asociativa de la adición en  $L$ .

Si  $n=0$  tendríamos  $0 \bullet ([a] + [b]) = [0_L] = 0 \bullet [a] + 0 \bullet [b]$ , por definición y por ser  $[0_L] + [0_L] = [0_L]$ .

$$2) \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \forall [a] \in L \quad (n+m) \bullet [a] = n \bullet [a] + m \bullet [a].$$

En efecto, si  $m \neq 0$  y  $n \neq 0$   $(n+m) \bullet [a] = [a] + [a] + \dots$  ( $n+m \dots + [a] = ([a] + [a] + \dots$  ( $n \dots + [a]) + ([a] + [a] + \dots$  ( $m \dots + [a]) = n \bullet [a] + m \bullet [a]$ .



Si  $m=0$  y  $n \neq 0$  resultaría  $(n+0) \cdot [a] = n \cdot [a] = n \cdot [a] + [0_L] = n \cdot [a] + 0 \cdot [a]$ .

Si  $m \neq 0$  y  $n=0$  sería  $(0+m) \cdot [a] = m \cdot [a] = [0_L] + m \cdot [a] = n \cdot [0_L] + m \cdot [a]$ .

Si fuesen  $n=0=m$  tendríamos  $(0+0) \cdot [a] = [0_L] = 0 \cdot [a] + 0 \cdot [a]$ .

3)  $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \forall [a] \in L \quad n \cdot (m \cdot [a]) = (n \cdot m) \cdot [a]$ .

Ya que  $n \cdot (m \cdot [a]) = m \cdot [a] + m \cdot [a] + \dots (n \text{ veces}) \dots + m \cdot [a] =$   
 $= ([a] + [a] + \dots (m \text{ veces}) \dots + [a]) + ([a] + [a] + \dots (m \text{ veces}) \dots + [a]) + \dots (n \text{ veces}) \dots + ([a] + [a] + \dots (m \text{ veces}) \dots + [a]) = [a] + [a] + \dots (nm \text{ veces}) \dots + [a] = (n \cdot m) \cdot [a]$  si  $n \neq 0$  y  $m \neq 0$ .

Si  $n=0$  ó  $m=0$  nos daría  $[0_L] = [0_L]$ .

4)  $\forall [a] \in L \quad 1 \cdot [a] = [a]$ .

Es evidente por la definición de la ley de composición externa.

3. No es difícil razonar que el conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$  con la operación dada mediante la tabla siguiente:

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

Tabla 8: Ejemplo de magnitud.

es una magnitud ya que es un grupo abeliano.

4. Podemos ver que el conjunto  $A = \{0, 1, 2\}$  con la operación dada mediante la tabla siguiente:

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabla 9: Ejemplo de magnitud.

es una magnitud, ya que  $(A, *)$  es un semigrupo unitario y conmutativo.

En los ejercicios que vienen a continuación vamos a utilizar la técnica de Metodología Creativa llamada “sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar extraño”.

**Ejercicios:** Comprueba si te ha quedado claro el concepto de magnitud resolviendo los ejercicios siguientes:

1. Definimos **ángulo** de forma análoga a como lo hace Roanes (1979: 27): dados tres puntos en el plano no alineados A, O y B, a la intersección del semiplano de borde la recta OA y al que pertenece B, que denotamos por  $OA_B$ , con el semiplano de borde la recta OB y al que pertenece A, que denotamos por  $OB_A$ , la llamamos **región angular convexa** de **vértice** O y **lados** la semirrecta de origen O y que contienen a A, que denotamos por  $OA$ , y la de origen O y que contiene a B, que denotamos por  $OB$ , y designamos por  $\hat{AOB}$  o  $\hat{BOA}$ , es decir

$$\hat{AOB} = OA_B \cap OB_A.$$

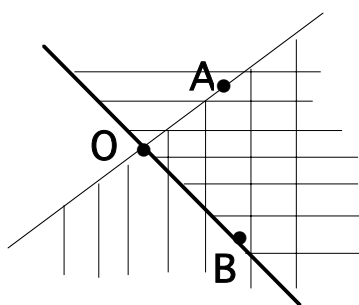


Figura 18: Región angular.

También se suele nombrar por  $\hat{ab}$  a la región angular cuyos lados sean las semirrectas a y b.

La figura complementaria de una región angular convexa añadiéndole los lados se le llama **región angular cóncava**. Sus lados y vértice son los de la región angular convexa de que procede.

Llamamos simplemente **región angular** a cualquier región angular, ya sea convexa o cóncava.

Llamamos **ángulo** al conjunto de las semirrectas contenidas en una región angular y cuyo origen común sea su vértice. Los lados y vértice son los de la región angular de que procede.

En el conjunto A de los ángulos del plano establecemos la siguiente relación: dos ángulos cualesquiera en el plano se relacionan si, y sólo si, se puede pasar de uno a otro mediante un movimiento.

Entendemos por movimiento a las traslaciones, simetrías, giros o las composiciones entre ellos. Prueba que esta relación  $R$  es de equivalencia. Cada clase de equivalencia va a ser un **ángulo general**. En el conjunto cociente  $A/R$  se define la adición de dos ángulos tomando dos representantes que sean consecutivos —con un lado en común— y el ángulo general suma de los dos tiene como representante al ángulo unión de los dados. Estudia si  $(A/R, +)$  es una magnitud. En caso afirmativo llama **amplitud** a dicha magnitud. ¿Será la amplitud de un ángulo recto una cantidad de esta magnitud?

2. Razona si el número de elementos de un conjunto concreto es en algún caso una magnitud. ¿Es una cantidad? En caso afirmativo, ¿de qué magnitud?

3. ¿Cómo definirías la magnitud “peso”? Prueba que es una magnitud. ¿Una cantidad de esta magnitud podría ser el peso de una muñeca?

Indicación: Podrías pensar que tenemos un conjunto de objetos,  $O$ , que podemos colocar en los platillos de una balanza. Definimos la relación diciendo que dos objetos se relacionan si, y sólo si, son el mismo objeto o, colocados cada uno en un platillo de la balanza, ésta se equilibra.

4. ¿Será la capacidad una magnitud?; ¿y la superficie?; ¿y el volumen?; ¿y la temperatura?; ¿y el tiempo?; ¿y el color? ¿Por qué?

5. Si pudiéramos disponer de un instrumento que midiera el cariño, ¿podríamos pensar que el cariño es una magnitud? Fíjate que cuando se habla se compara el cariño que dos personas tienen a otra tercera, y también toda persona puede afirmar que quiere más a una persona que a otra. En el futuro, ¿podría llegar a ser el cariño una magnitud?

Planteamos este último ejercicio para aplicarle “la técnica de escenarios”.

6 Si se dispusiese de un instrumento que midiese el talento, ¿sería una magnitud? Razónalo. ¿Y el dolor?; ¿y la bondad?; ¿y la amistad?

Volvemos a aplicar “la técnica de escenarios”.

7. Razona si son, o podrían llegar a ser, magnitudes los conceptos siguientes: la alegría, el respeto, la amenidad, el optimismo, etc.

En este ejercicio también aplicamos “la técnica de escenarios”.

8. Encuentra otra magnitud y razona que lo es.

En este último ejercicio vamos a utilizar la técnica “el entorno”.

## 2.8. Tipos de magnitudes

Para empezar, podríamos preguntarle al alumno-profesor: ¿todas las magnitudes que conoces cumplen las mismas propiedades o hay alguna que verifica además de las propiedades antes enunciadas alguna nueva? ¿Todas son semigrupo unitario y conmutativo o hay alguna que sea grupo abeliano? ¿En alguna de ellas cualquier cantidad no nula se puede dividir en cualquier número no nulo de partes iguales? ¿En todas tienes definida una relación de orden? ¿Hay en alguna de ellas un elemento que es menor que los demás? ¿Todas tienen un número infinito de elementos? Además de éstas, ¿hay alguna propiedad específica de alguna magnitud conocida?

Además de “el arte de preguntar” vamos a utilizar las técnicas: “torbellino de ideas” o “método Delfos”, según respondan sin dificultad o les cueste trabajo y tengan que pensarlo, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinéctica” en sus dos aspectos: “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo familiar extraño”, “la sinapsis”, “la serendipity”, “crear durmiendo”, “la solución de problemas” y “la síntesis creativa”.

El concepto de magnitud que hemos introducido es muy general, iremos añadiéndole condiciones nuevas a la definición dada para llegar a obtener los diferentes tipos de magnitudes que definiremos. Estas condiciones se las vamos a imponer:

1º Al número de elementos del conjunto: que sea finito o que sea infinito, pudiendo clasificarse en finitas o infinitas.

2º Al semigrupo: que sea sólo semigrupo unitario y conmutativo o que sea grupo abeliano, obteniendo la clasificación en absolutas y relativas.

3º Al semimódulo: que sea divisible o indivisible, con lo que obtendremos la clasificación en divisibles e indivisibles.

4º Al semigrupo: que tenga definida una relación de orden total compatible con la ley de composición interna y arquimediana, con lo que obtendremos la clasificación en escalares y vectoriales. A su vez las escalares se dividirán en discretas y continuas, según que el semimódulo sea cíclico o no.

### 2.8.1. Magnitudes finitas e infinitas

Entre las magnitudes que hemos visto, pon algún ejemplo de aquéllas que tengan un número finito de elementos y algún otro que tenga un número infinito.

Utilizamos la técnica “el arte de relacionar”. “el entorno” y, cuando damos la definición, “la síntesis creativa”.

Al pensar en los ejemplos de magnitudes que hemos visto anteriormente, observamos que hemos encontrado algunas que tenían un número finito de elementos, como los ejemplos 3 y 4, y otras que tenían infinitos, por ejemplo  $(\mathbb{N}, +)$ ; es por lo que diremos que las primeras son magnitudes finitas y las segundas infinitas.

**Definiciones:** Una **magnitud**  $(M, *)$  es **finita** cuando el conjunto  $M$  es finito, es decir,  $M$  no es equipotente a ningún subconjunto propio suyo. En caso contrario diremos que la **magnitud** es **infinita**.

**Ejemplos:**  $(\mathbb{Z}, +)$  es una magnitud infinita y  $(A, *)$ , siendo  $A = \{1, 2, 3\}$  y la operación  $*$  dada mediante la tabla

| $*$ | 1 | 2 | 3 |
|-----|---|---|---|
| 1   | 2 | 3 | 1 |
| 2   | 3 | 1 | 2 |
| 3   | 1 | 2 | 3 |

Tabla 10: Ejemplo de magnitud.

es una magnitud finita.

En este ejemplo hemos utilizado “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “el arte de relacionar”. En el ejercicio que viene a continuación además de estas dos técnicas vamos a emplear “el entorno”.

**Ejercicio:** Encuentra algunas magnitudes que sean finitas y otras que sean infinitas.

## 2.8.2. Magnitudes absolutas y relativas

Volveríamos a observar, con los alumnos, que hay magnitudes que no sólo son semigrupos unitarios y conmutativos, sino que son grupos abelianos. Entre las magnitudes conocidas hasta ahora tenemos algunas que son sólo semigrupos unitarios y conmutativos como, por ejemplo, la amplitud de ángulos; sin embargo, si consideramos la amplitud de ángulos orientados, no sólo es un semigrupo unitario y conmutativo, sino que es un grupo abeliano. En este caso, al estar los ángulos orientados, cada elemento va a tener su opuesto. Vamos a diferenciar estas magnitudes de las que definíamos de la manera más simple y vamos a llamar a las “más completas”, las que son un grupo abeliano, magnitudes relativas y a las que no sean relativas las vamos a llamar absolutas.

Haríamos, con esta idea, una clasificación de las magnitudes en absolutas y relativas, colocando en un lugar las que sólo sean semigrupo unitario y conmutativo —absolutas— y en otro las que lleguen a ser grupos abelianos —relativas.

Todo esto lo trabajaríamos utilizando las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas” o “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, “la sinapsis”, “la serendipity” —ya que intentando ver las magnitudes que sean absolutas nos encontraremos con magnitudes de otros tipos, y que después estudiaremos—, “crear durmiendo” y “la síntesis creativa”.

**Definición:** Una **magnitud** es **relativa** cuando el semigrupo unitario y conmutativo  $(M,+)$  es un grupo abeliano, es decir, se verifican las propiedades:

- a) Asociativa:  $\forall x,y,z \in M \quad x+(y+z)=(x+y)+z.$
- b) Conmutativa:  $\forall x,y \in M \quad x+y=y+x.$
- c) Elemento neutro:  $\exists e \in M \quad \forall x \in M \quad e+x=x+e=x.$
- d) Cada elemento tiene su simétrico u opuesto  
 $\forall x \in M \quad \exists y \in M / \quad x+y=y+x=0.$

Al opuesto de un elemento  $x$  se le denota por  $-x$ .

Esta definición coincide con casi todas las que hemos encontrado, por ejemplo, con la que da Roanes (1972: 402) aunque él exige que el grupo esté ordenado, debido a la definición que, al principio, da de magnitud: semigrupo conmutativo y ordenado.

Por tanto, si en una magnitud relativa definimos una ley de composición externa sobre un anillo  $X$  y verifica los cuatro axiomas

necesarios para tener un módulo, será  $(X, M, +, \cdot)$  un módulo, y si  $X$  es un cuerpo, será un espacio vectorial.

**Definición:** Una **magnitud** vamos a decir que es **absoluta** si no es relativa.

**Observación:** Según las definiciones que hemos dado de magnitud absoluta y relativa no podemos decir que una magnitud absoluta pueda ser relativa, ya que la absoluta era la que no puede ser grupo abeliano. Tampoco podemos decir que toda magnitud relativa es absoluta por la misma razón.

Las magnitudes relativas no tienen cabida dentro de la Educación Infantil, sin embargo, al futuro profesor de Infantil no le supone mucho esfuerzo entender esta clasificación, y este concepto contribuye, en buena medida, a mejorar su formación.

### Ejemplos:

1. El conjunto de los números enteros con la suma es una magnitud relativa y  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, +, \cdot)$  es un módulo.

2. Partimos del conjunto de los segmentos orientados del plano, a los que llamaremos **vectores del plano**. Cada vector está determinado por un par de puntos,  $AB$ , en un cierto orden. El primer punto,  $A$ , es su origen, y el segundo punto,  $B$ , su extremo. La **dirección** del vector es la de la recta que lo contiene. El **sentido** del vector es el de la semirrecta de origen  $A$  a la que pertenece  $B$ . El **módulo** del vector es la longitud del segmento  $AB$ .

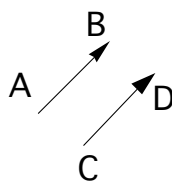


Figura 19: Vectores.

Se establece una relación entre los vectores del plano: dos vectores se relacionan si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Esta relación es de equivalencia y se llama **relación de equipolencia**.

**Ejercicio:** Prueba que la relación de equipolencia es una relación de equivalencia.



Llamamos **vector libre** a cada una de las clases de equivalencia y, por tanto, será el conjunto formado por todos los vectores del plano que sean equipolentes entre sí. Un representante de un vector libre será un elemento cualquiera de esa clase de equivalencia. En cada clase habrá infinitos elementos, ya que por cada punto del plano puede trazarse uno.

En el conjunto de los vectores libres del plano,  $V$ , definimos la adición:

$$\begin{aligned} +: V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\rightarrow u+v \end{aligned}$$

construimos el vector libre  $u+v$  de la forma siguiente: elegimos un representante  $AB$  de  $u$ , y otro de  $v$ ,  $BC$ , que tenga por origen el extremo del de  $u$ , y la suma será la clase que tiene por representante al vector  $AC$ , con origen el del representante de  $u$  y extremo el del representante de  $v$ , es decir:

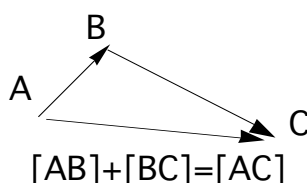


Figura 20: Suma de vectores.

### Ejercicio:

a) Prueba que si se toman otros representantes de  $u$  y  $v$ , respectivamente, obtenemos otro representante de  $u+v$ . Con esto tenemos probado que la suma no depende de los representantes elegidos.

b) Prueba que la suma así definida es asociativa, conmutativa, tiene por elemento neutro a la clase formada por todos los vectores cuyos orígenes y extremos coinciden, y cada vector  $v$  tiene su simétrico  $-v$ , que sería el vector cuyo representante tendría por origen el extremo del representante de  $v$  y por extremo el origen.

Tenemos que  $(V, +)$  es un grupo abeliano, luego  $V$  es una magnitud relativa.

De manera natural —ya visto cuando probamos que todo grupo es un  $\mathbb{Z}$ -módulo—  $(V, +)$  puede dotarse de la estructura de  $\mathbb{Z}$ -módulo, para lo cual se define el producto de un número entero por un vector:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times V &\rightarrow V \\ (z, v) &\rightarrow zv \end{aligned}$$

$zv$  es otro vector que tiene la misma dirección que  $v$ , el mismo sentido si  $z > 0$  y  $v \neq 0$ , o sentido contrario si  $z < 0$  y  $v \neq 0$ , y si  $z = 0$  ó  $v = 0$  es  $zv = 0$ , y

por módulo el producto del módulo de  $v$  por el valor absoluto de  $z$  si tanto  $z$  como  $v$  son distintos de cero, y cero si alguno es cero.

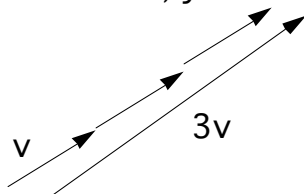


Figura 21: Producto de un número entero por un vector.

No es difícil probar que se cumplen los cuatro axiomas que necesitamos para tener un  $\mathbb{Z}$ -módulo. Por tanto,  $(\mathbb{Z}, V, +, \cdot)$  es también una magnitud relativa.

**Ejercicio:** Define sobre el conjunto  $S$  de los segmentos libres orientados de una recta las operaciones necesarias para tener una magnitud, y demuestra que lo es. Dicha magnitud, ¿es relativa?

**Ejercicio:** Dibuja en el plano dos vectores no nulos  $u$  y  $v$  de direcciones distintas. Representa en el plano los vectores:

$$v_1 = -2u; v_2 = 5v; v_3 = 3u + 6v; v_4 = -5u + 7v; v_5 = v_3 + v_4.$$

**Ejercicio:** ¿La amplitud de ángulos generales es una magnitud absoluta o relativa? Si hubiéramos dado un sentido de recorrido del ángulo obtendríamos otra magnitud a la que llamaríamos amplitud de ángulos generales orientados. ¿Cómo será esta magnitud absoluta o relativa?

**Ejercicio:** De las magnitudes que hemos encontrado ¿podrías decir cuáles de ellas son magnitudes relativas? Encuentra alguna magnitud que no sea relativa.

En este último ejercicio utilizaremos la técnica “el entorno”.

### 2.8.3. Magnitudes divisibles e indivisibles

La clasificación de las magnitudes que nosotros vamos a considerar en este apartado, aunque al principio pueda resultarnos algo extraña debido a la utilización de algunos términos matemáticos que no se usan en el lenguaje corriente, después veremos que no es ni más ni menos que la que se suele hacer en la vida corriente. Cuando hablamos, por ejemplo, de la magnitud longitud, sin lugar a dudas, todos sabemos que cualquier longitud se puede dividir en cualquier número, no nulo, de partes iguales; ésta va a ser una magnitud divisible. Sin embargo, hay magnitudes a las que esto no les ocurre como, por ejemplo, la magnitud

número de muñecas, entendiendo que sólo tenemos muñecas enteras. Será, por tanto, una magnitud indivisible.

Antes de abordar esta clasificación de las magnitudes, vamos a ver algunos conceptos que nos pueden ayudar a fundamentar nuestra propuesta, ya que la noción de divisibilidad de una magnitud, que a continuación definiremos, tiene su análoga en la divisibilidad de módulos —para esta definición véase, por ejemplo, Lam (1998: 70)—, si bien la definición que nosotros damos es para semimódulos.

### 2.8.3.1. Anuladores

Como su nombre indica, el anulador de un elemento va a ser el conjunto formado por los elementos que lo anulan, es decir que operados con él nos dan el elemento neutro. Vamos a considerar varios anuladores que iremos definiendo.

Podríamos empezar diciéndole a los alumnos: elige un semimódulo que conozcas; como cada uno puede elegir uno distinto, nosotros le vamos a llamar  $(X, S, *, o)$ , siendo  $(X, \perp, \otimes)$  el semianillo. Observa cuál es el elemento neutro de  $(S, *)$ . Toma un elemento  $s$  de  $S$  y calcula el conjunto de los elementos de  $X$  que multiplicados por  $s$  nos dan el elemento neutro de  $(S, *)$ . Si tomaras un semianillo unitario que tuviera elemento neutro respecto de la primera operación, ¿podrías hacer algo parecido? Si es así, hazlo.

Utilizamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la solución de problemas”.

**Definición:** Dado un semimódulo por la izquierda  $(X, S, *, o)$ , siendo el semianillo  $(X, \perp, \otimes)$ , y dado un elemento  $s \in S$ , llamamos **anulador** de  $s$  en  $X$ , y lo denotamos por  $\text{ann}_X(s)$  al conjunto formado por los elementos del semianillo que multiplicados por  $s$  nos dan  $e_S$ , siendo  $e_S$  el elemento neutro de  $S$  respecto de la operación  $*$ . Es decir:

$$\text{ann}_X(s) = \{x \in X / xos = e_S\}.$$

Si tenemos claro cuál es el semianillo sobre el que estamos operando, escribiremos simplemente **ann(s)**.

Se puede definir también el anulador de un subconjunto no vacío de  $S$ , aunque no lo haremos porque no lo usaremos.

**Observación:** Como tenemos un semimódulo por la izquierda, los elementos del semianillo operan por la izquierda; si el semimódulo hubiese sido por la derecha, los elementos del semianillo operarían por la derecha.

**Ejemplo:** Podemos considerar el semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_6, +, x)$  y vamos a calcular el anulador de cada uno de los elementos de  $\mathbb{N}_6$ :

$$\text{ann}_{\mathbb{N}}([0]) = \{x \in \mathbb{N} / x[0] = [0]\} = \mathbb{N}$$

$$\text{ann}_{\mathbb{N}}([1]) = \{x \in \mathbb{N} / x[1] = [0]\} = \{0, 6, 12, 18, \dots, 6n, \dots\} = 6\mathbb{N},$$

ya que  $x[1] = [1] + [1] + \dots (x \dots + [1] = [0] \Rightarrow x = 6n \text{ con } n \in \mathbb{N})$ .

$$\text{ann}_{\mathbb{N}}([2]) = \{x \in \mathbb{N} / x[2] = [0]\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\} = 3\mathbb{N}$$

$$\text{ann}_{\mathbb{N}}([3]) = \{x \in \mathbb{N} / x[3] = [0]\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots\} = 2\mathbb{N}$$

$$\text{ann}_{\mathbb{N}}([4]) = \{x \in \mathbb{N} / x[4] = [0]\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\} = 3\mathbb{N}$$

$$\text{ann}_{\mathbb{N}}([5]) = \{x \in \mathbb{N} / x[5] = [0]\} = \{0, 6, 12, 18, \dots, 6n, \dots\} = 6\mathbb{N}$$

**Ejercicio:** Dado el semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_5, +, x)$ , calcula el anulador de cada uno de los elementos de  $\mathbb{N}_5$ .

**Observación:** En cualquier magnitud  $M$ , como era  $(\mathbb{N}, M, +, o)$  un semimódulo, el anulador del elemento neutro  $e_M$  del semigrupo  $(M, +)$  va a ser todo el conjunto  $\mathbb{N}$ , pues por definición

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x \circ e_M = e_M.$$

**Ejercicio:** Sabemos que el conjunto  $L$  de las longitudes en el plano es un semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ . Calcula el anulador de alguno de sus elementos.

**Definición:** Dado un semianillo unitario  $(X, \perp, \otimes)$ , con  $(X, \perp)$  también unitario, como todo semianillo unitario que verifique esta condición se puede considerar como un semimódulo sobre sí mismo, para cualquier elemento  $x \in X$  podemos definir el **anulador por la derecha** de  $x$ , al que denotamos por  $\text{ran}_x(x)$  o simplemente por  $\text{ran}(x)$  si no tenemos duda de cuál es el semianillo, y será:

$$\text{ran}(x) = \{y \in X / x \otimes y = e_x\}.$$

Siendo  $e_x$  el elemento neutro de  $(X, \perp)$ . El nombre se debe a que los elementos operan por la derecha de  $x$ . De manera análoga definiríamos **anulador por la izquierda** de  $x$ , y lo denotamos por  $\text{lan}_x(x)$  o simplemente por  $\text{lan}(x)$  si no hay duda acerca de qué semianillo estamos hablando, y será:

$$\text{lan}(x) = \{y \in X / y \otimes x = e_x\}.$$

En general, podremos hablar de **anulador** de  $x$ , al que vamos a llamar  $\text{ann}_x(x)$  o simplemente  $\text{ann}(x)$  si tenemos claro de qué semianillo estamos hablando, como el conjunto de los elementos del semianillo que operados con  $x$  por la izquierda y por la derecha nos dan  $e_x$ , es decir

$$\text{ann}(x) = \{y \in X / x \otimes y = y \otimes x = e_x\}.$$

### Observaciones:

1. Cuando definíamos anulador de un elemento de un semimódulo, no tenía sentido definir anulador por la izquierda y anulador por la derecha, ya que el elemento del semianillo solamente puede operar por el lado que tengamos el semimódulo.

2. Si el semianillo hubiese sido conmutativo tendríamos que  $\text{ran}(x) = \text{lan}(x) = \text{ann}(x)$ , y se hablaría simplemente de **anulador de un elemento de un semianillo**.

3. Siempre tendremos que  $\text{ann}(x) = \text{ran}(x) \cap \text{lan}(x)$ , lo cual es evidente, y se podrá hablar de anulador de un elemento simplemente, sin distinguir lados, solamente en el caso en que su anulador por la izquierda coincida con el de la derecha.

4. Lógicamente  $\text{ran}(x)$  es el anulador de  $x$  en el semimódulo por la derecha  $(X, X, \perp, \otimes)$  y  $\text{lan}(x)$  es el anulador de  $x$  en el semimódulo por la izquierda  $(X, X, \perp, \otimes)$ .

En todas estas observaciones hemos usado la técnica “el arte de relacionar”.

### Ejemplos:

1. En el semianillo  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$  vamos a calcular el anulador de algún elemento:

$$\text{ran}(0) = \{x \in \mathbb{N} / 0 \cdot x = 0\} = \mathbb{N}$$

$$\text{lan}(5) = \{x \in \mathbb{N} / x \cdot 5 = 0\} = \{0\}.$$

En este caso, como el semianillo es conmutativo, coinciden el anulador por la izquierda con el anulador por la derecha y tendríamos que hablar simplemente de anulador. En este caso el anulador de cualquier número que no sea cero es  $\{0\}$ .

2. Dado el semianillo  $(\mathbb{N}_6, +, \cdot)$ , vamos a calcular los anuladores de cada uno de sus elementos:

$$\text{ann}([0]) = \{x \in \mathbb{N}_6 / x \cdot [0] = [0]\} = \mathbb{N}_6.$$

$$\text{ann}([1]) = \{x \in \mathbb{N}_6 / x \cdot [1] = [0]\} = \{[0]\}.$$

$$\text{ann}([2]) = \{x \in \mathbb{N}_6 / x \cdot [2] = [0]\} = \{[0], [3]\}.$$

$$\text{ann}([3]) = \{x \in \mathbb{N}_6 / x \cdot [3] = [0]\} = \{[0], [2], [4]\}.$$

$$\text{ann}([4]) = \{x \in \mathbb{N}_6 / x \cdot [4] = [0]\} = \{[0], [3]\}.$$

$$\text{ann}([5]) = \{x \in \mathbb{N}_6 / x \cdot [5] = [0]\} = \{[0]\}.$$

Hemos utilizado “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “el arte de relacionar”.

**Ejercicio:** Calcula los anuladores de cada uno de los elementos del semianillo  $(\mathbb{N}_5, +, \cdot)$ .

**Observación:** En un semianillo  $(X, \perp, \otimes)$ , si el semigrupo  $(X, \perp)$  es unitario y cancelativo, el anulador del elemento neutro  $e_X$  es todo el conjunto  $X$ . Ya que por la existencia de elemento neutro y por la propiedad distributiva de  $\otimes$  respecto de  $\perp$  tenemos:

$$\forall x \in X \quad (x \otimes y) \perp e_X = x \otimes y = x \otimes (y \perp e_X) = (x \otimes y) \perp (x \otimes e_X) \Rightarrow e_X = x \otimes e_X$$
 por la cancelativa.

**Ejercicio:** En el semimódulo  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ , calcula  $\forall x \in \mathbb{Z}_7 \quad \text{ann}_Z(x)$ .

**Ejercicio:** En  $\mathbb{N}_8$  construye las tablas de las operaciones suma y producto de forma análoga a como lo hemos hecho anteriormente con  $\mathbb{N}_5$ . Prueba que  $(\mathbb{N}_8, +, \cdot)$  es un anillo. Calcula los anuladores de cada uno de sus elementos.

**Ejercicio:** Da un ejemplo de semianillo distinto de los anteriores y calcula el anulador de alguno de sus elementos.

Para resolver este último ejercicio pueden sernos útiles las técnicas “el arte de relacionar” y “el entorno”.

### 2.8.3.2. Semimódulo divisible

Para que esta parte no resulte demasiado árida empezamos implicando a los alumnos con objeto de que vayan intuyendo las definiciones que después vamos a dar. Para ello les decimos: coge algún semimódulo conocido con la condición de que tenga elemento neutro la primera operación del anillo. Como cada uno de los alumnos puede elegir uno distinto, nosotros le vamos a llamar  $(X, S, *, o)$ , siendo el semianillo  $(X, \perp, \otimes)$ . Toma dos elementos  $x \in X$  y  $s \in S$ , que verifiquen la condición de que  $\text{lan}(x) \subset \text{ann}(s)$ . ¿Estos elementos verifican que  $\exists a \in S / s = x \circ a$ ? Prueba con todos los  $x \in X$  y  $s \in S$  para los que  $\text{lan}(x) \subset \text{ann}(s)$  y observa si verifican que  $\exists a \in S / s = x \circ a$ .

Para trabajar todo esto utilizamos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la solución de problemas”.

**Definición:** Sea el semimódulo  $(X, S, *, o)$ , y sea  $(X, \perp, \otimes)$  el semianillo con la condición de que el semigrupo  $(X, \perp)$  sea unitario. Dados dos elementos  $x \in X$  y  $s \in S$ , con  $\text{lan}(x) \subset \text{ann}(s)$ , decimos que  $s$  **es divisible por**  $x$  o que  $x$  **divide a**  $s$  si, y sólo si,

$$\exists a \in S / s = x \circ a.$$

**Definición:** Un **semimódulo**  $(X, S, *, o)$ , siendo el semianillo  $(X, \perp, \otimes)$  con el semigrupo  $(X, \perp)$  unitario, se dice **divisible** si, y sólo si, todos sus elementos son divisibles por cualquier elemento del semianillo, es decir, si:

$$\forall x \in X \quad \forall s \in S \quad \text{lan}_X(x) \subset \text{ann}_X(s) \Rightarrow \exists a \in S / s = x \circ a.$$

**Definición:** Los **semimódulos** que no sean divisibles vamos a decir que son **indivisibles**.

En los ejercicios que vienen a continuación vamos a aplicar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “el arte de relacionar”.

**Ejemplo:** Antes vimos que  $\mathbb{N}_5$  era un semimódulo sobre sí mismo, con la suma y el producto; igual podemos ver que  $\mathbb{N}_6$  también lo es. Veamos si es divisible. Para ello tendremos que comprobar que:

$$\forall [n] \in \mathbb{N}_6 \quad \forall [s] \in \mathbb{N}_6 \quad \text{lan}([n]) \subset \text{ann}([s]) \Rightarrow \exists [a] \in \mathbb{N}_6 / [s] = [n][a].$$

Vamos a ir tomando elementos de  $\mathbb{N}_6$  para ver si se verifica:

1. Para  $[n]=[0]=[s]$  tenemos  $\text{lan}([0])=\mathbb{N}_6 \subset \text{ann}([0])=\mathbb{N}_6 \Rightarrow \forall [a] \in \mathbb{N}_6 \quad [0]=[0][a]$ , no solo hay un  $[a] \in \mathbb{N}_6$  sino que todos los elementos de  $\mathbb{N}_6$  lo verifican.

Si tomamos:

2.  $[n]=[0]$  y  $[s]=[1]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([0])=\mathbb{N}_6 \subset \text{ann}([1])=\{[0]\}$  no tendría que probarse nada. Igual pasaría con todos los casos en los que sea  $[n]=[0]$  y  $[s] \neq [0]$ .

3.  $[n]=[1]$  y  $[s]=[0]$ ,  $\text{lan}([1])=\{[0]\} \subset \text{ann}([0])=\mathbb{N}_6 \Rightarrow \exists [0] \in \mathbb{N}_6 / [0]=[1][0]$ .

4.  $[n]=[1]$  y  $[s]=[1]$ ,  $\text{lan}([1])=\{[0]\} \subset \text{ann}([1])=\{[0]\} \Rightarrow \exists [1] \in \mathbb{N}_6 / [1]=[1][1]$ .



5.  $[n]=[1]$  y  $[s]=[2]$ ,  $\text{lan}([1])=\{[0]\} \subset \text{ann}([2])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [2] \in \mathbb{N}_6 / [2]=[1][2]$ .

6.  $[n]=[1]$  y  $[s]=[3]$ ,  $\text{lan}([1])=\{[0]\} \subset \text{ann}([3])=\{[0],[2],[4]\} \Rightarrow \exists [3] \in \mathbb{N}_6 / [3]=[1][3]$ .

7.  $[n]=[1]$  y  $[s]=[4]$ ,  $\text{lan}([1])=\{[0]\} \subset \text{ann}([4])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [4] \in \mathbb{N}_6 / [4]=[1][4]$ .

8.  $[n]=[1]$  y  $[s]=[5]$ ,  $\text{lan}([1])=\{[0]\} \subset \text{ann}([5])=\{[0]\} \Rightarrow \exists [5] \in \mathbb{N}_6 / [5]=[1][5]$ .

9.  $[n]=[2]$  y  $[s]=[0]$ ,  $\text{lan}([2])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([0])=\mathbb{N}_6 \Rightarrow \exists [3] \in \mathbb{N}_6 / [0]=[2][3]$ .

10.  $[n]=[2]$  y  $[s]=[1]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([2])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([1])=\{[0]\}$ , no tendríamos que probar nada.

11.  $[n]=[2]$  y  $[s]=[2]$ ,  $\text{lan}([2])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([2])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [1] \in \mathbb{N}_6 / [2]=[2][1]$ , también  $\exists [4] \in \mathbb{N}_6 / [2]=[2][4]$ .

12.  $[n]=[2]$  y  $[s]=[3]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([2])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([3])=\{[0],[2],[4]\}$ , no tendríamos que probar nada.

13.  $[n]=[2]$  y  $[s]=[4]$ ,  $\text{lan}([2])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([4])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [2] \in \mathbb{N}_6 / [4]=[2][2]$ , también  $\exists [5] \in \mathbb{N}_6 / [4]=[2][5]$ .

14.  $[n]=[2]$  y  $[s]=[5]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([2])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([5])=\{[0]\}$ , no tenemos que probar nada.

15.  $[n]=[3]$  y  $[s]=[0]$ ,  $\text{lan}([3])=\{[0],[2],[4]\} \subset \text{ann}([0])=\mathbb{N}_6 \Rightarrow \exists [2] \in \mathbb{N}_6 / [0]=[3][2]$ .

16.  $[n]=[3]$  y  $[s]=[1]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([3])=\{[0],[2],[4]\} \subset \text{ann}([1])=\{[0]\}$ , no tendríamos que probar nada.

17.  $[n]=[3]$  y  $[s]=[2]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([3])=\{[0],[2],[4]\} \subset \text{ann}([2])=\{[0],[3]\}$ , no tendríamos que probar nada.

18.  $[n]=[3]$  y  $[s]=[3]$ ,  $\text{lan}([3])=\{[0], [2], [4]\} \subset \text{ann}([3]) = \{[0], [2], [4]\} \Rightarrow \exists [1] \in \mathbb{N}_6 / [3]=[3][1]$ , también  $\exists [3] \in \mathbb{N}_6 / [3]=[3][3]$  y  $\exists [5] \in \mathbb{N}_6 / [3]=[3][5]$ .

19.  $[n]=[3]$  y  $[s]=[4]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([3])=\{[0],[2],[4]\} \subset \text{ann}([4])=\{[0],[3]\}$ , no tendríamos que probar nada.

20.  $[n]=[3]$  y  $[s]=[5]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([3])=\{[0],[2],[4]\} \subset \text{ann}([5])=\{[0]\}$ , no tenemos que probar nada.

21.  $[n]=[4]$  y  $[s]=[0]$ ,  $\text{lan}([4])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([0])=\mathbb{N}_6 \Rightarrow \exists [3] \in \mathbb{N}_6 / [0]=[4][3]$ .

22.  $[n]=[4]$  y  $[s]=[1]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([4])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([1])=\{[0]\}$ , no tendríamos que probar nada.

23.  $[n]=[4]$  y  $[s]=[2]$ ,  $\text{lan}([4])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([2])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [2] \in \mathbb{N}_6 / [2]=[4][2]$ , también  $\exists [5] \in \mathbb{N}_6 / [2]=[4][5]$ .

24.  $[n]=[4]$  y  $[s]=[3]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([4])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([3])=\{[0],[2],[4]\}$ , no tendríamos que probar nada.

25.  $[n]=[4]$  y  $[s]=[4]$ ,  $\text{lan}([4])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([4])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [1] \in \mathbb{N}_6 / [4]=[4][1]$ , también  $\exists [4] \in \mathbb{N}_6 / [4]=[4][4]$ .

26.  $[n]=[4]$  y  $[s]=[5]$ , como no se verifica la inclusión  $\text{lan}([4])=\{[0],[3]\} \subset \text{ann}([5])=\{[0]\}$ , no tenemos que probar nada.

27.  $[n]=[5]$  y  $[s]=[0]$ ,  $\text{lan}([5])=\{[0]\} \subset \text{ann}([0])=\mathbb{N}_6 \Rightarrow \exists [0] \in \mathbb{N}_6 / [0]=[5][0]$ .

28.  $[n]=[5]$  y  $[s]=[1]$ ,  $\text{lan}([5])=\{[0]\} \subset \text{ann}([1])=\{[0]\} \Rightarrow \exists [5] \in \mathbb{N}_6 / [1]=[5][5]$ .

29.  $[n]=[5]$  y  $[s]=[2]$ ,  $\text{lan}([5])=\{[0]\} \subset \text{ann}([2])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [4] \in \mathbb{N}_6 / [2]=[5][4]$ .

30.  $[n]=[5]$  y  $[s]=[3]$ ,  $\text{lan}([5])=\{[0]\} \subset \text{ann}([3])=\{[0],[2],[4]\} \Rightarrow \exists [3] \in \mathbb{N}_6 / [3]=[5][3]$ .

31.  $[n]=[5]$  y  $[s]=[4]$ ,  $\text{lan}([5])=\{[0]\} \subset \text{ann}([4])=\{[0],[3]\} \Rightarrow \exists [2] \in \mathbb{N}_6 / [4]=[5][2]$ .

32.  $[n]=[5]$  y  $[s]=[5]$ ,  $\text{lan}([5])=\{[0]\} \subset \text{ann}([5])=\{[0]\} \Rightarrow \exists [1] \in \mathbb{N}_6 / [5]=[5][1]$ ,

luego  $\mathbb{N}_6$  considerado como semimódulo sobre sí mismo es divisible.

**Ejercicio:** Estudia si  $(\mathbb{N}_5, +, \cdot)$  considerado como semimódulo sobre sí mismo, es divisible.

Idea: Observa que en la tabla del producto de  $\mathbb{N}_5 \setminus \{[0]\}$ , podemos afirmar que en cada fila y en cada columna aparecen todos los elementos de  $\mathbb{N}_5 \setminus \{[0]\}$ . Esto es debido a que  $(\mathbb{N}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot)$  es un grupo, y por lo tanto  $(\mathbb{N}_5, +, \cdot)$  es un cuerpo. Y en la fila y columna resultante de multiplicar por 0, siempre nos da 0.

**Ejemplo:** Vamos a ver si el semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_5, +, \cdot)$  es divisible; tendríamos que demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall [s] \in \mathbb{N}_5 \text{ con } \text{lan}(n) \subset \text{ann}([s]) \Rightarrow \exists [a] \in \mathbb{N}_5 / [s] = n[a].$$

Esto lo vamos a probar en todos los casos. Si encontramos dos elementos uno  $n \in \mathbb{N}$  y otro  $[s] \in \mathbb{N}_5$  con  $\text{lan}(n) \subset \text{ann}([s])$  para los que no haya ningún elemento  $[a] \in \mathbb{N}_5 / [s] = n[a]$ , entonces este semimódulo no sería divisible.

En el caso de ser  $n=0$  y  $[s]=[0]$  tenemos que  $\text{ann}(0) = \mathbb{N} \subset \text{ann}([0]) = \mathbb{N}$ , no solamente existe un  $[a]$  sino que cualquiera que sea  $[a]$  verifica que  $[0] = 0[a] = [0]$ .

Para  $n=0$  y  $[s] \neq [0]$  no se verifica la inclusión  $\text{lan}(0) = \mathbb{N} \subset \text{ann}([s]) = 5\mathbb{N}$ , no tendríamos que probar nada.

Para  $n \neq 0$  y  $[s]=[0]$  se verifica la inclusión  $\text{lan}(n) = \{0\} \subset \text{ann}([s]) = \mathbb{N} \Rightarrow \exists [0] \in \mathbb{N}_5 / [0] = n[0]$ .

Si tomamos  $n \neq 0$  y  $[s] \neq [0]$  tenemos que  $\text{lan}(n) = \{0\} \subset \text{ann}([s]) = 5\mathbb{N}$ , veamos si  $\exists [a] \in \mathbb{N}_5 / [s] = n[a]$ :

$$n=1 \text{ y } [s]=[1], \exists [1] \in \mathbb{N}_5 / [1] = 1[1],$$

$$n=1 \text{ y } [s]=[2], \exists [2] \in \mathbb{N}_5 / [2] = 1[2], \text{ etc.}$$

$$n=1 \text{ y } [s] \neq [0], \exists [s] \in \mathbb{N}_5 / [s] = 1[s],$$

$$n=2 \text{ y } [s]=[1], \exists [3] \in \mathbb{N}_5 / [1] = 2[3],$$

$$n=2 \text{ y } [s]=[2], \exists [1] \in \mathbb{N}_5 / [2] = 2[1],$$

$$n=2 \text{ y } [s]=[3], \exists [4] \in \mathbb{N}_5 / [3] = 2[4],$$

$n=2$  y  $[s]=[4]$ ,  $\exists[2] \in \mathbb{N}_5 / [4]=2[2]$ ,  
 $n=3$  y  $[s]=[1]$ ,  $\exists[2] \in \mathbb{N}_5 / [1]=3[2]$ ,  
 $n=3$  y  $[s]=[2]$ ,  $\exists[4] \in \mathbb{N}_5 / [2]=3[4]$ ,  
 $n=3$  y  $[s]=[3]$ ,  $\exists[1] \in \mathbb{N}_5 / [3]=3[1]$ ,  
 $n=3$  y  $[s]=[4]$ ,  $\exists[3] \in \mathbb{N}_5 / [4]=3[3]$ ,  
 $n=4$  y  $[s]=[1]$ ,  $\exists[4] \in \mathbb{N}_5 / [1]=4[4]$ ,  
 $n=4$  y  $[s]=[2]$ ,  $\exists[3] \in \mathbb{N}_5 / [2]=4[3]$ ,  
 $n=4$  y  $[s]=[3]$ ,  $\exists[2] \in \mathbb{N}_5 / [3]=4[2]$ .

Hasta ahora parece que todo responde a las expectativas que teníamos, pero si tomamos

$$n=5 \text{ y } [s]=[1] \quad \forall [x] \in \mathbb{N}_5 \quad 5[x]=[0] \neq [1],$$

luego no existe ningún  $[a] \in \mathbb{N}_5 / 5[a]=[1]$  y por lo tanto este semimódulo es indivisible.

**Ejercicio:** Toma otro nuevo semimódulo y prueba si es divisible.

Este ejercicio lo resolveríamos aplicando las técnicas “el arte de relacionar”, “la sinapsis” y “el entorno”.

### 2.8.3.3. Magnitudes divisibles e indivisibles

Les plantearemos a los alumnos: ¿podemos considerar las magnitudes como semimódulos? En caso afirmativo, ¿cuál puede ser el semianillo? ¿Podemos hablar de magnitudes divisibles?; ¿cómo las definiríamos? Pon un ejemplo de magnitudes divisibles y de otras que no lo sean. ¿Las que son divisibles verifican que cualquier cantidad no nula se pueda dividir en cualquier número no nulo de partes iguales?

Utilizaremos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en sus dos aspectos “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo familiar extraño”, “el entorno”, “la solución de problemas”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

La definición de magnitud divisible que vamos a dar se basará en la de semimódulo divisible, ya que una magnitud  $M$  es un semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ . Si este semimódulo es divisible, diremos que la magnitud es divisible.

**Definición:** Una **magnitud**  $M$  diremos que es **divisible** si cumple que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \text{lan}_{\mathbb{N}}(n) \subset \text{ann}_{\mathbb{N}}(x) \Rightarrow \exists y \in M / x = ny.$$

Dicho con otras palabras: una magnitud  $(M,+)$  se dirá divisible si el semimódulo  $(\mathbb{N},M,+, \cdot)$  es divisible.

Como sabemos que nos referimos al semianillo  $\mathbb{N}$ , en todos los casos, no le vamos a poner subíndices.

**Proposición:** En las magnitudes es superflua la condición  $\text{lan}(n) \subset \text{ann}(x)$ , que era necesario imponer en el caso de semimódulos. Además es suficiente considerar  $\forall x \in M \setminus \{0_M\}$  y  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Demostración: En efecto, vamos a distinguir dos casos:

1) Para  $n=0$  tenemos que  $\text{lan}(n)=\mathbb{N}$  y para que  $\text{lan}(n) \subset \text{ann}(x)$  tendría que ser  $\text{ann}(x)=\mathbb{N}$ , pero como  $1 \in \mathbb{N}$  debería estar en el anulador de  $x$ , tendría que ser  $0_M = 1 \cdot x = x$ , luego  $0_M = x$ . Por tanto si  $n=0$  sólo se verifica que  $\text{lan}(n) \subset \text{ann}(x)$  si  $x=0_M$ , y en este caso no sólo  $\exists y \in M / x=ny$  sino que  $\forall y \in M \quad 0_M = x = 0 \cdot y$ . Luego para  $n=0$  tiene que ser  $x=0_M$  y es cierto. No tenemos que considerar el caso en que  $n=0$  y  $x \neq 0_M$ , pues la inclusión  $\text{lan}(0) \subset \text{ann}(x)$  sería falsa.

2) Si  $n \neq 0$ , será  $\text{lan}(n)=\{0\}$  y  $\forall x \in M \quad \{0\} \subset \text{ann}(x)$ . Si  $x=0_M$   $\text{ann}(x)=\mathbb{N}$  y se verifica  $\{0\} \subset \text{ann}(x)=\mathbb{N}$ , luego la condición  $\text{lan}(n) \subset \text{ann}(x)$  va a ser siempre cierta. Habría que probar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \exists y \in M / x=ny;$$

en el caso  $x=0_M$ ,  $\exists 0_M \in M / 0_M = n \cdot 0_M$ , por tanto la condición  $\text{lan}(n) \subset \text{ann}(x)$  es superflua, y no hay que considerar los casos  $n=0$  ni  $x=0_M$ , con lo que habríamos concluido la proposición.

La proposición que acabamos de demostrar nos permite dar una definición equivalente de magnitud divisible. Para ello utilizamos “el arte de relacionar” y “la sinapsis”.

**Definición:** Una magnitud  $M$  diremos que es **divisible** si verifica que:

$$\forall x \in M \setminus \{0_M\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists y \in M / x=ny.$$

A la vista de esta definición podemos afirmar que para que una magnitud sea divisible se tiene que cumplir que cualquier cantidad no nula se pueda dividir en cualquier número no nulo de partes iguales.

Esta definición coincide con la mayoría de las definiciones que hemos encontrado, sólo que ellas consideran todo  $M$  en lugar de  $M \setminus \{0_M\}$ , como puede verse, por ejemplo, en Aizpún y otros (1976: 12).

Chamorro en su tesis (1997: 79) no le da nombre a este tipo de magnitudes, pero sí considera que pueda haber magnitudes que verifiquen esta condición.

**Observación:** Dado  $x \in M \setminus \{0_M\}$ ,  $x$  puede ser divisible por más de un número natural, es más, puede que  $x = ny = n'y$  con  $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $n \neq n'$ . Por ejemplo, en  $\mathbb{Z}_6$ ,

$$[2] = 1 \cdot [2] = 7 \cdot [2].$$

También se tiene que dados  $x$  y  $n$ , siendo  $x$  divisible por  $n$ , el elemento  $y$  no tiene por qué ser único. Por ejemplo, en  $\mathbb{Z}_6$ ,

$$[2] = 8 \cdot [1] = 8 \cdot [4]$$

En el concepto de magnitud teníamos que:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \exists! nx \in M$ , es decir, para todo número natural y cualquier cantidad de la magnitud, existe su producto y es único, por ser la ley de composición externa, pero  $\forall x \in M \setminus \{0_M\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  no tiene que  $\exists! y \in M / ny = x$ . Cuando este elemento “ $y$ ” exista y sea único lo escribiremos de la forma  $y = \frac{1}{n}x$  y diremos que la cantidad “ $y$ ” es el cociente de dividir la cantidad “ $x$ ” por el número natural  $n$ , y que la **cantidad  $x$  es divisible por  $n$** .

**Proposición:** Sea  $M$  un  $\mathbb{N}$ -semimódulo divisible tal que  $\forall x \in M \setminus \{0_M\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists! y \in M / x = ny$ , entonces  $M$  puede ser dotado de manera natural de estructura de  $\mathbb{Q}^+$ -semimódulo.

**Demostración:** En efecto, ya teníamos que  $(M, +)$  era un semigrupo unitario y conmutativo y tenemos una ley de composición externa:

$$\begin{aligned} \bullet: \mathbb{Q}^+ \times M &\rightarrow M \\ \left(\frac{m}{n}, x\right) &\rightarrow \frac{m}{n}x \end{aligned}$$

ya que de forma análoga a como se hizo antes, si  $r = \frac{m}{n}$ , se define:

$$m\left[\frac{1}{n}x\right] = \frac{1}{n}x + \frac{1}{n}x + \dots + \frac{1}{n}x = \frac{m}{n}x,$$

donde la fracción  $\frac{m}{n}$  es un representante cualquiera de la clase que

define el mismo número racional. Se dice que  $\frac{m}{n}x$  es el producto del

número racional  $\frac{m}{n}$  por la cantidad  $x$ , que está bien definida si  $y = \frac{1}{n}x$  es único. Y dejamos como ejercicio probar que se verifican las cuatro propiedades de la ley de composición externa necesarias para tener un semimódulo.

Por tanto, si la magnitud —que era un semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ — es divisible, puede ser dotada de estructura de  $\mathbb{Q}^+$ -semimódulo.

También es cierto que si  $M$  es un  $\mathbb{Q}^+$ -semimódulo, es divisible. Ya que

$$\forall x \in M \setminus \{0_M\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists y \in M / x = ny.$$

pues sería  $y = \frac{1}{n}x \in M$  por ser producto de un elemento de  $\mathbb{Q}^+$  por uno de  $M$ .

**Observación:** En este caso estamos considerando el producto de un número racional por una cantidad de una magnitud. En una magnitud utilizamos dos conjuntos: el conjunto  $M$  que es la magnitud y el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales, que es el conjunto de operadores sobre la magnitud, si bien este conjunto no tiene que ser  $\mathbb{N}$ , puede ser  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}^+$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}$ , etc. según los casos.

**Observación:** El resultado de esta proposición puede considerarse análogo al que dice que todo módulo sobre un dominio de integridad puede ser ampliado a un módulo sobre su cuerpo de fracciones, cuando en lugar de un dominio de integridad consideramos  $\mathbb{N}$ . Dicho resultado no lo vamos a probar. Quien quiera consultarlo puede hacerlo en Atiyah y Macdonald (1978: 44).

**Definición:** A las **magnitudes** que no son divisibles se les llama **indivisibles**.

Con los ejemplos y ejercicios queremos aplicar las técnicas “el entorno” y “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

**Ejemplos:** Ponemos alguna magnitud divisible, para que vosotros escribáis otras.

1. La longitud de los segmentos del plano es una magnitud divisible.

En efecto, para ello tenemos que probar que:

$$\forall [AB] \in L \setminus \{0_L\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists [CD] \in L / [AB] = n[CD].$$

Es cierto que si cogemos cualquier segmento  $[AB]$  no nulo y cualquier número natural  $n$  distinto de 0, hay siempre otro segmento  $[CD]$  que multiplicado por  $n$  nos da el segmento dado;  $[CD]$  es el resultado de dividir el segmento dado en  $n$  partes iguales. Por tanto la longitud de los segmentos del plano es una magnitud divisible.



2. ¿El peso es una magnitud divisible? Hay que tener en cuenta que podemos tratar con materiales y asociarles a éstos su peso. En este caso, la magnitud  $M$  correspondiente puede no ser divisible. Cuando lo sea, diremos que la magnitud  $M$  **está constituida por materiales separables**, esto es, cualquier cantidad no nula de dicha magnitud puede dividirse en cualquier número  $n \neq 0$  de partes iguales. Razona por qué el peso es una magnitud divisible siempre que hagamos referencia a materiales separables.

Por ejemplo, si estamos pesando harina, el peso será una magnitud divisible. Si lo que pesamos son manzanas que no queremos partir, no sería divisible.

3. La magnitud  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$  no es divisible ya que no se verifica:  

$$\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists y \in \mathbb{N} / x = ny.$$

Para  $x \neq 0$  y  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  debería  $\exists y \in \mathbb{N} / x = ny$ , pero esto no se cumple siempre, por ejemplo para  $x=3$  y  $n=5$  no hay ningún  $y$  de modo que  $5y=3$ .

**Ejercicio:** ¿Es divisible  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_7, +, \cdot)$ ? ¿Y  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_8, +, \cdot)$ ?

**Ejercicio:** ¿Podrías decir alguna otra magnitud divisible?; ¿y alguna indivisible? ¿Es  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, +, \cdot)$  una magnitud divisible?; ¿y  $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ ?

## 2.8.4. Magnitudes escalares y vectoriales

Para motivar la definición que después daremos de magnitudes escalares, empezaríamos preguntando a los alumnos: ¿qué es una relación de orden? Pon un ejemplo. ¿Cuándo una relación es de orden total? Encuentra alguna relación que sea de orden total. ¿Podrías definir sobre una magnitud una relación de orden?; ¿cómo? ¿Sabes de alguna magnitud en la que se pueda introducir una relación de orden total? ¿Cuándo una magnitud se dice que es escalar? ¿Conoces alguna magnitud escalar?

Utilizamos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas” o “el método Delfos”, “la sinéctica”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

Las magnitudes que llamaremos escalares cumplen la condición de que podemos colocar sus elementos sobre una recta —escala. Además, dadas dos cantidades tales que una de ellas no sea el elemento neutro y

que sea mayor que él, siempre podemos sumar esta cantidad cierto número de veces con ella misma hasta llegar a sobrepasar a la otra. Esta última será la diferencia fundamental entre magnitudes escalares y vectoriales.

Por ejemplo, podemos colocar los elementos del conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales sobre una recta, y además si nos dan dos números naturales no nulos y repetimos uno de ellos como sumando, el resultado llega a ser mayor que el otro. Por cumplir estas condiciones serán los números naturales una magnitud escalar. Sin embargo, si consideramos el conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , aunque podamos colocar todos sus elementos sobre una recta, no hay manera de hacer  $n(0,1)$  mayor que, por ejemplo,  $(1,0)$ ; esta magnitud no será escalar, la llamaremos vectorial.

### 2.8.4.1. Relación de orden

Quizá el alumno conozca lo que es una relación de orden. Por si acaso empezamos preguntándole: ¿conoces alguna relación de orden? Si es así, dínosla. Para tener una relación de orden, ¿sabes lo que hace falta? En el ejemplo que has dado de relación de orden, ¿podrías considerar, de alguna forma, el máximo de algún conjunto? ¿Serías capaz de definir cuándo un elemento es máximo?; ¿cómo? En caso afirmativo, toma un conjunto, di cuál es su máximo y define dicho concepto. Haz lo mismo para el mínimo.

Aplicamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Estas relaciones las llevamos a cabo frecuentemente en la vida diaria, por ejemplo, cuando queremos colocar los alumnos de la clase según su altura de menor a mayor, o según su peso, o por la edad..., lo que establecemos es una relación de orden.

**Definición:** Dado un conjunto  $A \neq \emptyset$  y en él una relación  $R$ , decimos que  $R$  es una **relación de orden** si verifica las propiedades:

1. Reflexiva:  $\forall a \in A \quad aRa$ .
2. Antisimétrica:  $\forall a, b \in A \quad aRb \text{ y } bRa \Rightarrow a=b$ .
3. Transitiva:  $\forall a, b, c \in A \quad aRb \text{ y } bRc \Rightarrow aRc$

Esta definición puede verse, por ejemplo, en Dubreil-Dubreil Jacotin (1971: 183).

**Ejemplo:** En el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales, la relación de igualdad es una relación de orden.

**Ejemplo:** Consideramos en el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales la relación:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N} / b = a + c.$$

Se puede probar sin dificultad que esta relación es de orden. Es por lo que las relaciones de orden, en general, se denotan habitualmente por  $\leq$ .

**Ejercicio:** ¿Es de orden la relación  $\leq$  en  $\mathbb{Z}$ ? ¿Cómo definirías dicha relación? Escribe otra relación definida sobre  $\mathbb{Z}$  que sea de orden.

### Ejercicios:

1. Prueba que en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  la relación definida

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a, b) \leq (c, d) \iff a < c \text{ ó } (a = c \text{ y } b \leq d)$$

es una relación de orden; a este orden se le suele llamar **orden lexicográfico**.

2. Prueba que en  $\mathbb{Z}^n$  la relación definida

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff a_1 < b_1 \text{ ó } (a_1 = b_1 \text{ y } a_2 < b_2) \text{ ó } (a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2 \text{ y } a_3 < b_3) \text{ ó } \dots \text{ ó } (a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2 \text{ y } \dots, a_{n-1} = b_{n-1} \text{ y } a_n \leq b_n)$$

es de orden; a este orden también se le suele llamar **orden lexicográfico**. Razona por qué.

**Observación:** Dado un conjunto ordenado, la relación entre los distintos elementos quedaría más clara si la representáramos mediante un **diagrama de Hasse**, éste es un diagrama deducido del diagrama sagital (en donde enlazamos mediante flechas los elementos que se relacionan, es decir, si  $x$  se relaciona con  $y$ , tendríamos una flecha que parte de  $x$  y termina en  $y$ ). Al ser cierta la propiedad reflexiva, prescindimos de la flecha que une cada elemento con él mismo y sobreentendemos que todo elemento se relaciona con él mismo. Como la antisimetría también es cierta, entre dos elementos no podemos tener dos flechas en sentido contrario. Al ser la relación transitiva, si tenemos un elemento  $x$  relacionado con  $y$  y este  $y$  relacionado con  $z$ , tendríamos una flecha que va de  $x$  hacia  $y$ , otra de  $y$  hacia  $z$ , y en lugar de poner una flecha que vaya de  $x$  hacia  $z$ , prescindimos de ella, y pensamos que un elemento se relaciona con todos aquellos a los que se pueda llegar, sin invertir las flechas.

**Ejemplo:** Sobre el conjunto  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$  tenemos definida la relación de orden dada por el grafo  $G = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, f), (b, b), (b, d), (b, f), (c, c), (c, d), (c, f), (d, d), (d, f), (e, e), (e, c), (e, d), (e, f), (f, f)\}$ . Dejamos como ejercicio el probar que, efectivamente, es una relación de

orden y vamos a construir el diagrama de Hasse correspondiente, que sería:

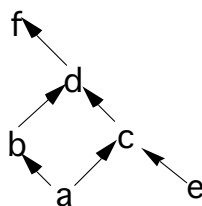


Figura 22: Diagram de Hasse

**Ejercicio:** ¿Cómo crees que hemos hecho el diagrama de Hasse del ejemplo anterior? Razona si en él tenemos todos los pares del grafo.

**Ejercicio:** Representa alguna de las relaciones de orden que tenemos en los ejemplos anteriores mediante un diagrama de Hasse.

**Definiciones:** Dada una relación de orden  $(A,R)$  y dado el conjunto  $X$  siendo  $\emptyset \neq X \subset A$ , decimos que

$m \in X$  es un **máximo** de  $X$   $\iff \forall x \in X \ x R m$ ,

$m \in X$  es un **mínimo** de  $X$   $\iff \forall x \in X \ m R x$ .

Además del máximo y el mínimo se podrían estudiar otros elementos notables que puede tener un conjunto con una relación de orden (para ello puede consultarse, por ejemplo, Queysanne (1973: 60 y siguientes)); nos limitamos a estos elementos por ser los que necesitaremos en nuestra exposición.

**Ejemplo:** Si tomamos en  $X=\{b,c,d\}$  la relación dada anteriormente, el máximo sería  $d$ , pero no tiene mínimo. Para  $Y=\{a,b,c\}$  el mínimo sería  $a$ , pero no tiene máximo. Sin embargo, para  $Z=\{e,c,d\}$  el máximo es  $d$  y el mínimo  $e$ .

**Ejercicio:** Sea  $(\mathbb{N}, \leq)$  y sea  $X=\{1,3,5,7\} \subset \mathbb{N}$ . ¿Tiene algún máximo?; ¿y mínimo?

**Ejercicio:** En el conjunto  $E=\{a,b,c,d,e,f\}$ , con la relación dada en el ejemplo anterior, consideramos los subconjuntos  $X=\{a,b,d\}$ ,  $X'=\{a,c,d\}$  y  $X''=\{b,c\}$ . Calcula los máximos y los mínimos, en caso de que los haya.

**Proposición:** El máximo y el mínimo, si existen, son únicos.

**Demostración:** Sea la relación de orden  $(A,R)$  y sea  $\emptyset \neq X \subset A$ , suponemos que  $X$  tiene dos máximos  $M$  y  $M'$ .

a) Por ser  $M$  máximo  $\forall x \in X \ x R M$ , y como  $M' \in X$  verifica  $M' R M$ .

**b)** Y por ser  $M'$  máximo  $\forall x \in X \ xRM'$ , y como  $M \in X$  verifica  $MRM'$ . Pero como  $R$  era una relación de orden, verifica la propiedad antisimétrica, luego  $M=M'$ , y por tanto el máximo sería único.

**Ejercicio:** Demuestra de forma análoga que si existe mínimo, es único.

Una vez que el alumno conoce las relaciones de orden podríamos preguntarle: ¿en una magnitud es posible definir una relación de orden? Toma una magnitud absoluta y da una relación de orden en ella. Haz lo mismo con una magnitud relativa.

Utilizaremos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

**Definición:** De manera análoga a como hemos hecho en el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales, en una magnitud  $(M,+)$  podemos definir la siguiente relación:

$$\forall a, b \in M \quad a \leq b \mid \text{---} \mid \exists c \in M / \quad b = a + c \quad (R),$$

esto es, decimos que la cantidad  $a$  es menor o igual que la  $b$  si encontramos otra cantidad  $c$  que sumada con la  $a$  nos da la  $b$ . En caso de que esta relación sea de orden, a dicha ordenación se le suele llamar **ordenación natural del semigrupo**, por ser la ordenación definida a partir de la ley de composición interna del semigrupo.

Esta relación verifica las propiedades:

1. Reflexiva:  $\forall a \in M \quad a \leq a$ .

Pues  $a \leq a$   $\forall a \in M$  por tener elemento neutro  $(M, +)$ .

2. Transitiva:  $\forall a, b, c \in M \quad a \leq b \text{ y } b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$$a \leq b \text{ y } b \leq c \text{ } \vdash \text{---} \text{---} \text{ } \exists x \in M / \quad b = a + x \text{ y } \exists y \in M / \quad c = b + y,$$

sustituyendo b por su valor tenemos

$c = (a+x)+y = a+(x+y)$  por la propiedad asociativa, luego

$$\exists x+y \in M / \quad c=a+(x+y) \quad | \text{---} | \quad a \leq c.$$

3. Antisimétrica:  $\forall a, b \in M \quad a \leq b \text{ y } b \leq a \Rightarrow a = b.$

Ya que  $a \leq b$  y  $b \leq a$   $\implies \exists x \in M / b = a + x$  y  $\exists y \in M / a = b + y$ ,  
sustituyendo el valor de  $a$  tenemos

$b=(b+y)+x=b+(y+x)$  por la propiedad asociativa, y por el elemento neutro  $b+0=b=b+(y+x)$ , y si se cumple la propiedad

(1) Cancelativa:  $\forall a, b, x \in M \quad a+x=b+x \Rightarrow a=b$ ,  
tenemos que  $y+x=0$ . Y si es cierto que

$$(2) \forall x, y \in M \quad x+y=0 \Rightarrow x=0 \text{ e } y=0.$$

que nos dice que si la suma de dos cantidades es la cantidad nula, ambas cantidades son la cantidad nula —o que el único elemento de  $M$  que tiene opuesto es el neutro—, tendríamos que  $x=y=0$  y por tanto  $a=b+x=b+0=b$ , luego si son ciertas (1) y (2) se verifica la propiedad antisimétrica.

Este resultado podemos resumirlo como sigue:

**Proposición:** Sea  $(M,+)$  una magnitud, y definimos en  $M$  la siguiente relación

$$(R) \quad \forall a,b \in M \quad a \leq b \iff \exists c \in M / b=a+c,$$

entonces:

- (i)  $(R)$  es reflexiva y transitiva,
- (ii) si  $(M,+)$  es cancelativo y  $0$  es el único elemento con opuesto,  $(R)$  es una relación de orden.

**Ejemplo:** Las condiciones (1) y (2) son ciertas en  $\mathbb{N}$ , pero no en  $\mathbb{Z}$ , ya que (1) es cierta en ambos, sin embargo (2) sí se verifica en  $\mathbb{N}$  pero no en  $\mathbb{Z}$ : basta sumar un entero y su opuesto.

**Ejemplo:** En el semigrupo unitario y conmutativo  $(\mathcal{P}(E),\cup)$ , donde  $E$  es un conjunto no vacío, la ordenación natural es la inclusión, ya que

$$\forall A,B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \iff \exists C \in \mathcal{P}(E) / B=A \cup C.$$

**Observación:** Hay magnitudes que no verifican (1) ni (2), por ejemplo,  $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$  con la igualdad como relación de orden, no verifica (1), ya que tenemos, por ejemplo, que

$$[2] \cdot [2] = [2] \cdot [0] \text{ siendo } [2] \neq [0]$$

ni (2), pues

$$[3] \cdot [3] = [1] \text{ siendo } [3] \neq [1].$$

**Observación:** Hay relaciones que no necesitan que se verifiquen (1) y (2) para ser de orden, por ejemplo  $(\mathbb{N},=)$ . Si queremos, además, que  $\mathbb{N}$  sea una magnitud podemos definir la operación:

$$\forall a,b \in \mathbb{N} \quad a * b = a + b + a \cdot b.$$

Dejamos pendiente probar que  $(\mathbb{N},*)$  es un semigrupo unitario y conmutativo.

**Observación:** En una magnitud  $(M,+)$ , la relación  $(R)$  no tiene por qué ser una relación de orden, aunque  $+$  sea cancelativa. Por ejemplo,  $(\mathbb{Z},+)$  es una magnitud relativa que verifica la propiedad cancelativa, y la relación

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{Z} / b=a+c$$

no es de orden ya que no se verifica la antisimétrica, pues tenemos, por ejemplo, que

$2 \leq -2$   $\text{---}$   $\exists -4 \in \mathbb{Z} / -2 = 2 + (-4)$  y  $-2 \leq 2$   $\text{---}$   $\exists 4 \in \mathbb{Z} / 2 = -2 + 4$  siendo  $-2 \neq 2$ .

**Ejercicio:** Prueba, de forma análoga a como se ha hecho en el ejemplo anterior, que en  $(\mathbb{Z}_4, +)$ , aunque se verifique la propiedad cancelativa de la suma, la relación (R) no es de orden.

**Observación:** Podemos encontrar alguna magnitud  $(M, *)$  en la que  $*$  no es cancelativa, pero sí podemos tener una relación de orden, por ejemplo:

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabla 11: Magnitud no cancelativa, con una relación de orden.

con la relación de orden  $0 \leq 1 \leq 2$ , ya que, por ejemplo,  $1 * 1 = 1 * 2$  pero  $1 \neq 2$ .

**Ejercicio:** Prueba que en el ejemplo dado en la observación anterior  $(M, *)$  es efectivamente una magnitud.

Según los ejemplos que hemos visto hasta ahora, parece lógico pensar que con la ordenación (R) el neutro es el mínimo y que si la magnitud es relativa, dicha relación no es de orden. Estos resultados los vamos a ver en las proposiciones que vienen a continuación.

Para llegar a estas conclusiones podemos utilizar las técnicas: “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

**Proposición:** Dada la magnitud  $(M, +)$ , con  $M \neq \{0\}$ , si la relación

$$(R) \quad \forall a, b \in M \quad a \leq b \text{ --- } \exists c \in M / b = a + c,$$

es de orden, el elemento neutro es el mínimo de M, y por tanto si hay un elemento que es menor o igual que todos los demás, éste es el neutro.

**Demostración:** Como el semigrupo  $(M, +)$  es unitario, se verifica que:

$\exists 0 \in M \quad \forall a \in M \quad a + 0 = 0 + a = a \Rightarrow \forall a \in M \quad \exists a \in M / a = 0 + a \Rightarrow \forall a \in M \quad 0 \leq a$ ,  
luego la cantidad nula es menor o igual que cualquier otra cantidad, por tanto es el mínimo de M y, como el mínimo es único, no existen





es de orden, y le vamos a llamar **orden inducido en el grupo por el semigrupo  $M_+$** .

Demostración: Veamos que se cumplen las condiciones necesarias para que la relación así definida sea una relación de orden:

1. Reflexiva:  $\forall a \in M \quad a \leq a$ .

Pues  $a \leq a$   $\iff \exists 0' \in M_+ / a = a + 0'$  por tener elemento neutro  $(M_+, +)$ . Pero el elemento neutro del semigrupo  $(M_+, +)$  es el mismo que el de  $(M, +)$ , como vamos a ver a continuación.

**Observación:** Si la magnitud  $(M, +)$  es relativa y podemos encontrar un subconjunto  $M_+$  —de  $M$ — tal que  $(M_+, +)$  sea un semigrupo unitario, el elemento neutro  $0'$  de  $(M_+, +)$  es el mismo que el de  $(M, +)$ .

Ya que si el elemento neutro de  $(M, +)$  fuese  $0 \neq 0'$ , tendríamos que  $\forall x \in M \quad x + 0 = x$  y  $\forall y \in M_+ \quad y + 0' = y$ , pero  $M_+ \subset M$ , luego será

$$\forall y \in M_+ \quad y + 0 = y = y + 0';$$

como sabemos que  $(M, +)$  es una magnitud relativa, es un grupo abeliano, y por tanto en ella se cumple la propiedad cancelativa, luego

$$0 = 0', \text{ como queríamos probar.}$$

2. Antisimétrica:  $\forall a, b \in M \quad a \leq b \text{ y } b \leq a \Rightarrow a = b$ .

Ya que  $a \leq b$  y  $b \leq a$   $\iff \exists x \in M_+ / b = a + x$  y  $\exists y \in M_+ / a = b + y$ , sustituyendo el valor de  $a$  tenemos

$$b = (b + y) + x = b + (y + x)$$

por la propiedad asociativa, y por la existencia de elemento neutro

$$b + 0 = b = b + (y + x),$$

como  $(M, +)$  es una magnitud relativa, es un grupo, y por tanto, se cumple la propiedad cancelativa, además  $M_+$  verifica (2), luego tenemos:

$$y + x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ e } x = 0,$$

con lo que tendríamos que  $y = x = 0$ , y será

$$a = b + x = b + 0 = b.$$

3. Transitiva:  $\forall a, b, c \in M \quad a \leq b \text{ y } b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$a \leq b$  y  $b \leq c$   $\iff \exists x \in M_+ / b = a + x$  y  $\exists y \in M_+ / c = b + y$ , sustituyendo  $b$  por su valor tenemos

$$c = (a + x) + y = a + (x + y) \text{ por la propiedad asociativa, luego}$$

$$\exists x + y \in M_+ / c = a + (x + y) \iff a \leq c.$$

**Definición:** En una magnitud  $(M, +)$  relativa, al subconjunto  $M_+$  de  $M$  tal que  $(M_+, +)$  sea un semigrupo unitario y que verifique

$$(2) \quad \forall x, y \in M_+ \quad x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0,$$

si existe, le llamaremos **conjunto de los elementos positivos** de  $M$ .

**Observación:** Evidentemente la relación anterior es equivalente a

$$\forall a, b \in M \quad a \leq b \iff \exists c \in M_+ / b = a + c \iff b - a \in M_+.$$

En la proposición que viene a continuación intentamos ver cuál es el semigrupo  $M_+$ . Esta proposición es la que justifica que a  $M_+$  se le llame conjunto de los elementos positivos de  $M$ .

**Proposición:** En una magnitud relativa  $(M, +)$ , con la ordenación inducida por un semigrupo  $M_+$ , se verifican las siguientes equivalencias:

$$i) \quad \forall a \in M \quad a \in M_+ \iff 0 \leq a \iff -a \leq 0.$$

$$ii) \quad \forall a, b \in M \quad a \leq b \iff -b \leq -a.$$

En efecto, veamos que  $a \in M_+ \iff 0 \leq a$ .

Si  $a \in M_+$ ,  $\exists a \in M_+ / a = 0 + a$ , luego  $0 \leq a$ .

Si  $0 \leq a \iff \exists x \in M_+ / a = 0 + x$ , pero como  $a = 0 + a$ , por la propiedad cancelativa tiene que ser  $x = a$  y por tanto  $a \in M_+$ .

Veamos que  $0 \leq a \iff -a \leq 0$ .

Si  $0 \leq a \iff a \in M_+$ , luego  $\exists a \in M_+ / 0 = -a + a \iff -a \leq 0$ .

Si  $-a \leq 0 \iff \exists x \in M_+ / 0 = -a + x$ , pero sabemos que  $0 = -a + a$ , y por cancelativa tendría que ser  $x = a$ , luego  $a \in M_+ \iff 0 \leq a$ .

Así,  $M_+ = \{x \in M / 0 \leq x\}$  y llamamos  $M_- = \{x \in M / x \leq 0\}$ , siendo  $M_+ \cap M_- = \{0\}$ .

Veamos que  $a \leq b \iff -b \leq -a$ , para ello supongamos

$$a \leq b \iff \exists x \in M_+ / b = a + x \iff \exists x \in M_+ / -b = -a + (-x) \iff$$

$$\iff \exists x \in M_+ / -a = -b + x \iff -b \leq -a,$$

ya que por ser la magnitud relativa,  $(M, +)$  es grupo abeliano, y por tanto el opuesto de la suma es igual a la suma de los opuestos.

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{Q}, +)$ , la ordenación inducida por el semigrupo de los números racionales positivos,  $\mathbb{Q}_+$ , sería:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{Q}_+ / b = a + c.$$

Esta es la relación de orden que se considera en  $\mathbb{Q}$  de forma habitual.

Con este ejemplo intentamos aplicar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “el arte de relacionar”.

**Observación:** Por verificarse que  $\forall a \in M \quad a \in M_+ \iff 0 \leq a$  es por lo que hemos llamado a  $M_+$  conjunto de los elementos positivos de  $M$ ; también se le suele llamar **cono positivo** de  $M$  y se denota por

$$P(M) = \{x \in M / 0 \leq x\} = M_+.$$

Esta definición puede verse, por ejemplo, en Passman (1985: 585), si bien él exige tener una relación de orden total —concepto que se definirá más tarde— aunque no le pide la propiedad antisimétrica, nosotros la proponemos para conjuntos ordenados simplemente.

El cono positivo es tremendamente importante para poder tener una relación de orden en una magnitud relativa.

Si fuese  $a \leq 0 \iff 0 \leq -a \iff -a \in M_+$  es por lo que vamos a denotar por

$$N(M) = \{x \in M / x \leq 0\} = \{x \in M / -x \in M_+\} = M_-.$$

y le llamaremos **conjunto de los elementos negativos** de  $M$  o también **cono negativo** de  $M$ . Por tanto  $\forall a \in M \quad a \leq 0 \iff a \in M_-$ .

En los ejemplos y ejercicios que vienen a continuación vamos a usar las técnicas: “el entorno”, la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la solución de problemas”

## Ejemplos:

1. En  $(\mathbb{Z}, +)$  la relación de orden inducida en el grupo por el semigrupo unitario  $\mathbb{Z}_+$  sería:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a R b \iff \exists c \in \mathbb{Z}_+ / b = a + c,$$

que es la relación  $\leq$  habitual.

El cono positivo de  $(\mathbb{Z}, +)$  con la relación menor o igual es

$$P(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z} / 0 \leq x\} = \mathbb{Z}_+.$$

Y el cono negativo es

$$N(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 0\} = \mathbb{Z}_-.$$

En este caso, todos los elementos de  $\mathbb{Z}$  se relacionan con 0, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq x \quad \text{ó} \quad x \leq 0.$$

Además, por verificarse esta condición tenemos que todos los elementos de  $\mathbb{Z}$  se relacionan entre sí pues

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq x-y \text{ ó } x-y \leq 0.$$

Si  $0 \leq x-y$ ,  $x = y + (x-y)$ , y por tanto,  
 $\exists x-y \in \mathbb{Z}_+ / x = y + (x-y). \text{ } | \text{---} | y \leq x.$

Y si  $x-y \leq 0$   $| \text{---} | 0 \leq -(x-y) = y-x$ , tenemos que  $y = x + (y-x)$ , luego  
 $\exists y-x \in \mathbb{Z}_+ / y = x + (y-x). \text{ } | \text{---} | x \leq y.$

2. Si tomamos  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ , que es un grupo abeliano, luego es una magnitud relativa, la relación inducida en el grupo por un semigrupo unitario  $\mathbb{Q}^*_+$  quedaría determinada en cuanto fijemos dicho semigrupo. Elegimos

$$\mathbb{Q}^*_+ = P(\mathbb{Q}^*) = \{x \in \mathbb{Q}^* / x = \frac{p}{q} > 0 \text{ y } p \leq q\},$$

siendo  $\frac{p}{q}$  el representante canónico de la clase que define al número racional  $x$ . Vamos a ver que se verifica que  $(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$  es un semigrupo unitario:

a) Es ley de composición interna:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Q}^*_+ \quad x \cdot y &\in \mathbb{Q}^*_+ \text{ pues} \\ x > 0 \text{ e } y > 0 &\Rightarrow x \cdot y > 0, \text{ además} \\ x \cdot y &= \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \end{aligned}$$

por haber elegido los representantes canónicos, serían  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $r > 0$ , y  $s > 0$ , y

$$p \leq q \text{ y } r \leq s \Rightarrow p \cdot r \leq q \cdot s,$$

con lo que tenemos que  $x \cdot y \in \mathbb{Q}^*_+.$

b) Es asociativo por serlo todo  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ .

c) Existe elemento neutro que es, evidentemente, el  $1 \in \mathbb{Q}^*_+$  ya que cumple las condiciones que verifican sus elementos pues

$$1 = \frac{1}{1} > 0 \text{ y } 1 \leq 1.$$

Además

$$\forall x \in \mathbb{Q}^*_+ \quad 1 \cdot x = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1} = \frac{p}{q}.$$

Veamos que se cumple que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}^*_+ \quad x \cdot y = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1.$$

Como  $x \in \mathbb{Q}^*_+$  e  $y \in \mathbb{Q}^*_+$ ,  $x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} = 1 \Rightarrow p \cdot r = q \cdot s \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{s}{r};$

pero  $x \in \mathbb{Q}^*_+ \Rightarrow p \leq q \Rightarrow s \leq r$ , y también teníamos que  $y \in \mathbb{Q}^*_+ \Rightarrow r \leq s$ , por la antisimétrica de la relación  $\leq$  en  $\mathbb{Q}$  tenemos que  $r=s \Rightarrow y=1$ , y al ser  $x \cdot y=1 \Rightarrow x=1$ .

La relación inducida por el semigrupo  $(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$  es:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^* \quad aRb \text{ } | \text{---} | \exists c \in \mathbb{Q}^*_+ / b = a \cdot c,$$

que es casi la relación “divide a” sólo que está definida en  $\mathbb{Q}^*_+$ , luego

$$aRb \text{ } | \text{---} | \text{ alb en } \mathbb{Q}^*_+.$$

Por esto la llamaremos “divide a en  $\mathbb{Q}^*_+$ ”, y  $\mathbb{Q}^*_+$  es un cono positivo de la magnitud relativa  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ .

Aunque ya lo hemos visto en términos generales, vamos a comprobar que la relación así definida es de orden; veamos que se verifican las tres propiedades necesarias para que lo sea:

i) Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{Q}^* \quad xRx \text{ en } \mathbb{Q}^*_+ \text{ } | \text{---} | \exists 1 \in \mathbb{Q}^*_+ / x = x \cdot 1$ .

ii) Antisimétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{Q}^* \quad xly \text{ e } ylx \Rightarrow x=y$ .

$$xly \text{ en } \mathbb{Q}^*_+ \text{ } | \text{---} | \exists z \in \mathbb{Q}^*_+ / y = x \cdot z$$

$$ylx \text{ en } \mathbb{Q}^*_+ \text{ } | \text{---} | \exists t \in \mathbb{Q}^*_+ / x = y \cdot t,$$

sustituyendo y por su valor y aplicando la propiedad cancelativa, que es cierta en  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ , tenemos

$$x = (x \cdot z) \cdot t = x \cdot (z \cdot t) \Rightarrow z \cdot t = 1 \Rightarrow z = 1 \text{ y } t = 1;$$

con lo cual tenemos que  $x=y$ .

iii) Transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}^* \quad xly \text{ en } \mathbb{Q}^*_+ \text{ e } ylz \text{ en } \mathbb{Q}^*_+ \Rightarrow xlz \text{ en } \mathbb{Q}^*_+.$

$$xly \text{ en } \mathbb{Q}^*_+ \text{ } | \text{---} | \exists r \in \mathbb{Q}^*_+ / y = x \cdot r$$

$$ylz \text{ en } \mathbb{Q}^*_+ \text{ } | \text{---} | \exists s \in \mathbb{Q}^*_+ / z = y \cdot s,$$

sustituyendo y por su valor tenemos

$$z = (x \cdot r) \cdot s = x \cdot (r \cdot s),$$

y como  $\cdot$  era una ley de composición interna en  $\mathbb{Q}^*_+$ , tenemos que

$$\exists r \cdot s \in \mathbb{Q}^*_+ / z = x \cdot (r \cdot s) \text{ } | \text{---} | xlz.$$

Veamos que 1, elemento neutro de  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ , es anterior a cualquier elemento de  $\mathbb{Q}^*_+$ :

$$\forall x \in \mathbb{Q}^*_+ \quad 1lx \text{ } | \text{---} | \exists x \in \mathbb{Q}^*_+ / x = 1 \cdot x..$$

Y el cono negativo sería

$$\mathbb{Q}^*_-=N(\mathbb{Q}^*)=\{x \in \mathbb{Q}^* / x1l \text{ en } \mathbb{Q}^*_+\}=\{x \in \mathbb{Q}^* / \exists r \in \mathbb{Q}^*_+ / 1=x \cdot r\}=$$

$$=\{x \in \mathbb{Q}^* / x = \frac{p}{q} > 0 \text{ y } q \leq p\},$$

ya que al ser  $r \geq 0$  y  $1 = x \cdot r$ , los elementos de  $N(@^*)$  deberán ser positivos, y serían los inversos de los que teníamos en el cono positivo. Además, como se verifica la antisimetría, tenemos que  $@^*_+ \cap @^*_- = \{1\}$ .

**Ejercicio:** Estudia si todos los elementos de  $@^*$  se relacionan con el 1 y si todos se relacionan entre sí.

**Ejercicio:** Razona si en  $(@^*, \bullet)$  podríamos definir una relación de orden cuyo cono positivo sea el conjunto

$$@^*_+ = P(@^*) = \{x \in @^* / x \leq 1\}.$$

**Observación:** Como resultado de este ejercicio podemos afirmar que se pueden tomar distintos conos positivos, aunque cada uno de ellos está asociado a una única relación de orden.

3. Consideremos en  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  la siguiente relación:

$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) \leq (c,d) \iff \exists e,f \in \mathbb{Z}_+ / c = a+e \text{ y } d = b+f,$   
siendo  $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} / 0 \leq x\}$ .

**Ejercicio:** Razona que en  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  la relación:

$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) \leq (c,d) \iff \exists e,f \in \mathbb{Z}_+ / c = a+e \text{ y } d = b+f$   
es de orden. En caso afirmativo, inicia una representación mediante un diagrama de Hasse.

Por tanto,

$$(0,0) \leq (x,y) \iff \exists u,v \in \mathbb{Z}_+ / x = 0+u \text{ y } y = 0+v,$$

$$(x,y) \leq (0,0) \iff \exists z,t \in \mathbb{Z}_+ / 0 = x+z \text{ y } 0 = y+t.$$

Vamos a buscar un cono positivo asociado a esta relación de orden. Denotémosle por  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_+$ . Un cono positivo de  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  con la relación de orden  $\leq$  debería ser

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_+ = P(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / (0,0) \leq (x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 0 \leq x \text{ y } 0 \leq y\} = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+.$$

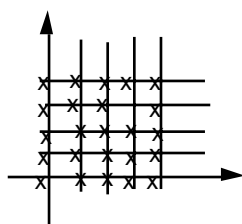


Figura 23: Cono positivo de  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ .



Hemos visto antes que si la magnitud  $(M, +)$  es relativa y podemos encontrar un subconjunto  $M_+$  —de  $M$ — tal que  $(M_+, +)$  sea un semigrupo unitario que verifique

$$(2) \forall x, y \in M_+ \quad x+y=0 \Rightarrow x=0 \text{ e } y=0,$$

entonces la relación:

$$\forall a, b \in M \quad a \leq b \quad | \text{---} | \quad \exists c \in M_+ / \quad b = a + c$$

es de orden. Vamos a ver que en este caso (cuando veamos la compatibilidad de la relación de orden con la ley de composición interna razonaremos que esto es cierto siempre), evidentemente,  $(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+, +)$  es un semigrupo unitario, pues

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+.$$

La propiedad asociativa es cierta en  $(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+, +)$  por ser cierta en  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ .

Tiene elemento neutro que es  $(0,0) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ .

Además se verifica que

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \quad (a,b) + (c,d) = (0,0) \Rightarrow (a,b) = (0,0) \text{ y } (c,d) = (0,0), \text{ pues}$$

$$(a+c, b+d) = (0, 0) \Rightarrow a+c=0 \text{ y } b+d=0,$$

pero  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_+$  y si

$$a+c=0 \quad y \quad b+d=0 \Rightarrow a=0, b=0, c=0 \quad y \quad d=0 \Rightarrow (a,b)=(0,0) \quad y \quad (c,d)=(0,0).$$

El cono negativo sería

$$N(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / (x, y) \leq (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\} = \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_-.$$

En este caso sí se verifica que  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_+ \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_- = \{(0,0)\}$ , pero no todos los elementos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  están en el cono positivo o en el cono negativo, como pasaba en el ejemplo primero, por ejemplo  $(-3,5)$  y  $(7,-5)$  no están en ninguno de ellos, ya que no se relacionan con el  $(0,0)$ , ni tampoco se relacionan entre sí.

**Ejercicio:** Prueba que en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  la relación:

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) \leq (c,d) \iff a < c, \text{ ó } a=c \text{ y } b \leq d$$

es de orden. Razona si  $\leq$  es compatible con la suma en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Encuentra el cono positivo asociado a esta relación.

**Ejercicio:** Trabajando de forma análoga a como lo hicimos en los ejemplos 2 y 3, utilizando las técnicas “el arte de relacionar”, “la solución de problemas” y “la sinapsis”, calcula los conos positivo y negativo de  $(@^*x@^*, \bullet)$  con el orden inducido en el grupo por el semigrupo.

4. Trabajando de forma análoga a como lo hicimos en el ejemplo tercero podemos decir que un cono positivo de  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \leq)$ , siendo  $\leq$  el orden inducido en el grupo  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  por el semigrupo  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_+$ , que podría ser:

$$P(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 0 \leq x, 0 \leq y \text{ y } 0 \leq z\} = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+.$$

La relación de orden asociada al cono positivo  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$  será:

$\forall (a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a, b, c) \leq (d, e, f) \iff \exists g, h, i \in \mathbb{Z}_+ / d = a + g, e = b + h \text{ y } f = c + i$ . Representada en un diagrama de Hasse tendríamos:

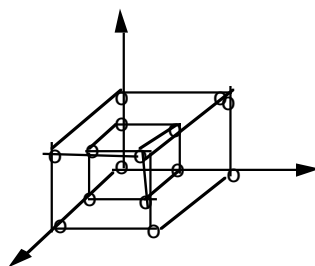


Figura 23: Relación de orden en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio:** Razona si  $(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+, +)$  es un semigrupo unitario y conmutativo. Prueba si se verifica que si la suma de dos elementos de  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$  es el elemento neutro de  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ , ambos elementos son el neutro de  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ . Calcula el cono negativo y razona si todos los elementos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  están relacionados.

**Proposición:** En una magnitud absoluta  $(M, +)$ , con la ordenación natural del semigrupo, se verifica que  $M_+ = M$ .

**Demostración:** En efecto, veamos que  $\forall a \in M_+ \implies a \in M$ . Sabemos por lo que hemos visto anteriormente que en una magnitud absoluta  $\forall a \in M \implies 0 \leq a$ , luego

$$\forall a \in M_+ \implies 0 \leq a \implies a \in M.$$

Como consecuencia de esta observación podemos decir que en una magnitud absoluta  $(M, +)$  la relación

$$(R) \quad \forall a, b \in M \quad a \leq b \iff \exists c \in M / b = a + c \text{ es análoga a}$$

$$\forall a, b \in M \quad a \leq b \iff \exists c \in M_+ / b = a + c,$$

con lo cual en lo sucesivo podemos hablar de esta última relación tanto si la magnitud es absoluta como si es relativa. Pero si la magnitud es relativa no serían análogas ambas relaciones, ya que la primera hemos visto que no es, ni siquiera, relación de orden.

Por tanto hay que tener en cuenta que si la magnitud es absoluta y la operación que tenemos en el semigrupo unitario y conmutativo verifica la propiedad cancelativa, y 0 es el único elemento que tiene opuesto,  $(R)$  es de orden; además ambas ordenaciones son análogas: la ordenación natural del semigrupo y la ordenación inducida por el semigrupo  $M_+=M$ .

Si la magnitud es relativa no nos sirve la ordenación natural del semigrupo pues no es relación de orden. Para tener la ordenación inducida por el semigrupo  $M_+$  no hay que exigirle la propiedad cancelativa, ya que por ser  $(M, +)$  grupo la verifica. En el semigrupo  $M_+$  el elemento neutro tiene que ser el único elemento que tenga opuesto, esto no puede pasar en todo el conjunto  $M$ , ya que en  $M$  todo elemento tiene simétrico.

**Observación:** En los ejemplos que hemos visto antes había elementos que no se relacionaban con el cero y no todos se relacionaban entre sí. En la proposición que viene a continuación vamos a ver las condiciones que necesitamos para que la relación inducida en el grupo por el semigrupo  $M_+$  verifique la condición de que todos los elementos de  $M$  estén en  $M_+$  o en  $M_-$ , es decir que todos los elementos de  $M$  se relacionen con el 0 y, como consecuencia, que todos los elementos se relacionen entre sí.

En estos últimos razonamientos hemos usado las técnicas: “el arte de relacionar”, “la sinapsis”, “la serendipity”, “crear durmiendo”, “la solución de problemas” y “la síntesis creativa”, todas estas técnicas también las vamos a utilizar para trabajar la siguiente proposición.

**Proposición:** En una magnitud relativa  $(M,+)$  con una relación de orden, las condiciones

1.  $\forall a \in M \quad a \in M_+ \text{ ó } -a \in M_+ \text{ y}$
2.  $\forall a, b \in M_+ \quad a + b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ y } b = 0$

son equivalentes a

3.  $M=M_+ \cup M_-$  y  $M_+ \cap M_- = \{0\}$ .

Demostración: En efecto, veamos que 1 y 2 implican 3. Por 1

$$\forall x \in M \quad x \in M_+ \text{ ó } -x \in M_+ \quad | \text{---} | \quad x \in M_+ \cup M_-$$

$$\forall x \in M \quad x \in M_+ \cap M_- \mid \text{---} \mid x \in M_+ \vee x \in M_- \mid \text{---} \mid 0 \leq x \vee x \leq 0 \Rightarrow x = 0.$$

Veamos que 3 implica 1 y 2. Si  $M=M_+ \cup M_-$ ,

$\forall x \ x \in M \ \vdash \vdash x \in M_+ \cup M_- \ \vdash \vdash x \in M_+ \ \vee \ -x \in M_+$ , luego se verifica 1.

Veamos que 2 es cierto:

$$\forall a, b \in M_+ \quad a+b=0 \iff a=-b,$$

como  $b \in M_+ \iff -b \in M_-$ , pero  $-b=a \in M_+$ , por tanto

$$-b \in M_+ \cap M_- = \{0\} \Rightarrow -b=0 \iff b=0,$$

y como  $a+b=0$ , tiene que ser  $a=0$ , luego 2 también se verifica.

**Observación:** Utilizando “la síntesis creativa” podemos decir que si la magnitud  $(M,+)$  es relativa y podemos encontrar un subconjunto  $M_+$  de  $M$  tal que:

1.  $(M_+,+)$  es un semigrupo unitario y conmutativo

2.  $M=M_+ \cup M_-$  y  $M_+ \cap M_- = \{0\}$ ,

entonces la relación de orden inducida en el grupo  $(M,+)$  por el semigrupo  $M_+$  es de orden y todos los elementos se relacionan con el 0, además el único que es mayor y menor que 0 a la vez es el 0. Ya que

$$M=M_+ \cup M_- \iff \forall x \in M \quad x \in M_+ \text{ ó } x \in M_- \iff \forall x \in M \quad 0 \leq x \text{ ó } x \leq 0,$$

$$\forall x \in M_+ \cap M_- \iff x \in M_+ \text{ y } x \in M_- \iff 0 \leq x \text{ y } x \leq 0 \Rightarrow x=0.$$

#### 2.8.4.2. Relación de orden total

Podríamos empezar preguntando a los alumnos: ¿sabéis cuándo una relación de orden es total? Además de las propiedades necesarias para que una relación sea de orden, ¿qué otra u otras propiedades tiene que cumplir? Buscad un ejemplo que sea relación de orden total y otro que no lo sea.

Vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Hay relaciones de orden en las que todos los elementos se relacionan de alguna forma, por ejemplo, en el conjunto de las personas de la clase decimos que una persona se relaciona con otra si tiene la misma o mayor edad; esta relación será de orden total.

Sin embargo, si consideramos dentro de la clase dos subconjuntos: el de las personas que son rubias y el de las que son morenas, y en cada subconjunto establecemos la relación anterior, dicha relación, establecida en el conjunto de las personas de la clase, es de orden; pero no será de orden total, ya que las personas rubias de la clase no se relacionan con las morenas de ninguna forma.

**Definición:** Una relación  $(A,R)$  es de **orden total** cuando es relación de orden y además verifica la propiedad **conexa**, es decir:

$$\forall a, b \in A \quad aRb \text{ ó } bRa.$$

**Definición:** Si tenemos una relación de orden  $(A,R)$  que no verifica la propiedad conexa, decimos que la relación es de **orden parcial**; para ello basta con que:

$$\exists a,b \in M / a \not R b \text{ y } b \not R a$$

Indicamos con  $a \not R b$  que  $a$  no se relaciona con  $b$ .

Esta definición y la anterior pueden encontrarse, entre otros, en Alberca y Martín (2001: 15).

**Ejemplo:** La relación  $(\mathbb{N}, \leq)$ , donde  $a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N} / b = a + c$ , es de orden total, ya que

$$\forall a,b \in \mathbb{N} \quad a \leq b \text{ ó } b \leq a \iff \forall a,b \in \mathbb{N} \quad (\exists x \in \mathbb{N} / b = a + x) \text{ ó } (\exists y \in \mathbb{N} / a = b + y).$$

**Ejemplo:** En el conjunto  $\mathbb{N}^*$ , la relación de divisibilidad, que denotamos por  $|$  y que está definida de la forma:

$$\forall a,b \in \mathbb{N}^* \quad a | b \iff \exists c \in \mathbb{N}^* / b = a \cdot c,$$

es de orden parcial. Queda como ejercicio, probarlo.

**Ejercicio:** Sea  $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$  un subconjunto de  $\mathbb{N}^*$ . Representa mediante un diagrama de Hasse la relación  $|$  en  $X$ . ¿Tiene  $X$  máximo? ¿Y mínimo?

**Ejercicio:** Prueba si la relación de divisibilidad es de orden total en  $\mathbb{Q}^*$ .

**Ejercicio:** De las relaciones de orden vistas anteriormente indica las que sean de orden total y parcial razonando la respuesta.

**Ejercicio:** ¿Es la igualdad en  $\mathbb{N}$  una relación de orden total? ¿Cuándo la igualdad en un conjunto es una relación de orden total?

**Ejercicio:** Define en el conjunto  $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$  una relación de orden total y otra relación de orden parcial. Representalas mediante sus correspondientes diagramas de Hasse. ¿En qué se diferencian ambos diagramas? ¿Cómo tienen que ser los diagramas para que sepamos que se trata de una relación de orden total o parcial? Elige el subconjunto  $X = \{b,c,f\}$  y estudia si, en cada una de las relaciones definidas,  $X$  tiene máximo y mínimo o alguno de ellos. Elige otros subconjuntos y razona cuándo tienen máximo.

Con este ejercicio, además de la técnica “solución de problemas”, podemos utilizar: “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

**Proposición:** Sea  $(A, \leq)$  una relación de orden total y sea  $\emptyset \neq X \subset A$ . Si  $X$  es un subconjunto finito, entonces tiene máximo.

Demostración: Vamos a hacer el razonamiento por inducción:

1. Si  $X$  tiene sólo un elemento,  $X = \{a_1\}$ , y  $a_1$  es el máximo.

2. Si  $X$  tiene dos elementos,  $X = \{a_1, a_2\}$ ; como la relación es de orden total,  $a_1 \leq a_2$  ó  $a_2 \leq a_1$ , con lo cual en el primer caso  $a_2$  sería el máximo y en el segundo lo sería  $a_1$ , luego tiene máximo.

3. Si  $X$  tiene tres elementos,  $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ ; como la relación es de orden total,  $a_1 \leq a_2$  ó  $a_2 \leq a_1$ . Si se da el primer caso, por ser la relación de orden total podríamos tener:  $a_3 \leq a_1 \leq a_2$  ó  $a_1 \leq a_3 \leq a_2$  ó  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ , y por tanto el máximo sería  $a_2$  ó  $a_3$ , luego tiene máximo. Si hubiese sido  $a_2 \leq a_1$ , el razonamiento se haría de forma análoga.

4. Suponemos que  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  tiene máximo.

5. Veamos que si  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ , entonces  $X$  tiene máximo. Como  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  estaba totalmente ordenado, entre las ordenaciones que podrían tener sus elementos una de ellas podría ser:  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n-1}$ , razonando de forma análoga a como lo hicimos en 3, podríamos tener que:

$a_n \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n-1}$ , y en este caso sería  $a_{n-1}$  el máximo, ó

$a_1 \leq a_n \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n-1}$ , con lo que seguiría siendo  $a_{n-1}$  el máximo, y así sucesivamente

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n-1}$ , y seguiría siendo  $a_{n-1}$  el máximo, ó

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$ , y sería  $a_n$  el máximo, luego en cualquier caso tiene máximo. Si los elementos del conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  hubieran estado ordenados de otro modo el razonamiento sería análogo.

**Observación:** Para que en una magnitud absoluta,  $M$ , la ordenación natural del semigrupo sea de orden total se tendría que cumplir que

$\forall a, b \in M \quad a \leq b \text{ ó } b \leq a \quad \text{---} \quad \forall a, b \in M \quad (\exists x \in M / b = a + x) \text{ ó } (\exists y \in M / a = b + y)$ ,  
lo que leeríamos: dos elementos cualesquiera de  $M$  siempre son comparables, es decir, o uno es menor o igual que el otro, o el otro es menor o igual que el uno. Esto es equivalente a

(3')  $\forall a, b \in M \quad \exists c \in M / b = a + c \text{ ó } a = b + c$ ,

es decir, dadas dos cantidades cualesquiera  $a$  y  $b$ , podemos encontrar siempre otra cantidad que sumada con  $a$  nos da  $b$  o sumada con  $b$  nos da  $a$ .

Vamos a razonar que





**Ejemplo:** Ya vimos que en  $(\mathbb{Z}, +)$  la relación  $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{Z}_+ / b = a + c$  verificaba

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \in \mathbb{Z}_+ \text{ ó } -x \in \mathbb{Z}_+,$$

y era de orden total.

**Ejercicio:** Razona si la relación de orden inducida en  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  por el semigrupo  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$  es de orden total.

**Ejercicio:** Pon algún ejemplo en donde la relación de orden inducida en una magnitud relativa  $(M, +)$ , por el semigrupo  $M_+$ , sea de orden total y otro en que sea de orden parcial.

Utilizaremos para resolver este ejercicio y los que vienen a continuación las técnicas “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo familiar extraño”.

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{N}, +, \leq)$  se verifican las condiciones:

- (1) la suma es cancelativa en  $\mathbb{N}$ ;
- (2) si la suma de dos números naturales es 0, los dos números naturales son 0;
- (3) si tenemos dos números naturales cualesquiera, siempre existe otro número natural que sumado con el más pequeño nos da el más grande.

**Ejercicio:** ¿La longitud verifica las condiciones anteriores? ¿Y el peso? ¿Y el tiempo?

**Ejercicio:** Razona que no es posible que, en una magnitud absoluta  $(M, +)$ , la ordenación natural del semigrupo sea una relación de orden total sin las propiedades (1), (2) y (3).

**Definición:** Dada una relación de orden  $(A, \leq)$  diremos que  $a < b$ , si y sólo si,  $a \leq b$  pero  $a \neq b$ .

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{N}, \leq)$  con  $a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N} / b = a + c$ , podemos decir, por ejemplo, que  $3 < 7$ , ya que  $3 \neq 7$  y  $3 \leq 7$ , pues  $\exists 4 \in \mathbb{N} / 7 = 3 + 4$ .

**Ejercicio:** Busca una magnitud y define en ella una relación de orden. Encuentra dos elementos  $a$  y  $b$  que verifiquen que  $a < b$ .

En este ejercicio podemos usar las técnicas: “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “el entorno”.

**Observación:** Dada una magnitud  $(M, +)$ , con la ordenación natural del semigrupo o con la ordenación inducida por el semigrupo  $M_+$ , será

$a < b \mid \text{---} \mid \exists c \in M_+ / b = a + c \text{ y } a \neq b$ , luego

$$a < b \mid \text{---} \mid \exists c \in M_+^* / b = a + c.$$

siendo  $M_+^* = M_+ \setminus \{0\}$ . Si la magnitud es absoluta y tenemos la ordenación natural del semigrupo, sabemos que  $M = M_+$  y por tanto será  $M_+^* = M^* = M \setminus \{0\}$ .

#### 2.8.4.3. Relación de orden compatible con una ley de composición interna

Empezamos planteándoles a los alumnos lo siguiente: cuando nos daban una magnitud teníamos una ley de composición interna; además, en una magnitud podemos definir una relación de orden. ¿Se te ocurre alguna forma de relacionar la operación con la ordenación? Toma una magnitud en la que puedas definir ambos conceptos y concreta la forma de relacionarlos.

Podemos utilizar las técnicas: “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

Consideramos, por ejemplo, el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales; en  $\mathbb{N}$  tenemos definida la suma y la relación de orden  $\leq$ . Nosotros sabemos que si le sumamos a los dos miembros de la desigualdad un mismo número natural la desigualdad no varía. Por ejemplo  $3 \leq 7 \Rightarrow 3+5 \leq 7+5$  |—|  $8 \leq 12$ . Como esto ocurre siempre, es por lo que decimos que en  $\mathbb{N}$  la relación menor o igual es compatible con la suma.

**Definiciones:** Dado un conjunto  $A \neq \emptyset$  en el que hay una ley de composición interna  $*$  y una relación de orden  $R$ , decimos que la relación de orden es compatible por la izquierda con la ley de composición interna si, y sólo si,

$$\forall a, b, c \in A \quad a \leq b \Rightarrow c * a \leq c * b.$$

De forma análoga decimos que la relación de orden es compatible por la derecha con la ley de composición interna si, y sólo si,

$$\forall a, b, c \in A \quad a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c.$$

Y decimos que **la relación de orden es compatible con la ley de composición interna** si, y sólo si, es compatible por la izquierda y por la derecha, es decir:

$$\forall a, b, c \in A \quad a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c \quad \text{y} \quad c * a \leq c * b.$$

Naturalmente, si la operación  $*$  es conmutativa, no hay que distinguir entre izquierda y derecha.

**Observación:** Una consecuencia inmediata de esto es que si en un conjunto  $A \neq \emptyset$  una relación de orden  $\leq$  es compatible con una ley de composición interna  $*$ , se verifica que

$$\forall a, b, c, d \in A \quad a \leq b \text{ y } c \leq d \Rightarrow a * c \leq b * d.$$

En efecto,

$$a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c, \quad c \leq d \Rightarrow b * c \leq b * d,$$

y por la propiedad transitiva de la relación de orden tenemos que

$$a * c \leq b * d.$$

**Ejemplo:** Si sumamos en el conjunto  $\mathbb{N}$ , miembro a miembro, dos desigualdades del mismo sentido, nos resulta otra desigualdad del mismo sentido:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{N} \quad a \leq b \text{ y } c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d.$$

Por ejemplo, tenemos  $3 \leq 7$  y  $5 \leq 9 \Rightarrow 8 \leq 16$ .

**Ejemplo:** La igualdad en  $\mathbb{N}$  es compatible con la suma.

**Ejemplo:** La relación  $\leq$  en  $\mathbb{Z}$  es compatible con la suma, pues

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \mid \text{---} \mid \exists x \in \mathbb{Z}_+ / b = a + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}_+ / b + c = (a + x) + c = (a + c) + x \text{ y } c + b = c + (a + x) = (c + a) + x \mid \text{---} \mid$$

$$\mid \text{---} \mid a + c \leq b + c \text{ y } c + a \leq c + b,$$

por las propiedades asociativa y conmutativa de  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Ejercicio:** Define una relación de orden en un conjunto que sea compatible con una operación establecida sobre el mismo conjunto.

Volvemos a utilizar las técnicas “el arte de relacionar” y “el entorno”.

**Observación:** En una magnitud absoluta  $(M, +)$  la ordenación natural del semigrupo es compatible con la adición, es decir:

$$\forall a, b, c \in M \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \text{ y } c + a \leq c + b,$$

ya que  $\exists x \in M / b = a + x$ , sumando a ambos miembros  $c$  a la izquierda y a la derecha, y teniendo en cuenta las propiedades asociativa y conmutativa, tenemos:

$$c+b=c+(a+x)=(c+a)+x \quad \vee \quad b+c=(a+x)+c=(a+c)+x,$$

luego

$$\exists x \in M / b+c=(a+c)+x \quad y \quad \exists x \in M / c+b=(c+a)+x \quad | \text{---} | \quad a+c \leq b+c \quad y \quad c+a \leq c+b.$$

De forma análoga en una magnitud relativa  $(M, +)$  la ordenación inducida por un semigrupo  $M_+$  es compatible con la adición, es decir:

$$\forall a, b, c \in M \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \text{y} \quad c + a \leq c + b.$$

ya que  $\exists x \in M_+ / b = a + x$ , sumando a ambos miembros  $c$  a la izquierda y a la derecha, y teniendo en cuenta las propiedades asociativa y conmutativa, tenemos:

$$c+b=c+(a+x)=(c+a)+x \quad y \quad b+c=(a+x)+c=(a+c)+x,$$

luego  $\exists x \in M_+ / \quad c+b=(c+a)+x \quad y \quad b+c=(a+c)+x \quad |---| \quad c+a \leq c+b \quad y$   
 $a+c \leq b+c.$

**Observación:** Hemos visto antes que si la magnitud  $(M,+)$  es relativa y podemos encontrar un cono positivo entonces la relación:

$$\forall a, b \in M \quad a \leq b \quad | \text{---} | \quad \exists c \in M_+ / \quad b = a + c$$

es de orden. Ahora podemos afirmar que el recíproco también es cierto, es decir: toda relación de orden determina un cono positivo, que será

$$M_+ = \{x \in M / 0 \leq x\},$$

y todo cono positivo da lugar a una relación de orden.

**Definiciones:** Un semigrupo  $(S,*)$  se dice que es un **semigrupo ordenado** si en  $S$  tenemos una relación de orden  $\leq$  compatible con la operación de  $S$ . Es decir, se verifica que

$$\forall a, b, c \in S \quad a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c \quad \vee \quad c * a \leq c * b.$$

Si la relación fuese de orden total, diríamos que tenemos un **semigrupo totalmente ordenado**.

Diremos que tenemos una **magnitud absoluta ordenada** si tenemos una magnitud absoluta con una relación de orden que la convierta en semigrupo ordenado. Si además la relación hubiese sido de orden total, diríamos que la **magnitud absoluta** está **totalmente ordenada**.

**Ejemplo:**  $(\mathbb{N}, +)$  con la relación  $\leq$  es un semigrupo totalmente ordenado, también es una magnitud absoluta totalmente ordenada.

**Ejemplo:** Según la observación anterior podemos afirmar que una magnitud absoluta  $(M,+)$  con la ordenación natural del semigrupo es una magnitud ordenada.

**Ejercicio:** Prueba que el semigrupo unitario y conmutativo  $(\mathcal{P}(E),\cup)$ , donde  $E$  es un conjunto no vacío, con la ordenación natural del semigrupo, que según hemos visto antes era la inclusión, es un semigrupo ordenado. ¿Es una magnitud absoluta totalmente ordenada?

**Ejercicio:** Prueba que el conjunto  $A=\{0,1,2\}$  con la operación dada mediante la tabla:

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabla 12: Ejemplo de magnitud absoluta totalmente ordenada.

y la relación de orden  $0 \leq 1 \leq 2$ , es una magnitud absoluta totalmente ordenada.

**Definiciones:** Un grupo  $(G,*)$  se dice que es un **grupo ordenado** si en  $G$  tenemos una relación de orden  $\leq$  compatible con la operación de  $G$ . Es decir, se verifica que

$$\forall a,b,c \in G \quad a \leq b \Rightarrow a*c \leq b*c \quad \text{y} \quad c*a \leq c*b.$$

Si la relación fuese de orden total diríamos que tenemos un **grupo totalmente ordenado**.

Diremos que tenemos una **magnitud relativa ordenada** si tenemos una magnitud relativa con una relación de orden que la convierta en grupo abeliano ordenado. La **magnitud relativa** diremos que está **totalmente ordenada** si está ordenada y la relación fuese de orden total.

**Ejemplo:**  $(\mathbb{Z},+)$  con la relación  $\leq$  es un grupo totalmente ordenado y también es una magnitud relativa totalmente ordenada.

**Ejercicios:**

1. Prueba si  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ , donde la suma viene definida por:

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

es una magnitud relativa totalmente ordenada con el orden lexicográfico. Idem con el orden inducido por el semigrupo  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ .

2. Prueba si  $(\mathbb{Z}^n, +)$ , donde  $+$  está definida como sigue:

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ ,  
 es una magnitud relativa totalmente ordenada con el orden lexicográfico.  
 Y con el orden inducido por  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ .

**Observación:** Podemos tener una magnitud absoluta como, por ejemplo, la dada anteriormente en  $A = \{0, 1, 2\}$  con la operación:

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabla 13: Ejemplo de magnitud absoluta ordenada.

y la relación de orden  $0 \leq 1 \leq 2$ , en la que se verifica que  $a < b$  y sin embargo no tiene que ser  $a + c < b + c$ , pues, por ejemplo,  $1 < 2$  y  $1 + 2 = 2 + 2$ .

**Ejercicio:** Prueba que una magnitud relativa  $(M, +)$ , con la ordenación inducida por el semigrupo  $M_+$ , es una magnitud relativa ordenada. Si fuese  $a < b$ , ¿qué relación tendría que haber entre  $a + c$  y  $b + c$ ?

Para resolver este ejercicio y para enunciar y demostrar la proposición que viene a continuación, utilizamos las técnicas “el arte de relacionar” y “la sinapsis”.

**Proposición:** En una magnitud  $(M, +)$  relativa se puede establecer una relación de orden compatible con la ley de composición interna si, y sólo si, se puede encontrar un subconjunto  $M_+$  —de  $M$ — tal que  $(M_+, +)$  sea un semigrupo unitario y verifique (2)  $\forall x, y \in M_+ \quad x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$ .

Ya hemos demostrado antes que en una magnitud  $(M, +)$  relativa si se puede encontrar un subconjunto  $M_+$  —de  $M$ — tal que  $(M_+, +)$  sea un semigrupo unitario que verifique (2)  $\forall x, y \in M_+ \quad x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$ , entonces se puede establecer una relación de orden en  $M$ . Dejamos como ejercicio probar que la relación de orden inducida por el semigrupo es compatible con la ley de composición interna.

Supongamos que  $(M, +)$  es una magnitud relativa en la que se puede establecer una relación de orden compatible con la ley de composición interna, tomamos el subconjunto

$$M_+ = \{x \in M / 0 \leq x\},$$

$(M_+, +)$  es un semigrupo unitario, ya que por ser la relación de orden compatible con la ley de composición interna

$$\forall x, y \in M_+ \quad 0 \leq x \text{ y } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x + y \text{ ————— } x + y \in M_+.$$

La suma es asociativa en  $M_+$  por serlo en  $M$ . Tiene elemento neutro que es el 0, pues por ser  $\leq$  reflexiva  $0 \leq 0 \in M_+$ .

Falta ver que se verifica (2)  $\forall x, y \in M_+ \quad x+y=0 \Rightarrow x=0 \text{ e } y=0$ . Como  $x, y \in M_+$  tendrá que ser  $0 \leq x$  y  $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x+y$ , por ser la relación de orden compatible con la ley de composición interna. Si  $0 \leq y$ , deberá ser  $-y \leq 0$ . Vamos a hacer la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que  $x \neq 0$  ó  $y \neq 0$ . Si  $x \neq 0$ , tendrá que ser  $0 < x$ , pero

$$x+y=0 \text{ } \dashv\!\!\dashv\!\!\dashv \text{ } x=-y,$$

por tanto, tenemos que  $0 < x = -y$ , sumando  $y$  a los dos miembros nos da  $y < 0$ , pero  $0 \leq y$  ¡contradicción! Si fuese  $0 < y$  el razonamiento sería análogo, luego  $x=0$  e  $y=0$ .

**Proposición:** En una magnitud absoluta, que será un semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ , la ordenación natural del semigrupo también es compatible con la ley de composición externa, es decir:

$$\forall a, b \in M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq b \Rightarrow na \leq nb.$$

Demostración: En efecto, veamos que

$$\forall a, b \in M \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \leq b \Rightarrow na \leq nb,$$

ya que si  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \exists x \in M / \quad b &= a+x \Rightarrow nb = b+b+\dots(n\text{ veces})+b = \\ &= (a+x)+(a+x)+\dots(n\text{ veces})+(a+x) = \\ &= (a+a+\dots(n\text{ veces})+a)+(x+x+\dots(n\text{ veces})+x) = na+nx, \text{ luego} \\ \exists nx \in M / \quad nb &= na+nx \text{ } \dashv\!\!\dashv\!\!\dashv \text{ } na \leq nb. \end{aligned}$$

Si  $n=0 \quad a \leq b \Rightarrow 0a \leq 0b \text{ } \dashv\!\!\dashv\!\!\dashv \text{ } 0_M \leq 0_M$ , luego tenemos que

$$\forall a, b \in M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq b \Rightarrow na \leq nb.$$

**Ejercicio:** Prueba que si  $(M, +)$  es una magnitud relativa, la ordenación inducida por el semigrupo  $M_+$  es compatible con la ley de composición externa.

Nos planteamos si en una magnitud absoluta  $(M, +)$  en la que la ordenación natural del semigrupo sea una relación de orden total, compatible con la suma, se verificarán las tres propiedades que venimos exigiéndole. Es lo que vamos a ver en la siguiente proposición.

**Proposición:** Si tenemos una magnitud absoluta  $(M, +)$ , que con la ordenación natural del semigrupo sea un semigrupo totalmente ordenado, entonces se verifican:

$$(2) \quad \forall x, y \in M \quad x+y=0 \Rightarrow x=0 \text{ e } y=0,$$

$$(3) \quad \forall a, b \in M \quad \exists c \in M / \quad b=a+c \text{ o } a=b+c,$$

pero





Mediante las técnicas “el arte de relacionar” y “la sinapsis” podríamos pensar en la proposición que viene a continuación.

**Proposición:** Si la magnitud  $(M, +)$  es relativa totalmente ordenada, con cono positivo  $M_+$ , entonces se verifica:

- (1)  $M_+$  es un subsemigrupo unitario y conmutativo de  $M$ .
- (2)  $\forall a \in M \quad a \in M_+ \text{ o bien } -a \in M_+.$
- (3)  $\forall a, b \in M_+ \quad a+b=0 \Rightarrow a=0 \text{ y } b=0.$
- (4)  $\forall a, b \in M \quad \exists c \in M_+ / \quad b=a+c \text{ o } a=b+c.$

Demostración: En efecto, veamos que se verifica (1): Como la relación de orden es compatible con la suma

$$\forall a, b \in M_+ \quad 0 \leq a \text{ y } 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a + b,$$

luego la suma es cerrada en  $M_+$ . La suma es asociativa y conmutativa en  $M_+$  por serlo en  $M$ . El  $0 \in M_+$  pues  $0 \leq 0$ , luego  $M_+$  es un subsemigrupo unitario y conmutativo de  $M$ .

Veamos que (2) es cierta: Como la relación es de orden total

$$\forall a \in M \quad 0 \leq a \text{ ó } a \leq 0, \text{ si}$$

$0 \leq a \leq 1$  y si  $a \in M_+$  y si

$$a \leq 0 \Rightarrow a - a \leq 0 - a \Rightarrow 0 \leq -a \quad | \text{---} | \quad -a \in M_+.$$

Para demostrar (3) supongamos que

$\forall a, b \in M_+ \quad a+b=0$ , podemos decir que

$$0 \leq a, 0 \leq b \text{ y } b = -a.$$

Por ser la relación de orden compatible con la suma

$$0-a \leq a-a, \quad b=-a \leq 0,$$

por la propiedad antisimétrica será  $b=0$ , y como  $a+b=0 \Rightarrow a+0=0$ , luego  $a=0$ .

El apartado (4) se demuestra de forma análoga al caso en que la magnitud es absoluta.

**Definiciones:** Como todo semigrupo unitario y conmutativo se puede considerar como un semimódulo sobre  $\mathbb{N}$ , si en el semigrupo tenemos definida una relación de orden compatible con las leyes de composición interna y externa, diremos que tenemos un **semimódulo ordenado**. En general, un semimódulo  $(X, S, *, o)$ , siendo el semianillo unitario  $(X, \perp, \otimes)$ , estará ordenado cuando tengamos definida en el semigrupo  $(S, *)$  una relación de orden compatible con las leyes de composición interna y externa.

Si la relación fuese de orden total, diríamos que el **semimódulo** está **totalmente ordenado**.

De forma análoga, si se tratase de un grupo abeliano, como todo grupo conmutativo puede ser considerado como un módulo sobre  $\mathbb{Z}$ , si en él tenemos definida una relación de orden compatible con las leyes de composición interna y externa, diremos que tenemos un **módulo ordenado**. En general, un módulo  $(A, M, *, o)$ , siendo el anillo unitario  $(A, +, \otimes)$ , estará ordenado cuando tengamos definida en el grupo  $(M, *)$  una relación de orden compatible con las leyes de composición interna y externa.

Si la relación fuese de orden total, diríamos que el **módulo** está **totalmente ordenado**.

**Ejemplos:** La longitud, en el conjunto de los números naturales, es un semimódulo totalmente ordenado. El conjunto de los números enteros es un módulo totalmente ordenado.

**Ejercicio:** Pon algunos ejemplos de semimódulos y de módulos ordenados.

Para resolver este ejercicio pueden usarse las técnicas “el entorno”, “el arte de relacionar” y “la sinapsis”.

Nos planteamos estudiar si es posible establecer una relación de orden en alguna de las magnitudes que eran semigrupos o grupos abelianos finitos de forma que los convierta en semigrupos o en grupos totalmente ordenados. Para ello dejamos que el alumno, con las técnicas “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la sinapsis”, compruebe si es o no posible. Después veremos la proposición siguiente.

**Proposición:** Una magnitud relativa finita que tenga más de un elemento no puede estar totalmente ordenada.

En efecto, sea  $(M, *)$  una magnitud relativa finita, con más de un elemento y sean  $e, a \in M$ , siendo  $e$  el elemento neutro del grupo  $(M, *)$  y  $a \neq e$ . Si el grupo estuviese totalmente ordenado, tendría que ser  $e \leq a$  o  $a \leq e$ . Si fuese  $e \leq a$ , podríamos operar con  $a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$  y obtendríamos

$$e \leq a \leq a^2 \leq a^3 \leq \dots \leq a^n = e,$$

para un cierto  $n$ . Ya que si fuese  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n \neq e$ , como  $(M, *)$  es un grupo abeliano  $a \neq a^2$ , pues si

$$a = a^2, \quad a * e = a * a \Rightarrow e = a,$$

por cancelativa. De forma análoga

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n \neq a^{n+1}.$$

Tampoco podría ser

$$e < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots$$

infinito, pues  $M$  era finito. Si  $M$  tiene  $m$  elementos, tendría que ser

$$a^{m+1} = a^i \text{ con } 1 \leq i \leq m,$$

y por tanto

$$a^i = a^i * a^{m+1-i} \Rightarrow a^i * e = a^i * a^{m+1-i} \Rightarrow e = a^{m+1-i},$$

luego

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, m\} / e = a^{m+1-i}$$

¡contradicción!, ya que habíamos supuesto que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n \neq e.$$

Las desigualdades

$$e \leq a \leq a^2 \leq a^3 \leq \dots \leq a^n = e,$$

nos llevan a que

$$e \leq a \text{ y } a \leq e \Rightarrow e = a,$$

¡contradicción! Análogamente se razonaría en el caso en que fuese  $a \leq e$ .

#### 2.8.4.4. Relación de orden arquimediana

Comenzaríamos preguntando a los alumnos: ¿habéis oído hablar de orden arquimediano? En caso afirmativo, decid de qué se trata. Pensad en un semigrupo unitario y conmutativo en el que se tenga definida una relación de orden; nosotros le vamos a llamar  $(S, *)$ . Tomad dos elementos no nulos, uno de ellos mayor que el elemento neutro, y que se relacionen. ¿Se puede operar el elemento que es mayor que el neutro con él mismo un número de veces de modo que lo que se obtenga sea mayor que el otro elemento? Expresad de forma concreta lo que hayáis hecho.

Utilizamos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

Vamos a considerar, por ejemplo, el peso  $P$ . Sabemos que  $P$  con la suma es un semigrupo unitario y conmutativo y que en  $P$  tenemos una relación de orden: decimos que el peso de un objeto es menor o igual que el de otro cuando son el mismo objeto o al colocar cada uno de ellos en un platillo de la balanza, el platillo del primero queda más bajo o al mismo nivel que el del segundo.

Tomamos dos objetos que pesan  $p$  y  $q$ , de modo que  $p$  no sea el elemento neutro (para que pese algo). En el platillo donde esté el objeto que pesa  $p$  le podemos añadir un número  $n$  de objetos que pesen igual que él, de modo que el platillo donde están estos objetos quede más bajo o al mismo nivel que el otro, es decir  $q$  sea menor o igual que  $np$ . Es evidente que esto se puede hacer ya que si cogemos dos objetos, uno

que pese  $p$  —algo— y otro  $q$ , comparamos sus pesos, si  $q \leq p$  ya lo tenemos; si  $p < q$ , podemos poner dos cosas que pesen las dos  $p$  y volvemos a comparar los pesos  $2p$  y  $q$ ; si  $q \leq 2p$ , ya lo tenemos, y si  $2p < q$  volvemos a repetir el proceso y al final conseguiremos que  $q \leq np$ . Por esto decimos que la relación menor o igual definida en  $P$  es arquimediana.

**Definición:** Dado un semigrupo unitario  $(S, *)$ , decimos que la **relación de orden**  $R$  definida en  $S$  es **arquimediana** si

$$\forall a, b \in S \text{ con } a \neq e_S R a \quad \exists n \in \mathbb{N} / b R a * a * \dots^{(n)} \dots * a,$$

siendo  $e_S$  el elemento neutro del semigrupo  $(S, *)$ .

**Ejemplo:** En el semigrupo  $(\mathbb{N}, +)$ , la relación  $\leq$  definida:

$$a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N} / b = a + c,$$

es arquimediana, ya que

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \text{ con } a \neq 0 \leq a \quad \exists n \in \mathbb{N} / b \leq a + a + \dots^{(n)} \dots + a = na.$$

Es cierto, pues aunque  $a$  sea muy pequeño y  $b$  muy grande, podemos encontrar un número natural  $n$  tal que sumando  $a$  consigo mismo  $n$  veces —o lo que es lo mismo, multiplicando  $n$  por  $a$ — el resultado sea mayor que  $b$ . No era necesario haber puesto que  $0 \leq a$ , ya que como estamos en  $\mathbb{N}$  y  $a \neq 0$  tiene que ser mayor que  $0$ .

**Ejemplo:** En el semigrupo  $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ , la relación “divide a” definida:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^* \text{ al } b \text{ divide a } a \iff \exists c \in \mathbb{N} / b = a \cdot c$$

no es arquimediana, pues no se cumple que

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^* \text{ con } a \neq 1 \text{ al } a \quad \exists n \in \mathbb{N} / b \text{ al } a \cdot a \cdot \dots^{(n)} \dots \cdot a = a^n,$$

por ejemplo  $3, 5 \in \mathbb{N}$  con  $3 \neq 1$  y si elevamos  $3$  a cualquier número,  $n$ ,  $5$  no va a dividir a  $3^n$ . No tendríamos que haber puesto que  $1 \text{ al } a$ , pues esto siempre es cierto.

**Definición:** Dada una **magnitud**  $(M, +)$  **absoluta**, como es un semigrupo unitario, con la ordenación natural del semigrupo, es **arquimediana** si:

$$\forall a, b \in M \text{ con } a \neq 0_M \leq a \quad \exists n \in \mathbb{N} / b \leq na,$$

pero como sabemos que  $\forall x \in M \quad 0_M \leq x$ , es arquimediana si:

$$\forall a, b \in M \text{ con } a \neq 0_M \quad \exists n \in \mathbb{N} / b \leq na,$$

lo que en palabras del lenguaje corriente leeríamos: dadas dos cantidades  $a$  y  $b$ , con  $a$  distinta de la cantidad nula, podemos encontrar un número natural  $n$  que multiplicado por  $a$  nos da un resultado que es mayor o igual que  $b$ .

**Ejercicio:** ¿Es la longitud una magnitud arquimediana? ¿Y el volumen? ¿Y la capacidad?

**Definición:** Una **magnitud**  $(M,+)$  **relativa**, con la relación de orden inducida por el semigrupo  $M_+$ , es **arquimediana** si

$$\forall a,b \in M \quad a \neq 0_M \leq a \quad \exists n \in \mathbb{N} / \quad b \leq na.$$

**Ejemplo:** El conjunto de los números racionales con la suma,  $(\mathbb{Q},+)$ , y con la relación de orden inducida por  $\mathbb{Q}_+$  es arquimediano ya que es de orden total y se verifica que

$$\forall a,b \in \mathbb{Q} \quad a \neq 0 \leq a \quad \exists n \in \mathbb{N} / \quad b \leq na.$$

El razonamiento es análogo al que hicimos para  $(\mathbb{N},+)$  con  $\leq$ .

**Ejercicio:** En el conjunto  $\mathbb{C}$ , de los **números complejos**, con la suma definida:

$$\forall a+bi, c+di \in \mathbb{C} \quad (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

prueba que la relación:

$\forall a+bi, c+di \in \mathbb{C} \quad (a+bi)R(c+di) \iff a < c \text{ o bien } a=c \text{ y } b \leq d$   
es de orden total y compatible con la suma. ¿Es arquimediana?

**Ejercicio:** ¿Es el tiempo una magnitud arquimediana? ¿Y el dinero? Encuentra una magnitud que sea arquimediana y otra que no lo sea.

Empleamos las técnicas: “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “el entorno” y “la sinapsis”.

## 2.8.4.5. Magnitudes escalares y vectoriales

Comenzamos preguntándole a los alumnos: ¿crees que los últimos conceptos que hemos visto podrían dar lugar a otra clase de magnitudes? ¿Conoces alguna magnitud en la que puedas definir una relación de orden? en caso afirmativo, ¿es la relación de orden total?, ¿es arquimediana? ¿Has oído hablar de magnitudes escalares?; ¿podrías definir dicho concepto? Si no puedes definirlo, búscalo en algún libro, diccionario, internet... Pon un ejemplo de magnitud que sea escalar. ¿Sabes cuándo una magnitud es vectorial? ¿Conoces alguna magnitud que sea vectorial? Si es así, di alguna de las que conozcas.

Utilizamos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar” —en este caso los conceptos anteriores con la nueva clasificación de las magnitudes—, “el entorno”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

Como hemos dicho antes, las magnitudes que llamamos escalares van a ser aquéllas tales que podemos colocar sus elementos sobre una recta o escala; esto es debido a que deben tener una relación de orden

total, y si representamos dicha relación utilizando un diagrama de Hasse, todas las cantidades de la magnitud quedarían situadas sobre una recta o escala ya que todas están relacionadas. Las magnitudes que se consideran habitualmente: longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, tiempo, dinero... sí lo son, ya que son semigrupos unitarios, conmutativos —o grupos abelianos—, totalmente ordenados y arquimedianos. Aunque podemos colocar, por ejemplo, el conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sobre una escala, no será una magnitud escalar sino vectorial, por no ser arquimediana, tal como se afirma en la introducción de esta sección.

**Definición:** Dada una **magnitud absoluta**  $(M,+)$  decimos que es **escalar** si en ella tenemos una relación de orden total compatible con la ley de composición interna, y que además es arquimediana. Es decir  $(M,+)$  es un semigrupo unitario, conmutativo, totalmente ordenado y arquimediano.

Si la **magnitud** fuese **relativa**, para ser **escalar** tendría que ser un grupo abeliano, totalmente ordenado y arquimediano.

Por tanto, toda magnitud escalar, si es absoluta, se puede considerar como un  $\mathbb{N}$ -semimódulo totalmente ordenado y arquimediano; y si es relativa, puede ser considerada como un  $\mathbb{Z}$ -módulo totalmente ordenado y arquimediano; en el caso en que la magnitud fuese divisible podría considerarse también como  $\mathbb{Q}_+$ -semimódulo,  $\mathbb{Q}$ -módulo,  $\mathbb{R}_+$ -semimódulo,  $\mathbb{R}$ -módulo, etc.

Por ser este tipo de magnitudes las que más utilizamos en la vida real, vamos a ver cómo las definen otros autores con objeto de comparar su definición con la nuestra.

Según Abellanas (1963: 63) *una magnitud escalar es un grupo ordenado (o semigrupo ordenado), aditivo y arquimediano*. Esta definición coincide con la nuestra, sólo que nosotros consideramos que el semigrupo debe ser unitario.

Para Rey Pastor (1966: 200-201) *la magnitud se llama escalar, de una dimensión, o magnitud propiamente dicha, cuando además de las relaciones de igualdad y de suma existe entre sus cantidades la relación de ordenación, es decir, cuando entre cada dos elementos existe una relación que representamos con el signo  $<$  y se lee: menor que, la cual cumple las condiciones siguientes: I. ordenación... (orden total), II. el postulado de Arquímedes: Dadas dos cantidades cualesquiera, tales que  $0 < x < y$ , existe un número natural  $n$  tal que  $nx > y$ , III. Ley de monotonía... (compatible con la suma) IV. Divisibilidad.*



Como puede verse, para él las magnitudes escalares tienen que ser divisibles; nosotros diferenciamos las divisibles de las escalares.

En las páginas web

<http://www.lafacu.com/apuntes/física/medidas/default.htm> y

<http://salonhogar.com/ciencias/física/cienciasfísicasymedida/tiposmagnitudes.htm>

Orozco Carmona y © Vernet definen magnitud escalar de la forma siguiente: *...Entre las distintas propiedades medibles puede establecerse una clasificación básica. Un grupo importante de ellas queda perfectamente determinado cuando se expresa su cantidad mediante un número seguido de la unidad correspondiente. Este tipo de magnitudes recibe el nombre de magnitudes escalares.*

*Sin embargo, existen otras que precisan para su total definición que se especifique, además de los elementos anteriores, una dirección o una recta de acción y un sentido: son las llamadas magnitudes vectoriales o dirigidas...*

Pensamos que la definición de magnitud escalar que nos da es tan amplia que si no supiéramos, o intuyéramos, a qué magnitudes se refiere, no seríamos capaces de decir si una magnitud es escalar o no. Además parece que, en su definición, las escalares engloban a las vectoriales, ya que si cuando las magnitudes sean vectoriales, *además de los elementos anteriores, precisan para su total definición que se especifique una dirección o una recta de acción y un sentido*, la unidad que se elija tendrá que tener una dirección o una recta de acción y un sentido, que repercutirá en la cantidad que se tome para ser medida y no servirá como unidad de medida para todas las cantidades.

Teniendo en cuenta la definición que, por ejemplo, Prada da de magnitud, nuestra definición prácticamente coincide con la suya (1990: 12); aunque ella no pide que el semigrupo sea unitario; tampoco lo pedía cuando daba la definición de magnitud, y exige que la relación sea de orden total para que pueda ser arquimediana.

**Observación:** Una magnitud absoluta  $(M,+)$  que verifique las condiciones:

- (1) Cancelativa:  $\forall a,b,x \in M \quad a+x=b+x \Rightarrow a=b$ ,
- (2)  $\forall a,b \in M \quad a+b=0_M \Rightarrow a=0_M \text{ o } b=0_M$ ,
- (3)  $\forall a,b \in M \quad \exists c \in M / \quad a=b+c \text{ o } b=a+c$ ,
- (4)  $\forall a,b \in M \quad a \neq 0_M \quad \exists n \in \mathbb{N} / \quad b \leq na$ ,

es un semigrupo unitario y conmutativo, con la ordenación natural del semigrupo, será totalmente ordenado y arquimediano, es decir, será escalar.



**Ejemplo:** El conjunto de los números enteros con la suma  $(\mathbb{Z}, +)$ , no es una magnitud escalar con la ordenación natural del semigrupo, pues la ordenación sería la siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{Z} / b = a + c$$

y no verifica la propiedad antisimétrica como hemos visto anteriormente.

Considerando en  $(\mathbb{Z}, +)$  la ordenación inducida por el semigrupo  $\mathbb{Z}_+$ , sí es una magnitud escalar. La relación quedaría definida de la forma siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{Z}_+ / b = a + c.$$

Es fácil probar que esta relación es de orden total y que es compatible con la suma. Además es arquimediana pues se verifica que

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \neq 0 \leq a \quad \exists n \in \mathbb{Z}_+ / b \leq na.$$

Por ejemplo, si tomamos  $a=3$

$$3 \neq 0 \leq 3 \quad \text{para } b=-17 \quad \exists 1 \in \mathbb{Z}_+ / -17 \leq 1 \cdot 3; \quad \text{para } b=30 \quad \exists 11 \in \mathbb{Z}_+ / 30 \leq 11 \cdot 3.$$

**Ejemplo:** La magnitud relativa  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ , con la ordenación inducida por el semigrupo  $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ , que sería:

$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a, b) \leq (c, d) \iff \exists (e, f) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ / (c, d) = (a, b) + (e, f)$ ,  
no es una magnitud escalar, pues la relación no es de orden total, ya que, por ejemplo,  
 $\exists (2, 0), (0, 3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \forall (e, f) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \quad (2, 0) \neq (0, 3) + (e, f) \text{ y } (0, 3) \neq (2, 0) + (e, f).$

**Ejercicio:** ¿Sería escalar la magnitud “amplitud de ángulos”? ¿Cómo definirías la suma? ¿Y el orden?

**Ejercicio:** ¿Sería una magnitud escalar el conjunto de los números racionales? ¿Con qué operación? ¿Y con qué relación de orden?

En estos ejemplos podemos usar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “el arte de relacionar” y “el entorno”.

**Ejercicio:** Pon un ejemplo de magnitud que sea escalar y otro de magnitud vectorial.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la técnica “el entorno” y “el arte de relacionar”.

Las observaciones que haremos a continuación hacen referencia a proposiciones estudiadas anteriormente y vienen a confirmar que en una magnitud escalar absoluta el elemento neutro es el único que es menor

que cualquier otro elemento, y que no hay cantidades distintas de la nula que sumadas den la cantidad nula.

**Observación:** En una magnitud escalar absoluta  $M$  con la ordenación natural del semigrupo, —como es un semigrupo unitario, conmutativo y totalmente ordenado—, según vimos anteriormente, el elemento neutro es menor o igual que cualquier elemento, y si hay algún elemento que es menor o igual que todos los demás, éste es el neutro, luego el elemento neutro es el mínimo.

**Observación:** En una magnitud escalar absoluta  $M$  —que será un semigrupo unitario, conmutativo y totalmente ordenado— con la ordenación natural del semigrupo, según hemos visto anteriormente, no hay cantidades distintas de la nula cuya suma con otra cantidad sea la cantidad nula.

**Definición:** Dado un semigrupo unitario  $(A,*)$ , un **elemento**  $a \in A$  decimos que es **idempotente** si, y sólo si,  $a*a=a$ . Es decir, su cuadrado es él mismo.

**Proposición:** En una magnitud escalar finita  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  los únicos elementos que pueden ser idempotentes con la suma son el neutro y el máximo —si existe.

Demostración: El elemento neutro es idempotente, ya que sabemos que  $e_M + e_M = e_M$ .

Supongamos que  $m$  es el máximo. El máximo es idempotente pues si no lo fuera, sería

$$m+m=a \neq m \Rightarrow m+m \leq m$$

ya que sabemos que

$$\forall x \in M \quad x \leq m \Rightarrow m+m=a \leq m \text{ y } e_M \leq m,$$

al ser la relación de orden compatible con la ley de composición interna podemos afirmar que

$$e_M + m \leq m + m \Rightarrow m \leq m + m$$

y por la propiedad antisimétrica  $m+m=m$ , ¡contradicción! pues era  $m+m=a \neq m$ .

Supongamos que hay un elemento  $x \in M$  con  $e_M \neq x \leq m \neq x$  que sea idempotente con la suma:  $x+x=x$ . Al ser la magnitud escalar, la relación de orden es arquimediana, luego  $\exists n \in \mathbb{N} / m \leq x+x+\dots(n \dots +x$ , lo cuál es imposible, ya que por la propiedad asociativa

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x = x+x = x+x+x = \dots = x+x+\dots(n \dots +x,$$

y era  $x < m$ , luego tenemos que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad nx = x < m,$$

y por tanto, no sería arquimediana, ¡contradicción!, pues la magnitud era escalar.

El elemento neutro y el máximo no entran en contradicción con la condición de que la magnitud sea arquimediana que es:

$$\forall a, b \in M \text{ con } a \neq e_M \leq a \quad \exists n \in \mathbb{N} / b \leq a + a + \dots^{(n)} \dots + a,$$

ya que el neutro está excluido por definición y el máximo la verifica evidentemente.

**Observación:** El neutro y el máximo, los dos únicos idempotentes posibles en una magnitud escalar finita, no tienen por qué coincidir. Por ejemplo, en  $A = \{0, 1, 2\}$  con la operación dada mediante la tabla siguiente:

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabla15: Elementos idempotentes en una magnitud finita.

y la relación de orden  $0 \leq 1 \leq 2$ , después estudiaremos que es una magnitud escalar, en ella el neutro es el 0 y el máximo el 2.

**Observación:** No hemos especificado en esta proposición que la magnitud escalar finita tiene que ser absoluta, pues ya vimos anteriormente que una magnitud relativa finita no podía ser escalar, ya que al ser grupo no podría estar totalmente ordenada.

Los ejemplos que vienen a continuación los vamos a trabajar utilizando “la sinéctica” bajo el aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

**Ejemplo:**  $(\mathbb{N}_2, +)$  no es una magnitud escalar, pues sabemos que en una magnitud escalar hemos de tener una relación de orden total, luego tendrán que ser  $0 \leq 1$  ó  $1 \leq 0$ .

Si es  $0 \leq 1$ , como la relación de orden, tiene que ser compatible con la suma y  $1 \leq 1$  por la propiedad reflexiva, tendría que ser  $0 + 1 = 1 \leq 1 + 1 = 0$ , luego  $1 \leq 0$ , y por la antisimetría  $0 = 1$  ¡contradicción!

Si fuese  $1 \leq 0$ , también es  $1 \leq 1$ , y al tener que ser la relación de orden compatible con la suma tendríamos que  $1 + 1 = 0 \leq 0 + 1 = 1$ , luego,  $0 \leq 1$ , y por la antisimetría  $0 = 1$  ¡contradicción!

El razonamiento podríamos haberlo hecho mucho más rápido, ya que sabemos que  $(\mathbb{N}_2, +)$  es un grupo conmutativo finito y hemos visto

anteriormente que una magnitud relativa finita que tenga más de un elemento no puede estar totalmente ordenada, y por tanto no puede ser una magnitud escalar.

**Ejemplo:**  $(\mathbb{N}_6, +)$  tampoco es una magnitud escalar ya que aunque pudiéramos definir una relación de orden total, como todos los elementos tienen que estar relacionados, si cogemos, por ejemplo, el 0 y el 1, tendría que ser  $0 \leq 1$  ó  $1 \leq 0$ .

Si  $0 \leq 1$ , al ser la relación de orden compatible con la ley de composición interna, sería  $0+1 \leq 1+1=2$ , y al ser  $1 \leq 2$ , sumándole 1 a ambos miembros de la desigualdad, tenemos  $2 \leq 3$ , y así sucesivamente, tendríamos:  $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5$ .

Si tomamos dos elementos cualesquiera  $a$  y  $b$  de  $\mathbb{N}_6$  distintos, de modo que sea  $a \leq b$ , al tener que ser la relación de orden compatible con la suma

$$a+(6-b) \leq b+(6-b)=0,$$

luego tenemos que

$$a+(6-b) \leq 0,$$

y como 0 era menor o igual que los demás, por la propiedad antisimétrica tendría que ser

$$0 = a+(6-b);$$

como teníamos

$$b+(6-b)=0=a+(6-b),$$

al ser  $(\mathbb{N}_6, +)$  un grupo se verifica la propiedad cancelativa, por lo que se deduciría que  $b=a$ , ¡contradicción!, pues habíamos tomado  $a \neq b$ .

Si fuese  $1 \leq 0$ , por ser la relación de orden compatible con la suma, siguiendo un razonamiento análogo tendríamos:  $5 \leq 4 \leq 3 \leq 2 \leq 1 \leq 0$ .

Si tomamos dos elementos distintos cualesquiera  $a$  y  $b$ , de modo que sea  $a \leq b$ , al tener que ser la relación de orden compatible con la suma

$$0 = a+(6-a) \leq b+(6-a),$$

luego tenemos que

$$0 \leq b+(6-a),$$

y como 0 era mayor o igual que los demás, por la propiedad antisimétrica tendría que ser

$$0 = b+(6-a).$$

Como teníamos

$$a+(6-a)=0=b+(6-a),$$

al ser  $(\mathbb{N}_6, +)$  un grupo, se verifica la propiedad cancelativa, por lo que se llegaría a que  $b=a$  ¡contradicción! pues habíamos tomado  $a$  distinto de  $b$ .

Si este razonamiento te cuesta un poco, puedes aplicar “la sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, para ello empieza cogiendo dos elementos concretos de  $\mathbb{N}_6$  y sigue todos los pasos, después puedes tomar otros dos y hacer lo mismo, con ello aplicas la analogía personal. Mediante la analogía directa compara lo que ha sucedido en ambos casos. Con la analogía simbólica estudia si puedes simplificar el problema y observa si puedes encontrar alguna analogía. Y finalmente utilizando la analogía fantástica generaliza el proceso que has seguido, usando en lugar de dos elementos concretos, dos cualquiera a los que puedes llamar  $a$  y  $b$ . Es decir, si tomamos  $0$  y  $1$ , y es  $1 \leq 0$ , sumamos  $5$  a ambos miembros de la desigualdad y tendremos  $0 \leq 5$ , y como ya teníamos  $5 \leq 4 \leq 3 \leq 2 \leq 1 \leq 0$ , por la propiedad antisimétrica se llegaría a que  $0=5$  ¡contradicción! Continúa con otros dos, compara el proceso seguido en ambos casos e intenta generalizar el proceso.

**Ejercicio:** Sigue un razonamiento análogo para probar que si  $0 \leq 1$  también se llega a una contradicción.

De forma similar a como hemos razonado antes podríamos haber dicho que  $(\mathbb{N}_6, +)$  es un grupo finito y tiene más de un elemento, luego no puede estar totalmente ordenado, y por tanto, no puede ser una magnitud escalar.

Igual que hemos visto que  $(\mathbb{N}_6, +)$  no es una magnitud escalar, podríamos ver que cualquier  $(\mathbb{N}_n, +)$  con  $n > 1$  tampoco lo es. Y como sabemos que un grupo abeliano finito no puede estar totalmente ordenado, ningún grupo abeliano finito puede ser una magnitud escalar.

Nos planteamos si podríamos tener alguna magnitud escalar finita. Trabajamos con las técnicas: “el entorno” “el arte de relacionar” y “la sinapsis”. Por supuesto que no podría ser relativa, y no podría tener ningún elemento idempotente distinto del neutro y del máximo. Pensamos que a lo mejor una candidata podría ser la que damos en el siguiente ejercicio.

**Ejercicio:** Prueba si el conjunto  $A = \{0, 1, 2\}$  con la operación dada mediante la tabla siguiente:

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabla 16: Ejemplo de magnitud escalar.



y la relación de orden  $0 \leq 1 \leq 2$ , es una magnitud escalar.

Sabemos que un grupo abeliano finito no puede ser una magnitud escalar, por la proposición demostrada anteriormente. Vamos a ver los semigrupos unitarios y conmutativos finitos que pueden llegar a ser magnitudes escalares. Nos imaginamos que tendrán que ser de la forma de éste último, por tanto podemos enunciar la proposición que viene a continuación; en ella vamos a ver las condiciones que tiene que verificar la ley de composición interna definida en una magnitud absoluta para que sea escalar.

**Proposición:** Sea  $(A,+)$  una magnitud absoluta, finita y no trivial. Si  $(A,+)$  es una magnitud escalar con la ordenación natural del semigrupo, entonces se verifican las condiciones:

- 1)  $\exists a_m \in A \quad \forall a_i \in A \quad a_m + a_i = a_i + a_m = a_m$
- 2)  $\forall a_i \neq 0 \leq a_i \quad \exists n \in \mathbb{N} / \quad na_i = a_m.$

**Demostración:** Si el semigrupo unitario y conmutativo  $(A,+)$ , con  $A$  finito, fuese una magnitud absoluta escalar, tendría que tener una relación de orden total compatible con la ley de composición interna. Al tener los elementos totalmente ordenados, el neutro,  $a_0$ , tendría que ser el mínimo.

Además, como la relación es de orden total, el conjunto  $A$  tendría un máximo  $a_m \in A$ , y por tanto

$$\forall a_i \in A \quad a_i \leq a_m,$$

con lo cual tendríamos los elementos ordenados de la forma:

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq a_m.$$

Como la relación de orden tiene que ser compatible con la ley de composición interna

$$\forall a_i \in A \quad a_m = a_0 + a_m \leq a_i + a_m \leq a_m + a_m \leq a_m \Rightarrow \forall a_i \in A \quad a_i + a_m = a_m$$

por ser antisimétrica la relación de orden, luego se verifica 1).

Vamos a ver que la relación de orden no puede ser arquimediana, salvo que la operación cumpla las condiciones que indicamos. Tomamos un elemento cualquiera  $a_i \neq 0 \leq a_i$ ; como la relación de orden es compatible con la ley de composición interna, será:

$$a_i \leq a_i + a_i = 2a_i \leq 2a_i + a_i \leq 3a_i \leq \dots \leq na_i \leq a_m;$$

ya que comparando  $na_i \in A$  con el elemento  $a_m$  tendríamos que decir que  $na_i \leq a_m$ , y la relación de orden no sería arquimediana salvo que fuese:

a)  $\forall a_i \in A \quad a_i = 0$  y en este caso  $A = \{0\}$  con lo que tendríamos la magnitud trivial.

b)  $\forall a_i \in A \quad \exists n \in \mathbb{N} / \quad na_i = a_m$ , pues de otro modo no podría ser  $a_m \leq na_i$ , al ser  $a_m$  el máximo, y como se cumple que:

$$a_i \leq 2a_i \leq 3a_i \leq \dots \leq na_i = a_m,$$

tendríamos que  $\exists n \in \mathbb{N} / na_i = a_m$ , luego se verifica 2).

Como caso particular podríamos decir que esto puede pasar si está definida la ley de composición interna de la forma:

$$\forall a_i \in A \quad a_i + a_0 = a_i \quad \text{y} \quad \forall a_i, a_j \in A \setminus \{a_0\} \quad a_i + a_j = a_m,$$

siendo  $a_m$  el máximo de  $A$  con la relación de orden, ya que en este caso

$$\forall a_i \in A \quad \exists 2 \in \mathbb{N} / a_i + a_i = 2a_i = a_m,$$

pues sería  $a_i \leq 2a_i = a_m$ .

Quizá esta proposición pueda resultar demasiado complicada para algunos estudiantes. Para seguir el resto del tema no es totalmente imprescindible la demostración, pudiendo pasar el alumno que lo desee a ver los ejemplos que vienen a continuación y lo que queda del tema.

Vamos a utilizar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” para que el alumno pueda enterarse de forma más clara, a través de los ejemplos, de lo que nos dice la proposición que acabamos de demostrar.

**Ejemplos:** Sea el conjunto  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ . En él vamos a definir dos leyes de composición interna de modo que tengamos distintas magnitudes escalares para cada una de ellas, y lo vamos a hacer teniendo en cuenta la proposición que acabamos de demostrar. Sean por ejemplo las siguientes:

| o | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| * | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Tablas 17: Ejemplos de magnitudes escalares.

Prueba que verifican las condiciones anteriores y que, efectivamente, son magnitudes escalares con la relación de orden  $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3$ .

**Ejercicio:** Toma un conjunto finito y define en él una ley de composición interna de modo que sea una magnitud, pero que no sea escalar.

Con este ejercicio queremos utilizar las técnicas “el entorno”, “la sinapsis” y “la serendipity”.

El ejercicio que viene a continuación y la observación pretende justificar el nombre de magnitudes vectoriales dado a las que no eran escalares.

**Ejercicio:** Prueba que los vectores libres del plano no constituyen una magnitud escalar.

**Observación:** Como en una magnitud escalar hemos de tener una relación de orden total, al representarla mediante un diagrama de Hasse, tendríamos todos los elementos relacionados, luego tendríamos todos enlazados mediante flechas ascendentes, de aquí el nombre de magnitudes escalares, pues sus elementos estarían como en una escala, se podrían representar mediante puntos de una recta. Además la relación de orden tiene que ser arquimediana, condición que es fundamental para que una magnitud sea escalar.

Por esto eran magnitudes escalares, por ejemplo, la longitud, la superficie, la masa y los números racionales.

No son magnitudes escalares algunas magnitudes que tienen un número finito de elementos, salvo las que especificamos en la proposición anterior, por no poder tener una relación de orden total compatible con la operación y arquimediana.

Tampoco son magnitudes escalares, por ejemplo, los vectores libres del plano, los números complejos y  $\mathbb{Q}^n$  por no verificar la propiedad arquimediana. Por estar los vectores libres del plano entre las magnitudes no escalares es por lo que se le da el nombre de magnitudes vectoriales a estas magnitudes.

Nos preguntamos si entre las magnitudes, escalares o vectoriales infinitas, podríamos tener alguna que tuviese infinitos elementos idempotentes o que no tuviese más que el elemento neutro; esto es lo que pretendemos conseguir en los ejercicios que vienen a continuación.

Para resolver estos ejercicios vamos a utilizar las técnicas: “el arte de relacionar” y “la solución de problemas”.

**Ejercicio:** En el conjunto  $\mathbb{N}$ , de los números naturales, definimos la ley de composición interna  $*$  de la forma siguiente:

$$1) \forall x \in \mathbb{N} \quad x * 0 = 0 * x = x$$

$$2) \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x, y \leq 5 \quad x * y = y * x = 5$$

$$3) \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x \leq 5 \leq y \text{ ó } 5 \leq x \leq y \quad x * y = y * x = y.$$

Inicia la construcción de la tabla de dicha ley de composición interna y razona cómo se operan dos números naturales. ¿Es  $(\mathbb{N}, *)$  una magnitud?

¿Es  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, *, \leq)$  una magnitud escalar, siendo  $\leq$  la relación de orden usual de  $\mathbb{N}$ ? Calcula los elementos de  $\mathbb{N}$  que sean idempotentes.

**Ejercicio:** Define en  $\mathbb{N}$  otra ley de composición interna de modo que, con la ordenación usual, sea una magnitud escalar con algún elemento idempotente más que los que hay en el ejercicio anterior.

**Ejercicio:** En el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales tenemos la relación de orden usual, y llamamos  $x^+$  al siguiente de  $x$ . Por ejemplo,  $6=5^+$ . Definimos en  $\mathbb{N}$  la ley de composición interna  $*$  de la forma:

$$1) \forall x \in \mathbb{N} \quad x * 0 = 0 * x = x$$

$$2) \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x, y < 5 \quad x * y = y * x = 5$$

$$3) \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x \leq 5 \leq y \text{ ó } 5 < x \leq y \quad x * y = y * x = y^+$$

Haz una tabla con los primeros números naturales para ver cómo está definida esta operación. ¿Es  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, *, \leq)$  una magnitud escalar? Encuentra los elementos que sean idempotentes.

## 2.8.5. Clases de magnitudes escalares

Dentro de las magnitudes escalares vamos a considerar dos clases distintas, según se pueda expresar o no toda cantidad en función de una de ellas, como veremos después. Para esta clasificación vamos a atender a un tipo especial de semimódulos, que es el que comentamos a continuación.

Podríamos empezar preguntando a los alumnos: ¿has oído hablar de magnitudes discretas?; ¿y de magnitudes continuas? Son muchas las magnitudes escalares que hemos visto, ¿hay algunas que te han resultado más sencillas? ¿Se te ocurre alguna forma de definir las que pudieran considerarse “más elementales”?

Para resolver estas cuestiones podemos utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

### 2.8.5.1. Semimódulo cíclico

Podríamos comenzar proponiendo a los alumnos que buscaran algún semimódulo que tuviera algún elemento que operado con él mismo nos fueran dando todos los elementos del semimódulo. Se les sugiere que entre los que han visto antes hay alguno que verifica dicha condición.

Vamos a utilizar las técnicas: “el arte de relacionar”, “el entorno” y “solución de problemas”.

De forma análoga a como se define módulo cíclico (ver, por ejemplo, Herstein (1980: 190)) nos parece que se podría definir semimódulo cíclico, concepto que no hemos encontrado en ningún documento de los que hemos consultado, pero que nos parece fundamental para que tenga sentido esta clasificación.

Si tomamos, por ejemplo, el subconjunto  $A$  de la magnitud monedas, formado por una determinada moneda  $m$  y todas las monedas que obtenemos multiplicando  $m$  por cualquier número natural, podemos ver que  $(\mathbb{N}, A, +, \cdot)$  es un semimódulo, y cualquier elemento de  $A$  será múltiplo de  $m$ , es decir:

$$\forall a \in A \exists n \in \mathbb{N} / a = n \cdot m;$$

por verificar esta condición vamos a decir que este semimódulo es cíclico y que  $m$  es el generador.

**Definiciones:** Un **semimódulo**  $(X, S, *, \circ)$ , siendo el semianillo  $(X, +, \otimes)$ , se dice **cíclico** si

$$\exists a \in S \forall b \in S \exists n \in X / b = n \circ a.$$

Denotamos por

$$Xa = \{b \in S / \exists n \in X \text{ con } b = n \circ a\}$$

y en caso de ser el semimódulo cíclico  $\exists a \in S / Xa = S$ . Al elemento  $a$  tal que  $Xa = S$  se le llama **generador del semimódulo**  $S$ .

**Ejemplos:**

1. El semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$  es cíclico, ya que

$$\exists 1 \in \mathbb{N} \forall b \in \mathbb{N} \exists b \in \mathbb{N} / b = b \cdot 1,$$

el 1 es el generador de este semimódulo.

2. También es cíclico  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, +, \cdot)$ , ya que

$$\exists 1 \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{Z} / b = b \cdot 1 \text{ y}$$

$$\exists -1 \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \exists -b \in \mathbb{Z} / b = (-b) \cdot (-1),$$

este semimódulo tiene dos generadores.

3. El semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_6, +, \cdot)$  es cíclico. Pues

$$\exists [1] \in \mathbb{N}_6 \forall b \in \mathbb{N}_6 \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot [1] \text{ y también}$$

$$\exists [5] \in \mathbb{N}_6 \forall b \in \mathbb{N}_6 \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot [5];$$

en este caso el semimódulo tiene dos generadores.

**Ejercicio:** El semimódulo  $(\mathbb{Z}, \mathbb{R}, +, \cdot)$  no es cíclico y sin embargo  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$  sí lo es. Razónalo.

Con estos ejemplos y ejercicio intentamos aplicar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

**Observación:** El generador no tiene por qué ser único, como muestra el ejemplo 3.

**Ejercicio:** Encuentra, si los tiene, los generadores del semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_5, +, \cdot)$ .

**Definición:** Las definiciones que hemos dado de semimódulo cíclico y de generador de un semimódulo pueden servir para definir **magnitud cíclica** y **generador de una magnitud**, sólo hay que pedir que el semimódulo sea una magnitud.

**Definición:** Dada una magnitud  $(X, M, +, \cdot)$ , decimos que  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M$  constituyen un conjunto de **generadores de la magnitud** si, y sólo si,  

$$\forall x \in M \quad \exists r_1, r_2, \dots, r_n \in X / x = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n.$$

**Observación:** Para poder decir que una magnitud es cíclica necesitamos que el conjunto de generadores se reduzca a un conjunto unitario.

**Ejemplo:** Se puede ver que  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$  es un semimódulo, pero este semimódulo no es cíclico, ya que no hay ningún elemento de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que verifique que todos los demás sean múltiplos naturales de él. Podríamos pensar que todos los elementos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  son múltiplos de  $(1, 0)$ , pero  $(0, 1)$  no lo es y además  $\forall n \in \mathbb{N} \quad (0, 1) \neq n(1, 0)$ . Por la misma razón tampoco es generador  $(0, 1)$ . Esta magnitud no es cíclica.

Sin embargo,  $\{(0, 1), (1, 0)\}$  si es un conjunto de generadores de la magnitud  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ . En este caso hemos necesitado dos elementos para poder tener un conjunto de generadores de la magnitud.

**Ejercicio:** Estudia si las magnitudes escalares anteriormente consideradas son cíclicas o no. De las que no sean cíclicas, indica los generadores que tienen. Encuentra alguna magnitud cíclica y alguna otra que no lo sea.

Para resolver este último ejercicio utilizaremos la técnica “el entorno” y “el arte de relacionar”.

**Ejercicio:** Prueba que los generadores de los semimódulos  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_a, +, \cdot)$ , para  $a \in \mathbb{N}$ , son los  $[x]$  tales que  $\text{m.c.d.}(x, a) = 1$ .

Aunque nosotros no vamos a trabajar con ella, queremos destacar que hay una función, llamada función  $\varphi$  de Euler, que determina el número de generadores de los módulos de la forma  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ , como puede verse, por ejemplo, en Fraleigh (1987: 115 y 221).

### 2.8.5.2. Magnitudes discretas y continuas

Las magnitudes discretas constituyen el caso más sencillo de magnitudes escalares.

Le decimos a los alumnos: ¿sabes cuándo una magnitud es discreta? Si no lo sabes, consulta algún diccionario o enciclopedia y, en cualquier caso, pon un ejemplo. ¿A qué llamamos magnitud continua? Busca alguna magnitud que verifique esa condición.

Vamos a utilizar las técnicas: “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

El ejemplo que hemos puesto antes de las monedas, cuando iniciamos los semimódulos cíclicos, como es una magnitud escalar, por ser un semigrupo unitario, conmutativo totalmente ordenado y arquimediano, será una magnitud discreta.

**Definición:** Una **magnitud** escalar  $(X, M, +, \cdot, \leq)$ , siendo  $X = \mathbb{N}$  o  $X = \mathbb{Z}$ , decimos que es **discreta** si, y sólo si, es cíclica, es decir, toda cantidad se puede expresar como múltiplo natural o entero de una de ellas:

$$\exists a \in M \quad \forall b \in M \quad \exists n \in X / b = n \cdot a.$$

El elemento “a” se dice que es un **generador de la magnitud M**.

Es evidente que, como siempre consideramos  $M \neq \{0\}$ , tiene que ser  $a \neq 0$ .

**Proposición:** Una magnitud escalar con infinitos elementos es discreta si, y sólo si,  $\exists a \in M / M = \mathbb{N}a$  o  $M = \mathbb{Z}a$ .

**Demostración:** Si la magnitud es absoluta no puede ser  $M = \mathbb{Z}a$ , luego se verificará que  $M = \mathbb{N}a$ , y en este caso es evidente que

$$\exists a \in M \quad \forall b \in M \quad \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a.$$

Y si la magnitud discreta es absoluta será cierto que

$$\exists a \in M \quad \forall b \in M \quad \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a,$$

como se verifica que



$$\forall b \in M \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a,$$

tenemos que  $\mathbb{N}a \supset M$ ; además, por tener la magnitud la ley de composición externa, será cierto que  $\mathbb{N}a \subset M$ , y por tanto  $\mathbb{N}a = M$ .

De forma análoga probaríamos que la magnitud relativa es discreta si, y sólo si,  $M = \mathbb{Z}a$ .

Esta definición es más amplia que la que da Chamorro (1997: 78) que nos dice: *si en una magnitud  $M$  existe una cantidad  $v$ , —la a nuestra— que verifica que  $\mathbb{N}v = M$ , se dice que la magnitud  $M$  es discreta*. Para nosotros puede darse este caso o también que  $\mathbb{Z}a = M$ .

**Observación:** En este caso, entre una cantidad  $n \cdot a$  y otra  $(n+1) \cdot a$  no hay ninguna otra cantidad de esta magnitud.

En los ejercicios que vienen a continuación vamos a aplicar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

**Ejemplos:** ¿Conoces alguna magnitud discreta? Por si no has encontrado ninguna, aquí tienes algunas; éstas pueden ayudarte a buscar otras:

1. El conjunto de los números naturales con las operaciones suma y producto y la relación de orden usual es una magnitud discreta, como se puede ver sin dificultad, ya que

$$\exists 1 \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} / y = y \cdot 1.$$

2. El conjunto de los múltiplos de un número natural cualquiera, por ejemplo  $3\mathbb{N}$  con las operaciones suma y producto y la relación de orden usual es una magnitud discreta, ya que

$$\exists 3 \in 3\mathbb{N} \forall y \in 3\mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} / y = 3 \cdot n.$$

3. De forma análoga veríamos que también  $3\mathbb{Z}$  es una magnitud discreta con las operaciones suma y producto y la relación de orden usual.

4. Un conjunto  $P$  cuyos elementos sean números de pelotas se puede considerar como una magnitud discreta, siendo

$$P = \{0 \text{ pelotas}, 1 \text{ pelota}, 2 \text{ pelotas}, 3 \text{ pelotas} \dots\}$$

con la ley de composición interna suma de dos números de pelotas, la ley de composición externa producto de un número natural por un número de pelotas y la relación de orden usual.

De forma análoga se pueden considerar los conjuntos de números de chapas, o de caramelos, o de cochecitos, etc. Es decir, todo conjunto

en el que se puedan considerar como elementos distintos los formados por 0 objetos, 1 objeto, 2 objetos, 3 objetos, etc., y no haya ningunos otros intermedios, dan lugar a magnitudes escalares discretas.

**Ejercicio:** Prueba que todo semigrupo isomorfo a  $(\mathbb{N}, +)$  puede considerarse como una magnitud discreta absoluta.

### Ejemplos:

1. No es una magnitud discreta la longitud ya que no es posible expresar toda cantidad de la longitud como múltiplo de una de ellas, ya que si  $c$  es una cantidad de longitud, entre  $n \cdot c$  y  $(n+1) \cdot c$  hay muchas otras cantidades de la magnitud longitud.

2. Serían magnitudes discretas por ejemplo:

$$L = \{0 \text{ cm}, 1 \text{ cm}, 2 \text{ cm}, 3 \text{ cm} \dots\}$$

$$T = \{0 \text{ hora}, 1 \text{ hora}, 2 \text{ horas}, 3 \text{ horas} \dots\}$$

$$S = \{0 \text{ dm}^2, 1 \text{ dm}^2, 2 \text{ dm}^2, 3 \text{ dm}^2 \dots\}.$$

Estas constituyen las magnitudes elementales más adecuadas para la introducción de las propiedades de los semimódulos, tanto de la adición en el correspondiente semigrupo, como de la multiplicación de un número natural por una cantidad de la magnitud.

3. El semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_6, +, \cdot)$  considerado como magnitud, que es cíclico, no es una magnitud escalar al no poder definirse una relación de orden compatible con la suma, como hemos visto anteriormente, y por tanto no puede ser una magnitud discreta.

4. La magnitud escalar  $(\mathbb{N}, A, *, \cdot)$ , siendo  $A = \{0, 1, 2\}$ , con la operación  $*$  definida anteriormente y que repetimos:

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Tabla 18: Ejemplo de magnitud escalar.

y la relación de orden:  $0 \leq 1 \leq 2$ , es discreta. Veamos que se verifica que  $\exists a \in A \quad \forall b \in A \quad \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a$ , en este caso  $\exists 1 \in A \quad \forall b \in A \quad \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a$ , ya que  $0 = 0 \cdot 1$ ,  $1 = 1 \cdot 1$  y  $2 = 2 \cdot 1 = 1 * 1$ , luego es una magnitud discreta.

**Ejercicio:** Estudia si son magnitudes discretas las otras dos magnitudes escalares que teníamos definidas en el conjunto  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Observación:** No todo semimódulo cíclico va a ser una magnitud discreta, ya que necesitamos que sea magnitud escalar. Los semimódulos cíclicos finitos  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_n, +, \cdot)$  no pueden ser magnitudes discretas.

**Ejercicio:** Prueba que el conjunto de los números enteros considerado como semimódulo sobre sí mismo es una magnitud discreta.

**Definición:** A las **magnitudes** escalares que no sean discretas les vamos a llamar **continuas**.

En éstas no hay una cantidad de modo que todas las demás sean múltiplos naturales o enteros de ella. Algunas de las magnitudes continuas infinitas cumplirán que dadas dos cantidades distintas, siempre hay otra cantidad que está entre ellas, es decir:

$$\forall x, y \in M \quad x < y \quad \exists z \in M / x < z < y.$$

Como la longitud, por ejemplo.

Pero no todas tienen que cumplir esta condición como por ejemplo la que teníamos en el conjunto de los números naturales con la relación de orden usual, y llamamos  $x^+$  al siguiente de  $x$ . Definimos en  $\mathbb{N}$  la ley de composición interna  $*$  de la forma:

- 1)  $\forall x \in \mathbb{N} \quad x * 0 = 0 * x = x$
- 2)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x, y < 5 \quad x * y = y * x = 5$
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x \leq 5 \leq y \quad x * y = y * x = y^+$
- 4)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad 5 < x \leq y \quad x * y = y * x = y^+.$

**Ejercicio:** Estudia si la magnitud  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, *, \leq)$ , siendo la ley de composición interna  $*$  la siguiente:

- 1)  $\forall x \in \mathbb{N} \quad x * 0 = 0 * x = x$
- 2)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x, y \leq 5 \quad x * y = y * x = 5$
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x \leq 5 \leq y \quad x * y = y * x = y$
- 4)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad 5 \leq x \leq y \quad x * y = y * x = y$

y la relación de orden la usual de  $\mathbb{N}$ , es una magnitud discreta.

**Ejercicio:** Estudia si la magnitud  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, *, \leq)$ , siendo la ley de composición interna  $*$  la siguiente:

- 1)  $\forall x \in \mathbb{N} \quad x * 0 = 0 * x = x$
- 2)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x, y < 5 \quad x * y = y * x = 5$
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x \leq 5 \leq y \quad x * y = y * x = y^+$
- 4)  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad 5 < x \leq y \quad x * y = y * x = y^+$

y la relación de orden la usual de  $\mathbb{N}$ , es una magnitud discreta.

Para Chamorro-Belmonte (1988: 143) *una magnitud se dice continua si todos los números reales positivos son multiplicables por las cantidades de la magnitud*. Evidentemente, éstas quedan dentro de las magnitudes continuas consideradas por nosotros. Esto es debido a que nosotros no excluimos aquéllas que puedan ser multiplicables por los números complejos, por los reales u otros subconjuntos de los números reales, como por ejemplo los números racionales.

**Ejemplo:** El conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  con la suma y el producto puede ser considerado como una magnitud  $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  continua.

**Ejercicio:** ¿Es  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  una magnitud continua?

**Ejemplo:** Un semigrupo finito no es una magnitud discreta ni continua, salvo en el caso de las magnitudes estudiadas en la última proposición del apartado anterior, ya que no es una magnitud escalar.

**Ejercicios:**

1° ¿Es la “amplitud de ángulos” una magnitud discreta? ¿Y la superficie? ¿Y el peso? ¿Y el dinero?

2° ¿Es una magnitud un conjunto de pelotas? ¿Es discreta? ¿Es continua?

3° De las magnitudes escalares finitas que hemos visto antes, ¿alguna es continua?

4° Encuentra alguna magnitud escalar que sea discreta y alguna otra que sea continua.

**Ejercicio:** Si una magnitud es de alguno de los tipos estudiados anteriormente, ¿podemos decir que cualquier submagnitud suya tiene que ser del mismo tipo?

Tenemos las magnitudes clasificadas en varios tipos, vamos a utilizar la técnica “ideogramación” para organizar de alguna forma lo que tenemos, para lo cual hacemos un “poligrama estructural de síntesis” que puede ser el siguiente:

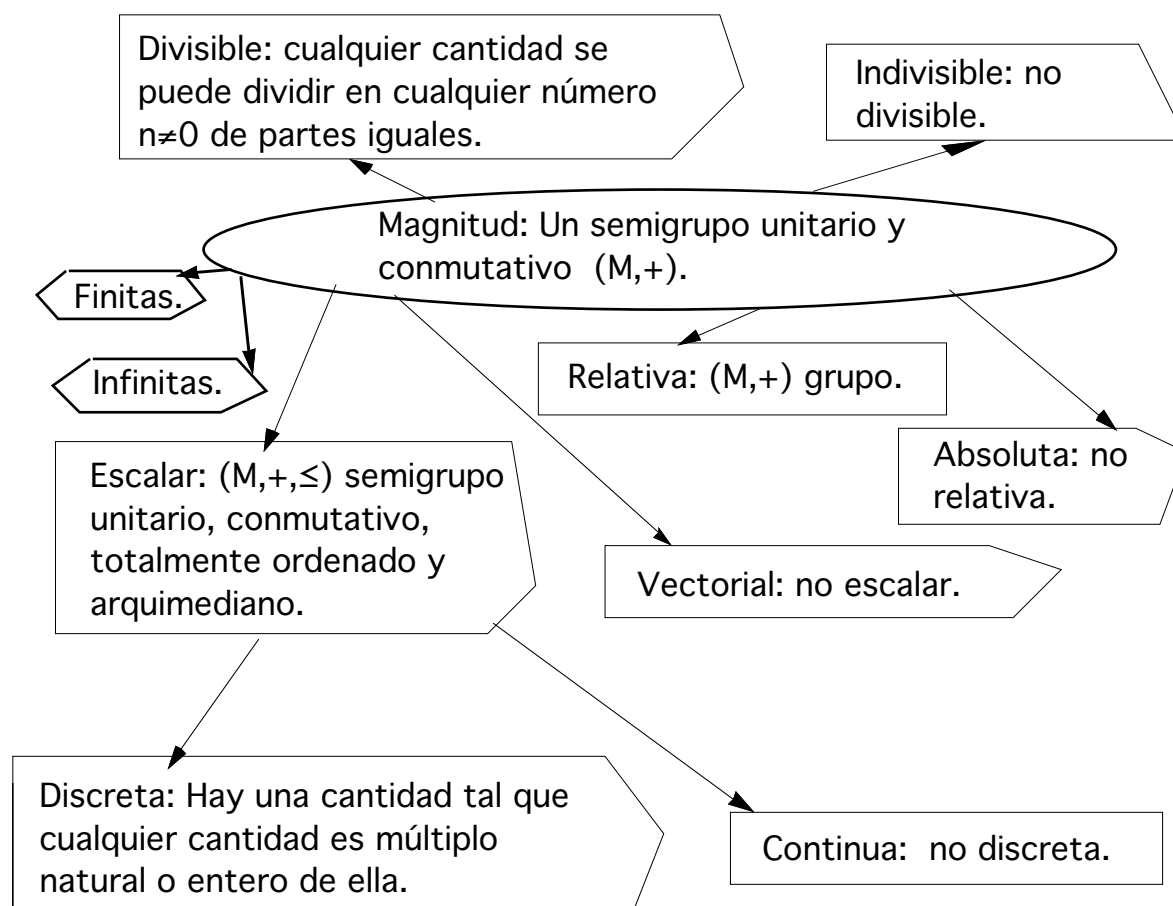


Figura 25: Poligrama relacional de síntesis de los distintos tipos de magnitudes.

## 2.9. Ejemplos y ejercicios

Utilizando las técnicas: “el entorno”, “el método combinatorio” en su dos versiones: “la lista de atributos” y “el análisis morfológico”, “el arte de relacionar” y “la sinapsis” puedes encontrar fácilmente magnitudes de cada uno de los tipos que consideramos. Razona por qué, o por qué no, nos sirven como ejemplos las siguientes:

1. La longitud con la suma y con la relación menor o igual, es una magnitud escalar, continua, absoluta, divisible e infinita.
2. La longitud con la suma y con la relación de igualdad, es una magnitud vectorial, absoluta, divisible e infinita.
3. El tiempo con la suma y con la relación menor o igual, es una magnitud escalar, continua, relativa, divisible e infinita.

4. El tiempo con la suma y con la relación de igualdad, es una magnitud vectorial, relativa, divisible e infinita.

5. Los vectores libres del plano con la suma y con la relación menor o igual, son una magnitud vectorial, relativa, divisible e infinita.

6. La magnitud  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ , con la relación menor o igual usual, es escalar, discreta, absoluta, indivisible e infinita.

7. La magnitud  $(\mathbb{N}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, +, \cdot)$ , con la relación menor o igual, es vectorial, continua, absoluta, indivisible e infinita.

8. La magnitud  $(\mathbb{N}_5, \mathbb{N}_5, +, \cdot)$  es vectorial, relativa, divisible y finita.

**Ejercicio:** Analiza todas las clases de magnitudes que hemos considerado y haz una tabla de doble entrada colocando éstas en fila y en columna para que, con la técnica de Metodología Creativa “el método combinatorio” en su versión “análisis morfológico”, puedas ir colocando cada una de las magnitudes que hemos visto anteriormente en algún recuadro. Si te queda algún recuadro sin nada, razona si es posible encontrar alguna magnitud que puedas colocar en él; si es así búscala.

## 2.10. Media de magnitudes escalares

Empezamos diciéndole al alumno-profesor: seguro que has efectuado mediciones de varias cantidades de distintas magnitudes, ¿recuerdas alguna medición de las que hayas efectuado?; ¿qué mediste?; ¿con qué unidad de medida? ¿Podrías haber realizado esa medida tomando como unidad alguna parte de tu cuerpo? ¿Qué es para ti medir? ¿Cómo mides? ¿Qué se puede medir? ¿Para qué sirve la medida de una cantidad?; ¿podría tener otros usos? ¿Todas las magnitudes son medibles? ¿Todo lo que es medible es una magnitud? ¿Hay alguna magnitud que hoy no sea medible pero que pudiera llegar a ser medible en el futuro?

Para resolver estas cuestiones, aparte de utilizar la técnica “el arte de preguntar”, vamos a usar, entre otras, las siguientes técnicas: “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en sus dos opciones: “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo familiar extraño”, “el método combinatorio” llamado “análisis funcional”, “el entorno”, “la biónica”, “la sinapsis”, “la serendipity”, “la técnica de escenarios” y “la síntesis creativa”.

La medida ha venido a reflejar uno de los primeros acuerdos pacíficos y convenidos de la humanidad. Uno de estos grandes acuerdos

fue el establecimiento, ya en el siglo XIX, del sistema métrico decimal, aunque muchas magnitudes aún se siguen midiendo con unidades antiguas como el cuartillo, la cuartilla, el celemín, la fanega, etc.

Vamos a plantearnos medir una magnitud; esta magnitud podría ser escalar o vectorial. El caso de la magnitud vectorial lo vamos a estudiar después, ahora vamos a ver cómo medimos una magnitud escalar. Pensemos que queremos medir una cantidad de una magnitud escalar, por ejemplo, el largo de la clase; entonces lo que hacemos es elegir otra cantidad de longitud, que puede ser el paso, y vemos el número de veces que el largo de la clase contiene al paso; este número nos daría la medida del largo de la clase, tomando como unidad de medida el paso. Si quisiéramos medir cualquier cantidad de longitud con esta misma unidad de medida, seguiríamos el mismo proceso; si esto lo hacemos con todas las cantidades de esta magnitud, tendríamos medida la magnitud longitud. Para expresar todo este proceso de forma matemática necesitamos estudiar lo que entenderemos por medida.

Antes de introducir la noción de medida de una magnitud necesitamos unos conocimientos matemáticos previos que son los que introducimos a continuación.

### 2.10.1. Homomorfismos de semigrupos

Para iniciar al alumno-profesor en los homomorfismos podemos empezar con un bombardeo de ideas preguntándole: ¿has trabajado con alguna aplicación entre conjuntos que tengan definida alguna ley de composición interna? En caso afirmativo, ¿se cumplía que la imagen de la operación era igual a la operación hecha con las imágenes? ¿En algún caso la aplicación era inyectiva o biyectiva? ¿Sabes lo que es un homomorfismo? ¿Has oído hablar de monomorfismo?, ¿y de isomorfismo? En caso afirmativo, comenta qué entendiste por tal.

Aplicaremos las siguientes técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinéctica” en sus dos aspectos: “hacer lo familiar extraño” y “convertir lo extraño en familiar” y “la síntesis creativa”.

Los homomorfismos son aplicaciones entre estructuras algebraicas del mismo tipo que conservan dicha estructura. Por ejemplo, si consideramos el conjunto de los números naturales con la suma  $(\mathbb{N}, +)$ , es un semigrupo unitario y conmutativo, y el conjunto de las potencias de dos con el producto  $(\mathbb{P}, \cdot)$ , también es un semigrupo unitario y conmutativo. Vamos a establecer la aplicación



$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{P} \\
 x &\rightarrow f(x)=2^x \\
 y &\rightarrow f(y)=2^y,
 \end{aligned}$$

si calculamos la imagen de

$$x+y \rightarrow f(x+y)=2^{x+y}=2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y),$$

por verificarse esto decimos que tenemos un homomorfismo entre  $(\mathbb{N}, +)$  y  $(\mathbb{P}, \cdot)$ .

**Definiciones:** Dados dos conjuntos cada uno con una ley de composición interna  $(A, *)$  y  $(B, \perp)$ , una aplicación

$$f: A \rightarrow B$$

que verifique que:

$$\forall a, b \in A \quad f(a * b) = f(a) \perp f(b)$$

decimos que es un **homomorfismo**.

Si  $(A, *)$  y  $(B, \perp)$  son dos semigrupos, decimos que  $f$  es un **homomorfismo entre los dos semigrupos**. Si  $(A, *)$  y  $(B, \perp)$  fuesen grupos, se hablaría de **homomorfismo entre los dos grupos**.

Cuando el homomorfismo  $f$  sea inyectivo, le llamaremos **monomorfismo**; cuando sea suprayectivo, le llamaremos **epimorfismo** y si es biyectivo, le llamaremos **isomorfismo**. Si el homomorfismo va de  $(A, *)$  en él mismo, le llamaremos **endomorfismo**, y si el endomorfismo es un isomorfismo, le llamaremos **automorfismo**.

**Ejemplo:** Si tenemos el conjunto  $\mathbb{Z}_5$  con la suma, podríamos establecer la aplicación

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_5 \\
 x &\rightarrow [x]
 \end{aligned}$$

Si sobre el conjunto  $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ , definimos la operación de forma análoga a como hicimos anteriormente y que ahora copiamos,

| +   | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [4] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [4] | [0] | [1] | [2] |
| [4] | [4] | [0] | [1] | [2] | [3] |

Tabla 19: El grupo  $(\mathbb{Z}_5, +)$ .

tenemos un homomorfismo entre los grupos  $(\mathbb{Z}, +)$  y  $(\mathbb{Z}_5, +)$  ya que se verifica que

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Esta aplicación es, evidentemente, sobreyectiva. Por tanto tenemos un epimorfismo entre  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}_5$ .

**Ejercicio:** Podríamos establecer la aplicación

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}_5 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [0] &\rightarrow 0 \\ [1] &\rightarrow 1 \\ [2] &\rightarrow 2 \\ [3] &\rightarrow 3 \\ [4] &\rightarrow 4 \end{aligned}$$

siendo las operaciones en  $\mathbb{Z}_5$  y en  $\mathbb{Z}$  la suma. ¿Se verifica que

$$\forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_5 \quad f([a] + [b]) = f([a]) + f([b])?$$

¿Tenemos un homomorfismo entre los grupos  $(\mathbb{Z}_5, +)$  y  $(\mathbb{Z}, +)$ ? ¿Esta aplicación es inyectiva? ¿Podemos decir que tenemos un monomorfismo entre los grupos  $\mathbb{Z}_5$  y  $\mathbb{Z}$ ? Si como conjunto final hubiéramos tomado el conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , ¿la aplicación sería sobreyectiva y por tanto biyectiva, con lo que tendríamos un isomorfismo? (Idea: prueba si se verifica, por ejemplo, que  $f([3] + [2]) = f([3]) + f([2])$ ).

**Ejemplo:** Vamos a definir una operación sobre el subconjunto de los números racionales  $\{0, 1/2, 1, 3/2\}$  para que sea isomorfo, como semigrupo, a  $(\mathbb{Z}_4, +)$ .

Podríamos empezar estableciendo una aplicación biyectiva entre ellos. Consideremos, por ejemplo

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}_4 &\rightarrow \{0, 1/2, 1, 3/2\} \\ [0] &\rightarrow 0 \\ [1] &\rightarrow 1/2 \\ [2] &\rightarrow 1 \\ [3] &\rightarrow 3/2 \end{aligned}$$

Definimos la operación mediante la tabla

| *   | 0   | 1/2 | 1   | 3/2 |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 1/2 | 1   | 3/2 |
| 1/2 | 1/2 | 1   | 3/2 | 0   |
| 1   | 1   | 3/2 | 0   | 1/2 |
| 3/2 | 3/2 | 0   | 1/2 | 1   |

Tabla 20: Ejemplo de grupo isomorfo a  $(\mathbb{Z}_4, +)$ .

Sólo queda probar que es homomorfismo; nosotros lo vamos a hacer con dos elementos y queda como ejercicio probar que con los demás también es cierto. Tomamos [1] y [3],

$$f([1]+[3])=f([0])=0=1/2+3/2=f([1])+f([3])$$

en este caso nos ha dado que se verifica la condición para que sea un isomorfismo, como esperábamos.

## 2.10.2. Propiedades de los homomorfismos de semigrupos

En todos los ejemplos de homomorfismos de semigrupos unitarios que hemos visto en el apartado anterior, siempre se verificaba que la imagen del elemento neutro era el elemento neutro del conjunto imagen. Además en el último ejemplo, que era un homomorfismo de grupos, elegimos como imagen del simétrico de un elemento al simétrico de la imagen. Le preguntamos al alumno: ¿siempre tendrá que ser así? En caso afirmativo, prueba que los homomorfismos tendrán que tener estas propiedades. ¿La imagen de un semigrupo será un semigrupo?; ¿y la imagen de un grupo será un grupo? En caso afirmativo demuéstalo.

Vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa “el arte de preguntar”, “el método Delfos”, “el entorno”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

Sean dos conjuntos con sus respectivas leyes de composición interna  $(A,*)$  y  $(B,\perp)$ , y sea el homomorfismo

$$f: A \rightarrow B.$$

Se verifican las siguientes propiedades:

1ª La operación  $\perp$  es cerrada en  $f(A)$ .

En efecto, tenemos que ver que

$$\forall b_1, b_2 \in f(A) \quad b_1 \perp b_2 \in f(A).$$

Sabemos que

$$\exists a_1, a_2 \in A / f(a_1)=b_1 \text{ y } f(a_2)=b_2,$$

además

$$b_1 \perp b_2 = f(a_1) \perp f(a_2) = f(a_1 * a_2) \in f(A).$$

2ª Si la operación  $*$  es asociativa en  $A$ , la operación  $\perp$  es también asociativa en  $f(A)$ .

En efecto, tenemos que ver que

$$\forall b_1, b_2, b_3 \in f(A) \quad [b_1 \perp b_2] \perp b_3 = b_1 \perp [b_2 \perp b_3].$$

Sabemos que

$$\exists a_1, a_2, a_3 \in A / f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2 \text{ y } f(a_3)=b_3,$$

además

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3),$$

aplicándole el homomorfismo  $f$  nos da

$$f[(a_1 * a_2) * a_3] = f[(a_1 * a_2)] \perp f(a_3) = [f(a_1) \perp f(a_2)] \perp f(a_3)$$

$$f[(a_1 * a_2) * a_3] = f[a_1 * (a_2 * a_3)] = f(a_1) \perp [f(a_2 * a_3)] = f(a_1) \perp [f(a_2) \perp f(a_3)],$$

luego por ser  $f$  aplicación tiene que ser

$$[f(a_1) \perp f(a_2)] \perp f(a_3) = f(a_1) \perp [f(a_2) \perp f(a_3)],$$

y por tanto

$$[b_1 \perp b_2] \perp b_3 = b_1 \perp [b_2 \perp b_3], \text{ como queríamos probar.}$$

**3ª** Si  $(A, *)$  y  $(B, \perp)$  son semigrupos,  $(f(A), \perp)$  es un subsemigrupo de  $(B, \perp)$ .

Es consecuencia las dos propiedades anteriores.

**4ª** Si la operación  $*$  es conmutativa en  $A$ , la operación  $\perp$  es también conmutativa en  $f(A)$ .

La demostración queda como ejercicio.

**5ª** Si  $(A, *)$  es un semigrupo abeliano y  $(B, \perp)$  es semigrupo,  $(f(A), \perp)$  es un subsemigrupo abeliano de  $(B, \perp)$ .

Es consecuencia de 1ª, 2ª y 4ª.

**6ª** La imagen del elemento neutro de  $(A, *)$  es el elemento neutro de  $(f(A), \perp)$ .

En efecto: Designamos por  $e$  al elemento neutro de  $(A, *)$ , tenemos, por tanto, que demostrar que  $f(e)=e'$  es el elemento neutro de  $(f(A), \perp)$ .

Sabemos que  $\forall b \in f(A) \exists a \in A / f(a)=b$ , por tanto

$$f(a * e) = f(a) \perp f(e) \Rightarrow f(a) = f(a) \perp f(e) \Rightarrow b = b \perp f(e),$$

luego tenemos que

$$\forall b \in f(A) \quad b = b \perp f(e),$$

lo que nos dice que  $f(e)$  es el elemento neutro de  $(f(A), \perp)$  por la derecha. De forma análoga se probaría que  $f(e)$  es el elemento neutro de  $(f(A), \perp)$  por la izquierda. Y como sabemos que si en un conjunto con una ley de composición interna hay elemento neutro por la izquierda y por la derecha, ambos coinciden y este es el elemento neutro; por tanto

$f(e)=e'$  es el elemento neutro de  $(f(A),\perp)$ . También sabemos que en un conjunto con una ley de composición interna el elemento neutro, si existe, es único; luego tendrá que ser  $f(e)=e'$ .

**Observación:** Si  $e$  es el elemento neutro de  $(A,*)$  y  $e'$  es el elemento neutro de  $(B,\perp)$ ,  $f(e)$  no tiene por qué coincidir con  $e'$ .

En efecto, sean los semigrupos  $(\mathbb{Z},\bullet)$  y  $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\bullet)$  y el homomorfismo

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

$$x \rightarrow (x,0).$$

El elemento neutro de  $(\mathbb{Z},\bullet)$  sabemos que es el 1, y la imagen del 1 es  $(1,0)$  que es el elemento neutro de la imagen  $(\mathbb{Z}\times\{0\},\bullet)$ , pero no coincide con el elemento neutro de  $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\bullet)$  que es  $(1,1)$ .

**7ª** Si  $(A,*)$  es un semigrupo unitario y  $(B,\perp)$  es semigrupo,  $(f(A),\perp)$  es un subsemigrupo unitario de  $(B,\perp)$ .

Es consecuencia de 1ª, 2ª y 6ª.

**8ª** La imagen del simétrico de un elemento de  $A$  es el simétrico de la imagen en  $f(A)$ . Y si  $f(e)=e'$  es el elemento neutro de  $B$ , la imagen del simétrico es el simétrico de la imagen en  $B$ .

En efecto: denotamos por  $a'$  el simétrico de  $a$  y tendremos que probar que  $f(a')=[f(a)]'$ . Sabemos que

$$f(e)=f(a*a')=f(a)\perp f(a') \Rightarrow f(e)=f(a)\perp f(a') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(e)=f(a)\perp f(a'),$$

por tanto  $f(a')$  es simétrico por la derecha de  $f(a)$ . De forma análoga se probaría que también es simétrico por la izquierda; y como sabíamos que en un semigrupo si un elemento tiene simétrico por la izquierda y por la derecha, éste es el simétrico y es único, tenemos que

$$f(a')=[f(a)]',$$

es decir  $f(a)$  y  $f(a')$  son simétricos en  $f(A)$ .

Como consecuencia si  $f(e)=e'$  es el elemento neutro en  $B$ , la imagen del simétrico es el simétrico de la imagen en  $B$ .

**9ª** Si  $(A,*)$  y  $(B,\perp)$  son grupos,  $(f(A),\perp)$  es un subgrupo de  $(B,\perp)$ . Y si  $(A,*)$  es grupo abeliano,  $(f(A),\perp)$  es un subgrupo abeliano de  $(B,\perp)$ .

Razona que es consecuencia de las propiedades anteriores.

**Ejercicio:** Busca algún homomorfismo de grupos y comprueba que se verifican estas propiedades.

Para resolver este ejercicio podemos utilizar “el entorno”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “la sinapsis”.

### 2.10.3. Homomorfismos de semimódulos

Podríamos empezar preguntándole a los alumnos: ya que sabéis lo que es un homomorfismo entre semigrupos, ¿seríais capaces de decir cuándo tendríamos un homomorfismo entre semimódulos? ¿Qué necesitaría este homomorfismo para que fuese isomorfismo? Si tenéis las ideas claras, poned algún ejemplo.

Utilizaremos las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinéctica” en sus dos aspectos “hacer lo familiar extraño” y “convertir lo extraño en familiar” y “la síntesis creativa”.

Veamos algún ejemplo. Sea  $P=\{0 \text{ pelotas}, 1 \text{ pelota}, 2 \text{ pelotas}, 3 \text{ pelotas}...\}$  y vamos a tomar los semimódulos  $(\mathbb{N}, P, +, \bullet)$  y  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \bullet)$ . La aplicación

$$f: P \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \text{ pelotas} \rightarrow f(n \text{ pelotas})=n$$

además de ser un homomorfismo entre  $(P, +)$  y  $(\mathbb{N}, +)$ , verifica que:

$$\forall n \text{ pelotas}, m \text{ pelotas} \in P$$

$$f(n \text{ pelotas} + m \text{ pelotas}) = f(n \text{ pelotas}) + f(m \text{ pelotas}),$$

$$\forall n \text{ pelotas} \in P \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f(k \bullet (n \text{ pelotas})) = k \bullet f(n \text{ pelotas}),$$

por esto decimos que tenemos un homomorfismo entre los dos semimódulos considerados.

**Definiciones:** Dados dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$  con sus respectivas leyes de composición interna y externa  $(X, A, *, o)$  y  $(X, B, \perp, \otimes)$ , una aplicación

$$f: A \rightarrow B$$

que verifique que:

$$1) \quad \forall a, b \in A \quad f(a * b) = f(a) \perp f(b) \text{ y}$$

$$2) \quad \forall a \in A \quad \forall x \in X \quad f(x o a) = x \otimes f(a),$$

decimos que es un **homomorfismo** entre  $(X, A, *, o)$  y  $(X, B, \perp, \otimes)$ .

Si  $(X, A, *, o)$  y  $(X, B, \perp, \otimes)$  son semimódulos y se verifican esas tres condiciones, decimos que tenemos un **homomorfismo** o una **aplicación lineal de semimódulos**.

Cuando el homomorfismo  $f$  sea inyectivo, le llamaremos **monomorfismo**; si es suprayectivo, le llamaremos **epimorfismo** y si es biyectivo, le llamaremos **isomorfismo**. Si el homomorfismo va del semimódulo  $(X, A, *, o)$  en él mismo, le llamaremos **endomorfismo** y si el endomorfismo es un isomorfismo, le llamaremos **automorfismo**.

**Definición:** Un homomorfismo  $f: A \rightarrow B$  entre semimódulos en los que tenemos definidas relaciones de orden compatibles con las leyes de composición internas y externas  $(X, A, *, o, \leq)$  y  $(X, B, \perp, \otimes, \leq')$  se dice que es un **homomorfismo** o **una aplicación lineal entre semimódulos ordenados** si verifica:

- 1)  $\forall a, b \in A \quad f(a * b) = f(a) \perp f(b),$
- 2)  $\forall a \in A \quad \forall x \in X \quad f(x o a) = x \otimes f(a)$  y
- 3)  $\forall a, b \in A \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq' f(b).$

Hemos usado  $\leq$  y  $\leq'$  para diferenciar las relaciones de orden de los dos semimódulos.

En los ejemplos y ejercicio que vienen a continuación vamos a usar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

**Ejemplos:** Sea  $L$  la magnitud longitud de los segmentos del plano:  $L = \{l_x / x \in S\}$ , y sea  $A$  la magnitud superficie de los rectángulos de base fija  $a$ . Dejamos como ejercicio probar que ambos conjuntos son semimódulos ordenados. Definimos la aplicación:

$$f: L \rightarrow A \\ l_x \rightarrow al_x$$

que asigna a cada clase de segmentos el área del rectángulo que tiene esa altura, es decir, a la clase de segmentos  $l_x$  le asignará el área  $al_x$ . Esta aplicación es un homomorfismo entre semimódulos ordenados, ya que se verifica:

$$1) \forall l_x, l_y \in L \quad f(l_x + l_y) = a(l_x + l_y) = al_x + al_y = f(l_x) + f(l_y).$$

$$2) \forall l_x \in L \quad \forall n \in \mathbb{R} \quad f(nl_x) = a(nl_x) = (an)l_x = (na)l_x = n(al_x) = nf(l_x).$$

3) Como las magnitudes que estamos considerando son escalares, veamos que la aplicación respeta la ordenación:

$$\begin{aligned} \forall l_x, l_y \in L \quad l_x \leq l_y &\iff \exists l_z \in L / l_y = l_x + l_z \Rightarrow al_y = a(l_x + l_z) = \\ &= al_x + al_z \Rightarrow f(l_y) = f(l_x) + f(l_z) \Rightarrow \exists f(l_z) \in A / f(l_y) = f(l_x) + f(l_z) \iff \\ &\iff f(l_x) \leq f(l_y). \end{aligned}$$

Además es un isomorfismo, ya que  $f$  es una aplicación biyectiva.

**Ejercicio:** Sea  $L$  la magnitud longitud de los segmentos del plano y sea  $C$  la magnitud superficie de los cuadrados. ¿Será un isomorfismo la



aplicación que asocia a cada segmento el área del cuadrado de lado ese segmento? Justifica la respuesta.

## 2.10.4. Propiedad de los homomorfismos de semi-módulos

Vamos a intentar probar que la imagen mediante un homomorfismo de una magnitud de un determinado tipo, es una magnitud del mismo tipo; para ello nos va a interesar plantearnos:

1ª Si la imagen de un semimódulo será un semimódulo.

2ª Si la imagen de un semimódulo cíclico será también un semimódulo cíclico.

3ª Si, cuando  $f$  sea un isomorfismo de semimódulos,  $f^{-1}$  será un homomorfismo de semimódulos.

Podemos plantearle al alumno estas cuestiones, y nosotros, antes de discutir si esto es cierto o no, vamos a ver un ejemplo.

Vamos a utilizar “el arte de preguntar”, “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

**Ejemplo:** Sean los semimódulos  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$  y  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, +, \cdot)$  y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\rightarrow 2 \cdot n. \end{aligned}$$

Vamos a ver si esta aplicación es un homomorfismo de semimódulos; para ello tendría que verificar las dos propiedades que indicamos anteriormente:

$$1) \forall a, b \in \mathbb{N} \quad f(a+b) = 2 \cdot (a+b) = (2 \cdot a) + (2 \cdot b) = f(a) + f(b),$$

por la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en  $\mathbb{Z}$ , y

$$2) \forall a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x \cdot a) = 2 \cdot (x \cdot a) = x \cdot (2 \cdot a) = x \cdot f(a),$$

por las propiedades asociativa y conmutativa del producto en  $\mathbb{Z}$ .

La imagen de  $\mathbb{N}$  mediante la aplicación  $f$  es  $2 \cdot \mathbb{Z}$ . Nos queda ver que  $(\mathbb{N}, 2 \cdot \mathbb{Z}, +, \cdot)$  es un semimódulo. Lo dejamos como ejercicio.

Ahora nos planteamos si la imagen del semimódulo cíclico  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$ , es un semimódulo cíclico. El generador del semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$ , como hemos visto anteriormente, es el 1, pues teníamos que

$$\exists 1 \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} / b = b \cdot 1.$$



$$x \otimes [s \perp t] = (x \otimes s) \perp (x \otimes t).$$

b) Pseudodistributiva de la ley de composición externa respecto de la primera ley de composición interna del semianillo

$$\forall x, y \in X, \forall s \in f(A) \quad (x+y) \otimes s = (x \otimes s) * (y \otimes s).$$

c) Pseudoasociativa:

$$\forall x, y \in X, \forall s \in f(A) \quad x \otimes (y \otimes s) = (x * y) \otimes s.$$

d) Elemento neutro de la ley de composición externa

$$\forall s \in f(A) \quad e' \otimes s = s$$

siendo  $e'$  el elemento neutro de  $(X, +, \cdot)$  respecto de  $\cdot$ .

La demostración de estas tres últimas propiedades es análoga a a) y queda como ejercicio.

**Proposición:** Si un semimódulo  $(X, A, *, o)$  es cíclico,  $(X, B, \perp, \otimes)$  es un semimódulo y

$$f: A \rightarrow B$$

es un homomorfismo de semimódulos, entonces  $(X, f(A), \perp, \otimes)$  es también un semimódulo cíclico, siendo la imagen del generador de  $(X, A, *, o)$  el generador de  $(X, f(A), \perp, \otimes)$ .

Demostración: En efecto, al ser el semimódulo  $(X, A, *, o)$  cíclico, tiene un generador

$$\exists a \in A \quad \forall b \in A \quad \exists n \in X / b = n \otimes a,$$

además se cumple que

$$\forall y \in f(A) \quad \exists x \in A / y = f(x),$$

pero como  $a$  es un generador, para

$$x \in A \quad \exists m \in X / x = m \otimes a,$$

con lo que

$$\forall y \in f(A) \quad y = f(x) = f(m \otimes a) = m \otimes f(a),$$

luego

$$\exists f(a) \in f(A) \quad \forall y \in f(A) \quad \exists m \in X / y = m \otimes f(a)$$

por lo que podemos decir que el semimódulo  $(X, f(A), \perp, \otimes)$  es cíclico, siendo el generador la imagen del generador de  $(X, A, *, o)$ .

**Ejercicio:** Busca un semimódulo cíclico. Establece un homomorfismo entre él y otro semimódulo y comprueba que se verifican las dos propiedades que acabamos de probar.

Para resolver este ejercicio podemos utilizar “el entorno”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “la sinapsis”.

**Proposición:** Sea  $f$  un homomorfismo entre dos semimódulos  $(X, A, *, o)$  y  $(X, B, \perp, \otimes)$ . Entonces se verifica que:

i) Si  $f$  es un isomorfismo entre los semimódulos  $(X, A, *, o)$  y  $(X, B, \perp, \otimes)$ , entonces  $f^{-1}: B \rightarrow A$  es también un isomorfismo de semimódulos.

ii) Si el isomorfismo  $f$  hubiese sido un isomorfismo de semimódulos ordenados  $(X, A, *, o, \leq)$  y  $(X, B, \perp, \otimes, \leq')$ , entonces  $f^{-1}$  también sería un isomorfismo de semimódulos ordenados.

**Demostración:** Vamos a probar que se verifica i). Sabemos que si  $f$  es biyectiva,  $f^{-1}$  es también biyectiva, sólo falta ver que es un homomorfismo. Veamos que se cumplen las dos condiciones antes indicadas:

$$1) \forall r, s \in B \quad f^{-1}(r \perp s) = f^{-1}(r) * f^{-1}(s).$$

Como  $f$  es biyectiva, es sobreyectiva, luego

$$\exists a, b \in A / f(a) = r \text{ y } f(b) = s \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } f^{-1}(r) = a \text{ y } f^{-1}(s) = b,$$

y como  $f$  es homomorfismo

$$f(a * b) = f(a) \perp f(b) = r \perp s,$$

con lo que tenemos que

$$f^{-1}(r \perp s) = a * b = f^{-1}(r) * f^{-1}(s).$$

$$2) \forall r \in B \quad \forall x \in X \quad f^{-1}(x \otimes r) = x o f^{-1}(r).$$

De forma análoga

$$\exists a \in A / f(a) = r \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } f^{-1}(r) = a,$$

y por ser  $f$  un homomorfismo será

$$f(x o a) = x \otimes f(a) = x \otimes r,$$

luego

$$f^{-1}(x \otimes r) = x o a = x o f^{-1}(r), \text{ como queríamos probar.}$$

Veamos que se verifica ii). En efecto, tenemos que ver

$$3) \forall r, s \in B \quad r \leq' s \Rightarrow f^{-1}(r) \leq f^{-1}(s).$$

Vamos a considerar dos casos:

a) Si las magnitudes fuesen absolutas y tuviésemos la ordenación natural del semigrupo, tendríamos que

$$r \leq' s \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } \exists t \in B / s = r + t$$

Tenemos  $r, s, t \in B$ , como  $f$  es biyectiva, es sobreyectiva y por tanto

$$\exists a, b, c \in A / f(a) = r, f(b) = s \text{ y } f(c) = t \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } f^{-1}(r) = a, f^{-1}(s) = b \text{ y } f^{-1}(t) = c,$$

luego tenemos

$$f(b) = f(a) + f(c) = f(a + c) \Rightarrow b = a + c$$

ya que como  $f$  es un isomorfismo de semimódulos ordenados, es biyectiva y por tanto inyectiva, luego tenemos

$$\exists c \in A / b = a + c \iff a \leq b.$$

**b)** Si las magnitudes fuesen relativas y tuviésemos la ordenación inducida por los semigrupos  $A_+$  y  $B_+$  respectivamente, tendríamos que

$$r \leq s \iff \exists t \in B_+ / s = r + t.$$

Tenemos  $t \in B_+ \subset B$ ,  $r, s, t \in B$  y como  $f$  es biyectiva, es sobreyectiva y por tanto

$\exists a, b, c \in A / f(a) = r, f(b) = s$  y  $f(c) = t \iff f^{-1}(r) = a, f^{-1}(s) = b$  y  $f^{-1}(t) = c$ ,  
luego tenemos

$$f(b) = f(a) + f(c) = f(a + c) \Rightarrow b = a + c,$$

nos falta ver que  $c \in A_+$ , supongamos que

$$c \notin A_+ \Rightarrow -c \in A_+ \Rightarrow f(-c) \in B_+$$

por ser  $f$  un isomorfismo de semimódulos ordenados

$$f(-c) = -[f(c)] = -t \in B_+,$$

pero sabíamos que

$$t \in B_+ \iff 0_B \leq t \iff -t \leq 0_B \iff -t \in B_-,$$

tenemos que

$$t = f(c) \in B_+ \cap B_- = \{0_B\} \Rightarrow f(c) = 0_B,$$

como era cierto que

$$f(0_A) = 0_B \Rightarrow f(c) = f(0_A) \Rightarrow c = 0_A \in A_+$$

por ser la aplicación inyectiva, en contra de que  $c \notin A_+$ , ya que  $A_+$  era un semigrupo unitario. Por tanto

$$\exists c \in A_+ / b = a + c \iff a \leq b, \text{ como queríamos demostrar.}$$

**Ejercicio:** Busca dos semimódulo entre los cuales puedas establecer un isomorfismo y comprueba que se verifican estas propiedades.

Para resolver este ejercicio podemos utilizar “el entorno”, “el arte de relacionar”, “la sinapsis”, “la serendipity”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “la síntesis creativa”.

Nos planteamos ahora si la imagen mediante un homomorfismo de una magnitud de un determinado tipo —absoluta, relativa, divisible, indivisible, escalar, vectorial, discreta, continua, finita o infinita— será otra magnitud del mismo tipo.

**Proposición:** La imagen de una magnitud absoluta, mediante un homomorfismo, es una magnitud absoluta y la imagen de una magnitud relativa es una magnitud relativa.

La demostración de esta proposición puede deducirse de los resultados que ya hemos visto. Razónalo.

**Proposición:** La imagen de una magnitud divisible, mediante un homomorfismo, es una magnitud divisible.

Demostración: Vamos a suponer que  $(X, A, *, o)$  es una magnitud divisible, es decir

$$\forall a \in A \setminus \{0_A\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists b \in A / a = nb,$$

y vamos a ver que  $(X, f(A), \perp, \otimes)$  es también divisible.

Tenemos que ver que

$$\forall x \in f(A) \setminus \{0_B\} \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists y \in f(A) / x = my,$$

como  $x \in f(A) \setminus \{0_B\} \Rightarrow \exists a \in A / f(a) = x,$

tendrá que ser  $a \neq 0_A$ , pues si fuese  $a = 0_A$ , sería  $f(a) = 0_B = x$  ¡contradicción! ya que  $x \in f(A) \setminus \{0_B\}$ . Tenemos que

$$a \in A \setminus \{0_A\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists b \in A / a = nb$$

y por tanto

$$\exists y = f(b) \in f(A) / x = f(a) = f(nb) = nf(b) = ny,$$

con lo que hemos visto que

$$\forall x \in f(A) \setminus \{0_B\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists y \in f(A) / x = ny,$$

por lo que podemos afirmar que la imagen, mediante un homomorfismo, de una magnitud divisible es también divisible.

**Proposición:** La imagen de una magnitud escalar, mediante un homomorfismo de semimódulos ordenados, es también una magnitud escalar.

Demostración: Vamos a ver que si tenemos un homomorfismo entre magnitudes escalares absolutas, la imagen también es una magnitud escalar absoluta. El caso en que las magnitudes fuesen relativas es análogo y lo dejamos como ejercicio.

Sean  $(X, A, *, o, \leq)$  y  $(X, B, \perp, \otimes, \leq')$  dos magnitudes escalares absolutas con la ordenación natural del semigrupo, veamos que  $(X, f(A), \perp, \otimes, \leq')$  es también otra magnitud escalar absoluta con la ordenación natural del semigrupo.

Tendremos que ver que  $\leq'$  es una relación de orden total en  $f(A')$ . El probar que es de orden es evidente por ser  $(B, \leq')$  una relación de orden. Veamos que es de orden total.

Sean

$$\forall r, s \in f(A) \quad \exists a, b \in A / f(a) = r, f(b) = s$$

como la relación  $\leq$  es de orden total, tenemos que  $a \leq b$  o  $b \leq a$ . Supongamos que  $a \leq b$ . Si

$$a \leq b \text{ } \dashv\!\!\!\dashv \text{ } \exists c \in A / b = a * c$$

aplicándole  $f$  tenemos

$$f(b) = f(a * c) = f(a) \perp f(c) \Rightarrow \exists f(c) \in f(A) / f(b) = f(a) \perp f(c) \dashv\!\!\!\dashv \text{ } f(a) \leq' f(b).$$

Si fuese  $b \leq a$ , por un razonamiento análogo, llegaríamos a que  $f(b) \leq f(a)$ , luego si  $(A, \leq)$  es una relación de orden total,  $(f(A), \leq')$  sería una relación de orden total.

Para esta demostración no hemos necesitado que  $(B, \leq')$  esté totalmente ordenado sólo que  $f$  sea un homomorfismo.

Como sabemos que  $(A, *, \leq)$  y  $(B, \perp, \leq')$  son semigrupos ordenados,  $(f(A), \perp, \leq')$  será también un semigrupo ordenado. ya que tenemos que

$$\forall r, s, t \in f(A) \subset B \quad r \leq s \Rightarrow r + t \leq s + t.$$

De forma análoga se prueba que la relación de orden es compatible con la ley de composición externa.

Veamos que  $(f(A), \perp, \leq')$  es un semigrupo arquimediano, para ello tenemos que ver que

$$\forall x, y \in f(A) \text{ con } x \neq 0_B \leq' x \quad \exists n \in \mathbb{N} / y \leq' x \perp x \perp \dots^{(n)} \perp x.$$

Tenemos que

$$\exists a, b \in A / f(a) = x, f(b) = y,$$

y como la relación  $(f(A), \leq')$  es de orden total, será  $f(b) \leq' f(a)$  o  $f(a) \leq' f(b)$ , en el primer caso ya tenemos que  $y \leq' x$ . Veamos que se cumple la condición de que  $\exists n \in \mathbb{N} / y \leq' x \perp x \perp \dots^{(n)} \perp x$ .

Si  $f(a) = x \neq 0_B$ , no puede ser  $a = 0_A$ , pues en tal caso sería  $f(a) = f(0_A) = 0_B$ , y como la imagen de un elemento, mediante una aplicación, es única tendría que ser  $x = 0_B$ , ¡contradicción! pues tomamos  $x \neq 0_B$ .

Como  $(A, *, \leq)$  es arquimediano y  $a \neq 0_A$ , tenemos que

$$\forall a, b \in A \text{ con } a \neq 0_A \leq a \quad \exists n \in \mathbb{N} / b \leq a * a * \dots^{(n)} * a,$$

como  $f$  era un homomorfismo de semimódulos ordenados, aplicándole  $f$  tenemos

$$f(b) \leq' f(a * a * \dots^{(n)} * a) = f(a) \perp f(a) \perp \dots^{(n)} \perp f(a),$$

luego tenemos que

$$\exists n \in \mathbb{N} / y \leq' x \perp x \perp \dots^{(n)} \perp x$$

como queríamos demostrar.



Tenemos probado que si  $(X, A, *, o, \leq)$  es una magnitud escalar,  $(X, f(A), \perp, \otimes, \leq')$  es también una magnitud escalar.

**Ejercicio:** Prueba que si  $(X, A, *, o, \leq)$  es una magnitud escalar relativa con la ordenación inducida por el semigrupo  $A_+$  y  $f$  es un homomorfismo entre los semimódulos ordenados  $(X, A, *, o, \leq)$  y  $(X, B, \perp, \otimes, \leq')$ , entonces  $(X, f(A), \perp, \otimes, \leq')$  es también otra magnitud escalar relativa con la ordenación inducida por el semigrupo  $f(A)_+$ .

**Ejercicio:** Busca dos magnitudes escalares entre las que puedas establecer un homomorfismo de semimódulos ordenados y comprueba que se verifican las condiciones que decimos.

En estos ejercicio se pueden utilizar las técnicas: “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

**Proposición:** La imagen de una magnitud discreta mediante un homomorfismo de semimódulos es también una magnitud discreta.

Ya que hemos visto que si un semimódulo es cíclico, su imagen, mediante un homomorfismo de semimódulos es también cíclico, con lo que se puede deducir que la imagen de una magnitud discreta es también discreta.

### 2.10.5. Analogía entre las magnitudes discretas y $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$

Podíamos empezar diciendo al alumno: observa detenidamente todas las magnitudes absolutas discretas con infinitos elementos que hemos visto antes; ¿todas se parecen bastante a  $\mathbb{N}$ ?; ¿en qué crees que consiste ese parecido? ¿Cuántos generadores pueden tener dichas magnitudes? ¿Y las magnitudes relativas discretas a qué se parecen? ¿Cuántos generadores pueden tener las magnitudes relativas discretas?

Utilizamos las técnicas “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Vamos a considerar las magnitudes  $M = \{0 \text{ euros}, 1 \text{ euro}, 2 \text{ euros} \dots, n \text{ euros} \dots\}$  con la suma y  $(\mathbb{N}, +)$ ; es evidente que podemos establecer una aplicación

$$f: \mathbb{N} \rightarrow M$$

$$n \rightarrow n \text{ euros}$$

que es biyectiva y que además es un isomorfismo. Esto lo dejamos como ejercicio.

**Proposición:** Toda magnitud absoluta discreta con infinitos elementos  $(\mathbb{N}, M, +, \cdot, \leq)$  es isomorfa a  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ .

Demostración: Veamos que podemos establecer una aplicación entre  $\mathbb{N}$  y  $M$  que sea biyectiva y homomorfismo.

Como la magnitud es discreta, sabemos que es una magnitud escalar que verifica que:

$$\exists a \in M \quad \forall b \in M \quad \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a,$$

luego podemos establecer la aplicación:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow M$$

$$0 \rightarrow 0 \cdot a = 0_M$$

$$1 \rightarrow 1 \cdot a$$

$$2 \rightarrow 2 \cdot a$$

$$\dots$$

$$n \rightarrow n \cdot a$$

$$\dots$$

La cantidad  $a \in M$  es distinta de  $0_M$ , ya que si fuese  $a = 0_M$ , como

$$\forall b \in M \quad \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a = n \cdot 0_M = 0_M,$$

sería  $M = \{0_M\}$ , lo cuál es falso por hipótesis ya que la magnitud tenía infinitos elementos.

Es aplicación, pues todo número natural  $n$  tiene una imagen  $n \cdot a \in M$  y es única por ser único el resultado de operar  $n$  con  $a$  mediante la ley de composición externa en  $M$ .

Es inyectiva, pues verifica que  $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$ . Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Suponemos que sea  $f(n) = f(m)$  siendo  $n \neq m$ , si fuese  $n > m$  tendríamos

$$f(n) = f(m) \text{ } | \text{---} | \text{ } n \cdot a = m \cdot a \text{ } | \text{---} | \text{ } n \cdot a - m \cdot a = 0_M \text{ } | \text{---} |$$

$$| \text{---} | (n-m) \cdot a = a + a + \dots (n-m) \dots + a = 0_M$$

pero como hemos visto que las magnitudes escalares absolutas verifican

$$(2) \quad \forall x, y \in M \quad x + y = 0_M \Rightarrow x = 0_M \text{ e } y = 0_M,$$

tendrá que ser  $a = 0_M$ , y por tanto  $M = \{0_M\}$ , ¡contradicción!, luego no puede ser  $n > m$ . De forma análoga se probaría que tampoco puede ser  $m > n$ , con lo que tendríamos que para que fuese  $f(n) = f(m)$ , tendría que ser  $n = m$ , y como consecuencia la aplicación es inyectiva.

Es sobreyectiva pues todo elemento de  $M$  tiene por lo menos un original, ya que en la definición de magnitudes discretas tenemos que

$$\forall b \in M \exists n \in \mathbb{N} / b = n \cdot a.$$

Para probar que es un homomorfismo, por tratarse de magnitudes escalares, tendríamos que probar que se cumplen las tres condiciones. Aunque la demostración es análoga a la anterior, vamos a hacerla:

$$1) \forall n, m \in \mathbb{N} \quad f(n+m) = (n+m) \cdot a = n \cdot a + m \cdot a = f(n) + f(m).$$

$$2) \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x \cdot n) = (x \cdot n) \cdot a = x \cdot (n \cdot a) = x \cdot f(n).$$

$$3) \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \leq m \text{ --- } \exists p \in \mathbb{N} / m = n + p \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot a = (n + p) \cdot a = (n \cdot a) + (p \cdot a) \Rightarrow f(m) = f(n) + f(p),$$

luego

$$\exists f(p) \in M / f(m) = f(n) + f(p) \text{ --- } f(n) \leq f(m).$$

**Ejercicio:** Vamos a considerar ahora las magnitudes  $E = \{ \dots -n \text{ euros}, \dots -2 \text{ euros}, -1 \text{ euro}, 0 \text{ euros}, 1 \text{ euro}, 2 \text{ euros} \dots, n \text{ euros} \dots \}$  con la suma y  $(\mathbb{Z}, +)$ . Es evidente que podemos establecer una aplicación biyectiva entre ellas que además sea un isomorfismo. ¿Podrías definir dicha aplicación? ¿Serías capaz de demostrar que es un isomorfismo? En caso afirmativo, hazlo.

**Ejercicio:** Prueba que toda magnitud relativa discreta  $(\mathbb{Z}, M, +, \cdot, \leq)$  es isomorfa a  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ .

**Proposición:** El generador de una magnitud absoluta discreta,  $(\mathbb{N}, M, +, \cdot, \leq)$ , con infinitos elementos es único.

**Demostración:** Si  $(\mathbb{N}, M, +, \cdot, \leq)$  tuviera dos generadores  $a$  y  $a'$ , como la magnitud es discreta se verificaría:

$$\exists a \in M \quad \forall b \in M \exists n \in \mathbb{N} / b = na \quad \text{y} \quad \exists a' \in M \quad \forall b \in M \exists n' \in \mathbb{N} / b = n'a',$$

pero como hemos probado que toda magnitud absoluta discreta con infinitos elementos  $(\mathbb{N}, M, +, \cdot, \leq)$ , es isomorfa a  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ , aunque tendríamos dos isomorfismos:

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{N} \rightarrow M & g: \mathbb{N} \rightarrow M \\ 1 \rightarrow a & 1 \rightarrow a' \\ \dots & \dots \\ n \rightarrow na = a' & m \rightarrow ma' = a \\ \dots & \dots \end{array}$$

y sus inversos serían también isomorfismos, con lo que tendría que ser  $f^{-1}(a)$  un generador de  $\mathbb{N}$  y  $g^{-1}(a')$  otro, pero  $\mathbb{N}$  sólo tiene un único generador que es el 1, luego

$f^{-1}(a)=g^{-1}(a')=1 \Rightarrow a=f(1)=g(1)=a'$ ,  
como queríamos demostrar.

De forma análoga probaríamos el siguiente

**Corolario:** El generador,  $a$ , de una magnitud relativa discreta con infinitos elementos  $(\mathbb{Z}, M, +, \cdot, \leq)$  no es único ya que su opuesto también sería generador (salvo que fuese  $a=-a$ ).

## 2.10.6. Medida de una magnitud escalar

Comenzaríamos con un bombardeo de ideas, haciéndole preguntas al alumno-profesor como las siguientes: ¿conoces alguna magnitud que puedas medir? Di las que conozcas. ¿Qué se hace cuando se mide una magnitud? ¿Serías capaz de definir lo que es la medida de una magnitud? Si no eres capaz, busca en internet, en cualquier diccionario, enciclopedia o algún libro de Matemáticas en el que pueda venir, el término medida y compara lo que haces cuando mides con lo que viene en donde lo hayas encontrado. ¿Es suficiente con dar un número cuando se mide una cantidad de una magnitud? ¿Se puede medir cualquier magnitud? ¿Quién mide? ¿Con qué se mide? ¿Se podría medir con otras cosas?

Fíjate en la forma que tienen los animales de marcar su territorio, ¿podríamos afirmar que los animales también miden?; ¿qué miden?; ¿cómo miden? Construye algún instrumento que sirva para realizar pesadas inspirándote en el mecanismo de los músculos del organismo de algún animal.

Todas estas cuestiones las resolveremos siguiendo las técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas” o “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “la biónica”, “el entorno”, “la sinéctica” en sus dos aspectos “hacer lo familiar extraño” y “convertir lo extraño en familiar”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

Antes de comenzar a dar la definición de medida de una magnitud escalar vamos a plantearnos cómo mediríamos, por ejemplo, la magnitud  $(M, +)$  siendo  $M=\{0 \text{ euros}, 1 \text{ euro}, 2 \text{ euros}..., n \text{ euros}...\}$ . Si pensamos que para medir una cantidad lo que hacemos es elegir otra cantidad de la magnitud a medir y utilizarla como unidad de medida, aquí tendremos que tomar una unidad de  $M$  que nos permita compararla con todas las cantidades de la magnitud, ya que queremos medir toda la magnitud con dicha unidad. Parece ser que la cantidad más cómoda para que actúe como unidad sería 1 euro y con la aplicación

$$\begin{aligned} m: M &\rightarrow \mathbb{N} \\ n \text{ euros} &\rightarrow n \end{aligned}$$

tendríamos medidas todas las cantidades de la magnitud, pues  $n$  euros  $= n \cdot 1$  euro ( $n$  euros son  $n$  veces un euro) y  $n$  sería la medida de la cantidad  $n$  euros, y por tanto tendríamos medida la magnitud.

Vamos a ver cómo podemos expresar matemáticamente lo que hacemos cuando medimos.

**Definición:** Dada una **magnitud escalar**  $(X, M, +, \cdot, \leq)$ , siendo  $X \subset \mathbb{R}$ , de tipo  $t$  (absoluta o relativa, divisible o indivisible, discreta o continua, finita o infinita), decimos que es **medible** si existe un isomorfismo de semimódulos entre  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y otra magnitud escalar  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$ :

$$m: M \rightarrow Y,$$

con  $1 \in Y \subset \mathbb{R}$ , a la que se dota de las operaciones oportunas  $+$  y  $\cdot$  de  $\mathbb{R}$ , y la relación de orden  $\leq$  también de  $\mathbb{R}$ , para que sea una magnitud del mismo tipo  $t$ . Al isomorfismo lo llamaremos **medida de la magnitud**  $M$ .

Como hemos visto antes que si una magnitud es de un determinado tipo, su imagen es del mismo tipo, podemos simplificar esta definición diciendo: una **magnitud escalar**  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  es **medible** si, y sólo si, existe un isomorfismo de semimódulos

$$m: M \rightarrow Y,$$

entre  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y otra magnitud escalar  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$ , con  $1 \in Y \subset \mathbb{R}$ .

Cuando establecemos el isomorfismo entre  $M$  e  $Y$ , decimos que medimos la magnitud escalar  $M$  empleando para su medida el conjunto numérico  $Y$ .

A la cantidad  $u$  que tenga como imagen el  $1$ , se le llama **unidad de medida**. Y  $m(a)=r$ , es decir, la imagen de la cantidad  $a$  mediante la aplicación medida es el número real  $r$  si, y sólo si,  $a=ru$ . Por tanto, podemos afirmar que

$$m(a)=r \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } a=ru.$$

Al número  $r$  que cuenta el número de veces que  $a$  contiene a  $u$ , se le llama **medida de  $a$  respecto de  $u$** . En realidad se debería poner  $r=m_u(a)$ , si bien, cuando sepamos cuál es la unidad de medida escribiremos sólo  $r=m(a)$ .

**Observación:** Teniendo en cuenta que  $X \subset \mathbb{R}$  e  $Y \subset \mathbb{R}$ , también podríamos decir que la magnitud escalar  $(X, M, +, \cdot, \leq)$ , es medible si, y sólo si, existe un monomorfismo de semimódulos entre  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y la magnitud escalar  $(X, \mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

$$m: M \rightarrow \mathbb{R},$$

con la condición de que  $1 \in m(M) \subset \mathbb{R}$ . Y por tanto, el monomorfismo será la medida de la magnitud  $M$ .

Por quedar más precisa la definición de medida exigiéndole la existencia del isomorfismo, es por lo que la hemos definido así.

**Observación:** Podemos decir que dada una magnitud  $M$ , medir una cantidad  $a \in M$  es compararla con otra cantidad  $u \in M$ , fija, que se toma como unidad de medida. Y medir una magnitud  $M$  tomando como unidad de medida la cantidad  $u \in M$ , es comparar todas las cantidades de  $M$  con la unidad de medida  $u$ . Habrá tantas medidas de una magnitud como isomorfismos podamos establecer.

En los ejemplos que vienen a continuación vamos a aplicar “el arte de relacionar” y “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”

**Ejemplo:** Sea la magnitud escalar relativa  $S$  el conjunto de los segmentos libres orientados o vectores libres sobre una recta  $r$ . Una medida será una aplicación de  $S$  en el conjunto de los números reales:

$$m: S \rightarrow \mathbb{R},$$

a cada vector de  $r$  se le asocia un número real. Si tomamos un punto fijo  $O$  de la recta  $r$ , al ser  $m$  una aplicación biyectiva, habrá otro punto  $U$  de  $r$

de modo que  $m(\overrightarrow{OU})=1$ . Para otro punto  $P$  de la recta  $r$ , al vector  $\overrightarrow{OP}$  le corresponderá un número real  $p$ , por ser  $m$  una aplicación biyectiva, y  $p$

será la medida del vector  $\overrightarrow{OP}$ . Además  $\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OU}$ . Si hubiésemos elegido

otro punto  $U'$  tal que  $m(\overrightarrow{OU'})=1$ , obtendríamos otra medida de la magnitud  $S$ .

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$  podemos dar una medida, para ello elegimos un número natural como unidad y a cualquier elemento de  $\mathbb{N}$  se le puede asociar su medida respecto de la unidad elegida. Si tomamos como unidad de medida el 2, por ejemplo, tenemos una aplicación de  $\mathbb{N}$  en el subconjunto de los números reales  $\mathbb{A}=\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \frac{n}{2}, \dots\}$ :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$n \rightarrow \frac{n}{2}$$

.....

que es un isomorfismo de semimódulos, ya que

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad f(a+b) = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = f(a) + f(b)$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{N} \quad f(x \cdot a) = \frac{x \cdot a}{2} = x \cdot \frac{a}{2} = x \cdot f(a),$$

además es biyectivo, como puede probarse sin dificultad.

**Definición:** Dada una magnitud escalar  $(X, M, +, \cdot, \leq)$ , una unidad de medida  $u$  y una cantidad  $a \in M$ ; si la **cantidad**  $a$  contiene a la  $u$  un número exacto de veces, se dice que  $a$  es **conmensurable** con  $u$ ; en caso contrario se dice que es **inconmensurable** con  $u$ .

**Ejemplo:** En  $(\mathbb{Q}, L, +, \cdot)$  el segmento  $a$  es conmensurable con la unidad de medida  $u$

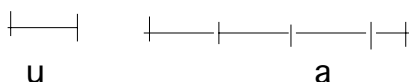


Figura 26: cantidad conmensurable.

ya que  $a = (3 + \frac{1}{2}) \cdot u = \frac{7}{2} \cdot u$  y  $\frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$ . Sin embargo, es inconmensurable en  $(\mathbb{N}, L, +, \cdot)$  porque  $\frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$ .

Si construimos un cuadrado de lado  $u$ , la diagonal  $d$  del cuadrado es inconmensurable con el lado en  $(\mathbb{Q}, L, +, \cdot)$ , ya que  $2 \cdot u^2 = d^2$ , con lo que  $d = \sqrt{2} \cdot u$  y  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . En  $(\mathbb{R}, L, +, \cdot)$   $d$  sí sería conmensurable con el lado pues  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ .

**Observación:** Esto sólo lo podemos hacer con las magnitudes escalares ya que podemos colocar sus cantidades sobre una escala y compararlas. No sucede con las magnitudes vectoriales pues, por ejemplo, si en el conjunto de los vectores libres del plano, quisiéramos comparar un vector con otro, los dos tendrían que tener la misma dirección, ya que si nos dicen que comparemos dos vectores con direcciones distintas no podríamos tomar representantes para ver cuantas veces es mayor o menor uno que el otro.

Por ser la medida una de las partes esenciales de nuestro trabajo, vamos a analizar algunas de las definiciones que hemos encontrado comparándolas con la nuestra para ver las diferencias y semejanzas que existen entre ellas.

Casi todas las enciclopedias que hemos consultado dan la definición de medida de una magnitud. Tomamos, por ejemplo, La Gran Enciclopedia Larousse (1977) y entre otras cosas dice: *Medir una magnitud es compararla con otra de la misma especie tomada como*



*unidad (magnitud de comparación).* (En todo caso, debería decir: Medir una cantidad... —cantidad de comparación—.) *La medida es el resultado de la comparación, y el valor obtenido se expresa diciendo que la magnitud (debería decir cantidad) es igual a un número de veces la unidad. Por extensión se puede considerar también como medida toda determinación o valoración que pueda expresarse con un número con arreglo a convenciones o normas admitidas.*

Parece que confunde magnitud con cantidad. Para ver si efectivamente es así consultamos la definición de cantidad: *Propiedad de lo que puede medirse o numerarse, de todo lo que es capaz de aumento o disminución.* Por tanto tenemos claro que mezcla un poco todo; la cantidad, según nuestra definición, no puede aumentar ni disminuir. Esto pensamos que es lo que le ocurre a cualquier persona que no ha estudiado suficientemente bien el tema.

En la Enciclopedia Universal Ilustrada Europea Americana (1981, tomo 34: 87) son muchos los comentarios que se hacen sobre la medida; nos quedamos con los relativos a nuestro tema, que son: *Expresión comparativa de la longitud, del área o del volumen de un objeto. Cantidad que cabe exactamente cierto número de veces en cada una de otras dos o más de la misma especie que se comparan entre si. Medida de una cantidad es el resultado numérico de su comparación con otra que se toma como referencia o unidad.*

No son la longitud, el área o el volumen las únicas magnitudes que se comparan. No nos queda muy clara la idea de que la medida sea la *cantidad que cabe exactamente cierto número de veces*, en todo caso eso será la unidad de medida, pero no la medida de una cantidad ni de una magnitud. Ya que si pensamos, por ejemplo, en el peso, ¿cómo va a ser la medida del kilo el gramo por caber exactamente 1000 veces en él? Profundizando un poco más en esta definición, vemos que habla de *cantidad que cabe exactamente cierto número de veces*; si es una cantidad, ¿puede ser a la vez una medida? Además nos podíamos preguntar: ¿cómo comparo?, ¿con qué cantidad comparo? Al final, la idea que da de medida de una cantidad: *el resultado numérico de su comparación con otra que se toma como referencia o unidad*, prácticamente coincide con la nuestra, si bien no habla de medida de una magnitud.

En el Diccionario de la Real Academia Española (1993, acabado de imprimir en mayo de 1999) nos encontramos con las siguientes definiciones de medida: 1. *Acción y efecto de medir.* 2. *Expresión del resultado de una medición.* 3. *Cualquiera de las unidades que se emplean para medir longitudes, áreas o volúmenes de líquidos o áridos.* 4.

*Cantidad que cabe exactamente cierto número de veces en cada una de otras dos o más de la misma especie que se comparan entre sí.*

En las definiciones 3 y 4 se ve que se identifica medida con unidad de medida. Por otro lado, no son las magnitudes longitud, área y volumen las únicas que utilizan unidades de medida, ni son sólo los líquidos y áridos los únicos materiales que se miden, quizá pone éstos como ejemplos para que se vea con claridad lo que se quiere decir, esto es, lo que significa que algo quepa *exactamente cierto número de veces*.

Como en dicho diccionario algunas de estas definiciones quedan incompletas, sin saber bien lo que entienden por medir, consultamos este término y obtuvimos lo siguiente: *Comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera.*

Con todo esto observamos que sólo se refiere a la medida de una cantidad, no a la medida de una magnitud.

En Abellanas (1963: 72) puede verse una definición, en cierto modo análoga a la nuestra, ya que nos dice que *se llama medir una magnitud relativa,  $M$ , a establecer un isomorfismo de  $M$  en un cuerpo  $K$ . Se llama medir una magnitud absoluta  $M$  a establecer un isomorfismo de  $M$  en un semicuerpo  $K$ . Al elemento  $z$  de  $K$  homólogo del elemento  $x$  de  $M$  se le llama medida de  $x$  y se escribe:  $z=\mu(x)$  siendo  $\mu$  el isomorfismo de  $M$  en  $K$ . Ahora bien, para que un isomorfismo de  $M$  en  $K$  pueda llamarse propiamente una medida en sentido estricto, es necesario que cumpla además las siguientes condiciones: El isomorfismo  $\mu$  queda unívocamente determinado por un par de elementos homólogos. Entonces como  $K$  es un cuerpo (o semicuerpo) posee elemento unidad y se puede caracterizar el isomorfismo  $\mu$  por el elemento  $u$  de  $M$  que cumple la condición:  $1=\mu(u)$ . El isomorfismo  $\mu$  definido por esta condición se le llama medida de la magnitud  $M$  respecto de la unidad  $u$ .*

Después admite sin demostración un teorema que nos dice: *El cuerpo  $K$  correspondiente a una magnitud escalar es un cuerpo ordenado.* Y a continuación otro teorema sin demostración que afirma que: *Todo cuerpo ordenado es isomorfo a un subcuerpo del cuerpo de los números reales.* Con lo cual nuestra definición engloba a la suya, aunque como sabemos el isomorfismo respeta la estructura, se sobreentiende que no quiere decir un cuerpo —o semicuerpo— sino el subconjunto de  $\mathbb{R}$  dotado de la misma estructura que la magnitud, con las operaciones de  $\mathbb{R}$  y, en caso de que la magnitud sea escalar, con la ordenación también de  $\mathbb{R}$ .

Para Aizpún y otros (1976: 15) la medición se consigue estableciendo una aplicación biyectiva entre la magnitud y un sistema numérico que posea su misma estructura; es decir un isomorfismo que llamaremos medida, y que cumplirá:  $\text{med}(a+b)=\text{med}(a)+\text{med}(b)$  Para las magnitudes escalares, aunque no podemos abordar el problema de un modo general porque se refiere al cuerpo de los números reales... Definición, también, análoga a la nuestra.

Según Chamorro y Belmonte (1988: 143) ...medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud.. (...) para medir una cantidad en realidad lo que se busca es un número que al multiplicarlo por la unidad nos resulte la cantidad que queramos medir. De esta manera se dice que una cantidad mide dicho número de unidades. (...) Realmente lo que supone la medida, es una identidad entre el conjunto de cantidades de una magnitud con su composición y su orden  $(A, \bullet, \leq)$ , y un subconjunto de números reales con su suma y el orden definido en los conjuntos numéricos.

Matemáticamente, se dice que la medida es un isomorfismo (la misma etimología de la palabra lo indica, iso: igual, morfos: forma) entre el conjunto  $A$  y un subconjunto de números reales.

Sea  $S$  el subconjunto de números reales multiplicables por todos los elementos de  $A$  y sea la función:

$$m_u: A \rightarrow S$$

$$a \rightarrow m_u(a)=r$$

(es decir,  $r \cdot u = a$ ).

Esta aplicación es biyectiva (...). Además esta función cumple las siguientes propiedades:

- $m_u(a \bullet b) = m_u(a) \bullet m_u(b)$  (...)
- $m_u(r \cdot a) = r \cdot m_u(a)$ . (...)
- Si  $a \leq b$ , entonces  $m_u(a) \leq m_u(b)$ ...

Como puede observarse, esta definición coincide prácticamente con la nuestra.

Prada (1990: 24) habla de medida de una magnitud escalar de forma análoga a la nuestra y nos dice que: *La medida de una magnitud es una aplicación biyectiva... Pero no toda aplicación biyectiva entre cantidades y números es una medida. Es necesario que el criterio de la aplicación nos permita averiguar de cada cantidad el número que nos da la medida. A tal efecto se compara cada cantidad con una unidad,  $u$ , que es una cantidad de dicha magnitud.*

*Si  $a = u + u + \dots (r \dots + u = ru$ , al número  $r$  que cuenta el número de veces que  $a$  contiene a  $u$ , se le llama medida de  $a$  respecto de la unidad  $u$ .*

*Luego la aplicación medida queda unívocamente determinada cuando se fija la unidad de medida.*

*Generalmente se toma como unidad de medida la cantidad de magnitud,  $u$ , correspondiente al número 1...*

*Para cada par  $(u, 1)$  que fijemos existe una medida, es decir al cambiar de unidad de medida cambia la correspondencia.*

*Si se toma  $u$  como unidad de medida, diremos que  $r$  es la medida de  $b$  respecto a la unidad  $u$ , o que  $b = ru$ , cuando  $r$  sea la imagen de  $b$  mediante la aplicación medida.*

En Internet nos encontramos, entre otras, las siguientes definiciones de medida de una magnitud:

a) En la dirección

<http://roble.pntic.mec.es/csoto/medida.htm>,

Carmen Soto Prados dice lo siguiente: *Medir: Es comparar una magnitud con otra, tomada de manera arbitraria como referencia, denominada patrón y expresar cuántas veces la contiene.*

Observamos que dice que para medir hay que comparar una magnitud con otra; debería decir: comparar las cantidades de la magnitud con otra cantidad de dicha magnitud. Esta manera de considerarlo le viene de que no ha definido anteriormente lo que es cantidad (como puede verse en la definición que antes dio de magnitud y que nosotros recogimos).

b) En las páginas web

<http://www.edulat.com/3eraetapa/fisica/temasconsulta/6.htm>,

[http://salongar.com/ciencias/fisica/cienciasfisicasy medida/medida\\_comparacion.htm](http://salongar.com/ciencias/fisica/cienciasfisicasy medida/medida_comparacion.htm),

y

<http://www.lafacu.com/apuntes/fisica/medidas/default.htm>

José Antonio Blesa, © Vernet y Orozco Carmona dan la misma definición que es la siguiente: *La medida de una magnitud física* (debería decir la medida de una cantidad de una magnitud física) *supone, en último extremo, la comparación del objeto que encarna dicha propiedad con otro de la misma naturaleza que se toma como referencia y que constituye el patrón.*

*La medida de longitudes se efectuaba en la antigüedad empleando una vara como patrón, es decir, determinando cuántas veces la longitud del objeto a medir contenía a la del patrón. La vara, como predecesora del metro de sastre, ha pasado a la historia como unidad de medida equivalente a 835,9 mm. Este tipo de comparación inmediata de objetos corresponde a las llamadas medidas directas.*

*Con frecuencia, la comparación se efectúa entre atributos que, aun cuando están relacionados con lo que se desea medir, son de diferente naturaleza. Tal es el caso de las medidas térmicas, en las que comparando longitudes sobre la escala graduada de un termómetro se determinan temperaturas. Esta otra clase de medidas se denominan indirectas.*

Habla de medida de una magnitud y la temperatura no es una magnitud. La verdad es que las medidas indirectas parecen no estar muy de acuerdo con la definición de medida que nos da al principio: *La medida de una magnitud física supone, en último extremo, la comparación del objeto que encarna dicha propiedad con otro de la misma naturaleza.* Si bien podría haber considerado otras magnitudes como el peso, por ejemplo.

c) En la dirección

[http://imartinez.etsin.upm.es/ot1/Units\\_es.htm](http://imartinez.etsin.upm.es/ot1/Units_es.htm)

Isidoro Martínez da la siguiente definición: *Medir es relacionar una magnitud con otra u otras (de la misma especie o no) que se consideran patrones universalmente aceptados, estableciendo una comparación de igualdad, de orden y de número. Es decir, el resultado de una medida lleva asociado tres entidades: una magnitud (dimensiones) una unidad (suele indicar también las dimensiones) y una precisión (normalmente entendida como una incertidumbre del 50% en la post-última cifra significativa).*

*Ejemplo: medir dentro de cierto margen si dos cuerpos tienen la misma masa o la misma temperatura, medir cual de los dos cuerpos tiene más masa o más temperatura, medir cuánta más masa o más temperatura tiene uno respecto al otro. La incertidumbre es innata a la medida; puede ser disminuida pero nunca anulada.*

*Los patrones básicos se llaman unidades de medida. Para especificar el valor de una magnitud hay que dar la unidad de medida y el número que relaciona ambos valores. De nada sirve decir que la altura del árbol es 5 veces no sé qué, ni decir que es de no sé cuántos metros...*

Si no supiéramos lo que es medir, aunque fuese de forma intuitiva, pensamos que con esta definición no habríamos podido llegar a entender

nada, porque nos podríamos preguntar: ¿cuál es la relación que tenemos que establecer?; ¿con qué magnitudes tendría que relacionar la que quisiera medir?; ¿a qué llamamos unidad de medida? Pensamos que querría haber dicho: medir una magnitud es relacionar sus cantidades — cosa que no define, de aquí puede venir parte de su error— con una de ellas...

d) Encontramos que José Villasuso, en la página de Educación del Ayuntamiento de la Coruña

[http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/fisicaInteractiva/medidas/medidas\\_indice.htm#magnitud](http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/fisicaInteractiva/medidas/medidas_indice.htm#magnitud),

dice lo siguiente: *Para obtener el número que representa a la magnitud debemos medirla...*

*Par medir debemos diseñar el instrumento de medida y escoger una cantidad de esa magnitud que tomamos como unidad...*

*La medida es el resultado de medir, es decir, de comparar la cantidad de magnitud que queremos medir con la unidad de esa magnitud. Este resultado se expresará mediante un número seguido de la unidad que hemos utilizado...*

De nuevo se habla de magnitud y de medida de una magnitud de manera indistinguible. Ni antes, cuando definía magnitud, ni ahora, nos ha dicho lo que es una cantidad de una magnitud y sin embargo usa este término. No entendemos cómo el número puede representar a la magnitud. También nos puede quedar duda de si nos sirve cualquier cantidad para ser elegida como unidad o tenemos que elegir una en concreto. Además, ¿cómo comparamos la cantidad de magnitud que queremos medir con la unidad elegida?

### 2.10.6.1. Existencia de la medida

Según la definición de medida que hemos dado, podríamos preguntarnos: ¿siempre es posible medir una magnitud?

No vamos a hacer un estudio exhaustivo de la existencia de la medida, tal estudio supone un nivel bastante superior al que nosotros intentamos darle a este tema. Para el caso de magnitudes escalares se puede encontrar en Abellanas (1963: 73).

Dada la magnitud  $(X, M, +, \cdot, \leq)$ , siendo  $X \subset \mathbb{R}$ , a simple vista podemos pensar que como la medida es un isomorfismo entre  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$ , con  $1 \in Y \subset \mathbb{R}$ , si tuviéramos el caso de que, elegida como



unidad una cantidad  $u \in M$ , existiese otra cantidad  $a \in M$  tal que  $a = ru$  y  $a = su$ , con  $r, s \in X \subset \mathbb{R}$ , no existiría la medida de esa magnitud tomando como unidad de medida la cantidad  $u$ . Tampoco existiría la medida de una magnitud, tomando como unidad  $u$ , si hubiera algún elemento  $x \in M$  que no pudiera expresarse de la forma  $x = nu$  con  $n \in X \subset \mathbb{R}$ . Ya que en ninguno de los casos tendríamos establecida una aplicación, y mucho menos un isomorfismo. En el primer caso un elemento,  $a$ , tendría dos imágenes:  $r$  y  $s$ , y en el segundo habría un elemento  $x$  sin imagen.

**Ejemplo:** Dada la magnitud escalar  $(\{0,1,2\},*)$ , vista anteriormente, definida la operación  $*$  mediante la tabla

| $*$ | 0 | 1 | 2 |
|-----|---|---|---|
| 0   | 0 | 1 | 2 |
| 1   | 1 | 2 | 2 |
| 2   | 2 | 2 | 2 |

Tabla 21: Ejemplo de magnitud escalar no medible.

como la unidad de medida tiene que ser una cantidad no nula, en este caso las unidades tendrían que ser el 1 ó el 2. Si tomásemos como unidad de medida el 1 tendríamos que, como  $2 = 1 * 1 = 2 * 1$  y también  $2 = 1 * 1 * 1 = 3 * 1$ , luego debería ser  $m_1(2) = 2$  y  $m_1(2) = 3$ , y por tanto  $m_1$  no sería una aplicación y mucho menos biyectiva. Si tomásemos como unidad de medida el 2 no podríamos medir el 1 pues no existiría un  $n \in \mathbb{N} / 1 = 2 * 2 * \dots (n \dots * 2 = n * 2$ , por tanto esta magnitud no es medible.

Por tanto si al operar la cantidad  $u$  tomada como unidad de medida, o cualquier otra parte de ella  $ru$ , consigo misma, no nos diese alguna de las cantidades  $c$  de la magnitud ( $m$  no sería aplicación pues  $c$  no tendría imagen) o nos diesen dos cantidades  $c$  y  $c'$  como resultado de repetir la cantidad  $u$  el mismo número de veces (no sería  $m$  aplicación inyectiva, ya que  $c$  y  $c'$  tendrían la misma imagen), podríamos afirmar que no podemos medir dicha magnitud con esa unidad de medida.

**Definiciones:** Decimos que una **magnitud** escalar  $(X, M, +, \bullet, \leq)$ , siendo  $X \subset \mathbb{R}$ , es **no medible** cuando no hay ninguna cantidad  $u \in M$ , distinta de la cantidad nula, con la cual podamos comparar todas las cantidades,  $x \in M$ , para poder llegar a expresarlas de forma única como  $x = ru$ , con  $r \in X \subset \mathbb{R}$ . A las demás **magnitudes** las llamaremos **medibles**.

Aunque a nosotros nos interesa el concepto de magnitud medible, también, por extensión, se puede hablar de **conjunto medible**, y diremos que un conjunto  $C \subset M$  es medible si podemos elegir un elemento



$u \in C$  de modo que, de alguna manera, podamos decir que cualquier elemento  $x \in C$  se puede expresar de forma única como  $x = ru$ , con  $r \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo:** Vamos a hacer un “relax imaginativo” sobre la medida de una magnitud. Nos preparamos fijándonos bien en la definición de medida de una magnitud y en los ejemplos de magnitudes que hemos visto antes. Creamos un ambiente agradable con una música suave, nos relajamos y nos dejamos caer en el pupitre. Cerramos los ojos... Respiramos profunda y lentamente...

Pienso en el concepto de medida de una magnitud... ¿Todas las magnitudes son medibles? Hay magnitudes que no puedo medir, como la que tengo definida sobre el conjunto  $\{0,1,2\}$ , en el ejemplo anterior... Con el 0 no puedo medir ya que es el elemento neutro... El 1 no me sirve como unidad de medida, pues  $2 = 2 \cdot 1$  y  $2 = 3 \cdot 1$ ... ¿Servirá el 2 como unidad de medida?... Parece que no, pues  $1 \neq 0 \cdot 2$ ,  $1 \neq 1 \cdot 2$  y  $1 \neq 2 \cdot 2$ . ¿Será que  $(\{0,1,2\}, *)$  no es una magnitud escalar?...

Nos fijamos detenidamente y observamos que es un semigrupo unitario (cuyo elemento neutro es el 0), conmutativo (la tabla es simétrica respecto de la diagonal principal), totalmente ordenado (pues  $0 \leq 1 \leq 2$  es una relación de orden total) y arquimadiano (ya que  $1 \cdot 1 \geq 2$ ), luego esta magnitud escalar no se puede medir... ¡Hay magnitudes escalares que no son medibles! ¡Yo creía que todas las magnitudes escalares eran medibles! ¡Tengo que razonar todo lo que me digan, antes de creérmelo!...

¿Hay alguna magnitud escalar que sea medible?... Tomo la longitud, por ejemplo, ¿es medible? Tomo como unidad una cantidad de longitud que represento mediante un segmento, ¿puedo medir cualquier otra cantidad? Tomo el segmento representante de esa cantidad. La unidad lo contiene un número exacto de veces... ¡Fenomenal, lo puedo medir!

Tomo otra cantidad y elijo un segmento que represente a dicha cantidad. ¡No lo contiene un número exacto de veces!... Lo divido en un número de partes y observo que contiene a una parte alícuota del segmento elegido como unidad. ¿Todas las cantidades que tome en la magnitud longitud las puedo medir con el segmento elegido como unidad?

Elijo otra cantidad y tomo el segmento que representa dicha cantidad. ¡Ahora no contiene un número exacto de veces al segmento que representaba a la longitud elegida como unidad!... ¡Ni a una parte alícuota de la unidad!... Pero la cantidad elegida es igual a un número real por la unidad, ¡luego la longitud es medible, ya que puedo establecer un

isomorfismo entre  $(\mathbb{R}, L, +, \bullet)$  y  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \bullet)$ ! Por tanto ya sé que hay magnitudes escalares medibles y no medibles.

¿Todo lo que solemos entender por medible es una magnitud? Está claro que la temperatura es medible, ya que con el termómetro, de manera indirecta, puedo comparar todas las temperaturas con la del grado. Pero sabemos que si tomamos, por ejemplo, dos litros de agua uno a  $20^\circ$  y otro a  $40^\circ$ , la mezcla es agua a la temperatura de  $30^\circ$ . Si tomáramos 2 litros de agua a  $20^\circ$  y 1 litro a  $40^\circ$ , la mezcla no resultaría a  $30^\circ$ , sino que la temperatura será menor, la temperatura de la mezcla depende de la cantidad de agua que elijamos, luego tenemos que admitir que la temperatura no es una magnitud ya que no podemos sumar temperaturas sin que dependa de la cantidad de sustancia que se elija, y la suma no sería una ley de composición interna, por tanto podemos afirmar que no todo lo que sea medible tiene que ser una magnitud.

Para tener una medida en una magnitud escalar  $M$ , basta con tener un isomorfismo entre  $M$  y un subsemimódulo —un submódulo o un subespacio vectorial—  $Y$  de los números reales, que verifique la condición de que  $1 \in Y$ .

Mediante una palmada volvemos a la realidad y continuamos razonando sobre todo lo que hemos comentado. Después podemos proponer algún ejercicio como los que vienen a continuación.

Anteriormente hemos visto alguna magnitud escalar finita que no es medible, pretendemos encontrar una magnitud escalar infinita que tampoco sea medible; para ello ninguna cantidad, distinta de la nula, al operarla con ella misma nos puede dar todas las demás cantidades de la magnitud. Utilizamos “el arte de relacionar”, en este caso las magnitudes finitas que no eran medibles con las infinitas; también hemos usado las técnicas “crear durmiendo”, ya que nos obsesionamos con la idea y nos despertó el sueño con un posible ejemplo; “la sinapsis” y “la serendipity” pues el estar pensando con intensidad en ello dio, lugar a que encontráramos magnitudes con infinitos elementos idempotentes como la que vimos antes de analizar que la magnitud que ponemos a continuación es una magnitud escalar.

**Ejemplo:** Tomamos la magnitud escalar  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, *, \leq)$ , siendo  $\leq$  la relación de orden usual de  $\mathbb{N}$  y estando definida la operación  $*$  de la forma

$$1) \forall x \in \mathbb{N} \quad x * 0 = 0 * x = x$$

$$2) \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x, y < 5 \quad x * y = y * x = 5$$

$$3) \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad x \leq 5 \leq y \quad \text{ó} \quad 5 < x \leq y \quad x * y = y * x = y^+$$

siendo el  $y^+$  siguiente de  $y$ , vamos a ver que no medible.

Elegimos el 1 para ver si nos sirve como unidad de medida. Operamos  $1 \cdot 1 = 5$ , por definición, y  $(1 \cdot 1) \cdot 1 = 5 \cdot 1 = 6$ , siguiendo operando 1 con él mismo tenemos que  $2 \neq 1 \cdot 1 \dots$  ( $n \dots \cdot 1 = n \cdot 1$ , luego 2 no lo podemos medir tomando el 1 como unidad, por tanto 1 no nos sirve como unidad de medida.

Si tomamos el 2, el 3 o el 4 para ver si nos sirven como unidades de medida el razonamiento sería análogo al que hemos hecho con el 1.

Si tomamos un número mayor que 4, por ejemplo el 6, vemos que  $6 \cdot 6 = 7$ ,  $(6 \cdot 6) \cdot 6 = 7 \cdot 6 = 8 \dots$ , luego también en este caso  $2 \neq 6 \cdot 6 \dots$  ( $n \dots \cdot 6 = n \cdot 6$ , tampoco nos sirve como unidad de medida. El razonamiento que hemos hecho con el 6 lo podemos hacer con cualquier número mayor que 4.

Por tanto tenemos que concluir que esta magnitud no es medible.

**Ejercicio:** Invéntate una magnitud escalar infinita que no sea medible y otra que sí lo sea.

Como consecuencia, si la magnitud escalar  $M$  es medible y denotamos por  $m(x)$  a la medida de una cantidad  $x$ , serán ciertas las propiedades que veremos a continuación.

## 2.10.6.2. Propiedades de la medida

Podríamos empezar diciéndole al alumno-profesor: ya sabes lo que es la medida de una magnitud escalar, ¿serías capaz de señalar las propiedades que tiene que tener una aplicación para poder decir que se trata de la medida de una magnitud escalar? Si es así, indícalas, y si no, toma una magnitud concreta y razónalo. Elige una magnitud escalar conocida e intenta definir varias medidas. ¿Has conseguido definir más de una medida? Si es cierto, ¿qué has hecho para lograrlo?

Para responder a estas preguntas podemos utilizar las técnicas: “el arte de preguntar”, “el entorno”, “el arte de relacionar” y “la síntesis creativa”.

Tal y cómo hemos definido la medida de una magnitud, son muchas las condiciones que tendríamos que comprobar para tener una medida. En este apartado vamos a analizar dichas condiciones para intentar reducir significativamente éstas. Además, vamos a ver cómo podemos establecer varias medidas en una magnitud escalar.

Dada la magnitud escalar  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  de tipo  $t$  e  $Y \subset \mathbb{R}$  tal que  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$  sea también una magnitud del mismo tipo, por ser la medida un isomorfismo entre ellas, será cierto que:

1) La medida es una aplicación biyectiva  
 $m: M \rightarrow Y$ .

2)  $\forall a, b \in M \quad m(a+b) = m(a) + m(b)$ ,

pues si  $m(a) = r \mid \text{---} \mid a = ru$ ;  $m(b) = s \mid \text{---} \mid b = su$ ; luego

$a+b = ru+su = (r+s)u \mid \text{---} \mid m(a+b) = r+s = m(a)+m(b)$ .

Esto nos dice que la medida de la suma de dos cantidades es la suma de las medidas de cada una de ellas. Esto es cierto por ser  $m$  un homomorfismo entre  $(M, +)$  y  $(Y, +)$ , aunque aquí lo deducimos como consecuencia de ser  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$  magnitudes escalares del mismo tipo y de ser  $m$  una aplicación.

3)  $\forall a \in M \quad \forall x \in X \quad m(x \cdot a) = x \cdot m(a)$ ,

ya que si

$m(a) = r \mid \text{---} \mid a = r \cdot u \Rightarrow x \cdot a = x \cdot (r \cdot u) = (x \cdot r) \cdot u \mid \text{---} \mid$

$\mid \text{---} \mid m(x \cdot a) = x \cdot r = x \cdot m(a)$ .

Esto nos dice que la medida del producto de una cantidad por un número de  $X$ , es igual al número multiplicado por la medida de la cantidad. Lo cual es cierto ya que tenemos un homomorfismo entre los semimódulos  $(X, M, +, \cdot)$  y  $(X, Y, +, \cdot)$ , si bien aquí lo deducimos como consecuencia de ser  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$  magnitudes escalares del mismo tipo y de ser  $m$  una aplicación.

Por verificarse estas dos últimas condiciones decimos que  $m$  **respeto las dos operaciones**.

Como tenemos una relación de orden tendrá que verificarse que

4)  $\forall a, b \in M \quad a \leq b \Rightarrow m(a) \leq m(b)$ ,

pues si la magnitud escalar es absoluta y tenemos el orden natural del semigrupo

$a \leq b \mid \text{---} \mid \exists c \in M / b = a + c \mid \text{---} \mid$

$\mid \text{---} \mid \exists c \in M / m(b) = m(a+c) = m(a) + m(c) \mid \text{---} \mid$

$\mid \text{---} \mid \exists m(c) \in Y / m(b) = m(a) + m(c) \mid \text{---} \mid m(a) \leq m(b)$ .

Esta propiedad nos dice que si una cantidad es menor o igual que otra, la medida de la primera es también menor o igual que la de la segunda. Sabemos que  $m$  también respeta la relación de orden por ser un homomorfismo entre las magnitudes escalares  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$ . Como puede verse aquí lo deducimos como consecuencia de ser  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$  magnitudes escalares absolutas, y de ser  $m$  una aplicación biyectiva que verifica 1).

5) Si todo elemento de  $Y$  distinto de  $0$  tiene inverso en  $Y$ , una medida en  $M$  queda totalmente determinada conociendo la imagen de un elemento distinto de la cantidad nula, ya que si se sabe que  $m(x)=r \neq 0$ , como  $r \in \mathbb{R}^*$  tiene inverso, y como la aplicación es biyectiva, habrá un elemento  $y \in M$  tal que  $m(y)=rr^{-1}=1$ , luego  $y$  es la unidad de medida, y la medida de cualquier cantidad  $c \in M$ ,  $c=sy$ , con  $s \in \mathbb{R}$  será  $m(c)=m(sy)=s[m(y)]=s$ .

6) Una magnitud escalar  $M$  que sea medible, puede admitir varias medidas, cada una de las cuales queda completamente determinada cuando se fija la unidad de medida.

**Ejercicio:** Prueba que, si se trata de magnitudes escalares relativas, la medida también respeta la relación de orden, que en este caso sería el orden inducido por el cono positivo.

Para resolver este ejercicio podemos aplicar “el arte de relacionar” y “la sinapsis”.

### 2.10.6.3. Cambio de unidad de medida

Podríamos comenzar preguntando al alumno-profesor cosas como, por ejemplo, las siguientes: ¿en una magnitud escalar sabrías cambiar de unidad de medida?; ¿cómo lo harías? ¿Para qué sirve cambiar de unidad de medida? ¿Cómo repercute en la medida de una cantidad el cambio de unidad? (Indicación: fíjate en la medida de una cantidad realizada con dos unidades de medida distintas.)

Utilizamos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “hacer lo familiar extraño”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Vamos a pensar que queremos, por ejemplo, pesar una caja  $c$  de fruta; podríamos elegir como unidad de medida el kilogramos o el gramo. Supongamos que  $c$  pesase 5 kilogramos, entonces tendría que pesar 5000 gramos. Es decir, como  $1 \text{ kilogramo} = 1000 \text{ gramos}$ , la medida de  $c$  con el gramo sería 1000 veces la medida que nos dio cuando utilizamos como unidad de medida el kilogramo, luego  $m_g(c)=1000 m_{kg}(c)$ .

**Proposición:** Si en una magnitud escalar  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  tenemos dos cantidades no nulas  $u$  y  $v$ , con  $v=n \cdot u$ , entonces se verifica que

$$\forall a \in M \quad m_u(a) = n \cdot m_v(a).$$

Demostración: Sea  $M$  una magnitud escalar y sean  $u \neq 0$  y  $v \neq 0$  dos cantidades de ella, siendo  $v = n \cdot u$  con  $n \in \mathbb{N}$ , y sea  $\forall a \in M$ , si medimos  $a$  con  $u$  y  $v$ , y tenemos:

$$m_u(a) = x \text{ y } m_v(a) = y \Rightarrow a = x \cdot u \text{ y } a = y \cdot v$$

por tanto, sustituyendo el valor de  $v = n \cdot u$ , tenemos:

$$a = x \cdot u = y \cdot v = y \cdot (n \cdot u) = (y \cdot n) \cdot u,$$

luego será

$$m_u(a) = x \text{ y } m_u(a) = y \cdot n \Rightarrow x = y \cdot n$$

por ser la medida una aplicación, pues sabíamos que era un isomorfismo, un elemento no puede tener dos imágenes, luego deberá ser

$$\frac{x}{y} = n = \frac{v}{u}$$

lo que nos dice que las medidas de una misma cantidad con unidades distintas están en razón inversa a dichas unidades y será

$$m_u(a) = x = y \cdot n = m_v(a) \cdot n \Rightarrow m_u(a) = n \cdot m_v(a).$$

$$\text{También tenemos que } m_v(a) = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot m_u(a).$$

### Ejemplos:

1° Si tenemos una cantidad  $b$  de capacidad expresada en litros y otra  $a$  en decilitros, como  $1 \text{ l} = 10 \text{ dl}$  será:

$$b = 45 \text{ l} = 45 \cdot (10 \text{ dl}) = 450 \text{ dl},$$

luego  $m_l(b) = 10 m_{dl}(b)$ .

Por otro lado

$$a = 2546 \text{ dl} = 254'6 \text{ l},$$

en este caso  $m_l(a) = \frac{1}{10} m_{dl}(a)$ .

2° Sea  $A$  la magnitud amplitud de ángulos. Una medida de  $A$  es una aplicación:

$$m: A \rightarrow \mathbb{R}^+$$

que a cada ángulo le hace corresponder un número real positivo. Si tomamos como unidad de medida el ángulo recto, el grado sexagesimal y el grado centesimal, como sabemos que el ángulo recto  $= 90^\circ = 100^g$  (con  $90^\circ$  indicamos 90 grados sexagesimales y con  $100^g$  indicamos 100 grados centesimales); será:

$$\text{ángulo llano} = 2 \text{ ángulos rectos} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

$$\text{ángulo llano} = 2 \text{ ángulos rectos} = 2 \cdot 100^g = 200^g.$$

Indica qué relación habría entre las medidas de un determinado ángulo realizadas tomando como unidad el grado sexagesimal, el grado centesimal y el ángulo recto, respectivamente.

3° Sea M la magnitud monedas. Si tomamos como unidades la peseta y el euro, como sabemos que 1 euro=166'386 pesetas tenemos que, por ejemplo:

35'25 euros=35'25•166'386 pesetas=5865'1065 pesetas,  
y con la aproximación a la peseta, serían: 5865 pesetas.

$$3420 \text{ pesetas} = \left( \frac{1}{166'386} \right) \cdot 3420 \text{ euros} = 20'55461397 \text{ euros}$$

que redondeando, teniendo en cuenta que la moneda más pequeña de que se dispone es el céntimo de euro, tendríamos: 20'55 euros.

**Ejercicio:** Toma como unidades de medida para medir la magnitud área, el cuadrado de lado un centímetro, el triángulo rectángulo que resulta de trazarle al cuadrado una diagonal y el triángulo intersección de dos de los triángulos anteriores, como indica la figura adjunta:

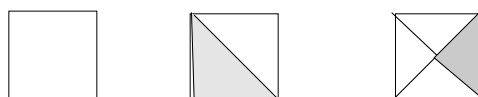


Figura 27: Unidades de medida de superficie.

Calcula la superficie de una mesa de 2 m de largo por 1'5 m de ancho con cada una de las unidades de medida y compara los resultados.

**Ejercicio:** Tenemos la magnitud M, monedas. Si tenemos que pagar 3574 pesetas en un determinado establecimiento y disponemos de euros solamente, pero tenemos varias monedas y billetes de cada clase, ¿de cuántas formas distintas podríamos efectuar el pago, empleando cualquier número de ellas, con tal de que el resultado sea la cantidad que debemos?

Vamos a ver la medida de cada una de las magnitudes escalares que hemos estudiado anteriormente. Algunas no presentan ninguna dificultad; en otras la cosa se complica. No vamos a limitarnos a las magnitudes escalares que podemos medir empleando números naturales, enteros o racionales, sino que nos ocuparemos también de aquellas magnitudes que requieren para ser medidas otros subconjuntos de los números reales, aunque no sean objeto de estudio en Educación Infantil, pero nos parece interesante que el futuro profesor tenga algún conocimiento de ellas.



## 2.10.6.4. Medida de magnitudes escalares discretas

Empezamos con la medida de las magnitudes escalares discretas por ser las que resultan más fáciles y lo hacemos, como siempre, planteándoles a los alumnos algunas cuestiones que puedan servir para motivarlos, y pueden ser las siguientes: ¿cómo medirías una magnitud absoluta discreta  $(X, M, +, \cdot, \leq)$ ? ¿Cuál debería ser la magnitud escalar  $(X, Y, +, \cdot, \leq)$ , con  $1 \in Y \subset \mathbb{R}$ , que te permitiera establecer el isomorfismo entre  $M$  e  $Y$ ? Toma una magnitud absoluta discreta conocida e intenta obtener una medida. Elige alguna cantidad de esa magnitud como unidad y mide otra cantidad de la misma magnitud.

Utilizaremos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas” o “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” bajo los dos aspectos: “hacer lo familiar extraño” y “convertir lo extraño en familiar”, “el entorno”, “la sinapsis”, “la solución de problemas” y “la síntesis creativa”.

Como ejemplo de medida de una magnitud discreta puede servirnos la que teníamos al comenzar a hablar de medida de una magnitud, por esto no lo repetimos.

Sea  $(X, M, +, \cdot, \leq)$  una magnitud escalar absoluta discreta no finita; por la definición que hemos dado de ella sabemos que existe siempre un isomorfismo entre  $M$  y el  $\mathbb{N}$ -semimódulo de los números naturales, si la magnitud es absoluta, o el  $\mathbb{Z}$ -módulo de los enteros, si la magnitud es relativa, luego si la magnitud es absoluta, será  $(X, M, +, \cdot, \leq) = (\mathbb{N}, M, +, \cdot, \leq)$  y, tomando como unidad de medida el elemento generador de la magnitud, tendremos:

$$\begin{aligned} m: M &\rightarrow \mathbb{N} \\ 0_M &\rightarrow m(0 \cdot u) = 0 \\ u &\rightarrow m(1 \cdot u) = 1 \\ 2u &\rightarrow m(2 \cdot u) = 2 \cdot m(u) = 2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ nu &\rightarrow m(n \cdot u) = n \cdot m(u) = n \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

por ser la medida un homomorfismo entre ellos, será cierto que:

$$1) \forall a, b \in M \quad m(a+b) = m(a) + m(b),$$

esto nos dice que la medida de la suma de dos cantidades es la suma de las medidas de cada una de ellas, luego tenemos un homomorfismo entre  $(M, +)$  y  $(\mathbb{N}, +)$ .

Como consecuencia de esta propiedad se verifica:

$$2) \forall a \in M \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad m(x \bullet a) = x \bullet m(a),$$

ya que  $m(x \bullet a) = m(a + a + \dots (x \text{ veces}) \dots + a) = m(a) + m(a) + \dots (x \text{ veces}) \dots + m(a) = x \bullet m(a)$ ,  
luego tenemos un homomorfismo entre los simódulos  $(\mathbb{N}, M, +, \bullet)$  y  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \bullet)$ .

Por lo cual, si queremos medir la cantidad nula  $0_M \in M$ , como sabíamos que  $\forall a \in M \quad 0_M = 0 \bullet a$ , será:

$$m(0_M) = m(0 \bullet u) = 0 \bullet m(u) = 0 \bullet 1 = 0.$$

Como las magnitudes discretas son magnitudes escalares, tenemos una relación de orden que tendrá que verificar:

$$3) \forall a, b \in M \quad a \leq b \Rightarrow m(a) \leq m(b),$$

esto es consecuencia de 1), ya que si

$$a \leq b \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } \exists c \in M / b = a + c \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } \exists c \in M / m(b) = m(a + c) = m(a) + m(c),$$

por tanto

$$\exists m(c) \in \mathbb{N} / m(b) = m(a) + m(c) \text{ } \Longleftrightarrow \text{ } m(a) \leq m(b),$$

luego también respeta la relación de orden, y por respetar las dos operaciones y la ordenación decimos que  $m$  es un homomorfismo entre las magnitudes escalares  $(\mathbb{N}, M, +, \bullet, \leq)$  y  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \bullet, \leq)$ .

Como 2) y 3) se deducen de 1), para tener un homomorfismo entre dos magnitudes discretas sólo tenemos que ver que 1) es cierto, aunque en algunos casos para familiarizarnos con los homomorfismos entre semimódulos veremos las tres condiciones.

**Ejemplo:** En el caso, anteriormente considerado, de las cantidades naturales de la magnitud superficie,

$$S = \{0 \text{ dm}^2, 1 \text{ dm}^2, 2 \text{ dm}^2, 3 \text{ dm}^2, \dots, n \text{ dm}^2, \dots\}$$

sus medidas respectivas con la unidad “dm<sup>2</sup>” son: 0, 1, 2, 3..., n... Aquí hemos elegido como unidad el “dm<sup>2</sup>” pero podemos elegir como unidad cualquier otra cantidad de superficie, y su medida no sería la misma. Por ejemplo, si elegimos como unidad el “cm<sup>2</sup>” las cantidades anteriores tendrían las medidas: 0, 100, 200..., 100n...

En consecuencia, las medidas de las cantidades de una magnitud discreta no son números fijos, sino que dependen de la unidad elegida, que puede ser cualquier cantidad de esa magnitud.

Sin embargo, la medida queda unívocamente determinada cuando se fija la unidad de medida, ya que la aplicación es biyectiva.

**Ejercicio:** Toma otra magnitud discreta y expresa la medida de las cantidades de dicha magnitud utilizando distintas unidades de medida.

Para resolver este ejercicio podríamos utilizar las técnicas “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la sinapsis”.

**Ejercicio:** Dada una magnitud  $M$ , si tomamos como unidad de medida una cantidad  $u$ , ¿cuál será la medida de  $u$ ? Razónalo.

Si la magnitud  $M$  fuese relativa, como  $(M,+)$  es un grupo, para poder establecer el isomorfismo de  $(M,+)$  en  $(\mathbb{Z},+)$  el conjunto numérico tendría que ser el  $\mathbb{Z}$ -módulo de los números enteros, y las medidas de sus cantidades se expresarían de forma análoga.

**Ejercicio:** Prueba que si  $(\mathbb{Z},M,+, \cdot, \leq)$  es una magnitud escalar discreta relativa y  $m$  es una aplicación de  $M$  en  $\mathbb{Z}$  que verifica las condiciones:

$$1) \forall a,b \in M \quad m(a+b)=m(a)+m(b) \text{ y}$$

$$2) m(-u)=-m(u),$$

tenemos un isomorfismo entre las magnitudes  $(\mathbb{Z},M,+, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{Z},\mathbb{Z},+, \cdot, \leq)$  que sería una medida de la magnitud  $M$ .

Para demostrarlo puedes seguir un proceso análogo al anterior, sólo que el conjunto final de la aplicación  $m$  tendría que ser  $\mathbb{Z}$  en lugar de  $\mathbb{N}$ .

**Ejercicio:** Sea  $(\mathbb{Z},M,+, \cdot)$  un semimódulo cíclico. Prueba que entonces  $M$  hereda el orden de  $\mathbb{Z}$ .

Es evidente que en ambos casos el isomorfismo respeta la ordenación arquimediana de la magnitud.

**Ejercicio:** Prueba que si tenemos dos semimódulos  $(X,M,+, \cdot)$  y  $(X,M',+, \cdot)$  y entre ellos tenemos un isomorfismo,  $f: M \rightarrow M'$ , de semimódulos, si hay un orden en  $M$ ,  $M'$  lo hereda.

En este ejercicio y en el anterior vamos a utilizar las técnicas: “el arte de relacionar”, “la sinapsis” y “la serendipity”.

## 2.10.6.5. Medida de magnitudes escalares divisibles

Comenzaríamos preguntándole a los alumnos: ¿cómo medirías una magnitud escalar divisible  $(X,M,+, \cdot, \leq)$ ? ¿Cuál debería ser en este caso la magnitud escalar  $(X,Y,+, \cdot, \leq)$ , con  $1 \in Y \subset \mathbb{R}$ , que te permitiera establecer el isomorfismo entre  $M$  e  $Y$ ? Toma una magnitud divisible conocida e intenta obtener una medida. Elige una unidad de medida y mide alguna cantidad de la magnitud elegida.

Vamos a utilizar las siguientes técnicas: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” bajo la forma “hacer lo familiar extraño”, “el entorno”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

Si la magnitud escalar  $M$  que nos proponemos medir es divisible y absoluta, puede suceder que, elegida una cierta unidad  $u$ , todas las cantidades sean múltiplos de alguna parte alícuota de  $u$ . Si  $x$  es una cantidad de la magnitud  $M$ , existirá un número natural  $a$ , tal que  $x$  se podrá expresar de la forma:

$$x = a \cdot \left(\frac{u}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot u \quad \text{con } a \in \mathbb{N} \text{ y } b \in \mathbb{N}^*$$

que, según hemos visto, es el producto de la fracción  $\frac{a}{b}$  por la cantidad  $u$ . Diremos que  $\frac{a}{b}$  es la medida de la cantidad  $x$  con la unidad  $u$ .

El isomorfismo que en este caso se establece entre  $M$  y  $\mathbb{Q}_+$  es:

$$m: M \rightarrow \mathbb{Q}_+$$

$$x \rightarrow \frac{a}{b},$$

evidentemente respeta la suma, ya que  $\forall x, y \in M \quad m(x) = \frac{a}{b}$  y  $m(y) = \frac{c}{d}$ .

tendremos que  $x = \frac{a}{b} \cdot u$  e  $y = \frac{c}{d} \cdot u$ , luego

$$x + y = \left(\frac{a}{b} \cdot u\right) + \left(\frac{c}{d} \cdot u\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot u,$$

y por tanto

$$m(x + y) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = m(x) + m(y),$$

con lo que tenemos un homomorfismo entre  $(M, +)$  y  $(\mathbb{Q}_+, +)$ .

También respeta la ordenación, es decir,

$$\forall x, y \in M \quad x \leq y \Rightarrow m(x) \leq m(y).$$

Como la magnitud es absoluta, tendríamos la ordenación natural del semigrupo, y sería

$$x \leq y \iff \exists z \in M / y = x + z.$$

Si  $x = \frac{a}{b} \cdot u$ ,  $y = \frac{c}{d} \cdot u$  y  $z = \frac{e}{f} \cdot u$ , tendremos que

$$y = \frac{c}{d} \cdot u = \left(\frac{a}{b} \cdot u\right) + \left(\frac{e}{f} \cdot u\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{e}{f}\right) \cdot u,$$

como  $\frac{c}{d} = m(y) = \frac{a}{b} + \frac{e}{f}$ , pero sabemos que la medida era una aplicación biyectiva, luego será  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{e}{f}$ , y en  $\mathbb{Q}_+$  tendremos la ordenación inducida por el cono positivo, por tanto  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff m(x) \leq m(y)$ , luego si la magnitud es absoluta tendremos un isomorfismo entre  $(M, +, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}_+, +, \leq)$ .

Falta probar que la aplicación respeta la ley de composición externa, veamos que

$$\forall x \in M \quad \forall n \in \mathbb{Q}_+ \quad m(n \bullet x) = n \bullet m(x),$$

Sea  $x = \frac{a}{b} \bullet u$  y  $n = \frac{r}{s}$ , será

$$n \bullet x = \frac{r}{s} \bullet \left( \frac{a}{b} \bullet u \right) = \left( \frac{r}{s} \bullet \frac{a}{b} \right) \bullet u,$$

luego

$$m(n \bullet x) = \frac{r}{s} \bullet \frac{a}{b} = n \bullet m(x)$$

como queríamos probar. Por tanto, si la magnitud es escalar, divisible y absoluta, tendríamos un isomorfismo entre  $(\mathbb{Q}_+, M, +, \bullet, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_+, +, \bullet, \leq)$ .

También, en este caso, se verifica que  $m(0_M) = 0$  pues, por ser  $m$  un isomorfismo, tenemos:

$$m(0_M) = m(0 \bullet x) = 0 \bullet m(x) = 0.$$

Como consecuencia, si la magnitud hubiese sido relativa, diríamos que  $\frac{a}{b}$ , con el signo correspondiente a su sentido, sería la medida de la cantidad  $x$  con la unidad  $u$ .

El isomorfismo que en el caso de las magnitudes relativas se establece entre  $M$  y  $\mathbb{Q}$  es:

$$m: M \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \rightarrow \frac{a}{b},$$

Se puede probar sin dificultad que se trata de un isomorfismo entre  $(M, +, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}, +, \leq)$ . Se verifica que  $m(-x) = -m(x)$ , ya que

$$0 = m(0_M) = m(x + (-x)) = m(x) + m(-x) \Rightarrow m(-x) = -m(x),$$

y también sería

$$\forall n \in \mathbb{Q} \quad m(n \bullet x) = n \bullet m(x),$$

por tanto tendríamos un isomorfismo entre  $(\mathbb{Q}, M, +, \bullet, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \bullet, \leq)$ . La demostración con más detalle, por ser análoga a la anterior, la dejamos como ejercicio.

Podría haber sucedido que las magnitudes hubiesen sido continuas y que los isomorfismos en lugar de estar establecidos entre  $(\mathbb{Q}_+, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_+, +, \cdot, \leq)$ , en el caso de las magnitudes absolutas, o entre  $(\mathbb{Q}, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ , en el caso de las magnitudes relativas, hubiesen estado establecidos entre  $(\mathbb{R}_+, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+, +, \cdot, \leq)$  o entre  $(\mathbb{R}, M, +, \cdot, \leq)$  y  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ , y el razonamiento se haría de la misma forma, la única diferencia sería que la imagen de un elemento  $x$  de  $M$  en lugar de ser una fracción  $\frac{a}{b}$  sería un número real  $r$ .

**Observación:** En todos los casos, y por supuesto en el caso de las magnitudes divisibles, para determinar una cantidad de una magnitud escalar no es suficiente dar su medida, es necesario expresar la unidad a la que se refiere ésta.

**Ejemplos:** 30 l, 22 cm, 0'5 horas, -24 euros y 42 Kg son cantidades de capacidad, longitud, tiempo, dinero y peso. No serían cantidades de ninguna magnitud 30, 22, 0'5, -24 y 42.

**Ejercicio:** Da la medida de algunas cantidades de una magnitud divisible.

## 2.11. Proporcionalidad de magnitudes escalares

Comenzaríamos preguntándole al alumno-profesor: ¿te suena eso de proporcionalidad de magnitudes?; ¿lo has estudiado anteriormente? En caso afirmativo, repásalo y en caso negativo busca en algún libro o en internet dicho término. ¿Cuándo dos magnitudes son proporcionales? ¿Sabrías decir alguna magnitud que sea proporcional a otra? ¿Para qué sirve la proporcionalidad de magnitudes? ¿Quién utiliza el hecho de que dos magnitudes sean proporcionales? ¿Lo has utilizado tú? En caso afirmativo, ¿cuándo?

Vamos a hacer uso de las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el método Delfos”, “la sinéctica” bajo los dos aspectos: “hacer lo familiar extraño” y “convertir lo extraño en familiar”, “el entorno”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

Piensa, por ejemplo en el precio de los caramelos y la cantidad que compras, son magnitudes entre las que podemos establecer una aplicación biyectiva que además es un isomorfismo, ya que si compras una cantidad  $a$  de caramelos y después otra cantidad  $b$ , te cuesta igual que si hubieses comprado la cantidad  $a+b$ , de caramelos, a la vez. Si compras  $n$  bolsas con la misma cantidad  $a$  de caramelos, vale igual que si

compras la cantidad  $n \cdot a$  en una sola bolsa. Además, si la cantidad  $a$  de caramelos es menor que la  $b$ , el precio de  $a$  es menor que el de  $b$ . (En todos los casos se sobreentiende que se trata de caramelos de la misma clase.) Por verificarse estas condiciones decimos que existe una proporcionalidad entre estas dos magnitudes.

### 2.11.1. Proporcionalidad simple

Comenzamos preguntándole al alumno: ¿crees que hay alguna proporcionalidad que sea la más fácil?; ¿en qué consiste? Busca algún ejemplo de magnitudes que sean proporcionales.

Utilizaremos las técnicas de Metodología Creativa: “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Vamos a considerar las magnitudes longitud y tiempo, sabemos que si recorremos más longitud es porque estamos más tiempo andando, y podemos establecer una aplicación entre ellas

$$f: L \rightarrow T,$$

que verifique:

- i)  $f$  es una aplicación biyectiva,
- ii)  $f$  es un homomorfismo entre los semimódulos.

Por verificar la aplicación  $f$  estas dos condiciones decimos que la longitud y el tiempo son dos magnitudes proporcionales.

**Definición:** Dadas dos **magnitudes**  $(X, A, +, \cdot)$  y  $(X, B, +, \cdot)$  diremos que son **proporcionales** si existe un isomorfismo de  $X$ -semimódulos

$$f: A \rightarrow B,$$

luego tendrá que verificarse:

- 1)  $f$  es una aplicación biyectiva,
- 2)  $\forall a, b \in A \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$  y
- 3)  $\forall a \in A \quad \forall x \in X \quad f(x \cdot a) = x \cdot f(a)$ .

Si las magnitudes  $(X, A, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, B, +, \cdot, \leq)$  fuesen escalares, tendría que verificarse además que:

- 4)  $\forall a, b \in A \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ .

**Ejemplo:** La magnitud peso de una determinada sustancia es proporcional a la magnitud precio de dicha sustancia. Por ejemplo, el peso del arroz es proporcional a su precio, ya que podemos establecer una aplicación entre ambas magnitudes de modo que a cada pesada de arroz le hacemos corresponder el precio que nos cuesta. Esta aplicación es biyectiva. Por otro lado, si 1 Kg de arroz, por ejemplo, vale 1'17 euros, 2 Kg valen el doble, es decir 2'34 euros y  $n$  Kg valen  $1'17 \cdot n$



euros. Además si 2 Kg valen 2'34 euros y 3 Kg valen 3'51 euros, 2 Kg+3 Kg=5 Kg valen 2'34 euros+3'51 euros=5'85 euros.

En general, si  $a$  Kg valen  $n$  euros y  $b$  Kg valen  $m$  euros,  $n+m$  Kg valen  $a+b$  euros. Además  $x \cdot a$  Kg valen  $x \cdot n$  euros. Y como estas magnitudes son escalares, si tengo más Kg, el precio será mayor.

En este ejemplo hemos utilizado “el arte de relacionar” y “la sinéctica” bajo su aspecto “convertir lo extraño en familiar”.

**Ejercicio:** Encuentra otras dos magnitudes que sean proporcionales.

Para resolver este ejercicio utilizaremos “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la sinapsis”.

**Proposición:** Sean  $(X, A, +, \cdot)$  y  $(X, B, +, \cdot)$  dos magnitudes entre las cuales existe un isomorfismo

$$f: A \rightarrow B.$$

Cuando  $X \subset \mathbb{R}$  la condición 3) se deduce de 2), y si las magnitudes son escalares y se verifica: 5)  $\forall x \in A \quad x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$  —en particular si las magnitudes son absolutas—, entonces también 4) se deduce de 2).

Demostración: Veamos que 2)  $\Rightarrow$  3). Si las magnitudes son escalares absolutas, tendríamos:

Si  $x=n$  fuese un número natural

$$f(n \cdot a) = f(a + a + \dots (n \text{ veces}) + a) = f(a) + f(a) + \dots (n \text{ veces}) + f(a) = n \cdot f(a).$$

En particular para  $n=0$

$$f(0_A) = f(0 \cdot a) = 0 \cdot f(a) = 0_B.$$

En el caso de que la magnitud hubiese sido relativa, por verificarse la propiedad cancelativa tendríamos:

$$f(0_A) + 0_B = f(0_A) = f(0_A + 0_A) = f(0_A) + f(0_A) \Rightarrow 0_B = f(0_A),$$

luego

$$0_B = f(0_A) = f[a + (-a)] = f(a) + f(-a) \Rightarrow f(-a) = -f(a),$$

y sería

$$\begin{aligned} f(-n \cdot a) &= f[(-a) + (-a) + \dots (n \text{ veces}) + (-a)] = \\ &= f(-a) + f(-a) + \dots (n \text{ veces}) + f(-a) = n \cdot f(-a) = n \cdot [-f(a)] = (-n) \cdot f(a). \end{aligned}$$

En consecuencia  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n \cdot a) = n \cdot f(a)$ .

Si  $x$  fuese un número racional  $x = \frac{p}{q}$

$$f\left(\frac{p}{q} \cdot a\right) = f\left[p \cdot \left(\frac{1}{q} \cdot a\right)\right] = p \cdot f\left(\frac{1}{q} \cdot a\right),$$

y como  $f(a) = f[q \cdot (\frac{1}{q} \cdot a)] = q \cdot f(\frac{1}{q} \cdot a) \Rightarrow f(\frac{1}{q} \cdot a) = \frac{1}{q} \cdot f(a)$ , tendremos que

$$f(\frac{p}{q} \cdot a) = \frac{p}{q} \cdot f(a)$$

Si la magnitud hubiese sido absoluta, el número racional tendría que ser positivo, y el razonamiento sería análogo.

Si fuese  $x=r$  un número real, como sabemos que  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$  (Pisot y Zamansky (1966: 229)), es decir, todo número real  $r$  es límite de una sucesión de Cauchy de números racionales  $(q_n)$ , tendremos que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \varepsilon > 0 \quad \exists n' \in \mathbb{N} / \forall n \geq n' \quad |r - q_n| < \varepsilon.$$

Para cada  $q_n$  hemos visto que se cumple:  $f(q_n \cdot a) = q_n \cdot f(a)$ , luego en el límite de la sucesión

$$f(q_1 \cdot a) = q_1 \cdot f(a), f(q_2 \cdot a) = q_2 \cdot f(a) \dots, f(q_n \cdot a) = q_n \cdot f(a) \dots$$

será

$$f(r \cdot a) = r \cdot f(a).$$

Si la magnitud hubiese sido absoluta, el número real tendría que ser positivo y por tanto límite de números racionales positivos, y nos serviría el mismo razonamiento.

Para los alumnos de Magisterio consideramos que es suficiente con que entiendan que en  $\mathbb{Q}$  se verifica esta condición, aunque les expliquemos que en  $\mathbb{R}$  también se cumple, ya que ellos no estudian las sucesiones de Cauchy ni la idea de límite de una sucesión.

Veamos que 2)  $\Rightarrow$  4). Si tuviésemos

$$a \leq b \mid \text{---} \mid \exists c \in A_+ / b = a + c \mid \text{---} \mid \exists c \in A_+ / f(b) = f(a + c) = f(a) + f(c),$$

por tanto, como hemos supuesto que se verifica 5), tendríamos

$$\exists f(c) \in B_+ / f(b) = f(a) + f(c) \mid \text{---} \mid f(a) \leq f(b),$$

luego también respeta la relación de orden, y por respetar las dos operaciones y la ordenación, decimos que  $f$  es un homomorfismo entre las magnitudes  $(X, A, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, B, +, \cdot, \leq)$ .

Como 3) y 4) se deducen de 2) cuando las magnitudes verifiquen 5), para que dos magnitudes escalares que satisfacen 5) sean proporcionales sólo tenemos que ver que las condiciones 1) y 2) son ciertas.

**Ejemplo:** En el caso anterior del peso del arroz y su precio, no es necesario comprobar que se cumplen las cuatro condiciones, con sólo ver que la aplicación es biyectiva y que la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes es suficiente.

**Observación:** Si no se verifica:  $\forall x \in A \quad x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$  —en particular no son magnitudes absolutas—, puede verificarse 1) y 2) y no verificarse 4), por ejemplo:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ x &\rightarrow -2x \end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva y es un homomorfismo ya que

$$\forall x, y \in A \quad f(x+y) = -2(x+y) = (-2x) + (-2y) = f(x) + f(y).$$

Pero no respeta el orden, pues

$$\forall x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow -2x \geq -2y \quad | \text{---} | \quad f(x) \geq f(y).$$

**Proposición:** Dadas las magnitudes escalares  $(X, A, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, B, +, \cdot, \leq)$  entre las cuales existe un isomorfismo

$$f: A \rightarrow B,$$

si ambas magnitudes son medibles, entonces  $3) \Rightarrow 2)$ .

**Demostración:** Sean  $a$  y  $b$  dos elementos cualesquiera de  $A$  y  $r$  y  $s$  sus imágenes respectivamente. Por ser la medida un isomorfismo entre  $(X, A, +, \cdot)$  y  $(X, Y, +, \cdot)$  con  $1 \in Y \subset \mathbb{R}$

$$m: A \rightarrow Y$$

$$a \rightarrow r$$

$$b \rightarrow s$$

$$u \rightarrow 1$$

$$m(a) = r = r \cdot 1 = r \cdot m(u) = m(r \cdot u),$$

y como la medida era una aplicación biyectiva, y por tanto inyectiva, será  $a = r \cdot u$ ; de forma análoga  $b = s \cdot u$ , con lo que tendremos que

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f[(r \cdot u) + (s \cdot u)] = f[(r+s) \cdot u] = (r+s) \cdot f(u) = \\ &= r \cdot f(u) + s \cdot f(u) = f(r \cdot u) + f(s \cdot u) = f(a) + f(b). \end{aligned}$$

**Observación:** Cuando las magnitudes escalares verifican la propiedad cancelativa y son medibles, como  $3) \Rightarrow 2)$  y en la proposición anterior probamos  $2) \Rightarrow 3)$ , resulta  $2) \Leftrightarrow 3)$ , y cuando se verifica:  $\forall x \in A \quad x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$  —en particular son magnitudes absolutas—, como teníamos que  $2) \Rightarrow 4)$ , para probar si dos magnitudes escalares absolutas y medibles son proporcionales, es suficiente con probar que se verifican 1) y 2) ó 1) y 3).

**Observación:** Un isomorfismo entre dos magnitudes no tiene por qué respetar el tipo ya que no tiene por qué respetar el orden.

### Ejemplos:

1. Si queremos medir mesas que tienen el mismo ancho, la longitud es proporcional a la superficie, ya que si la longitud la

multiplicamos por un número la superficie queda multiplicada por dicho número. Por tratarse de dos magnitudes escalares medibles, por la proposición que acabamos de demostrar, no es necesario probar las demás condiciones.

2. Si comparamos la masa de un determinado producto con el precio, vemos que son dos magnitudes proporcionales.

3. La longitud de una circunferencia es proporcional a la longitud del radio de la misma.

4. El peso de una sustancia es proporcional a su volumen.

**Ejercicio:** Razona que es cierto que son proporcionales las magnitudes de los ejemplos 2, 3 y 4.

**Ejercicio:** Encuentra algunas magnitudes que sean proporcionales.

Para resolver este ejercicio podemos utilizar las siguientes técnicas de Metodología Creativa: “el entorno”, “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “la sinapsis” y “la síntesis creativa”.

**Proposición:** Una proporcionalidad entre dos magnitudes escalares medibles  $(X, A, +, \cdot, \leq)$  y  $(X, B, +, \cdot, \leq)$  queda unívocamente determinada cuando se conoce la imagen de una cantidad cualquiera de la magnitud, distinta de la nula.

**Demostración:** Supongamos que existe una proporcionalidad  
 $f: A \rightarrow B$

de la que sólo conocemos que  $f(a)=b$  con  $a \neq 0$ . Sea  $\forall x \in A$  y sea  $u$  la unidad de medida en  $A$ , entonces  $a=r \cdot u$  y  $x=s \cdot u$ , luego  $u=\frac{a}{r}$  y por tanto

$x=s \cdot \frac{a}{r} = \frac{s}{r} \cdot a$ , con lo cual

$$f(x)=f\left[\frac{s}{r} \cdot a\right]=\frac{s}{r} \cdot f(a)=\frac{s}{r} \cdot b,$$

con lo que tenemos la imagen de un elemento cualquiera. Veamos que es una proporción; para ello vamos a probar que 3) es cierto:

$\forall n \in X$  como  $n \cdot x = n \cdot \left[\frac{s}{r} \cdot a\right] = \left[n \cdot \frac{s}{r}\right] \cdot a$ , luego será

$$f(n \cdot x) = \left[n \cdot \frac{s}{r}\right] \cdot f(a) = \left[n \cdot \frac{s}{r}\right] \cdot b = n \cdot \left[\frac{s}{r} \cdot b\right] = n \cdot f(x),$$

como queríamos demostrar.

**Ejemplo:** Si sabemos que una mesa de 1'5 m de ancho y 2 m de largo tiene un área de 3 m<sup>2</sup>, podemos decir que una mesa del mismo ancho y de 4 m de largo tiene una superficie de 6 m<sup>2</sup>. Además, como sabemos que en las mesas de 1'5 m de ancho  $f(2\text{ m})=3\text{ m}^2$ , podemos afirmar que

$$2 \cdot f(1\text{ m}) = 3\text{ m}^2 \Rightarrow f(1\text{ m}) = \frac{3}{2}\text{ m}^2.$$

Si quisiéramos calcular la superficie de una mesa con el mismo ancho y con  $x$  m de largo, tendríamos

$$f(x\text{ m}) = x \cdot f(1\text{ m}) = x \cdot \left(\frac{3}{2}\text{ m}^2\right) = \left(x \cdot \frac{3}{2}\right)\text{ m}^2,$$

con lo que podríamos afirmar cuál sería la superficie de cualquier mesa que tuviese 1'5 m de ancho y  $x$  m de largo.

**Ejercicio:** Si 3 Kg de azúcar valen 1'2 euros, ¿cuánto nos costarán 2 Kg de azúcar?

Para resolver este ejercicio podemos utilizar “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “el arte de relacionar” y “la sinapsis”.

### 2.11.2. Razón entre dos cantidades

Iniciamos este apartado planteándole a los alumnos las siguientes preguntas: si te dan una magnitud medible, ¿se te ocurre alguna forma de establecer una razón —o cociente— entre una cantidad y la unidad de medida? Toma una magnitud que sea medible, elige una unidad de medida, toma una cantidad de dicha magnitud y comprueba que se verifica tu afirmación. ¿Cuál será la razón entre dos cantidades de dicha magnitud? Compruébalo mediante un ejemplo. ¿Para qué crees que puede servir el estudio de las razones entre cantidades?

Utilizamos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la síntesis creativa”.

Vamos a tomar la magnitud tiempo y por unidad la hora. Sabemos que 1 día = 24 horas, luego podemos decir que  $24 = \frac{1\text{ día}}{1\text{ hora}}$ , esta es la razón entre las cantidades 1 día y 1 hora. Si tomamos como cantidad 1 semana = 7 días = 168 horas, tendremos:  $7 = \frac{1\text{ semana}}{1\text{ día}}$ , que será la razón entre 1 semana y 1 día.

**Definición:** Dada una magnitud  $M$  que sea medible, decimos que la medida de una cantidad  $c$ , con la unidad  $u$  es  $r$  cuando  $c = ru$ , siendo  $r$  un

número natural, entero, fraccionario o real, positivo o negativo. Al número  $r$  se le llama **razón entre las cantidades**  $c$  y  $u$ , y se escribe:

$$r = \frac{c}{u}.$$

Por tanto, dadas dos cantidades cualesquiera  $c$  y  $c'$  de una misma magnitud, la razón entre la primera y la segunda es el número que expresa la medida de  $c$  cuando se toma a  $c'$  por unidad:

$$c = yc', \text{ y se escribe } y = \frac{c}{c'},$$

luego podemos decir que la razón es el número que multiplicado por la segunda cantidad da la primera.

**Ejemplo:**  $\frac{34 \text{ Hl}}{1 \text{ l}} = 3400$ , ya que  $34 \text{ Hl} = 3400 \text{ l}$ .

Antes de seguir con este apartado, le planteamos a los alumnos: si nos dan dos magnitudes escalares medibles que sean proporcionales, ¿qué relación guardará la razón entre las medidas de dos cantidades de una magnitud, con la razón entre sus imágenes en la otra magnitud? Pon un ejemplo y comprueba que se verifica lo que afirmas.

Vamos a utilizar, además de las técnicas consideradas al comenzar este apartado, “el método Delfos”, “la sinapsis” y “la serendipity”.

**Proposición:** Si dos magnitudes escalares medibles son proporcionales, la razón entre dos cantidades de la primera magnitud es igual a la razón entre sus imágenes en la segunda magnitud.

**Demostración:** Si  $A$  y  $B$  son dos magnitudes escalares medibles, con medidas:

$$m: A \rightarrow X, \quad m': B \rightarrow X$$

y tales que  $A$  y  $B$  son proporcionales:

$$f: A \rightarrow B,$$

entonces la correspondencia de los múltiplos

$$f: a_1 = na_2 \rightarrow b_1 = nb_2,$$

se suele expresar de la forma:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

que es una proporción entre cantidades.

En el caso particular en que  $B$  sea el conjunto numérico  $X$  y  $f$  sea la aplicación  $m$  de las medidas de  $A$ , tendríamos:

$$m: a_1 = na_2 \rightarrow x_1 = nx_2,$$

o dicho de otra forma:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_1}{x_2},$

lo que expresa que la razón entre las cantidades de una misma magnitud es igual a la de los números que expresan sus medidas referidas a la misma unidad.

Si  $u$  es la cantidad que tomamos por unidad de medida en  $A$ , es decir  $m(u)=1$ , y  $f(u)=b$ , cuya medida  $m'(b)=r$ , y son  $a_1=h \cdot u$  y  $a_2=k \cdot u$  dos cantidades cualesquiera de la magnitud  $A$ , tenemos:

$$f(h \cdot u)=h \cdot f(u)=h \cdot b, \quad f(k \cdot u)=k \cdot f(u)=k \cdot b,$$

en este caso estamos tomando  $b$  como unidad de medida en el conjunto final.

$$m(h \cdot u)=h \cdot 1=h, \quad m'(h \cdot b)=h \cdot r$$

$$m(k \cdot u)=k \cdot 1=k, \quad m'(k \cdot b)=k \cdot r$$

De aquí deducimos que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m(h \cdot u)}{m(k \cdot u)} = \frac{h}{k} \\ \frac{m'(h \cdot b)}{m'(k \cdot b)} = \frac{h \cdot r}{k \cdot r} = \frac{h}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m(h \cdot u)}{m(k \cdot u)} = \frac{m'(h \cdot b)}{m'(k \cdot b)} = \frac{h}{k},$$

luego si tenemos dos magnitudes escalares medibles que sean proporcionales, la razón entre dos cantidades de la primera magnitud es igual a la razón de sus medidas referidas a la misma unidad y, a su vez, es igual a la razón de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud por el isomorfismo, que es igual a la razón entre sus medidas referidas a la misma unidad.

**Ejemplo:** Si tenemos la magnitud peso y tomamos como unidad de medida el Kg, podríamos tener

$$\frac{250 \text{ Kg}}{42 \text{ Kg}} = \frac{250}{42} = \frac{125}{21}$$

y como hemos dicho anteriormente que el peso es proporcional al precio, si 1 Kg de la sustancia anterior vale 23 euros, nos encontraríamos con:

$$\frac{250 \text{ Kg}}{42 \text{ Kg}} = \frac{5750 \text{ euros}}{966 \text{ euros}} = \frac{250 \cdot 23}{42 \cdot 23} = \frac{250}{42} = \frac{125}{21},$$

propiedad que antes solía ser de suma importancia en las aplicaciones que después veremos, aunque nosotros preferimos utilizar únicamente la definición de proporcionalidad por resultar más intuitiva.

En este ejemplo hemos utilizado “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “el arte de relacionar”.

Los problemas de repartos proporcionales se reducen a una proporcionalidad simple, como vemos en el ejemplo que viene a continuación.



**Ejemplo:** Queremos repartir 8320 euros en partes proporcionales a la edades de cuatro niños, que son: 3 años, 5 años, 7 años y 11 años. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?

Tenemos una proporcionalidad  $f$  entre la magnitud euros y la magnitud edad, y sabemos que

$f(3+5+7+11 \text{ años}) = 8320 \text{ euros} \Rightarrow f(26 \text{ años}) = 8320 \text{ euros}$ ,  
luego

$$26 \cdot f(1 \text{ año}) = 8320 \text{ euros} \Rightarrow f(1 \text{ año}) = \frac{8320}{26} \text{ euros} = 320 \text{ euros}.$$

Veamos cuánto le corresponde a cada uno de los niños:

$$f(3 \text{ años}) = 3 \cdot f(1 \text{ año}) = 3 \cdot 320 \text{ euros} = 960 \text{ euros}.$$

$$f(5 \text{ años}) = 5 \cdot f(1 \text{ año}) = 5 \cdot 320 \text{ euros} = 1600 \text{ euros}.$$

$$f(7 \text{ años}) = 7 \cdot f(1 \text{ año}) = 7 \cdot 320 \text{ euros} = 2240 \text{ euros}.$$

$$f(11 \text{ años}) = 11 \cdot f(1 \text{ año}) = 11 \cdot 320 \text{ euros} = 3520 \text{ euros}.$$

Además,  $(960+1600+2240+3520) \text{ euros} = 8320 \text{ euros}$ , que era lo que había para repartir.

**Ejercicio:** Resuelve el ejemplo anterior utilizando la razón entre cantidades.

**Ejercicio:** Indica alguna razón entre dos cantidades de alguna de las magnitudes que conoces.

**Ejercicio:** Invéntate un ejercicio que conlleve la necesidad de repartir una determinada cantidad en partes proporcionales a otras.

En estos tres ejercicios podemos utilizar la técnica “el arte de relacionar”, y además “el entorno” en los dos últimos.

### 2.11.3. Proporcionalidad compuesta

Podríamos empezar preguntándole al alumno-profesor: ¿conoces alguna proporcionalidad además de la que hemos estudiado antes? En caso afirmativo, indícala. ¿Has oído hablar de proporcionalidad compuesta alguna vez? Si es así, ¿cómo la definirías? Di algunas magnitudes entre las que puedas establecer una proporcionalidad compuesta.

Utilizaremos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

Seguro que el alumno-profesor ha resuelto problemas, por ejemplo, del tipo: si a grifos manando b litros por segundo llenan un deposito de c litros, ¿cuántos litros llenarán x grifos que manan y litros por segundo. Este tipo de problemas son los que se resuelven mediante proporcionalidad compuesta.

**Definición:** Dadas las magnitudes  $(X,A,+, \cdot)$ ,  $(X,B,+, \cdot)$  y  $(X,C,+, \cdot)$ , si existe una aplicación

$$\begin{aligned} F: A \times B &\rightarrow C \\ (a,b) &\rightarrow F(a,b) \end{aligned}$$

que verifique las condiciones:

1.  $\forall a, a' \in A \quad \forall b \in B \quad F(a+a', b) = F(a, b) + F(a', b),$
2.  $\forall a \in A \quad \forall b, b' \in B \quad F(a, b+b') = F(a, b) + F(a, b')$
3.  $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \forall x, x' \in X \quad F(x \cdot a, x' \cdot b) = (x \cdot x') \cdot F(a, b),$

se dice que F es una **aplicación bilineal u homomorfismo** de  $A \times B$  en C.

La condición 3) es equivalente a que se verifique

$$\begin{aligned} 3') \quad &\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \forall x \in X \quad F(x \cdot a, b) = x \cdot F(a, b) \text{ y} \\ &\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \forall x' \in X \quad F(a, x' \cdot b) = x' \cdot F(a, b). \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Prueba que 3) y 3') son equivalentes.

Podemos, pues, decir que para que una aplicación sea bilineal tiene que ser lineal en cada una de las magnitudes que componen el conjunto inicial, ya que fijada la cantidad b la aplicación  $F(-, b) = F_b$  es una proporcionalidad entre A y C y fijada la cantidad a la aplicación  $F(a, -) = F_a$  es una proporcionalidad entre B y C. Y decimos que las **magnitudes** A y B son **proporcionales** a la magnitud C.

Con  $F(-, b)$  indicamos que, en la aplicación F que establecíamos entre  $A \times B$  y C, en este caso el elemento que elegimos del conjunto A puede ser cualquiera, pero el elemento del conjunto B es siempre b. De forma análoga, en  $F(a, -)$  el elemento del conjunto A es siempre a, variando el elemento del conjunto B.

Por la proposición que probamos en proporcionalidad simple, se podría decir aquí que 1) y 2) son equivalentes a 3) y para probar la linealidad en cada una de las componentes del conjunto inicial de la aplicación F basta probar una cualquiera de ellas.

**Ejemplo:** Sea A la magnitud área, sea L la magnitud longitud y sea V la magnitud volumen. Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} F: A \times L &\rightarrow V \\ (a,b) &\rightarrow F(a,b) \end{aligned}$$

siendo  $F(a,b)$  el volumen de una figura cuyo representante puede ser la pirámide cuya base es un polígono de la clase  $a$  y cuya altura es un segmento de la clase  $b$ . Se puede ver sin dificultad que si tomamos una cantidad fija de  $L$ ,  $F$  es una aplicación lineal de  $A$  en  $V$ , por tanto  $A$  es proporcional a  $V$ , ya que si multiplicamos  $a$  por un número el volumen queda multiplicado por ese número. De forma análoga, si mantenemos una cantidad fija de  $A$ ,  $F$  es una aplicación lineal de  $L$  en  $V$ , luego  $F$  es una aplicación bilineal de  $A \times L$  en  $V$ .

**Ejemplo:** Sea  $P$  la magnitud número de personas, sea  $T$  la magnitud tiempo y sea  $M$  la magnitud número de mesas. Existe una proporcionalidad

$$\begin{aligned} F: P \times T &\rightarrow M \\ (a,b) &\rightarrow F(a,b) \end{aligned}$$

siendo  $F(a,b)$  el número de mesas que fabrican el número de personas  $a$  trabajando el tiempo  $b$ . Manteniendo el tiempo fijo, el número de personas es proporcional al número de mesas que hacen, y manteniendo el número de personas fijo, el tiempo que trabajen es proporcional al número de mesas que hagan. En consecuencia,  $F$  es una aplicación bilineal de  $P \times T$  en  $M$ .

**Ejemplo:** Un automóvil tarda 2 horas en recorrer una determinada distancia yendo a 85 Km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer la misma distancia si va a 10 Km/h?

Podemos observar que la magnitud  $H$ , número de horas que tarda, es proporcional a la magnitud  $D$ , distancia que recorre, y también la velocidad,  $V$ , es proporcional a  $D$ , luego existe una aplicación bilineal

$$\begin{aligned} F: H \times V &\rightarrow D \\ (a,b) &\rightarrow F(a,b). \end{aligned}$$

Como la distancia que recorre es la misma, podemos llamarla  $d$  Km, y tendríamos:

$$F(2 \text{ h}, 85 \text{ Km/h}) = d \text{ Km} \Rightarrow 2 \cdot 85 \cdot F(1 \text{ h}, 1 \text{ Km/h}) = d \text{ Km, luego}$$

$$F(1 \text{ h}, 1 \text{ Km/h}) = \frac{d}{170} \text{ Km.}$$

$$F(x \text{ h}, 10 \text{ Km/h}) = d \text{ Km} \Rightarrow x \cdot 10 \cdot F(1 \text{ h}, 1 \text{ Km/h}) = d \text{ Km, luego}$$

$$\frac{(x \cdot 10) \cdot d}{170} = d \Rightarrow \frac{x \cdot 10}{170} = 1 \Rightarrow x = \frac{170}{10} \text{ h} = 17 \text{ h.}$$

**Ejercicio:** Si sabemos que trabajando 3 personas hacen una mesa en 5 h, ¿cuántas mesas harían 6 personas si trabajasen 15h? ¿Cuánto tiempo tendrían que trabajar 9 personas para hacer una mesa?

**Ejercicio:** Encuentra tres magnitudes entre las cuales puedas establecer una aplicación bilineal.

En este ejercicio podemos utilizar “el entorno”, “la sinapsis” y “el arte de relacionar”.

**Definición:** Dadas las magnitudes  $(X, M_1, +, \bullet)$ ,  $(X, M_2, +, \bullet)$ ...  $(X, M_n, +, \bullet)$ ,  $(X, T, +, \bullet)$ ; una aplicación

$$F: M_1 \times M_2 \times \dots \times M_i \times \dots \times M_n \rightarrow T$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) \rightarrow F(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

que verifica las condiciones:

$$1. \forall a_1 \in M_1, \forall a_2 \in M_2, \dots, \forall a_i, a'_i \in M_i, \dots, \forall a_n \in M_n$$

$$F(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = F(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) + F(a_1, a_2, \dots, a'_i, \dots, a_n),$$

$$2. \forall a_1 \in M_1, \forall a_2 \in M_2, \dots, \forall a_i \in M_i, \dots, \forall a_n \in M_n \text{ y } \forall r \in X$$

$$F(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, r a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = r F(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n),$$

decimos que es una **aplicación multilineal**.

Para que una aplicación sea multilineal tiene que ser lineal en cada una de las magnitudes que constituyen el conjunto inicial y, de forma análoga a lo que vimos en aplicaciones lineales, podremos afirmar que **1** es equivalente a **2**, y, por tanto, para ver que una aplicación es multilineal basta probar cualquiera de ellas.

**Definición:** Una **proporcionalidad compuesta** es una aplicación multilineal

$$F: M_1 \times M_2 \times \dots \times M_i \times \dots \times M_n \rightarrow T$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) \rightarrow F(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

Todos los problemas de regla de tres, interés, repartos proporcionales, etc. se resuelven fácilmente mediante una proporcionalidad simple o compuesta.

Para trabajar los ejemplos que vienen a continuación podemos utilizar “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “la sinapsis”.

**Ejemplo:** Un obrero trabajando 8 horas diarias durante 3 días hace una tapia de 9 metros de largo. ¿Cuántas horas tendrá que trabajar al día para hacer una tapia de 12 metros de largo si quiere tardar 5 días?

Las magnitudes que tenemos aquí son: H las horas que trabaja al día, D los días que trabaja y M los metros de largo que tiene la tapia. Sabemos que son proporcionales H a M y D a M, luego existe una aplicación bilineal

$$F: H \times D \rightarrow M$$

$$(h, d) \rightarrow F(h, d)$$

y por tanto

$$(8 \text{ horas}, 3 \text{ días}) \rightarrow F(8 \text{ horas}, 3 \text{ días}) = 9 \text{ metros}$$

$$(x \text{ horas}, 5 \text{ días}) \rightarrow F(x \text{ horas}, 5 \text{ días}) = 12 \text{ metros}$$

pero  $F(8 \text{ horas}, 3 \text{ días}) = 8 \cdot 3 \cdot F(1 \text{ hora}, 1 \text{ día}) = 24 \cdot F(1 \text{ hora}, 1 \text{ día}) = 9$  metros, y por tanto

$$F(1 \text{ hora}, 1 \text{ día}) = \frac{9}{24} \text{ metros} = \frac{3}{8} \text{ metros} = 0'375 \text{ metros},$$

$F(x \text{ horas}, 5 \text{ días}) = x \cdot 5 \cdot F(1 \text{ hora}, 1 \text{ día}) = x \cdot 5 \cdot 0'375 \text{ metros} = 12$  metros,

luego  $x = 6'4 \text{ horas} = 6 \text{ horas y } 24 \text{ minutos}$ .

**Ejemplo:** Si 5 grifos que manan 35 litros por hora llenan un depósito en 12 horas, ¿en cuánto tiempo lo llenarán 2 grifos que manan 70 litros por hora?

Podemos pensar que tenemos las magnitudes: G número de grifos, M número de litros por hora que manan, H número de horas y D número de depósitos. Fácilmente se ve que G es proporcional a D, M es proporcional a D y H también es proporcional a D, luego tenemos una aplicación multilineal

$$F: G \times M \times H \rightarrow D$$

$$(g, m, h) \rightarrow F(g, m, h)$$

y por tanto

$$(5 \text{ grifos}, 35 \text{ l/h}, 12 \text{ horas}) \rightarrow F(5 \text{ grifos}, 35 \text{ l/h}, 12 \text{ horas}) = 2100 \cdot F(1 \text{ grifo}, 1 \text{ l/h}, 1 \text{ hora}) = 1 \text{ depósito}.$$

luego  $F(1 \text{ grifo}, 1 \text{ l/h}, 1 \text{ hora}) = \frac{1}{2100} \text{ depósito}.$

$(2 \text{ grifos}, 70 \text{ l/h}, x \text{ horas}) \rightarrow F(2 \text{ grifos}, 70 \text{ l/h}, x \text{ horas}) = 1$  depósito

y será

$$F(2 \text{ grifos}, 70 \text{ l/h}, x \text{ horas}) = 2 \cdot 70 \cdot x \cdot F(1 \text{ grifo}, 1 \text{ l/h}, 1 \text{ hora}) = 2 \cdot 70 \cdot x \cdot \frac{1}{2100} \text{ depósitos} = 1 \text{ depósito},$$

y por tanto  $x = 15 \text{ horas}$ .

Otros problemas que se resuelven también mediante una proporcionalidad compuesta son los de interés simple y los de descuento comercial.

**Ejemplo:** Halla el interés que producen 24500 euros prestados al 4 % durante 3 años.

Como el interés es el 4 %, sabemos que un capital de 100 euros durante 1 año produce 4 euros. Tenemos las magnitudes C capital, T tiempo e I interés. Tanto el capital como el tiempo son proporcionales al interés, luego tenemos una proporcionalidad compuesta

$$F: C \times T \rightarrow I$$

$$(c, t) \rightarrow F(c, t)$$

Sabemos que  $F(100 \text{ euros}, 1 \text{ año}) = 100 \cdot F(1 \text{ euro}, 1 \text{ año}) = 4 \text{ euros}$ , luego

$$F(1 \text{ euro}, 1 \text{ año}) = \frac{4}{100} \text{ euros} = \frac{1}{25} \text{ euros}$$

Además sabemos que

$$\begin{aligned} F(24500 \text{ euros}, 3 \text{ años}) &= x \text{ euros} \Rightarrow 24500 \cdot 3 \cdot F(1 \text{ euro}, 1 \text{ año}) = \\ &= 73500 \cdot \frac{1}{25} \text{ euros} = 2940 \text{ euros}, \end{aligned}$$

luego el interés que producen es 2940 euros.

**Ejercicio:** Invéntate algún problema de proporcionalidad simple y otro de proporcionalidad compuesta y resuélvelo de forma análoga a como lo hemos hecho nosotros.

Para resolver este ejercicio podemos utilizar las técnicas “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis” y “la serendipity”.

#### 2.11.4. Medida indirecta de magnitudes escalares

Podemos plantearle al alumno: ¿siempre has medido las magnitudes directamente? ¿Ha habido alguna vez en que para medir una cantidad de una magnitud hayas utilizado otra cantidad de otra magnitud distinta de la que tenías al principio? Si lo has hecho, razona el proceso seguido.

Vamos a utilizar las técnicas: “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “crear durmiendo”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

No siempre medimos una magnitud escalar eligiendo como unidad una cantidad de ella y viendo las veces que las distintas cantidades contienen a la cantidad elegida como unidad. Hay veces que tomamos otra magnitud que sea proporcional a ella y midiendo ésta, tenemos medida la primera. Por ejemplo, sabemos que el espacio recorrido es proporcional al tiempo empleado, luego si sabemos que, caminando a buen ritmo, en 15 minutos recorreremos 500 metros, sabiendo el tiempo que estamos andando podremos decir la distancia que hemos recorrido.

**Definición:** Dadas dos magnitudes escalares medibles A y B y un homomorfismo de semimódulos

$$f: A \rightarrow B,$$

si la imagen de la unidad,  $u_A$ , de medida de la magnitud A es la unidad,  $u_B$ , de medida de la magnitud B, se cumplirá también que:

$$\forall a_i \in A \quad a_i = x_i \cdot u_A \rightarrow b_i = f(a_i) = f(x_i \cdot u_A) = x_i \cdot f(u_A) = x_i \cdot u_B,$$

por ser un homomorfismo, ya que las imágenes de dos múltiplos serán múltiplos. Por tanto, las medidas de cantidades correspondientes, tomadas con unidades correspondientes, son iguales en ambas magnitudes.

Esta propiedad permite hallar las medidas de las cantidades de una magnitud mediante las de otra proporcional a ella.

Si la imagen de la unidad  $u_A$  de medida de la magnitud A no es la unidad  $u_B$  de medida de la magnitud B, sino que:

$$f(u_A) = u'_B = k \cdot u_B.$$

$$\forall a_i \in A \quad a_i = x_i \cdot u_A \rightarrow b_i = x_i \cdot u'_B = x_i \cdot (k \cdot u_B) = (x_i \cdot k) \cdot u_B,$$

en consecuencia, entre las medidas de dos cantidades correspondientes existe una razón constante, que es la razón entre la imagen de la unidad  $u_A$  de la magnitud A, con la unidad  $u_B$  de la magnitud B. A esta constante k se le llama **razón de proporcionalidad**.

Para trabajar los ejemplos y ejercicios que vienen a continuación vamos a utilizar “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “la sinapsis”.

## Ejemplos:

1º Medimos la amplitud de los ángulos centrales midiendo los arcos de la circunferencia correspondientes, y dicha medida la expresamos en sus unidades correspondientes, a las cuales se les da el mismo nombre de grados.

También se suelen medir los arcos, una vez rectificadas, tomando como unidad de medida el radio de su circunferencia, a la que se le llama **radián**, es decir, un radián es un arco general de circunferencia que, una vez rectificado, tiene por medida el radio de dicha circunferencia. Como tenemos una proporcionalidad entre arcos y ángulos de una circunferencia

$$f: Ar \rightarrow An$$

y sabemos que

$$f(2\pi \text{ radianes}) = 360^\circ \Rightarrow 2\pi \cdot [f(1 \text{ radián})] = 360^\circ, \text{ luego}$$

$$f(1 \text{ radián}) = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ,$$



con lo que sabemos que un radián mide aproximadamente  $57^\circ$ .

2° Para medir la amplitud de un ángulo diedro medimos sus rectilíneos correspondientes y los expresamos en sus unidades correspondientes, a las cuales se les da también el nombre de grados.

3° Siempre se mide el tiempo indirectamente, ya que podemos usar una vela en la que hemos hecho una marcas numeradas a igual distancia, con lo cual lo que se mide es el volumen de vela que se consume. Se puede medir con el reloj de arena o de agua y lo que medimos es la capacidad de arena o de agua que ha pasado por el estrechamiento. Si es con un reloj que tiene manecillas, lo que medimos es el ángulo que han girado las manecillas, etc.

4° Sea el isomorfismo entre las magnitudes tiempo, T, y espacio, E, del movimiento uniforme, con las unidades hora y kilómetro respectivamente, dado por:

$$f: T \rightarrow E$$

$$5 \text{ horas} \rightarrow 390 \text{ Km.}$$

Como la imagen de 1 hora sería

$$f(5 \text{ horas}) = 5f(1 \text{ hora}) = 390 \text{ Km} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1 \text{ hora}) = \frac{390}{5} \text{ Km} = 78 \text{ Km} = 78 \times 1 \text{ Km},$$

la razón de proporcionalidad será  $k = \frac{390}{5} = 78$ .

### Ejercicios:

1° ¿Se puede establecer un isomorfismo entre los pesos de un determinado producto y sus precios? Si sabemos que el precio de 5 Kg de azúcar es de 5'95 euros, ¿cuál es la razón de proporcionalidad entre ambas magnitudes?

2° Comprueba gráficamente si existe un isomorfismo entre las longitudes de los segmentos del plano y las superficies de los cuadrados que tienen por lados dichos segmentos.

3° Encuentra dos magnitudes proporcionales y calcula la razón de proporcionalidad.

4° Si sabemos que el volumen de una cierta sustancia es proporcional al peso, y además sabemos que un objeto de  $3 \text{ dm}^3$  pesa 18 Kg, ¿cuánto pesarán  $5 \text{ dm}^3$ ?

**Observaciones:** Hay autores como, por ejemplo, Roanes (1972: 430 y siguientes) que hablan de proporcionalidad directa e inversa; otros, como, por ejemplo, Prada (1990: 83 y siguientes) por el contrario sólo hablan de proporcionalidad y ésta es equivalente a la proporcionalidad directa de Roanes. Nosotros entendemos que no es necesario hablar de proporcionalidad inversa, ya que todo problema que Roanes, u otros como él, resuelven mediante proporcionalidad inversa se puede convertir en un problema de proporcionalidad directa eligiendo la magnitud a la que van a ser las demás directamente proporcionales, como puede verse en todos los ejemplos que indicamos. Es por lo que desde que iniciamos el apartado 2.10. sólo hemos hablado de proporcionalidad, sin distinguir entre directa e inversa.

## 2.12. Medida de magnitudes vectoriales

La medida de las magnitudes vectoriales no ha sido trabajada por ningún autor de los que hemos consultado, pensamos que pueda ser debido a que no es fácil comparar entre sí las cantidades de estas magnitudes pues, por ejemplo, ¿cómo podrían compararse dos vectores libres del plano que tengan distinta dirección? Nosotros nos vamos a atrever a medir estas magnitudes definiendo una distancia para convertirlas, antes, en espacios métricos.

### 2.12.1. Espacio métrico

Podríamos empezar preguntándole al alumno-profesor: ¿conoces alguna distancia? Si la conoces, indícala. ¿Has utilizado alguna vez una distancia? En caso afirmativo, ¿para qué? ¿Qué es una distancia?; ¿qué propiedades tiene que tener? ¿Sabrías decirnos lo que es un espacio métrico?

Vamos a utilizar las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas”, “la sinéctica” bajo su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “el método combinatorio” llamado “lista de atributos”, “el arte de relacionar”, “el entorno”, “la sinapsis”, “la serendipity” y “la síntesis creativa”.

Dar una distancia pensamos que puede ser otra forma importante de medir una magnitud, es por lo que vamos a estudiar los espacios métricos. Hablamos, por ejemplo, de distancia entre dos puntos y el resultado es un número real, por esto vamos a dar la definición como sigue.

**Definición:** Sea  $X$  un conjunto no vacío —en nuestro caso  $X$  es una magnitud— a cuyos elementos se les suele llamar puntos —no hay ningún problema si les seguimos llamando cantidades. Definimos la **distancia** en  $X$  como una aplicación

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) \rightarrow d(a,b)=r$$

que verifica las siguientes propiedades:

- i)  $\forall a,b \in X \quad d(a,b) \geq 0$ .
- ii)  $\forall a,b \in X \quad d(a,b)=0 \iff a=b$ .
- iii)  $\forall a,b \in X \quad d(a,b)=d(b,a)$ .
- iv)  $\forall a,b,c \in X \quad d(a,b)+d(b,c) \geq d(a,c)$ .

Es decir, la distancia es estrictamente positiva, sólo vale 0 cuando los dos elementos coinciden, es simétrica y verifica la desigualdad triangular (que dice que la medida de un lado de un triángulo es menor que la suma de las medidas de los otros dos).

Esta definición se puede encontrar, por ejemplo, en Berberian (1977: 38).

Podemos encontrar otra definición de distancia, como la que da Castillo (1980: 2), en donde se reducen a dos las condiciones, que son:

- 1)  $\forall a,b \in X \quad d(a,b)=0 \iff a=b$ .
- 2)  $\forall a,b,c \in X \quad d(a,b)+d(a,c) \geq d(b,c)$ .

Es decir, sólo vale 0 cuando los dos elementos coinciden y la suma de las distancias de un punto a otros dos es mayor o igual que la distancia entre estos otros dos puntos.

Nos faltaría probar que estas dos definiciones son equivalentes, que es lo que hacemos en la proposición que viene a continuación. Vamos a utilizar para ello “el método Delfos”, “el arte de relacionar”, “la sinapsis” y “la solución de problemas”.

**Proposición:** Las dos definiciones que hemos dado de distancia son equivalentes.

**Demostración:** Supongamos que se verifican las condiciones i), ii), iii) y iv) y veamos que se verifican 1) y 2). La primera condición ya la tenemos, sólo queda probar la segunda:

$$d(a,b)+d(a,c)=d(b,a)+d(a,c) \geq d(b,c)$$

por iii) y iv) respectivamente.

Supongamos ahora que se verifican las condiciones 1) y 2) y veamos que se verifican i), ii), iii) y iv).

- i)  $d(a,b) \geq 0$ .

Sabemos que  $d(a,b)+d(a,b)\geq d(b,b)=0$  por 2) y 1) respectivamente, luego  $2d(a,b)\geq 0$ , y por tanto  $d(a,b)\geq 0$ .

ii) Es cierta por 1).

iii)  $d(a,b)=d(b,a)$ .

Como  $d(a,b)+d(a,a)\geq d(b,a)$  por 2); luego por 1) será  $d(a,b)\geq d(b,a)$ .

De forma análoga tenemos que  $d(b,a)+d(b,b)\geq d(a,b)$ , luego  $d(b,a)\geq d(a,b)$ , y por la antisimetría de la relación de orden en  $\mathbb{R}$ , resulta que  $d(a,b)=d(b,a)$ .

iv)  $d(a,b)+d(b,c)\geq d(a,c)$ .

Es cierto ya que  $d(a,b)+d(b,c)=d(b,a)+d(b,c)\geq d(a,c)$  por 2).

**Definición:** Si  $d$  es una distancia definida sobre un conjunto no vacío  $X$ , al par  $(X,d)$  se le llama **espacio métrico**.

En los ejemplos y ejercicios que vienen a continuación vamos a utilizar “el arte de relacionar”, “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar” y “la sinapsis”.

### Ejemplos:

1° Sea  $X$  un conjunto no vacío, se puede definir la distancia:

$$\forall a,b \in X \quad d(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

Veamos que verifica las dos condiciones para ser una distancia:

1)  $\forall a,b \in X \quad d(a,b)=0 \iff a=b$  por definición.

2)  $\forall a,b,c \in X \quad d(a,b)+d(a,c)\geq d(b,c)$ ,

pues si  $a=b=c$ ,  $d(a,b)+d(a,c)=0\geq d(b,c)=0$ ,

si  $a=b\neq c$ ,  $d(a,b)+d(a,c)=0+1\geq d(b,c)=1$ ,

si  $a=c\neq b$ ,  $d(a,b)+d(a,c)=1+0\geq d(b,c)=1$ ,

si  $a\neq b=c$ ,  $d(a,b)+d(a,c)=1+1\geq d(b,c)=0$ ,

si  $a\neq b\neq c\neq a$ ,  $d(a,b)+d(a,c)=1+1\geq d(b,c)=1$ .

Al conjunto  $X$  con esta distancia se le llama **espacio métrico discreto**.

2° En el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales se puede definir la distancia:

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad d(a,b)=|a-b|$$

siendo  $|a-b|$  el valor absoluto de  $a$  menos  $b$ .

Es realmente una distancia pues verifica:

$$1) \forall a, b \in \mathbb{R} \quad d(a, b) = |a - b| = 0 \iff a = b,$$

$$2) \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c),$$

es decir, tendríamos que probar que  $|a - b| + |a - c| \geq |b - c|$ . Si llamamos  $x = b - a$  e  $y = a - c$ , como  $|a - b| = |b - a| = |x|$ , nos quedaría que  $|x| + |y| \geq |x + y|$ . Además sabemos que  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  y  $|x| = -x$  si  $x < 0$ , con lo que tenemos:

$$|x| \geq x \text{ y } |y| \geq y, \text{ luego } |x| + |y| \geq x + y,$$

$$|x| \geq -x \text{ y } |y| \geq -y, \text{ luego } |x| + |y| \geq -(x + y),$$

y de esto se deduce que  $|x| + |y| \geq |x + y|$ . A este espacio métrico se le llama **espacio métrico de los números reales con la distancia del módulo**. También se suele llamar **espacio métrico usual** debido a la analogía que existe entre esta distancia y las medidas usuales de las distancias entre dos puntos con cantidades de la magnitud longitud.

3° En el conjunto  $\mathbb{C}$  de los números complejos se puede definir la distancia:

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad a = a_1 + ia_2; b = b_1 + ib_2; d(a, b) = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{1/2}.$$

Se puede probar que es una distancia. Al conjunto  $\mathbb{C}$  con esta distancia se le llama **espacio métrico de los complejos con la distancia del módulo**. Esta distancia es la misma que se utiliza habitualmente para calcular la distancia entre dos puntos del plano.

**Ejercicio:** Comprueba que realmente es una distancia. Calcula la distancia entre los números complejos  $5 - 2i$  y  $-3 + 6i$ .

4° En el conjunto  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$  la aplicación

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$d[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$$

es una distancia.  $\mathbb{R}^n$  con esta distancia se le llama **espacio métrico real n-dimensional**. En el conjunto  $\mathbb{R}^2$  esta distancia “es lo mismo” que  $\mathbb{C}$  con la que hemos dado anteriormente.

De forma análoga se puede definir la distancia en  $\mathbb{Z}^n$ .

**Ejercicio:** En  $\mathbb{Z}^2$ , ¿cómo quedaría definida esta distancia? Prueba que cumple las condiciones para que sea una distancia. Calcula la distancia entre los puntos  $(5, -2)$  y  $(-3, 6)$ .

5° En el conjunto  $\mathbb{R}^n$  se puede definir la distancia:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$d[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = \max(|x_i - y_i| \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

**Ejercicio:** En  $\mathbb{Z}^2$ , ¿cómo quedaría definida esta distancia? Prueba que cumple las condiciones para que lo sea. Calcula la distancia entre los

puntos (5,-2) y (-3,6). ¿Es la misma que la calculada anteriormente con la otra distancia?

6° Otra distancia que se puede definir en  $\mathbb{R}^n$  sería:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$d[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$$

**Ejercicio:** En  $\mathbb{Z}^2$ , ¿cómo quedaría definida esta distancia? Prueba que cumple las condiciones para que sea realmente una distancia. Calcula la distancia entre los puntos (5,-2) y (-3,6). ¿Coincide con alguna de las anteriores?

7° En  $\mathbb{R}^n$  se pueden también definir otras distancias de la forma:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$d[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = [(x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p + \dots + (x_n - y_n)^p]^{1/p}$$

siendo  $p$  un número natural  $p > 1$ . La demostración de que es realmente una distancia puede verse en Castillo (1980: 10).

**Ejercicio:** Pon un ejemplo de distancia en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , demuestra que es realmente una distancia. Elige dos puntos y calcula la distancia que hay entre ellos.

Para resolver este ejercicio podemos utilizar las técnicas “el arte de relacionar”, “el entorno” y “la sinapsis”.

**Ejercicio:** Haz un esquema para organizar todas las distancias que hemos considerado.

Para resolver este ejercicio podría utilizarse la técnica “ideagramación” y podría realizarse un “diagrama estructural de síntesis”.

## 2.12.2. Medida de magnitudes vectoriales

Como siempre, empezamos preguntándole al alumno-profesor: ya que tienes definido el concepto de distancia y de espacio métrico, ¿para qué servirían las distancias que tenemos? ¿Se te ocurre alguna forma de poder usarlas para definir una medida en una magnitud vectorial? En caso afirmativo, ¿cómo lo harías? En el futuro, ¿se podría encontrar alguna forma mejor para medir las magnitudes vectoriales?

Utilizamos las técnicas de Metodología Creativa: “el arte de preguntar”, “el torbellino de ideas” o “el método Delfos”, “la sinéctica” en sus dos versiones “convertir lo extraño en familiar” y “hacer lo

familiar extraño”, “el método combinatorio” llamado “análisis funcional”, “el arte de relacionar”, “la solución de problemas”, “la sinapsis”, “la serendipity”, “crear durmiendo”, “la técnica de escenarios” y “la síntesis creativa”.

Si lo que queremos es establecer lo que entendemos por medida de una cantidad,  $c$ , de una magnitud vectorial, utilizando el concepto de distancia que hemos dado, podemos hacerlo fijando una cantidad de la magnitud y considerando la distancia de  $c$  a la cantidad fijada como la medida de  $c$ . Parece lógico que la cantidad que debemos fijar debe ser el elemento neutro de la magnitud, por esto damos la definición como sigue.

**Definición:** Sea  $M$  una magnitud,  $d$  una distancia y  $(M,d)$  un espacio métrico; a partir de esta distancia podemos definir una aplicación

$$m_d: M \rightarrow \mathbb{R} \\ c \rightarrow m_d(c) = d(c, 0_M),$$

a esta aplicación  $m_d$  le vamos a llamar **medida de la magnitud  $M$  con la distancia  $d$** . Y a la imagen de un elemento  $c \in M$ ,  $m_d(c)$ , le vamos a llamar **medida de la cantidad  $c$  con la distancia  $d$** .

**Observación:** Dada una magnitud vectorial  $M$ , la medida de  $M$  dependerá de la distancia que tengamos establecida.

### Ejemplos:

1° Sabíamos que  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$  es una magnitud vectorial; podemos definir en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  la distancia:

$$d: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R} \\ [(a_1, b_1), (a_2, b_2)] \rightarrow d[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = [(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2]^{1/2}.$$

Tenemos que  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d)$  es un espacio métrico. Esta distancia dará lugar a la medida:

$$m_d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) \rightarrow m_d(a, b) = d[(a, b), (0, 0)].$$

Si por ejemplo tomamos el par  $(-3, 4)$ , podemos afirmar que

$$m_d(-3, 4) = [(-3-0)^2 + (4-0)^2]^{1/2} = (9+16)^{1/2} = 25^{1/2} = 5.$$

Vamos a ver lo que mide  $(5, -2)$ ;  $(-3, 4) + (5, -2) = (2, 2)$  y  $2 \cdot (-3, 4) = (-6, 8)$

$$m_d(5, -2) = [(5-0)^2 + (-2-0)^2]^{1/2} = (25+4)^{1/2} = 29^{1/2}.$$

$$m_d(2, 2) = [(2-0)^2 + (2-0)^2]^{1/2} = (4+4)^{1/2} = 8^{1/2} \neq 29^{1/2} + 5.$$

Observamos que no se cumple que la medida de la suma sea la suma de las medidas. De forma análoga calcularíamos la medida de  $(-6, 8)$ . ¿Es la medida del producto de un número natural por un elemento de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , el número por la medida del elemento de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ?



En este ejercicio podemos utilizar las técnicas: “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, “el arte de relacionar” y “la sinapsis”.

**Ejercicio:** En  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  define otra distancia y obtén la medida correspondiente. Con la medida establecida calcula la medida de la cantidad  $(-3,4)$ . ¿Es igual que la anterior? ¿En este caso la medida de la suma de dos elementos es la suma de las medidas de dichos elementos? ¿Y la medida de un escalar por una cantidad es igual al escalar por la medida de la cantidad?

Utilizamos las técnicas “el arte de preguntar”, “el entorno”, “el arte de relacionar” y “la sinapsis”.

2° Sea la magnitud vectorial  $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ , siendo  $\mathbb{C}$  el conjunto de los números complejos. En  $\mathbb{C}$  consideramos la distancia:

$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad a = a_1 + ia_2; \quad b = b_1 + ib_2; \quad d(a, b) = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{1/2}$   
que da lugar a la medida:

$$\forall a \in \mathbb{C} \quad m(a) = d(a, 0) = [(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2]^{1/2} = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}.$$

$$\text{Para } a = 2 + 3i \text{ será } m(a) = (2^2 + 3^2)^{1/2} = (4 + 9)^{1/2} = 25^{1/2} = 5.$$

**Observación:** En el conjunto  $V$  de los vectores libres del plano podemos asignar a cada vector libre un representante con origen en el origen de coordenadas. De esta forma obtenemos una aplicación biyectiva entre los vectores libres del plano y el conjunto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , siendo  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales, ya que a cada vector de  $V$  le podemos asignar un par de números reales que serían las coordenadas del extremo del vector con origen en el punto  $(0,0)$ . Si consideramos  $V$  como una magnitud vectorial, esta aplicación será un isomorfismo de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, entre  $V$  y  $(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ . En consecuencia, para  $V$  nos serviría cualquiera de las medidas consideradas en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Esto justifica, además, la razón de por qué no se abordó al principio la medida de una magnitud cualquiera, sino solamente la de las magnitudes escalares.

**Ejercicio:** El razonamiento que hemos hecho para  $V$  y  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ¿sería válido para  $V$  y  $\mathbb{C}$ ? ¿Y para  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ ?

## 2.13. Ejercicios

1° Si medimos la longitud tomando por unidad el dm, ¿cuánto medirá la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 1 dm y 2 dm?

2° Prueba que la superficie lateral de los cilindros de revolución de radio fijo,  $r$ , es una magnitud. ¿De qué tipo?

3° ¿Se puede establecer una proporcionalidad entre la amplitud de los ángulos centrales de una circunferencia y la longitud de las cuerdas subtendidas por sus arcos? Razona la respuesta.

4° Expresa gráficamente las propiedades de los vectores del plano con la adición y con la ley de composición externa sobre  $\mathbb{Z}$ .

5° Si 12 albañiles construyen un muro en 5 días, ¿en cuántos días lo construirán 3 albañiles? ¿Cuántos albañiles serán necesarios para construirlo en 3 días?

6° Si 5 albañiles levantan una valla de 36 m de longitud, 12 dm de altura y 9 cm de espesor en 20 días, ¿cuántos días tardarán 25 albañiles en levantar una valla de 12 m de longitud, 6 dm de altura y 18 cm de espesor?

7° Si tenemos un rectángulo de 3 cm de largo por 6 cm de ancho y queremos hacer otro rectángulo con la misma área pero que tenga 9 cm de largo, ¿cuánto tendría que tener de ancho?

8° Queremos construir un ortoedro de  $5 \text{ cm}^2$  de área de la base y que tenga el mismo volumen que otro cuya base tiene un área de  $9 \text{ cm}^2$  y cuya altura es de 4 cm. ¿Cuánto tendría que medir la altura?

9° En el juego de la Lotería Nacional de Navidad, cuando la peseta era la moneda oficial en España, con un décimo, que valía 3.000 pts., nos tocaban, con el primer premio, 301.000.000 de pesetas. ¿Es equivalente a que, con el euro como moneda oficial, valga el décimo 20 euros y nos puedan tocar, con el primer premio, 200.000 euros? (Sabemos que 1 euro=166'386 pts.)

10° En el plano cartesiano de coordenadas enteras,  $V$ , representa dos vectores,  $a$  y  $b$ , cuyo origen sea el punto  $(0,0)$  y cuyos extremos sean los puntos  $A(1,4)$  y  $B(-3,5)$  respectivamente. Construye el vector  $c=-2a+4b$  y di cuáles son su origen y su extremo. Define una distancia en  $V$  y calcula la distancia entre los vectores  $OA$  y  $OB$ . ¿Hay un isomorfismo entre  $V$  y  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ?



## **II. MARCO TEÓRICO-PRÁCTICO: APLICACIONES PRÁCTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL**



## *Capítulo 3*

# Actividades creativas sobre “las Magnitudes y su Medida” para Educación Infantil

### 3.1. Introducción

Después del estudio teórico que hemos realizado en el Capítulo I sobre las distintas técnicas de Metodología Creativa y en el Capítulo II sobre el tema “las Magnitudes y su Medida”, nos consideramos preparados para poder ver en este tercer Capítulo la génesis del concepto de medida, lo que nos permitirá poder plantear algunas actividades que se puedan llevar a cabo en cada uno de los niveles madurativos del niño de Educación Infantil.

Utilizaremos los conocimientos adquiridos con objeto de presentar algunas actividades sobre “las Magnitudes y su Medida” con las diferentes técnicas de Metodología Creativa en Educación Infantil. Pensamos que la mejor forma de entender cada una de las técnicas y su aplicación en el tema que nos ocupa, es verla utilizada para proponer una o varias actividades para los niños de estas edades.

Aunque en el Capítulo I ya conocíamos las técnicas de Metodología Creativa, al no tener los conocimientos necesarios del tema que nos ocupa “las Magnitudes y su Medida”, ni conocer el nivel madurativo del niño de Educación Infantil, no nos fue posible plantear allí las actividades que ahora planteamos.

Es tremendamente importante proponer actividades para niños de cero a seis años, ya que el niño en este periodo no ha adquirido aún conocimientos que deba erradicar, por no ser del todo correctos. Si bien, aunque el periodo de cero a tres años es interesante y en nuestro trabajo nos vamos a permitir hacer referencia a algunas actividades que

el niño observa y, en algunos casos, realiza a estas edades, las actividades que plantearemos fundamentalmente serán preferentemente para niños de 3 a 6 años, ya que podremos profundizar un poco más en algunos conocimientos sobre “las Magnitudes y su Medida” debido al desarrollo cognitivo que suele alcanzar el niño al final de la Educación Infantil.

De las actividades y ejercicios que propongamos, unos irán dirigidos al alumno de Educación Infantil y otros al alumno-profesor.

Al final de este Capítulo, para ver que las técnicas no tienen que ser excluyentes, sino que se pueden utilizar varias para trabajar una misma actividad, plantearemos algunas actividades a los niños de Educación Infantil relacionadas con “las Magnitudes y su Medida”, y las trabajaremos con todas y cada una de las técnicas que hemos comentado. Con ello se observará mucho mejor todo “el partido” que se le puede sacar a cada una de las actividades, pues parece increíble lo que da de sí una actividad cuando se trabaja de este modo.

## 3.2. Génesis del concepto de medida

Antes de empezar con la Génesis del Concepto de Medida nos vamos a plantear desde qué momento el niño tiene algún contacto, por leve que sea, con alguna magnitud y su medida.

Si pensamos detenidamente observamos que, antes de nacer el niño, ya se están tomando medidas relacionadas con él pues la futura mamá, en muchos de los preparativos que necesita para la llegada de su hijo, está haciendo referencia a la medida en múltiples situaciones.

Por ejemplo, al hacerle las ecografías a la madre, el ginecólogo va teniendo en cuenta el tamaño del feto; observa el aumento de volumen que va experimentando ella durante el embarazo; todos los familiares y amigos van contando el tiempo que la mamá lleva de embarazo y el que le queda para el parto; la mamá observa su peso para ver si ha cogido el que le correspondía, pues el médico le aconseja que debe controlarlo; o cuando va preparando la canastilla, si es ella la que elabora la ropita de su futuro bebé, va tomando medidas aproximadas ya que aún no sabe exactamente cómo será su hijo. En caso de que compre la ropa del niño, va viendo, además, lo que le cuesta, etc.

Después, cuando el niño nace se siguen tomando medidas. Por ejemplo: se apunta el día de su nacimiento, se observa cuánto pesa, se mide su altura, su longitud cefálica, su temperatura, etc. Todos estos



datos son de gran importancia para saber si el niño tiene que estar más cuidado, si tiene que estar en la incubadora o por el contrario el niño no requiere atenciones especiales.

Hay bastantes ocasiones en que las personas que están cuidando al niño —están en el entorno del niño— o bien las que se acercan momentáneamente a él, comentan entre sí o le dicen al niño algunas cosas relacionadas con su medida o con la medida de los objetos que le circundan. Es corriente que los papás comenten cuál ha sido su peso, su longitud en el momento del nacimiento, cuántos gramos ha ido ganando después de nacer, etc.

Aunque todas estas observaciones parece que no tienen importancia, nos detenemos en ellas porque pensamos que ningún conocimiento surge del vacío, sino que unos conceptos se apoyan en otros y éstos en otros y así sucesivamente. Todos los comentarios o todas las actividades que se realicen en el entorno del niño sobre una materia, en concreto, en nuestro caso, sobre “las Magnitudes y su Medida”, van a colaborar a que vaya adquiriendo unos preconceptos que serán la base de futuros conocimientos sobre dicha materia, aunque el niño todavía no sea capaz de expresarse ni entienda de qué están hablando.

Pensamos que es como el que antes de sembrar una planta comienza por arar la tierra, abonarla y regarla, para, más tarde, poner en ella la semilla. En este caso estamos haciendo las cuatro cosas a la vez: cuando vamos haciendo comentarios análogos a los mencionados anteriormente, unos conscientes de que con ellos vamos a preparar al niño para que después se vaya formando en “las Magnitudes y su Medida” y otros inconscientes. Con todo ello podemos estar colaborando a que el niño vaya conociendo su entorno, conocimiento sumamente importante si después queremos que aprenda otros conceptos mucho más complejos.

Si fuésemos siempre conscientes de cómo podemos colaborar con el aprendizaje del niño a cualquier edad, pero fundamentalmente en las primeras edades, no pararíamos de hacer comentarios y constantemente nos estaríamos preguntando, como quizá hagamos cuando se trata de un adulto, “¿de qué puedo hablar con esta persona?”, o “cuando vea a esta persona tengo que comentarle estas cosas”, sin dejarlo todo a la improvisación.

Para ver una descripción general de la evolución que va experimentando el niño normal según las etapas del desarrollo, se puede consultar Gesell y Amatruda (1981: 56 a 135). Nosotros nos ocuparemos solamente del desarrollo de la comprensión del proceso de

medida en el niño. Estos autores estudian los desarrollos normal y anormal del niño en los primeros meses de vida y señalan que hay momentos en que el niño sigue los objetos con la vista, los coge, los retiene, etc. Estas observaciones es necesario tenerlas en cuenta en el tema “las Magnitudes y su Medida” ya que influyen en su futura percepción de las distintas dimensiones de dichos objetos: longitud, superficie, volumen, peso, tiempo, etc.

Piaget considera que el proceso de desarrollo de la noción de medida en el niño se basa en la conservación y la transitividad. Casi todas las investigaciones realizadas sobre el desarrollo de las nociones de medida en el niño fueron realizadas por Piaget y fueron sobre las medidas de longitud, principalmente (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960).

Vamos a ver en qué consisten la conservación, la transitividad y la unidad de medida, que son los tres aspectos fundamentales en el desarrollo de la comprensión del concepto de medida por el niño.

### 3.2.1. Conservación y transitividad

Desde el momento en que nace, el niño comienza a organizar su mundo atendiendo a lo que permanece invariante en éste. El uso de los cinco sentidos le facilita el conocimiento de las personas y objetos de su entorno. El desarrollo de las nociones espaciales y el proceso de medida en el niño se basa en la captación de lo que permanece invariante a pesar del tiempo y del espacio, es decir, de lo que se **conserva**.

Por ejemplo, al tomar un trozo de plastilina, el niño considera que pesa más cuando hacemos con ella una “salchicha”, que si hacemos una bola, ya que es incapaz de realizar el camino inverso —que lleva de ser una bola a ser una salchicha o al revés—, pues para ello necesitaría la reversibilidad operatoria.

Supongamos que un niño va y viene andando a la escuela. Es frecuente que el niño considere algún recorrido más largo que el otro. Si el niño hace el mismo recorrido cargado con un objeto pesado, se le hace aún más largo. Si va solo se le hace más largo que si va acompañado, etc.

Si tenemos un paquete de arroz, el niño piensa que pesa menos cuando está en el paquete que si se vierte todo él en un bote. El niño considera que tiene menos caramelos si están en el paquete que si se colocan todos ellos encima de la mesa, etc.

También se basa el desarrollo de las nociones espaciales en que al medir un objeto y llevar esta medida sobre otro, la medida de nuestro objeto es igual a la del modelo elegido para llevarlo al otro, y si a su vez la medida del modelo es igual a la de un nuevo objeto, la del primer objeto es igual a la del nuevo, es decir, en la **transitividad**.

Por ejemplo, si el lápiz tiene la misma longitud que el bolígrafo, y el bolígrafo tiene la misma longitud que mi palmo, entonces el lápiz tiene la misma longitud que mi palmo.

No podrá producirse una comprensión profunda de los aspectos más básicos de la Geometría Euclídea ni de la medida hasta que el niño no llegue a alcanzar las nociones de transitividad y de aspectos invariables. Todo proceso de medida se basa en la noción de transitividad.

A pesar de todo lo dicho pensamos que el concepto de transitividad está bastante idealizado ya que si, por ejemplo, queremos cortar cinco o más trozos de papel de la misma longitud para hacer unas mediciones y lo hacemos comparando cada trozo con el último que cortamos, al final, si comparamos el último con el primero, habrá una diferencia nada despreciable. Es por lo que se elige un trozo como modelo y los demás se cortan comparándolos con él.

### 3.2.2. Unidad de medida

Basándonos en las definiciones matemáticas que dimos en el Capítulo II sobre medida de una magnitud y sobre unidad de medida, tenemos que afirmar que toda medida hace referencia a una unidad, sin ella no tiene sentido el concepto de medida.

La acción de medir una magnitud supone la repetición de una unidad de medida sobre cada una de las cantidades de la magnitud que se están considerando, ya sea longitud, área, masa, tiempo, etc., y esta repetición, en algunos casos como en los de longitud, superficie, etc., ha de ser tal que el objeto que hay que medir termine estando cubierto por la unidad de modo que no haya huecos ni superposiciones.

Además, como se ha visto, se pueden utilizar diferentes unidades para medir una misma magnitud, aunque es lógico pensar que si queremos medir una cantidad de dicha magnitud, cuanto menor sea la unidad, más veces se tendrá que repetir dicha unidad hasta llegar a recubrir la cantidad objeto de la medición. El estudio teórico de todo esto lo hicimos en el Capítulo II cuando vimos el cambio de unidad de medida, y teníamos la proposición que decía: Si en una magnitud escalar

$(X, M, +, \cdot, \leq)$  tenemos dos cantidades no nulas  $u$  y  $v$ , con  $v = n \cdot u$ , entonces se verifica que

$$\forall a \in M \quad m_u(a) = n \cdot m_v(a).$$

Por tanto, si  $n > 1$ , será  $v > u$  y, como consecuencia de esta proposición, tenemos que  $m_u(a) > m_v(a)$ .

Por ejemplo, el número de tacitas empleadas para medir la capacidad de un recipiente (aquí usamos como unidad de medida la capacidad de una tacita), no será el mismo que el número de botellas de litro usadas para medir esa misma capacidad (aquí empleamos como unidad de medida la capacidad de una botella de litro). Sí coincidiría con el número de recipientes de capacidad 1 litro, cualquiera que sea su forma.

Para que tenga sentido la medida para los niños y puedan comunicarse entre sí el resultado de la medida efectuada, es necesario que lleguen a trabajar con las unidades de medida estándar. No sólo tienen que conocer las unidades de medida correspondientes a cada sistema de medidas, sino que tienen que llegar a conocer la relación entre las unidades de distinto orden pertenecientes a un sistema determinado de medida —por ejemplo, 1 metro equivale a 100 centímetros—, por supuesto no en Educación Infantil.

Si para medir una cantidad tenemos que repetir una unidad y la medida de dicha cantidad era el número de veces que la cantidad objeto de la medición contenía a la unidad elegida, tenemos que usar el concepto de número, por tanto es imposible conseguir que el niño opere con una medida si no tiene adquiridos —o no los va adquiriendo a la vez— los conceptos numéricos relacionados con ella.

El Informe Cockcroft (1985) nos dice, respecto de los conocimientos que tienen que adquirir los niños sobre medidas, lo siguiente: *El sentido de la medida implica mucho más que una simple habilidad para calcular, estimar o utilizar los instrumentos de medida, aunque tal habilidad forma parte de él. Implica un conocimiento de la naturaleza y utilidad de la medida, de los diferentes métodos de medida y de las situaciones en que se usa cada uno; también capacita para interpretar medidas expresadas de diferentes formas.*

Es muy importante saber distinguir entre magnitudes escalares discretas y magnitudes continuas —conceptos ya estudiados en el Capítulo II— ya que si la magnitud es discreta y tomamos como unidad el elemento generador de la magnitud, sus medidas serán más fáciles de realizar, pues toda cantidad será múltiplo entero o natural de ella, que si se trata de una magnitud continua, pues la cantidad puede ser múltiplo racional o real de la unidad que elijamos.

Por ejemplo, si queremos saber cuántos caramelos hay en una caja, emplearemos los números naturales para decir el resultado, al ser ésta una magnitud discreta, es decir, cada caramelo que hay que contar es una unidad distinta y separable.

Si queremos tomar la mitad de una tarta, cortando a ojo tendremos dificultad para tener la mitad, casi nunca será correcta la partición, y si queremos tener justamente la mitad tendremos que usar la balanza. Si pesamos con una balanza comercial, como no vamos a tener eventualmente un número entero de kilos, necesitaremos usar los gramos (si lo hacemos con una balanza de dos platillos, tenemos que lograr que ésta se equilibre colocando cada mitad en un platillo) y a pesar de ello sólo podremos tomar aproximadamente la mitad. En este caso tenemos una magnitud continua.

Como consecuencia de lo que ya hemos visto en el Capítulo II, nos atrevemos a afirmar que siempre que al medir podamos dividir la medida indefinidamente tomando unidades cada vez más pequeñas —al menos en teoría—, se tratará de una magnitud continua. Por ejemplo, el kilogramo se divide en hectogramos, decagramos, gramos, decigramos y éstos a su vez en centigramos, y así indefinidamente aunque no seamos capaces de percibir o de medir esas cantidades.

En las situaciones prácticas de medición que podemos llevar a cabo en la clase, se llega pronto a una unidad que ya no se puede dividir más si no es recurriendo a instrumentos muy complicados; en el caso del peso al gramo, de la longitud al milímetro, de la capacidad al mililitro, etc.

El auténtico proceso de medida de magnitudes continuas exige decidir qué grado de precisión se requiere y, por tanto, cuáles han de ser las unidades de medida y el refinamiento del instrumento que va a realizar tal medida. Estos conceptos de estimación y aproximación no se consideran con frecuencia en clase, sólo se tienen en cuenta los aspectos numéricos y de recuento.

Carpenter (1976) recoge la controversia entre las dos escuelas: la de Piaget y la de la Unión Soviética, sobre si el papel dominante en los procesos de medida debe corresponder o no a los conceptos numéricos. Comentamos las teorías de cada una de las escuelas para que sirvan como técnicas en la enseñanza y aprendizaje de la medida.

La escuela de Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska: 1974): después de las pruebas realizadas, concluyeron que el niño adquiere la noción de conservación del número (es decir, que un determinado número,  $n$ , de objetos, son  $n$  objetos, independientemente de la posición

en que estén colocados) aproximadamente dos años antes que la de conservación de la longitud. Estos autores indicaron que las nociones de medidas lineales se podrían adquirir con mayor facilidad si se introdujeran acompañadas por los conocimientos del número, que el niño ya tiene, para fundamentar sobre ellos la medida. La experiencia individualizada se llevó a cabo con niños de 6 años a los que se les mostraron las figuras siguientes:

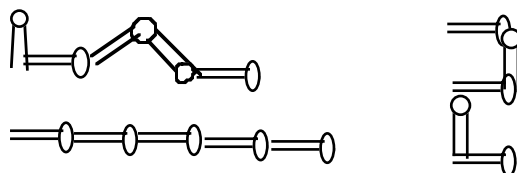


**Figura 28: Ejemplo de conservación de la longitud.**

Cada una de estas figuras está formada por 5 cerillas colocadas en las posiciones que se indican. Se pidió a los niños que construyeran una línea valiéndose de un conjunto de cerillas más cortas que las del modelo —5 de las del modelo equivalían a 7 de las que se les proporcionaban—, de modo que la longitud de la línea construida fuese igual a la longitud total de la línea de la figura dada. Fueron capaces de conservar el número, pero ninguno fue capaz de conservar la longitud. Al intentar hacer la primera línea quebrada se fijaban en la longitud; para la que parece un dos se le daba otro dato que les podía inducir a error, el número, y con la línea recta entraban en conflicto con las anteriores. Después de recapacitar, se les repitió el experimento y sólo el 28% de los niños dio muestras de poseer la conservación de la longitud.

La investigación rusa sobre el desarrollo de los conceptos de medida en los niños (Galperin y Georgiev: 1969) no se basó en conceptos numéricos básicos, sino que se partió de conceptos propios de la medida.

En primer lugar, se enseñaba a los niños a comparar diversas cantidades utilizando una unidad de medida, animándoles a que no utilizaran la comparación a ojo simplemente, sino que buscaran la unidad de medida apropiada para cada situación. Se utilizaban unidades de medida simples como cerillas, pajitas de sorbete, cucharas, tazas, etc., y también unidades compuestas. Por ejemplo, se podía tomar como unidad 3 cerillas o media taza. Obsérvese que las definiciones de simple y compuesta dependen del sistema de referencia que se adopte, ya que en cuanto adoptemos 3 cerillas como unidad de medida, tomando como dicha unidad un palito de la misma longitud que las 3 cerillas, ésta se convierte en una unidad simple. Todas las actividades se realizaron sin asignarles números a las cantidades medidas. Se les decía, por ejemplo: “llena de agua esta taza utilizando la cuchara”.

En una segunda etapa se fueron asignando números a las medidas. Se decía, por ejemplo: “¿cuántas medias tazas de arena necesitamos para llenar este recipiente?”, “¿qué longitud tiene esta línea en cerillas?”, etc.

La tercera etapa tenía como objetivo que el niño lograra descubrir la proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad utilizada y el número de unidades necesarias. Por ejemplo, si medimos una línea con cerillas y con pajitas de sorbete, harán falta más cerillas que pajitas. Cuando la unidad de medida es menor, necesitamos utilizar más unidades -esto es debido al cambio de unidad de medida, concepto estudiado en el Capítulo II y que hemos recordado un poco antes.

Los rusos afirman que a los niños que son iniciados en la medida de forma tradicional, cargando el acento en los conceptos numéricos, les cuesta más reconocer que una unidad de medida puede constar de partes. Les suele dar igual el tamaño de una unidad de medida y se fían más de la comparación visual directa de las cantidades que de su medición por medio de una unidad dada (Carpenter, 1976). Es por ello que pensamos que las primeras situaciones problemáticas con las que hay que enfrentar al niño son aquéllas en las que no sea necesario utilizar el número. Éste debe ir apareciendo en la medida en que él lo considere necesario para poder expresar sus resultados —aunque todo esto debería ser objeto de otra investigación.

En resumen, podemos afirmar que para introducir las nociones de medida en los niños hay que tener en cuenta los siguientes aspectos: conservación, transitividad, repetición de la unidad de medida, estimación y aproximación. Los aspectos de estimación y aproximación no los vamos a tener en cuenta en nuestro trabajo por tratarse de Educación Infantil, pero los restantes no podemos obviarlos en los apartados en que hablaremos de las dificultades que encuentra el niño en el aprendizaje de las medidas de longitud, área, volumen, capacidad, peso, tiempo y dinero.

### **3.3. Estadios de desarrollo de la comprensión de la medida**

Para proponer actividades a los niños de Educación Infantil necesitamos, antes, conocer en qué nivel de desarrollo se encuentra respecto de lo que queremos trabajar. Se pueden distinguir los siguientes estadios de desarrollo de la comprensión del proceso de medida en el niño:



### 3.3.1. Estadio inicial

El niño en este estadio no da muestras de captar la idea de conservación ni la de transitividad. Para emitir sus juicios sobre medidas se basa en estimaciones visuales fundamentalmente. Si le damos dos palitos con la misma longitud, pero uno deslizado un poco con respecto al otro, no se da cuenta de que las longitudes son iguales. Si observa dos áreas o volúmenes para ver cuál es mayor, dice que el de mayor altura es más grande. Si se le da un instrumento que sirva para medir una determinada dimensión de un objeto, es incapaz de aplicarlo sabiendo lo que hace. Si se le da una unidad de medida, es normal que superponga las unidades o que deje huecos entre una y otra o que cubra solamente una parte de la cantidad que hay que medir. No capta la idea de que para medir tiene que llevar una unidad reiteradamente sobre la cantidad a medir, y tiene que subdividir la unidad en trozos de igual tamaño. Tampoco capta la idea de que la unidad es una cantidad que nos sirve de intermediario para moverla sobre la cantidad que queremos medir.

Dentro de este estadio vamos a considerar tres subestadios:

1. Desde el nacimiento del niño hasta que empieza a hablar.
2. Desde que el niño empieza a hablar hasta que se inicia en la lecto-escritura.
3. Desde que el niño se inicia en la lecto-escritura hasta que termina la Educación Infantil.

Vamos a ir indicando algunas situaciones, por todos conocidas, en las que se trabajan algunos preconceptos o conceptos relativos a “las Magnitudes y su Medida” en cada uno de los subestadios considerados.

### 3.3.2. Actividades sobre medida desde el nacimiento del niño hasta que empieza a hablar

En el periodo que consideramos se podrían aprovechar, sin demasiado esfuerzo, las actividades que enumeramos a continuación, y muchas otras que pueden ir surgiendo, para la preadquisición de algunos preconceptos sobre “las Magnitudes y su Medida”. Además, es bueno tenerlas en cuenta para que no las descuidemos cuando se presenten. Entre otras, tenemos las siguientes:

a) Cuando se le da un alimento y se le dice al niño: “¡hoy has comido mucho!” o “¿quieres más?”, sin esperar respuesta por parte del

niño, ya que nos encontramos en el periodo en que el niño aún no sabe hablar, ya se está trabajando con la magnitud capacidad de forma comparativa.

b) Al ponerle la ropita, se ve si le queda bien, y como el niño crece tan rápido, llega un momento en que le queda pequeña. En todo momento se están comparando las dimensiones del niño con las de la ropita.

c) Si le damos objetos encajables, aunque no sean figuras semejantes, para que haga con ellos lo que quiera, puede intentar introducir unos objetos en otros. Con ello está comparando volúmenes o capacidades, ya que el objeto que queda dentro ocupa menos volumen que el que lo contiene, o tiene menos capacidad el contenido que el continente.

d) En un espacio abierto, estando el niño bien vigilado, le podemos dejar objetos variados, con los que usualmente no juega, para que se entretenga, como: botes, latas, tapones, rollos de papel higiénico, tapaderas de botes, cadenas, rulos del pelo, llaves, bolas de lana, etc., con todo esto formamos “la cesta del tesoro”. El niño que empieza a gatear es normal que disfrute al ver tantas cosas a su alrededor. Suele intentar meter una lata dentro de otra o tapar una botella, también intenta meter dentro de los botes todo lo que cabe en ellos. Con esta actividad se consigue trabajar con muchas magnitudes, como longitud, superficie, capacidad, volumen, sonidos —que son percepciones temporales—, peso, etc.; además de con algunos otros conceptos como interior, exterior, sensibilidad fina, etc.

Refiriéndonos a medida podemos ver cómo compara, al intentar tapar la botella, las superficies de los círculos —o las longitudes de las circunferencias— que forman el tapón y la boca de la botella. Al meter unos objetos dentro de otros, compara volúmenes y capacidades, etc. Esta actividad puede repetirse cuando el niño ya hable para sacarle más partido. Al recoger los objetos se le puede ayudar y coger un recipiente grande o, si se repite cuando sea algo más mayor, uno en el que quepan justo, para que tenga que esforzarse intentando que encaje todo bien.

e) Es conveniente poner al niño delante del espejo, no sólo para trabajar la simetría, que también puede ser objeto de nuestro estudio, sino sobre todo para preiniciar al niño en las ideas de cerca, lejos, delante, detrás, etc.

f) La mamá debe tener al niño cerca al hacerle el biberón para que éste vaya observando sus movimientos, a la vez que puede distraerlo con los comentarios que se le ocurran. El niño sigue a su mamá con la

vista a cualquier lugar y se fija en todo lo que hace, en cómo ella tiene que medir y pesar... Esta es una oportunidad de ponerlo en disposición de poder ir descubriendo la capacidad y el peso...

g) Cuando el niño va creciendo y la cuna se le va quedando pequeña, la mamá puede decirle: “¡qué grande está mi niño, que se le ha quedado su cunita pequeña!”, con lo cual va a ir comparando la longitud del niño con la de la cuna.

h) Es importante que el niño tire los objetos al suelo. Además de que con ello va descubriendo los sonidos, es fundamental para que, poco a poco, vaya observando el tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo.

i) En las primeras edades podemos ponerle al niño un reloj de arena para que se distraiga observando la caída de la arena, y a la vez lo vamos preiniciando en el tiempo. También el reloj normal, con su tic-tac, distrae mucho al niño.

j) Una actividad que le atrae mucho a los niños es jugar con agua o arena, con varios recipientes de plástico o cristal duro —si está vigilado—; con ello los vamos preiniciando en las medidas de capacidad y peso.

k) Muchas veces cuando vamos a comprar llevamos al niño en su cochecito. Verá entonces que pesan algunas cosas, que pagamos con dinero, etc., con esto le facilitamos estar en contacto —indirectamente— con el peso, el dinero, etc. En otro momento, estando vigilado, podemos distraerlo jugando con las monedas.

**Ejercicio:** El alumno-profesor que tenga algún niño pequeño cerca, hermano, primo, vecino, etc., puede obsérvalo y completar estas actividades anotando las que observe que realicen los mayores de su entorno en presencia del niño, o el propio niño, y que conlleven algún proceso relacionado con “las Magnitudes y su Medida”.

### **3.3.3. Actividades sobre medida desde que el niño empieza a hablar hasta que se inicia en la lecto-escritura**

Vamos a estudiar algunas situaciones en las que se puede encontrar el niño en este periodo cuando, de forma inconsciente, tanto por parte de los familiares del niño como del propio niño, realizan algunas actividades que conllevan ciertas prenociones relativas a “las Magnitudes y su Medida”.

Todavía en este subperiodo se puede pensar que es prematuro hacer algo sobre “las Magnitudes y su Medida”, pero en estas edades el niño tiene las primeras experiencias con su entorno, y pensamos que no se pueden desaprovechar, todo lo contrario, éstas deben ser el punto de partida de lo que después deba aprender. Por tanto es de suma importancia realizar actividades sobre medidas de longitud, de peso, de capacidad, de dinero... para ir tomando contacto con “las Magnitudes y su Medida”, ya que todo esto le puede servir para ir cimentando los conocimientos posteriores. Por ello vamos a ver una serie de actividades que pueden surgir de modo natural o que se pueden provocar para preiniciar al niño en la medida de algunas magnitudes. Naturalmente, éstas son sólo algunas de las que se podrían realizar.

a) Normalmente, al niño le gusta ser el protagonista e intenta coger los objetos que necesitamos, y si antes lo intentó y vio que no pudo, debido a la altura, disfruta volviendo a intentarlo, y cuando lo logra se pone contentísimo. Aquí está comparando la altura a que está el objeto en cuestión con la altura que él va consiguiendo según va pasando el tiempo; también va tomando contacto con el volumen, el peso, la capacidad... de los objetos que intenta —o que consigue— coger.

b) Cuando vamos en el ascensor el niño casi siempre quiere pulsar el botón para subir y bajar. Con ello va viendo si llega o no a un determinado número, está comparando una longitud —su altura— con otra —la altura a que está el botón del ascensor que quiere pulsar. Además va aprendiendo los números ordinales cuando se va dando cuenta de que llega al primero, al segundo, etc.

c) Cuando se pone al lado de una persona, el niño se compara para ver si es más alto o más bajo y hasta dónde le llega. También con esta actividad está comparando longitudes.

d) La mamá pesa y mide al niño de vez en cuando, y suele hacer referencia al peso y a la medida que antes tenía, comentando que el niño ha cogido unos gramos y ha crecido unos centímetros. Con esto puede estar preiniciando al niño en el peso y en la longitud y está comparando, luego está estableciendo una ordenación.

e) Es conveniente dejar que el niño colabore con los papás cuando hacen la comida, e incluso que él haga alguna cosita, ya que al niño le suele gustar y con ello son muchas las magnitudes que puede trabajar, entre ellas: el volumen, la capacidad, el peso, el dinero y el tiempo.

f) Si se hacen en casa trabajos de bricolaje, es bueno que el niño participe en ellos, con esto se pueden trabajar magnitudes como la longitud, la superficie, el volumen, el peso y el dinero.

g) Cuando se le pregunta: “¿qué quieres ser cuando seas mayor?”, estamos haciendo referencia al tiempo.

h) Si en nuestros comentarios le decimos: “vimos ayer...”, o “vamos a ir mañana a...”, estamos haciendo referencia al tiempo.

i) Aunque el niño no esté aún en disposición para responder correctamente a nuestras preguntas, es bueno hacerle algunas para que vaya pensando que tal o cual cosa aún no la conoce. Se le puede preguntar, haciendo referencia al tiempo: “¿cuántos añitos tienes?”, o “¿cuándo es tu cumpleaños?”, o “¿a qué hora te levantas?”, etc.

Nosotros hemos preguntado a 20 niños de 3 años “¿cuándo es tu cumpleaños?” En principio pensábamos que ésta era una pregunta muy difícil de responder por niños de esta edad, y la verdad es que sólo 2 niños nos dieron la respuesta correcta. Otros respondieron: “no sé”; “el lunes”; “el domingo”; “3”; “en Octubre”, y un niño que coincidía que cumplió años el día anterior nos dijo: “mañana”. Es fácil que confundan ayer con mañana.

Al maestro o al futuro educador se le podría dejar el ejercicio siguiente:

**Ejercicio:** Piensa en niños de estas edades y completa la lista de las actividades que nosotros hemos dado con alguna que tú hayas visto hacer a éstos y que esté relacionada con “las Magnitudes y su Medida”.

### 3.3.4. Actividades sobre medida desde que el niño se inicia en la lecto-escritura hasta que termina la Educación Infantil

Esta etapa, dentro de la Educación Infantil, es la más importante para el estudio de “las Magnitudes y su Medida”, pues debido al nivel madurativo del niño, son muchas las actividades que podemos llevar a cabo con las distintas magnitudes que el niño trabaja —o puede trabajar— y que corresponden a este periodo.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas en el informe sobre la reforma del Ministerio de Educación y Ciencia (Suma, 2005:126) nos dice lo siguiente: *En la propuesta que realiza el documento sobre el segundo ciclo de Educación Infantil se*

*Menciona una aproximación a la lecto-escritura, lengua extranjera y uso del ordenador. Creemos que deben mencionarse conocimientos de tipo prematemático. Por ejemplo, proponer que dichos alumnos hayan desarrollado la capacidad de contar verbalmente colecciones relativamente grandes (más de diez).*

Estamos totalmente de acuerdo, es más, en esos *conocimientos prematemáticos* creemos que debe estar la iniciación en la medida de las distintas magnitudes que ahora veremos, pues ellas pueden ser las que den lugar a *contar colecciones relativamente grandes*, ya que como sabemos los números naturales también constituyen una magnitud.

Vamos a hacer un comentario de cada una de las medidas que se podrían trabajar en este último subestadio, destacando su importancia y repercusión en posteriores conocimientos, y consignando brevemente algunas de las actividades que se podrían llevar a cabo.

### 3.3.4.1. El número natural

Ya hemos visto en el Capítulo II que el semimódulo  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$  se puede considerar como una magnitud escalar absoluta discreta, y también hemos visto que podemos considerar una medida sobre dicho semimódulo. Para ello elegimos un número natural como unidad y a cualquier elemento de  $\mathbb{N}$  se le puede asociar su medida respecto de la unidad elegida. Si tomamos como unidad el 1, que es el generador de la magnitud  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, +, \cdot)$ , tenemos la inmersión de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}$ , es decir, la aplicación inyectiva que asocia a cada número natural él mismo. Esta es una de las medidas que el niño realiza en el periodo de cero a seis años, y que se trabaja al estudiar los números naturales, aunque también debe ser objeto de nuestra consideración en este capítulo.

El conjunto de los números naturales surge como consecuencia de ir estableciendo una relación de equivalencia, llamada relación de coordinabilidad, entre los conjuntos de objetos conocidos.

El niño empieza comparando conjuntos de objetos de su entorno y viendo si tienen el mismo número de elementos (intenta establecer una aplicación biyectiva entre ellos), o si algún conjunto tiene más elementos que otro (sólo puede establecer una aplicación inyectiva). Está estableciendo una clasificación entre los conjuntos de objetos que se le van presentando, obteniendo con ello la idea de número natural. El niño puede decir, por ejemplo, que en una bolsa hay 3 caramelos, antes de tener totalmente asimilada la idea de número, pero es totalmente necesario que compare conjuntos de objetos con el mismo, o con

distinto, número de elementos para llegar a interiorizar lo que es un número natural. Por tanto, en estas edades lo que haremos será:

i) Trabajar con el niño distintos conjuntos de objetos e ir preguntándole si es mayor, igual o menor el número de elementos en uno de los conjuntos que en el otro.

ii) Darle un conjunto con un número de objetos y decirle que forme otro conjunto con el mismo número, otro con más y otro con menos objetos.

iii) Decirle al niño que consiga un conjunto, con un material concreto, que tenga un número determinado de elementos.

Actividades de este estilo las podría realizar dando un número de pasos, subiendo o bajando determinado número de escaleras, etc.

**Ejercicio:** El alumno-profesor, usando alguna técnica de Metodología Creativa, debería inventarse alguna actividad que nos ayude a acercar al niño a la idea de número natural.

### 3.3.4.2. La longitud

Para iniciarnos en la longitud lo que hacemos es clasificar objetos comparándolos con nuestro cuerpo. Después comparamos los objetos entre sí, hasta llegar a las unidades de longitud: dm, cm y m. También en la historia de la humanidad la longitud nace con unidades asociadas a buena parte del cuerpo, como la pulgada, el dedo, el pie, el palmo, el brazo, el paso, etc., hasta que en el siglo XIX se estableció el Sistema Métrico Decimal. Pero aún hoy en día la longitud se mide con unidades antiguas, en Inglaterra, por ejemplo, se usa la pulgada, también la superficie y la capacidad en España se mide con unidades antiguas como la cuartilla, el cuartillo, el celemán, la fanega, etc.

El desarrollo de la idea de medida de longitud incluye tanto la capacidad de apreciar la conservación de la longitud cuando el objeto cambia de posición, como la posibilidad de subdivisión y la construcción de una unidad de medida. De lo contrario, no se puede alcanzar la idea de que para medir un segmento tenemos que emplear repetidamente la unidad, ni se puede apreciar que la longitud es independiente de cómo nos movamos. Es importante observar la conducta del niño a la hora de medir, para apreciar los procesos psicológicos que intervienen en la medición. Una vez alcanzada la idea de conservación de la longitud, el niño adquiere rápidamente la idea de medida.



Ya veremos, al trabajar la conservación, varios ejercicios que se pueden realizar en este apartado, por tanto no los vamos a repetir, tan sólo decir que:

i) Es conveniente que el niño realice mediciones con el palmo, con el pie, con el paso, con varillas, con cintas, etc., de distintas longitudes, de todos los objetos que tenga a su alrededor, sin preocuparnos mucho, en principio, del número de veces que lleva sobre el objeto el palmo, o el pie, o el paso, o la varilla, o la cinta, sino sólo de que se inicie en el proceso de iteración.

ii) Conviene que el niño conozca los instrumentos que se utilizan habitualmente para medir longitudes, como puede ser: la vara que se utiliza para medir las telas, la cinta métrica que emplean las costureras, el metro del carpintero, etc., que los emplee para que llegue a conocer el decímetro, el centímetro y el metro. Las mediciones se pueden hacer por equipos o individualmente y después es aconsejable comparar los resultados.

iii) Es conveniente que recorte y dibuje figuras de objetos que le sean familiares con una determinada longitud, como puede ser una casa de 5 cm de alta.

iv) Es interesante que se invente cuentos con las medidas de longitud como puede ser el de Pinocho y su nariz.

**Ejercicio:** El alumno-profesor debe inventarse una actividad con las medidas de longitud que obligue al niño a usar una unidad de medida, procurando utilizar alguna técnica de Metodología Creativa.

### 3.3.4.3. El área

Los egipcios, 2000 años antes de Cristo, ya tenían fórmulas exactas para calcular áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos y trapecios. Consideraron el cuadrado de lado “a” y determinaron su área “a<sup>2</sup>”, y a partir de ahí obtuvieron el área del rectángulo, del paralelogramo, del triángulo y del trapecio.

Creemos que se plantearían calcular el área de un cuadrado cuyo lado medía  $1 \cdot u$ , siendo  $u$  la unidad de medida elegida para medir la longitud ( $u$  puede ser, por ejemplo, la longitud de una cerilla), y a dicha área le llamarían  $1 \cdot u^2$ , en este caso la unidad de medida de la nueva magnitud área sería  $u^2$ . Después verían que el área del cuadrado de lado  $2 \cdot u$  era  $4 \cdot u^2$ , y como ya habrían acordado que  $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ , habrían descubierto que el área era  $(2 \cdot u)^2 = 4 \cdot u^2$ . Por un proceso de inducción

considerarían que el área de un cuadrado de lado  $n \cdot u$  era  $n^2 \cdot u^2$ , y obtendrían que el cuadrado de lado  $(n+1) \cdot u$  tiene de área

$$n^2 \cdot u^2 + n \cdot u^2 + n \cdot u^2 + 1 \cdot u^2 = (n^2 + 2n + 1) \cdot u^2 = (n+1)^2 \cdot u^2,$$

con lo que podrían afirmar que cualquier cuadrado de lado  $x \cdot u$  tiene de área  $x^2 \cdot u^2$ .

Después pasarían a calcular el área del rectángulo cuyos lados medirían  $n \cdot u$  y  $m \cdot u$ , y verían que era  $(n \cdot m) \cdot u^2$ . Se plantearían calcular el área de un paralelogramo de base  $n \cdot u$  y altura  $m \cdot u$ , que también sería  $(n \cdot m) \cdot u^2$ .

Al final calcularían el área del triángulo de base  $n \cdot u$  y altura  $m \cdot u$ , que sería  $\frac{n \cdot m}{2} \cdot u^2$ . Todo el proceso de cálculo puede intuirse en el esquema que viene a continuación:

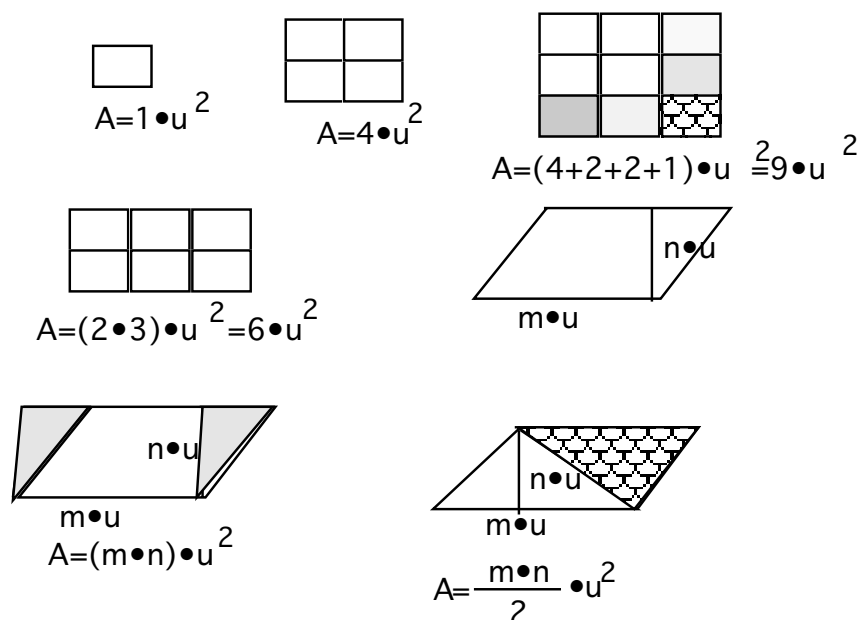


Figura 29: Proceso seguido en el cálculo de áreas.

**Ejercicio:** Le dejamos al alumno-profesor que razone cómo se llegaría a obtener que el área del trapecio era la semisuma de las bases por la altura.

De todo esto deducimos que el proceso para ir adquiriendo el concepto de área puede ser análogo a su evolución histórica, y por tanto, además de comparar superficies de figuras planas para que el niño nos diga cuál es mayor, podríamos aprovechar alguna pequeña parte de lo que hemos visto para proponer determinadas actividades al niño de Educación Infantil. Por supuesto que la generalización para calcular el área del cuadrado, del rectángulo, del paralelogramo y del triángulo no

tendría cabida aquí, aunque sí pequeños ejercicios como los que después comentaremos y que son la base para que, cuando el niño sea mayor, pueda llegar a entender cualquier razonamiento análogo al que hemos hecho en el gráfico anterior y mucho más complejo.

Por todos los comentarios anteriores, pensamos que se podría introducir al niño levemente en la idea de área comparando intuitivamente las superficies de algunos objetos, preguntándole cuál es más grande; midiendo objetos cercanos a él, como pueden ser: la superficie de una mesita, o la cubierta de un libro, con un número de piezas del mismo tipo, suficientes para recubrir dicha superficie. Por ejemplo, se podrían utilizar cuadrados o triángulos rectángulos isósceles o triángulos isósceles, previamente contruidos en cartulina, para que nos sirvan como unidad de medida. Ahora bien, cualquier figura con la que podamos realizar una teselación (un recubrimiento del plano mediante repetición de dicha figura, sin dejar ningún hueco y sin que haya superposiciones) nos puede servir como unidad de medida, y por tanto con cualquiera de ellas podemos realizar una medición repitiendo la unidad de medida hasta recubrir toda la superficie.

También podría realizar composiciones y descomposiciones de figuras planas, que no sean muy complicadas, trabajando con ellas a modo de puzzles. Esto constituiría un trabajo preparatorio fundamental para alcanzar la noción de área y la medición, además de motivar el estudio de las transformaciones geométricas.

Algunos ejemplos que podríamos realizar con los niños son los siguientes:

1. Hemos recortado en cartulina de colores varios triángulos rectángulos isósceles iguales, y varios cuadrados de lado el cateto del triángulo. Con el triángulo como unidad de medida podemos medir el área del cuadrado, y con ambas figuras podemos medir la de otro cuadrado o la de otro rectángulo, previamente dibujado en el cuaderno, que los contenga un número exacto de veces.

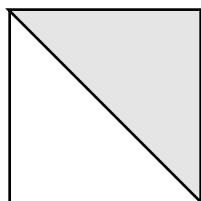


**Figura 30: Medida de la superficie de un cuadrado.**

Aquí, el alumno, además de estar trabajando la conservación y la equivalencia, está sumando las áreas de los triángulos o de los cuadrados,

y también, cuando mide con el triángulo rectángulo isósceles, puede llegar a darse cuenta de que ha necesitado el doble de triángulos que de cuadrados para cubrir la figura en cuestión —como hemos visto en el Capítulo II cuando estudiamos el cambio de unidad de medida y hemos recordado anteriormente en este mismo capítulo—, etc.

2. Tenemos varios cuadrados de 1 cm de lado en cartulina; con este cuadrado como unidad le decimos al niño que construya un rectángulo que lo contenga un número exacto de veces. Por ejemplo, que lo contenga 12 veces (el niño tendría que saber contar hasta 12). Podría ser que tuviera: 4 cm de largo y 3 cm de ancho, ó 3 cm de largo y 4 cm de ancho, ó 2 cm de largo y 6 cm de ancho, ó 6 cm de largo y 2 de ancho. En la figura adjunta viene uno de ellos.

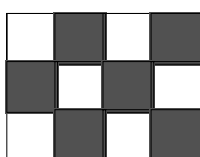


**Figura 31: Medida de la superficie de un rectángulo.**

3. Se le puede decir al niño que recorte varios cuadrados de 2 cm de lado, dándole el modelo, o los recortamos nosotros, y que construya otro cuadrado más grande formado por cuadrados de los que ha recortado.

4. Tomamos varios triángulos equiláteros de 1 cm de lado (recortados en cartulina de colores) como unidad de medida, para medir un triángulo equilátero de 3 cm de lado; un hexágono regular de 2 cm de lado; un rombo cuyo lado mida 4 cm y uno de cuyos ángulos sea de 60°; etc. Todas estas figuras han de ser dibujadas por el profesor con anterioridad.

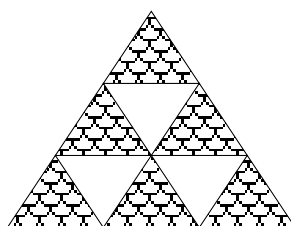


**Figura 32: Medida de la superficie de un triángulo equilátero.**

5. Para que el niño trabaje con el círculo recortamos varios círculos iguales y a algunos de ellos podemos darle unos cortes. Formamos otras figuras reordenando los trozos que obtenemos y le decimos al niño que organice sus trozos para colocarlos como los nuestros. Como ejemplos podemos tener los siguientes:

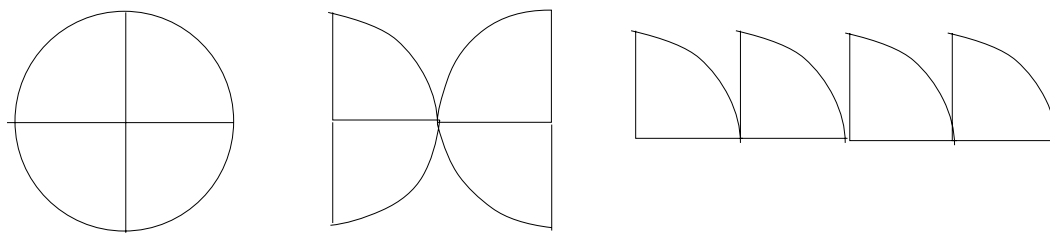


**Figura 33: Ejemplo de figuras con la misma área.**

6. Es importante que el niño componga las piezas de un puzzle, ya que con ello está trabajando, inconscientemente, la conservación, la equivalencia y la suma de áreas. Los puzzles los podemos preparar nosotros con dos cartulinas iguales coloreando y recortando una de ellas de la forma que queramos. Una forma, que aunque es bastante simple resulta tremendamente interesante por las posibilidades que tenemos de realizar actividades con ella, podría ser la división de figuras geométricas en otras, como es el llamado tangram, que es un cuadrado dividido como indica la figura que dibujamos a continuación:

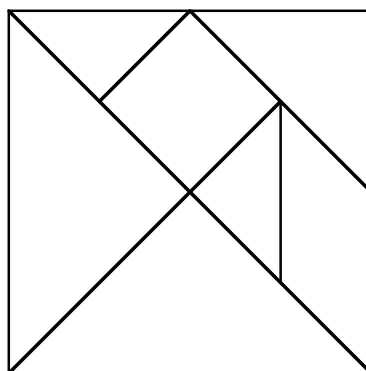


**Figura 34: El tangram.**

Se puede recortar por las líneas y colorear, con colores vivos, cada uno de los polígonos en que se ha dividido el cuadrado. Le damos uno a cada niño para que forme figuras variadas colocando de otros modos las figuras que lo constituyen. Después el profesor coloca de distintas formas las figuras en que se ha dividido el cuadrado y el niño tiene que ponerlo como lo ha puesto el profesor. También podría ser un niño el que ponga de una determinada forma las distintas piezas que constituyen el tangram, y los demás niños deben imitar ésa como modelo.

Si el alumno-profesor realiza esta actividad con sus alumnos, verá que no es tan simple como parece, además es parte integrante del aprendizaje de las Matemáticas. Con ella se ayuda a que desarrollen las nociones de ángulo recto y paralelismo, por ejemplo, y desempeña un importante papel en el fomento del pensamiento bidimensional.

7. Le damos dibujado un rectángulo y recortados en cartulina los dos triángulos que resultan de trazar su diagonal, para que a modo de rompecabezas, componga la figura.

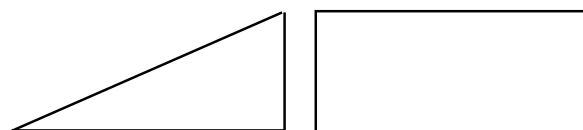


Figura 35: Ejemplo de cálculo de área 1.

De forma análoga podríamos darle un paralelogramo dibujado y recortados en cartulina de colores, el rectángulo y los dos triángulos en que se descompone



Figura 36: Ejemplo de cálculo de área 2.

para que forme el paralelogramo. También podemos dibujar un nuevo rectángulo añadiéndole al rectángulo anterior los dos triángulos, y decirle al niño que coloque los trozos de cartulina de modo que nos dé el rectángulo.

De forma análoga podríamos darle un trapecio rectángulo dibujado y recortados en cartulina el triángulo y el rectángulo que resulta de su descomposición para que forme el trapecio. Esto lo indicamos en la figura que viene a continuación.

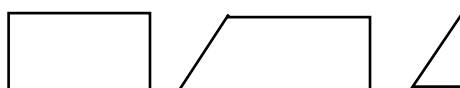


Figura 37: Ejemplo de cálculo de área 3.

También podría ser un trapecio isósceles lo que le diéramos dibujado en el cuaderno y en cartulina de colores el rectángulo y los dos triángulos en que se descompone. De forma análoga a la que indicamos a continuación.

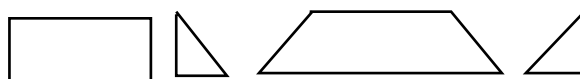


Figura 38: Ejemplo de cálculo de área 4.

Podemos dibujar un rombo y construir un rectángulo de forma que uno de sus lados mida igual que la mitad de la diagonal más larga del rombo y el otro lado mida igual que la otra diagonal. Se le dan los cuatro

triángulos que resultan de dividir el rombo por las diagonales, recortados en cartulina de colores

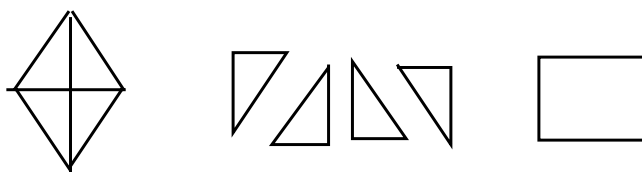


Figura 39: Ejemplo de cálculo de área 5.

para que con las figuras dadas forme tanto el rombo como el rectángulo.

Esto podemos hacerlo con cualquier polígono dibujado y los triángulos, cuadrados o rectángulos resultantes de su descomposición recortados y coloreados.

8. Con los triángulos y cuadrados contruidos en los ejercicios anteriores se podría dibujar el contorno de la figura resultante de tomar varios cuadrados o triángulos y colocarlos de modo que no se solapen — es decir, con intersección vacía—, y que tengan un lado o un vértice en común —no pueden quedar huecos—, y luego darle a los niños los cuadrados o triángulos para que compongan la figura elaborada por nosotros y vean cuál es su área tomando como unidad la figura que se repite. Por ejemplo, podríamos darles las siguientes figuras:

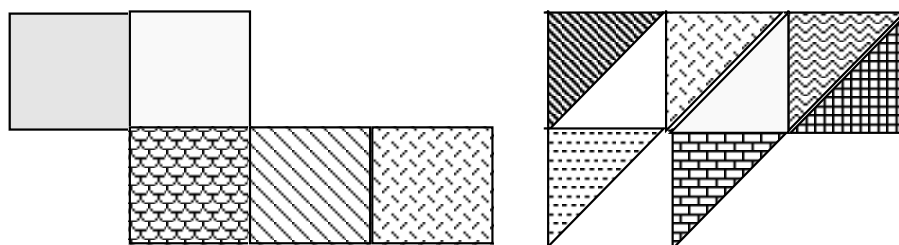


Figura 40: Ejemplo de cálculo de área 6.

9. En papel cuadriculado el profesor dibuja una figura, y el niño tiene que hacer otra, en el mismo papel, que tenga la misma superficie.

10. En cartulina se harán dibujos de figuras variadas para recortarlas y hacer otras iguales en forma y superficie.

Dichas actividades se pueden llevar a cabo en el patio de recreo dibujando las figuras en el suelo y recortando las que tuviéramos que recortar en tableé o cartulina, sólo por hacer composiciones de figuras, sin detenernos en contar, si aún el niño no sabe contar. Cuando aprenda a contar se puede repetir la actividad en la clase con cuaderno y cartulina. Además, todo esto se recomienda que se realice con niños que



tengan a partir de los 4 o 5 años, si bien es el profesor el que tiene que ver la conveniencia de realizarlos a una u otra edad según el nivel madurativo del alumno.

Es bueno que, desde pequeño, el niño realice pequeños ejercicios con el área, pues, además de lo que hemos comentado, tenemos que pensar que el cálculo del área puede tener problemas de aproximación y error, ya que si quisiéramos medir la superficie que encierra una curva cerrada simple —como puede ser, por ejemplo, la curva que encierra una piscina— y la unidad de medida elegida fuese un rectángulo de 2 cm. de ancho por 1 cm. de alto, no podríamos obtener su medida exacta. Procederíamos recubriéndola por rectángulos análogos a nuestra unidad, aunque quizá habría rectángulos que se quedarían totalmente en el interior de la figura y otros que se quedarían sólo en parte. Los que quedan totalmente dentro no nos ofrecen ningún problema. Para los demás se puede adoptar como criterio contar como rectángulos completos los que tengan dentro más de la mitad y despreciar los otros, o bien contar como medio rectángulo los que sólo tienen parte dentro de la figura. Pero con estos criterios no estamos viendo cómo mejorar la aproximación. Si contamos sólo los rectángulos enteros tendríamos una medida menor que el área de nuestra figura. Si contamos todos los que tienen parte en la figura tendríamos un área mayor que la de la curva. Estas dos áreas son una cota inferior y una cota superior, respectivamente, del área de la curva. Como habrá bastante diferencia entre ellas, podríamos plantearnos buscar otra unidad de medida reduciendo el tamaño de la unidad. Con esto veríamos la necesidad de aproximar la medida.

Razonamientos análogos a este se podrían hacer con los niños, para ello dibujamos en el patio de recreo una curva cerrada, y les damos rectángulos o cuadrados de madera para que los pongan sobre la figura de modo que quede la menor superficie sin recubrir. Después se les puede preguntar: “¿cómo podríamos cubrir mejor la figura?”.

**Ejercicio:** El alumno-profesor podría tomar dos cartulinas juntas, recortar un polígono regular en ellas, teniendo cuidado de que no se separen, darle unos cortes a una de las cartulinas consiguiendo figuras iguales, y realizar alguna actividad sobre medida de superficies. Para llevar a cabo esta actividad es aconsejable utilizar alguna técnica de Metodología Creativa.

**Ejercicio:** Le preguntamos al alumno-profesor: ¿además del área el niño está trabajando en cada una de estas actividad otras cosas? Plantea otra actividad que pueda realizar el niño de Educación Infantil sobre medidas de superficie.

**Ejercicio:** Para trabajar con el tangram se aconseja que el alumno-profesor recorte varios cuadrados iguales que el tangram y elija algún cuadrado o triángulo, de los que aparecen en él, que sirva para ser utilizado como unidad de medida para medir la superficie del cuadrado grande, y que los niños realicen dicha medición o composiciones.

### 3.3.4.4. El peso

El peso surgió de la necesidad de comparar objetos al tener que intercambiarlos, antes de disponer de las monedas. Las medidas de peso son difíciles de percibir por el niño, ya que necesita observar si la cruz de la balanza se mantiene equilibrada o necesita leer en una escala, es decir, tiene que hacer una medida indirecta de dicha magnitud (el concepto de medida indirecta de una magnitud ya se estudió en el Capítulo II). El primer caso, que podría ser el más evidente de lo que se está haciendo, ha desaparecido prácticamente.

En las primeras edades la noción de peso viene dada por la noción de “pesadez”: dados dos objetos con la misma forma y tamaño, con sólo sostenerlos, el niño decide si pesan igual o no. Después, se le darán objetos que se diferencien poco en el peso para crearle la necesidad de emplear la balanza. Se le irá introduciendo la medida de esta magnitud con la balanza de dos platillos, comparando los pesos de diferentes objetos. Para ello se tendrá en cuenta el equilibrio o no de la cruz de la balanza. Más tarde se irán introduciendo pesas como el gramo y el kilo.

Es probable que el niño vea en casa a su mamá o a su papá pesar el azúcar, en cientos de gramos, en una báscula doméstica, con lectura directa sobre una escala; con lo que puede resultar difícil comparar la actividad que él realiza en el colegio al pesar con la balanza de dos platillos, con la que realiza su mamá.

Cuando se pesa algún miembro de la familia con la balanza del cuarto de baño, al niño le debe ocurrir algo parecido, ya que observa que giran los números, si la balanza no es digital, hasta quedarse con un número concreto que es el peso de la persona que está encima de la balanza del cuarto de baño. Y si la balanza es digital, observa que, después de unos segundos de estar encima de la balanza, aparecen unos números que es el peso de la persona.

Estamos hablando de peso si bien, para ser más precisos, deberíamos hablar de masa, ya que la masa es la cantidad de materia que tiene un cuerpo, es una magnitud escalar y el peso es una magnitud vectorial (los conceptos de magnitud escalar y vectorial se vieron en el Capítulo II), pues el peso es la fuerza con que la tierra atrae a un objeto,

y esto supone un módulo, una dirección y un sentido. La fuerza con que es atraído un objeto depende de donde se encuentre. Así, podríamos observar que si pesáramos un objeto en la Tierra y en la Luna, los resultados serían distintos. Si pesamos dos objetos en un mismo lugar de la Tierra, sus pesos sólo dependen de sus masas, luego dos objetos con la misma masa en un mismo lugar de la Tierra pesarían lo mismo. Por esto, a este nivel, no vamos a diferenciar el peso de la masa.

Veamos algunas actividades que pueden ayudar a los niños a familiarizarse con el peso:

1. Se le deja al niño “la cesta del tesoro” (en donde se encuentran los juguetes preferidos del niño o, como dijimos antes, un batiburrillo de objetos diversos), cajas de diferentes tamaños y una balanza con dos platillos, para que compare los pesos de los objetos que tenemos en la cesta. Después le decimos que coloque en una misma caja los objetos que pesen lo mismo y que ordene las cajas, de mayor a menor, según el peso que tienen los objetos que contienen.

2. Se toman dos bolas de plastilina; las ponemos en los dos platillos de la balanza y observamos que se mantiene en equilibrio. Luego hacemos, con una de ellas, una salchicha o una tarta, y le preguntamos al niño si pesan igual o si alguna pesa más que la otra. Se pretende que el niño vaya desarrollando la idea de conservación, que es fundamental para que adquiera la idea de peso.

3. Un experimento parecido al anterior aunque en este caso no empleamos una magnitud continua sino discreta (los conceptos de magnitudes discretas y continuas ya fueron estudiados en el Capítulo II) se puede llevar a cabo con los bloques de Lego (un “ladrillo” compuesto por bloques más pequeños que se puede descomponer y cuyas piezas se pueden colocar de forma larga y estrecha). Y la pregunta es análoga a la anterior.

4. Se dispone de dos juegos de muñecas rusas encajadas; se le pregunta al niño si el juego de muñecas encajadas pesa más, menos o igual que el correspondiente juego con las muñecas separadas.

5. Con una balanza, el niño tiene que decir cuál es la más pesada de dos cajas de lápices de colores que tienen el mismo volumen. Después se sacan los lápices de una de ellas, dejándolos aparte, y se le vuelve a hacer la misma pregunta.

6. En un platillo de la balanza se pone un globo y se equilibra con caramelos. Esto lo observa el niño. Se quitan el globo y los caramelos de

la balanza y se le pregunta al niño si pesan igual, si pesan más los caramelos que el globo o al contrario.

7. Le dejamos al niño una balanza de dos platillos para que ponga en distintas bolsas de plástico chapas, canicas, patatas, arroz, lentejas, etc. que pesen lo mismo.

8. Ya que conoce la unidad de medida, el kilogramo, se le pregunta al niño: “¿qué pesa más un kg de plomo, o un kg de caramelos, o un kg de paja, o un kg de aire?”.

9. El niño debe poner los objetos que desee en los platillos de la balanza de modo que consiga equilibrarlos con pesas de 1 kg, 1/2 kg y 1/4 kg.

10. Después de haber estado pesando el niño, le decimos que dibuje y enumere los objetos que recuerde que pesan más o menos que 1 kg, más o menos que 1/2 kg.

11. Cuando la mamá o el papá hacen la comida, hay veces que pesan los ingredientes, por eso podemos decirle al niño que observe a mamá o a papá hacer alguna comida y que nos cuente cómo la ha hecho.

**Ejercicio:** Vistas estas actividades, le pedimos al alumno-profesor que realice otra inventada por él, sobre el peso, que conlleve trabajar sobre la conservación y la unidad de medida.

### 3.3.4.5. El volumen y la capacidad

No es difícil confundir estos dos conceptos, además, estas dos ideas están muchas veces ligadas a la noción de peso. Hay varias opiniones a la hora de hablar de volumen y de capacidad. Nosotros, cuando hablemos de volumen, nos referiremos a volumen externo, entendido como cantidad de espacio ocupado por un objeto, mientras que cuando hablemos de capacidad, entenderemos el volumen interno, el llenado total o parcial de formas huecas. Parece ser que la noción de capacidad es más fácil para el niño que la de volumen.

Proponemos algunas actividades que ayudarán a una posterior interiorización de ambos conceptos:

1. Con los bloques lógicos se pueden coger dos triángulos —o dos cuadrados— delgados y uno grueso, y preguntarle al niño si ocupan el mismo espacio. Con esto planteamos un problema de conservación.

2. Tenemos los bloques multibase, tomamos una placa y, según la base que hayamos elegido, tomamos las barras necesarias para formar una placa. Colocamos las barras alineadas y realizamos la misma pregunta.

3. Tomamos un cubo grande de los bloques multibase, y un número de cubitos pequeños suficiente para formar el cubo grande. Le decimos al niño que forme un cubo grande con los cubitos pequeños y le preguntamos: “¿ocupan más, menos o el mismo espacio los cubitos pequeños que el cubo grande?”; “¿cuántos cubitos pequeños necesitamos para formar el cubo grande?”. Después separamos los cubitos pequeños que formaban el cubo grande y volvemos a hacerle las mismas preguntas.

4. Se le da una cajita y los bloques multibase para que llene la cajita con ellos. Después se le pregunta: “¿cuántos cubitos pequeños has necesitado para llenar la cajita?” Al alumno-profesor le preguntamos: ¿qué magnitud estamos trabajando? ¿Hemos empleado alguna unidad de medida? En caso afirmativo, ¿cuál?

5. De forma análoga a como hemos hecho para trabajar la superficie podemos hacer con el volumen. En este caso, con plastilina podemos hacer dos ortoedros de plastilina y cortar uno de ellos por la diagonal del rectángulo de la base de modo que obtengamos dos prismas rectos iguales, de base un triángulo rectángulo. Le hacemos al niño que forme la figura original y luego le preguntamos: “¿cuál ocupa más volumen?”.

Lo mismo podemos hacer con prismas rectos con base un polígono equilátero cualquiera, descomponiéndolos en prismas rectos triangulares.

6. Se le dan dos vasos de la misma forma y tamaño, con bebida, a dos niños. Una vez que han aceptado que los dos tienen la misma cantidad de líquido, se vierte el vaso que tiene uno de los niños, en otro vaso más largo y estrecho, se le plantea a alguno de ellos si tiene la misma cantidad, más o menos que su amigo. Este experimento fue realizado por Piaget, y observó que los niños pequeños consideran que tiene más líquido el vaso en el que alcanza mayor altura.

7. Podemos coleccionar, entre nosotros y los niños, recipientes que puedan retener líquidos y que tengan la misma o distinta capacidad, por ejemplo: botellas de vino o de refresco, botellas de plástico, botes, vasos, latas de pintura, probetas graduadas... para que el niño establezca una clasificación y una ordenación teniendo en cuenta la capacidad del recipiente.

8. Le damos una cuchara, un vaso pequeño, un dedal, una probeta, una botella de vino, una botella de refresco, una taza y un vaso grande. El niño tiene que ir ordenando de mayor a menor según la capacidad de cada uno de los recipientes. Si están motivados con esta actividad, se les puede proponer, por ejemplo, que vean cuántos vasos grandes caben en la botella de vino. Con ello está estableciendo una clasificación y una ordenación, en la primera parte; y en la segunda una medida.

9. Tomamos 5 cubitos pequeños de los bloque multibase, con ellos el niño puede construir diferentes figuras que tengan el mismo volumen. Se les sugiere que las coloquen de forma distinta y que digan si el volumen es igual, mayor o menor en cada caso.

10. Cuando la mamá o el papá hacen la comida, hay veces que emplean una unidad de medida de capacidad para tomar los ingredientes, por eso podemos decirle al niño que observe a mamá o a papá hacer alguna comida y que nos cuente cómo la ha hecho.

**Ejercicio:** En cada una de estas actividades el alumno-profesor debe indicar qué conceptos trabaja el niño, si hay alguno más de los que indicamos nosotros.

**Ejercicio:** Propón algunas actividades que pueda realizar el niño, relacionadas con el volumen y con la capacidad. Indica qué conceptos trabaja. Realízalas empleando alguna técnica de Metodología Creativa. Se sobreentiende que este ejercicio es también para el alumno—profesor.

### 3.3.4.6. La temperatura

Este concepto difiere de las magnitudes estudiadas hasta ahora, ya que, por ejemplo, si ponemos una regla seguida de otra, la longitud total será la suma de las longitudes de cada una de ellas. Sin embargo, si ponemos un vaso de agua a una temperatura y le añadimos otro a otra temperatura, la temperatura de todo no es la suma de ambas temperaturas. Es por eso por lo que no la consideramos como magnitud, ya que no se puede definir una ley de composición interna entre sus elementos, aunque sí se puedan efectuar sus medidas. Ya hemos comentado en el Capítulo II que la temperatura no es una magnitud aunque conlleva una medida.

Como el niño empieza a ponerse en contacto en este periodo con este concepto que conlleva una medida, cuya realización es análoga a otras de las que estudiamos, es por lo que no hemos querido dejarlo al margen.

Cuando se trabaja la temperatura es corriente que el niño tenga dificultades de percepción, por tener que observar la longitud de la columna de mercurio —o de cualquier líquido coloreado de que esté hecho el termómetro— y la posición del extremo sobre una escala numérica, lo cual se parece poco a lo que se está midiendo. Una vez salvada esta dificultad inicial, si tiene clara la idea de longitud y sabe leer sobre una escala numérica, está en condiciones de observar la temperatura.

Si el termómetro es de lectura digital, la dificultad para su lectura será análoga a la lectura del tiempo en un reloj digital. Por tanto, es bueno tener un termómetro en clase para leer la evolución de la temperatura a lo largo del día.

### 3.3.4.7. El tiempo

El que el niño sepa decir la hora que marca el reloj, no comporta que haya adquirido el concepto de tiempo, ya que puede leer una esfera sin tener ni idea de lo que hay en ella. Aunque parece ser, según un estudio realizado por Lovell (1966), que esto es lo que más le cuesta al niño.

La preocupación por la lectura del reloj puede entorpecer la adquisición del concepto de tiempo, ya que si a un niño, en una misma actividad, le ponemos varios relojes con distintas horas para que los lea, es posible que no sepa que en un instante dado las manecillas del reloj sólo pueden tener una posición y además puede que no se dé cuenta de la forma en que avanzan las manecillas, ni comprenda la relación entre la velocidad de giro de las diferentes agujas.

El que el maestro disponga de un reloj y vaya cambiando las manecillas para que los niños digan la hora, es probable que tampoco beneficie la adquisición del concepto de tiempo, ya que la idea de que el tiempo va corriendo continuamente (es una magnitud continua —concepto estudiado en el Capítulo II—), puede que le cueste más adquirirla.

Es conveniente relacionar la lectura del reloj con actividades que tengan interés para el niño, como por ejemplo, la hora de levantarse, la de ir al colegio, la del recreo, la de volver a casa, la del almuerzo, la de algún programa de televisión, la de acostarse, etc., aunque no correspondan a horas exactas, ya que puede ser el inicio para decir la hora.



Según Piaget (1978), antes de que el niño adquiriera la noción de tiempo ha de aprender dos hechos importantes: que hay series de sucesos que acontecen en un orden temporal y que entre estos sucesos median intervalos, cuya duración hay que apreciar.

El niño no sabe decir si es por la mañana o por la tarde hasta los 6 años, por termino medio, según Bradley (1948). Según este mismo estudio, para usar palabras como semana, mes y año, el niño ha de tener 8 años.

Es importante que el niño adquiriera la idea de que el tiempo es un flujo continuo, sin relación con la cantidad de trabajo realizado, ya que el niño entiende la duración del tiempo en función de la distancia recorrida o de las percepciones visuales. Y hay que tener en cuenta que mientras él está diciendo la hora que es, ya no es esa hora, pues ya ha pasado algún tiempo y es un poco más tarde.

Los relojes de arena y los cronómetros son instrumentos de medición muy útiles para medir actividades que realiza el niño en un corto periodo de tiempo. Los minutos y los segundos son unidades de tiempo más accesibles que la hora, ya que el niño puede concentrarse con más facilidad durante un corto periodo de tiempo.

No se sabe si los relojes digitales contribuyen a que el niño se forme la noción de que el tiempo es una magnitud continua. Sin embargo, el niño encuentra bastantes dificultades hasta que llega a poder decir la hora que es. Para decir, por ejemplo, cuando el reloj marca las 5:45, que son las seis menos cuarto, necesita conocer la relación entre los números. Igual pasa con los relojes de 24 horas, cuando el niño se encuentra, por ejemplo, con las 15:30, también necesita conocer la relación entre los números para poder decir que son las tres y media.

Cuando el niño tiene dificultad de orientación espacial: le cuesta distinguir entre izquierda y derecha, por ejemplo, o entre arriba y abajo, tendrá dificultad para distinguir el 6 y el 9, y entre las tres en punto y las nueve en punto, por ejemplo.

Cuando el niño se inicia en la lectura del reloj, es conveniente decirle que el reloj marca la hora, pero no nos dice si es por la mañana o por la tarde o qué día de la semana es, salvo que el reloj tenga otra ventana para el día de la semana y del mes.

Poner el reloj a una hora determinada suele tener más problema que leer una hora dada.

**Ejercicio:** Dejamos pendiente para que el alumno-profesor compruebe con los niños de Educación Infantil que conoce si son ciertas las afirmaciones que aquí se dan.

Veamos algunas actividades que se pueden llevar a cabo con los niños:

1. Se pone una música que les guste, y vamos todos moviendo las manos al compás del ritmo, se le cambia la música y los niños tendrán que cambiar el ritmo.

2. Mostramos a los niños una secuencia de fotografías de un acontecimiento que ellos han observado previamente (una botella llenándose, un objeto cayendo, un ejercicio de gimnasia...) y se les dice que coloquen las fotografías por orden. Este experimento fue realizado por Piaget, y comprobó que no lo consiguen hasta los 7 u 8 años, por término medio, ya que para realizar esta actividad tienen que tener la capacidad de invertir una operación, y esto no se consigue hasta el periodo de las operaciones concretas.

3. Se le da al niño una serie de figuras que representan la secuencia temporal de un cuento conocido por él o de una actividad que él haya vivido, como puede ser, hacer un bizcocho con papá o con mamá o una excursión realizada con el colegio, para que las ordene.

4. Piaget (1972) realizó el siguiente experimento: Se le enseñaron dos muñecas a un niño, una azul y otra amarilla que caminan a lo largo de segmentos paralelos e iguales. Puso a andar a las dos muñecas a la vez, empezando cada una en uno de los extremos del segmento. La amarilla caminaba más rápido que la azul; la amarilla, después de detenerse en medio del segmento, llegó al extremo de éste, y ahí se detuvo de nuevo; mientras, la azul sólo había recorrido la cuarta parte del segmento, se paró y más tarde siguió andando el doble de tiempo que la amarilla, pero sólo llegó a la mitad del segmento. Se le preguntó: “¿se pararon a la vez?”; “¿cuál se paró primero?”; “¿cuál se movió durante más tiempo?”; al final, “¿se paró una antes que la otra?”; etc.

5. Se puede realizar un ejercicio análogo, si los niños encuentran dificultad en el anterior, empezando a andar a la vez, un niño y el maestro juntos, desde un lugar de la clase al extremo opuesto, llegando simultáneamente. Se le pregunta si han tardado el mismo tiempo. Después se vuelve a poner en el mismo lugar donde iniciaron la marcha anteriormente, caminando cada cual a su ritmo, llegando el maestro antes, y se le vuelve a preguntar: “¿llegaron a la vez?”; “¿quién tardó más tiempo?” Por último pueden ponerse de acuerdo en pararse en el trayecto como lo hacían las muñecas y se les plantean las mismas cuestiones.

6. Se abren a la vez dos grifos que manan la misma cantidad de agua, comprobamos antes que eso es así. Se ponen botellas de diferentes tamaños en cada uno de los grifos, y se corta el agua a la vez, en el momento en que la botella pequeña se ha llenado. Se le pregunta al niño: “¿hemos cerrado los grifos al mismo tiempo?”.

7. Se le puede preguntar al niño: “¿qué día de la semana es en Málaga?”, y después, “¿qué día de la semana es en Torremolinos?”, por ejemplo. Se ha comprobado que dan diferentes respuestas.

8. Tomamos una vela de cera y con un rotulador de color, le hacemos varias señales paralelas entre sí de modo que la distancia de una a otra sea la misma. Le decimos al niño que cuente un cuento comentando lo que hizo ayer, mientras la vela consume un tramo de los señalados.

9. En la clase tenemos un almanaque, y en él vamos a señalar los cumpleaños de cada uno de los niños de la clase. Se les sugiere que eso pueden hacer con el almanaque que tengan en casa, señalar el cumpleaños de papá, mamá, los hermanos, los abuelos, los primos, los amiguitos, etc. Si ellos no saben cuándo es el día de su cumpleaños, deben preguntárselo a mamá o a papá y decírnoslo al día siguiente.

10. Le decimos al niño que se invente un reloj que sea distinto de los que él conoce, para que nos permita de una vez ver todas las horas del día. En los modelos de relojes que cada niño ha hecho, que podrían ser como el del dibujo

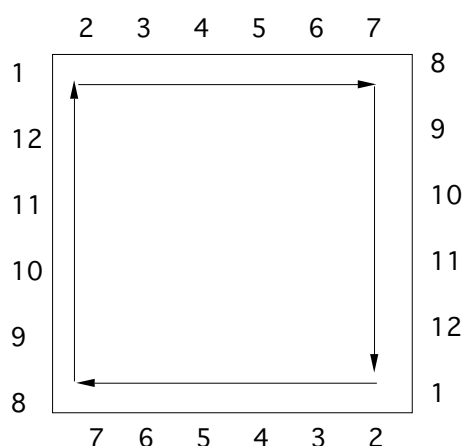


Figura 41: Ejemplo de un nuevo reloj.

se le pide al niño que señale con una flecha cómo van avanzando las horas a lo largo del día desde que se levanta. Que coloree en rojo las horas que está en clase y en verde las que pasa durmiendo. ¿Cuántas horas le quedan? ¿Qué hizo en cada una de esas horas ayer?

Este reloj se podría haber completado con el día de la semana y del mes, que podría haber quedado en el centro del cuadrado, pasando dos tiras de cartón por medio, lo que nos permitiría plantearles muchas más cuestiones.

11. Para que el niño adquiriera la idea de que el tiempo es un flujo continuo es importante el empleo del reloj de arena. Cuando el niño está escuchando música podemos tener el reloj de arena delante y puede ir observando las veces que le damos la vuelta. También puede observar cuánto tiempo dedicamos a hacer algún juego o alguna otra actividad.

**Ejercicio:** Le proponemos al alumno-profesor que se invente alguna actividad temporal que pueda realizar el niño para que se vaya familiarizando con la hora a la que se acuesta, se levanta, almuerza, va de paseo, etc. Utilizando para ello alguna técnica de Metodología Creativa.

### 3.3.4.8. Las monedas

El sistema monetario proporciona un método para saber el valor económico de los objetos mediante cierto número de unidades patrón, si bien, estas unidades han sido elegidas arbitrariamente.

No existe una forma de medir el valor económico de una cosa; éste está determinado por una persona o un grupo de personas. Para averiguar un precio tendremos que leer un cartel o preguntarlo. Si bien parece que las básculas utilizadas en algunos supermercados nos dan un precio, aunque en realidad lo que hacen es, una vez establecido el precio unidad, calcular el precio en función del peso que tenga el objeto que compramos.

En el sistema monetario español, y antes de que desapareciera la peseta, la moneda de menor valor era la de una peseta y cuando ésta desapareció el céntimo de euro pasó a ser la moneda más pequeña. Para calcular el valor de una cosa tendremos que aproximar su valor a la moneda de menor valor. Por ejemplo, si un paquete de 10 chicles nos costaba 85 pesetas, cada chicle habría costado 8'5 pesetas, pero esto no podríamos pagarlo, ni tiene sentido. A pesar de todas estas dificultades el dinero es el sistema de medida con el que nos relacionamos con más frecuencia.

Gibson (1981) considera tres niveles para el manejo del dinero:

a) Reconocimiento de las monedas, para lo cual al niño se le irán enseñando progresivamente las monedas y el papel moneda que exista de curso legal.

b) Equivalencias, que requiere la comprensión del valor de cada moneda, y exige haber comprendido el sistema de los números 0, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100... y la relación entre ellos -estos números- previamente.

Es necesario valorar cada moneda o billete en función de:

i) Su valor relativo (por ejemplo, una moneda de 1 euro vale más que una de 20 céntimos de euro, pero menos que una de 2 euros).

ii) Su valor en unidades (una moneda de 20 céntimos de euro vale lo mismo que 20 monedas de 1 céntimo de euro).

iii) De otras equivalencias (una moneda de 2 euros vale lo mismo que 4 de 50 céntimos de euro).

Trabajando con las equivalencias utilizamos a su vez otras nociones básicas del número, como la conservación, el recuento, la ordenación, la adición, la multiplicación, etc. Podemos, o bien esperar a que el niño tenga asimiladas las nociones del número antes de introducirlo en las monedas, o introducirle las nociones de número usando las monedas como ejemplo concreto, o desarrollar los dos temas a la vez. Aunque parece ser que el dinero puede resultar menos claro que otros materiales para introducirlos en el número, ya que no es obvio que un billete de 5 euros sea equivalente a cinco monedas de 1 euro, salvo que lo aceptemos así, es interesante que el niño trabaje esta magnitud ya que la utilizará con asiduidad.

c) Situaciones prácticas: el proponer problemas prácticos ayuda al niño a resolver situaciones cotidianas de compra y venta y quizás le ayude a comprender las relaciones numéricas subyacentes.

Veamos para cada uno de estos tres aspectos actividades análogas a las propuestas por Gibson —en 2, 6, 8, 9, 10 y 11— y algunas otras que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Por supuesto que todas ellas se resolverán proporcionando a los niños monedas y objetos.

1. Cuando el niño esté iniciado en la lectura, le daremos monedas y billetes, y le diremos que separe las monedas de los billetes; con ello establecerá una clasificación. Después le daremos dos monedas, una de céntimo de euro y otra de 20 céntimos de euro, por ejemplo, y le

preguntaremos si son iguales. Le podríamos decir que separara por colores y después que pusiera en un mismo montón las que valieran lo mismo. Al ir observando las monedas y los billetes el niño, si sabe leer, va a ir leyendo los números que hay grabados en ellos. Hacemos una clasificación más fina que la anterior, ya que tiene más clases de equivalencia.

**2. Comparar el grado de dificultad de las siguientes actividades:**

-Le enseñamos al niño una foto con sus tres amiguitos, y un montón de monedas de un céntimo de euro, y le decimos: “Si quieres darle 4 céntimos de euro a cada uno de tus amiguitos, ¿cuántos céntimos de euro necesitas en total?”.

-Le mostramos 3 coches de juguete. Cada uno tiene 4 ruedas. Le preguntamos: “¿cuántas ruedas hay en total?”.

**3.** Se utiliza una ruleta de la fortuna; los jugadores tratan cada uno de ser el primero en formar con sus propias monedas la cantidad, en céntimos de euro, que salga en la ruleta. Pierde el último que la forme.

**4.** Con este juego se pretende que el niño coja soltura en contar diferentes sumas de dinero a partir de monedas dadas. Tenemos un cuadrado grande dividido en 25 cuadraditos pequeños numerados, y escrita una cantidad, de céntimos de euro, en cada uno de ellos. Unos cuadraditos son blancos y otros sombreados. Van a jugar dos jugadores que disponen cada uno de un dado y una ficha. Cada jugador tiene 50 céntimos de euro, y en el banco hay otros 50 céntimos de euro. Se lanza el dado por turno y se mueve la ficha tantos lugares como marque el dado. Si cae en cuadro blanco, se toma del banco la cantidad que indique la casilla. Si cae en cuadro sombreado se paga al banco la cantidad que señale la casilla. Gana el juego quien tenga más dinero cuando uno de los jugadores llegue a la última casilla.

**5.** Pretendemos con este juego que el niño adquiera destreza en formar cantidades dadas a partir de cierto número de monedas. Es un juego para dos jugadores. Disponemos de tres columnas; en la primera columna ponemos números de céntimos de euro, en la segunda columna vamos indicando los aciertos o fallos del primer jugador y en la tercera los del segundo jugador. Uno de ellos lanza dos dados, que le dicen el número de céntimos de euro que puede tomar del banco, si forma la cantidad que le ha salido y que ponemos en el lugar correspondiente de la primera columna. Después lanza el segundo jugador y hace lo mismo. Gana el jugador que tenga más dinero al terminar el juego.

6. El niño tiene una moneda de 50 céntimos de euro, cuatro de 20 céntimos de euro y cinco de 10 céntimos de euro y quiere pagar 40 céntimos de euro. “¿Tiene bastante dinero para pagarlo?”. “¿Cómo podría hacerlo?”. “¿Le tendrían que devolver?”. “¿cuánto?”. “¿Y si quiere pagar 70 céntimos de euro?”. Todo lo hacemos teniendo las monedas delante. Vale con que dé una solución.

7. Un niño tiene dos monedas de 10 céntimos de euro y tres de 1 céntimo de euro, le debe 17 céntimos de euro a otro niño que a su vez tiene una moneda de 50 céntimos de euro, dos de 10 céntimos de euro y una de 5 céntimos de euro. “¿Cómo harían la operación?”.

Este ejercicio suele resultarles muy difícil, a pesar de tener el dinero delante; puede ser para superdotados. Se puede conseguir rebajar el nivel de dificultad dándole a alguno de los niños más monedas sueltas: al deudor para que pueda pagar con más facilidad o al acreedor para que le resulte más cómodo dar la vuelta. También se podría tomar menor número de céntimos.

8. Quiero comprar una bolsa de caramelos que cuesta 37 céntimos de euro y sólo tengo una moneda de 50 céntimos de euro. “¿Puedo comprar los caramelos?”. “¿tengo bastante dinero o me falta?”. Si no me falta, “¿me tendrían que devolver algo?”. “¿qué monedas deberían darme?”. Es suficiente con que dé una respuesta.

9. Si quiero comprar caramelos que cuestan 30 céntimos de euro, ¿cuántas monedas tendría que dar para comprarlos?

10. Tenemos dos monedas de 50 céntimos de euro. Si compramos un lápiz que cuesta 20 céntimos de euro, “¿cuánto nos queda?”.

11. Quiero comprar gominolas que cuestan 15 céntimos de euro, y una naranja que cuesta 8 céntimos de euro. “¿Cuánto tengo que pagar por ello?”. Si le doy al comerciante 25 céntimos de euro, “¿me tiene que devolver algo?”. En caso afirmativo, “¿cuánto?”. También para superdotados.

**Ejercicio:** Le proponemos al alumno-profesor que se invente algunas actividades para que el niño trabaje con las monedas, empleando alguna técnica de Metodología Creativa para llevarlas a cabo.

**Ejercicio:** En todas las actividades en que no se haya hecho, el alumno-profesor debería indicar si se ha establecido una clasificación, si hemos trabajado la adición, el producto por un escalar, la medida de una magnitud, etc.



En el siguiente poligrama relacional de síntesis indicamos el proceso que hemos considerado para poder iniciar al niño en el conocimiento de la medida de las distintas magnitudes. Hemos incluido la temperatura, aunque ya sabemos que no es una magnitud, pues el niño puede trabajarla en Educación Infantil y es medible. Vemos, por tanto, la relación de las distintas cualidades de los objetos que se pueden medir con la génesis del concepto de medida, la conservación, la transitividad y la unidad de medida.

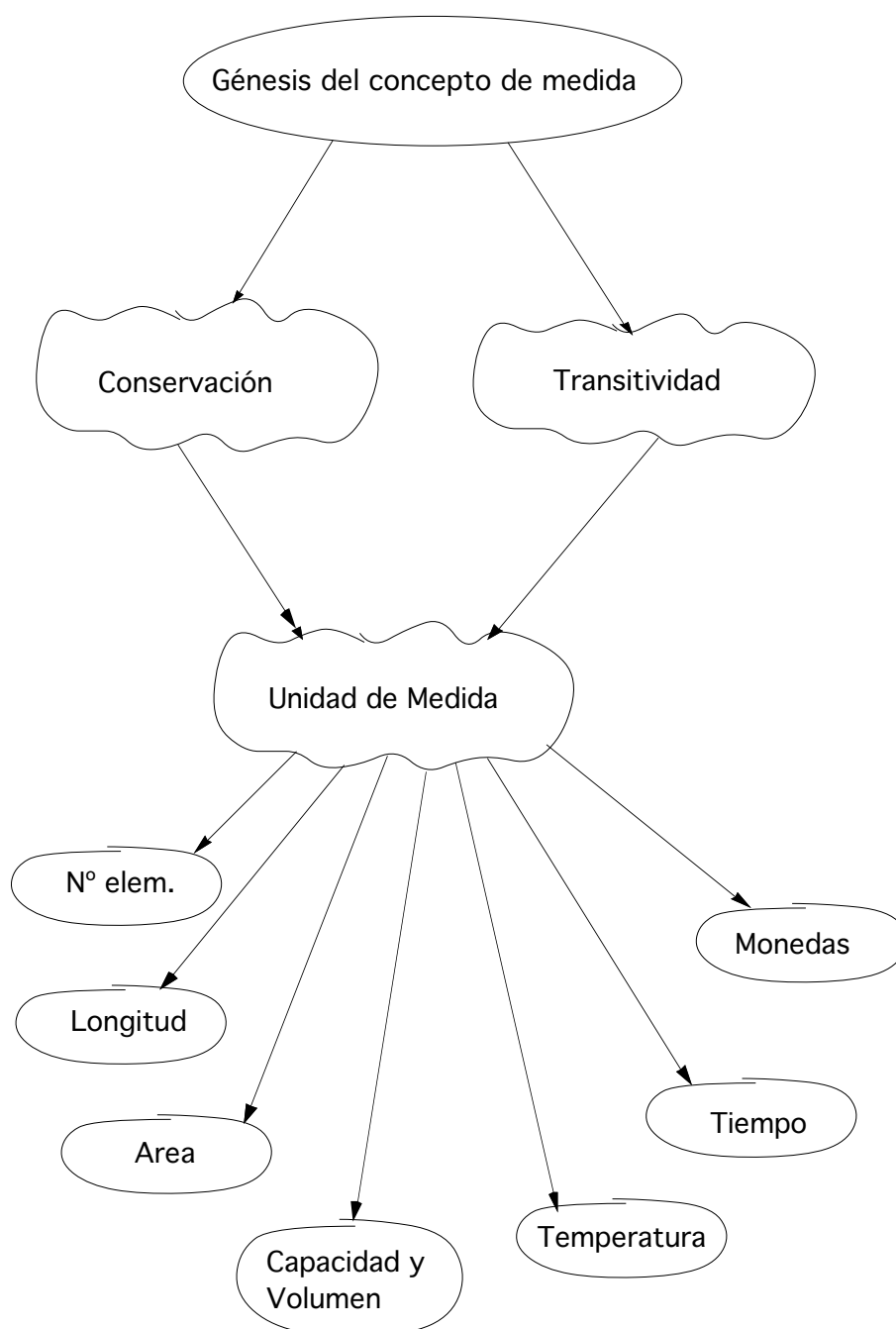


Figura 42: Poligrama relacional de síntesis de las medidas del último estadio de Educación Infantil.

Nos hemos detenido más en este primer estadio por ser el objetivo de nuestro estudio. Comentamos los demás con el objeto de completar los estadios cognitivos del niño sobre el tema “las Magnitudes y su Medida”. Además, tengamos en cuenta que, como indica Piaget, los periodos cronológicos son siempre indicativos, pudiendo haber variaciones considerables de unos niños a otros, por eso el profesor debe comprobar en qué periodo se encuentra cada niño con respecto a la captación de las ideas de conservación, transitividad y unidad de medida.

### **3.3.5. Estadio en el que el niño comienza a entender la conservación y la transitividad**

El niño muestra que empiezan a desarrollarse en él las ideas de conservación y transitividad cuando utiliza como instrumento de medida algún elemento intermedio, por burdo que sea, como puede ser cuando hace referencia a su propio cuerpo para comparar longitudes. Comprende que si ha usado más unidades para cubrir un objeto que para cubrir otro, el primero es más grande que el segundo. No entiende la necesidad de que las unidades de medida deban tener el mismo tamaño. Tiene dificultad para medir en distintas direcciones. Esta etapa se alcanza más o menos hacia los 6 ó 7 años de edad. Piaget nos dice que hacia el final de este estadio empiezan a desarrollarse las nociones de longitud y área, y lo hacen simultáneamente. Sin embargo, Carpenter (1976) pone en duda la coincidencia de este desarrollo.

### **3.3.6. Estadio en el que el niño se inicia en la conservación y en la transitividad**

El niño sabe medir la altura de una torre: es capaz de construir otra de la misma altura utilizando una vara de medir que sea más larga que la altura de la torre o por lo menos de la misma altura; es capaz de señalar dicha altura sobre la vara con el dedo o con un lápiz y usar esta marca como guía para construir la segunda torre. Pero el niño no sabe utilizar instrumentos de medida que sean más cortos que la torre.

Empieza a iniciarse en las mediciones de áreas encerradas en un contorno y va entendiendo la conservación de las cantidades de materia, por ejemplo, la cantidad de líquido. Si se vierte una misma cantidad de líquido en dos recipientes, uno estrecho y fino y otro ancho y bajo (ocupa el lugar 11 de las actividades que proponemos sobre conservación, transitividad y unidad de medida), el niño se da cuenta de

que hay la misma cantidad de líquido aunque alcancen alturas distintas en cada caso. A este estadio se llega hacia los 7 u 8 años de edad.

### **3.3.7. Estadio en el que el niño capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto que hay que medir**

La idea de medición por recubrimiento con unidades más pequeñas del objeto que hay que medir se alcanza aproximadamente de los 8 a los 10 años. Hasta ahora la medición se ha realizado por tanteo, por un proceso de ensayo y error. Según Piaget, el desarrollo de los conceptos de medida lineal, superficial y de capacidad, son simultáneos, siendo posterior la medida de volumen, entendida como cantidad de espacio ocupado por un objeto determinado; eso sucede porque no podemos recubrir o llenar el espacio ocupado por el objeto con unidades de medida, sólo se puede observar la superficie. Empieza a distinguir entre capacidad y volumen. Hacia los 9 ó 10 años de edad el niño empieza a aprehender la idea de conservación del peso.

### **3.3.8. Estadio del pensamiento operacional formal**

Es el final en el desarrollo de las nociones de medida. Piaget afirma que a esta etapa se llega hacia los 11 o 12 años de edad, aunque otros psicólogos (Shayer, Küchemann y Wylam, 1976) sitúan esta etapa mucho más tarde para la mayoría de los niños, e indican que algunos no llegan a ella, sólo utilizan las fórmulas de memoria. El niño que llega a este estadio de desarrollo es capaz de medir áreas y volúmenes mediante cálculos basados en las dimensiones lineales. Según Piaget, una característica de que se ha llegado al final de esta etapa es la capacidad de entender que el espacio es un continuo, que contiene un conjunto infinito y continuo de puntos. Para Piaget la medida no será plenamente operativa hasta que no se hayan adquirido las ideas de infinito y de continuo.

Según Carpenter (1976), se acepta que una adecuada preparación y entrenamiento pueden acelerar el desarrollo de los conceptos de medida específicos. Además, el adiestramiento en la medición puede acelerar el desarrollo de las nociones de conservación y transitividad, más que depender de ellas.

### 3.4. Actividades creativas

Con el nombre de **actividades** se suele designar a los ejercicios, las tareas, los juegos, las pruebas, etc., que generalmente son realizadas por el niño, bien de forma individual o colectiva. Si éstas se llevan a cabo en la escuela o durante el horario escolar, aunque no sea en el recinto del colegio, por indicación del profesor, les vamos a dar el calificativo de **escolares**; para realizarlas puede ser ayudado, orientado, por el profesor o por otro —u otros— compañero —compañeros— o bien serán ejecutadas por él sólo. Las actividades que el niño lleve a cabo sin la indicación del profesor, por iniciativa propia, o del grupo de amigos, o de los familiares, serán actividades **no escolares**.

Es cierto que no todos los juegos que se llevan a cabo con niños se pueden considerar actividades solamente. Mediante algunos de ellos el niño se recrea en lo que está haciendo, se evade, se distrae, reinventa la realidad, etc., convirtiéndose por ello éstos en una actividad agradable. Por todo esto consideramos este tipo de juegos más que como simple actividad, como técnica, y los estudiamos en el Capítulo I en ese apartado.

Las actividades suelen ser el paso previo a la explicación de una idea abstracta. Mediante las actividades el niño llega a dominar los contenidos.

A las **actividades** les vamos a dar el calificativo de **creativas** cuando vayan orientadas a desarrollar la creatividad. Muchas metodologías didácticas surgieron a través de la experiencia y muchas técnicas metodológicas nacieron de simples ejercicios. También fue la resolución de algunos problemas, en apariencia simples, la que dio lugar a grandes descubrimientos matemáticos.

No todas las actividades escolares se suelen presentar de manera creativa, aunque debería hacerse. De la Torre (Marín y De la Torre, 1991: 77—78 y 86) dice que: *Las actividades creativas son aquellos ejercicios concretos, de aplicación individual o colectiva, dirigidos a la estimulación creativa, ya sea con finalidad sensoperceptiva, de ejercitación en la divergencia o en alguno de los factores atribuidos a la creatividad: fluidez, flexibilidad, originalidad, inventiva, etc. (...)*

*Su grado de formalización es mínimo, caracterizándose por la flexibilidad y la diversidad de alternativas con que puede presentarse, improvisación y variada reiteración. (...)*

*Las actividades pueden formar parte, y de hecho lo hacen, de las técnicas, dando a éstas un carácter variante. (...)*

*Las actividades no reclaman preparación técnica en profesores o monitores. Simplemente basta con tener clara la meta que se persigue e idear ejercicios para conseguirla. En suma, las actividades creativas son el paso obligado de todo modelo, programa, método y técnica creativa. Cualquier categoría didáctica se operativiza y resuelve a través de actividades concretas de igual modo que una teoría cobra sentido al contraste con la realidad a la que pretende explicar.*

*Métodos, técnica y actividades son los instrumentos fundamentales para fomentar la ideación y desarrollar la inventiva.*

No podremos decir que son creativas las actividades en las que predomine la repetición, la ejercitación para la reproducción, la simple comprensión o la aplicación inmediata. Este tipo de **actividades** serán **no creativas**. El objetivo de las actividades que se propongan al niño en la escuela —la práctica— es el de que entiendan los contenidos que se les imparten —la teoría. Las actividades tienen que dejar muy claro lo que se pretende con ellas, para evitar caer en el “hacer por hacer”. De la misma forma que para entender suficientemente la teoría necesitamos la práctica, la práctica tiene que estar cimentada en una teoría, si no, no nos sirve para nada.

Es por lo que De la Torre (Marín y De la Torre, 1991: 79 y 80) dice: *La teoría sin práctica es manca, la práctica sin la teoría que la guíe, es ciega. (...) Si la tarea no va acompañada de una visión más amplia, de unos propósitos que la justifiquen didácticamente, podemos caer en la mera ejercitación.*

Para proponer actividades debemos tener en cuenta: en qué área se aplica la actividad, cuál es el nivel formativo de los sujetos, qué nivel creativo se persigue, qué tipo de agrupamientos requiere, etc. Todo esto dará lugar a una clasificación de las actividades creativas. (Para profundizar más en dicha clasificación puede consultarse Marín y De la Torre (1991: 77 a 89).)

### 3.5. Actividades utilizando cada una de las técnicas de Metodología Creativa

En el Capítulo I vimos distintas técnicas de Metodología Creativa; pero como aún no teníamos los conocimientos suficientes sobre los contenidos en donde las íbamos a utilizar, ni sobre la génesis del concepto de medida, no nos atrevimos a proponer ninguna actividad empleando las distintas técnicas. Ahora ya tenemos todo ese bagaje de conocimientos y, por tanto, estamos preparados para proponerlas.

Las actividades que nosotros veremos a continuación van a ser sobre Matemáticas, y en concreto sobre el tema “las Magnitudes y su Medida”. El nivel será de Educación Infantil de 3 a 6 años, casi siempre, ya que, como hemos visto y comentado anteriormente, debido al nivel madurativo del niño, son muchas las actividades que podemos llevar a cabo con las distintas magnitudes que el niño trabaja —o puede trabajar— y que corresponden a este periodo.

Como pretendemos que el alumno de Magisterio sea capaz, cuando termine sus estudios, de preparar actividades creativas, también, en algunos casos, habrá actividades que irán dirigidas al futuro maestro.

El nivel creativo que tendremos en cuenta será: expresivo, productivo, inventivo, innovador y emergente (ver Marín y De la Torre, 1991: 84 a 89). Los tipos de agrupamientos dependerán de cada actividad y de la técnica de Metodología Creativa que queramos utilizar, serán unas veces a nivel individual, otras a nivel de pequeño grupo —de 2 a 6 niños— y otras a nivel de gran grupo —toda la clase.

### 3.5.1. Actividades utilizando la técnica el arte de preguntar

**Ejemplo 1.1:** Se le presenta al niño un objeto que nos pueda servir para medir alguna magnitud, por ejemplo, la balanza

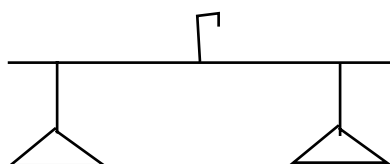


**Figura 43: Balanza.**

y se le plantean algunas preguntas elegidas entre las que indicamos a continuación:

i) **Sustancia:** “¿Qué es?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirve?”; “¿se podría usar para otros fines?”.

iii) **Persona:** “¿Quién puede pesar?”. “¿A quién puede pesar?”. “¿Con quién podemos pesar?”. “¿Podrían utilizar la balanza más personas?”. “¿Para quién se hizo la balanza?”. “¿De quién es?”. “¿Cómo o para qué usaría la balanza un profesor?”.

**iv) Materia:** “¿De qué está hecha la balanza?”; “¿podría hacerse con otros materiales?”. “¿Cómo y con qué materiales la harías tú?”. “¿Qué colores tiene?”. “¿Qué otros colores podría tener?”.

**v) Relación:** “¿A qué se parece la balanza?”; “¿se podría parecer a otra cosa?”. “¿Qué puede pesar?”.

**vi) Medios:** “¿Cómo se usa una balanza?”; “¿de qué otra forma se podría utilizar?”.

**vii) Acción:** “¿Se mueve la balanza?”; “¿qué pasaría si no se moviese?”. “¿Tiene vida?”. “¿qué pasaría si tuviese vida?”.

**viii) Cantidad:** “¿La balanza puede ser mayor, menor, de otra manera?”. “¿Cómo es de grande?”. “¿podría ser mas grande?”. “¿y más pequeña?”. “¿Cuánto pesa?”. “¿Podría pesar objetos tan ligeros como una pluma?”. “¿y tan pesados como un saco de patatas?”.

**ix) Calidad:** “¿Qué defectos tiene la balanza?”. “¿cómo se podrían corregir?”. “¿Beneficia?”. “¿a quién?”. “¿Cómo te beneficiarías mejor de ella?”. “¿Puede ser más perfecta o de otra manera?”. “¿Cómo sería la mejor balanza que podríamos tener?”.

**x) Tiempo:** “¿Cuándo se puede usar una balanza?”. “¿Has visto alguna balanza de las que se empleaban antes?”. “¿Hay ahora otras balanzas más cómodas de usar?”.

**xi) Lugar:** “¿Dónde podemos pesar?”. “¿Dónde encontramos balanzas?”. “¿Dónde se pueden guardar?”.

**xii) Valores:** “¿Qué pasaría si no existieran las balanzas?”.

**xiii) Recepción:** “¿Cómo se pueden perfeccionar las balanzas?”.

De todas estas preguntas, y otras análogas, se pueden escoger algunas para trabajar en grupo y/o individualmente o por contactos intergrupales.

**Ejemplo 1.2:** Mostramos a los niños algún material que pueda ser medido, como por ejemplo una caja con lápices, y podríamos elegir algunas preguntas de las que indicamos a continuación para desarrollar su creatividad:

**i) Sustancia:** “¿Qué es?”. “¿Por qué esto es un lápiz?”.



ii) **Fin:** “¿Para qué sirven los lápices?”; “¿se podrían usar para otros fines?”.

iii) **Persona:** “¿Quién usa los lápices?”. “¿De quién es éste lápiz?”. “¿Lo podrían utilizar más personas?”. “¿Cómo y para qué lo usaría un profesor?”. “¿Utiliza el lápiz tu papá?”; “¿para qué lo utiliza?”. “¿Y tú lo utilizas?”; “¿para qué?”.

iv) **Materia:** “¿De qué está hecho el lápiz?”; “¿podría hacerse con otros materiales?”. “¿De qué color es?”. “¿Qué otros colores podría tener?”.

v) **Relación:** “¿A qué se parece un lápiz?”; “¿se podría parecer a otra cosa?”. “¿Con qué se utiliza?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se usa el lápiz?”; “¿de qué otra forma se podría utilizar?”.

vii) **Acción:** “¿Se mueve el lápiz?”; “¿qué pasaría si se moviese?”. “¿Tiene vida?”. “¿Qué pasaría si tuviese vida?”.

viii) **Cantidad:** “¿Cómo es de largo este lápiz?”. “¿Podría ser mas largo?”. “¿Nos podría servir para medir la longitud de alguna cosa?”. “¿Cuánto pesan esos lápices?”. “¿Pesan más, menos o igual que aquéllos?”. “¿Podrías pesar con ellos algo?”. “¿Podría ser un lápiz tan ligero como una pluma?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tiene el lápiz?”. “¿Cómo se podrían corregir?”. “¿Qué beneficios conlleva?”. “¿Cómo te beneficiarías mejor de él?”. “¿Puede ser el lápiz más perfecto o de otra manera?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo se utiliza un lápiz?”. “¿Durante cuánto tiempo lo utilizas tú?”. “¿Quién lo utiliza más tiempo tu papá o el profesor?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde se puede utilizar un lápiz?”. “¿Dónde puedes guardarlo?”. “¿En qué sitios están los lápices que hay en la clase?”.

xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existieran o dejaran de existir los lápices?”.

xiii) **Recepción:** “¿Cómo se pueden perfeccionar los lápices?”.

En una primera fase, en que el niño aún no habla (aunque nos centramos en la etapa de 3 a 6 años, podemos también analizar lo que ocurre en el periodo 0—3), la comunicación consistirá en proponerle las

actividades e ir dirigiendo su actuación en función de su respuesta. Pasará a ser verbal cuando el niño empiece a hablar, y cuando el niño pinte o escriba algo, se puede hacer verbal, dibujada o escrita. Aparentemente comenzamos sin ideas, pero con las observaciones y las preguntas iremos consiguiendo un “banco de ideas”. Seleccionaremos aquéllas que consideremos más adecuadas para nuestra situación.

Cuando la generación de ideas se estanque y parezca que ya no surge ninguna más, se puede inventar algún objeto, parecido a algo conocido o sin ningún parecido con la realidad, y se vuelven a hacer preguntas análogas a las anteriores o más relacionadas con la magnitud objeto de nuestra consideración. Por ejemplo, tomamos como objeto “nuestra clase”, y como magnitud la longitud. Después de intentar medir el largo y el ancho, haciéndoles preguntas análogas a las anteriores, podemos pintar en la pizarra un muñeco u otra figura, que podría ser, por ejemplo, la siguiente:

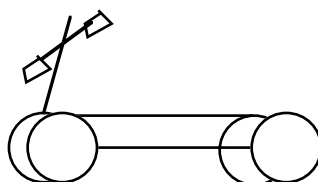


Figura 44: Objeto que puede servir para que el niño mida sus dimensiones.

y plantearles, mediante dichas preguntas, que midan su altura y su anchura.

### 3.5.2. Actividades utilizando el torbellino de ideas o brainstorming

**Ejemplo 2.1:** Le decimos a los niños que queremos averiguar qué mesa es más grande: la que utiliza el profesor en la clase o la de la sala de profesores. Le preguntamos: “¿qué haríamos para saberlo?”.

Anotamos lo que vayan diciendo todos los alumnos. Llevamos a cabo lo que nos indiquen, siempre que sea posible. Si alguna respuesta no fuese posible llevarla a cabo preguntaríamos: “¿cómo podemos hacerlo?”. Si hubiera alguna respuesta que no nos condujera a la solución, después de intentar llevarla a cabo preguntaríamos: “después de lo que hemos hecho, ¿alguien nos puede decir qué mesa es más grande?”. Si hay alumnos que no han llegado a ver la forma de comparar las dos mesas, se les pueden plantear las mismas cuestiones con dos libros, por ejemplo. Todos clasifican, organizan y evalúan las respuestas, siendo aquí el criterio: que nos permita averiguar qué mesa —o qué libro— es más grande con la menor dificultad.

**Ejemplo 2.2:** Podemos plantearle a los niños, después de trabajar con el metro, que nos indiquen todos los problemas que tiene su uso.

El profesor va anotando todas las respuestas, se clasifican eliminando las que resulten más extremas. Después podemos decirles que queremos inventar un metro que no tenga todos esos inconvenientes. “¿Cómo tendría que ser?”. El profesor anota todas las respuestas. Se clasifican, organizan y evalúan entre todos y se intenta construir un metro que cumpla todas las condiciones que hemos aportado.

**Ejemplo 2.3:** Tenemos en clase varios vasos de agua a los que les cabe un cuarto de litro. Podemos empezar preguntándoles: “¿qué podemos medir con este vaso?”.

El profesor va anotando todas las aportaciones. Se clasifican, eliminando aquéllas que no lleven consigo ninguna medida y se intenta llevar a cabo alguna de las mediciones que nos hayan dicho. Después podemos dejarles alguna actividad para hacer en casa sobre medidas de capacidad, tomando como unidad de medida el vaso. Le dejamos a cada niño un vaso como el que hemos utilizado en clase y les podemos decir, por ejemplo, que tienen que beberse un poco menos de leche en casa que agua le cabe al vaso que hay en clase. Al día siguiente nos tienen que decir cómo lo han conseguido.

Si alguien no lo ha hecho o lo ha hecho mal, le podemos dar una botella y decirle que ponga en la botella un poco menos de agua que la que le cabe al vaso. Se organizan, clasifican y evalúan las respuestas, siendo en este caso el criterio: que consiga de la forma más fácil tomar un poco menos de un vaso de agua.

**Ejemplo 2.4:** Al terminar la clase decimos a los niños que traigan para el día siguiente objetos que se puedan pesar.

Al día siguiente se anotan por escrito, o gráficamente, las cosas que han traído. Estas podrían ser, por ejemplo: frutas, arroz, garbanzos, patatas, caramelos, canicas, chapas, botones, etc. Llevamos a la clase varias balanzas con dos platillos y vamos distribuyendo a los niños de dos en dos, uno para que ponga objetos en uno de los platillos y el otro para que equilibre la balanza con otros objetos distintos. Cuando lo tengan todo hecho se le pregunta al que ha equilibrado la balanza: “¿cómo lo has conseguido?”. “¿Podrías haber utilizado otros materiales para equilibrar la balanza?”.

En caso de error se pueden cambiar los niños, pasando el que estaba poniendo objetos en el platillo a equilibrar la balanza, y viceversa.

Todos clasifican, organizan y evalúan las respuestas que se han ido dando, siendo aquí el criterio: que se equilibre la balanza con el menor número de pruebas.

**Ejemplo 2.5:** Le pedimos a los niños que nos digan objetos que cuesten menos de 2 euros. Decimos que valen menos de 2 euros si saben de algún comercio donde lo podemos encontrar por ese precio, aunque en otro pueda valer más.

Vamos anotando todos los objetos que nos van diciendo. Dedicamos 10 minutos a ello. Después vamos viendo entre todos si es o no correcto que cada uno de los objetos no superan o igualan el valor de 2 euros. Si alguno pensamos que vale más de esa cantidad, les dejamos que pregunten, cuando salgan de clase, su valor en algún comercio. Entre todos clasifican, organizan y evalúan las respuestas, siendo aquí el criterio: que el valor no supere los 2 euros en algún comercio.

No sólo es el profesor el que debe hacer preguntas, también el alumno puede hacerlas, además es aconsejable que las haga para que no crea que el profesor o el libro son los que dicen todo lo que él debe saber, sino que vea que él tiene mucho que decir en todo el proceso de aprendizaje. De este modo le presentamos al alumno unas Matemáticas abiertas en las que él no es un mero espectador al que no le queda más que aplicar una serie de reglas totalmente acabadas y que tiene que creérselas porque sí, sino que él es el que tiene que ir obteniéndolas a partir de los razonamientos que se le vayan proponiendo.

A este respecto nos encontramos con un artículo de Chamoso, Durán, García, Martín y Rodríguez (2004: 47), que nos dicen: *...Se abandonan las Matemáticas entendidas como un conjunto de contenidos acabado que hay que dominar y en el que no se puede intervenir, y se da paso a otras Matemáticas en el que se resalta el proceso de construcción del conocimiento matemático, y se considera su formalización y estructuración como el punto de llegada en lugar del de partida.*

*El objetivo de esta materia ya no es tanto que el alumno conozca unas reglas como que explore, experimente, haga preguntas y conjeturas... En definitiva, que razone.*

Es aconsejable, por tanto, proponer actividades que no estén totalmente elaboradas para que el alumno con su participación pueda colaborar en su redacción, de modo que comprenda que todo lo que se le pregunta no tiene que estar totalmente acabado y a la vez vaya tomando contacto con las actividades desde el inicio.

**Ejemplo 2.6:** Podemos decirle al niño: “¿dónde cabe más agua en un cubo o en una jarra?”.

El alumno podría preguntarnos: “¿de qué cubo estamos hablando, del que utiliza mamá para fregar o del cubo de playa?”, “¿sabemos si se trata de la jarra del agua o de una jarra de juguete?”. Nuestra intención sería guiar las respuestas para que el niño se dé cuenta de que el enunciado no está completo para poder contestar sin ambigüedad. Lanzamos un torbellino de ideas con todos estos interrogantes. El profesor toma nota de todas las ideas aportadas, se analizan, se vuelve a redactar la actividad y buscamos la solución.

**Ejemplo 2.7:** Le decimos a los niños: hay dos perros, uno en el campo y otro en la calle, “¿cuál llegará antes a la plaza?”.

Lanzamos un torbellino de ideas y le preguntamos al niño si tiene que plantear alguna pregunta más para completar el enunciado o tiene suficiente con la información que se le da para poder contestar. Las preguntas podrían ser del tipo: “¿en qué lugar del campo está el primer perro?”, “¿en qué lugar de la calle está el segundo perro?”, “¿han salido los dos a la vez?”, “¿corren los dos igual de rápido?”... Recogemos todas las cuestiones planteadas por los alumnos, reelaboramos el enunciado y buscamos la solución.

**Ejemplo 2.8:** Cuando estamos anotando toda esta serie de ejemplos o ejercicios, también estamos aplicando el torbellino de ideas de modo individual, ya que no queremos que se nos pierda ninguna idea que pueda resultar interesante, curiosa o formativa para el alumno de Educación Infantil. Por supuesto que con más tiempo y planteando esta misma cuestión a más gente tendríamos muchas más ideas. Es por lo que dejamos que el alumno-profesor proponga alguna actividad para que sea trabajada utilizando esta técnica.

### 3.5.3. Actividades utilizando el método Delfos

**Ejemplo 3.1:** Después de trabajar con los niños la idea de volumen, les podemos dejar planteadas las cuestiones que a continuación relatamos para que piensen al día siguiente: “¿es importante tener en cuenta el volumen?”. “¿Cómo podríamos medir el volumen que ocupa una caja?”. “¿Cuál sería el volumen ideal de una caja para poder colocar dentro todos tus libros?”. “¿La caja tendría que ser más grande —ocupar más volumen— si lo que queremos poner dentro son todas las cajas de tus zapatos?”. “¿Y si son las cajas de los zapatos de tu mamá?”.

Al día siguiente cuando lleguen nos van diciendo lo que han pensado; lo anotamos, agrupando las respuestas por categorías, y comunicamos a cada uno lo que han pensado los demás para facilitarles que puedan aportar algo nuevo y mejor; les dejamos pensar y pasamos a recoger sus ocurrencias, que volvemos a anotar. Descartamos los valores extremos, leemos las ideas del grupo y sacamos conclusiones.

**Ejemplo 3.2:** Nos planteamos las cuestiones: “¿para qué se utiliza el reloj?”; “¿es una lata tener que llevarlo?”; “¿sería posible prescindir de él?”.

Dividimos la clase en dos o tres grupos de forma que no haya alumnos con problemas en un solo grupo y que los alumnos con mayor coeficiente intelectual estén en distintos grupos. En caso de que pensemos que los alumnos de mayor coeficiente intelectual pueden ser más productivos formando un solo grupo, los dejamos juntos. Cada grupo se va a una esquina de la clase. El profesor trabaja con cada uno de los grupos por separado, va a atenderlos cuando es requerido por el grupo, porque se le haya ocurrido alguna idea a alguno de sus componentes. Cada alumno expresa su opinión, que recoge el profesor por escrito o gráficamente. Cada alumno piensa en dar su respuesta, y lo hace con más facilidad si oye a algún compañero al que se le ha ocurrido alguna.

Pueden aparecer ideas como: sin reloj no podría saber cuándo tengo que ir al colegio, tampoco sabría cuándo me tengo que levantar ni acostar, tampoco sería posible saber cuándo tenemos que salir al recreo, etc.

El profesor, al finalizar, con ayuda de los alumnos, agrupa las soluciones por categorías eliminando los valores extremos y saca conclusiones.

**Ejemplo 3.3:** Después de haber trabajado con líquidos y haber transvasado líquido de un recipiente a otro, le planteamos a los niños los siguientes interrogantes: “¿no hay más remedio que tomar medidas de capacidad?”. “¿Conoces alguna medida de capacidad?”. “¿Las medidas de capacidad están en algún sitio?”.

Repartimos la clase en grupos de seis alumnos, procurando compensar los grupos de modo que no haya dos alumnos con problemas en un mismo grupo y que tampoco estén dos alumnos de los mejores de la clase juntos. Cada alumno expone sus opiniones, que el profesor recoge yendo a ver cómo va cada uno de los grupos periódicamente. Una vez recogidas todas, vuelve a cada grupo, le cuenta lo que lleva escrito

de las opiniones de los otros, con ello facilita que se les puedan ocurrir otras ideas.

Se concreta el tiempo que vamos a dedicar a pensar sobre el tema y al finalizar se agrupan las soluciones por categorías, eliminando los valores extremos.

Podrían aparecer soluciones como la siguiente: si no hubiera medidas de capacidad, no podríamos saber cuándo tenemos un litro de leche, ni de aceite, etc. Yo he visto un cacharro que tiene mi abuela que dice que es de un cuarto de litro, aunque yo no sé lo que es eso. Mi mamá me ha contado que antes había probetas, que eran como botecitos graduados con señalitas, con los que se vendían los perfumes. Y que el aceite, la leche, el vino, etc. se median con jarras de latón de distintos tamaños. Es más, hoy en día estos y otros productos vienen envasados en latas, cartones, botes de cristal o plástico, etc., con distintas medidas, etc.

**Ejemplo 3.4:** Queremos comparar los pesos de los objetos que tenemos en clase sin riesgo a equivocarnos. Para ello, al final de clase, les dejamos a los niños planteada la pregunta: “¿cómo sabríamos si un objeto pesa más que otro?”, para que nos digan, al día siguiente, lo que han pensado.

El profesor recoge todas las respuestas que aportan los niños, las clasifica y se las va pasando a los demás. A la vista de lo que han dicho los otros niños, ellos pueden cambiar o modificar su respuesta. Si hay alguna respuesta que no nos lleve a cubrir nuestro objetivo: comparar pesos, podemos decirle al niño que tome, por ejemplo, un lápiz y una goma y que compare los pesos de ambos. Con ello, de forma individual, va corrigiéndose cada respuesta que sea errónea. Se seleccionan las mejores y el profesor lee las conclusiones.

### 3.5.4. Actividades utilizando la sinéctica

Vamos a proponer actividades para trabajar con “la sinéctica” utilizando cada una de las opciones indicadas en el Capítulo I.

#### 3.5.4.1. Actividades utilizando convertir lo extraño en familiar

**Ejemplo 4.1:** Estamos comparando conjuntos para ver si tienen o no el mismo número de objetos. El niño ya sabe que tiene tres añitos, y es capaz de comparar sin dificultad los elementos que tiene un conjunto



con los que tiene otro, ambos con tres o menos de tres elementos, contando o con un simple golpe de vista. A partir de tres tiene que ir separando los objetos de uno de los conjuntos y los del otro sucesivamente hasta agotar los elementos de alguno de los conjuntos. En este paso estamos en el **análisis**.

Si quiere formar un conjunto con el mismo número de elementos que otro, tiene que ir poniendo progresivamente elementos en el nuevo conjunto, según va cogiendo elementos del conjunto dado, teniendo cuidado de que no se le pase ningún elemento del primer conjunto ni tomar, por equivocación, dos veces un elemento del primer conjunto para poner un elemento en el segundo. Vamos camino de la **generalización**.

Con las dificultades que encuentra en formar conjuntos con más, menos, o igual número de elementos que otro, le estamos creando la necesidad de que vaya aprendiéndose los números y el nombre de ellos. Estamos en la **búsqueda de un modelo**.

**Ejemplo 4.2:** Vamos a emplear esta técnica para que el niño vea la necesidad de utilizar el metro. Supongamos que queremos medir una determinada distancia de la clase. Empezamos midiéndola con el pie; cada niño nos da un resultado según la medida de su pie. Esta es la fase de **análisis**.

Después se le dice que mida el pasillo de su casa y que traiga el resultado. Le decimos: “si un niño no pudiera venir y nos dijera por teléfono su medida, ¿podríamos saber si ésta es más grande o más pequeña que la distancia que midió en la clase?” Estamos en la fase de **generalización**.

Como esto no es así, tenemos que buscar un objeto con el que podamos realizar la medida, y que podamos tener tanto los niños como los mayores. Después de dejarlos que busquen objetos que nos sirvan para realizar la medida, seguro que a alguno se le ocurre que este objeto es el metro. Le preguntamos que si lo conocen y si tienen alguno en su casa, y si es así que lo traigan. Ahora hemos pasado a la **búsqueda de un modelo**.

#### 3.5.4.2. Actividades utilizando hacer lo familiar extraño

**Ejemplo 4.3:** Después de realizar lo descrito en el ejemplo 4.2 traemos a la clase —nosotros o los niños— distintos metros de los que se

emplean en los diversos oficios: el metro que utiliza la modista, el comerciante, el carpintero, el albañil, etc.

El profesor, después de que los alumnos jueguen y lleguen a estar familiarizados con los distintos metros, para aplicarle la **analogía personal** puede decirles: “Imaginaos que cada uno de vosotros es un metro, ¿qué haríais?”. “¿Cómo os desplazaríais?”. “¿Cómo mediríais?”.

Después podríamos preguntarles: “¿qué metro es mejor: el del comerciante que vende telas o el de la modista?”. En este caso estamos aplicando la **analogía directa**. Vamos anotando los pros y los contras de uno y de otro, unos a la izquierda y otros a la derecha del nombre o del gráfico de cada uno de ellos. El que tenga más ventajas para medir un objeto fijado previamente, será el mejor. Podríamos continuar comparando el mejor de los dos metros con otro de los metros que tenemos y así sucesivamente hasta llegar al metro que sea el mejor de todos para la medición que queremos llevar a cabo, que será el campeón.

Se puede seguir con la **analogía personal** diciéndoles: “imaginaos que sois el metro campeón, ¿qué haríais?”; “¿para qué serviríais?”; “¿cómo seríais?”; “¿cómo os utilizarían?”... Todas las respuestas que nos vayan dando podemos ir anotándolas en la pizarra mediante símbolos, o gráficamente.

Para aplicar la **analogía simbólica** podemos decirles que como la palabra metro la vamos a emplear con bastante frecuencia, en lugar de poner siempre metro vamos a escribir “m” solamente.

Después, para aplicar la **analogía fantástica**, podemos decirles: “vamos a ser inventores y vamos a sacar al mercado un nuevo tipo de metro que sea el mejor; ¿como lo haríamos?”. Anotamos todas las respuestas y después, con los niños, vemos si la respuesta que nos dan mejora o empeora el metro que había resultado campeón.

**Ejemplo 4.4:** Después de estar en el recreo jugando en un columpio del estilo del que se puede intuir en nuestra representación:

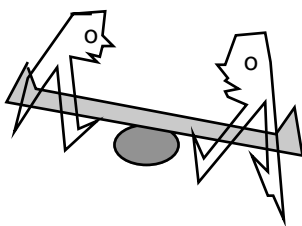


Figura 45: Columpio.

llevamos a la clase una balanza de dos platillos y decimos a los niños que comparen el columpio con la balanza para ver en qué se parecen. “¿El columpio podría ser una balanza?”. “¿Y la balanza un columpio?”. “¿Qué ocurre en la balanza cuando se pone en un platillo un objeto que no nos cuesta trabajo sostenerlo con un dedo y en el otro platillo otro que tenemos que usar las dos manos para sostenerlo?”. “¿Qué pasa en el columpio cuando a un lado se coloca un niño muy delgadito y en el otro un niño muy gordito —o un niño “más grande”—?”. “¿Cómo podríamos transformar uno en el otro?”. Vamos anotando las respuestas en la pizarra. Con ello estamos aplicando la **analogía directa**.

Si queremos aplicar la **analogía personal** podemos decir al niño: “imagínate que eres una balanza; ¿cómo serías?”. “¿qué harías?”. “¿para qué servirías?”. “¿cómo te utilizarían?”. etc. Todas las respuestas las vamos anotando mediante símbolos o gráficamente.

Para emplear la **analogía simbólica** le decimos que tenemos que dar una definición lo más concreta posible de balanza. “¿cuál sería?”. Por supuesto que no pretendemos que la respuesta sea acertada, ya que esto sería ilusorio para estas edades; no perdemos de vista que estamos en Educación Infantil.

Con objeto de aplicar la **analogía fantástica**, podríamos decir al niño: “piensa que somos fabricantes de objetos que sirven para pesar y que queremos lanzar al mercado una balanza que sea la mejor, “la más guais”, aquélla de la que todos se queden maravillados; ¿cómo sería?”. “¿qué cosas debería pesar?”. Vamos recogiendo todas las respuestas que nos vayan dando y las ordenamos según la posibilidad que tengamos para hacer la balanza.

El profesor conducirá la clase orientando al grupo y recogiendo todas las soluciones que expresen los niños (Menchen Bellán, 1989).

### 3.5.5. Actividades utilizando los métodos combinatorios

Veremos actividades relativas a los distintos métodos combinatorios antes considerados en el Capítulo I y que son los siguientes:

#### 3.5.5.1. Actividades utilizando la lista de atributos

**Ejemplo 5.1:** Podemos jugar a los descubrimientos dando una serie de atributos y el niño tiene que buscar algo o alguien que los tenga o que

no los tenga, según se acuerde previamente, con ello estamos **definiendo los atributos fundamentales de la realidad objeto de estudio.**

El que acierte es el siguiente en poner los atributos para que los demás adivinen de quién o de qué se trata. Con ello pasamos a **sustituir unos atributos por otros, o a asignarles dichos atributos a otro objeto o situación distinta, o pasamos de los atributos reales a los posibles.**

Se puede decir por ejemplo: “mide una cuarta y pesa tanto como una pinza de colgar la ropa”. Los demás niños deben encontrar objetos que tengan estas características. El primero que encuentre uno es el que gana y pone los nuevos atributos.

Para pasar a **analizar los atributos y planteamiento de mejora** podemos plantearles a los niños, cuando han acertado el objeto de que se trata, si tiene otros atributos y si les gustaría que tuviese otros.

También se puede jugar a las adivinanzas en sentido contrario: un niño piensa en un objeto y los demás tienen que adivinar de qué objeto se trata enumerando sus propiedades. Cada niño va diciendo propiedades que podría tener el objeto y el niño que pensó en el objeto les va diciendo sí o no. Si un niño no acierta, pasa a preguntar otro niño, y si acierta, éste sigue preguntando hasta que falle o diga de qué objeto se trata.

Por ejemplo, un niño piensa en una goma y los otros niños van diciendo propiedades que puede tener el objeto en el que piensan. Uno dice: “es muy largo”, el niño que pensó en la goma tiene que decir que no. Después otro niño dice: “es casi tan largo como mi cuarta”. También dice que no. Otro dice: “mide de largo como dos dedos”. Ahora le dice que sí. Así sucesivamente, hasta que localicen el objeto en cuestión.

Cuando tienen el objeto localizado se **analizan**, mediante “torbellino de ideas”, todas **las propiedades** que tiene y **se plantea la forma de mejorarlo.**

A continuación **se le asignan estas propiedades a otro objeto distinto** y se estudia si puede tenerlas el nuevo objeto o es imposible, o ilusorio, que las tenga.

**Ejemplo 5.2:** Queremos mejorar los lápices. Para ello seguimos los siguientes pasos:

Hacemos **una lista de los atributos** que tienen hoy los lápices. Estos pueden ser: son de madera; tienen una mina que algunas veces se rompe; pintan; algunos son de color; no borran; los puede usar cualquier persona con una mano; son rígidos; se terminan pronto; etc.

Se **intentan mejorar** los atributos que tienen los lápices para lo cual **se analiza** la forma de hacerlos. Por ejemplo, si pensamos que son de madera, nos podríamos plantear: “¿podrían ser de otro material?”; “¿con el nuevo material serían más pesados?”; “¿serían más flexibles?”; “¿resultarían más cómodos de usar?”; etc.

Si nos planteamos que se terminan pronto, podríamos preguntarnos: “¿tendrían que ser más largos?”; “¿de otro material?”; etc. Así con los demás atributos.

Se seleccionan las mejores ideas que hayan surgido para evaluar después su posible aplicación para mejorar los lápices.

Se podrían **aplicar los atributos de los lápices a las gomas**, por ejemplo, y ver si una goma podría pintar. Quizá fue esto lo que dio lugar a inventar los lápices con goma, o puede que fuese pensando en la mayor facilidad de uso que supone el tener dos objetos en uno. También se podría pensar en los atributos que nos gustaría que tuviesen los lápices, por ejemplo, que fuesen flexibles, que fuesen tiernos, que tuviesen alguna golosina incorporada, etc.

### 3.5.5.2. Actividades utilizando el análisis morfológico

**Ejemplo 5.3:** Ponemos en una tabla cartesiana de doble entrada una serie de atributos, como por ejemplo:

|                           | Es tan grueso como mi dedo | Es más largo que el pie de papá | Pesa igual que una manzana | Vive en el campo |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------------|----------------------------|------------------|
| Es rojo                   |                            |                                 |                            |                  |
| Se cría en el campo       |                            |                                 |                            |                  |
| Es verde                  |                            |                                 |                            |                  |
| Es amarillo               |                            |                                 |                            |                  |
| Pesa menos que una canica |                            |                                 |                            |                  |
| Tiene vida                |                            |                                 |                            |                  |

**Tabla 22:** Ejemplo de tabla cartesiana de doble entrada.

El profesor va leyendo por parejas un atributo de la primera columna y otro de la primera fila, hasta agotarlos todos, para los que hay que buscar un objeto que tenga esos atributos. El niño debe dibujar la figura que puede haber en cada uno de los recuadros que han quedado en blanco y que tiene los atributos que hay en la intersección de la fila y la columna correspondiente.

En lugar del nombre podíamos haber dado cada uno de los atributos mediante un dibujo representativo de la cualidad a que hace referencia. O mejor aún, podríamos haber hecho la tabla cartesiana en la clase o en el patio de recreo, para así colocar objetos que tuviesen las cualidades que queremos trabajar en la primera fila y en la primera columna. El niño, aprovechando el juego, tendría que buscar otros objetos que tengan los atributos de la intersección de cada fila con cada columna.

**Ejemplo 5.4:** Las longitudes de los objetos se expresan mediante adjetivos o adverbios. Por ejemplo, decimos de un objeto que es: largo o corto, ancho o delgado, grueso o fino, alto o bajo, profundo o superficial, etc. Que está: cerca o lejos, por aquí o por allí, etc.

Como en el caso anterior, se pueden colocar en una tabla cartesiana de doble entrada los atributos en la primera fila y en la primera columna (en este caso los atributos que colocamos en fila son los mismos que los que colocamos en columna). En el recuadro intersección se le dice al niño que dibuje un objeto, si lo hay, que tenga ambos atributos. El recuadro correspondiente a grueso y fino tendríamos que dejarlo en blanco ya que es imposible encontrar un objeto que tenga a la vez ambos atributos.

### 3.5.5.3. Actividades utilizando el análisis funcional

**Ejemplo 5.5:** Enseñamos a los niños un reloj de arena y, empleando la técnica “torbellino de ideas”, les decimos: “¿para qué sirve?”. Después de anotar las respuestas que vayan dando, destacaremos las partes o funciones que son fundamentales, es decir, aquéllas sin las cuales el reloj no tendría sentido. A continuación vemos los inconvenientes que tiene el reloj de arena.

Por ejemplo, podemos ponernos a cantar una canción y mientras lo hacemos le damos la vuelta a un reloj de arena tantas veces como sea necesario para controlar el tiempo que estamos cantando. Después vemos cuántas veces le hemos dado la vuelta. A continuación les podemos decir: “¿podríamos hacer un reloj al que no tuviéramos que dar tantas veces la vuelta mientras cantamos la canción?”; “¿cómo?” “¿Y

uno que nos midiera el tiempo que tardamos en dibujar —o en lanzar— una pelota o lo que tarda en piar un pajarillo?”; “¿cómo?” “¿Podría tener otros usos el reloj?”.

**Ejemplo 5.6:** Traemos monedas a la clase y mediante la técnica “torbellino de ideas” decimos a los niños: “¿para qué sirve el dinero?”. Anotamos todas las respuestas que nos vayan dando, poniendo de relieve aquellas funciones para las que fue ideado el dinero —intercambio de productos fundamentalmente—, y le preguntamos: “¿podría tener el dinero otros usos?”. Se anotan las respuestas y se analizan los pros y los contras de utilizarlo para lo que hayan comentado. Planteamos la pregunta análoga con respecto al aspecto físico que les gustaría que tuviese el dinero. A continuación analizaríamos los inconvenientes que tiene su empleo, para llegar a diseñar otro tipo de monedas que no tuvieran esos mismos inconvenientes.

Para los niños de Educación Infantil es muy importante el empleo de esta técnica ya que con ella separan las cualidades esenciales de un objeto de las accidentales, van conociendo con detalle los objetos que les rodean y entendiendo los fenómenos que suceden en su entorno.

### 3.5.6. Actividades utilizando el arte de relacionar

**Ejemplo 6.1:** Podemos plantear a los alumnos la relación que existe entre un metro y una balanza con dos platillos. A primera vista nos puede parecer que no nos van a decir nada, pero podemos ir indicándoles que vean si se puede pesar el metro y medir el peso, y que se fijen en lo que vayan midiendo y pesando. Para hacer una balanza necesito un metro, ya que debe tener los dos brazos iguales. La balanza pesa más que el metro y el metro mide más que el largo de la balanza, etc.

Todo esto le puede servir al niño para después hacer otra balanza más simple y otro metro más cómodo de usar. También puede observar que, en términos generales, los objetos que miden más suelen pesar más, aunque en este caso no se verifique esta afirmación.

**Ejemplo 6.2:** Podemos comparar un reloj con una mecedora para ver la relación que puede existir entre ambos objetos. Si la mecedora no parase nunca y siguiera siempre el mismo ritmo podría desempeñar las funciones de reloj, y el reloj, si fuese de pared, podría llevar en el péndulo un asiento que sirviera de mecedora en la que pudiéramos sentarnos y balancearnos al ritmo del reloj. Quizá esta técnica fue la que utilizó el inventor de aquellos relojes antiguos en los que salía un cuco para dar la hora: buscar la relación entre un cuco y un reloj.



**Ejemplo 6.3:** Vamos a iniciar una marcha y vamos a ir midiendo con el paso la longitud que recorremos, y con el reloj —o el cronómetro— el tiempo que empleamos. Al final observamos los resultados. Es posible que lo más que podamos decir es que si caminamos más tiempo, recorremos más espacio, o que si recorremos más espacio, es que estamos más tiempo caminando, sin querer llegar a ninguna relación entre ambas magnitudes por estar haciendo la actividad con niños de Educación Infantil. Aunque sí podemos hacerles ver que si vamos más rápido, recorremos más espacio.

**Ejemplo 6.4:** Para aplicar el arte de relacionar, es corriente decirle a los niños que se inventen una historia en donde aparezcan algunos objetos dados de antemano. Proponemos nosotros un ejemplo, utilizando de esta forma la técnica que estamos trabajando: “Invéntate un cuento en donde aparezcan las palabras: mesa, peso, metro, vaso y libro”.

### 3.5.7. Actividades utilizando la técnica solución de problemas

**Ejemplo 7.1:** Le damos al niño regletas de Cuisinaire, palitos de los caramelos “chupachups”, cerillas, etc. y le decimos: “¿cuántas veces puedo llevar la regleta —el palito, la cerilla, etc.— sobre cada uno de los lados de la mesa?”. Estamos en un caso de medida de una longitud —o una superficie— empleando como unidad de medida la regleta —el palito, la cerilla, etc.

También podríamos haberle dicho: “¿cómo puedes decirle a mamá cuál es el tamaño de la mesa?”. Con esto le damos más posibilidades de elección de la unidad de medida.

El problema puede quedar modificado si se cambia el punto de vista o los objetivos que se proponen. En el ejemplo anterior podemos tomar, en lugar de la regleta, el palito de un caramelo “chupachups”, o la pajita de sorbete, una tira de papel u otro objeto ideado por el niño, y en lugar de la mesa podríamos medir un lado de un libro. Las ocurrencias pueden ser muy variadas. Podríamos, por ejemplo, ver cuántos caramelos —o cuántas cartas de la baraja—, sin que esté uno encima de otro, caben en la mesa. Con todo ello se modifica el problema.

El empleo de materiales diversos para poder realizar las prácticas en “las Magnitudes y su Medida” es muy necesario para aumentar la creatividad.

Vamos a ver en este ejemplo todos los pasos que hemos considerado en el Capítulo I en el método “solución de problemas”:

## I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?” “¿Cuáles son sus datos?”.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cómo tendría que ir poniendo la regleta —el palito, la cerilla, etc.— para poder saber cuántas veces la puedo colocar sobre cada lado de la mesa?” “¿Tengo bastante con la regleta —el palito, la cerilla, etc.—?”; “¿necesito algo más para poder decirle a mamá cómo es la mesa?”.

## II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo se inició el hombre en la medida de longitudes -o de superficies-?”. En este caso, por tratarse de Educación Infantil, aunque les lancemos la pregunta, no tenemos que esperar una respuesta acertada, sólo que comenten lo que se les ocurra.

♥ Evolución: “¿En la antigüedad también necesitarían medir la longitud de los objetos?”. “¿Cómo lo harían?”. “¿Se podría medir hoy como se medía hace siglos?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la medida?”. Tampoco podríamos esperar, en este caso, que los niños dieran una respuesta acertada. Nosotros podemos decirles que antes no existía el metro y los hombres median con su propio cuerpo, como hacemos nosotros cuando medimos con el palmo, el brazo, el paso...; también empleaban varillas, palitos, cerillas, cuerdas...

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “¿Has necesitado medir la longitud —la superficie— de algún objeto anteriormente?”; “¿cómo lo hiciste?”.

## III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo tendrías medida la mesa?”. Suponiendo que llegues a ver las veces que puedes llevar la regleta —el palito, la cerilla, etc.— sobre cada lado de la mesa, ¿se podría llevar la regleta —el palito, la cerilla, etc.— sobre otros objetos para medirlos?” “Di algún objeto que se pueda medir de forma análoga a como hemos medido la mesa”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a medir la mesa?”.

## IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías llevar la regleta —el palito, la cerilla, etc.— sobre cada lado de la mesa?”. “¿Podríamos medir la mesa de otra manera?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Cómo tendrías que hacerlo en cada caso?”. “¿todas te conducen a la solución?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de las formas de medir la mesa suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para llevar la regleta —el palito, la cerilla, etc.— sobre cada lado de la mesa?”. “¿En qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”. “¿cuándo?”.

## V. Ejecución.

♥ “Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos”. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿puedes razonarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error al llevar la regleta —el palito, la cerilla, etc.— sobre cada lado de la mesa?”.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de medir la mesa sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿los resultados son los deseados?”. “¿podemos comprobarlo?”. “¿Sobre el lado más largo de la mesa has llevado más veces la regleta —el palito, la cerilla, etc.—?”. “¿Alguno de los pasos que diste eran innecesarios?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros casos para resolver un problema esencialmente idéntico?”. “Si hay otros casos, coméntalos”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”. “En caso afirmativo, di en qué caso”.

VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los niños en cada uno de los pasos antes señalados?”.

Es importante, para Educación Infantil, que no termine la clase de creatividad, sino que el niño siga pensando algunas cuestiones que quedaron pendientes. Siempre debemos dejarle alguna al terminar el comentario o el trabajo con alguna medida, ya que los sueños y el descanso pueden ser buenos aliados del poder creador de la mente, y al día siguiente, o después del recreo, pueden surgir ideas originales.

Finalmente el profesor puede analizar en qué medida la creatividad facilita el redescubrimiento de “las Magnitudes y su Medida”.

**Ejemplo 7.2:** Dejamos a los niños botes, vasos, latas, envases, etc. de distinta capacidad, pero no les sugerimos que los empleen. Les decimos que queremos saber si cabe más agua en la jarra o en la botella.

La forma de resolver este problema, aunque tiene solución única, es muy variada, dependiendo de los materiales de que dispongamos y de los que se les ocurra utilizar a los niños. También podríamos decirles: “¿cómo podríamos comparar la cantidad de agua que cabe en la jarra con la que cabe en la botella?”. En este caso la respuesta no tiene que ser única.

Seguimos los pasos indicados en la técnica “solución de problemas”:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cómo saber dónde cabe más agua?”. “¿Tienes suficiente con los materiales disponibles para saberlo?”; “¿necesitas algo más?”; “¿te sobran cacharros?”. “¿Sería imposible saberlo?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de medir la capacidad de los objetos?”. Por supuesto que no esperamos una respuesta acertada, sólo que comenten lo que se les ocurra. Podríamos comparar el comienzo de la necesidad de medir a lo largo de la historia con el comienzo en el caso particular del niño.

♥ Evolución: “¿En la antigüedad el hombre también se planteó medir la capacidad de los recipientes?”; “¿cómo lo haría?”. “¿Se podrá medir la capacidad de un recipiente como se hacía hace siglos?”. “¿En la actualidad hay más recursos que facilitan la medida de capacidades?”, “¿o hay menos?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “¿Has visto a alguien comparar las capacidades de dos recipientes?”; “¿cómo lo hizo?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo sabrías dónde cabe más agua?”. “Suponiendo que llegues a saber dónde cabe más agua, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a saber dónde cabe más agua?”.

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías saber dónde cabe más agua?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a la solución?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para saber dónde cabe más agua?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

### V. Ejecución.

♥ “Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos”. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes razonarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

### VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de saber dónde cabe más agua sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿el resultado es el deseado?”. “¿Puedes comprobarlo?”. “¿Alguno de los pasos que diste eran

innecesarios?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos:  
“¿Puedes emplear el resultado en otros casos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos:  
“¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos en cada uno de los pasos antes señalados?”.

**Ejemplo 7.3:** Cuando tengamos resuelto el ejercicio anterior podríamos traer nosotros, y decirle al niño que traiga, en una bolsa, botes, vasos, latas, envases que retengan líquido, etc., de distinta capacidad, y proponerle al niño que piense cómo podríamos colocar todo lo que hemos traído para tenerlo ordenado según le cupiera la misma cantidad de líquido, más o menos.

Como los pasos a seguir serían análogos a los dados en el ejercicio anterior, no los vamos a repetir.

**Ejemplo 7.4:** Tenemos recortados en cartulina de color triángulos rectángulos isósceles, triángulos equiláteros, cuadrados, rectángulos, etc., teniendo todas las figuras de la misma clase el mismo color y las mismas dimensiones. Tomamos otra cartulina y queremos saber si caben más triángulos equiláteros que cuadrados, por ejemplo, sin que se solapen entre sí ni sobresalga de la cartulina ninguno de ellos.

Aquí la creatividad la puede emplear el profesor tomando aquel material que pueda ser más original y motive mejor al niño. También el niño puede poner de manifiesto su creatividad, ya que no se le dice por dónde tiene que empezar a recubrir la cartulina.

Vamos a seguir los pasos indicados en la técnica “solución de problemas” para buscar la solución:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para colocar los triángulos y los cuadrados?”. “¿Tengo suficientes cuadrados?”. “¿y triángulos?”. “¿Necesito más?”. “Con lo que tengo, ¿podría saber si caben más triángulos que cuadrados?”.

## II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de ver qué medida era más apropiada para medir una superficie?”. No esperamos que den una solución acertada.

♥ Evolución: “¿En la antigüedad el hombre también se planteó medir superficies?”. “¿Se podría saber si caben más triángulos que cuadrados en la cartulina con los materiales que tenían hace siglos?”. “¿En la actualidad hay más recursos que facilitan la solución?”. Se le plantean estas preguntas para que digan algo, sin esperar que las respuestas sean las acertadas.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo lo resolviste?”.

## III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo llegarías a saber si caben más triángulos que cuadrados en la cartulina?”. “Suponiendo que llegues a resolver el problema, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a saber si caben más triángulos que cuadrados en la cartulina?”.

## IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías saber si caben más triángulos que cuadrados en la cartulina?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a la solución?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.



♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para saber si caben más triángulos que cuadrados en la cartulina?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

## V. Ejecución.

♥ “Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos”. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de saber si caben más triángulos que cuadrados en la cartulina blanca, sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿el resultado es el deseado?”. “¿Puedes comprobarlo?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros casos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos en cada uno de los pasos antes señalados?”.

### 3.5.8. Actividades utilizando el entorno

**Ejemplo 8.1:** Le decimos al niño que observe la altura de la mesa, le dejamos el metro, pero no le sugerimos su uso. Después de esto le decimos que observe a su alrededor y busque algunos objetos que tengan alguna dimensión igual a la altura de la mesa. Al día siguiente tiene que decirnos todos los objetos que ha encontrado y cómo lo ha conseguido.

También podríamos haberle puesto como referencia, en lugar de la mesa, su propia altura, u objetos que le lleguen a alguna parte de su cuerpo, por ejemplo, a la cintura.

Seguimos para ello los pasos antes indicados en el Capítulo I:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Tenemos definido el problema. Observamos al niño para cerciorarnos de que sabe lo que tiene que buscar. Si vemos que duda le volvemos a proponer el problema acercándolo más al enunciado mediante materiales, fotos, gráficos..., y si es necesario buscamos en clase algún objeto que tenga alguna dimensión como la altura de la mesa.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado:** El niño tiene que buscar los objetos que tengan alguna dimensión igual a la altura de la mesa en su entorno más inmediato y debemos decirle que hay muchos objetos con estas características, sólo tiene que saber descubrirlos acercándose a ellos y observando si cumplen o no esta característica.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema:** Si el niño tiene claro el problema, irá midiendo todo lo que encuentre hasta dar con algún objeto que tenga alguna dimensión como la altura de la mesa.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones:** Si hemos estado pendientes de nuestro entorno, tenemos que comparar lo que encontremos con la altura de la mesa, y valorar si eso nos da la solución o tenemos que seguir pensando en encontrarla.

**5. Mejorar el resultado si es posible:** Después podemos decirle si podría haberlo obtenido de una forma más sencilla.

**Ejemplo 8.2:** Los niños tienen tres años y ya saben decir que tienen esa edad. Les proponemos que, al salir del colegio, se fijen bien en todos los objetos que les rodean, ya que para el día siguiente tienen que recordar los conjuntos que hayan visto que tengan tres elementos.

Seguimos los pasos siguientes:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** El niño no puede tener duda de lo que queremos que haga, para ello podemos empezar en clase buscando algún conjunto que tenga tres elementos.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado:** Tenemos que decirle que igual que en clase hemos encontrado conjuntos que tienen tres cosas, él seguro que puede encontrar otros. Sólo tiene que estar atento y pensando en encontrarlos.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema:** Es fundamental mirar con detenimiento todo lo que nos rodea para poder encontrar conjuntos con tres elementos.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones:** Anotamos al día siguiente todos los conjuntos que hayan encontrado, razonando si tienen o no tres objetos. Si alguno de los niños no consiguió los tres conjuntos, “se le propone para el día siguiente que busque dos conjuntos con dos elementos”. Este es el proceso mediante el cual el niño va adquiriendo la idea de número.

**5. Mejorar el resultado si es posible:** Si hemos logrado que el niño encuentre un conjunto con tres elementos, podemos ver si puede encontrar otros conjuntos con cuatro elementos, etc.

**Ejemplo 8.3:** Queremos trabajar con los niños de Educación Infantil el peso. Para ello vamos a diferenciar los objetos que el niño puede sostener con una mano sin hacer ningún esfuerzo de aquéllos que le suponen realizar algún esfuerzo para sostenerlos.

Vamos tomando objetos y vamos clasificándolos. Colocamos cerca del niño los objetos que hemos comprobado que cumplen esta condición y lejos los que no la cumplen. Si el niño sabe escribir, podemos ponerle una etiqueta con un nombre a los que pueda sostener con una mano sin hacer ningún esfuerzo. Los que no tengan esa etiqueta serán los que no puede sostener sin esforzarse. Si no sabe escribir, podemos poner la etiqueta con un determinado color o dibujo.

Podemos coger cosas que aunque sean grandes pesen poco, y otras que siendo pequeñas pesen mucho. Con esto el niño puede darse cuenta de que cuando se trata de materias distintas, el peso es independiente del volumen. Una bola de paja, por ejemplo, puede ser grande y es posible sostenerla con la mano sin hacer ningún esfuerzo, no pasándole eso a una bola de hierro aunque no sea muy grande. Sin embargo, cuando se trata del mismo material, si el objeto es más grande, pesa más, es decir, el peso es proporcional al volumen (la proporcionalidad ya se estudió en el Capítulo II).

“Les proponemos que se fijen muy bien en todo lo que les rodea y que comprueben qué objetos pueden sostener con una mano sin hacer

ningún esfuerzo y cuáles no”. Seguimos los pasos indicados anteriormente:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Al día siguiente les decimos que nos traigan, por escrito o de memoria, tres objetos que verifiquen esa condición y otros tres que no la verifiquen.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado:** Deben tener claro que no hay que buscar muy lejos los objetos que pueden sostener con la mano sin hacer ningún esfuerzo.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema:** Tienen que coger las cosas que encuentren a su paso y comprobar si pueden o no sostenerlas con la mano sin esforzarse.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones:** Después de ver los objetos que cada uno ha traído y anotarlos o dibujarlos, razonamos si han acertado o no.

**5. Mejorar el resultado si es posible:** Podemos, después, darle a cada uno de los niños un trozo de plastilina para que hagan un objeto distinto de todos ellos que tenga esa propiedad razonando si han acertado o no.

Además de trabajar el peso, con este ejercicio, de manera indirecta, hemos trabajado el volumen, la proporcionalidad, la definición de un conjunto por comprensión, el complementario de un conjunto, etc.

### 3.5.9. Actividades utilizando la biónica

**Ejemplo 9.1:** Queremos que entre todos los niños de la clase clasifiquen y ordenen por el peso y el tamaño todos los animales que conocen.

Podemos empezar con un “torbellino de ideas” y “el arte de preguntar”, planteándoles las siguientes cuestiones: “¿os gustan los animales?”. “¿Qué animales conocéis?”. El profesor va escribiendo los nombres o un gráfico de cada uno de los animales que vayan diciendo para después ir agrupándolos por categorías. “¿Cuántos animales tenéis en casa?”. Se puede hacer alguna señal al lado del nombre o del gráfico de los que tengan en casa. “¿Cuánto tiempo jugáis con algún animal?”. Anotamos al lado del animal correspondiente el tiempo que juega con él. “¿A qué horas?”. En caso de que tenga algún animal, podemos preguntarle por el tamaño, la edad, el peso, etc.

A continuación podemos preguntarles: “¿cuántos animales de los que habéis dicho antes son aves?”. Le ponemos una A delante a todos los que vayan diciendo que son aves. “¿Cuál tiene las alas más largas cuando está volando: el murciélago o el gorrión?”. Podemos ordenar las aves por el tamaño de sus alas.

Le planteamos si tienen o no otras características: “¿hay alguno que sea mamífero?”; “entre los animales que hemos nombrado, ¿tenemos algún pez?”; “¿algunos tienen 2 patas?”; “¿hay alguno que tenga 3 patas?”; “¿conoces algún animal con 4 patas?”; “¿hay alguno sin patas?”... Después cada uno de ellos puede decir otras cualidades que pueden tener los animales, y los demás intentarán encontrar animales que las tengan. Vamos colocando en lugares distintos los que tengan características distintas.

Estas preguntas nos sirven para hacer un **estudio detallado del comportamiento** de los diferentes animales que vayan surgiendo. Con todo ello, además de trabajar “las Magnitudes y su Medida”, estamos haciendo una clasificación.

Después les pedimos que nos digan cuál pesa más. Quitamos el de mayor peso y de los que quedan les volvemos a preguntar por el que pesa más; así sucesivamente, con lo cual hacemos una ordenación según el peso. Lo mismo podríamos hacer con el tamaño.

Con todo esto se les está fomentando el interés por el descubrimiento de nuevos seres vivos, y por la observación y comparación de los detalles que tienen los seres vivos que conocen y que, por supuesto, no pasan desapercibidos para el niño.

Podemos decirles que dibujen en su cuaderno el animal que más les guste y que lo pinten como a ellos les gustaría que fuese. Con esto intentamos que el niño **traduzca las propiedades de los seres vivos a modelos** gráficos o simbólicos.

Después dejamos a los niños cartones, alambres, tijeras, etc., y nos fijamos en alguno de los animales como modelo para construir, por ejemplo, un payaso que se mueva como ese animal, que tenga los brazos tan largos como los del animal —o como las alas, en caso de que hubiéramos elegido un ave— y las piernas como las patas. Pretendemos que **desarrolle los modelos intentando reproducir al máximo las funciones de los seres vivos**.

### 3.5.10. Actividades utilizando la sinapsis

**Ejemplo 10.1:** Queremos que el niño observe su percepción temporal, para que se dé cuenta de que haciendo cosas que le gustan el tiempo pasa sin enterarse.

Se le pregunta al niño qué es lo que más y lo que menos le gusta hacer en clase. Se le deja un reloj de arena o convencional —si el niño ya lo conoce— y se le indica que haga aquello que le gusta hacer durante un tiempo prefijado, pero sin que el niño lo sepa. A continuación se le dice que haga lo que menos le gusta —controlamos que sea durante el mismo tiempo— y que nos cuente cómo se ha sentido y por qué. Se le pregunta: “¿has comparado el tiempo que dedicaste a hacer cada una de las actividades?”; “¿hay alguna a la que dedicaste más tiempo?”. Lo ideal sería que el niño disfrutara con todas las actividades que se llevan a cabo cuando está en clase; esto supondría un excelente resultado de aplicación de estas técnicas.

En todas las actividades en donde se le proponía —o se le propondrá— al niño que mejorara —o que mejore— los resultados para obtener nuevos objetos que funcionasen —o que funcionen— mejor que los manejados por él, se estaba —o estará— aplicando esta técnica.

**Ejemplo 10.2:** Tenemos un cubo y nos gustaría saber la cantidad de agua que necesitaríamos para llenarlo. Estamos manejando distintos objetos que nos pueden servir para medir la capacidad de un cubo: botes, vasos, latas... Al llegar a casa tenemos que decirle a mamá cómo era el cubo que teníamos en clase.

Le preguntamos a los niños: “¿cómo lo haríamos?”; “¿habría otra forma mejor para que no sólo me entendiera mamá sino cualquier persona aunque no conozca los objetos que estamos utilizando?”.

### 3.5.11. Actividades utilizando la serendipity

**Ejemplo 11.1:** Podríamos comentar a los niños al final de la clase que si conocen el reloj, si hay algún reloj que les guste especialmente —el de papá, el de mamá, el del salón de casa u otro que hayan visto en la calle—, que se fijen bien en él, que lo midan si es posible, que comparen sus dimensiones —longitud del minuterio y el horario—, ya que al día siguiente nos tienen que contar cómo es y lo van a dibujar. Además, nos tienen que relatar si ha ocurrido alguna otra cosa (han tomado —o necesitarían tomar— otra medida aparte de la longitud, han descubierto algo nuevo) mientras pretendían realizar la actividad propuesta, etc.

### 3.5.12. Actividades utilizando la ideogramación

**Ejemplo 12.1:** Partiendo del ejemplo 9.1, tenemos anotados los animales que dijeron los alumnos. Vemos relaciones elementales entre ellos, sugeridas por los alumnos, como: que tengan pico, que tengan alas, que tengan dos o cuatro patas, que sean animales salvajes o domésticos, que sean insectos, etc. Podemos decirle a los niños que hagan un dibujo para cada uno de los grupos o que vean la forma de colocarlos. Para tener delante a todos los animales que hemos anotado, de forma que podamos verlos de un sólo golpe de vista, realizamos un poligrama relacional de síntesis y un pictograma estructural de síntesis.

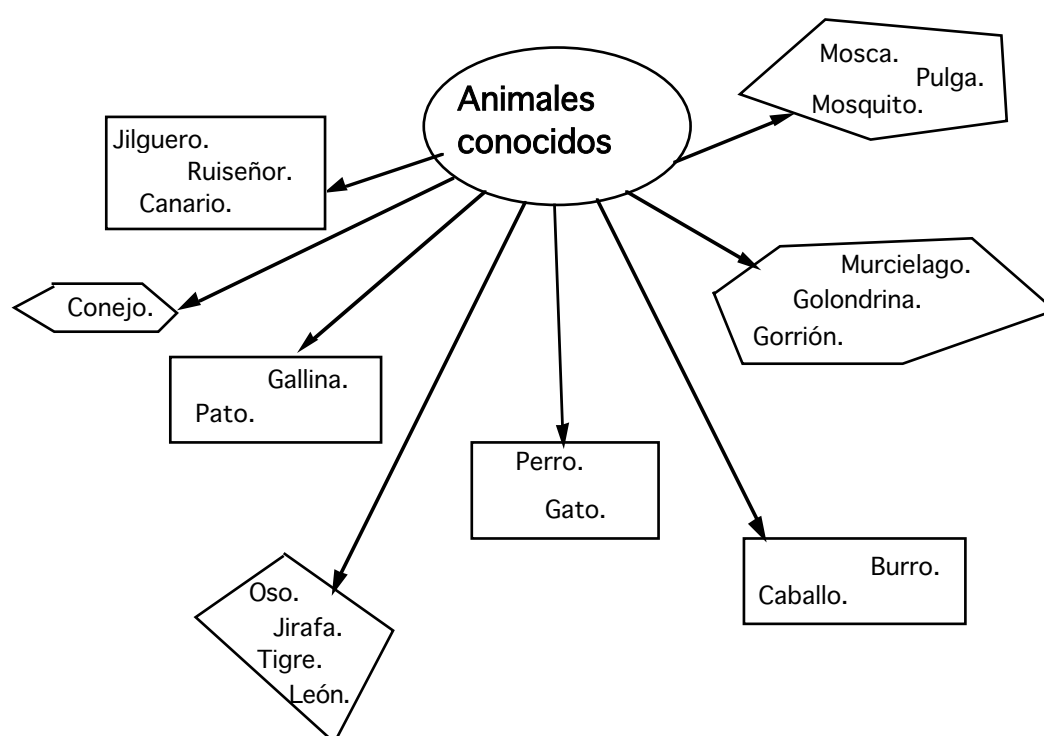


**Figura 46: Poligrama relacional de síntesis de los animales conocidos.**

Para hacer este poligrama hemos tenido en cuenta las relaciones consideradas anteriormente, y además hemos utilizado el mismo tipo de figura para incluir a los animales que pueden tener en casa y con los que jueguen, y hemos colocado arriba los que son mas pequeños.



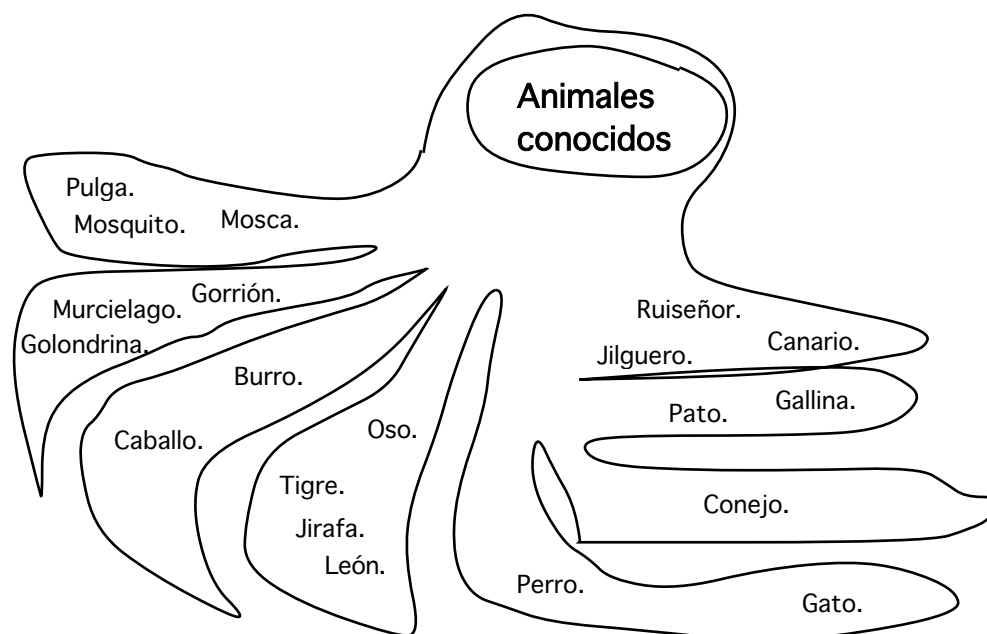


Figura 47: Pictograma estructural de síntesis de los animales conocidos.

Esta no es la única forma de estructurar los elementos de nuestro trabajo, podríamos haberlos distribuido en otro gráfico por tamaños o por pesos, en este caso se admiten sugerencias para hacer otro nuevo ideograma.

### 3.5.13 Actividades utilizando el circept

**Ejemplo 13.1:** Queremos aplicar esta técnica para estudiar el dado, con lo que tenemos **elegido el tema**. Pasamos a la **etapa imaginativa**, para ello se le da rienda suelta a la imaginación, empezando con un torbellino de ideas sobre el dado y vamos anotando lo que nos van diciendo los niños, que podría ser lo siguiente:

|                  |                |              |                    |
|------------------|----------------|--------------|--------------------|
| Juguete,         | No redondo,    | Redondo,     | Divierte,          |
| Números,         | Parchís,       | Oca,         | Mesa camilla,      |
| Con picos,       | Sin huecos,    | Amigos,      | Cuadrados iguales, |
| Aburrimiento,    | Compañía,      | Soledad,     | Televisión,        |
| Divertir,        | Alegría,       | Contar,      | Distracción,       |
| Compartir,       | De madera,     | De plástico, | De espuma,         |
| Cabe en la mano, | Lados iguales, | Muy grande.  |                    |

En la **etapa crítica** clasificamos las respuestas, estableciendo los siguientes grupos:

- ◆ Utilidad.
- ◆ Funciones.

- ◆ Materiales.
- ◆ Dimensiones y forma.
- ◆ Modos de usarlo.
- ◆ Otros usos.
- ◆ Lo que no es.
- ◆ Lo que pasaría si no existiera.

Representamos gráficamente los resultados mediante un circept:

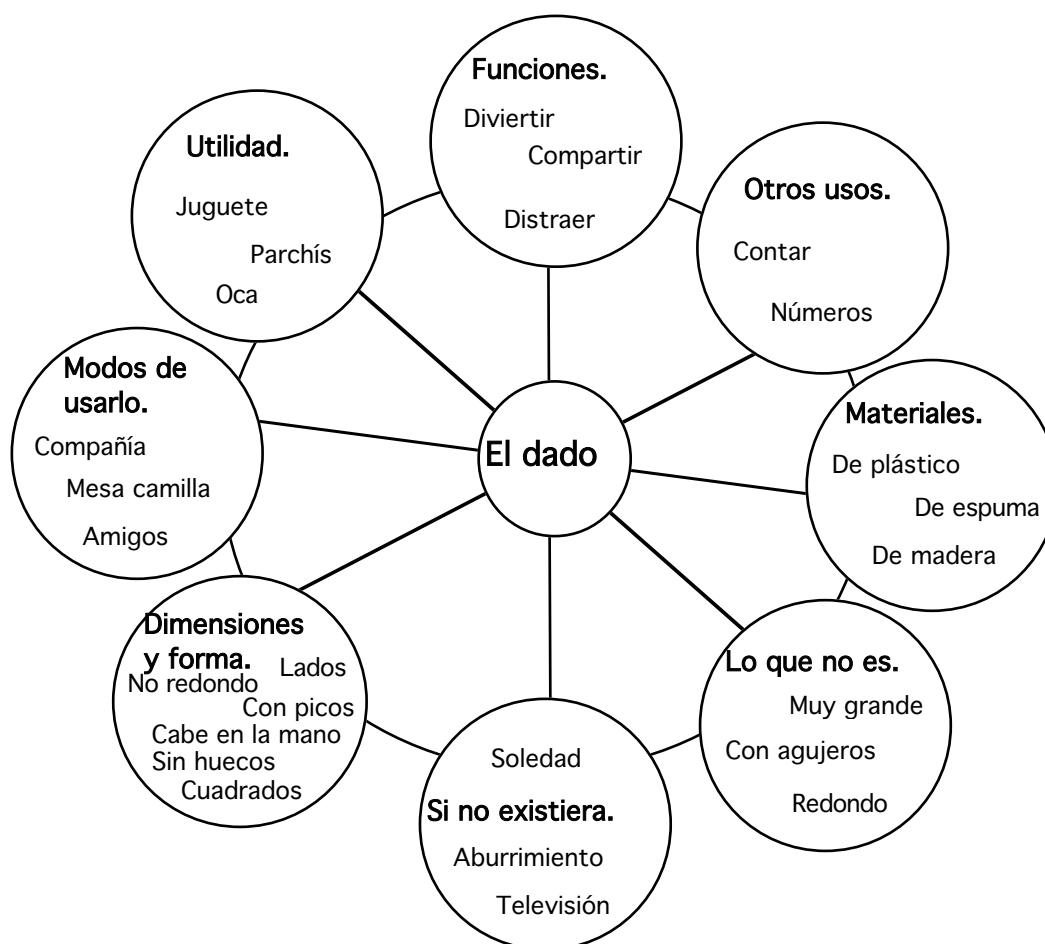


Figura 48: Circept sobre el dado.

Se **usan las analogías** para dar una explicación del dado, que podría ser la siguiente:

- i) El dado es un cuerpo que no es redondo, formado por cuadrados iguales, con lados iguales, que tiene picos pero no tiene huecos y cabe en la mano.
- ii) Se puede hacer de madera, de plástico o de espuma.
- iii) No es redondo, ni es muy grande y no tiene agujeros.

iv) Se utiliza en la mesa camilla, estando en compañía de los amigos, para jugar al parchís y a la oca. También sirve para contar los números que tiene en sus caras.

v) Con él nos divertimos, compartimos y nos distraemos.

vi) Si no existiera estaríamos solos y no tendríamos más remedio que ver la televisión.

De todas las analogías presentadas, el grupo elegirá las que les resulten más novedosas.

### 3.5.14. Actividades utilizando la técnica crear durmiendo o sleep-writting

**Ejemplo 14.1:** En clase le decimos a los niños que queremos inventarnos unas monedas que mejoren las que hay en la actualidad, que sean más divertidas y que puedan tener otros usos distintos de la compra de productos. Con esto intentamos conseguir que el niño **esté interesado por un tema**.

Todos tenemos que pensar en las monedas que nos gustaría que hubiera. Podríamos decirles a los papás que queremos aplicar una técnica de Metodología Creativa, para lo cual antes de que el niño se vaya a dormir, la noche anterior al día señalado para resolver este ejercicio, deben recordarle que piense en las monedas que le gustaría que hubiera. La ayuda de los padres nos sirve para **organizar la sesión**.

El papá o la mamá puede preguntarle al niño sobre las monedas que se le han ocurrido ya que, como estamos en Educación Infantil, no podemos **dejar a mano, antes de ir a dormir, papel y lápiz**, pensando que escriba sus ideas, aunque sí puede dibujarlas. O podemos confiar en que el niño recuerde todo lo que haya pensado.

Cuando llegamos a la mañana siguiente cada niño nos dice lo que ha pensado, para **analizar los resultados**. Elegimos entre todos la mejor solución, que puede ser la que sugiera algún niño u otra que surja del comentario entre todos, e intentamos construir las monedas con plastilina o con arcilla.

**Ejemplo 14.2:** Los niños ya han utilizado algunas medidas de capacidad como el litro, el medio litro y el cuarto de litro, para medir agua, leche, refrescos, etc., empleando para su medida botellas, vasos, botes, etc., que tengan esas capacidades. Le pedimos a los niños que piensen si sería

posible tener algunos instrumentos que nos puedan servir para medir estas cantidades de líquidos, sin tener los problemas que tienen los que utilizamos: tienen la boca estrecha, se derrama parte del líquido, no nos acordamos de decirle a mamá que no los tire, etc. Con esto pretendemos que el niño **esté interesado por un tema**.

Los papás están avisados, por si a los niños se les olvida, de que deben recordarles antes de irse a dormir, el día anterior al que nos corresponda hacer este ejercicio, que piensen si sería posible tener algunos instrumentos que nos puedan servir para medir cantidades de líquidos de una manera cómoda. Pretendemos que los papás se impliquen y nos ayuden a **organizar la sesión**.

Les decimos que deben **dejar a mano, antes de ir a dormir, papel y lápiz**, para que dibujen los instrumentos que se les hayan ocurrido, que nos puedan servir para medir las cantidades de líquidos de una forma más cómoda.

Al día siguiente cada uno comenta su idea, se ve si se podría mejorar, se elige la que más convenza a todos y se dibuja en la pizarra. Esto nos sirve para **analizar los resultados**.

### 3.5.15. Actividades utilizando el relax imaginativo

**Ejemplo 15.1:** Vamos a llevar a cabo un relax imaginativo utilizando como tema el peso. Seguimos los pasos indicados en el Capítulo I:

**1. Ambientación:** Ponemos música ambiental suave.

**2. Relajación muscular:** Nos preparamos trayendo ropas cómodas y nos tumbamos en el suelo. Cerramos los ojos... Respiramos a fondo pero lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Todos nos hemos pesado y hemos visto pesar muchas cosas.

**4. Narración:** Pensamos en un peso... Nos estamos pesando en una balanza con dos platillos. Se mueve hacia los lados... Ahora me peso yo. ¡Hay que poner pocas pesas! Peso muy poco... El peso se mueve... ¡Otro muy gordo se ha puesto en el otro platillo!... ¡Que me caigo!... ¡Bájate! ¡Otro que pese menos que se ponga en el otro platillo! Se pone uno muy delgado. ¡Está desequilibrada la balanza!... ¡No vale, tiene que ponerse otro que pese un poco más! Se pone otro. Ahora el peso está en equilibrio. ¡Qué bien!... Por fin se equilibra.

**5. Vuelta a la realidad:** Razonamos entre todos lo que pasa en las distintas situaciones y sacamos conclusiones.

**6. Aplicaciones didácticas:** Nos tiene que quedar claro que cuando los objetos pesan lo mismo la balanza se equilibra.

**Ejemplo 15.2:** Vamos a trabajar el paso del tiempo; el objetivo es que observen que si nos lo pasamos bien, el tiempo pasa sin darnos cuenta. Seguimos los pasos que hemos indicado:

**1. Ambientación:** En un lugar tranquilo y silencioso nos colocamos de pie, con los pies un poco separados —la distancia de un pie aproximadamente.

**2. Relajación muscular:** Dejamos colgar los brazos a los lados de los costados, sin hacer ningún esfuerzo. Les damos instrucciones a los niños para que sigan los pasos siguientes:

- a) Cierra los ojos y elimina todos los pensamientos.
- b) Relaja la cabeza partiendo de la coronilla. Sientes que se relajan los músculos de la cara.
- c) Relaja los hombros, subiéndolos y dejándolos caer de golpe, si es necesario.
- d) Relaja el tórax y la parte delantera del cuerpo. Sientes tu respiración natural.
- e) Relaja la espalda. Sientes que se aflojan todos los músculos.
- f) Relaja los brazos hasta la punta de los dedos. Mueve los dedos, si lo deseas.
- g) Relaja las piernas hasta los dedos de los pies. Siente cómo se elimina la tensión —que sale— por las puntas de los pies.

Ya que tienes todo el cuerpo relajado, relájate mentalmente. Siente que no tienes ninguna preocupación ni ningún pensamiento en la mente. Si estos vienen, déjalos pasar.

**3. Preparación para la narración:** Todos sabemos que el tiempo pasa, aunque nos parece que unas veces va más rápido que otras.

**4. Narración:** Piensa que acabas de salir de casa, vas con mamá. Vais charlando de cosas agradables. Llegáis al colegio. ¡Hum, hemos llegado muy pronto! Tú le preguntas a mamá: “¿cuánto tiempo hemos tardado?”. Estás en el colegio; estáis todos los niños cantando una canción, la de “los patitos”. Es una canción muy bonita... Al final todos aplaudís. ¡Qué bien me lo paso!... La profesora pregunta: “¿sabéis el tiempo que hemos estado cantando la canción?”. Nadie responde... Es hora de salir al recreo. Le preguntas al compañero: “¿qué hora es?”. No sabe decírtelo... ¡Nadie tiene un instrumento que me diga qué hora es!... “¿Qué aparato me puede servir para saber la hora qué es?”. ¡Ah, papá tiene un reloj en la muñeca que sirve para medir el tiempo! ¡Bueno, y en casa hay otro reloj colgado en la pared!... Hay varios relojes que me sirven para saber cómo va pasando el tiempo...

**5. Vuelta a la realidad:** Suena una campana, que es la señal de que tenemos que volver a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** Para razonar sobre lo que hemos comentado mientras estábamos relajados, planteamos un torbellino de ideas con las siguientes preguntas: “¿cuándo nos parece que pasa más rápido el tiempo?”; “¿y cuándo más lento?”. “¿Qué instrumento nos sirve para medir el tiempo?”. “¿Conoces algún reloj?”; “¿qué relojes conoces?”...

### 3.5.16. Actividades utilizando la técnica de escenarios

**Ejemplo 16.1:** Pensamos si en el futuro podría haber alguna forma de medir la longitud que no fuese tan complicada para el niño como lo es hoy, si habría otra forma en la que no tuviera que ir llevando progresivamente la unidad de medida sobre la cantidad que queremos medir, ya que muchas veces nos dejamos un poquito sin cubrir con la unidad de medida, y otras montamos la unidad de medida en la unidad anterior. Seguimos los pasos indicados:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Analizamos entre todos lo que nos cuesta medir una longitud.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Nos planteamos cómo podríamos medir longitudes en el futuro: “¿podríamos medirlas de forma más fácil?”; “¿con qué aparatos?”. “¿Sería posible emplear el ordenador para medir una longitud?”; “¿cómo?”.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Ordenamos las ideas que hayan aportado de mayor a menor según facilite el proceso de medida.

**Ejemplo 16.2:** Trabajamos con cajas de distintos tamaños e intentamos ir viendo el volumen que ocupan. Observamos que en la actualidad no hay unidades de medida claras para medir directamente la magnitud volumen, y queremos tratar de ver cómo se podría medir hoy día y en el futuro. Lo hacemos siguiendo los pasos antes indicados:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Se razona qué es lo que pasa en la actualidad cuando queremos medir un volumen, por ejemplo, cuándo queremos saber si cabe un objeto en un determinado espacio.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Pensamos si en el futuro será más fácil medir un determinado volumen. Se van aportando soluciones.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Se clasifican y se seleccionan las mejores teniendo en cuenta que sean fáciles de llevar a cabo y que su coste sea reducido.

### 3.5.17. Actividades utilizando la síntesis creativa

**Ejemplo 17.1:** Después de la experiencia llevada a cabo para que los niños midan la clase, su cuarto, etc., y puedan comunicar el resultado a otra persona que no nos ve, podemos llegar a que para poder decirle a cualquiera el resultado de la medida de forma inteligible, es necesario tomar esas medidas con un instrumento que sea conocido por todos, y ese instrumento es el metro, luego el resultado tenemos que darlo en metros, decímetros o centímetros. Con esto podemos enunciar el slogan: “El resultado de una medida hay que darlo en unidades conocidas por todos”

**Ejemplo 17.2:** Queremos ordenar una serie de objetos según su peso. En principio, no se da ninguna indicación a los niños. Se deja una balanza pero no se sugiere que la utilicen. Es normal que los niños vayan sosteniendo los objetos y empiecen la ordenación con sólo su apreciación. Cuando llegan a objetos cuyos pesos se diferencian poco, no les sirve este método; tendrán que usar la balanza. Entonces sacamos la siguiente conclusión: “Para comparar pesos tenemos que emplear la balanza”.

Podemos emplear esta técnica en el tema de “las Magnitudes y su Medida” para niños de Educación Infantil, de forma análoga a como lo



hemos hecho en estos dos ejemplos, a la hora de crearle al niño la necesidad de utilizar cualquier instrumento que nos sirva para medir cualquier magnitud. Para ello se llevan a cabo experiencias con los materiales que le son más cercanos, sin utilizar los instrumentos apropiados para medir; después se le hace sentir la necesidad de estos instrumentos.

### 3.6. Actividades utilizando el juego como técnica

Al ser el juego un medio de aprendizaje, es importante conocer las etapas evolutivas en que se encuentre el niño en Educación Infantil para poder planificarlo. Dichas etapas, según Barcia y Rodríguez (en Gervilla (2002: 237)), son:

**a) Etapa sensoriomotriz (0-2 años):** En esta etapa lo más adecuado para favorecer la creatividad es realizar juegos utilizando juguetes que estimulen todos los sentidos, ya que estamos desarrollando la sensibilidad perceptiva del niño, a la vez que le proporcionamos experiencias variadas, lo cual servirá de cantera a la que recurrir ante una necesidad de creación. Hemos de estimular el desarrollo, tanto de su motricidad gruesa como de su motricidad fina, ya que estaremos desarrollando habilidades motoras que pueden hacerle falta ante un problema que exija destreza motriz.

La regla de oro para elegir los juguetes más adecuados que debe emplear el niño, en general, es la sencillez. Los más complejos y perfeccionados no le dejan al niño ningún resquicio para fomentar la creatividad. Según Rodríguez (1992), *parece que cuanto más sencillo es el juguete tanta más apertura deja para su uso en formas creativas, y tantas mayores posibilidades para la acción de los jugadores.*

Para ver los tipos de juegos y juguetes que se pueden utilizar en cada edad, hay que distinguir en esta etapa otras subetapas que son:

**a<sub>1</sub>) Hasta los 3 meses:** durante esta subetapa el bebé juega a solas con sus manos, pies, sonajero, etc., y con su sonrisa o movimiento de manos parece querer participar jugando en las conversaciones con las personas que se acercan a él. Los juguetes que se utilizan son colgantes de colores vivos, móviles y musicales para suspender de la cuna, sonajeros de colores vivos y de distintos sonidos, objetos para manipular.

Por lo que respecta a “las Magnitudes y su Medida” pensamos que, sin pretenderlo, el niño va preiniciándose levemente en secuencias temporales de sonidos, y como el niño sostiene levemente los objetos

manipulables con ello obtendrá una mera preiniciación en las magnitudes longitud, superficie, volumen y peso.

**a<sub>2</sub>)** De los 3 a los 6 meses: sigue jugando sólo con los dedos, las manos y los pies, con los objetos que le dejan los mayores en las manos y también participa levemente en el juego que le proponen las personas de su entorno. Realiza innumerables experiencias de tocar, palpar, chupar o arañar sólo por diversión o por el placer táctil que le aporta. Se emplean objetos de distintas texturas para morder y manipular, objetos de colores atractivos con sonido para escuchar, mirar y tocar, pelotas, muñecos de goma o trapo, cascabeles, etc.

En cuanto a “las Magnitudes y su Medida”, el niño sigue preiniciándose en las secuencias temporales de sonidos y en las magnitudes longitud, superficie, volumen y peso.

**a<sub>3</sub>)** De los 6 a los 12 meses: el niño ya gatea, así que empieza a desplazarse por el espacio. Se mueve para ir descubriendo su entorno, juega con todo lo que encuentra y con las personas que le rodean. También empieza a sentarse, empieza a pensar en el movimiento de sus manos y pies, y a interesarse por el aspecto que presentan los objetos de su entorno. Es una subetapa de manipulación en la que el niño aprieta, balancea, gira objetos, mete unos dentro de otros, vacía y llena objetos, etc., (Gervilla, 1997).

Suele usar cubos gruesos para apilarlos y hacer construcciones a placer, juguetes encajables sencillos, pirámides o conos, anillos grandes, objetos que rueden: pelotas, cilindros, conos, etc., animales u objetos realizados en tela u otro material distinto a como se den en la realidad (con esto le estamos dando originalidad a lo existente).

Respecto a “las Magnitudes y su Medida”, los conceptos en los que se pretende seguir preiniciando al niño son: números naturales, longitud, superficie, volumen, capacidad y peso.

**a<sub>4</sub>)** De 1 a 2 años: disfruta arrastrando y empujando todos los objetos que encuentra a su paso. Según Gervilla (op. cit., 35) *a los 15 meses la aprensión y manipulación es casi precisa, el niño puede abrir una caja, manejar una cuchara —aunque con algunos tropiezos. Hacia los 20 meses el aprendizaje de la marcha se hace estable en la coordinación global* y participa con más seguridad en muchos juegos.

Hacia los 2 años el niño es capaz de construir una torre con 5 cubos. En esta subetapa y en las siguientes casi todos los juegos son colectivos. Se suelen utilizar juguetes de arrastre para tirar y empujar, bloques para formar, alinear, apilar o construir, juguetes para llenar,

vaciar o cargar, objetos que puedan meterse dentro de otros, pelotas, correpasillos, agua, arena, etc. Al empezar a andar el niño en esta subetapa ya tiene más facilidad para relacionarse con el entorno, todo lo quiere manipular, se sube a algunos sitios para acceder a otros, juega con todo lo que encuentra. Participa mucho más de los juegos con los que le rodean.

Continuamos experimentando en las magnitudes: números naturales, longitud, superficie, volumen, capacidad y peso.

**b) Etapa del juego simbólico (3-5 años):** *Al final del tercer año ya puede comer solo, lanza la pelota y traza un círculo con el lápiz. A los 3 años su coordinación le permite montar en un triciclo, aunque aún con torpeza. A los 4 años su coordinación es más armoniosa: salta a la pata coja, dibuja círculos y cuadrados, lleva el vaso de un lado a otro sin derramar el líquido. A los 5 hace lo que quiere físicamente: salta con la cuerda, patina, monta en bicicleta, se sube a la mesa y salta...*

Esta es la etapa que más se presta al desarrollo de la creatividad, ya que a través de la simbolización los niños pueden transformar los objetos o las situaciones en otras distintas. Se inicia en los juegos con reglas no muy rígidas que el niño puede quitar o proponer otras nuevas. Con estos juegos pueden imitar o inventar los gestos y las acciones de otros. Juegan a las casitas, a las mamás, a la escuela, a los médicos, a la compra, a vaqueros, al escondite con niños o con objetos, al “veo veo”, a cruzar laberintos muy simples pintados en el suelo o fabricados en volumen, etc.

Los juguetes que se pueden emplear son: construcciones para hacer torres, figuras que se puedan insertar en otras, pintura de dedos, arcilla, títeres —con los que tenga que crear sus propias historias—, disfraces, bicicletas, pelotas, dominós sencillos, parchís, juegos con piezas de distintas formas geométricas y colores como los bloques lógicos (un material creado por Z. P. Dienes que consta de 48 piezas de madera que son figuras geométricas: triángulos, cuadrados y círculos; con tres colores distintos: rojo, azul y amarillo; de 2 grosores distintos y de 2 tamaños distintos) con gran importancia por su simplicidad y por su aplicabilidad (Kothe, 1978), bloques multibase, regletas de Cuisinaire, relojes, etc.

Con todo este material se pretende iniciar al niño en los conceptos de: número natural, longitud, superficie, volumen, capacidad, masa, tiempo, dinero, temperatura...

**c) Etapa del juego de reglas (a partir de los 5 años):** como el niño ha adquirido cierta madurez, ya es capaz de jugar con otros niños,

en los juegos de reglas se asignan diferentes papeles a los participantes. Existen unas normas que hay que acatar o respetar. Estos juegos limitan más la creatividad que los juegos de la etapa anterior.

En esta etapa los juguetes que se suelen utilizar son: juegos de adivinanzas, puzzles, marionetas, instrumentos musicales, juegos de modelado, juegos de construcción, balones, juegos de asociación de formas, disfraces, cometas, cantidades, útiles para construir por sí mismos, sin dejar de lado juegos que requieran imaginación, realizar asociaciones inusuales o encontrar relaciones o semejanzas remotas (esto obviamente en la medida en que puedan y al finalizar la etapa de la Educación Infantil).

Ya va iniciándose el niño en algunas magnitudes. Aquí continúa el proceso de comprensión del número natural, la longitud, la superficie, el volumen, la capacidad, el peso, el tiempo, el dinero...

Además, entre los objetos que el niño puede utilizar en cualquiera de estas etapas como juguetes, están los materiales que tiene a su alrededor, por ejemplo: papel, gomas, lápices, cintas, botones, cajas, tapaderas de cacerolas, tapones, botes, palillos de dientes, palillos de sorbete, arcilla, arena, garbanzos, lentejas, arroz, harina, líquidos, relojes, etc. Esta es la forma en que puede ir conociendo su entorno, y a la vez utilizando todo este material, al principio, para realizar todo tipo de experiencias, como partir, pegar, amasar, trasvasar, etc., lo que después le llevará a realizar también todo tipo de mediciones, para comparar el peso de los objetos, la capacidad de los líquidos y los áridos, la longitud, el número de elementos, etc. Para ello es conveniente que siempre esté controlado por alguna persona mayor. Es importante invitar al niño a reflexionar después de cada juego, con objeto de que descubra lo que ocurre y el porqué de las cosas, aplique a otras situaciones sus deducciones, generalice, invente otros juegos, etc.

Cualquier experiencia que realice el niño a cualquier edad debemos aprovecharla, ya que puede serle útil para un posterior aprendizaje.

En cuanto a los videojuegos o los juegos con el ordenador, a veces se consideran los responsables del aislamiento del niño y de fomentar la violencia. Por supuesto es importante el tiempo que el niño esté delante de la pantalla y del contenido de los videojuegos o de los juegos, pero en la actualidad no podemos dejar al niño al margen del progreso social y de su futura formación tecnológica. Pensamos que, tanto los videojuegos como los juegos son un medio excelente para el desarrollo de las habilidades espaciales y temporales. Con ellos comprenderá la relación causa-efecto e irá comprobando que sus decisiones tienen siempre unas consecuencias.

Si se mira todo esto con el prisma de la creatividad, se observa que en los video-juegos o en los juegos de ordenador el niño tiene que utilizar la imaginación para resolver situaciones ante las que puede tomar distintas decisiones. Esto le aporta mucho, ya que cada juego es para él una experiencia que le sirve como recurso para poder ser utilizada en otras situaciones que requieran creatividad. Además, en el mercado existen gran cantidad de video-juegos y de juegos para el ordenador de alto contenido educativo para el niño de Educación Infantil, que estimulan su capacidad creadora.

El ordenador no es sólo para los alumnos inteligentes; es un medio insustituible para la enseñanza de los alumnos disminuidos físicos o psíquicos. Pueden utilizar el ordenador casi como una herramienta pensante que les ayude a desarrollar el arte de plantear estrategias, ponerlas en práctica y criticarlas.

En todo el tema de “las Magnitudes y su Medida”, como el niño tiene que moverse mucho para medir, todas las actividades que realicemos podemos plantearlas en forma de juego —Metodología Lúdica. Además, en todos los ejercicios propuestos anteriormente para realizar utilizando las distintas técnicas de Metodología Creativa, el juego era un elemento esencial; es por lo que no proponemos, de forma más explícita, nuevos ejercicios para trabajarlos con el juego.

**Ejercicio:** Dejamos para que el alumno-profesor plantee una actividad sobre “las Magnitudes y su Medida” con cada una de las técnicas de Metodología Creativa en Educación Infantil. Y además, si se le ocurre alguna idea, complete las que nosotros proponemos.

### **3.7. Actividades sobre conservación, transitividad y unidad de medida utilizando todas las técnicas de Metodología Creativa**

Para que el niño vaya adquiriendo la idea de medida, vamos a ver algunos experimentos que pueden ayudarle a madurar con respecto a las ideas de conservación y transitividad y que vaya adquiriendo la noción de unidad de medida. El alumno-profesor puede volver a comparar los resultados que se hayan comentado previamente con los de los niños que él conozca o con los de sus alumnos de Prácticas de Enseñanza. Todos los ejemplos que propondremos a continuación los trabajaremos utilizando las distintas técnicas de Metodología Creativa, que ya fueron comentadas en el Capítulo I, lo que puede hacer que cobren más interés:

**Ejemplo 1.** Decimos a los niños que traigan a clase cajitas de distintos tamaños, palillos como los de los polos, pajitas del helado, palillos de dientes, cerillas, etc. Nosotros podemos aportar varillas y cajas de diferentes tamaños. Primero se les deja que jueguen libremente, aunque vigilados, con todo el material. Después les decimos que queremos recoger todo el material para tenerlo disponible para otra vez cuando queramos volver a jugar con él. Y además sería bueno tenerlo organizado poniendo en la misma cajita todos los palitos que tengan la misma longitud. Incluso podemos sugerirles que vendría bien poner algún distintivo a cada cajita para saber, cuando volvamos a utilizarlos, qué tipo de palitos contiene.

Con esta actividad el niño está trabajando la clasificación y la transitividad, tan necesarias para adquirir los conceptos de magnitud. También al comparar las varillas entre sí y al intentar introducirlas en una caja —que tendrá que ser tan larga, por lo menos, como las varillas— puede establecer una ordenación. Todo ello va orientado a que el niño vaya iniciándose en la magnitud longitud.

En esta actividad podríamos aplicar **el arte de preguntar**; para ello plantearíamos algunas de las siguientes cuestiones:

i) **Sustancia:** “¿Qué es todo esto?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirven los palitos?”, “¿y las cajitas?”. “¿Se podrían utilizar para otra cosa?”.

iii) **Persona:** “¿Para quién se hicieron las cerillas?”. “¿De quién es esta cajita?”, “¿y los palitos?”.

iv) **Materia:** “¿De qué materiales están hechos las cajitas y los palitos?”. “¿Podría hacerse de otros materiales?”. “¿De qué colores son?”; “¿podrían ser de otros colores?”.

v) **Medios:** “¿Cómo se usan los palillos de dientes?”, “¿y las cerillas?”. “¿Se podrían usar de otra manera?”; “¿y las cajitas, cómo se usan?”.

vii) **Acción:** “¿Las cajitas se mueven?”. “¿Qué pasaría si se moviesen?”. “¿Tienen vida?”. “¿Qué pasaría si tuviesen vida?”. Las mismas cuestiones se podrían plantear con los palitos.

viii) **Cantidad:** “¿Cuántas pajitas tienes?”, “¿y cajitas?”. “¿Necesitas más cajitas para poner las pajitas, tienes las justas o te sobran?”. “¿Cuántas pajitas son tan largas como ésta?”. “¿Cuántos palillos iguales a éste puedes poner sobre esta pajita, cuidando que no



haya ningún palillo encima de otro y que no quede ningún hueco entre cada dos palillos?”. “¿Pueden ser los palillos más grandes, más pequeños, de otra manera?”, “¿y las cajitas?”. “¿Cuánto pesan las cajitas?”. “¿pesan más que los palillos?”. “¿pesan menos que una pluma?”.

**ix) Calidad:** “¿Qué defectos tienen las cajitas?”. “¿cómo se podrían corregir?”. “¿Podrían ser más perfectas?”.

**x) Tiempo:** “¿Cuándo se utilizan los palillos de dientes?”, “¿y las cerillas?”. “¿Se podrían usar en otro momento?”.

**xi) Lugar:** “¿Dónde se emplean las cerillas?”. “¿Dónde coloca mamá los palillos de dientes?”.

**xii) Valores:** “¿Qué pasaría si no existieran las pajitas de helado?”. “¿y si no existieran las cerillas?”.

**xiii) Recepción:** “¿Cómo se pueden perfeccionar los palillos de los polos?”. “¿y las cerillas?”.

Utilizaríamos un **torbellino de ideas** dejando todo este material a disposición de los niños, pero sin indicarles que lo emplearan y tomando una cuerda para preguntarles: “queremos dibujar una línea tan larga como esta cuerda; ¿cómo lo haríamos?”. También podríamos decirles: “queremos saber si podemos poner sobre la cuerda, sin que se solapen, más pajitas del helado que cerillas; ¿habría algún modo de saberlo?”. “¿qué tendríamos que hacer para ello?”. Recogemos todas las ideas, las clasificamos, las organizamos y evaluamos, nos quedamos con la que suponga menor esfuerzo.

Podríamos emplear **el método Delfos**, para lo cual cada alumno trabajaría, aparte, con algunas cajitas y varitas. El profesor iría anotando la forma de resolver, cada uno, el problema de recoger todo el material dejándolo de la mejor forma para poder usarlo en otro momento, y se lo comunicaría a los demás alumnos, sin decir de quién proviene, los cuales podrían modificar la forma de poner las varitas en las cajitas en función de esta información. El profesor agruparía las soluciones comunes y desecharía aquéllas que no resolvieran el problema y las extremas. Daría por terminado el problema después de haber cruzado las respuestas un par de veces.

La **sinéctica** sería otra técnica que podríamos emplear bajo el aspecto de **hacer lo familiar extraño**. Para ello decimos a los niños que cojan todas las varitas que tengan la misma longitud —esto es lo familiar para el niño.



Mediante la **analogía personal** se le puede decir al niño: “piensa que eres una varita; ¿cómo te comportarías?”; “¿para qué servirías?”. Así conseguimos que se identifique con las varitas, que se considere él otra varita.

Al tener que comparar las varitas para ver si una es más grande que otra, el niño usa la **analogía directa** ya que compara cada varita con alguna parte de su cuerpo que le sirve de referencia.

La **analogía simbólica** la emplearían para dibujar en la caja, en que hemos colocado las varillas de la misma longitud, un segmento que nos indique, sin tener que abrirla, las varitas que contiene.

Queremos señalar en la pizarra las varillas que hemos reunido en cada uno de los montones o en las cajitas, y lo hacemos mediante un dibujo —segmento o cualquier otro dibujo que les recuerde las varitas, objeto extraño para el niño— tomando como medida una varilla de cada uno de los montones, empleando la **analogía fantástica** para representarlos.

También podemos utilizar la sinéctica bajo el aspecto **convertir lo extraño en familiar**. Para ello dibujamos en la pizarra segmentos de distintas longitudes —esto es lo extraño para el niño— y se le pide que encuentre algún objeto: cerillas, palitos, pajitas...—esto es lo familiar para el niño— que tenga la misma longitud. Para ello seguimos los pasos indicados anteriormente cuando comentábamos la técnica. Utilizamos el **análisis** para tratar de organizar de menor a mayor los segmentos dibujados en la pizarra, para lo cual el niño puede, a la vez, ayudarse de las cerillas, palitos, pajitas...

Mediante la **búsqueda de modelos** el niño consigue tomar un objeto con la misma longitud que uno de los segmentos, éste será el modelo del segmento.

Pasará a la **generalización** observando que cualquiera de los objetos con la misma longitud que un segmento puede ser el modelo de dicho segmento.

Se podría utilizar el **método combinatorio**, en el apartado **análisis morfológico**, dibujando una tabla cartesiana de doble entrada en el suelo, en la clase o en el patio de recreo, colocando un dibujo de cada una de las cajitas —una vez clasificadas y ordenadas por tamaños— en la primera fila, y de las pajitas, palitos, etc. —también clasificadas y ordenadas— en la primera columna. En los cuadrados de la intersección de una fila con una columna pondríamos las varitas y las cajitas que tuvieran esos tamaños y que pudieran colocarse unas dentro de otras. Si

hubiera alguna cajita en la que no pudiera colocarse ninguna varilla ese cuadradito quedaría vacío. El profesor puede elegir las varitas y las cajitas según le interese, o no, que queden cuadraditos vacíos.

Las relaciones que tenemos en este caso son las obvias —poner las varitas en las cajitas—, pero éstas y otras que iríamos descubriendo son las que nos servirían para utilizar la técnica **el arte de relacionar**. Por supuesto que podríamos ver que cuanto mayor es la varita mayor tiene que ser la cajita que tenemos que coger para meterla. Podríamos preguntarnos: “¿de qué forma podría medir una cajita?”; “¿con qué material?”. “¿Podría medirla con las pajitas?”; “¿cómo?”. “¿Cuántas varitas necesitaría para medir una cajita?”.

Por supuesto que se podría aplicar la técnica **solución de problemas**. Para ello, podemos seguir los pasos anteriormente indicados:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”. Sabemos que en el problema están implicadas las cajitas y las varillas de distintos tamaños. Sabemos también que tendremos resuelto el problema cuando todas las varillas las tengamos metidas en las cajitas.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para poder meter una varilla en una cajita?”; “¿es la condición suficiente para poder ponerla?”; “¿es insuficiente?”; “¿redundante?”; “¿contradictoria?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió este tipo de problemas?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvería hace siglos?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo lo resolviste?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo tendrías resuelto el problema de colocar las varitas en las cajitas?”. “Suponiendo que llegues a resolver el problema, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la

solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a colocar todas las varitas en las cajitas?”.

#### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: Empezamos sin preocuparnos de que pongan las varillas en cajas que sean demasiado grandes, después iremos afinando hasta llegar a la solución más acertada del problema. Para ello podríamos preguntarles: “¿hay otra forma de colocar las varillas en las cajitas?”; “¿de cuántas formas podrías colocarlas?”.

♥ Análisis de las mismas: Como alguno las habrá colocado de otro modo, podríamos preguntarles: “¿qué ventaja tiene una forma de colocarlas sobre las otras?”; “¿cuál sería la mejor forma?”. “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las maneras de colocar las varitas en las cajitas?”. “¿Todas te conducen a colocar cada varita en una cajita?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para colocar las varitas en las cajitas?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

#### V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si alguna varita se te ha quedado sin colocar en alguna cajita?”.

#### VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema evaluaríamos nuestra actividad, para ello sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿los resultados son los deseados?”; “¿puedes comprobarlo?”. “¿Has conseguido colocar las varillas en las cajitas?”. “¿Hubo algún hecho que favoreció o dificultó la actividad?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Hemos procurado la “retroalimentación” necesaria?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo, con menos varitas o menos —o más— cajitas?”.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos:  
“¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos:  
“¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”

En un segundo paso, les podríamos dejar cajitas tan pequeñas que no cupiera ninguna varilla en ellas, y varillas tan grandes que no cupieran en ninguna cajita.

Se les podría plantear también el siguiente problema: “¿podríamos saber si una varilla cabe en una cajita sin necesidad de ponerla dentro?”. Podrían dar cada uno su opinión y nos valdrían soluciones como, por ejemplo: basta con poner la varilla debajo —o encima— de la cajita y si no sobresale podemos meterla en ella.

Se podría pensar en organizar de menor a mayor las varitas, por un lado, y las cajitas, por otro, y luego buscar la forma de ordenar todo el material —varitas y cajitas— conjuntamente y esto nos diría las varitas que se podrían meter dentro de las cajitas. También se les podría proponer reordenarlo todo de modo que al final sólo viésemos una cajita, que, por supuesto, sería la más grande. Con esto, además de trabajar la longitud, estamos trabajando el volumen y, en cierto sentido, la capacidad que tienen las cajitas.

Mediante la técnica **el entorno** se le puede decir al alumno que al salir de clase recoja todas las cajitas que encuentre que le sirvan para poner las varitas que no ha podido guardar en ninguna cajita. De forma análoga le pediríamos que buscara varitas —palitos, piedrecitas, hojitas, juncos, etc.— que cupieran en las cajitas que nos hayan quedado vacías. Seguimos los pasos indicados al comentar la técnica:

1. Con la idea de completar el proceso de no dejar ninguna cajita vacía ni ningún palito suelto, tenemos la **propuesta, asimilación y definición del problema**.

2. Nos tiene que quedar clara la idea de que **el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado** y con esto en mente vamos intentando lograr nuestro objetivo, para lo cual buscamos cajas en donde quepan los palitos que no cupieron en las que teníamos y objetos que sirvan para meter en las cajitas que quedaron vacías.

3. El niño tiene que estar suficientemente motivado para que esté permanentemente pendiente de **observar si algo de su entorno puede resolverle el problema**.

4. Después tendría que **comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones**, es decir, si el niño ha cogido una pajita que piensa que le sirve para llenar una cajita que estaba vacía, después tiene que llevarla y meterla en la cajita para ver si su apreciación era la correcta.

5. Al final tendría que pretender **mejorar el resultado si es posible**, cosa que no le sería difícil pensar después del trabajo llevado a cabo.

La **biónica** es una de las técnicas que cuesta más utilizar en Educación Infantil, pero les podríamos decir que se quedaran con una pajita o con el tallo de alguna flor y que buscaran algún animal que tuviera las patas tan largas como esa pajita. Con esto está haciendo un **estudio detallado del comportamiento** del animal seleccionado.

Cogemos otra pajita igual que la que teníamos. Nos fijamos bien en las patas de dicho animal y doblamos las pajitas igual que se doblan las patas del animal. Estamos intentando **traducir las propiedades de los seres vivos a modelos lógicos**.

Vamos a unir a las pajitas una cajita, en la que no quepan las dos varitas, para hacernos una pequeña grúa que pueda recoger las cosas como las patas del animal. Con esto pretendemos **desarrollar el modelo intentando reproducir al máximo las funciones de las patas del animal**.

Cuando trabajamos con este material no es fácil olvidarse de él, así que vamos a utilizar la **sinapsis** para tratar de hacer la cajita ideal en donde cupieran todas las varitas. “¿Cómo la haríamos?”.

Estamos tan imbuidos en la actividad —de si cabe o no esta varita en esa cajita— que podría cruzarse por medio alguna idea que nos permitiera aplicar la **serendipity**. Para ello anotamos si hemos

descubierto algo que no esperábamos mientras trabajamos con todo esto.

Mediante la **ideogramación** podemos hacer un **poligrama relacional de síntesis** construido por rectángulos de igual medida que la base de las cajitas y líneas con la misma longitud que las varitas. Enlazaremos mediante una flecha la línea representante de una varita con el rectángulo representante de una cajita, si una cabe dentro de la otra.

De forma análoga a como utilizamos el **circept** cuando pusimos el ejemplo del dado en el Capítulo III después de estudiar la técnica en el Capítulo I, podemos aplicárselo a la cajita o a la varita. Para ello seguimos los pasos siguientes:

**1. Elección del tema:** Elegimos como tema una de las dos cosas: la varita o la cajita.

**2. Etapa imaginativa:** Le damos rienda suelta a la imaginación buscando analogías, semejanzas, diferencias y oposiciones con la varita o la cajita.

**3. Etapa crítica:** Se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y se clasifican por categorías; hacemos después una representación gráfica mediante círculos, colocando las ideas análogas en el interior del mismo círculo.

**4. Uso de las analogías:** Hacemos un estudio detallado de las analogías para aplicárselo a la cajita o a la varita.

Después de estar trabajando con este material podemos dejar para el día siguiente alguna cuestión pendiente, como por ejemplo, que piensen en objetos distintos de los que tenemos que puedan meterse en las cajitas, para aplicar la técnica **crear durmiendo**. Al día siguiente les decimos que nos cuenten lo que se les haya ocurrido.

El **relax imaginativo** también podemos utilizarlo. Para ello seguimos los pasos siguientes:

**1. Ambientación:** Ponemos la clase en semipenumbra, con una música agradable, a un volumen no muy elevado.

**2. Relajación muscular:** Traemos ropas cómodas, nos relajamos tumbándonos en el suelo, cerramos los ojos... Respiramos a fondo pero lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Queremos trabajar la longitud con las cajitas y las varitas que ya conocemos previamente.

**4. Narración:** “Hay un niño que quiere colocar él solo los palitos en las cajitas. Piensa en las cajitas y en los palitos... Coge un palito... Ahora una cajita... ¡No, ésta no vale, no cabe!... ¡Se puede romper la cajita!... Otra cajita. ¡Tampoco!... “¿No hay cajitas para esta varita?”... Cojo otra cajita. ¡Ahora esta cajita sí va bien!... ¡Por fin!... Otro niño viene a hacer algo parecido, coge una cajita, tiene que buscar un palito para colocar dentro de dicha cajita. “¿Cómo podría hacerlo?”... ¡Ya sé, pongo los palitos que vaya cogiendo encima hasta dar con uno que no sobresalga de la cajita! Este palito no sirve, es demasiado grande. Este tampoco... ¡Por fin doy con uno que no sobresale de la cajita!... ¡Este sí cabe en la cajita!... Lo pongo dentro de ella”.

**5. Vuelta a la realidad:** Damos una palmada y volvemos a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** Nos preguntamos: “¿por qué le cuesta al primer niño buscar una cajita para el palito que ha cogido?”. “Antes de intentar resolver un problema, ¿sería mejor plantearnos cómo hacerlo?”.

Mediante la técnica de **escenarios** podríamos seguir los pasos indicados cuando comentábamos la técnica y que son los siguientes:

**i) Planteamiento actual y análisis:** Pensamos en la dificultad para meter los palitos en las cajitas.

**ii) Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Utilizando un torbellino de ideas nos planteamos: “¿podría haber en el futuro una forma para que fuesen directamente las varitas a sus cajitas sin necesidad de tener que ir probando?”. “¿Quién lo tendría que hacer?”. “¿Cómo podría hacerlo?”.

**iii) Selección de las mejores soluciones:** Se anotan todas las soluciones, se realiza una selección de las mejores que se les vayan ocurriendo y elegimos las que podamos llevar a cabo.

También se podría aplicar la técnica **síntesis creativa**, pues podríamos llegar al slogan diciendo que: “hay cajitas en las que no caben varillas”. Para ello tendríamos que darles cajitas tan pequeñas que no cupiese ninguna varilla en ellas o varillas tan grandes que no pudieran ponerse en ninguna cajita.



Como podemos observar, de una actividad tan simple se puede sacar mucho partido si se le aplican las distintas técnicas de Metodología Creativa.

Algo parecido podríamos llevar a cabo utilizando botones en lugar de palillos. Si bien aquí tendríamos más posibilidades para clasificarlos, pues además de poder considerar los tamaños —grandes, medianos y pequeños—, en este caso podríamos tener en cuenta la forma —redondos, cuadrados, triangulares...—, el fondo —lisos o con dibujitos en su superficie—, el número de agujeros —uno, dos o cuatro—, etc.

**Ejemplo 2.** Podríamos hacer un experimento parecido al que realizó Musick (1978). Tenía una muñeca que caminaba desde A hasta B y después desde B hasta A; los niños acompañaban a la muñeca y luego realizaban el recorrido de ida y vuelta ellos solos. Después, los niños tenían que ir desde A hasta B solos, coger un cesto pesado y regresar con él. En otro momento, los niños fueron andando desde A hasta B y regresaron corriendo. Al final, fueron dando saltos y regresaron corriendo. Los puntos A y B eran lados opuestos de una habitación.

Con este experimento se comprobó que los niños no eran capaces de entender, antes de los seis años, que la distancia de ida era la misma que la de vuelta. Los niños consideran el tiempo, el espacio y el movimiento como un todo, y son incapaces de distinguir entre ellos. Cuando tenían que soportar el peso del cesto pesado consideraron que la distancia era mayor que cuando sólo tenían que ir andando. Consideraron que cuando iban corriendo el trayecto era más largo que cuando iban dando saltos. Fueron muy pocos los que indicaron que la distancia era la misma cuando la recorrían ellos solos que cuando la recorrían con la muñeca.

Este experimento se realiza para que el niño adquiriera la idea de conservación de la distancia, ya que ésta no depende de todas las variables que hemos introducido.

Se puede empezar a trabajar este ejercicio con el **arte de preguntar** eligiendo algunas de las siguientes cuestiones para plantearles a los niños:

i) **Sustancia:** “¿Qué trayecto es el que vamos a recorrer?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué lo vamos a recorrer?”.

iii) **Persona:** “¿Quién va a recorrer el trayecto?”. “¿Lo recorreremos solos o acompañados?”. “¿con quién lo vamos a recorrer?”. “¿Lo podrían recorrer más personas?”.

iv) **Materia:** “¿Cómo son los zapatos con los que vamos a recorrer el trayecto?”; “¿de qué color?”. “¿Cómo es la muñeca?”; “¿cómo va vestida?”.

v) **Relación:** “¿Con qué objetos lo vamos a recorrer?”. “¿Lo podríamos recorrer con otros objetos?”. “¿Con qué te gustaría recorrerlo?”.

vi) **Medios:** “¿Con qué instrumentos podríamos ver si la distancia que hemos recorrido es más larga o igual de larga?”; “¿lo podríamos comprobar con otras cosas?”.

vii) **Acción:** “¿El objeto que llevamos tiene vida?”. “¿Qué pasaría si tuviese vida?”.

viii) **Cantidad:** “¿Cuándo es más grande el trayecto, cuando lo recorremos solos o cuando vamos con la muñeca?”. “¿Cuánto pesa la muñeca?”; “¿y el objeto?”. “¿Podría ser más ligero que una pluma?”. “¿Cuántas veces lo hemos recorrido?”. “¿Cuántos pasos hemos dado cuando íbamos solos?”; “¿y cuando íbamos con la muñeca?”; “¿y cuando fuimos saltando?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué fallos hemos cometido al recorrer el trayecto?”. “¿Podríamos haberlo recorrido mejor?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo hemos hecho el recorrido del trayecto?”. “¿Podríamos recorrerlo en otro momento?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde se hace el recorrido?”. “¿Podríamos hacerlo en otro lugar?”.

xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no tuviésemos un juguete para hacer el recorrido?”.

xiii) **Recepción:** “¿Qué influye en el recorrido?”. “¿Cómo nos lo podríamos pasar mejor?”. “¿Cómo se puede perfeccionar?”.

Se puede aplicar un **torbellino de ideas**. Para ello se deja al niño que piense cuándo el trayecto es más grande, si cuando lo recorre con la muñeca, o cuando lo recorre él sólo. Siempre hay algún niño —cuando esta actividad la realizamos con niños de 3 a 4 años— que nos dice que cuando lo recorre él solo. Pensamos que el niño va más distraído cuando va con la muñeca, y por eso su impresión de que el camino es más corto. No es de extrañar la respuesta del niño ya que también a las personas mayores nos parece que el camino es más corto cuando vamos

distraídos hablando con alguien. El profesor recoge las respuestas que dan cada uno de los niños. Se clasifican, organizan y evalúan entre todos.

Quizá por la dificultad de conservación del espacio fue por lo que Musick planteó otra segunda fase de autocorrección en la que el niño tenía que ir desde A hasta B él solo, coger un cesto pesado y regresar con él, y otra tercera fase en la que el niño fue andando desde A hasta B y regresó corriendo. Y por si alguno no se había dado cuenta de su error, hizo que el correspondiente niño fuese dando saltos y regresase corriendo.

El **método de Delfos** también podemos utilizarlo aquí. Para ello organizamos a los niños por grupos cuidando que no estén todos los alumnos con dificultades en el mismo grupo y que los de mayor coeficiente intelectual tampoco estén juntos. Es importante también que si hay algún niño que es líder y no deja hablar a otro, éstos dos no estén juntos. Todos los niños van realizando el experimento y les pedimos su opinión. Después, vamos comentando lo que nos han ido diciendo en los otros grupos en los que no están y esperamos a que, después de hacer los comentarios que quieran en el pequeño grupo, nos den de nuevo su parecer. Anotamos todas las respuestas eliminando los extremos y esas son las ideas del grupo.

Podemos aplicar la técnica **sinéctica** en su parte de **hacer lo familiar extraño**, ya que para el niño ese trayecto es familiar, pero al plantearle así la situación, lo complicamos por la cantidad de variables que intervienen.

Mediante la **analogía personal** debemos conseguir que el niño se identifique con las distintas situaciones que aparecen en el problema y trate de vivirlo desde dentro.

Por la **analogía directa** el niño tiene que comparar las distintas situaciones y debe descubrir que en todas ellas la distancia es la misma.

También podemos utilizar la **analogía simbólica**, para lo cual podemos decirle que trace un segmento tan largo como el trayecto que ha recorrido. Para ello dejamos cuerdas y reglas en la clase, pero no le sugerimos que las use. Como el trayecto ya es familiar para el niño, lo estamos haciendo extraño al pedirle que trace el segmento.

Podemos usar la **analogía fantástica** diciéndole: “¿de qué forma el trayecto sería más corto?”. Quizá con ello, en principio, pueda confundirse el niño, pero es bueno intentarlo ya que esto le puede llevar a salir de su error.

Se podría también aplicar la **sinéctica** bajo el aspecto **convertir lo extraño en familiar**, para lo cual se le puede marcar una línea en la pizarra —extraño— y decirle que haga un recorrido —familiar— igual a la longitud de la línea.

Para ello el niño debería utilizar el **análisis** para estudiar la situación y pensar cómo podría recorrer la longitud propuesta: tendría, por ejemplo, que trazar otra línea en el suelo con la misma longitud que la que hay en la pizarra o coger un trozo de cuerda que tenga la misma longitud que la línea de la pizarra, ponerla en el suelo y recorrerla.

Mediante la **búsqueda de modelos** el niño podría comparar el problema planteado con alguna situación análoga ya conocida, lo que facilitaría su comprensión. En este caso podríamos hacerle pensar en situaciones anteriores en las que haya comparado longitudes.

Con la **generalización** pretendemos llevar al niño a buscar situaciones que se resuelvan de forma análoga.

Mediante el **método combinatorio** puede ser que lleguemos a que el alumno se aclare, aunque nos interesa que, mediante el arte de preguntar, nos responda a la pregunta: “¿cómo te ha resultado la actividad que hemos realizado?”. Mediante un torbellino de ideas nos creamos una **lista de atributos**, para lo cual seguimos los pasos ya indicados cuando hablamos de la técnica y que son los siguientes:

**1. Definir los atributos fundamentales de la realidad objeto de estudio:** para ello se recogen las opiniones de los niños, que pueden ser: aburrida, pesada, divertida, dificultosa, entretenida, etc.

**2. Se analizan cada uno de los atributos y se plantean preguntas sobre la forma en que se podrían mejorar.** Para lo cual se les podría preguntar: “¿cuándo el trayecto es más largo?”. “¿Cuándo te lo pasaste mejor?”; “¿y cuándo peor?”; “¿por qué?”. Plantearles estas cuestiones puede llevarles a relacionar el atributo que hayan dicho antes con su apreciación de la distancia.

**3. Se sustituyen unos atributos por otros,** lo que nos va a permitir llegar a que distingan entre: se lo pasó mejor, le supuso más esfuerzo, tardó más tiempo, recorrió más distancia, etc.

Está claro que también estamos aplicando el **arte de relacionar**. En nuestro caso relacionamos su percepción de la distancia, en las distintas opciones que tiene para recorrerla, con que el niño vaya con la muñeca, vaya solo, que vaya acompañado, que lleve un peso pesado, que vaya andando, que vaya corriendo o que vaya dando saltos.

La **solución de problemas** es otra técnica que puede sernos útil, podemos aplicarla considerando los pasos antes señalados:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es el trayecto que tienes que recorrer?”. “¿Cómo recorres el trayecto en cada caso?”. Aquí empezamos definiendo el problema y nos planteamos: “¿cuándo es mayor la distancia?”.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para recorrer el trayecto?”. “¿Con los datos que tenemos es suficiente para saber cuándo es más largo?”; “¿es insuficiente?”; “¿redundante?”; “¿contradictoria?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo se necesitó medir un trayecto recorrido para saber cómo era de largo?”.

♥ Evolución: “¿En la antigüedad el hombre necesitaría medir un trayecto conocido?”. “¿Se podrá resolver esta cuestión como se resolvía hace siglos?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo tendrías resuelto el problema?”. Sabemos que tendremos resuelto el problema cuando el alumno sea capaz de separar las demás variables de la longitud del trayecto que ha recorrido. “Suponiendo que lleguemos a resolver el problema, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a resolver el problema?”. Sabemos que el tiempo, el ir solo o acompañado, el ir corriendo o saltando... son variables que no afectan al espacio recorrido, y que, por tanto, no influyen en la respuesta, y esto es lo que tenemos que hacer que entienda el niño.

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías ver cuándo es mayor la distancia?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”; “¿todas te conducen a la solución?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para saber cuándo es mayor la distancia?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

## V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”; “¿puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿los resultados son los deseados?”; “¿puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que diste eran innecesarios?”; “¿podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”. Nos queda claro cuándo hemos conseguido los resultados deseados y tenemos también, al final del enunciado, propuesta la retroalimentación necesaria.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”.

También la técnica el **entorno** puede ser utilizada aquí. Para ello seguimos los pasos antes señalados:

**1. Propuesta, asimilación y definición del problema:** Podemos indicarle al niño que cuando vaya del colegio a su casa busque otra distancia que sea tan larga como la que él ha recorrido en clase; al día siguiente debe decírnosla. Además nos tiene que contar cómo la ha encontrado: si iba solo o acompañado, con la mochila o sin ella, si la había recorrido antes o era nueva para él, si la recorrió andando o corriendo, etc.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado:** Tiene que ver que hay trayectos que son iguales que otros en su entorno más inmediato. Con esto estamos introduciendo al niño en el concepto de longitud.

**3. Observar si algo de nuestro entorno tiene cierto parecido con el problema a resolver:** El niño es en su entorno en el que se desenvuelve, y de su observación tiene que ir sacando los conceptos que va adquiriendo. En este caso es fácil encontrar muchos trayectos iguales a los que él recorrió en el colegio. Si no da con ninguno tenemos que sugerirle la posibilidad de coger un trozo de algún camino recorrido por él. Sería bueno que recorriera el trayecto unas veces solo y otras acompañado, andando unas veces y corriendo otras, con mochila y sin ella, etc.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones:** Tiene que comparar los trayectos encontrados con el de la clase y sacar conclusiones. Si el trayecto encontrado tiene la misma distancia que el recorrido en la clase, ya ha resuelto el problema; si no, tiene que seguir pensando en encontrar otro trayecto que cumpla las condiciones exigidas. Debe observar que la longitud de los trayectos no depende de que vaya solo o acompañado, andando o corriendo, con mochila o sin ella, etc.

**5. Mejorar el resultado si es posible:** Si encontró un trayecto con la misma longitud que el de la clase, el niño puede comparar otros objetos que tengan la misma longitud y observar que ésta no depende del estado de ánimo que tengamos cuando la midamos ni de otras variables por el estilo.

Utilizaremos la **biónica** para preguntarle al niño: “¿cuándo es más largo el trayecto: cuando lo recorres tú o cuando lo recorre una mariposa?”. “¿Quién tarda más en recorrerlo tú o la mariposa?”. Igual podríamos comparar la distancia que recorren y el tiempo que tardan un ratón, una mosca, un pájaro, un perro, un gato, etc.



Después debe observar con todo detenimiento al animal que ha dicho que lo recorre más rápido —con esto está haciendo un **estudio detallado del comportamiento** del animal—, para hacer con papel o plastilina otro animal análogo a ése. Esto último le sirve para **traducir las propiedades** del animal comentado **en modelos simbólicos**.

Como hemos estado concentrados intentando ver cuándo el trayecto es más largo, podemos aplicar la **sinapsis** dejando pendiente para el día siguiente buscar trayectos en casa que sean iguales que el que recorrimos en clase o que sean la mitad de él y preguntarle: “¿cómo lo has hecho?”.

Mientras estamos observando el trayecto que hemos recorrido, seguro que alguno de los niños aplica la **serendipity** y descubre, entre otras cosas, que si marcha más rápido tarda menos tiempo en recorrer el trayecto, que una cosa es la longitud del trayecto y otra el tiempo que tarda en recorrerlo, que dos trayectos son iguales cuando los recorremos dando el mismo número de pasos y de la misma amplitud, etc.

Mediante la **ideogramación** podríamos hacer un poligrama estructural de síntesis en el que aparecería: el niño solo, el niño con la muñeca, el niño con un objeto pesado, el niño saltando, el niño corriendo, un ratón, una mosca, un perro andando, un perro corriendo, una mariposa, una paloma, etc., dibujando polígonos con la misma forma en cuyo interior colocaríamos los que tarden el mismo tiempo en recorrer el trayecto.

Para utilizar el **circept** seguimos los pasos siguientes:

1. **Elección del tema:** Se elige como tema el trayecto recorrido.
2. **Etapas imaginativa:** Se empieza con un torbellino de ideas, el profesor va anotando lo que dice cada niño dándole rienda suelta a la imaginación, buscando analogías, semejanzas, diferencias y oposiciones.
3. **Etapas crítica:** Se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan, se clasifican y se hace una representación gráfica, colocando en distintos círculos las ideas análogas.
4. **Uso de las analogías:** Se realiza un estudio detallado de las analogías, semejanzas y diferencias, que ya teníamos ordenadas y clasificadas, para aplicarle al trayecto las consecuencias que obtengamos.

Podemos realizar la actividad un día y dejarles como tarea que piensen en ella antes de ir a dormir y nos digan el día siguiente si se les ocurrió alguna idea nueva sobre el problema; con ello aplicamos la técnica **crear durmiendo**.

También se puede aplicar el **relax imaginativo** para lo cual seguimos los pasos siguientes:

**1. Ambientación:** Creamos un ambiente agradable en clase, ponemos una música que sea del agrado de todos.

**2. Relajación muscular:** Traemos ropas cómodas y dejamos caer la cabeza encima de la mesa. Cerramos los ojos... Respiramos profunda y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Estamos todos preparados para trabajar la longitud. Antes de relajarnos hemos realizado el experimento y todavía hay niños que no ven claro que el recorrer el trayecto solos o acompañados, andando o corriendo, etc. no altera la longitud del mismo.

**4. Narración:** “Hemos salido al campo. Estamos en primavera. Todo está muy bonito. Llegamos a una explanada en donde hay una fuente. A todos nos ha gustado este sitio. Dejamos las meriendas y nos disponemos para jugar. Estamos recorriendo un trayecto. Todos tenemos que recorrer este trayecto. Sólo este trayecto... No me paso de los puntos señalados... Lo recorro solo. Un niño me empuja. ¡Que me caigo!... ¡Pero no me he pasado de los puntos señalados! Me cargo con un objeto que pesa mucho.... ¡Que se me cae!... ¡Ya lo he cogido mejor! ¡Estoy deseando llegar! ¡Este trayecto parece que no va a terminar nunca! ¡Por fin ya llegue!... Voy con mi juguete preferido. ¡Qué divertido!... ¡Pero si ya he llegado! ¡Qué rápido!... ¡Me lo paso fenomenal!...”.

**5. Vuelta a la realidad:** Terminada la narración elevamos el sonido de la música o ponemos otra más marchosa para que todos se despierten y nos cuenten sus impresiones.

**6. Aplicaciones didácticas:** Nos interesa que saquen la siguiente conclusión: “al final siempre me he movido entre los puntos señalados, estos puntos no los he acercado ni alejado, por tanto he recorrido todas las veces la misma distancia”.

Mediante la técnica de **escenarios** se siguen los pasos que comentamos a continuación:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Después de haber realizado el experimento todos los niños podríamos ver si es posible que alguien o algo sea el más rápido en recorrer el trayecto.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Se empieza por un torbellino de ideas para intentar ver si en el futuro podríamos encontrar esa persona, animal o cosa que recorra más rápidamente el trayecto.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Se anotan las soluciones y se realiza una selección de las mejores.

Evidentemente se puede aplicar la **síntesis creativa**, debiendo llegar al slogan de que “el espacio recorrido es invariante”, no depende de cómo o con quién lo realicemos.

Con esta actividad el niño no se aburre. Nosotros la realizamos con dos grupos de niños de 3 a 4 años. Utilizamos como objeto pesado nuestro maletín y les dijimos que se trajesen su juguete preferido: muñeca, coche, perrito, etc., e hicieron el recorrido con su juguete, en lugar de con la muñeca solamente, y como les pareció un juego, al tener que ir de un lugar a otro, se lo pasaron muy bien y corroboramos lo que decíamos al principio: el niño considera el tiempo, el espacio y el movimiento como un todo, y no es capaz de darse cuenta de que el trayecto no depende de que lo recorra corriendo, saltando, solo o acompañado con la muñeca.

No todos decían lo mismo. Unos, cuando iban corriendo consideraban la distancia mayor que cuando iban andando y otros al contrario; si iban con la maleta algunos decían que era más corto y otros que era más largo; etc. La variedad que supone el ir con distintos objetos e ir corriendo, saltando o andando, dispersa mucho la atención respecto al objetivo fundamental: la conservación de la distancia. Quizá sea porque el niño no tiene todavía claras las ideas de corto y largo. De todos modos es una actividad que recomendamos llevar a cabo en cualquier clase a partir de los 3 años y repetirla en años sucesivos con otros objetos y en otro lugar.

**Ejemplo 3.** Piaget y Taponier (1955-56) realizaron otro experimento, para el cual utilizaron dos varillas de la misma longitud que colocaron sobre la mesa una al lado de la otra y después desplazaron una de las varillas, y le preguntaron a los niños si tenían la misma longitud o si una de ellas era más larga que la otra. Observaron que antes de los seis años y medio los niños son incapaces de ver que la longitud de un objeto no varía cuando se desplaza, no distinguen bien la longitud de la varilla de la posición de los extremos, piensan sólo en el extremo más desplazado.

Quizá seamos los mayores los que influyamos en que el niño pequeño no tenga claro que las dos varillas son igual de largas, ya que cuando lo cogemos en alto decimos: “¡mira que grande es mi niño!”. Parece como si quisiéramos hacerle pensar que con elevarlo ya ha crecido, lo cual sabemos todos que no es cierto. Estos comentarios pueden despistarle a la hora de comprender lo que es la longitud.

Vamos a trabajar esta actividad empleando las distintas técnicas de Metodología Creativa antes comentadas.

Mediante el **arte de preguntar** les planteamos algunas de las cuestiones siguientes:

i) **Sustancia:** Señalando a las varillas les preguntamos: “¿qué es esto?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirven las varillas?”; “¿podrían usarse para otros fines?”.

iii) **Persona:** “¿De quiénes son cada una de las varillas?”. “¿Quién las utiliza?”. “¿las podrían usar otras personas?”. “¿Para qué las podrían utilizar?”. “¿Y el profesor para qué las usaría?”.

iv) **Materia:** “¿De qué están hechas?”. “¿podrían hacerse de otros materiales?”. “¿De qué colores son?”. “¿te gustaría que fuesen de otros colores?”.

v) **Relación:** “¿A qué se parecen?”. “¿podrían parecerse a otras cosas?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se usan?”. “¿se podrían utilizar de otra manera?”.

vii) **Acción:** “¿Alguna de ellas se mueve?”. “¿qué pasaría si se moviese?”. “¿Tiene vida alguna?”. “¿qué pasaría si una de ellas tuviese vida?”.

viii) **Cantidad:** “¿Son igual de largas las dos?”. “¿Alguna es más o menos larga que la otra?”. “¿Cómo es de larga cada una de ellas?”. “¿Podrían ser más largas o más cortas?”. “¿Pesan lo mismo?”. “¿Podrían pesar más que tu cartera?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tienen?”. “¿cómo se podrían corregir?”. “¿Podrían ser de otra manera?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo se utilizan?”; “¿se podrían utilizar en otro momento?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde están las varillas?”; “¿dónde las podríamos colocar?”.

xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existieran?”.

xiii) **Recepción:** “¿Qué influye sobre las varillas?”. “¿Cómo se podrían perfeccionar?”.

Es conveniente realizar este experimento con cada uno de los niños y preguntarles, antes y después de desplazar una de las varillas, si tienen la misma longitud. Les dejamos reflexionar para que, siguiendo la técnica **torbellino de ideas**, razonen por qué son iguales o por qué una es más larga que la otra. Clasificamos, organizamos y evaluamos los porqués sobre si son o no igual de largas. Si alguien no llega a ver con toda claridad que las dos varillas son iguales, podemos coger otros dos objetos, como pueden ser dos muñecas igual de altas y, levantando una, volvemos a plantearles una situación análoga.

El método **Delfos** se puede aplicar dándole a cada niño un par de varillas de la misma longitud para que primero juegue con ellas como quiera y después se le pregunta, estando las varillas juntas y desplazándolas, cuál es más larga y por qué. Recogemos las respuestas y le pasamos a cada uno lo que nos han ido diciendo los demás, por si quieren variar su respuesta. Volvemos a anotar lo que nos dicen, eliminamos los valores extremos. Cerramos el problema después de cruzar las respuestas que se han ido obteniendo.

Se podría aplicar la técnica **sinéctica** en su aspecto **hacer lo familiar extraño**. Mediante **analogía personal** podemos decirle al niño: “imagínate que tú eres la varilla, supón que estás en el suelo y que después te pones encima de la tarima, ¿eras igual de alto cuando estabas en el suelo que cuando estás en la tarima o has crecido algo?”.

Por **analogía directa** podemos hacer que cojan dos lápices de la misma longitud y hacer algo parecido a lo que hacemos con las varillas.

Utilizamos la **analogía simbólica** representando mediante segmentos cada una de las varillas, empleando las mismas varillas para hacerlos en la pizarra, primero uno al lado del otro y después uno desplazado un poco respecto al otro. En cada uno de los casos se le vuelve a preguntar si uno de los segmentos es más largo o son los dos igual de largos.

La **analogía fantástica** podemos emplearla diciéndole al niño: “imagínate que una de las varitas es un avión, ¿cuando va volando es más larga o es igual de larga que la otra que está sobre la mesa?”.

De los **métodos combinatorios** se podría usar la **lista de atributos**, para lo cual seguimos los pasos ya indicados y que son los siguientes:

**1. Definición de los atributos fundamentales de la realidad objeto de estudio:** Se puede lanzar un torbellino de ideas con objeto de que nos digan los atributos que tienen las varillas.

**2. Análisis de los atributos y planteamiento de mejora:** Se analiza la longitud, para lo cual se piensa en objetos que tengan alguna medida igual que la longitud de las varillas. Les planteamos si es apropiada la longitud de las varillas para medir la mesa, por ejemplo, o si sería mejor tomar otro objeto con otra longitud.

**3. Se sustituyen unos atributos por otros, o se les asignan a otro objeto o situación distinta, o se pasa de los atributos reales a los posibles:** Se piensa si se podría sustituir alguno de estos objetos por la varilla para medir el largo de la mesa más fácilmente. También podría cambiarse alguna cualidad de las que hayan dicho, y estudiar si la varilla sería más práctica cuando tuviese esta cualidad.

Con el **arte de relacionar** podemos intentar que el niño fabrique con plastilina algún objeto que tenga alguna de sus dimensiones como la longitud de las varillas.

Para aplicar la técnica **solución de problemas** seguimos los pasos siguientes:

### **I. Definición y comprensión del problema.**

♥ **Definición del problema:** Se puede intentar hacer un libro que sea tan largo como las varillas y tan ancho como media varilla. Nos preguntamos: “¿cómo lo podríamos hacer?”. “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”. El material que vamos a utilizar para las hojas va a ser folios, cartulina para las pastas, un trozo de tela para el lomo y pegamento.

♥ **Análisis de las condiciones:** “¿Cuál es la condición para poder poner las hojas y las pastas?”. “¿Es la condición suficiente para hacer el libro?”. “¿es insuficiente?”. “¿redundante?”. “¿contradictoria?”.

## II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de fabricar libros?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá hacer un libro como se hacía hace siglos?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan elaborar el libro?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: Nos planteamos recortar las hojas y las pastas del libro con las dimensiones ya indicadas. Y para ello le preguntamos al niño: “si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

## III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo tendrías hecho el libro?”. “Suponiendo que llegues a hacer el libro, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a hacer el libro?”.

## IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías hacer el libro?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”; “¿todas te conducen a la fabricación del libro?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los materiales necesarios?”. “¿Por qué éstos materiales y no otros?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para hacer el libro?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

El problema estará resuelto cuando hayan recortado los folios y las dos cartulinas con una superficie igual, tengan un rectángulo de tela un poco más largo que la varilla y un poco más ancho que la mitad de la varilla más el grueso total de los folios y las cartulinas, tengan pegados los folios y las cartulinas a la tela, esté todo seco y se pueda abrir el libro. Les preguntamos: “¿cómo podríamos hacerlo?”. “¿Con qué tijeras vamos a cortar los folios, las cartulinas y la tela?”. “¿Dónde nos podemos colocar para que no se llene todo de pegamento y podamos



trabajar cómodamente?”. Se recogen todas las alternativas y seleccionamos las mejores.

## V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”. Repartimos las tareas entre todos y nos ponemos en acción.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿los resultados son los deseados?”; “¿puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. Si no conseguimos hacer el libro, se redefine el modo de ejecución y se vuelve a intentar. Habrá veces en que tengamos que plantearnos: “¿será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”. En este caso podríamos hacer un cuaderno pequeñito, que tenga sólo 2 ó 4 hojas.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”.

También es posible aplicar la técnica el **entorno**, para ello seguimos los pasos señalados anteriormente:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Para lo cual le decimos a los niños que tienen que buscar en casa alguna varilla que sea tan larga como las que tenemos o algún material que nos permita construirla.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado:** Les convencemos de que en casa seguro que hay algo que nos puede servir para construir la varilla, aunque también es fácil encontrar alguna como la que tenemos en clase.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema:** Tenemos que llevar la medida de la varilla a la mano para que cuando encontremos algo podamos compararlo para ver si nos sirve.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones:** Cuando encontremos algún objeto que dudemos si puede o no sernos útil, tenemos que comparar su longitud con la de la varilla.

**5. Mejorar el resultado si es posible:** Si hemos encontrado una solución, podemos ver si se puede llevar a otros objetos para que nos sirvan también.

Para utilizar la **biónica** le podríamos decir a los niños si conocen algún animal que tenga las patas tan largas como las varillas. Siempre saldrá alguno diciéndonos algún animal. Les dejamos plastilina, cuerdas, alambre, tijeras, etc., y les decimos que construyan dicho animal utilizando las dos varillas para formar cada una de las patas. (Al dejarles las tijeras tendremos que estar muy pendientes de los niños.) Con esto tendrán que hacer un **estudio detallado** de cómo son las patas de dicho animal y cómo es todo el animal.

También tendrán que **traducir las propiedades de los seres vivos a modelos** al fabricar el animal con los materiales que les hemos dejado.

Deberán procurar que las patas se muevan como las del animal para lo cual tendrán que partir las varillas por la mitad y articularlas con algún material complementario. Al hacer esto último están **desarrollando los modelos** al intentar reproducir al máximo el movimiento de las patas del animal.

La **sinapsis** ya estaba sugerida antes cuando planteamos buscar objetos con alguna dimensión como la varilla, ya que el niño tiene que esforzarse por estar pendiente de llevar esta idea sobre todo lo que vaya encontrando.

Para la **serendipity** recurrimos también al caso anterior, y para ello se observa —si es en clase donde empiezan los niños preocupándose por encontrar objetos con alguna dimensión igual que las varillas— o se

les pregunta —cuando vuelvan, si es después de clase cuando realizan dicha actividad— si se encontraron con algo que ellos no esperaban cuando estaban buscando estos objetos.

Se podría aplicar la **ideogramación** buscando objetos que tengan alguna dimensión como las varillas, el profesor anota los que encuentren, haciendo una clasificación de todos ellos y realizando un poligrama relacional de síntesis.

Elegimos una de las varillas para hacer un **circept**, con esto tenemos **elegido el tema**.

Pasamos a la **etapa imaginativa**, dándole rienda suelta a la imaginación y anotando las analogías, diferencias, semejanzas y oposiciones que haya con la varilla.

En la **etapa crítica** se realiza una selección de las mejores respuestas, se reordenan y clasifican por categorías y se hace una representación gráfica mediante círculos, colocando dentro del mismo círculo las ideas análogas.

Pasamos a **usar las analogías** realizando un estudio minucioso de las semejanzas y de las diferencias que ya se habían clasificado, para aplicarle a la varilla las sugerencias que obtengamos.

Con las varillas podemos realizar un **relax imaginativo** para lo cual seguimos los pasos ya indicados:

**1. Ambientación:** Creamos un ambiente tranquilo, con una música suave. Con varillas de incienso perfumamos el ambiente.

**2. Relajación muscular:** Nos traemos ropa cómoda y tumbándonos en el suelo, cerramos los ojos... Respiramos a fondo y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Le decimos a los niños que vamos a contar una historia que después vamos a comentar. Todos tienen que estar muy atentos.

**4. Narración:** “Estamos jugando. Tenemos dos varillas. Pensamos en las varillas... Primero están juntas... ¡Son iguales!... Se mueve una de ellas. ¡Qué alta se ha puesto!... Parece más larga... Ahora las cojo yo... ¡Pero si no es más larga!... ¡Cómo me despistas! Ahora una de las varillas vuela... ¡Es mucho más corta la que está volando!... Aterrizo y se queda encima de la mesa al lado de la otra. ¡Pero si es igual de larga!... ¡Menudo

despiste!... ¡Aunque se desplace, aunque vuele..., sé que es igual de larga. ¡Cómo me ha confundido!...”.

**5. Vuelta a la realidad:** Ponemos la música un poco más fuerte y damos una palmada.

**6. Aplicaciones didácticas:** Entre todos comentamos la narración y llegamos a la conclusión de que la varilla no es más larga porque esté más alta.

Para aplicar la técnica de **escenarios** seguimos los pasos siguientes:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Se les hace observar que hay niños que al desplazar una varilla no se han dado cuenta de que era igual de larga que la otra.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Les planteamos mediante un torbellino de ideas: “¿en el futuro se podrá ver más fácilmente que las dos varillas son iguales aunque se desplacen?”; “¿cómo?”.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Se anotan todas las soluciones, se reordenan y se seleccionan las mejores.

En la **síntesis creativa** tenemos que llegar al slogan que afirme que “la longitud de la varilla no varía cuando la desplazamos”, ya que con ello no es más larga ni más corta, sólo la colocamos en otro lugar.

**Ejemplo 4.** Otro experimento realizado por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960) consistió en presentarle a los niños una torre hecha con ladrillos o bloques, cubos y paralelepípedos, elevada sobre una mesa. Los niños tenían que hacer, a cierta distancia, otra torre de la misma altura, trabajando con bloques más pequeños, sobre otra mesa más baja, colocada en la misma habitación, separada por una pantalla, pero con la posibilidad de ir a ver la primera torre. Se les dejan tiras de papel y varillas, por si quieren tomar medidas, pero no se les dice cómo tienen que usarlas ni tampoco se les aconseja que las usen.

Según Piaget las etapas por las que pasa el niño a la hora de intentar hacer la torre, son las siguientes: al principio se limita a hacer una comparación visual, a menudo no tiene en cuenta el hecho de que las torres estén sobre mesas con alturas diferentes (estadio de transferencia visual).

Después utiliza su cuerpo para ir tomando medidas. Por ejemplo, intenta comparar con sus manos la medida de las torres, usa parte de su torso como punto de referencia, etc., (estadio de transferencia corporal).

Más tarde, utiliza medidas independientes de su propio cuerpo: una tercera torre o una varilla, pero con la condición de que la varilla tenga exactamente la misma longitud que la torre que se mide.

En la siguiente etapa el niño está capacitado para emplear una varilla más larga que la del modelo, marcando en ella la altura de la torre, pero no puede iterar una varilla más corta a lo largo de la torre.

Cuando ya ha adquirido el principio de conservación y la transitividad de la longitud a pesar de los cambios de posición, entiende que si la altura de la torre es A, la que marca en la varilla es B y la que él construye es C, resulta que si  $A=B$  y  $B=C$ , entonces  $A=C$ . Este aspecto es importante pero tiene que haber adquirido además el dominio de la posibilidad de subdivisión; cuando éste se domina, se está en condiciones de tomar una parte como unidad y repetirla tantas veces como sea necesario.

En el último periodo el niño puede hacerlo de cualquier modo, es capaz de usar la varilla más corta como unidad de medida. Esto se consigue alrededor de los siete años. Este es un caso típico para ver si el niño tiene adquiridas las nociones de conservación, transitividad y unidad de medida.

Con el **arte de preguntar**, después de enseñarle la torre, podríamos plantearle a los niños algunas de las preguntas siguientes:

i) **Sustancia:** Le presentamos al niño la torre y le preguntamos: “¿qué es esto?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué se usan las torres?”; “¿podría usarse para otros fines?”.

iii) **Persona:** “¿Quién ha hecho esta torre?”. “¿Quién la tiene que hacer igual?”. “¿Quién la haría mejor?”.

iv) **Materia:** “¿De qué está hecha?”; “¿podrías hacer otra igual con los bloques que te dan?”. “¿Podrías hacerla con otros materiales?”.

v) **Relación:** “¿Qué otras personas la tienen que hacer?”. “¿Para quién ha sido hecha?”. “¿Para qué se ha hecho?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se usa la torre?”; “¿se podría utilizar de otra manera?”.

vii) **Acción:** “¿Se mueve la torre?”. “¿Que pasaría si se moviese?”.

viii) **Cantidad:** “¿Cuántos bloques tiene la torre que sirve de modelo?”. “¿Un bloque de los que está hecha la torre modelo a cuántos equivale de los que te dan para hacer la tuya?”. La relación entre unos bloques y otros podría contribuir a simplificar el problema.

ix) **Cualidad:** “¿Cómo es la torre que nos dan?”; “¿y la que tu has hecho?”. “¿Podríamos hacer otra torre de otra manera?”. “¿Podría ser más perfecta?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo podemos hacer la torre?”. “¿A qué hora empezamos a hacerla?”. “¿A qué hora terminamos?”. “¿Cuánto tiempo hemos tardado en hacerla?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde está la torre modelo?”. “¿Dónde tenemos que hacer la nuestra?”. “Cuando terminemos la torre, ¿dónde la vamos a colocar?”.

xi) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existiera esta torre?”; “¿y si no hubiera ninguna torre?”.

xii) **Recepción:** “¿Cómo se puede perfeccionar la torre que hemos hecho?”.

Podríamos empezar dejando reflexionar a los niños sobre el experimento que tienen que realizar, y después lanzamos un **torbellino de ideas** preguntándoles: “¿cómo podrían hacer la torre?”. Anotamos las respuestas, las clasificamos, organizamos y evaluamos tomando como criterio el que suponga menos esfuerzo. Si algún niño se hubiera equivocado y no llegase a reconocerlo, podríamos hacer con tiras de papel de 10 cm de largo una figura sencilla en la pizarra, como podría ser la silueta de una casa, y dejándole tiras de papel de 5 cm de largo e igual de anchas que las del modelo, el niño tendría que reproducir la casa.

Para aplicar el método **Delfos** una vez planteado el problema, se separan los niños para que cada uno piense en cómo haría la torre. El profesor pasa cerca de cada niño y va anotando la forma de hacerla, esto se lo va contando a los demás, que pueden modificar su posición a la vista de los otros enfoques. Después se clasifican y organizan las ideas, agrupando las soluciones por categorías, eliminando los valores

extremos. Nos decidimos por la forma de hacer la torre que resulte más cómoda para todos.

Se puede utilizar la **sinéctica** en su aspecto **hacer lo familiar extraño**, ya que el niño puede considerar la torre que le dejamos como modelo como algo familiar y puede ir descomponiéndola en sus elementos —que son cada uno de los bloques que la forman—; éstos, aunque son más sencillos, le van a resultar extraños —no es frecuente que los encuentre en su medio.

Se emplea la **analogía personal** diciéndole: imagínate que eres una torre como ésta y piensa que vamos a hacer una réplica sobre tu mesa, fíjate bien en cada uno de los detalles que tienes.

Usando la **analogía directa** podríamos, con objeto de simplificar el problema, colocar un cubo sobre la mesa del profesor y el niño debe hacer, con cubitos más pequeños, otro cubo igual, sobre su mesa.

Mediante **analogía simbólica**, puede sacar la conclusión de cómo podría tomar los bloques que se le han dejado para que construya otra torre igual, puede intentar reproducir cada elemento del modelo para construir su torre y al final puede descubrir por qué le hemos dejado las tiras de papel y las varillas.

Empleando la **analogía fantástica** el niño puede pensar y dibujar su ideal de torre. Después se vería si se dispone o no del material necesario para realizarla.

De los **métodos combinatorios** vamos a intentar aplicar el **análisis funcional**, para lo cual se le deja al niño que descomponga la torre que le sirve de modelo para que analice las partes de que consta y el papel que desempeña cada una de ellas. Con esto pretendemos que **defina los atributos fundamentales de la realidad objeto de estudio**.

Cada vez que coge un bloque se le pregunta: “¿para qué sirve?”; “¿cómo podrías hacer otro cubo o ladrillo igual?”. Con esto está **analizando los atributos**.

Se le sugiere que puede construir otra torre mejor que el modelo, aunque nos conformamos con que haga ésta. Pretendemos que el niño se **plantee la forma de mejorarla**. A continuación podríamos decirle al niño que tiene libertad para hacer una casa o un castillo que recoja lo bueno que tenga la torre pero, si es posible, que sea más bonita, más grande, etc.



Con el **arte de relacionar** podría llegar a descubrir la relación existente entre cada bloque de los que forman la torre que le sirve de modelo, con los bloques que se le dejan para que construya la suya. Podríamos empezar por una relación sencilla en donde cada bloque del modelo fuese igual a cuatro de los suyos. Al tener cubos el modelo, no podríamos tener otra relación más sencilla. Se le podría empezar pidiendo que formara un cubo igual al del modelo para, posteriormente, pasar a que construya distintas figuras, entre ellas la torre, graduando el nivel de dificultad.

Mediante la técnica **solución de problemas** seguiríamos los pasos antes indicados:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”. Definiríamos el problema como ya hemos hecho, y veríamos cuál es la incógnita y cuáles son los datos para construir la torre.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para construir la torre?”. “¿Es la condición suficiente para determinar la nueva torre?”. “¿es insuficiente?”. “¿redundante?”. “¿contradictoria?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de hacer torres?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvía antes?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo tendrías construida la torre?”. “Suponiendo que llegues a hacer la torre, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a hacer la torre?”.

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías resolver el problema?”. El razonar esto nos permitiría ayudarle

con problemas intermedios a que adivine la relación existente entre el modelo y la torre que debe hacer.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a la solución?”.

Sabemos que el problema está resuelto cuando son capaces de utilizar las varillas o las tiras de papel o cuando hayan descubierto la relación existente entre los cubos del modelo y los que se les dan. Se podría analizar las ventajas que tiene el que utilicen las varillas o las tiras de papel, frente a que descubran la relación entre los cubos.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?” “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”. Realizarían la torre como nos pareciera mejor, después de estudiarlo entre todos.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para construir la torre?”. “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”. “¿cuándo?”. “¿por qué?”.

## V. Ejecución.

♥ “Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos”. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de construir la torre sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿Los resultados son los deseados?”. “¿puedes verificarlo?”. “¿Alguno de los pasos que diste eran innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”. Evaluaríamos si han conseguido realizar bien la torre y, en caso de no ser así, plantearíamos la construcción de otro modelo distinto, en lugar de la torre.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido en la construcción de la

torre para resolver algún problema análogo?”. Podríamos plantearles que construyeran alguno de los modelos que se les haya ocurrido, más complejo o más simple, según que hayan llegado a construir la torre o no.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”. Iríamos observando la reacción, en cada paso, de cada niño frente a la construcción de la torre.

Como ha estado intentando hacer la torre en clase y al final el niño ha visto la necesidad de tomar algunas medidas, para aplicar la técnica el **entorno**, seguimos los pasos indicados anteriormente:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Podemos decirle que cuando vaya del colegio a casa busque objetos que sean tan altos como la torre o como los cubos o ladrillos con que está construida.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado.** Tenemos que dejarles claro que no pueden desaprovechar lo que vayan encontrando.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema:** Tienen que estar pendientes, cuando vayan del colegio a casa, de los objetos que vayan encontrando por si fuesen útiles.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones.** Tienen que llevar la longitud de la torre o la de los cubos para compararla con la de los objetos que vayan encontrando.

**5. Mejorar el resultado si es posible.** Si hemos encontrado algún objeto con la longitud exigida, podríamos buscar otros que sean la mitad o el doble de ésta para hacer otra torre más bonita.

Para utilizar la **biónica** podemos dejar a los niños que jueguen con los bloques, antes de decirles que hagan la torre, y que fabriquen algún animal conocido que pueda estar dentro de la torre. También se les puede decir que busquen animales que se muevan por encima de la torre. Para ello tienen que hacer un **estudio detallado** de estos animales.

Una vez construida la torre, haremos, con papel y pegamento, algún animal que pueda estar dentro de la torre o alguna de las aves que

se mueven por encima, intentando que pueda imitar sus movimientos. Con esto estamos tratando de **traducir las propiedades de los seres vivos a modelos lógicos**, al tiempo que pretendemos **desarrollar modelos intentando de reproducir al máximo las funciones** de los animales o de las aves, los perros, los caballos, los murciélagos, los gatos...

Aplicamos la **sinapsis** cuando le planteamos al niño que se fije bien en la torre que le damos como modelo; que encuentre, entre las torres que él conoce, otra; que la dibuje y que comente las diferencias que tiene con el modelo.

La técnica **serendipity** puede surgir al decirle al niño que busque objetos que tengan la misma altura que la torre. Se le pregunta que si además de objetos con esta propiedad, ha descubierto algo que para él sea novedoso. Como mínimo habrá surgido el número de cubos que tiene la torre original y el de los de la torre que él ha hecho con la misma altura.

La **ideogramación** se podría usar después de haber hecho la torre y hacer un diagrama estructural de síntesis, dibujando cada uno de los bloques que se han usado y relacionando cada tipo de bloque —cubo o paralelepípedo— con el lugar que ocupa en la torre —cimientos, fachada, obelisco, etc.

Aplicamos la técnica el **circept**; para ello empezamos **eligiendo** como **tema** la torre.

Se pasa a la **etapa imaginativa** dándole rienda suelta a la imaginación buscando analogías, semejanzas, diferencias y oposiciones con la torre. Se ordenan y clasifican, haciendo después una representación gráfica mediante círculos en cuyo interior se van colocando las ideas análogas.

Finalmente hacemos **uso de las analogías**, se estudian minuciosamente todas las analogías y diferencias para aplicarle a la torre las sugerencias que obtengamos.

Para aplicar la técnica **crear durmiendo**, después de haber estado intentando hacer la torre, con lo que el niño **está interesado en el tema**, le podemos decir —al niño— que para el día siguiente se invente un cuento sobre ella.

Antes de ir a dormir tiene que pensar en el cuento que tiene que inventarse sobre la torre, con lo cual estamos **organizando las sesiones de creatividad**. **Antes de ir a dormir debe dejar a**

**mano**, en la mesilla de noche, **lápiz y papel**, por si se le ocurre alguna idea, para que haga un dibujo que después le pueda recordar lo que pensó.

Al día siguiente cada niño cuenta el cuento que se le ha ocurrido, teniendo con ello cubierto el **análisis por el grupo**.

Podemos hacer un **relax imaginativo**. Para ello seguimos los pasos indicados cuando comentábamos la técnica:

**1. Ambientación:** Creamos un ambiente agradable, medio en penumbra y con una música suave.

**2. Relajación muscular:** Se les dice que traigan ropa cómoda. Nos tumbamos en el suelo... Cerramos los ojos... Respiramos profunda y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Vamos a contaros un cuento sobre una princesita que estaba en una torre. Todos tenéis que estar muy atentos para después comentar la historia.

**4. Narración:** “Empezamos contándoles un cuento en el que haya una torre en donde esté una princesita. La torre se derrumba... Vamos a hacer la torre. Pensamos cómo era la torre... Ponemos un bloque... Otro encima... La torre era más alta. Intento poner otro... ¡Que se cae!... ¡Céntralo!... ¡Ahora! Pongo otro al lado. Otro encima... ¡Ese no está derecho!... ¡Equilíbralo!... ¡Aún faltan más!... La princesita estaba en una ventana que estaba el centro de la torre y ahora esa ventana queda a un lado. ¡La torre que se cayó tenía otro bloque a la derecha!... ¡Y otro encima! ¡Por fin ya tenemos la torre!... ¡Ahora sí está la princesita donde estaba antes! ¡Cuánto nos ha costado!...”.

**5. Vuelta a la realidad:** Con un chasquido de dedos termina la narración y volvemos a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** Pensamos cómo conseguimos que la torre fuese tan alta como la que se derrumbó. Como la torre la construimos con el mismo material que teníamos antes, se necesitan el mismo número de cubos.

La técnica de **escenarios** se puede utilizar para imaginar si en el futuro habrá o no torres y cómo serán. Seguimos los pasos ya indicados:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Pensamos si hoy hay torres, cómo son de altas y si sirven para algo. Mediante un torbellino de

ideas cada niño va respondiendo lo que se le ocurra y el profesor lo anota en la pizarra.

**ii) Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Razonamos si en el futuro habrá o no torres y cómo serán. Cada niño da su opinión, la cual es recogida por el profesor.

**iii) Selección de las mejores soluciones:** Se realiza una selección de las mejores ideas teniendo en cuenta la belleza y la funcionalidad de las torres.

Mediante la **síntesis creativa** como las distancias que hay en la torre no las puede llevar solamente con el cuerpo, es mejor utilizar las tiras de papel y las varillas, ya que para eso están allí, luego el slogan sería: “hay instrumentos que nos permiten precisar la medida”.

**Ejemplo 5.** Otro experimento realizado por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960) consistió en poner al niño dos objetos sobre una mesa, separados unos 50 cm. Se le preguntó si estaban cerca o lejos el uno del otro. Se colocó entre ambos objetos una pantalla de cartón, un poco más alta que ellos, con una abertura graduable, y se le preguntó si estaban tan cerca o tan lejos como antes, para ello se mantuvo la abertura cerrada al principio y luego se abrió.

Después se retiró la pantalla y se colocó un cubo más alto que los objetos. Al final se retiró el cubo y se puso una línea de ladrillos que unía ambos objetos. En todos los casos se les hace la misma pregunta: si los objetos están tan cerca o tan lejos como antes. La misma pregunta se les hace después de sustituir uno de los objetos por otro que lo duplique en altura, y después de elevar 50 cm una de las figuras.

Piaget comprobó que los niños de 3 a los 5 años no pueden concebir como un todo los dos tramos separados por la pantalla, y dicen que al colocar la pantalla la distancia es menor, ya que sólo tienen en cuenta la distancia entre el objeto y la pantalla o entre el niño y la pantalla. Cuando el agujero está cerrado piensan que la distancia es menor que cuando está abierto. Cuando se eleva uno de los objetos, dejan de tener en cuenta la distancia entre ellos y se preocupan sólo de la distancia de cada uno con respecto a sí mismo. Cuando se coloca la línea de ladrillos consideran que están más cerca porque encuentran el camino para ir de uno al otro.

Entre los 5 y los 6 años, la distancia total la consideraron menor cuando se le colocaba la pantalla, porque le restaron el espacio ocupado por la misma. Cuando se elevó uno de los objetos, consideraron que la distancia era mayor, ya que tenían en cuenta el esfuerzo necesario para

alcanzarlos. Aquí ya advierten que la distancia es la misma cuando se pone la fila de ladrillos.

Este experimento podemos volver a llevarlo a cabo con niños de 3 a 5 años, poniendo encima de la mesa, por ejemplo, dos muñecas o dos cochecitos, y aplicándole la técnica el **arte de preguntar** para que nos respondan a algunas de las preguntas que formulamos a continuación:

i) **Sustancia:** Le señalamos al niño la pantalla y le preguntamos: “¿qué es esto?”. “¿Qué es lo que tiene a cada lado?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirve la pantalla?”. “¿Para qué sirve el agujerito que hemos hecho en la pantalla?”. “¿Para que sirven las muñecas?”. “¿Para qué sirven los ladrillos que hemos colocado entre las muñecas?”.

iii) **Persona:** “¿Quién hizo el agujerito?”. “¿Quién lo utiliza?”. “¿Quién lo podría utilizar?”. “¿Quién puso los ladrillos?”. “¿De quién son las muñecas?”.

iv) **Materia:** “¿De qué están hechos cada uno de los objetos que hay encima de la mesa?”. “¿podrían hacerse con otros materiales?”.

v) **Relación:** “¿Qué niños ven las muñecas?”. “¿Qué niños observan la distancia que hay de cada una de las muñecas a la pantalla?”. “¿Qué niños ven la distancia que hay entre las dos muñecas?”. “¿Qué otros niños la podrían ver?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se utiliza el agujerito que hay en la pantalla?”. “¿Se podría utilizar de otro modo?”.

vii) **Acción:** “¿Se mueven las muñecas?”. “¿y la pantalla?”. “¿Qué pasaría si se moviesen las muñecas?”. “¿y si se moviese la pantalla?”. “¿Podemos quitar la pantalla?”. “¿Te gusta que la quitemos?”.

viii) **Cantidad:** “¿La distancia entre las muñecas al principio era mayor, menor o igual que cuándo colocamos la pantalla?”. “¿La distancia ha aumentado, ha disminuido o sigue siendo la misma cuando hemos abierto la abertura que cuando estaba cerrada?”. “¿Y cuándo colocamos la fila de ladrillos es mayor menor o igual que al principio?”. “¿Si elevamos las dos muñecas, la distancia es mayor, menor o igual que antes?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tienen las muñecas?”. “¿Cómo se podrían corregir?”. “¿Y la pantalla, qué defectos tiene?”.

x) **Tiempo:** “¿Mañana será igual la distancia entre las muñecas?”.



xi) **Lugar:** “¿Dónde están las muñecas?”; “¿y la pantalla?”; “¿y los ladrillos?”.

xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existieran muñecas?”; “¿y si no hubiera pantalla?” “¿y si no tuviéramos ladrillos?”.

xiii) **Recepción:** “¿Cómo podríamos hacer más perfecto —más agradable— el trayecto entre los dos muñecos?”.

Después de plantearles cada una de las situaciones de que consta la actividad, dejamos que los alumnos lancen un **torbellino de ideas**. Entre todos se organizan, clasifican y evalúan. El resto de las situaciones nos servirán para volver a lanzar otros torbellinos de ideas con el fin de que salgan de su error los que no hayan podido observar que la distancia se conserva aunque pongamos una pantalla o coloquemos un cubo o una línea de ladrillos o elevemos los objetos.

Se podría aplicar el método **Delfos** separando en grupos pequeños, el profesor irá anotando las respuestas que vaya dando cada grupo, eliminando aquéllas que sean extremas, y leyéndoselas a los restantes grupos para que con ello puedan mantener sus respuestas, modificarlas, o dar otras nuevas, y de nuevo el profesor recoge lo que le digan y cierra el problema.

Se podría aplicar la técnica **sinéctica** en su aspecto de **convertir lo extraño en familiar**, pues cuando se coloca la pantalla —lo extraño— entre los objetos estamos desconcertando al niño.

Mediante el **análisis** se le hace observar al niño cada uno de los elementos que influyen en el problema.

A nosotros nos parece que el niño lo que responde cuando colocamos la pantalla es que para ir de un objeto al otro tiene ahora que dar un rodeo mayor que cuando no tenía la pantalla. (Nuestra apreciación no se corresponde con la conclusión de Piaget, ya comentada anteriormente cuando enunciábamos el ejemplo 5.) Lo que podríamos hacer sería tomar una cuerda y en ella marcar la distancia que hay de un objeto al otro antes de poner la pantalla, y después volver a pasar la misma cuerda atravesando la pantalla. Para ello sería conveniente que el agujero estuviese pegando a la mesa, y que a través de él pudiéramos pasar la cuerda. El cubo lo podríamos hacer de esponja y hacer la misma operación. Cuando ponemos la línea de ladrillos y cuando elevamos los objetos sólo tenemos que llevar la cuerda ya preparada anteriormente.

En estos casos hemos utilizado una **búsqueda de modelos**, pues hemos visto el problema desde otro ángulo para que resulte más familiar y así llegue el niño a comprender que la distancia es la misma. También se podrían haber colocado dos niños, uno a cada lado de la pantalla o uno a cada lado del cubo.

Aplicaríamos la **generalización** para afirmar que la distancia entre dos objetos no varía si se colocan otros objetos entre ellos, sólo varía si se acercan o se separan.

Utilizando de los **métodos combinatorios** la **lista de atributos**, podríamos, mediante un torbellino de ideas, preguntarles cómo es el trayecto que hay que recorrer para ir de una muñeca a la otra, en cada una de las situaciones. Con esto estamos **definiendo los atributos fundamentales de la realidad objeto de estudio**.

Pasamos a **analizar cada uno de los atributos y a plantear la forma de mejorarlos**, para ello el profesor recoge todo lo que dicen los niños, se clasifican las respuestas, eliminando los valores extremos y se plantea la forma de mejorar el trayecto.

Se elige un trayecto con la misma longitud que el anterior y **se le asignan los atributos** que dieron en cada una de las situaciones al nuevo trayecto, para ver si se dan cuenta de que una cosa es que tengan un obstáculo —pantalla o cubo— y otra es que haya variado, por eso, la distancia.

A lo largo de todo el experimento también estamos aplicando el **arte de relacionar**, ya que los niños van comparando su percepción de la distancia en las distintas situaciones.

Como problema que es, se le puede aplicar la técnica **solución de problemas**, ya que con el planteamiento realizado tenemos definido el problema. Para ello seguimos los pasos antes indicados:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición?”. “¿Con lo que nos dan en cada caso es suficiente para saber si el trayecto es igual de largo, es más largo o es menos largo?”; “¿es insuficiente?”; “¿redundante?”; “¿contradictoria?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de saber si un trayecto es igual de largo que otro?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvía hace siglos?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. Sabemos que lo que nos importa es que los niños sean capaces de separar aquellos elementos que no tienen ninguna relación con la distancia entre los objetos y eso es lo que tenemos que conseguir de ellos. “¿Cuándo sabrías si la distancia es mayor, menor o igual?”. “Suponiendo que llegaran a saberlo, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a resolver el problema?”.

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de ver si la distancia es la misma: “¿De cuántas formas podrías verlo?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a saber si la distancia es igual, mayor o menor?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para ver si la distancia es la misma?”. “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”. “¿cuándo?”.

### V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos: “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

### VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿Los resultados son los deseados?”. “¿Puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”. Evaluamos al final los resultados y si no hemos alcanzado los resultados deseados, aquí tenemos planteadas varias formas de volver a redefinir el problema, también nos puede servir la que antes hemos indicado: que se coloquen dos niños en lugar de las muñecas.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”. Tenemos que darnos cuenta de qué es lo que hace el niño cuando intenta observar la distancia en las distintas situaciones y proponerle alternativas, como que piense que una hormiga puede pasar por debajo de la pantalla o del cubo. “¿Recorrería la misma distancia que cuando no estaba el cubo o la pantalla?”. Volvemos a observar al niño y si no responde favorablemente, volveremos a buscar otra forma de llevarle a dar la respuesta deseada.

La técnica el **entorno** la podríamos usar siguiendo los pasos antes indicados:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Les proponemos a los niños que coloquen otros dos objetos elegidos entre los que tengan a mano —pueden ser, por ejemplo, dos gomas— a la misma distancia que estaban los dos muñecos al principio, cuando ponemos la pantalla y cuando ponemos la fila de ladrillos. El niño con sus fantasías puede pensar que las muñecas se mueven; puede ser ésta la forma para que vea que la distancia no varía, pues la goma no se mueve si él no la desplaza. También se le puede decir que busque algo que podamos colocar entre los dos objetos que no sea la pantalla ni el cubo.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado:** Tenemos que dejarle claro que va a poder encontrar estos objetos, sólo tiene que estar pendiente de observar bien lo que le rodea.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema:** Tiene que estar pendiente de comparar los objetos que va encontrando con los muñecos —en este caso tendrá que tener otros dos objetos—, la pantalla, el cubo, o las piedrecitas —en estos últimos casos tendrá que ser menor una de las dimensiones que la distancia que hay entre los dos muñecos.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones:** Deberá ver si el objeto encontrado cabe entre los dos muñecos o no.

**5. Mejorar el resultado si es posible:** Si hemos encontrado una solución podemos buscar un objeto que sea más bonito o podemos llevar la solución a otros casos en que encontremos obstáculos en medio de un trayecto. También se puede generalizar diciendo que los obstáculos no acortan ni agrandan la distancia.

Para tratar de aplicar la **biónica** podemos decirle al niño que dibuje en cartulina algún animal de compañía que sea más alto que los muñecos, que lo recorte por partes, separando el tronco de las patas, que éstas se las ponga después con algo que le permita un movimiento análogo al que realiza el animal y que lo ponga en donde estaba la pantalla. Para ello tiene que hacer un **estudio detallado** del movimiento de las patas de ese animal.

Al tener que colocar el tronco articulado con las patas tendrá que hacer además una **traducción de las propiedades** del animal elegido a modelos simbólicos.

Cuando intenta que las patas de su diseño se muevan como las del animal está haciendo un **desarrollo del modelo intentando reproducir al máximo las funciones** del animal elegido. Podemos colocar el animal que ha intentado reproducir en lugar de la pantalla y volver a preguntarle si ha variado la distancia que había entre los dos muñecos.

La **sinapsis** la podemos aplicar diciéndole al niño que recorra con el dedo la distancia que hay entre los dos muñecos y que se fije bien, pues para el día siguiente tiene que decirnos algunos casos en que haya encontrado dos objetos que estén a esa distancia.

Todo lo que se le propone al niño que piense para el día siguiente nos puede servir para aplicar la **serendipity**, pues podemos decirle que si ha observado alguna otra cosa mientras pensaba en encontrar objetos que estuviesen a esa distancia.

Para aplicar la técnica **ideogramación** vamos a empezar con un torbellino de ideas, preguntándole al niño con qué objetos podría medir la distancia que hay entre los dos muñecos. El profesor recoge todas las respuestas. Se seleccionan, eliminando las que no nos conduzcan a nuestro fin y se clasifican por analogías. Se realiza un pictograma relacional de síntesis.

La técnica el **circept** la podemos aplicar **eligiendo** como **tema** el cubo, ya que con él apenas hemos trabajado. Se les deja el cubo para que lo observen con detenimiento y jueguen con él.

Se pasa a la **etapa imaginativa** diciéndoles que piensen, echándole imaginación, en cosas que sean parecidas, diferentes y opuestas. Anotamos todo lo que se les vaya ocurriendo.

En la **etapa crítica** se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y se clasifican por categorías. Hacemos una representación gráfica empleando círculos para colocar las ideas de la misma clase dentro del mismo círculo.

Para **usar las analogías** se realiza un estudio detallado de las semejanzas y de las diferencias y le aplicamos al cubo las sugerencias que obtengamos.

La técnica **crear durmiendo** se puede aplicar planteándoles el problema un día y dejándoles para que piensen para el día siguiente si es o no igual la distancia en cada una de las situaciones que aparecen en el enunciado. Con esto hacemos que el niño **esté interesado por el tema**.

Hemos hecho el comentario en la clase para **organizar la sesión de creatividad durante el día**.

Les decimos que antes de irse a dormir lo piensen y **dejen a mano papel y lápiz** para dibujar lo que se les haya ocurrido.

**Al día siguiente se lleva a cabo un análisis por el grupo** para ello cada uno expone las ideas que ha tenido. Se razona cada situación hasta llegar a que la distancia es la misma.

Para el **relax imaginativo** se siguen los pasos ya comentados y que son:

**1. Ambientación:** Se crea un ambiente tranquilo, sin ruidos.

**2. Relajación muscular:** Todos estamos vestidos con ropas cómodas, nos sentamos y dejamos caer la cabeza en el pupitre. Cerramos los ojos... Nos desconectamos de todo lo que pueda distraer nuestra atención... Respiramos a fondo y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Tenéis que estar muy pendientes de lo que os vamos a contar para que después nos digáis si puede ser cierto o no lo que os contemos.

**4. Narración:** “Pensamos en las dos muñecas que hay encima de la mesa... Ponen una pantalla entre las dos muñecas. No han movido las muñecas. Están en el mismo sitio. Después quitan la pantalla y colocan un cubo muy grande. ¡Las muñecas no pueden verse!... Ahora quitamos las muñecas y nos ponemos dos compañeros. Nos ponen una pantalla delante. ¡Que no veo a mi compañero!... ¿Se ha ido más lejos? ¡No, no me he movido!... Pero si no se ha movido, ¿como se podía ir más lejos? Está a la misma distancia. Ahora colocan un cubo muy grande, muy grande... ¡Pero donde esta mi compi! ¿Se ha ido? ¡No, estoy aquí!... No me he movido, ¡sólo han puesto una mole en medio!... ¡Qué bien que estás en el mismo sitio!... Entonces la distancia es la misma... Si no nos hemos movido ninguno, la distancia no varía.”.

**5. Vuelta a la realidad:** Damos unas palmadas para que todos vuelvan a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** Comentamos entre todos la narración y, si es necesario, se buscan algunas situaciones que nos lleven a corroborar que la distancia entre dos objetos no varía hasta que no se acerquen o se separen los objetos.

Con objeto de aplicar la **técnica de escenarios** seguiremos los pasos antes señalados:

**i) Planteamiento actual y análisis:** Podríamos pensar si en el futuro variará la distancia entre los dos muñecos en cualquiera de las situaciones planteadas al principio.

**ii) Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Mediante un torbellino de ideas se trabaja esta propuesta.

**iii) Selección de las mejores soluciones:** Se recogen las distintas ideas, se seleccionan eligiendo las mejores.



Mediante la **síntesis creativa** podemos llegar al slogan de que “la distancia no varía hasta que no se acerquen o se separen los objetos”.

**Ejemplo 6.** Con este experimento, trabajado también por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960), comprobamos si el niño concibe el largo sólo en función de los extremos.

Se le enseña al niño una varilla de madera corta y recta y un hilo de plastilina más largo y ondulado. Se hace que los extremos de ambos objetos queden a la misma altura, luego se coloca uno al lado del otro separados unos milímetros. Se le pregunta al niño: “¿tienen el mismo largo o uno es más largo que el otro?”.

Si dice que los dos son iguales, se le hace pasar el dedo por cada uno de ellos y se le repite la pregunta. Si insiste en que los dos son iguales, se le pregunta: “¿si una hormiga tuviera que hacer el recorrido, cual le parecería más largo?”. Por último ponemos recta la plastilina e inmediatamente los niños admitirán que ésta es más larga. Después se vuelve la plastilina a su posición original, y se repite la pregunta.

Piaget observó que los niños de 3 a 5 años suelen considerar que la longitud depende solamente de los extremos. De 5 a 6 años responden correctamente.

También en este caso se puede aplicar el **arte de preguntar**, pues después de presentarles la varilla y el hilo de plastilina, se les pueden plantear algunas preguntas análogas a las que indicamos a continuación:

i) **Sustancia:** “¿Qué es esto?” ¿”Por qué esto es una varilla y lo otro no?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirve la varilla?”; “¿y el hilo de plastilina?”. “¿Se podrían usar para otros fines?”.

iii) **Persona:** “¿Quién usa la varilla?”; “¿Y la plastilina?”. “¿Los podrían utilizar otras personas?”.

iv) **Materia:** “¿De qué están hechos?”; “¿podrían hacerse con otros materiales?”. “¿De qué colores son?”; “¿podrían ser de otros colores?”.

v) **Relación:** “¿A qué se parece el hilo de plastilina?”; “¿y la varilla?”. “¿La plastilina y la varilla, en qué se parecen y en qué se diferencian?”; “¿podrían parecerse a otras cosas?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se usa la varilla?”; “¿y la plastilina?”. “¿De qué otra forma se podría utilizar la varilla?”; “¿y la plastilina?”.

vii) **Acción:** “¿Alguna de ellas se mueve?”. “¿Qué pasaría si alguna se moviese?”. “¿Alguna tiene vida?”. “¿Qué pasaría si la varilla tuviese vida?”; “¿y si fuese la plastilina la que tuviese vida?”.

viii) **Cantidad:** “¿Cómo es de largo el hilo de plastilina?”; “¿y la varilla?”. “¿Tienen la misma longitud o alguno es más largo que el otro?”. “¿Pueden ser mayores o menores o de otra manera?”. “¿Cuánto pesan cada uno de ellos?”. “¿Es alguno más pesado que el otro?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tienen la varilla?”; “¿y la plastilina?”. “¿Cómo se podrían corregir?”. “¿Pueden ser más perfectos?”. “¿Pueden ser de otra manera?”.

x) **Tiempo:** “¿Alguno de ellos será más largo mañana?”. “¿Cuándo se utilizan la varilla y la plastilina?”. “¿Podrían utilizarse en otro momento?”. “¿Podrían llegar a moverse algún día?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde está la varilla?”; “¿y la plastilina?”. “¿Dónde te gusta jugar con la plastilina?”.

xii) **Valores:** “¿Que pasaría si no existiera la varilla?”; “¿y si no existiera la plastilina?”.

xiii) **Recepción:** “¿Qué influye sobre longitud de la plastilina?”; “¿y sobre la de la varilla?”. “¿Cómo se pueden perfeccionar?”.

Después de enseñarles la regla y el hilo de plastilina se puede empezar dejándoles reflexionar sobre lo que han visto, para después lanzar un **torbellino de ideas** cuando les hagamos las preguntas: “¿tienen el mismo largo o uno es más largo que el otro?”; “¿por qué?”. Cada niño debe dar su parecer y el profesor va anotando las respuestas.

Se clasifican, organizan y evalúan las respuestas entre todos. Como siempre, habrá alguno que considere que las dos cosas tienen la misma longitud, aún después de hacer pasar el dedo por cada una de ellas. Es por lo que viene bastante bien la pregunta antes comentada: “¿si una hormiga tuviera que hacer el recorrido, cuál le parecería más larga?”. Por si aún hay alguno que no ha salido de su error, es por lo que se endereza la plastilina y se vuelve a preguntar: “¿tienen el mismo largo o una es más larga que la otra?”.

El **método Delfos** también puede tener cabida aquí, ya que se pueden hacer varios grupos, procurando que todos los niños puedan exponer su opinión con total libertad en cada grupo. El profesor anota y comenta a los demás grupos lo que opina cada uno de los otros grupos, agrupando las respuestas que digan que son igual de largo y por qué, y se eliminan las que digan que alguno es más largo que el otro con su justificación. El profesor lee a un grupo las respuestas de los demás para que piense en la opinión que ha dado y, si considera oportuno, puede modificarla. El profesor vuelve a recoger las respuestas y cierra el problema.

La técnica **sinéctica** bajo el aspecto **hacer lo familiar extraño**, la estamos utilizando aquí, ya que se emplea la **analogía personal** cuando el niño pasa el dedo sobre la regla y sobre la plastilina. Es como si él recorriera ambas distancias.

La **analogía directa** se aplica cuando el niño compara las longitudes de la varilla o el hilo de plastilina de las distintas formas en que aparecen en el enunciado.

También la **analogía simbólica** se podría utilizar, para lo cual se podría poner la regla y el hilo de plastilina ondulado sobre la pizarra e intentar dibujarlos. Después compararían que línea nos cuesta más esfuerzo hacerla.

Para la **analogía fantástica** le podríamos preguntar si conocen alguna situación parecida a ésta. Si no encuentran ninguna, podríamos buscarles dos puntos distintos de la ciudad que podamos enlazar mediante dos calles una recta y otra que dé algún rodeo y se le pregunta: “¿qué camino es más largo?”.

Se podría aplicar la técnica **método combinatorio**, aquí lo vamos a hacer utilizando el **análisis morfológico**. Para ello entre todos hacemos en el suelo una tabla cartesiana de doble entrada con los atributos que pueden tener el hilo de plastilina y la varilla, como: largo, corto, ancho, estrecho, recto, torcido, etc., colocados en fila y en columna, y en la intersección de cada una de las filas con cada una de las columnas colocarán un objeto que tenga esos atributos. En caso de que después de razonarlo se observe que no puede haber ningún objeto que pueda cumplir las dos condiciones, se deja vacío el cuadradito. En este caso, además de la regla y la plastilina, tomaremos o buscaremos otros objetos más para poderlos utilizar.

La técnica el **arte de relacionar** nos serviría para descubrir las diferencias y semejanzas entre la regla y el hilo de plastilina. Cuando hemos comentado la sinéctica hemos puesto algunas situaciones

análogas a la de la experiencia, al elegir dos puntos determinados de una ciudad y buscar dos recorridos distintos que lleguen a ellos; también se le podría plantear que dibujara más situaciones de este estilo.

Como siempre que planteamos un problema, podemos aplicar la técnica **solución de problemas** describiendo el problema y siguiendo los pasos indicados anteriormente:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para que el hilo de plastilina sea tan largo como la varilla?”; “¿es la condición suficiente para que sea tan largo?”; “¿es insuficiente?”; “¿redundante?”; “¿contradictoria?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de comparar longitudes?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvía entonces?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo sabrías si la varilla y el hilo de plastilina tienen o no la misma longitud?”. “Suponiendo que llegues a saberlo, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a saber si tienen la misma longitud?”.

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías saber si tienen la misma longitud?”. Veríamos si se plantean medir, aunque fuese a ojo, los dos objetos, o si piensan en pasar una cuerda por encima de la plastilina para poder compararla con la regla. Seleccionaremos las formas que nos resulten más acertadas, y

plantearemos si hay alguna otra forma de compararlas, todo ello antes de estirar la plastilina.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”; “¿todas te conducen a la solución?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para saber si son igual de largos el hilo de plastilina y la varilla o uno es más largo que el otro?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

## V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos: “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿Los resultados son los deseados?”; “¿puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que distes eran innecesarios?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”.

El mismo ejercicio propone alternativas para la “retroalimentación” —qué recorrido le parecería más largo si lo recorriese una hormiga o si estirara la plastilina— por si no han resuelto correctamente el problema.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”.

Para aplicar el **entorno** seguimos los pasos indicados cuando comentábamos esta técnica:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema.** Podemos decirles a los niños que cojan un cordón, le hagan un nudo en un extremo, pongan el nudo encima de un extremo de la plastilina y continúen poniendo el cordón encima hasta llegar al otro extremo, que hagan otro nudo ahí y que corten el cordón. De la misma forma deben cortar otro trozo de cordón igual que la varilla. Esos dos trozos de cordón los van a llevar en el bolsillo para buscar objetos de su entorno que tengan una dimensión como alguno de estos cordones.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado.** Hay que dejarles claro que no podemos desaprovechar lo que vayamos encontrando ya que es fácil encontrar objetos con alguna dimensión igual que alguno de los cordones.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema.** Tenemos que pensar en encontrar algún objeto con las características señaladas y esta idea no podemos olvidarla, por tanto estaremos pendientes de observar lo que nos rodea.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones.** Lo que vayamos encontrando tendremos que compararlo con los cordones que hemos preparado para ello, y valorar si eso nos sirve o tenemos que seguir pensando en encontrar otro objeto.

**5. Mejorar el resultado si es posible.** Si hemos encontrado algún objeto con alguna dimensión igual que la de algún cordón podemos intentar buscar un objeto que tenga una dimensión igual a uno de los cordones y otra igual al otro.

Se podría ver, para aplicar la **biónica**, que si se toman en algunos animales dos puntos de su cuerpo y se va de un punto a otro, por lugares distintos, la distancia no es la misma. Podríamos pensar, por ejemplo, en un perro. Si medimos desde el hocico hasta el final del rabo, no da lo mismo yendo por el lomo que por la panza. Con esto estamos intentando hacer un **estudio detallado** de cómo son los seres vivos — en este caso el perro.

También podrían dibujar algún animal que se parezca al hilo de plastilina, una serpiente, por ejemplo. Pretendemos **traducir las propiedades de los seres vivos** a modelos gráficos.

Con la plastilina intentaríamos imitar los movimientos — funciones— de la serpiente que en este caso es nuestro **modelo** a estudiar y **reproducir**.

La **sinapsis** nos puede servir para seguir pensando en situaciones análogas a la del experimento, como las que hemos propuesto en las técnicas la sinéctica, la biónica y el entorno. Después nos vamos a inventar un cuento en donde aparezcan estas situaciones.

Quizá, buscando situaciones análogas a la planteada en el problema, en la ciudad en donde vivimos podamos aplicar la **serendipity**, ya que a lo mejor llegamos a descubrir cosas que no esperábamos, como por ejemplo, algunos recorridos que no conocíamos.

Dibujando cuadrados y rectángulos se podría ver qué recorrido de los que unen dos vértices opuestos es más largo, si el que se hace a través de la diagonal, o el que recorre los dos lados contiguos. Con ello se puede conseguir que los niños descubran estas dos figuras.

Con la técnica **ideogramación** podemos recoger todas las situaciones que hemos ido viendo y que son análogas a la de la experiencia; se le da nombre a cada una y se puede hacer un pictograma estructural de síntesis.

Para hacer un **circept** se puede **elegir** como **tema** uno de los dos objetos —el hilo de plastilina o la varilla.

Pasamos a la **etapa imaginativa** en la cual se le da rienda suelta a la imaginación y se van anotando todas las analogías, diferencias y semejanzas que se nos ocurran.

En la **etapa crítica** se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y clasifican por categorías, haciendo a continuación una representación gráfica mediante círculos —que nos sirven para clasificar según categorías—, colocando las ideas análogas en el interior del mismo círculo.

Se **usan las analogías** para hacer un estudio detallado de las semejanzas y de las diferencias para aplicarle al hilo de plastilina o a la varilla las sugerencias que obtengamos.



La técnica **crear durmiendo** la podemos aplicar ya que el sueño puede ser buen aliado para intentar descubrir posibles recorridos en otros objetos que nos lleven a los mismos puntos. El día anterior al que se abordará el problema se procurará que el niño se **interese por el tema**; también aprovecharemos para **preparar la sesión de creatividad**.

Se le dice al niño que **antes de irse a dormir deje a mano papel y lápiz** para dibujar lo que se le ocurra y que piense en el experimento.

**Al día siguiente se lleva a cabo un análisis, por el grupo**, para lo cual pedimos a los niños que nos cuenten lo que han pensado.

Para aplicar el **relax imaginativo** seguimos los pasos siguientes:

**1. Ambientación:** Ponemos la clase en penumbra, con una temperatura agradable.

**2. Relajación muscular:** Nos quitamos la ropa que nos oprima y nos tumbamos en una manta. Cerramos los ojos, respiramos profunda y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Tenéis que estar muy tranquilos y también muy atentos a lo que vamos a contaros para después comentarlo.

**4. Narración:** “Vamos caminando con un amigo desde nuestra casa a la de él... ¡Por ahí no se va!... Cómo que no, pero si vamos a mi casa, ¡sabré yo por donde se va a mi casa!... Bueno pues yo me voy por aquí. ¡A lo mejor no llegas! Seguro que sí. Llevo un rato en la puerta de mi casa y éste todavía no llega... ¡Por fin, pero si llevo bastante tiempo esperándote!... Bueno pero al final he llegado. Sí, pero has tardado mucho más que yo. Seguro que has venido por un camino más largo”.

**5. Vuelta a la realidad:** Damos un toque con la campanilla y todos vuelven a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** Hacemos un comentario de la narración y pensamos qué es lo que pasaba para que no llegara el amigo cuando el otro niño ya había llegado a la casa. Podría haberse encontrado con alguien, haberse equivocado de camino, haber cogido un camino más largo...

Utilizamos la técnica de **escenarios**. Para ello se siguen los pasos ya comentados:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Pensamos si en el futuro todos estos problemas —que haya un camino más largo que otro si los dos nos llevan al mismo punto— se podrían resolver y cómo.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Razonamos entre todos, mediante un torbellino de ideas, qué es lo que ocurrirá en el futuro.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Se hace un estudio detallado de todas las aportaciones y se seleccionan las mejores.

Mediante la **síntesis creativa** llegaremos al slogan de que si tenemos dos líneas, una recta y otra curva que unen dos puntos, la recta es siempre la menor, es decir: “la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta”.

**Ejemplo 7.** Vamos a comentar otro experimento llevado a cabo por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960). Consistió en tomar dos tiras de papel que fuesen igual de largas y de anchas. Primero se dijo a los niños que observasen que las dos tiras tenían la misma longitud. Después se cortó una de las tiras en dos trozos, y más tarde en varios, y se dispusieron éstos de diversas maneras de modo que los extremos se tocasen, para ver si los niños tenían la idea de conservación de la longitud total. Se les preguntó si la tira de papel y la otra tira, formada por todos los trozos en que se dividió —que fueron colocados en posiciones distintas—, tenían la misma longitud.

Después se les podría preguntar: “¿si dos hormigas recorrieran ambas tiras de papel, tendrían que recorrer la misma distancia?”.

Piaget comprobó que hasta los 6 años falla la conservación pues se ha de tener en cuenta a la vez la subdivisión, el orden y el cambio de posición.

En lugar de tiras de papel podríamos utilizar hilo, cuerda o cualquier otro material, y en lugar de cortar se podría curvar, como hemos hecho en la actividad 6, aunque aquí podemos plantearles además la cuestión de si podemos volver a cortar. También podemos preparar trozos de hierro y trozos de imán, aunque, en este caso, no se pudieran volver a cortar.

En esta actividad podemos aplicar el **arte de preguntar**, para lo cual les planteamos algunas de las siguientes cuestiones:

i) **Sustancia:** “¿Qué es esto?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirve cada una de las tiras de papel?”; “¿podrían usarse para otros fines?”.

iii) **Persona:** “¿De quién es la tira de papel?”. “¿Quién la ha cortado?”. “¿Quién las podría utilizar?”. “¿Para quién se cortó?”. “¿Cómo las utilizaría la profesora?”.

iv) **Materia:** “¿De qué están hechas las tiras?”; “¿podrían hacerse de otros materiales?”. “¿De qué colores son?”; “¿podrían ser de otros colores?”.

v) **Relación:** “¿A qué se parecen la tira que dejamos entera y los trozos?”; “¿podrían parecerse a otras cosas?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se usan ambas tiras de papel?”. “¿Cómo las podríamos emplear?”.

vii) **Acción:** “¿Alguna de las tiras tiene vida?”; “¿qué pasaría si alguna tuviera vida?”. “¿Se mueven?”; “¿qué pasaría si alguna se moviese?”.

viii) **Cantidad:** “¿Podría ser la tira de papel mayor, menor, de otra manera?”. “¿Cuántas veces podríamos llevar uno de los trozos que hemos obtenido dividiendo una de las tiras sobre la otra?”. “¿Cuántos trozos hemos hecho?”. “¿Son algunos trozos más largos que los demás o son igual de largos todos los trozos?”. “¿Cuánto pesa cada una de las tiras de papel?”. “¿Qué pesa más: una tira de papel o una pluma?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tiene cada una de las tiras de papel?”. “Los trozos que hemos cortado en una de las tiras, ¿qué defectos tienen?”; “¿cómo se podrían corregir?”. “¿Qué beneficios aporta el cortar la tira?”. “¿Podría ser más perfecto el corte?”; “¿cómo?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo se pueden utilizar los trozos?”. “¿Si las tiras de papel anduviesen, cuál iría más rápido: el trozo o la tira entera?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde está la tira de papel?”; “¿y los trozos en que hemos dividido la otra tira?”. “¿Dónde podemos utilizar las tiras de papel?”.

xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existieran las tiras de papel?”. “¿Qué pasaría si fuesen de otra manera?”.

xiii) **Recepción:** “¿Cómo se podrían perfeccionar los trozos y la tira entera?”.

Con la técnica **brainstorming** podemos empezar reflexionando, todos los del grupo, sobre cada uno de los pasos que damos al realizar el experimento, para después plantearnos si las dos tiras de papel tienen el mismo largo o no y por qué. Cada niño da su opinión. El profesor recoge todas las opiniones.

Entre todos se organizan, clasifican y evalúan, llegando a rechazar las que sean incorrectas.

Como siempre habrá algún niño que no reconozca que tienen la misma longitud, para sacarlo de su error, en el mismo enunciado viene un planteamiento posterior imaginando a una hormiga recorriendo cada una de las tiras de papel. Si no se da cuenta de que la longitud es la misma, ponemos en la posición inicial la tira que hemos cortado en trozos y volvemos a plantearle la misma cuestión. De este modo estamos ante una situación análoga a la del ejercicio anterior, sólo que al ser el papel un material que no se puede deformar con tanta facilidad, el cortarlo y reordenarlo de otra forma nos da otras posibilidades de colocarlo.

Para resolver esta actividad podríamos plantearla en el gran grupo y después trabajarla en pequeños grupos, aplicándole el método **Delfos**, procurando que cada cual pueda exponer su pensamiento con total libertad. El profesor anota lo que se diga en cada grupo y lo comenta en los demás, agrupando en dos categorías las soluciones: los que digan que las dos tiras tienen la misma longitud y los que digan que no. Se razonan las dos respuestas. Cada niño, a la vista de las respuestas de los demás grupos, pensará en la suya y la podrá corregir. Sería deseable que los que hayan dicho que no rectificaran su respuesta. En caso de que algunos niños no se quedasen convencidos de que las dos tiras son igual de largas, se trabaja con la sinéctica, de la forma que comentamos a continuación, y es casi seguro que conseguimos que cambien de opinión.

La técnica **sinéctica** en su aspecto **hacer lo familiar extraño** se podría aplicar aquí, ya que utilizando la **analogía personal** el niño puede pasar el dedo por cada una de las tiras de papel y vivir el recorrido.

También se le podría decir: “Imagínate que tanto la tira de papel que no hemos recortado, como la que hemos recortado —que enlazamos de la mejor forma que podemos— son trayectos de dos carreteras, y que tú vas montado en tu bicicleta y recorres cada una de ellas, ¿qué trayecto te resultará más largo?”

Mediante **analogía directa** el niño compara una de las tiras con la otra y podría utilizar algún material auxiliar, como cuerdas, hilos...

Para aplicar la **analogía simbólica** se podrían dibujar en el cuaderno ambas situaciones, la tira sin dividir y dividida, colocando los trozos según los hayamos dispuesto en la realidad.

Para emplear la **analogía fantástica** se les puede preguntar si podríamos cortar la tira de papel en trozos tan pequeños como el filo de un cuchillo o tan grandes como el largo de la mesa.

El método **combinatorio** podemos aplicarlo con la técnica **análisis morfológico** para lo cual, además de las tiras de papel, tomamos otros materiales, como cuerdas, hilos, lápices, reglas, etc. Hacemos una tabla cartesiana de doble entrada colocando en una primera fila y columna los atributos: flexible, rígido, largo, corto, troceado, entero, etc.; en la intersección de cada una de las filas y columnas el niño tendría que colocar el objeto —o los objetos— que tenga esas características. Aquellas casillas para las que no pueda encontrar ningún objeto con las características de la fila y la columna correspondiente quedarán vacías.

Nos podría ayudar a entender la relación que hay entre la tira de papel que hemos dejado entera y la que hemos troceado la técnica el **arte de relacionar**, pues les podríamos pedir que nos dijeran en qué se parecen y en qué se diferencian las dos tiras de papel antes de cortar una de ellas y después.

Con la técnica **solución de problemas** definiríamos el problema, prácticamente como en el enunciado. Seguimos los pasos comentados cuando presentábamos esta técnica:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”. Les haríamos observar que en nuestra pregunta están implicadas las dos tiras de papel.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para que la tira entera sea más larga que la que hemos cortado, o al contrario, o que sean igual de largas?”. “¿Es la condición suficiente para razonar que es una más larga que la otra o que las dos son iguales?”. “¿es insuficiente?”. “¿redundante?”. “¿contradictoria?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de comparar dos longitudes?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvió entonces?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo sabrías si es igual de larga, es más larga o es más corta la tira que no hemos cortado que la que obtenemos uniendo los trozos?”. “Suponiendo que llegue a saber comparar las longitudes de la tira entera y la recortada, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando llegue a saberlo?”.

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías resolver el problema?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a comparar la longitud de la tira de papel que no hemos recortado con la recortada?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”; “¿por qué éstas y no otras?”. Nos quedamos con las alternativas que faciliten la solución, viendo por qué éstas y no otras. El profesor verá los pasos que debe seguir, que consistirán en dividir, al principio, en dos trozos solamente, y después, despacito iría dividiendo en más trozos.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para saber si la tira de papel sin recortar es más larga —más corta o igual de larga— que la recortada?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

### V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

### VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿Los resultados son los deseados?”. “¿Puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”.

En el mismo enunciado tenemos planteada la “retroalimentación” con el recurso de las dos hormigas. Si fuese necesario redefiniríamos el problema.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”. Observaríamos que el alumno tiene resuelto el problema cuando coloca todos los trozos uno a continuación del otro, sin dejar huecos y sin que se solapen, y los compara con la tira de papel que no hemos recortado.

La técnica el **entorno** nos sería de utilidad y la trabajaríamos siguiendo los pasos antes indicados:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Le decimos al niño que busque otros objetos que tengan la misma longitud que la tira de papel sin dividir o que alguno de los trozos en que se ha dividido la otra tira. También se le puede plantear que se fije en materiales que podamos dividir en varios trozos.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado.** Planteamos un torbellino de ideas y preguntamos a toda la clase: “¿dónde podemos encontrar objetos que tengan la misma longitud que la tira entera o que alguno de los trozos?”. Esto nos da pie a decirles —si no surge en las respuestas que vayan dado— que tienen



en el ambiente más inmediato su mejor aliado para encontrar lo que les proponemos.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema.** Tenemos que ir pendientes de observar lo que nos rodea por si encontramos alguna cosa que nos sirviera para algo.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones.** Cuando encontremos algún objeto que sospechemos que nos pudiera servir, tenemos que compararlo con la tira sin dividir y con alguno de los trozos y valorar si nos sirve o tenemos que seguir pensando en encontrar otros objetos.

**5. Mejorar el resultado si es posible.** Si hemos encontrado un objeto tan largo como uno de los trozos, podemos ver si se puede encontrar otro tan largo como la tira que no hemos dividido y la utilidad que puede tener cada uno de los objetos que hemos encontrado.

Para aplicar la **biónica** se le podría plantear que entre los animales conocidos nos dijera algunos que se parecieran a la tira entera o a alguno de los trozos y que los pudiera encontrar en los juegos que tenga el ordenador. También podríamos plantearle que se fijara bien en los animales conocidos, con esto haría un **estudio detallado del comportamiento** de los animales que conoce.

Después le propondríamos que buscara la forma de unir los trozos de papel —le dejamos pegamento, grapas, alambre..., pero no le indicamos que los use— para imitar algún animal conocido, un pequeño gusano, un gatito, un perrito, una salamandrita..., por ejemplo. Con esto estaría haciendo una **traducción de las propiedades de los seres vivos** conocidos a modelos simbólicos.

Al final le comentamos si ha conseguido alguna movilidad de patas o de cabeza en el animal realizado; si no es así le decimos que intente que se pueda mover como el animal elegido. Pretendemos con esto **desarrollar modelos intentando reproducir las funciones de los seres vivos**.

Como siempre, parece ser que las dos técnicas anteriores dan lugar a la aplicación de la **sinapsis**, ya que el niño tiene que estar pensando insistentemente en las tiras de papel e ir buscando otras cosas que se parezcan a ellas.

Seguro que en todo el proceso de división de una de las tiras de papel nos hemos encontrado aplicando la **serendipity**, ya que por lo menos hemos estado contando los trozos de papel en que la hemos

dividido, o si son o no iguales dichos trozos. Es probable que el niño haya pensado que la tira entera sirve mejor que los trozos para medir objetos grandes, y los trozos pequeños van mejor para medir objetos pequeños. Otras veces tiene que utilizar la tira entera y los trozos para medir algunos objetos.

Podríamos plantearnos, para aplicar la **ideogramación**, buscar objetos que puedan servir para lo que sirve una tira de papel. Esto lo podríamos hacer mediante un torbellino de ideas. Recogemos todas las ideas, clasificándolas y rechazando las extremas, se estructuran y las representamos mediante un poligrama estructural de síntesis.

Con la técnica el **circept** podríamos estudiar la tira de papel; este es el **tema elegido**. Para ello cada niño recorta una tira de papel con objeto de que le quede bien claro cuál es el tema en que se va a trabajar.

En la **etapa imaginativa** se le da rienda suelta a la imaginación buscando analogías, semejanzas, diferencias y oposiciones para que el profesor las vaya anotando.

Se pasa a la **etapa crítica** en la cual se seleccionan las mejores, se reordenan y se clasifican por categorías, haciendo una representación gráfica mediante círculos, colocando las ideas análogas en el interior del mismo círculo.

Finalmente se **usan las analogías** realizando un estudio minucioso de las semejanzas y diferencias que teníamos clasificadas y ordenadas, para aplicarles las sugerencias que veamos.

Para aplicar la técnica **crear durmiendo** podemos plantearles la actividad al final de una clase para que lo piensen —con esto pretendemos que **estén interesados en el tema**— y al día siguiente nos digan la solución; todo esto lo hacemos para **organizar las sesiones de creatividad durante el día**.

Se les aconseja que antes de ir a dormir se acuerden de la actividad y **dejen a mano papel y lápiz** por si les surge alguna idea que la dibujen e intenten recordar al despertar todo lo que se les haya ocurrido mientras dormían, con objeto de que nos lo cuenten.

**Al día siguiente** se realiza un **análisis por el grupo** de las ideas que tuvieron todos, para aprovechar lo que se pueda.

Realizamos un **relax imaginativo**, para lo cual seguimos los pasos siguientes:

**1. Ambientación:** Creamos un ambiente tranquilo en la clase, con una música suave.

**2. Relajación muscular:** Nos colocamos en una posición cómoda, con ropa deportiva, cerramos los ojos... Respiramos profunda y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Todos estamos muy contentos, muy relajados. Vamos a relatar una historia. Tenemos que estar todos muy atentos para que luego podamos comentarla entre todos.

**4. Narración:** “Pensamos en las dos tiras de papel... Son de la misma longitud aunque una es blanca y la otra celeste... Son muy bonitas. Me gustan. El profesor coge la blanca, la parte por la mitad y coloca los trozos uno a continuación de otro pero haciendo como una montaña. Parece más corta. ¡Pero si no ha quitado nada!... ¡Tiene el mismo papel que al principio!... Coloca los trozos como estaban antes de cortarla. ¡Si es igual de larga que la celeste!... ¡Será posible, cómo lo habré mirado!... Corta uno de los trozos de antes por la mitad. ¡Con los trozos de la tira blanca ha formado dos montañas!... Parece más larga que antes. Y más corta que la celeste. Lo observaré mejor. ¡Qué va, si no ha tirado nada de papel! Tiene que tener la misma longitud que la que la celeste que no la ha partido. ¡Ya sé, la longitud no varía mientras no tire ningún trozo de papel, aunque la parta en muchos trozos y coloque el profesor como quiera dichos trozos!”.

**5. Vuelta a la realidad:** El profesor da una palmada y todos volvemos a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** La suma de la longitudes de los trozos de la tira de papel blanca, que hemos recortado, es igual a la longitud de la tira de papel celeste, que no hemos recortado, ya que sólo será más corta si se quita algún trozo y será más larga si se le añade algún otro”.

Para aplicar la técnica de **escenarios** se siguen los pasos siguientes:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Se empieza con un torbellino de ideas preguntando: “¿en la actualidad varía la longitud de la tira de papel que hemos recortado o es igual que la que no hemos recortado?”.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Seguimos razonando sobre los siguientes interrogantes: “¿en el futuro variará la

longitud cuando cortemos la tira de papel en trozos?”. “¿En cuántos trozos tendríamos que cortarla para que variara?”.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Se anotan todas las soluciones, se clasifican y se realiza una selección de las mejores.

Mediante la técnica **síntesis creativa** podemos llegar al slogan de que “al cortar hay el mismo papel”, es decir, cortando la tira de papel, si no tiramos ninguno de los trozos, tenemos una tira de papel igual de larga que la que teníamos al principio, solo que después cada trozo nos podría servir como unidad de medida para medir objetos más pequeños.

**Ejercicio 8.** Esta actividad fue llevada a cabo también por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960). Sobre un tablero colocaron varios trozos de cuerda en distintas posiciones entre clavos; cada cuerda tenía engarzada una cuenta. Le asignaron a cada niño una cuerda y su correspondiente cuenta. El profesor movió una cuenta sobre una cuerda y le pidió al niño que moviera su cuenta sobre su cuerda la misma longitud que la había movido él, para lo cual tenía una regla sin divisiones, una vara, tiras de papel liso, cuerdas de diferentes longitudes y un lápiz; todo esto el niño podía usarlo, pero no se le aconsejó que lo hiciera.

Piaget comprobó que el niño, antes de los 6 años, movía su cuenta sobre su cuerda la misma longitud que había movido el profesor si la cuerda estaba en línea recta, paralela al modelo y tenía la misma longitud, pero fracasaba si estaba en otra posición o cuando se le pedía que corriera la cuenta desde el extremo opuesto de la cuerda. Si se movía la cuerda, sólo ponía la cuenta frente a la otra y no percibía la desigualdad de los trayectos recorridos.

La idea de medición que tiene el niño es intuitiva; sólo usa las manos, y quizá comprueba algo, pero de forma muy rudimentaria. De todos modos, es conveniente realizar esta actividad antes de los 6 años para que, con este juego, el niño vaya planteándose la idea de longitud. Por supuesto que no todas las posibilidades que tiene esta actividad tenemos que llevarlas a cabo en el mismo curso, esperaremos a que el niño vaya madurando para retomarlas en cursos posteriores.

Vamos a ver cómo se puede presentar esta actividad utilizando las distintas técnicas de Metodología Creativa.

Siguiendo la técnica el **arte de preguntar** podemos plantearle al niño algunas de las siguientes cuestiones:

i) **Sustancia:** Le enseñamos las cuentas y las cuerdas y le preguntamos: “¿qué es esto?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirve la cuerda?”; “¿y la cuenta?”. “¿Podrían tener otros usos?”.

iii) **Persona:** “¿De quién es el tablero?”; “¿y la cuerda?”; “¿y esta cuenta?”. “¿Quién mueve la cuenta?”. “¿Quién la podría mover?”. “¿Cómo la mueve el profesor?”. “¿Cómo la tiene que mover el alumno?”.

iv) **Materia:** “¿De qué está hecha la cuenta?”; “¿y la cuerda?”. “¿De qué otros materiales se podrían hacer?”.

v) **Relación:** “¿A qué se parece la cuerda?”. “¿Se podría parecer a otra cosa?”. “Y la cuenta, ¿a qué se parece?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se puede usar el tablero?”. “¿Podríamos colocar la cuerda de otra manera?”; “¿y la cuenta?”; “¿y los clavos?”.

vii) **Acción:** “¿Se mueven los clavos?”; “¿y la cuenta?”; “¿y la cuerda?”. “¿qué pasaría si se moviesen los clavos?”.

viii) **Cantidad:** “¿Cuántos clavos tiene el tablero?”. “¿Cuántas cuentas tenemos?”. “¿Cómo es de larga la cuerda del profesor?”; “¿y la tuya?”. “¿Alguna es más larga que la otra?”. “¿Podría ser más larga o más corta?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tiene el tablero, la cuenta o la cuerda?”. “¿Cómo se podrían corregir?”. “¿Podría ser todo más perfecto?”; “¿cómo?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo se mueve la cuenta?”. “¿Cuándo se podría mover?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde está la cuenta?”; “¿y la cuerda?”.

xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existiera la cuenta?”; “¿y si no existiera el tablero?”.

xiii) **Recepción:** “¿Cómo se podría perfeccionar todo lo que tenemos?”.

Con la técnica **brainstorming** podemos empezar reflexionando en grupo sobre lo planteado; después cada niño da su parecer sobre la forma de mover su cuenta la misma longitud que la nuestra.

Como al principio toda crítica está prohibida y habrá niños que no la muevan bien, recogemos las opiniones de todos, las clasificamos, organizamos y evaluamos entre todos.

Para los que se equivoquen y no reconozcan su error, tendremos que plantearles situaciones más fáciles. Tomando las cuerdas tensas y colocadas una al lado de la otra les decimos que desplacen la cuenta en el mismo sentido que la hemos desplazado nosotros. A continuación se coloca una frente a la otra; después desplazaremos el extremo de nuestra cuerda; más tarde les diremos que se muevan como nosotros — se sobreentiende que debe ser en sentido contrario al nuestro— y al final nos moveremos entre los clavos en cualquier sentido sin que la cuerda tenga que estar en línea recta. Con todas estas posibilidades estamos dando tiempo a que se equivoquen y ellos mismos reconozcan su error.

Para aplicar el método **Delfos** dividimos la clase en grupos, a cada grupo se le da una cuerda con su cuenta y cada grupo tiene que mover la cuenta la misma distancia que la hemos movido nosotros. Cada uno de los niños de cada grupo nos dice cómo lo haría. Nosotros anotamos lo que nos digan, agrupándolos por categorías y eliminando aquellos comentarios que sean muy disparatados, y se lo comentamos al resto de los grupos. Los niños de cada grupo, a la vista de los comentarios de los otros, piensan cómo lo harían ellos y nos lo vuelven a comunicar. Cerramos el problema después de haber cruzado la información entre los diferentes grupos.

La técnica **sinéctica** bajo su aspecto **hacer lo familiar extraño** podría sernos útil aquí, ya que el tablero, las cuerdas, las cuentas y los clavos son materiales familiares para el niño, aunque no para comparar longitudes.

Mediante la **analogía personal** se le tendría que plantear que si él fuese la cuenta, cuánto tendría que desplazarse cogido a la cuerda para recorrer la misma distancia que hemos recorrido nosotros.

Por **analogía directa** cuando desplazamos un extremo de la cuerda y deslizamos la cuenta, el niño nos describirá los hechos que hemos realizado.

Utilizamos la **analogía simbólica** para decirle al niño que dibuje en su cuaderno el desplazamiento que nosotros hemos hecho y el que él ha realizado.

Para la **analogía fantástica** podemos plantearle al niño: “¿cómo tendríamos que poner la cuerda y dónde tendríamos que poner la cuenta para que la distancia fuese, por ejemplo, el doble?”; o “¿podríamos

inventarnos un juego que al desplazar el profesor una cuenta el niño, automáticamente, desplace otra la misma distancia?"; "¿cómo lo haríamos?". También nos podríamos plantear: "¿cómo tendríamos que colocar los clavos, y de qué color tendrían que ser, para que el tablero estuviese más bonito y el juego fuese más divertido?".

De los **métodos combinatorios** podemos aplicar la **lista de atributos**, para lo cual podemos empezar con un torbellino de ideas preguntándole al niño: "¿cómo tenemos colocados los clavos?"; "¿y las cuerdas?"; "¿y las cuentas?". "¿Cuándo te cuesta más desplazar la cuenta la misma longitud que la que la ha desplazado el profesor?".

Vamos recogiendo todas las ideas y podemos ir representándolas gráficamente. Esto nos permite **definir los atributos fundamentales** del juego. Después continuaríamos con otro torbellino de ideas preguntándole: "¿cómo podríamos colocar las cuerdas para que fuese más fácil hacer el juego?"; "¿y los clavos?". "¿Qué cosas podrías utilizar para no equivocarte y desplazar la cuenta con más seguridad?".

Volvemos a recoger las ideas que vayan surgiendo y hacemos una selección de las mejores eliminando las posiciones extremas. Pretendemos **plantearles preguntas sobre la forma en que se podría mejorar**.

Después se podría **pasar de la situación real a la posible o fantástica**, como por ejemplo, nos podríamos plantear construir otro tablero en el que el juego fuese más fácil, con hilo y cuentas más cómodas de usar, que fuese más bonito y aprendiésemos más cosas...

Con el **arte de relacionar** se puede comparar el desplazamiento de nuestra cuenta con la del niño, en cada una de las situaciones, para ver si el niño se desplaza en el mismo sentido o en sentido contrario al nuestro y si la distancia que él recorre es la misma, mayor o menor que la recorrida por nosotros. Todo esto se enriquece teniendo en cuenta que podemos ponernos al lado del niño o en frente, según vaya consiguiendo desplazar la cuenta.

Mediante la técnica **solución de problemas** se podría intentar trabajar este ejercicio; para ello seguimos los pasos ya señalados que son:

## I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: "¿Cuál es la incógnita?". "¿Cuáles son sus datos?". No es más que conseguir desplazar la cuenta la misma



distancia que lo ha hecho el profesor y en el mismo sentido o en sentido contrario, según se pida.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para que el desplazamiento sea correcto?”. “¿Es la condición suficiente?”; “¿es insuficiente?”; “¿redundante?”; “¿contradictoria?”.

## II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de comparar dos desplazamientos?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvió entonces?”. “¿Tienes cerca de ti alguna cosa que pueda ayudarte a resolver el problema?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

## III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo tendrías desplazada la cuenta la misma distancia que la desplazó el profesor?”. “Suponiendo que llegues a desplazar la cuenta la misma distancia que la desplazó el profesor, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a desplazar la cuenta la misma distancia que la desplazó el profesor?”.

## IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías desplazar la cuenta la misma distancia que la desplazó el profesor?”.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a desplazar la cuenta la misma distancia que la desplazó el profesor?”.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para desplazar la cuenta la misma distancia que la desplazó el profesor?”; “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”; “¿cuándo?”.

## V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿los resultados son los deseados?”; “¿puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”. La “retroalimentación” tendría lugar planteándole las distintas posibilidades de colocar los clavos, la cuenta y la cuerda.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”. Comprobamos que están bien informados y que resuelven el problema cuando observan —o miden— bien la distancia que hemos desplazado la cuenta y el sentido en que lo hemos hecho y desplazan su cuenta esa misma distancia y en el mismo sentido.

Para aplicar la técnica el **entorno** seguimos los pasos ya señalados y que son:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema**: Le podemos decir al niño que busque objetos para traer a clase al día

siguiente que tengan alguna cuenta engarzada en una cuerda. También se le podría decir que traiga cuerdas o hilos y objetos que pueda engarzar a modo de cuentas y que piense en algún desplazamiento de los que hemos hecho en clase e intente realizarlo.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado.** Al niño le tiene que quedar claro que no tiene que buscar muy lejos los objetos con cuentas engarzadas, o las cuerdas o los hilos y algún objeto que pueda engarzar. Seguro que cerca de él hay algún objeto con estas características.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema.** Hay que tener en cuenta lo que queremos buscar: cuerda o hilo y objetos que podamos engarzar en él, vamos con cuidado por si en algún momento nos topamos con ellos.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones.** Si nos hemos encontrado con alguna cosa que pensamos que nos puede servir, tenemos que ver si tiene algún objeto, a modo de cuenta, que podemos desplazar, o tenemos que seguir pensando en encontrarla.

**5. Mejorar el resultado si es posible.** Si hemos encontrado una cuerda y algún objeto que podamos engarzar —piénsese, por ejemplo en una cinta y una llave— podemos ver si se puede encontrar un objeto que tenga alguna cuenta engarzada en una cuerda o si podemos construirnos un juego similar al modelo, siendo incluso mejor que éste.

La **biónica** se podría utilizar diciéndole que si hay algún animal de los que él conoce que tenga alguna cuenta engarzada a una cuerda y si este animal la puede desplazar.

Puede ver, entre los animales que el niño conoce, si hay alguno capaz de realizar un desplazamiento sencillo, al hacerlo él. Con esto está realizando un **estudio detallado de los seres vivos**.

Después, para **traducir las propiedades de los seres vivos a modelos gráficos**, se le puede decir que dibuje en la pizarra los trayectos que el animal elegido ha acertado a realizar.

Finalmente intentamos **desarrollar modelos procurando reproducir las funciones de los seres vivos** para lo cual le decimos que construya con papel y alambre un animal como el que eligió y que intente realizar con él el recorrido que hizo antes.

Después del esfuerzo que le supone al niño realizar el experimento propuesto, no es de extrañar que cuando se entere bien, sin pretenderlo, siga con la mente ocupada en él utilizando la **sinapsis**. Al día siguiente de realizado el experimento le decimos que nos cuente situaciones en donde pueda utilizar la cuenta con la cuerda y para qué.

Al ir buscando los objetos que le proponemos con anterioridad, puede descubrir algo que él no pretendía y encontrarse aplicando la **serendipity**. Si no observa otra cosa, seguro que antes o después ve la forma de medir los desplazamientos mediante los instrumentos que le dejamos.

Si queremos utilizar la **ideogramación**, podemos colocar la cuerda en las distintas posiciones y se dice a los niños que piensen en objetos que tengan, por algún lado, esa forma. Lanzamos un torbellino de ideas, anotamos todo lo que nos digan, seleccionamos las mejores respuestas agrupando las que correspondan a la misma posición de la cuerda. Hacemos una representación gráfica mediante un pictograma estructural de síntesis.

La técnica el **circept** se la podemos aplicar a la cuenta, ella va a ser el **tema elegido**.

En la **etapa imaginativa** le damos rienda suelta a la imaginación pensando en todas las analogías, semejanzas y diferencias que se puedan encontrar y las anotamos.

En la **etapa crítica** se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y clasifican por categorías. Se hace una representación gráfica mediante círculos, colocando las ideas análogas dentro del mismo círculo.

Se **usan las analogías** para realizar un estudio de las semejanzas y de las diferencias que teníamos ordenadas y clasificadas para aplicar a la cuenta las sugerencias que obtengamos.

En cualquier situación que queramos utilizar la técnica **crear durmiendo**, y ahora también, es conveniente comentar el experimento en clase para **interesar al niño en el tema**. Con ello **organizamos la sesión de creatividad durante el día**.

Le decimos a los niños que antes de irse a dormir se acuerden de cómo teníamos que colocar la cuenta en la cuerda para que se desplazase la misma longitud que la había desplazado el profesor y que **dejen a mano papel y lápiz** por si se les ocurre alguna idea, la dibujen para que no se les olvide.

**Al día siguiente se lleva a cabo un análisis** por toda la clase, para lo cual se recogerán todas las ideas y se rechazarán aquéllas que no nos den una solución satisfactoria.

Podemos trabajar el experimento mediante un **relax imaginativo**. Para ello seguimos los siguientes pasos:

**1. Ambientación:** Creamos en la clase un ambiente agradable, sin ruidos y con una música ambiental suave.

**2. Relajación muscular:** Nos ponemos ropas cómodas para poder dejarnos caer en el suelo... Cerramos los ojos, respiramos profunda y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Os voy a contar una historia. Todos tenéis que estar muy atentos, ya que después la vamos a comentar.

**4. Narración:** “Pensamos en un collar. Tiene muchas cuentas... Un niño ha roto el hilo del collar. Se caen las cuentas... ¡Una cuenta del collar se ha quedado sola engarzada! ¡Pobrecita está sola!... No pasa nada, así también valgo para algo —nos dice la cuenta. Sí, pero ¿para qué vas a servir si te has quedado sola? —le pregunta el niño. Seguro que tu profe me busca algún trabajito que hacer —responde la cuenta.

Llega el profe y tanto el niño como la cuenta están pendientes de él... ¡Muy bien, esto es lo que estaba yo buscando —dice el profesor. Todos pendientes del profesor e inquietos por saber qué partido se le va a sacar a algo tan insignificante... Yo tengo aquí otra cuenta engarzada en otra cuerda, toma tú ésa y vamos a ver si haces lo que yo voy haciendo —le dice el profesor al niño.

El profesor mueve la cuenta sobre la cuerda. El niño desplaza la suya en el mismo sentido, la misma distancia. Así al lado tuyo esto está chupado —dice el niño. Ponte enfrente y ve haciendo con tu cuenta lo que yo haga con la mía —dice el profe. ¡Hum ahora es muy difícil!, será mejor que me lo dejes pensar y mañana lo volvemos a intentar —le dice el niño al profe. El profe le dice: inténtalo, mira si te puede servir algo de lo que hay por ahí... Cerca tienes cuerdas, cintas, tiras de papel, lápices... El niño pregunta: ¿puedo moverme como quiera? El profe le dice que sí. Coge el niño su cuerda y se pone al lado del profe, con una tira de papel mide la distancia que ha desplazado el profe la cuenta y lo señala con el lápiz. Lo lleva sobre su cuerda y desplaza la cuenta hasta el lugar señalado. ¡Lo conseguí!... El profe le dice: ¡Muy bien!... ¿Has visto que no has tenido que esperar a mañana? Dice el niño muy contento: ¡soy un campeón!”.

**5. Vuelta a la realidad:** Con una palmada los niños vuelven a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** Hay materiales que nos pueden servir para comparar dos longitudes como el papel, las cuerdas, etc. Con estos materiales conseguimos con más precisión que el desplazamiento sea el mismo.

Con la técnica de **escenarios** seguimos los pasos ya comentados:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Pensamos cómo está la cuenta engarzada a la cuerda.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Podemos pensar si en el futuro sería posible tener una cuenta sin necesidad de cuerda y cómo —o con qué— si no es con la cuerda. Y también si sería posible sacarle partido para otras cosas a la cuenta —con o sin la cuerda.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** Se recogen todas las ideas y se seleccionan las mejores; si es posible se llevan a cabo.

Si todavía no han llegado a utilizar ni la regla sin divisiones, ni la vara, ni las tiras de papel liso, ni las cuerdas de diferentes longitudes, ni el lápiz, aplicando la técnica **síntesis creativa** razonaríamos que la forma para conseguir desplazar la cuenta, justo la misma distancia que la ha desplazado el profesor, tendría que ser utilizando los materiales que les hemos proporcionado, de otro modo siempre se desplazaría más o menos, pero no exactamente lo mismo, es decir podríamos llegar al slogan siguiente: “los instrumentos de medida sirven para algo”.

**Ejercicio 9.** Tomamos dos paquetes de azúcar, colocamos cada uno de ellos en un platillo de la balanza y comprobamos, delante del niño, que la balanza se equilibra. Tomamos uno de ellos y lo vaciamos en un bote, y le preguntamos al niño si el azúcar del paquete pesa igual, más o menos que la del bote.

Se toma otro paquete de azúcar y se vuelve a comprobar, con el paquete que no habíamos vaciado, que se equilibra la balanza. Se vacía el contenido de uno de los paquetes en otro bote de distinta forma o tamaño que el utilizado anteriormente y se le hace la misma pregunta respecto del que hay en el paquete y del que había antes en el otro bote. Se echa el azúcar del paquete que no se había vaciado en dos o tres botes pequeños, y se vuelve a repetir la pregunta.

Veamos el partido que podemos sacarle a esta actividad utilizando las distintas técnicas de Metodología Creativa.

Se puede trabajar esta actividad con la técnica el **arte de preguntar**; para ello, mostrándole el paquete de azúcar y cada uno de los envases en que se han colocado los otros paquetes, se le pueden plantear al niño algunas de las siguientes preguntas:

i) **Sustancia:** “¿Qué es esto?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirve el azúcar?”; “¿para qué se utiliza?”; “¿y los botes?”. “¿Podrían tener otros usos?”.

iii) **Persona:** “¿Quién utiliza el azúcar?”; “¿y los botes?”. “¿Los podrían utilizar otras personas?”.

iv) **Materia:** “¿De qué está hecho el envase?”. “¿Qué tiene en su interior?”. “¿De qué está compuesto todo el paquete?”. “¿De qué están hechos los botes?”. “¿Se podrían hacer de otro material?”.

v) **Relación:** “¿A qué se parece el azúcar?”; “¿se podría parecer a otras cosas?”. “¿A qué se parece el bote?”; “¿podría parecerse a otras cosas?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se usa el azúcar?”; “¿de qué otras formas se podría utilizar?”. “¿Dónde se podría envasar?”.

vii) **Acción:** “¿Qué produce el azúcar o podría producir si se abusa de ella?”. “¿Tiene vida el bote?”. “¿Qué pasaría si tuviera vida?”.

viii) **Cantidad:** “¿Tienen los dos envases la misma cantidad de azúcar?”. “¿Puede tener uno mayor cantidad que el otro?”. “¿Podría ser el envase mayor, menor, de otra manera?”. “¿Cuánto pesa el azúcar que hay en cada uno de los botes?”. “¿Podría pesar más o menos?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tiene el bote?”; “¿y el paquete en el que estaba al principio el azúcar?”. “¿y el azúcar?”. “¿Cómo se podrían corregir?”. “¿Cómo se llevaría más fácil el azúcar?”. “¿Puede ser más perfecto el envase o de otra manera?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo se utiliza el azúcar?”. “¿Cuándo se podría utilizar?”. “¿Cuándo pesa más o menos el azúcar hoy o mañana?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde se emplean los envases?”. “¿Dónde hay azúcar?”. “¿Dónde se coloca el azúcar?”.



xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existiera el azúcar o dejara de existir?”; “¿y si no hubiera botes?”.

xiii) **Recepción:** “¿Qué influye en el peso del azúcar?”. “¿Cómo se puede perfeccionar el envase para que no pueda derramarse el azúcar o para que no se rompa?”.

Después de realizado el experimento dejamos reflexionar al grupo para aplicarle la técnica **brainstorming**. A continuación cada uno expone sus ideas. Se admiten tantas ideas como sea posible; cuantas más mejor. Se clasifican, organizan y evalúan las respuestas entre todos.

Habrán niños que no habiendo respondido correctamente persistan en el error, quizás debido a que ellos consideran incluido en el peso del azúcar el de los dos envases, que son: uno de papel —que apenas pesa— y el otro de cristal —que pesa algo más. Aunque nosotros no le hemos preguntado sobre el peso del envase, sino sobre el del azúcar. Para que observen, en distintas situaciones, que el peso del azúcar no ha variado, es por lo que se plantean otras posibilidades de echar el azúcar en otros recipientes y repetir la pregunta.

Para aplicar el método **Delfos** dividimos la clase en varios grupos, de modo que cada niño pueda exponer su opinión, aunque no sea acertada, con total libertad. Anotamos las opiniones de los distintos grupos y las ordenamos por categorías. Los que digan que pesa lo mismo, y los que opinen que no, con sus porqués, eliminando el resto de los valores, si los hubiera. Se le leen a cada grupo las opiniones de los demás; esto les servirá de base para responder de nuevo y salir de su error, si ese es el caso. Después de cruzar las respuestas el profesor cierra el problema.

La técnica **sinéctica** bajo su aspecto **hacer lo familiar extraño** se podría utilizar aquí, pues el azúcar es algo conocido por el niño, pero quizá anteriormente no le ha planteado nadie estas cuestiones.

Para aplicar la **analogía personal** podríamos empezar, en lugar de con todo el paquete de azúcar, con una cantidad de azúcar que cupiera en la mano del niño para que se identifique con el problema.

Queremos utilizar la **analogía directa**; para ello le damos dos veces la cantidad de azúcar que le cabe en la mano y ponemos cada una de ellas en una bolsa de plástico que colocamos en los platillos de la balanza, observando que se equilibra. Después, una de estas cantidades es la que pasamos a un bote; el niño tendría que comparar lo que hemos hecho ahora con lo que hicimos antes.

Para hacer uso de la **analogía simbólica** se toman paquetes de otras sustancias —como puede ser, por ejemplo, harina— que también pesen un kilo y se compara el peso con el del paquete de azúcar, vaciando también el contenido de alguno en recipientes distintos y volviendo a plantearle la misma cuestión. Así podemos llegar a decirles que todos pesan un kilo.

Finalmente pasamos a utilizar la **analogía fantástica** volviendo a realizar el experimento con los dos kilos de cualquier sustancia, y planteando la situación en el caso en que tomáramos cualquier cantidad de dicha sustancia y recipientes de distintas formas y tamaños.

De los **métodos combinatorios** vamos a aplicar el **análisis funcional**, para lo cual empezamos planteándoles las cuestiones: “¿para qué sirve el azúcar?”; “¿podría tener otros usos?”. “¿Para que sirve el envase del azúcar?”. “¿Podría pesar menos y ser más resistente?”. Estas cuestiones las trabajamos mediante un torbellino de ideas. El profesor anota todas las aportaciones, después se clasifican y se seleccionan las mejores ideas.

Mediante el **arte de relacionar** el niño compara los dos kilos de azúcar colocados en distintos recipientes para decirnos si alguno pesa más que el otro. Y compara también kilos de diferentes sustancias: caramelos, harina, garbanzos, lentejas, judías, arroz, canicas, chapas, paja..., colocados en lugares distintos: paquetes, botes, encima de la mesa..., para que observe que todos pesan lo mismo.

Para emplear el método **solución de problemas** seguimos los pasos ya comentados:

## I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”. Le hacemos ver que el elemento que está implicado es el azúcar que hay en cada uno de los dos paquetes y las distintas posibilidades de colocarla.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para que pese más, menos o igual?”. “¿Es la condición suficiente para que el azúcar del paquete pese igual, más o menos que la del bote?”. “¿es insuficiente?”. “¿es redundante?”. “¿es contradictoria?”.

## II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de comparar el peso de dos objetos?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvió entonces?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la comparación de los pesos de dos objetos?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo sabrías si el azúcar del paquete pesa igual, más o menos que el del bote?”. “Suponiendo que llegues a saber si el azúcar del paquete pesa igual, más o menos que el del bote, ¿se podría aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a saber si el azúcar del paquete pesa igual, más o menos que el del bote?”.

### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías saber si el azúcar del paquete pesa igual, más o menos que el del bote?”. Para darle más posibilidades podríamos dejarle la balanza, por si quiere volver a utilizarla. También podríamos dejarle dos cubos de playa que sean iguales, por si quisiera echar cada kilo en un cubo y sostenerlos cada uno de ellos para comparar si pesan o no lo mismo. Le dejamos que proponga alternativas.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a la solución?”. Se analizan los recursos que requiere cada alternativa.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”. Se selecciona la que suponga menos costo. Se distribuyen las tareas y se lleva a cabo la alternativa seleccionada.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para saber si el azúcar del paquete pesa igual, más o menos que la del bote?”. “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”. “¿cuándo?”.

### V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

## VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿Los resultados son los deseados?”. “¿Puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”.

Evaluamos los resultados, viendo si algo dificultó o favoreció el proceso. Planteamos la “retroalimentación” redefiniendo el problema: vaciando el azúcar en otro bote de distinta forma y echándolo en dos o tres botes, y viendo si podríamos colocar la misma cantidad de azúcar de otra manera.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos: “¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos: “¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”. Deseamos que el niño sea capaz de saber aislar, mentalmente, el azúcar del recipiente. Observando el comportamiento que tiene el niño frente al problema, nos daremos cuenta de si lo hemos conseguido o no.

Utilizando la técnica el **entorno** seguimos los pasos ya indicados:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Podríamos plantearles que buscasen otros materiales que no estén lejos de donde ellos se mueven y que les puedan servir para realizar una experiencia análoga a ésta.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado.** Les dejamos claro que cerca de ellos hay muchas cosas que pueden serles útiles.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema.** Deben ir pendientes de observar todo lo que les rodea para poder quedarse con lo que les pueda servir para comparar pesos o descartarlo.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones.** Cuando piensen que algo que han encontrado les puede servir para realizar el experimento tienen que compararlo con el azúcar y aceptarlo o rechazarlo según puedan pesarlo y envasarlo o no.

**5. Mejorar el resultado si es posible.** Si hemos encontrado una cosa que podemos pesar y envasar, podemos ver si se puede poner dentro de un bote con la boca pequeña o no.

Mediante la **biónica** nos van a ir diciendo algunos animales de los que conocen y que puedan pesar tanto como el paquete de azúcar, otros que pesen igual que el azúcar que hemos vertido en el tarro de cristal y otros que pesen lo mismo que el que pusimos en el tarrito pequeño. Con todo esto están haciendo un **estudio detallado** del peso de los animales que conocen.

Amasando harina, agua y utilizando algún otro material, podríamos hacer estos animales. Esto les sirve para **traducir las propiedades de los seres vivos a modelos simbólicos**.

Si nos metemos a fondo en el problema del peso del kilo de azúcar o de otra sustancia, podemos, sin dificultad, aplicar la **sinapsis**, ya que los niños, sin necesidad de decirles nada, estarán comparando el peso de todo lo que encuentren con el del paquete de azúcar.

Aquí vendría la aplicación de la **serendipity** ya que como todo esfuerzo tiene su recompensa, seguro que se habrán topado con algún descubrimiento que no pretendían. Les pedimos que, si ése es el caso, nos lo cuenten.

Para la **ideogramación** vamos a recoger, mediante un torbellino de ideas, todos los objetos, animales, vegetales o minerales, que puedan pesar un kilo. Se clasifican y se representan gráficamente mediante un pictograma estructural de síntesis.

Para aplicar el **circept** podríamos **elegir el tema** del azúcar.

En la **etapa imaginativa** se le da rienda suelta a la imaginación anotando las analogías, diferencias, semejanzas y oposiciones que encontremos.

Para la **etapa crítica** se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y clasifican por categorías. Hacemos una representación gráfica mediante círculos, colocando en el interior del mismo círculo las ideas análogas.

Al final se **usan las analogías** para realizar un estudio detallado de las semejanzas y de las diferencias, que ya teníamos ordenadas y clasificadas, para aplicarle al kilo de azúcar todas las sugerencias que obtengamos.

Aplicamos la técnica **crear durmiendo**; para ello, después de haber trabajado el experimento durante el día, con objeto de **organizar la sesión de creatividad**, el niño **estará interesado en el tema**, y no es de extrañar que el niño sueñe con el paquete de azúcar. De todos modos se le sugiere que piense en el experimento antes de irse a dormir y **deje a mano papel y lápiz** para dibujar lo que se le ocurra.

**Al día siguiente se llevará a cabo el análisis por el grupo**; para ello le decimos que nos cuente lo que ha pensado o soñado.

Podemos llevar a cabo un **relax imaginativo**; seguimos para ello los pasos ya comentados:

**1. Ambientación:** Ponemos la clase en penumbra, con una música suave.

**2. Relajación muscular:** Nos ponemos ropas cómodas y nos dejamos caer encima del pupitre. Cerramos los ojos... Respiramos profunda y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Todos piensan en el experimento que hemos realizado con el azúcar.

**4. Narración:** “Pensamos en los dos paquetes de azúcar. ¡Son iguales!... Los ponemos en una balanza con dos platillos. ¡Los platillos se equilibran, por tanto pesan lo mismo! El profesor pone el contenido de un paquete en un bote. ¡Cabe todo el azúcar!... Ahora me parece que pesa más el azúcar del bote que el del paquete... ¡Claro que sí!... ¡Cómo va a pesar más si el profe no ha puesto más azúcar!... ¡Pues es verdad!... ¡Estaré yo bien!... Ahora el profesor pone el azúcar del paquete que no había vaciado en tres tarritos pequeños. ¡Ahora sí pesa más el azúcar de los tres tarros que la que hay en el bote grande!... ¿Por qué? ¡Pues

porque son tres!, hay más tarros. ¡Otra vez, pero si el profesor no ha puesto más azúcar que la que había al principio!... ¡Es verdad!... Hasta que no añada más azúcar no pesará más”.

**5. Vuelta a la realidad:** El profesor da un chasquido de dedos y todos volvemos a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** El azúcar tendrá más peso si añadimos alguna cantidad nueva. Si quitamos alguna, el peso será menor. Si no añadimos ni quitamos azúcar, el peso no varía. Tampoco se altera el peso si quitamos y ponemos (o al revés) la misma cantidad de azúcar.

La técnica de **escenarios** se podría utilizar siguiendo los pasos ya indicados:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Se les pregunta si les gusta el azúcar y si en la actualidad hay envases que nos permiten transportarla de forma cómoda y sin problema de que se rompan.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Pensamos si en el futuro sería posible tener otras sustancias que nos gustasen tanto como el azúcar, o más, y un envase para el azúcar y para estas sustancias que no pesara nada y que no tuviese problemas de rotura.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** De todas las soluciones se seleccionan las mejores y, si es posible, se llevan a cabo.

Por **síntesis creativa** orientaríamos los pasos a seguir hasta llegar al slogan, que tendría que ser algo del estilo de: “el peso del recipiente no influye en el del contenido”.

**Ejercicio 10.** Estamos en el mes de junio y celebramos el día del agua. En este día se llevan a cabo distintas actividades utilizando el agua para realizarlas. Lo dejamos para junio porque si algún niño se moja, que será lo más seguro, como hace calor, se puede secar pronto.

Les decimos a los niños que vengan con ropa que se seque pronto, y que traigan botes de diferentes formas y tamaños, vasos de distintos tamaños, probetas y todos los cacharros que encuentren en donde puedan echar agua sin que se derrame.

Es bueno tener probetas graduadas para habituar al niño a emplearlas. Cuando el experimento se realiza con niños que no saben leer los números —alrededor de los 3 años—, sólo se les pide que marquen el lugar hasta dónde llega el agua y cuando los niños ya reconocen los



números —alrededor de los 5 años— se les pide que lean la medida en la escala.

Tomamos dos recipientes iguales y les ponemos la misma cantidad de agua; después pasamos el agua de uno de ellos a otro recipiente más largo y estrecho. Le preguntamos al niño si hay la misma cantidad de agua en uno y otro recipiente o si hay más en alguno de ellos. Luego se pasa el agua que quedaba en el recipiente primero a un recipiente más ancho y bajo, y se le repite la misma pregunta. Se pasa el agua de los dos recipientes —uno largo y estrecho, y otro ancho y bajo— a los recipientes primitivos y se repite la pregunta. Después vaciamos el agua de uno de los recipientes en tres vasos, la del otro recipiente no la tocamos, y se le pregunta si hay la misma cantidad de agua en los tres vasos que en el otro recipiente o si hay más en alguno de ellos.

Esta actividad es bastante parecida a la anterior, sólo que antes teníamos azúcar y la pesábamos —medíamos su peso— y ahora tenemos agua y la medimos —medimos su capacidad.

Al final colocamos todos los recipientes que tenemos: los que había en el colegio, los que hemos traído nosotros y los que han aportado los niños, y queremos clasificarlos y ordenarlos según su capacidad. Para ello empezamos agrupando todos los que tienen la misma capacidad —con lo que obtenemos una clasificación— y, una vez que lo hemos conseguido, les preguntamos: “¿en dónde cabe más agua?”. Razonamos si la respuesta es o no correcta y, en caso de serlo, separamos el recipiente —o los recipientes— que tenga mayor capacidad y continuamos el proceso hasta agotarlos.

Veamos qué aporta cada una de las técnicas de Metodología Creativa cuando las utilizamos para proponer esta actividad.

Se puede trabajar esta actividad con la técnica el **arte de preguntar**; para ello, mostrándole los recipientes, unos con agua y otros sin ella, se le pueden plantear al niño algunas de las siguientes preguntas:

i) **Sustancia:** “¿Qué es esto?”.

ii) **Fin:** “¿Para qué sirve el agua?”. ¿Para qué se utiliza?; “¿y los botes?”; “¿y los vasos?”, “¿Podrían tener otros usos?”.

iii) **Persona:** “¿Quién utiliza el agua?”; ¿y los vasos?”, “¿Los podrían utilizar otras personas?”.

iv) **Materia:** “¿De qué están hechos los botes?”. “¿Qué tiene este bote en su interior?”. “¿De qué están hechos los vasos?”. ¿Se podrían hacer de otros materiales?”.

v) **Relación:** “¿A qué se parece el agua?”. “¿Se podría parecer a otra cosa?”. “¿A qué se parece el bote?”. “¿Podría parecerse a otra cosa?”.

vi) **Medios:** “¿Cómo se usa el agua?”; “¿de qué otras formas se podría utilizar?”.

vii) **Acción:** “¿Qué produce el agua?”. “¿Tiene vida el agua?”; “¿y el vaso?”. “¿Qué pasaría si tuvieran vida?”.

viii) **Cantidad:** “¿Tienen los dos botes la misma cantidad de agua?”. “¿Puede tener uno mayor cantidad que el otro?”. “¿Podría ser el bote más grande, más pequeño, de otra manera?”. “¿Cuánto mide el agua que hay en cada uno de los botes?”. “¿Podría medir más o menos?”.

ix) **Cualidad:** “¿Qué defectos tiene el bote?”; “¿y el agua?”. “¿Cómo se podrían corregir?”. “¿Cómo se llevaría más fácil el agua?”. “¿Puede ser el envase más perfecto o de otra manera?”.

x) **Tiempo:** “¿Cuándo se utiliza el agua?”. “¿Cuándo se podría utilizar?”. “¿Cuánto mide más el agua que hay en el vaso hoy o mañana?”.

xi) **Lugar:** “¿Dónde se envasa el agua?”. “¿Dónde se podría envasar?”. “¿Dónde se emplean los vasos?”. “¿Se podrían emplear en otro lugar?”.

xii) **Valores:** “¿Qué pasaría si no existiera el agua o dejara de existir?”; “¿Y si no hubiera vasos o botes?”.

xiii) **Recepción:** “¿Qué influye en la cantidad de agua que tengamos?”. “¿Cómo se puede perfeccionar la forma de echar el agua en un vaso para que no se derrame?”.

Después de realizado el experimento, dejamos reflexionar al grupo para aplicarle la técnica **brainstorming**. Después, cada uno expone sus ideas. Se admiten tantas ideas como sea posible, cuantas más mejor. Se clasifican, organizan y evalúan las respuestas entre todos.

Habrán niños que no habiendo respondido correctamente persistan en el error, quizás debido a que ellos consideran que la cantidad de agua

que tiene el recipiente largo y estrecho, al subir más alto, es mayor que la que tiene el recipiente ancho. Para que observen, en distintas situaciones, que la cantidad de agua no ha variado, es por lo que se plantean otras posibilidades como volver a la situación inicial o echar el agua en tres vasos y repetir la pregunta.

Para aplicar el método **Delfos** dividimos la clase en varios grupos, de modo que cada niño pueda exponer su opinión, aunque no sea acertada, con total libertad. Anotamos las opiniones de los distintos grupos y las ordenamos por categorías. Los que digan que hay la misma cantidad de agua, y los que opinen que no, con sus porqués, eliminando el resto de los valores, si los hubiera.

Se le leen a cada grupo las opiniones de los demás; esto les servirá de base para responder de nuevo y salir de su error, si ése es el caso. Después de cruzar las respuestas el profesor cierra el problema.

La técnica **sinéctica** bajo su aspecto **hacer lo familiar extraño** se podría utilizar aquí, pues el agua es algo conocido por el niño, pero quizá anteriormente nadie le ha planteado estas cuestiones.

Para aplicar la **analogía personal** podríamos empezar, en lugar de con toda el agua del recipiente, con la cantidad de agua que el niño pudiera retener en su mano o en la boca para que se identifique con el problema.

Queremos utilizar la **analogía directa**. Para ello le damos dos veces la cantidad de agua que pudiera retener en su mano, ponemos cada una de ellas en un bote pequeño y después pasamos cada cantidad de agua a una probeta graduada, observando que el agua alcanza en ambas la misma altura. Después, una de estas cantidades es la que pasamos a un bote; el niño tendría que comparar lo que hemos hecho ahora con lo que hicimos antes.

Para hacer uso de la **analogía simbólica** se toman botes, latas, vasos de distintas formas y tamaños y colocamos en todos ellos la misma cantidad de agua utilizando para ello un vaso previamente elegido, volviendo a plantearle la misma cuestión.

Finalmente pasamos a utilizar la **analogía fantástica** volviendo a realizar el experimento con un vaso de cualquier líquido: refresco, zumo, leche..., y planteando la situación en el caso en que tomáramos cualquier cantidad de líquido y recipientes de distintas formas y tamaños.

De los **métodos combinatorios** vamos a aplicar el **análisis funcional**, para lo cual empezamos planteándoles las cuestiones: “¿para

qué sirve el agua?”. “¿Podría tener otros usos?”. “¿Para que sirve el recipiente en el que está el agua?”. “¿Podría ser más resistente?”. Estas cuestiones las trabajamos mediante un torbellino de ideas. El profesor anota todas las aportaciones, después se clasifican y se seleccionan las mejores ideas.

Mediante el **arte de relacionar**, el niño compara los dos vasos de agua colocados en distintos recipientes para decirnos si hay la misma cantidad o hay en uno más que en otro. Y compara también la capacidad de vasos, iguales a los anteriores, en los que ponemos diferentes líquidos: leche, zumo, refresco..., que después pasamos a recipientes distintos: vasos, botes, latas..., para que observe que todos tienen la misma cantidad de líquido.

Para emplear el método **solución de problemas** seguimos los pasos ya comentados:

### I. Definición y comprensión del problema.

♥ Definición del problema: “¿Cuál es la incógnita?”. “¿Cuáles son sus datos?”. Le hacemos ver que el elemento que está implicado es el agua que hay en cada uno de los dos recipientes.

♥ Análisis de las condiciones: “¿Cuál es la condición para que haya más, menos o igual cantidad de agua?”. “¿Qué hemos de hacer para que haya igual, más o menos agua en el recipiente largo y estrecho que en el bajo y ancho?”. “¿Tenemos bastante con esto?”.

### II. Desarrollo histórico del mismo.

♥ Inicio (si es conocido): “¿Cuándo surgió la necesidad de comparar la capacidad de dos recipientes?”.

♥ Evolución: “¿El planteamiento de este problema es análogo a alguno anterior?”. “¿Se podrá resolver como se resolvió entonces?”. “¿Hay más recursos en la actualidad que facilitan la solución?”.

♥ Estudio de problemas parecidos a lo largo de la historia: “Si has encontrado algún problema análogo a éste, ¿cómo se resolvió?”.

### III. Análisis de resultados a priori.

♥ “¿Qué resultados deseas obtener?”. “¿Cuándo sabrías si hay igual, más o menos agua en el recipiente bajo y ancho que en el alto y delgado?”. “Suponiendo que llegases a saber si hay igual, más o menos agua en el recipiente ancho y bajo que en el alto y delgado, ¿se podría

aplicar el proceso seguido a la solución de otros problemas?”. “¿Qué ventajas obtendremos cuando lleguemos a saber si hay igual, más o menos agua en el recipiente ancho y bajo que en el alto y delgado?”.

#### IV. Plan de ataque.

♥ Formas distintas de enfocar el problema: “¿De cuántas formas podrías saber si hay igual, más o menos agua en el recipiente ancho y bajo que en el alto y delgado?”. Para darles más posibilidades podríamos dejarles probetas, por si quieren utilizarlas. También podríamos dejarles dos cubos de playa que sean iguales, por si quisieran echar el agua de cada recipiente en un cubo y comparar si hay o no la misma cantidad. Les dejamos que propongan alternativas.

♥ Análisis de las mismas: “¿Qué operaciones tendrías que realizar en cada una de las alternativas?”. “¿Todas te conducen a la solución?”. Se analizan los recursos que requiere cada alternativa.

♥ Selección de las mejores alternativas: “¿Cuáles de ellas suponen menor esfuerzo?”. “¿Has utilizado todos los datos del problema?”. “¿Por qué éstas y no otras?”. Se selecciona la que suponga menos costo. Se distribuyen las tareas y se lleva a cabo la alternativa seleccionada.

♥ Pautas a seguir: “¿Qué pasos tienes que dar para saber si hay igual, más o menos agua en el recipiente ancho y bajo que en el alto y delgado?”. “¿en qué orden?”. “¿Podrías equivocarte?”. “¿cuándo?”.

#### V. Ejecución.

♥ Al llevar a cabo el plan que elegiste, razona cada uno de los pasos. “¿Puedes ver claramente que el paso es correcto?”. “¿Puedes demostrarlo?”. “¿Tienes que comprobar si has cometido algún error?”.

#### VI. Evaluación de resultados.

♥ Después de resolver el problema sería conveniente plantearnos las siguientes cuestiones: “¿los resultados son los deseados?”. “¿Puedes verificarlos?”. “¿Alguno de los pasos que diste era innecesario?”. “¿Podrías haberlo resuelto de forma más fácil?”. “¿Será necesario redefinir el problema o plantear otro problema más sencillo?”.

Evaluamos los resultados viendo si algo dificultó o favoreció el proceso. Planteamos la “retroalimentación”, redefiniendo el problema vaciando el agua en otro bote de distinta forma y echándola en tres vasos, y viendo si podríamos poner la misma cantidad de agua en otro recipiente.

## VII. Análisis de resultados a posteriori.

♥ Aplicaciones de nuestro problema resuelto en otros campos:  
“¿Puedes emplear el resultado en otros campos para resolver un problema esencialmente idéntico?”.

♥ El método puede servir para resolver problemas análogos:  
“¿Puedes emplear el método que hemos seguido para resolver algún problema análogo?”.

## VIII. Estudio del comportamiento de los individuos en cada uno de los pasos anteriormente descritos.

♥ Estudio del comportamiento de los individuos en relación al problema: “¿Qué comportamiento describen y cómo reaccionan los individuos frente al problema?”. Deseamos que el niño sea capaz de saber diferenciar mentalmente la cantidad de agua de la forma del recipiente; observando el comportamiento que tiene el niño frente al problema, nos daremos cuenta de si lo hemos conseguido o no.

Utilizando la técnica el **entorno** seguimos los pasos ya indicados:

**1. Propuesta, asimilación y definición de un problema:** Podríamos plantearles que busquen otros líquidos que no estén lejos de donde ellos se mueven y que les puedan servir para realizar una experiencia análoga a ésta. También les podríamos decir que busquen más “cacharros” que puedan contener líquidos.

**2. Idea de que el entorno más inmediato es nuestro mejor aliado.** Les dejamos claro que cerca de ellos hay muchas cosas que pueden serles útiles.

**3. Observar si algo de nuestro entorno puede resolver el problema.** Deben estar pendientes de observar todo lo que les rodea para poder quedarse con lo que vean o descartarlo.

**4. Comparar lo encontrado con el objeto del problema y sacar conclusiones.** Cuando piensen que algo que han encontrado les puede servir como líquido para realizar el experimento tienen que compararlo con el agua y aceptarlo o rechazarlo según puedan echarlo en los vasos y botes o no.

**5. Mejorar el resultado si es posible.** Si hemos encontrado una cosa que podemos echar en los recipientes antes utilizados, podemos ver si se puede poner dentro de un bote con la boca muy

pequeña o no. Si es necesario, podemos emplear embudos para ayudarnos.

Mediante la **biónica** nos van a ir diciendo algunos animales de los que conocen y que beban agua, unos que en una toma beban menos agua de la que había en uno de los tres vasitos, otros que en una toma beban tanta agua como teníamos en el recipiente al principio y otros que beban tanta agua como había en los dos recipientes juntos. Con todo esto están haciendo un **estudio detallado** de la cantidad de agua que son capaces de beberse en una toma los animales que conocen.

Amasando harina, agua y utilizando algún otro material, podríamos hacer uno de estos animales. Esto les sirve para **traducir las propiedades de los seres vivos a modelos** simbólicos.

Después podríamos sugerirles que articulen el animal construido para que pueda imitar el movimiento que hace dicho animal cuando bebe agua. Esto lo hacemos para que **desarrollen los modelos intentando reproducir las funciones de los seres vivos**.

Si nos metemos a fondo en el problema de los recipientes, de la cantidad de agua, o de otra sustancia, podemos, sin dificultad, aplicar la **sinapsis** ya que los niños, sin necesidad de decirles nada, estarán comparando la cantidad de líquido de todo lo que se encuentren con la del vaso de agua.

Aquí vendría la aplicación de la **serendipity** ya que como todo esfuerzo tiene su recompensa, seguro que se habrán topado con algún descubrimiento que no pretendían, como puede ser que en un recipiente cabe el doble de agua que en otro, con lo cual están pasando de la conservación, que era lo que estábamos trabajando, a la medida. Les pedimos que, si ése es el caso, nos lo cuenten.

Para la **ideogramación** vamos a recoger, mediante un torbellino de ideas, todos los líquidos que podamos tener. Se clasifican y se representan gráficamente mediante un pictograma estructural de síntesis.

El **circept** podríamos trabajarlo **eligiendo el tema** del agua.

En la **etapa imaginativa** se le da rienda suelta a la imaginación anotando las analogías, diferencias, semejanzas y oposiciones que encontremos.

Para la **etapa crítica** se seleccionan las mejores respuestas, se reordenan y clasifican por categorías. Hacemos una representación



gráfica mediante círculos, colocando en el interior del mismo círculo las ideas análogas.

Al final se **usan las analogías** para realizar un estudio detallado de las semejanzas y de las diferencias, que ya teníamos ordenadas y clasificadas, para aplicarle al agua todas las sugerencias que obtengamos.

Aplicamos la técnica **crear durmiendo**; para ello le decimos que piense cuál será el recipiente en donde quepa más agua. Después de haber trabajado el experimento durante el día, con objeto de **organizar la sesión de creatividad**, el niño **estará interesado en el tema**, y no es de extrañar que el niño sueñe con el agua y con todos los recipientes que pueden contenerla.

De todos modos se le sugiere que piense en el experimento antes de irse a dormir y **deje a mano papel y lápiz** para dibujar lo que se le ocurra.

**Al día siguiente se llevará a cabo el análisis por el grupo**; para lo cual le decimos que nos cuente lo que ha pensado o soñado.

Podemos llevar a cabo un **relax imaginativo**; seguimos para ello los pasos ya comentados:

**1. Ambientación:** Ponemos la clase en penumbra, ventilada y con una música suave.

**2. Relajación muscular:** Nos ponemos ropas cómodas y nos tumbamos en el suelo. Cerramos los ojos... Respiramos profunda y lentamente...

**3. Preparación para la narración:** Todos piensan en el experimento que hemos realizado con el agua.

**4. Narración:** Pensamos en todos los recipientes en donde podemos echar agua... ¡Hay muchas clases de recipientes en los que podemos echar agua!... A unos les cabe más agua y a otros menos. Tomamos dos vasos iguales y les echamos la misma cantidad de agua. Juanito, pasa el agua de este vaso a ese bote. Alejandro le dice: ¡para, que se derrama!... Juanito comenta: al bote le cabe menos agua que al vaso.

La profesora pone el contenido de un vaso en otro bote. Alejandro dice: ¡cabe toda el agua!... ¡Cómo es posible, pero si el bote que ha cogido la profesora es más bajo! A lo que Juanito alega: ¡claro, porque es

más ancho! Para ver si a un recipiente le cabe más agua tengo que ver, además de su altura, su anchura...

Ahora la profesora toma de nuevo un vaso de agua igual al que tenía al principio, y otro bote muy largo. Dice Juanito: ¡a ese bote le cabe más agua que al anterior!... La profesora vacía el agua del vaso en el bote. Este se llena. ¡Cualquiera diría, le ha cabido la misma cantidad de agua!...

Ahora la profesora pone el agua del vaso que no había vaciado en tres botes pequeños. Juanito dice: ¡ahora sí hay más agua en los tres botes que en el vaso!... Alejandro le pregunta: ¿por qué? Responde Juanito: ¡pues porque son tres!... Le dice Alejandro: ¡otra vez, pero si la profesora no ha puesto más agua que la que había al principio!... A lo que Juanito comenta: ¡es verdad!... Hasta que no añada agua no habrá más cantidad.

**5. Vuelta a la realidad:** La profesora da un chasquido de dedos y todos volvemos a la realidad.

**6. Aplicaciones didácticas:** Al final llegamos a la conclusión de que a un bote le cabrá más cantidad de agua si es ancho y alto a la vez. Si el bote es estrecho y bajo tendrá menor capacidad. Si ponemos una misma cantidad de agua en recipientes con distintas formas, o en varios recipientes, no aumenta ni disminuye la cantidad de agua.

La técnica de **escenarios** se podría utilizar también. Seguimos para ello los pasos ya indicados anteriormente:

i) **Planteamiento actual y análisis:** Se plantea si les parece que es necesaria el agua, y si en la actualidad hay recipientes que nos permiten transportarla de forma cómoda, que no pesen y sin problema de que se rompan.

ii) **Reflexión sobre lo que ocurrirá en el futuro:** Pensamos si en el futuro sería posible tener otras sustancias que sean más necesarias que el agua y envases, para el agua y para los líquidos, que no pesen nada y que no tengan problemas de rotura.

iii) **Selección de las mejores soluciones:** De todas las soluciones se seleccionan las mejores y, si es posible, se llevan a cabo.

Por **síntesis creativa** orientaríamos los pasos a seguir hasta llegar al slogan, que tendría que ser: “La forma y el tamaño del recipiente influye en su capacidad”.

No es necesario trabajar una misma actividad con todas las técnicas de Metodología Creativa, ya que sería muy pesado hacerlo, pero sí podemos elegir las partes de cada técnica que nos puedan ser de más utilidad para conseguir nuestro objetivo. Por otro lado, al realizar varias actividades es bueno cambiar de técnica para que el niño no se aburra.

### Ejercicios:

1º El alumno-profesor debe comprobar las respuestas de sus alumnos de prácticas en cada una de las actividades anteriores, empleando alguna técnica de Metodología Creativa.

2º Teniendo en cuenta las actividades anteriores, el alumno-profesor debe inventarse alguna actividad que pueda ayudar al niño a adquirir la idea de conservación y transitividad. Utilizando alguna de las técnicas de Metodología Creativa para plantearse a tus alumnos.

3º Prueba a plantearle a los niños alguna actividad de las que tú llevabas a cabo antes de conocer las técnicas de Metodología Creativa. Utiliza, en este caso, alguna técnica de Metodología Creativa y compara los resultados que antes obtenías con los de ahora.

4º El alumno-profesor deberá plantear ejercicios con cada una de las magnitudes que puede trabajar el niño en Educación Infantil e intentar trabajarlos con las distintas técnicas de Metodología Creativa.



### **III. DISEÑO Y DESARROLLO DEL ESTUDIO EMPÍRICO**



## CAPÍTULO 4

# Diseño y recogida de datos

### 4.1. Introducción

En esta investigación empírica se va a llevar a cabo un estudio descriptivo y comparativo sobre las variaciones que experimentan:

- ⊙ la opinión que tienen los alumnos sobre las Matemáticas,
- ⊙ los conocimientos que consideran que debe tener cualquier profesional de la enseñanza para proponer actividades a los niños de Educación Infantil,
- ⊙ la exactitud con que definen los conceptos de magnitud y de medida de una magnitud,
- ⊙ el número de magnitudes medibles y no medibles que citan,
- ⊙ el número de unidades de medida que utilizan para medir las magnitudes comentadas,
- ⊙ la opinión que tienen sobre si “las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para trabajar con los niños de Educación Infantil,
- ⊙ la creatividad, la precisión, el número de magnitudes, el número de unidades de medida... que los alumnos utilizan para proponer las actividades a los niños de Educación Infantil,
- ⊙ la utilidad de las actividades propuestas, y la precisión con que expresan dicha utilidad,
- ⊙ la necesidad de conocer mejor el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa.

Vamos a trabajar, por tanto, con medidas descriptivas, gráficos, estudio de distribuciones, porcentajes, que pretenden responder a la pregunta: ¿qué sucede?

Por otro lado, se realiza un estudio comparado entre los grupos generados por diversas variables de clasificación, entre otras: género, año de realización, curso... Para este cometido se emplearán pruebas



estadísticas adecuadas a la comparación de grupos: Modelo Lineal General, como extensión del Análisis de Varianza, y pruebas no paramétricas atendiendo a la escala de medida ordinal (no métrica) de las variables que se analizan. Intentaremos en este caso responder a la siguiente pregunta: ¿qué diferencias se producen?

Este trabajo empírico se organiza en torno a tres ejes: Evaluación Inicial, Evaluación Final y Estudio Estadístico. Así, la recogida de los datos se realiza en dos momentos: inicialmente, antes de la explicación de los conceptos pertinentes, y posterior, una vez explicados. En este sentido, también podría calificarse nuestra investigación empírica de estudio experimental, dado que introducimos un momento de “tratamiento”. Sin embargo, no podemos afirmar que reúna las características estrictas de un trabajo experimental, tales como la asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones de tratamiento o el control de las posibles fuentes que invalidan la validez interna: maduración, historia, regresión a la media, etc. Además, como se verá en la medida posterior que realizamos se produce una alta mortandad experimental ya que el nivel de respuestas en la Evaluación Final es mucho menor.

Por todo ello, tal y como hemos indicado, estamos más conformes en valorar nuestro trabajo empírico como descriptivo y comparativo, y en ningún caso causal e inferencial. Habrá que entender los resultados y las conclusiones que más adelante se consiguen como indicadores de lo que sucede con la muestra específica que se trabaja.

Igualmente, no ponemos el acento en el estudio de las propiedades técnicas de los instrumentos (cuestionarios) que se elaboran. Estos se emplean sencillamente como aproximación a la realidad de los conceptos que estudiamos en la muestra de nuestros alumnos. De ahí que no enfatizamos un proceso de fiabilización y validación interna con expertos de dichos instrumentos. Hubiera sido necesario, claro está, en ese caso, trabajar con muestras piloto, estudiar la ampliación de esas muestras, ver las posibilidades de generalización, etc. Ese planteamiento va mucho más allá del trabajo específico realizado con nuestros alumnos.

## 4.2. Evaluación Inicial

Con el nombre de Evaluación Inicial —también podríamos llamarla Pretest— designamos a la parte experimental de nuestra investigación que tiene por objetivo comprobar en qué situación se encuentran, respecto de su interés por la Matemática en general y por el tema “las Magnitudes y su Medida” en particular, los alumnos que son objeto de nuestro estudio.

### 4.2.1. Problema

Las instituciones escolares han ido recogiendo el tema “las Magnitudes y su Medida” en sus programas de Matemática Elemental de forma sistemática —aunque no en la Matemática Universitaria—, si bien en el último cuarto del pasado siglo se ha conseguido estructurar algebraicamente, no por esto se han logrado resolver los problemas que conlleva su enseñanza-aprendizaje. Pensamos que puede ser debido, por un lado, a que no se le han transmitido estos conocimientos al maestro durante su periodo formativo, ya que la asignatura de Matemáticas en la diplomatura ha pasado de ser obligatoria, hasta 1992, a ser optativa, por lo menos, para los alumnos de Magisterio de Málaga, en los actuales planes de estudio; además no hay ninguna asignatura troncal, a nivel de Magisterio, no sólo de Málaga sino de toda España, con contenidos matemáticos, y por otro a que no se ha motivado suficientemente al alumno ni al alumno-profesor y no se han analizado en profundidad las dificultades que comportan el dominio de los contenidos y su enseñanza-aprendizaje.

Recordamos la pregunta que hicimos en la Introducción al hablar de la Creatividad y del dominio de los Contenidos Científicos: ¿Se puede ser creativo a la hora de explicar un concepto si éste no se conoce? Con esto entramos en el núcleo del problema y nos planteamos: **si conseguimos que los maestros dominen el tema “las Magnitudes y su Medida”, ¿serán más originales a la hora de aplicar las técnicas de Metodología Creativa en el aula?** En caso afirmativo, creemos que esto posibilitará a los niños evolucionar mucho mejor hacia la comprensión de “las Magnitudes y su Medida”, lo que repercutirá favorablemente en su desenvolvimiento en la vida.

En la Introducción hemos comentado la necesidad de iniciar al niño desde edades tempranas en “las Magnitudes y su Medida” y la repercusión que esto tiene en su desenvolvimiento en la vida, pues son muchas las medidas que todos tenemos que tomar a lo largo de nuestra vida, cualquiera que sea la profesión que elijamos para vivir. Además los instrumentos que se utilizan en la actualidad son cada vez más sofisticados. Es por lo que no podemos dejar la preparación de los niños para cuando sean mayores, sino que desde las primeras edades hay que ir iniciándolos en ellas.

Por otro lado, ya hemos comentado en la Introducción la necesidad que tiene el profesor de estar bien preparado pedagógica y psicológicamente y de dominar el tema que quiera explicar a sus alumnos a un nivel superior al que lo vaya a transmitir. Todavía más si de lo que

estamos hablando es de la explicación de un tema de Matemáticas, asignatura que no es del agrado de todos los alumnos-profesores.

Vamos a intentar demostrar experimentalmente que una persona, antes de dominar el tema “las Magnitudes y su Medida”, tiene más dificultad para proponer actividades, a nivel de Educación Infantil, que sean interesantes, formativas y originales, que cuando lo domina. Todo esto pensamos que nos puede servir para validar que el alumno mejor preparado matemáticamente es más apto para explicar un tema de esta materia —o por lo menos para proponer actividades—, incluso en Educación Infantil, que otro que no lo domina. Pretendemos con nuestra investigación poner de relieve esta circunstancia que, por otro lado, para nosotros no ofrece ninguna duda.

### 4.2.2. Hipótesis

**Hipótesis 1.** El alumno-profesor de Educación Infantil, el de otra especialidad de Magisterio, el que cursa la licenciatura en Matemáticas y el que cursa otra diplomatura o licenciatura no tiene ideas teóricas claras de lo que es una magnitud ni de lo que es la medida de una magnitud, aunque sepa poner ejemplos de ellas. El alumno-profesor no tiene claro si son magnitudes ciertos conceptos parecidos a otros que sí lo son, que el niño emplea en su lenguaje habitual e incluso puede medir (como es la temperatura), y otros de los que aún hoy no se ha encontrado ningún instrumento apropiado para realizar su medición, como puede ser el cariño, el dolor, la bondad, la amistad, etc.

**Hipótesis 2.** Al iniciar el periodo escolar, el niño de Educación Infantil no tiene adquiridas las nociones de conservación, transitividad y unidad de medida. Es en esta etapa donde el niño empieza a asimilar estas nociones, y la práctica de la medida contribuye a facilitar su adquisición.

**Hipótesis 3.** Un conocimiento profundo sobre “las Magnitudes y su Medida” hace que las actividades que se propongan a los niños de Educación Infantil sean más creativas y que puedan ser expresadas con mayor claridad y precisión.

**Hipótesis 4.** Los alumnos que conocen en profundidad los contenidos matemáticos y las técnicas de creatividad proponen unas actividades más creativas (son mejores didactas).

### 4.2.3. Objetivos

**Objetivo 1.** Comprobar si los alumnos de Magisterio, los de Matemáticas y los de otras Facultades tienen una idea clara de lo que es una magnitud, de lo que es la medida de una magnitud y si saben poner ejemplos de ellas.

**Objetivo 2.** Fomentar distintas situaciones, de modo experimental, para comprobar quién es mas apto para proponer actividades creativas sobre “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil: una persona con conocimientos pedagógicos y psicológicos o una con conocimientos matemáticos.

**Objetivo 3.** Analizar en qué medida el conocimiento por parte del educador de:

a) los contenidos matemáticos

b) las técnicas de metodología creativa

puede ayudar a proponer actividades interesantes, originales y con una terminología precisa para facilitar al alumno de Educación Infantil el redescubrimiento de las Magnitudes y su Medida.

### 4.2.4. Diseño y Tratamiento

Tratamos de realizar, con un grupo de alumnos de 1º, 2º y 3º, de la Facultad de Ciencias de la Educación, de Magisterio, especialidad de Educación Infantil y de otras especialidades y con un grupo de alumnos de la Facultad de Ciencias, de Matemáticas y de otras Facultades, una serie de actividades sobre Magnitudes y su Medida con objeto de estudiar las aptitudes de dichos estudiantes a la hora de proponer actividades que puedan ser formativas, interesantes y originales para un niño de Educación Infantil (de 0 a 6 años).

Para ello empezamos confeccionando una primera encuesta y para corregir posibles fallos que pudiera tener, una vez elaborada, hicimos una prueba piloto pasándosela a los alumnos que siguieron las asignaturas optativas de Magisterio: “Introducción al Álgebra” o “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil”, el curso 2001-2002. Esto nos sirvió para corregir los errores que encontramos.

Al objeto de reforzar la validez del instrumento, después, se la mostramos a un Comité de Expertos formado por distintos profesionales que, según su especialidad, tuvieran alguna relación con el tema. Este Comité estuvo formado por profesores doctores en distintas ramas del saber y que son los que figuran a continuación:

Dr. D. José Antonio Gallardo Cruz, Catedrático de Psicología de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,

Dra. D<sup>a</sup>. Julia García Galisteo, Titular de Estadística de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga,

Dra. D<sup>a</sup>. Esther García González, Titular de Álgebra de la Universidad Complutense de Madrid,

Dra. D<sup>a</sup>. Angeles Gervilla Castillo, Catedrática de Didáctica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,

Dr. D. Miguel Gómez Lozano, Titular de Álgebra de la Facultad de Ciencias la Universidad de Málaga,

Dr. D. Cristóbal Gonzáles Alvarez, Titular de Lengua de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,

Dra. D<sup>a</sup>. Emelina López González, Titular de Didáctica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,

Dr. D. Benjamín Mantecón Ramírez, Catedrático de Lengua de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,

Dr. D. Aniceto Murillo Mas, Titular de Geometría de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga,

Dra. D<sup>a</sup>. Carmen Prada, Titular de Didáctica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga,

Dra. D<sup>a</sup>. Esperanza Sánchez Campos, Titular de Álgebra de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga y

Dra. D<sup>a</sup>. Mercedes Siles Molina, Titular de Álgebra de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga.

Además bastantes profesores de Magisterio que trabajan en Educación Infantil nos han dado también su opinión sobre la encuesta. No ponemos el nombre de cada uno de ellos por temor a olvidarnos de alguno, pero su colaboración ha sido muy importante.

Procurando tener en cuenta todas las opiniones que de ellos recibimos, ampliamos y reelaboramos la encuesta corrigiendo todos los fallos que detectaron.

Pasamos de nuevo la encuesta a los alumnos que cursaron las asignaturas optativas de Magisterio: Introducción al Álgebra y Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil el curso 2002-2003.

Seguimos reelaborando la encuesta haciendo mejoras en ella y corrigiendo otros nuevos fallos que observamos al recogerla. El resultado es la encuesta que aparece a continuación, que es la que pasamos a los dos grupos que a continuación comentamos los cursos 2003-2004, 2004-2005 y 2005-2006..

En resumen, los pasos seguidos en todo el proceso pueden quedar como se refleja en el esquema siguiente:

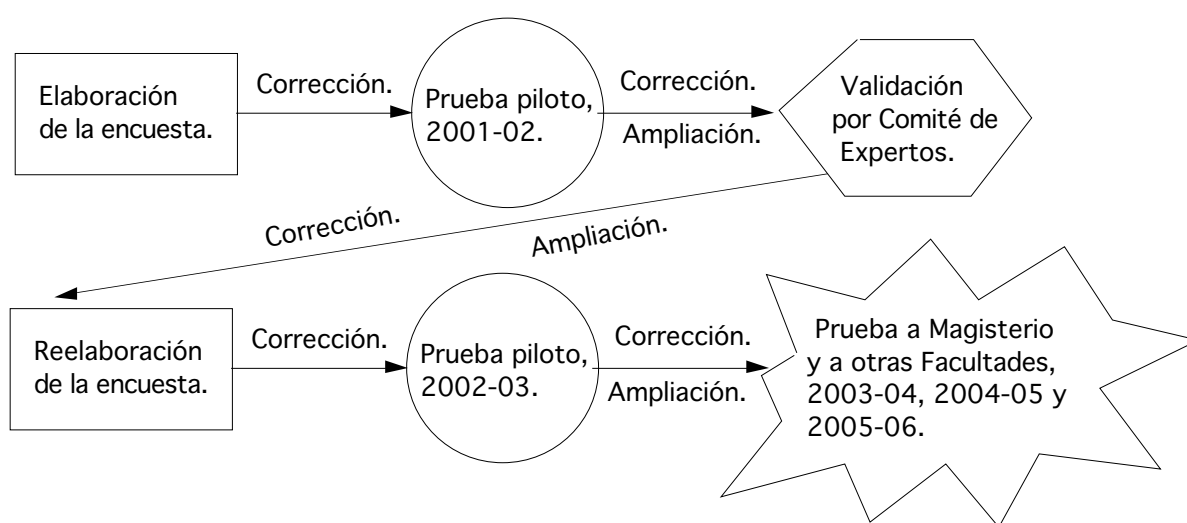


Figura 49: Proceso seguido con la encuesta.

#### 4.2.5. Muestra

Escogemos el grupo de alumnos que cursan las asignaturas optativas de Magisterio: “Introducción al Álgebra” o “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil”, entre los que hay alumnos de la Facultad de Ciencias de la Educación y de otras Facultades, Ciencias entre ellas. El objeto es descubrir quienes pueden estar más preparados para proponer estas actividades. Para ello se comparan los siguientes alumnos:

a) de 1º, 2º y 3º de Magisterio, especialidad de Educación Infantil y de otras especialidades, algunos están a punto de terminar Magisterio, sobre todo los de 3º, y por tanto ya tienen unos conocimientos de Psicología y Pedagogía suficientes para actuar como profesores de Educación Infantil, pues en el segundo cuatrimestre de este año realizan

su segundo periodo de Prácticas y han cursado distintas asignaturas de estas materias, aunque quizá les falten conocimientos matemáticos.

b) de varios cursos de Matemáticas, algunos están a mitad de la carrera de Matemáticas o más, y por tanto con conocimientos más que suficientes en esta materia para proponer dichas actividades, aunque les pueden faltar conocimientos de Psicología y Pedagogía.

c) de otras Facultades, con o sin conocimientos matemáticos, y pensamos que les pueden faltar también conocimientos de Psicología y Pedagogía.

## 4.2.6. Variables

Vamos a ir poniendo en negrita cada una de las variables que consideremos que se presentan, en función de la descripción de lo que pretendemos conocer.

1. Queremos saber a lo largo de toda la encuesta si su **apreciación sobre la seguridad o inseguridad de las respuestas** coincide con que éstas sean acertadas o no. Aquí tenemos una variable dependiente, en este caso su apreciación sobre la seguridad o inseguridad de las respuestas depende de la preparación previa que posea.

2. También nos interesa conocer el “modo en que responde” a la encuesta, **con los siguientes niveles** de respuesta:

- a) **la hace individualmente** sin consultar con nadie ni con nada,
- b) **consulta libros**,
- c) **le pregunta a alguna persona** de su entorno
- d) **se reúnen entre ellos**,
- e) **otra situación**,

ya que si lo que pretendemos es que plante tres actividades para niños de Educación Infantil que sean formativas, interesantes y originales, no podemos negarle la posibilidad de que adopte alguna de estas opciones, como cualquier profesional que quiera proponer actividades para los niños de su clase puede:

- a) **hacerlo él sólo** sin consultar ningún material ni preguntar a ninguna persona, si considera que tiene conocimientos suficientes para ello,
- b) **consultar algún libro** para sacar algunas ideas que le puedan ayudar a poner él las actividades,



- c) preguntarle a algún compañero que diera esta misma asignatura el curso anterior o a otra persona preparada,
- d) reunirse con los compañeros que dan la misma asignatura,
- e) otra situación.

En este caso tenemos otra variable dependiente, pues depende de su preparación, de su seguridad, de su sociabilidad, etc.

3. Empezamos, en la pregunta 1, planteándole unas cuestiones para conocer sus **actitudes hacia las Matemáticas**. Esta sería otra variable dependiente, en este caso depende de todo el proceso de aprendizaje que el alumno-profesor hubiera tenido anteriormente.

Como se ve trabajamos entonces con tres variables dependientes.

A continuación, en la pregunta 2, le hacemos que reflexione sobre los **conocimientos matemáticos, pedagógicos, psicológicos y de técnicas de Creatividad** que debe tener como profesores para poder plantearles una serie de actividades a los niños de Educación Infantil para que comprendan algunas nociones de Matemáticas. Tenemos una variable independiente.

En la pregunta 3 le pedimos que, sin utilizar ningún material, proponga tres actividades para los niños de Educación Infantil. El objetivo de esta pregunta es que aunque sea capaz de proponer las actividades, se de cuenta de que, si lo hace sin consultar nada, le puede faltar precisión, originalidad, etc.

En la 4 le ponemos distintos conceptos para que diferencie los que sean magnitudes medibles o no, los que sean medibles que sean o no magnitudes y los que, imaginando que en un futuro pudieran ser medibles, que sean o no magnitudes. Con esta pregunta queremos que se cuestione si todas las magnitudes son medibles y si todas las cosas que son medibles son magnitudes.

Con las preguntas 5 y 6 le hacemos pensar sobre el concepto que tiene de magnitud y de medida de una magnitud. El objetivo es que reflexione sobre los conceptos acerca de los que pretende proponer actividades a los alumnos de Educación Infantil, ya que es lógico que antes de proponer ninguna actividad, se planté de qué está hablando. Además, a la hora de precisar dichas actividades le pudo fallar el conocimiento de dichos conceptos y, entre otras cosas, puede llegar a darse cuenta de que no se debe definir magnitud a partir de su medida.

En la 7 le pedimos ejemplos de magnitudes que sean medibles y que indique alguna unidad de medida y magnitudes que no sean medibles

y que diga por qué. Nos hemos atrevido a preguntarle sobre magnitudes que no sean medibles, a pesar de considerar que esta pregunta es mucho más complicada de responder, para hacer que se cuestione las definiciones que se encuentra de los conceptos de magnitud y de medida.

Con la pregunta 8 queremos que razone si “las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para Educación Infantil, ya que si considera que no es un tema apropiado tendríamos que concluir aquí el cuestionario y si lo es, se debería seguir adelante.

Con esto pasamos a la pregunta 9 en la que le cuestionamos cuáles son las magnitudes que considera apropiadas para ser trabajadas en Educación Infantil y con qué unidades de medida. Esta pregunta se la hacemos para que sea él quien decida sobre las magnitudes que va a trabajar en la pregunta siguiente.

La pregunta 10 podríamos considerar que es la fundamental de toda la encuesta, en ella le pedimos que proponga tres actividades sobre cada una de las magnitudes y sus medidas que ha considerado idóneas para trabajar en Educación Infantil. Le decimos que nos indiquen cómo va a realizar las actividades para que precise un poco más, ya que con ello podemos observar mejor si sigue o no alguna técnica de Metodología Creativa.

Le preguntamos en 11 sobre la utilidad de cada una de las actividades que ha planteado, para que el fin no sea sólo entretener al niño, sino iniciarlo en ciertos conocimientos que en el futuro van a serles de mucha utilidad.

En la pregunta 12 le planteamos si considera o no que le falta dominio del tema “las Magnitudes y su Medida” para poder proponer actividades al niño que tengan repercusión en su futuro. Todos sabemos que la base de nuestros pensamientos está en las acciones que llevamos a cabo, esto pasa en todos los conceptos que vamos adquiriendo en la vida corriente, en particular en los matemáticos. Es por esto que tenemos que planificar muy bien las actividades que tenemos que llevar a cabo con nuestros alumnos, ya que todas ellas les servirán de base para las ideas (abstracciones) que tienen que ir incorporando poco a poco. También es cierto que un profesor, cuanto más domina un tema, mejores actividades puede proponer a sus alumnos y con ello dirigirlos mucho mejor hacia la obtención de una idea.

Con la pregunta 13 queremos que vea que quizá necesite conocer las Técnicas de Metodología Creativa para proponer actividades que sean más interesantes y originales.

En la 14 le proponemos contarle el tema “las Magnitudes y Medida” y las Técnicas de Metodología Creativa para volver a plantearle cuestiones análogas.

Lo dicho anteriormente podemos recogerlo en el esquema siguiente:

| PREGUNTAS.                                                                                                                                                                                                                        | OBJETIVOS.                                                                                                                                                                                                                                                                 | ACTIVIDADES/<br>TAREAS.                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Pregunta 1:</b> Marca hasta qué punto estás de acuerdo en las siguientes expresiones:                                                                                                                                          | Conocer sus actitudes hacia las Matemáticas.                                                                                                                                                                                                                               | Que seleccione, entre varias expresiones, aquéllas con las que esté de acuerdo.                                                                                                        |
| <b>Pregunta 2:</b> Si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años) para que comprendan algunas nociones Matemáticas, crees que:                                                           | Reflexionar sobre los conocimientos matemáticos, pedagógicos, psicológicos y de técnicas de creatividad que debe tener como profesor para poder plantearle una serie de actividades a los niños de Educación Infantil para que comprendan algunas nociones de Matemáticas. | Que seleccione, entre varias expresiones, aquéllas con las que esté de acuerdo.                                                                                                        |
| <b>Pregunta 3:</b> ¿Se te ocurren algunas actividades para poder realizar con niños de Educación Infantil, de 0 a 6 años, sobre “las Magnitudes y su Medida”, sin consultar ningún material ni preguntarle a nadie? Plantea tres. | Darse cuenta de que si propone las actividades sin consultar nada le puede faltar precisión, originalidad, etc.                                                                                                                                                            | Que proponga tres actividades para los niños de Educación Infantil sin utilizar ningún material.                                                                                       |
| <b>Pregunta 4:</b> Señala si determinados conceptos son magnitudes medibles, no medibles, no son magnitudes, serían magnitudes si fuesen medibles, etc.                                                                           | Cuestionarle si todas las magnitudes son medibles y si todas las cosas que son medibles son magnitudes.                                                                                                                                                                    | Que señale las opciones que considere oportunas.                                                                                                                                       |
| <b>Pregunta 5 y 6:</b> ¿Qué es una magnitud? ¿A qué llamamos medida de una magnitud?                                                                                                                                              | Reflexionar sobre los conceptos acerca de los que pretende proponer actividades a los alumnos de Educación Infantil.                                                                                                                                                       | Le hacemos pensar sobre el concepto que tiene de magnitud y de medida de una magnitud.                                                                                                 |
| <b>Pregunta 7:</b> Si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años) para que comprendan algunas nociones Matemáticas, crees que:                                                           | Hacerle que se cuestione las definiciones que se encuentran en los conceptos de magnitud y de medida.                                                                                                                                                                      | Le pedimos ejemplos de magnitudes que sean medibles y que indiquen alguna unidad de medida y magnitudes que no sean medibles y que digan por qué.                                      |
| <b>Pregunta 8:</b> ¿Crees que las Magnitudes y su Medida es un tema apropiado para Educación Infantil?, ¿por qué?                                                                                                                 | Razonar si las Magnitudes y su Medida es un tema apropiado para Educación Infantil.                                                                                                                                                                                        | Que compare los conceptos de magnitud y de medida de una magnitud con las actividades que pueden realizar los niños de Educación Infantil para ver si se pueden trabajar a este nivel. |

|                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Pregunta 9:</b> ¿Qué magnitudes se pueden empezar a trabajar en Educación Infantil? ¿Cuándo? ¿Con qué unidades de medida? ¿Por qué?                                                                                 | Decidir sobre las magnitudes que va a trabajar en la pregunta siguiente.                                                                                                                                                                                                     | Que nombre las magnitudes que se pueden empezar a trabajar en Educación Infantil, a qué edad y con qué unidades, justificando la respuesta.  |
| <b>Pregunta 10:</b> Plantea, con cada una de las magnitudes y las medidas señaladas, tres actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Conviene que precises cómo vas a realizar dichas actividades. | Precisar un poco más para poder observar mejor si sigue o no alguna técnica de Metodología Creativa.                                                                                                                                                                         | Que proponga tres actividades sobre cada una de las magnitudes y sus medidas que ha considerado idóneas para trabajar en Educación Infantil. |
| <b>Pregunta 11:</b> ¿Para qué le sirven al niño cada una de las actividades que le has planteado?                                                                                                                      | Plantearse que el fin no es sólo entretener al niño, sino iniciarlo en ciertos conocimientos que en el futuro le van ser de mucha utilidad.                                                                                                                                  | Que indique la utilidad de cada una de las actividades propuestas.                                                                           |
| <b>Pregunta 12:</b> ¿Crees que necesitas saber mejor el tema “Magnitudes y Medidas” para poder proponer actividades que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro?                                            | Poder proponer actividades a los niños que tengan repercusión en el futuro. Planificar muy bien las actividades que tiene que llevar a cabo con los niños, ya que todas ellas les servirán de base para las ideas (abstracciones) que tienen que ir adquiriendo poco a poco. | Que señale la opción que considere idónea.                                                                                                   |
| <b>Pregunta 13:</b> ¿Necesitas comprender las técnicas de creatividad para que las actividades que propongas sean más originales?                                                                                      | Conocer las técnicas de metodología creativa para proponer actividades que sean más interesantes y originales.                                                                                                                                                               | Que señale la opción que considere idónea.                                                                                                   |
| <b>Pregunta 14:</b> ¿Te gustaría que te explicásemos el tema y las técnicas de metodología creativa para volver a plantearte cuestiones análogas?                                                                      | Contarle el tema “las Magnitudes y Medida” y las Técnicas de Metodología Creativa para volver a plantearle cuestiones análogas.                                                                                                                                              | Que señale la opción que considere idónea.                                                                                                   |

**Tabla 23: Preguntas, objetivos y actividades/tareas.**

### 4.2.7. Encuesta

Apellidos y nombre:

|       |        |            |          |
|-------|--------|------------|----------|
| Sexo: | Hombre | Bachiller: | Ciencias |
|       | Mujer. |            | Letras   |

Curso:                      Especialidad:

Edad:

A continuación te plantearemos una serie de cuestiones. Te agradeceríamos que, por favor, las respondieras con la mayor precisión posible, marcando una o varias de las opciones indicadas.

Para responderlas puedes **consultar libros de cualquier nivel o preguntar a quien creas oportuno**, salvo que se te indique lo contrario.

No olvides señalar después de cada pregunta, si te lo pidiera, de qué medios te has servido para contestarla, marcando y completando, si ése es el caso, una o varias de las opciones que se te indican.

Indicamos con: M.A. que estás “Muy de acuerdo”; B.A. “Bastante de acuerdo”; P.A. “Poco de acuerdo” y N.A. “Nada de acuerdo”. Pon una cruz en el recuadro intersección de la fila y la columna del apartado —o de los apartados— con los que estés de acuerdo.

1° Marca hasta qué punto estás de acuerdo en las siguientes expresiones:

|                                                                                            | Muy de acuerdo. | Bastante de acuerdo. | Poco de acuerdo. | Nada de acuerdo. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------|------------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles.                                                             |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son odiosas.                                                               |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son imprescindibles.                                                       |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son "un tostón".                                                           |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son interesantes.                                                          |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son precisas.                                                              |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son engorrosas.                                                            |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son formativas.                                                            |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas no son prácticas.                                                          |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son divertidas.                                                            |                 |                      |                  |                  |
| Me gustan las Matemáticas.                                                                 |                 |                      |                  |                  |
| El calificativo - los calificativos- que mejor le va -les van- a las Matemáticas es -son-: |                 |                      |                  |                  |
| Para mi las Matemáticas son:                                                               |                 |                      |                  |                  |

**2° Si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones Matemáticas, crees que:**

|                                                                                                                                                                  | M.A. | B.A. | P.A. | N.A. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|
| Debes dominar totalmente las Matemáticas: ser licenciado en Matemáticas.                                                                                         |      |      |      |      |
| Debes dominar a un nivel aceptable, un poco más de lo que se da en Bachillerato, los contenidos matemáticos que tengan alguna repercusión en Educación Infantil. |      |      |      |      |
| Con los conocimientos matemáticos que aprendiste en el Instituto tienes bastante.                                                                                |      |      |      |      |
| Debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio.                                                                                  |      |      |      |      |
| Debes dominar totalmente la Didáctica: ser licenciado en Pedagogía.                                                                                              |      |      |      |      |
| Debes conocer la parte de Didáctica que tenga alguna repercusión en Educación Infantil.                                                                          |      |      |      |      |
| No es necesario saber Didáctica, con la intuición que tiene cualquier persona para enseñar es suficiente.                                                        |      |      |      |      |
| Debes tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática.                                                                                                   |      |      |      |      |
| Debes conocer la Didáctica de la Matemática que tenga alguna repercusión en Educación Infantil.                                                                  |      |      |      |      |
| No es necesario saber nada de Didáctica de la Matemática, sabiendo algo de Matemáticas y de Didáctica es suficiente.                                             |      |      |      |      |



|                                                                                                | M.A. | B.A. | P.A. | N.A. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|
| Debes dominar totalmente la Psicología: ser licenciado en Psicología.                          |      |      |      |      |
| Debes conocer la Psicología que te permita entender al niño de esas edades.                    |      |      |      |      |
| No se necesita ningún conocimiento psicológico, con la intuición que da la vida es suficiente. |      |      |      |      |
| Sería bueno conocer las técnicas de metodología creativa.                                      |      |      |      |      |
| No se necesita ninguna técnica de metodología creativa, todos somos algo creativos.            |      |      |      |      |
| Otros (explica lo que quieras)                                                                 |      |      |      |      |

En las preguntas que vienen a continuación, además de responderlas, escribe delante del número de cada una de ellas una B si tienes seguridad de que la respuesta que has dado está bien y una D si tienes duda.

Pon una cruz en el recuadro de la izquierda del apartado —o de los apartados— con los que estés de acuerdo.

**3° Plantea tres actividades que podrías realizar con niños de Educación Infantil, de 0 a 6 años, sobre “las Magnitudes y su Medida”, sin consultar ningún material ni preguntarle a nadie.**

---

#### 4º Señala las opciones que consideres oportunas.

**El cariño:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**La temperatura:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**La alegría:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**El dolor:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**La fama:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**El interés:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 ....., que me dijo .....  
 .....  
 ....., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....

..... por .....

.....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

## 5º ¿Qué es una magnitud?

Al contestar la pregunta anterior, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la  
 página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 .., que me dijo .....  
 .....  
 .., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

d) Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

e) Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

## 6° ¿A qué llamamos medida de una magnitud?

Al contestar la pregunta anterior, puedo afirmar que:

a) Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

b) He usado el libro .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la  
 página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

c) Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 .., que me dijo .....  
 .....  
 .., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

d) Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....

..... y se nos ha  
ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

**7° Da ejemplos de magnitudes medibles y no medibles. De las medibles, indica cómo se miden y con qué unidades, y de las no medibles explica la razón.**

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
.....  
..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la  
página).  
O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
....., que me decía .....  
.....  
.....

y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 ...., que me dijo .....  
 .....  
 ...., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**8º ¿Crees que “las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para Educación Infantil?; ¿por qué?**

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la  
 página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....



.....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 ....., que me dijo .....  
 .....  
 ....., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

**9º ¿Qué magnitudes se pueden empezar a trabajar en Educación Infantil?; ¿cuándo?; ¿con qué unidades de medida?; ¿por qué?**

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido.....  
 .....  
 .....

c) Le he preguntado a la persona .....  
.. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
..., que me dijo .....  
....., y he respondido: .....  
sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
..... o cambiando parte de .....  
..... por .....  
.....

d) Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
..... y se nos ha  
ocurrido esto.

e) Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

**10º Plantea, con cada una de las magnitudes y las medidas señaladas, tres actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Conviene que precises cómo vas a realizar dichas actividades.**

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).  
O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
....., que me decía .....  
.....  
y lo he cambiado por .....  
.....  
..... o le he añadido.....  
.....  
.....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
.. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
....., que me dijo .....

.....  
 ....., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**11º ¿Para qué les sirven al niño cada una de las actividades que le has planteado?**

Al contestar la pregunta anterior, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la  
 página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

c) Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 ...., que me dijo .....  
 ..... , y he respondido: .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....

d) Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

e) Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

**12º ¿Crees que necesitas saber mejor el tema “las Magnitudes y su Medida” para poder proponer actividades que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro?**

Sí.  
 No.  
 Otros.

---

**13º ¿Necesitas comprender las técnicas de Metodología Creativa para que las actividades que propongamos sean más originales?**

Sí.  
 No.  
 Otros.

---

**14º ¿Te gustaría que te explicásemos el tema y las técnicas de Metodología Creativa para volver a plantearte cuestiones análogas?**

Sí.  
 No.  
 Otros.

### 4.3. Evaluación Final

Después de haberse estudiado el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa, volvemos a proponer, a los mismo grupos de alumnos: de 1º, 2º y 3º de Magisterio, especialidad de Educación Infantil y de otras especialidades de la Facultad de Ciencias \*de la Educación y de varios cursos de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y de otras Facultades, matriculados en las asignaturas: “Introducción al Álgebra” o “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil”, todos de la Universidad de Málaga, una serie de actividades, análogas a las que hicieron en la Evaluación Inicial, sobre “las Magnitudes y su Medida”. El objetivo es estudiar si con estos nuevos conocimientos adquiridos han mejorado sus actitudes a la hora de proponer actividades que puedan ser formativas, interesantes y originales, para los niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años) con respecto a las que se les plantearon en la Evaluación Inicial.

Las primeras cuestiones son análogas a las que teníamos entonces, sólo en el apartado 5 les preguntamos si su capacidad para proponer actividades ha variado en algo respecto de la anterior. Pensamos que si están más preparados serán capaces de demostrarlo a la hora de proponer dichas actividades.

Volvemos a preguntarles en los apartados 6 y 7 sobre los conceptos de magnitud y de medida de una magnitud para ver si lo han asimilado totalmente o sólo aparentemente, lo que repercutirá a la hora de volver a proponer actividades a los niños de Educación Infantil. El resto de las cuestiones, que son iguales a las de la Evaluación Inicial — aunque el apartado no tenga el mismo número—, las volvemos a plantear para ver si ha variado en algo su disposición hacia el tema “las Magnitudes y su Medida” después de estudiarse los dos temas que antes comentamos.

En la pregunta 15 les preguntamos sobre la influencia que ha tenido el estudio del tema en la propuesta de actividades. Aunque esto se podría observar con las respuestas, queremos que sean ellos los que lo digan para ver si sus informaciones coincide con las que nosotros podamos tener.

La última pregunta la dejamos abierta para que ellos digan lo que consideran necesario para trabajar con niños de Educación Infantil. Creemos que esta cuestión es de suma importancia para que ellos reconozcan que hay algunas cosas que no se les dan en su Facultad y que son necesarias para trabajar en esta Etapa o quizá en otras.

### 4.3.1. Encuesta

Apellidos y nombre:

|       |        |            |          |
|-------|--------|------------|----------|
| Sexo: | Hombre | Bachiller: | Ciencias |
|       | Mujer. |            | Letras   |

Curso: Especialidad:

Edad:

Te vamos a plantear cuestiones análogas a las que vimos anteriormente en la otra encuesta y, como entonces, te agradeceríamos que, por favor, las respondieras con la mayor precisión posible.

Para responderlas puedes **consultar libros de cualquier nivel o preguntar a quién creas** oportuno, salvo que se te indique lo contrario.

No olvides señalar después de cada pregunta, si te lo indica, de qué medios te has servido para contestarla, marcando y completando, si ése es el caso, una o varias de las opciones que se te indican.

Indicamos con: M.A. que estás “Muy de acuerdo”; B.A. “Bastante de acuerdo”; P.A. “Poco de acuerdo” y N.A. “Nada de acuerdo”. Pon una cruz en el recuadro intersección de la fila y la columna del apartado —o de los apartados— con los que estés de acuerdo.

1° Marca hasta qué punto estás de acuerdo en las siguientes expresiones:

|                                                                                            | Muy de acuerdo. | Bastante de acuerdo. | Poco de acuerdo. | Nada de acuerdo. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------|------------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles.                                                             |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son odiosas.                                                               |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son imprescindibles.                                                       |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son "un tostón".                                                           |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son interesantes.                                                          |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son precisas.                                                              |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son engorrosas.                                                            |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son formativas.                                                            |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas no son prácticas.                                                          |                 |                      |                  |                  |
| Las Matemáticas son divertidas.                                                            |                 |                      |                  |                  |
| Me gustan las Matemáticas.                                                                 |                 |                      |                  |                  |
| El calificativo - los calificativos- que mejor le va -les van- a las Matemáticas es -son-: |                 |                      |                  |                  |
| Para mi las Matemáticas son:                                                               |                 |                      |                  |                  |



**2° Si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones Matemáticas, crees que:**

|                                                                                                                                                                  | M.A. | B.A. | P.A. | N.A. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|
| Debes dominar totalmente las Matemáticas: ser licenciado en Matemáticas.                                                                                         |      |      |      |      |
| Debes dominar a un nivel aceptable, un poco más de lo que se da en Bachillerato, los contenidos matemáticos que tengan alguna repercusión en Educación Infantil. |      |      |      |      |
| Con los conocimientos matemáticos que aprendiste en el Instituto tienes bastante.                                                                                |      |      |      |      |
| Debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio.                                                                                  |      |      |      |      |
| Debes dominar totalmente la Didáctica: ser licenciado en Pedagogía.                                                                                              |      |      |      |      |
| Debes conocer la parte de Didáctica que tenga alguna repercusión en Educación Infantil.                                                                          |      |      |      |      |
| No es necesario saber Didáctica, con la intuición que tiene cualquier persona para enseñar es suficiente.                                                        |      |      |      |      |
| Debes tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática.                                                                                                   |      |      |      |      |
| Debes conocer la Didáctica de la Matemática que tenga alguna repercusión en Educación Infantil.                                                                  |      |      |      |      |
| No es necesario saber nada de Didáctica de la Matemática, sabiendo algo de Matemáticas y de Didáctica es suficiente.                                             |      |      |      |      |

|                                                                                                | M.A. | B.A. | P.A. | N.A. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|
| Debes dominar totalmente la Psicología: ser licenciado en Psicología.                          |      |      |      |      |
| Debes conocer la Psicología que te permita entender al niño de esas edades.                    |      |      |      |      |
| No se necesita ningún conocimiento psicológico, con la intuición que da la vida es suficiente. |      |      |      |      |
| Sería bueno conocer las técnicas de metodología creativa.                                      |      |      |      |      |
| No se necesita ninguna técnica de metodología creativa, todos somos algo creativos.            |      |      |      |      |
| Otros (explica lo que quieras)                                                                 |      |      |      |      |

En las preguntas que vienen a continuación, además de responderlas, escribe delante del número de cada una de ellas una B si tienes seguridad de que la respuesta que has dado está bien y una D si tienes duda.

Pon una cruz en el recuadro de la izquierda del apartado —o de los apartados— con los que estés de acuerdo.

**3° Plantea tres actividades que podrías realizar con niños de Educación Infantil, de 0 a 6 años, sobre “las Magnitudes y su Medida”, sin consultar ningún material ni preguntarle a nadie, tan solo puedes usar los conocimientos que hayas aprendido cuando te explicamos el tema.**

---

#### 4º Señala las opciones que consideres oportunas.

**El cariño:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**La temperatura:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**La alegría:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**El dolor:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**La fama:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

**El interés:**

- Es una magnitud medible.
- Es una magnitud no medible.
- Es medible pero no es magnitud.
- No es medible y no magnitud.
- Si se pudiera medir sería una magnitud.
- No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....

.....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).

O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....

.....  
 y lo he cambiado por .....

..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....

.. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 ....., que me dijo .....

....., y he respondido: .....

sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....

..... o cambiando parte de .....

..... por .....

.....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**5° ¿Crees que ha variado en algo tu capacidad para proponer actividades? Explica por qué y en qué te basas.**

---

**6° ¿Qué es una magnitud?**

Al contestar la pregunta anterior, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la  
 página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....

..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 ....., que me dijo .....  
 .....  
 ....., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

## 7º ¿A qué llamamos medida de una magnitud?

Al contestar la pregunta anterior, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la  
 página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

c) Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 .., que me dijo .....  
 .....  
 .., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

d) Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

e) Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

---

**8º Da ejemplos de magnitudes medibles y no medibles. De las medibles, indica cómo se miden y con qué unidades, y de las no medibles explica la razón.**

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 .., que me dijo .....  
 .....  
 .., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**9º ¿Crees que “las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para Educación Infantil?; ¿por qué?**



Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

**c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 .., que me dijo .....  
 .....  
 .., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**10º ¿Qué magnitudes se pueden empezar a trabajar en Educación Infantil?; ¿cuándo?; ¿con qué unidades de medida?; por qué?**

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

a) Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

b) He usado el libro .....  
 .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 .....  
 ..... o le he añadido. ....  
 .....  
 .....

c) Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 ....., que me dijo .....  
 .....  
 ....., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....

d) Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.

e) Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**11º Plantea, con cada una de las magnitudes y las medidas señaladas, tres actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Conviene que precises cómo vas a realizar dichas actividades.**

Al contestar las preguntas anteriores, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

**b)** He usado el libro .....

.....

..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).

O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
....., que me decía .....

.....

y lo he cambiado por .....

..... o le he añadido. ....

.....

**c)** Le he preguntado a la persona .....

.. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....

..., que me dijo .....

....., y he respondido: .....

sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....

..... o cambiando parte de .....

..... por .....

.....

**d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....

..... y se nos ha  
ocurrido esto.

**e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**12º ¿Para qué les sirven al niño cada una de las actividades que le has planteado?**

Al contestar la pregunta anterior, puedo afirmar que:

**a)** Lo sabía y no he necesitado de nada ni de nadie para responder.

- b)** He usado el libro .....  
 ..... (indica el autor del libro, el nombre, la editorial, el año de publicación y la página).  
 O los apuntes de la asignatura ....., impartida por el profesor ...  
 ....., que me decía .....  
 .....  
 y lo he cambiado por .....  
 ..... o le he añadido.....  
 .....  
 .....
- c)** Le he preguntado a la persona .....  
 .. He supuesto que debía conocer la respuesta porque .....  
 .., que me dijo .....  
 .....  
 .., y he respondido: .....  
 .....  
 sin añadir nada de mi cosecha o añadiendo .....  
 .....  
 ..... o cambiando parte de .....  
 ..... por .....  
 .....  
 .....
- d)** Nos hemos reunido el grupo formado por .....  
 .....  
 ..... y se nos ha  
 ocurrido esto.
- e)** Otra situación no contemplada anteriormente. Indica cuál.

**13º ¿Crees que necesitas profundizar más en el tema “Magnitudes y Medidas” para poder proponer actividades que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro?**

Sí.  
 No.  
 Otros.

**14º ¿Necesitas comprender mejor las técnicas de creatividad para que las actividades que propongamos sean más originales?**

Sí.

No.  
Otros.

---

**15° Para proponer las actividades te ha servido el estudio del tema**

Mucho.  
Poco.  
Nada.  
Otros.

---

**16° Por tanto para trabajar con niños, con una metodología adaptada a la Educación Infantil, que consiga los objetivos fundamentales de esta Etapa, ¿qué consideras que es necesario?**

(Di lo que quieras).

## *CAPÍTULO 5*

# **Análisis de los resultados**

### **5.1. Introducción**

Se van a hacer, en el presente Capítulo, dos estudios de los resultados de las encuestas:

- 1) de frecuencias y
- 2) estadístico.

Con el estudio de frecuencias se pretende analizar los porcentajes de los resultados y, en el caso en que las preguntas planteadas sean iguales, comparar los valores obtenidos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Para este proceso se van a llevar a cabo medidas descriptivas, porcentajes, gráficos y estudio de distribuciones.

El estudio estadístico va a ayudar a completar la investigación, al comparar, mediante el Modelo Lineal General y mediante pruebas no paramétricas, las submuestras generadas por las variables: género, año de realización, curso, edad, especialidad y bachillerato.

### **5.2. Estudio de frecuencias de los resultados de las encuestas**

El número total de preguntas que se hicieron entre las dos encuestas —Evaluación Inicial y Evaluación Final— a los alumnos matriculados en las asignaturas “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil” e “Introducción al Álgebra” fue de 266, reunidas en

los 14 apartados que aparecen en la Evaluación Inicial y en los 16 de la Evaluación Final.

Hemos realizado las encuestas durante los cursos que van del año 2001 al 2006. Como hemos comentado en la Evaluación Inicial, empezamos confeccionando un primer cuestionario y para corregir posibles fallos que pudiera tener, una vez elaborada, hicimos una prueba piloto pasándosela a los alumnos que cursaron las asignaturas optativas de Magisterio: “Introducción al Álgebra” y “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil”, el curso 2001-2002. Hemos de decir que no tuvimos en cuenta los resultados obtenidos, con ella perfeccionamos la primera encuesta propuesta. Se pueden ver más detalles sobre el proceso seguido en la elaboración de las dos encuestas al principio de ambas.

Al objeto de reforzar la validez del instrumento, después de elaborado el cuestionario se lo mostramos a un Comité de Expertos formado por distintos profesionales que, según su especialidad, tuvieran alguna relación con el tema. Este Comité estuvo formado por profesores doctores en distintas ramas del saber. Todo esto ya lo comentamos en la Evaluación Inicial.

Como son muchos los apartados en que las preguntas que hacemos son iguales en las Evaluaciones Inicial y Final, y algunos de ellos figuran con numeración distinta, en lo sucesivo, en algunos casos, para simplificar el número que les damos a dichos apartados, vamos a poner solamente el número con que figure dicho apartado en la Evaluación Inicial.

### **5.2.1. Estudio de frecuencias de la introducción**

Comenzamos las dos encuestas con una serie de preguntas relativas al año de ejecución, al tipo de encuesta y a las condiciones particulares de los alumnos.



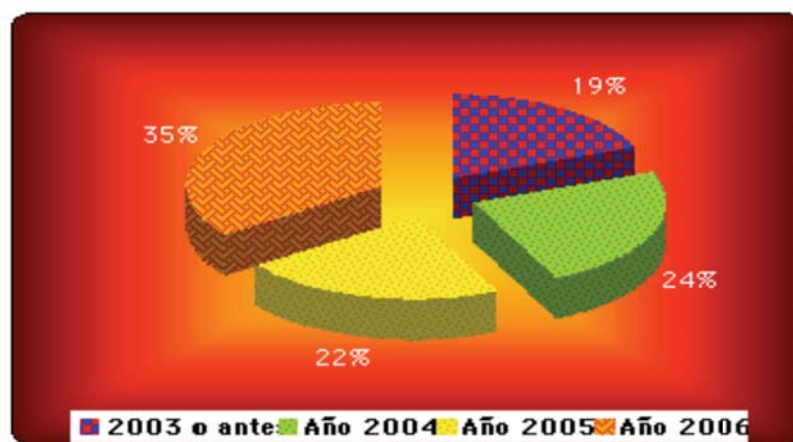


Figura 50: Año de realización.

Realizamos un total de 134 encuestas. De ellas, como aparece en la figura adjunta, el 19% fue hecho en el año 2003 o en años anteriores, el 24% se llevó a cabo en el año 2004, el 22% en el 2005 y el 35% en el año 2006. Después hemos seguido planteándoles dichas encuestas a los alumnos que han cursado las asignaturas “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil” e “Introducción al Álgebra”. Aunque los resultados pertenecientes a 2007 no figuran en este estudio, seguiremos teniéndolos en cuenta para mejorar el conocimiento del tema “las Magnitudes y su Medida”. En todos los comentarios, cuando hablamos de año  $x$  nos referimos al curso que va del año  $x-1$  al año  $x$ .

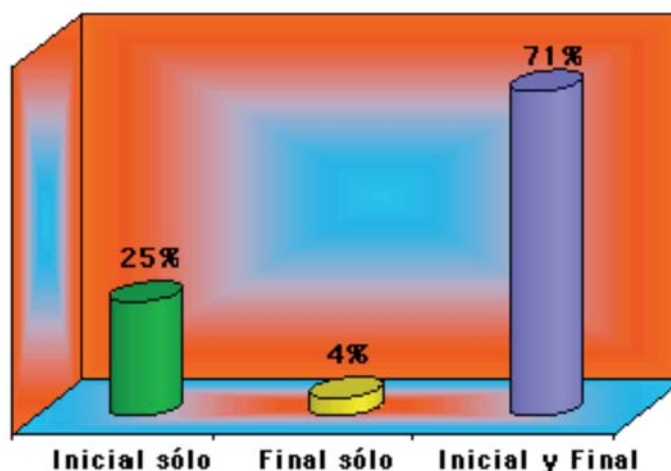


Figura 51: Evaluación.

Planteamos a los alumnos dos encuestas; a la primera le llamamos Evaluación Inicial y a la segunda Evaluación Final. Como puede verse en la figura anterior, ambas encuestas las respondieron el 71% de los alumnos encuestados, el 25% sólo respondieron la primera encuesta y el 4% sólo la segunda. Por tanto es una mayoría los que responden ambas encuestas.

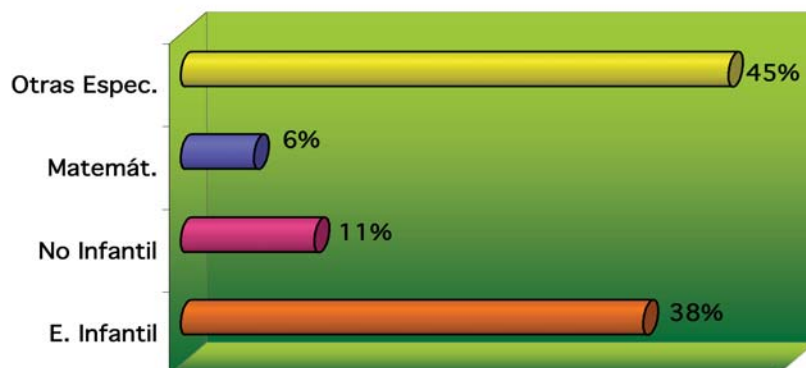


Figura 52: Especialidad.

Por ser ofertadas estas dos asignaturas para libre configuración, contamos con el 38% de los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil; el 11% eran de Magisterio de otras especialidades, en concreto, de las especialidades de Primaria, Educación Física, Educación Musical, Lengua Extranjera, Audición y Lenguaje y Educación Especial. El 6% fueron alumnos de la Facultad de Ciencias de la licenciatura de Matemáticas. El 45% de los encuestados fueron alumnos de la Facultad de Ciencias, de otras licenciaturas, y de otras Facultades o Escuelas Universitarias. Entre ellas contamos con alumnos de las Facultades o Escuelas Universitarias de Telecomunicaciones, de Informática, de Económicas, de Empresariales, de las distintas Ingenierías o Ingenierías Técnicas... Todo esto queda reflejado en la figura que antecede.

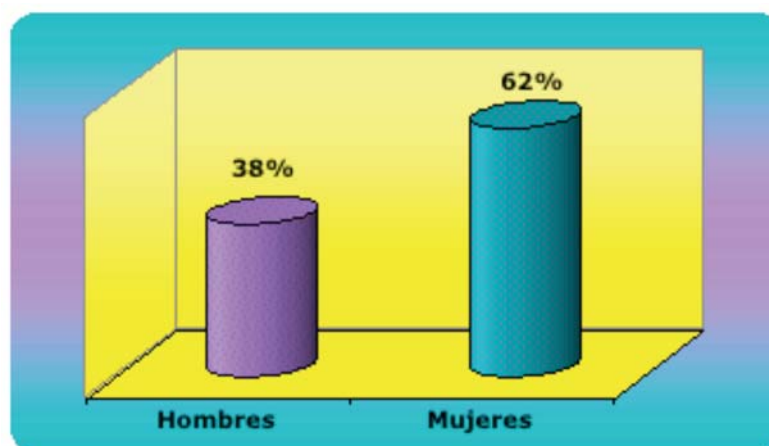


Figura 53: Género.

El 38% de los alumnos con los que contamos fueron hombres y el 62% mujeres. Parece lógico esperar un mayor número de mujeres que hombres ya que, al menos en Magisterio, el número de mujeres matriculadas es mayor que el de hombres.

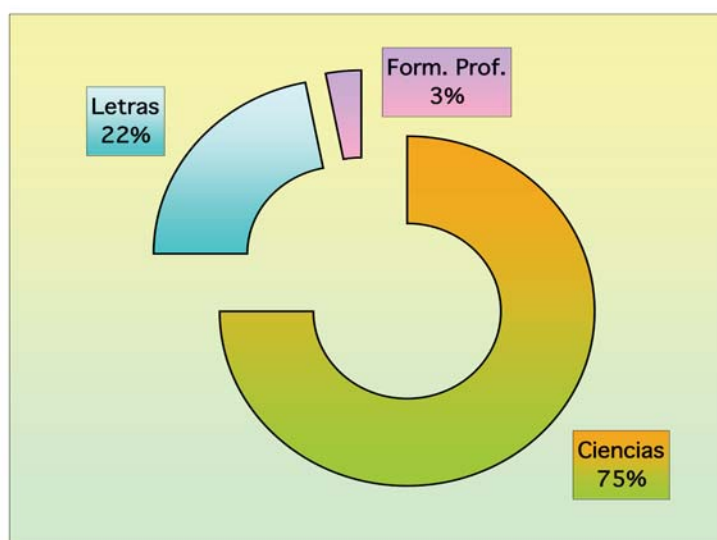


Figura 54: Bachiller cursado.

En la encuesta hemos tenido en cuenta también el bachiller cursado por los alumnos consultados; de ellos, el 75% había cursado el Bachiller de Ciencias, el 22% el de Letras y sólo el 3% Formación Profesional. Consideramos que, por lo general, un alumno que proviene de un bachiller de Ciencias tiene más facilidad y predisposición para cursar alguna de estas dos asignaturas, o las dos. Sin embargo, y como

se puede apreciar en la figura adjunta, también hay alumnos que en su momento no eligieron un bachiller de Ciencias pero se les dan bien las Matemáticas.

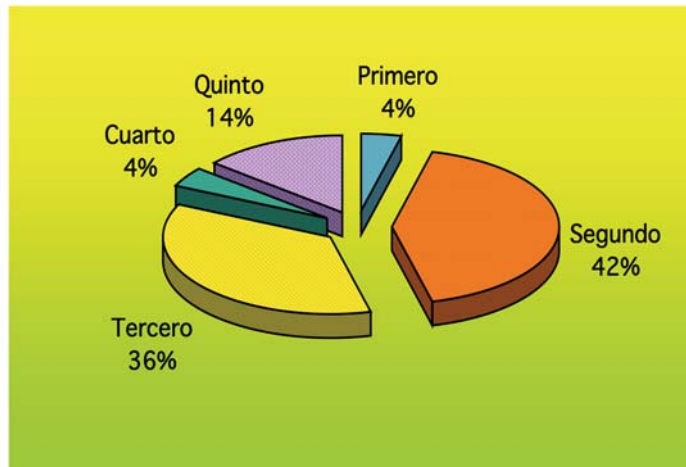


**Figura 55: Curso en que está matriculado actualmente.**

Al ser las dos asignaturas optativas y de libre configuración, los alumnos podían estar matriculados en cualquier curso. Como podemos observar en el gráfico adjunto, el 4% fueron alumnos matriculados en primero, el 42% en segundo, el 30% en tercero, el 4% en cuarto y el 14% en quinto. Queremos destacar que el grupo de los alumnos que estudiaban una diplomatura corresponde a los matriculados en primero, segundo o tercero, y que ninguno de los alumnos que estudiaba una licenciatura se matriculaba en las asignaturas que impartimos antes de estar matriculado en cuarto, con lo cual la figura anterior nos da información acerca de los alumnos que cursaban una diplomatura (82%) y de los matriculados en una licenciatura (18%).

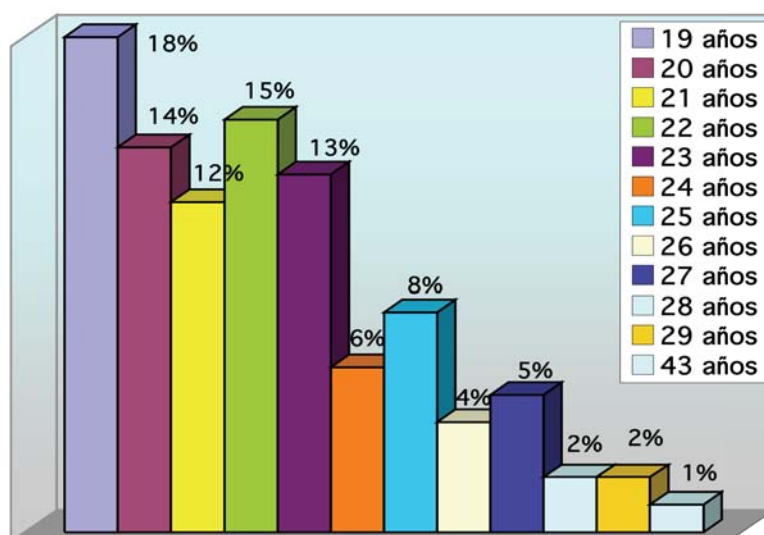


Figura 56: Edad.

La diversidad de edades es tremenda ya que en las distintas Facultades hay alumnos de todas las edades matriculados. El 18% fueron alumnos de 19 años, el 14% de 20 años, el 12% de 21 años, el 15% de 22 años, el 13% de 23 años, el 6% de 24 años, el 8% de 25 años, el 4% de 26 años, el 5% de 27 años, el 2% de 28 años, el 2% de 29 años y el 1% de 43 años. Hay un 19% de alumnos mayores de 25 años. Una gran parte de ellos cursaba una licenciatura y elegía las asignaturas en cuestión como de libre configuración. Otros habían hecho el acceso a la Universidad para mayores de 25 años y estaban cursando Magisterio.

### 5.2.2. Estudio de frecuencias del primer apartado

Después de todas estas preguntas pasamos a analizar lo que marcamos en las dos encuestas como "1º"; aquí intentamos ver su opinión y su interés por y hacia las Matemáticas. Como hemos comentado en la Evaluación Inicial, ésta tiene por objetivo comprobar en qué situación se encuentran, respecto de su interés por la Matemática en general y por el tema "las Magnitudes y su Medida" en particular, los alumnos que son objeto de nuestro estudio. Para responder les dejamos cuatro posibilidades: muy de acuerdo, bastante de acuerdo, poco de acuerdo o nada de acuerdo, con objeto de que no se limitaran simplemente a decir sí o no, sino que tuvieran un abanico de posibilidades más amplio.

Queríamos saber en qué grado los alumnos estaban de acuerdo con la afirmación: **“Las Matemáticas son difíciles”**. Lógicamente, pensamos que cada alumno responde según su apreciación personal, no de forma objetiva. Comparamos las respuestas que dan antes de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” —en la Evaluación Inicial— y después del estudio del tema y de las técnicas —en la Evaluación Final.

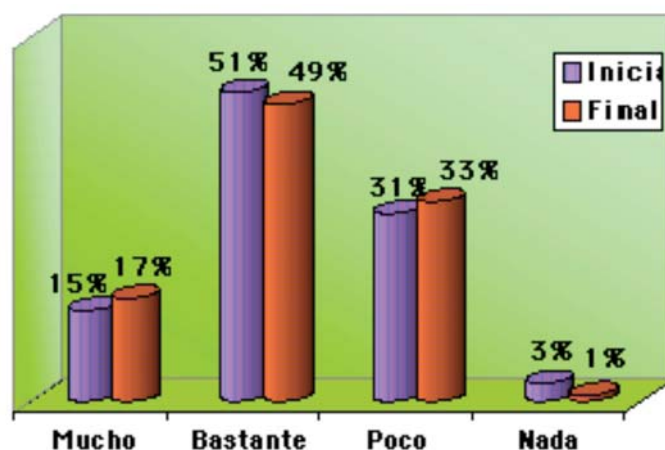


Figura 57: Las Matemáticas son difíciles.

Como puede observarse en la figura anterior, podemos considerar que, después del estudio del tema y de las técnicas, hay una pequeña diferencia entre: los que dicen que están muy de acuerdo y los que dicen que están bastante de acuerdo, por un lado, y los que están poco de acuerdo y los que están nada de acuerdo, por otro. Podemos pensar que, en términos de porcentaje, dicha diferencia queda compensada con un 66% en el primer caso y un 34% en el segundo, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

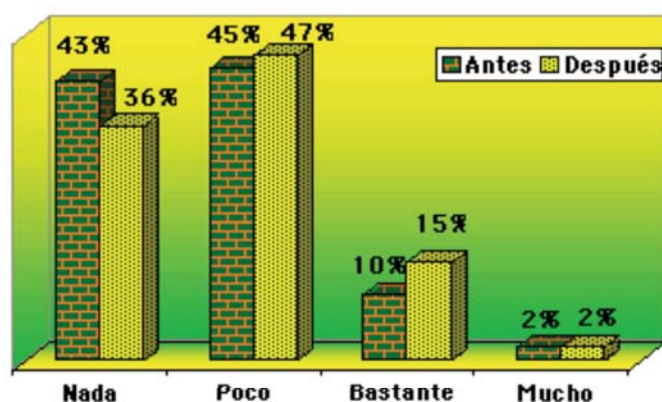


Figura 58: Las Matemáticas son odiosas.

Les preguntamos si **“las Matemáticas son odiosas”**. Esta pregunta es bastante significativa pues nos da una idea clara de su percepción de las Matemáticas. Como puede verse en la figura anterior, mayoritariamente opinan que no son nada o poco odiosas, tanto antes de estudiar el tema (88%) como después (83%), lo que puede interpretarse como que los alumnos a los que nos hemos dirigido presentan una especial predilección por las Matemáticas. Sin embargo, después de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” aumenta levemente su percepción del odio por las Matemáticas, lo que puede ser debido a la profundidad con la que lo hemos tratado.

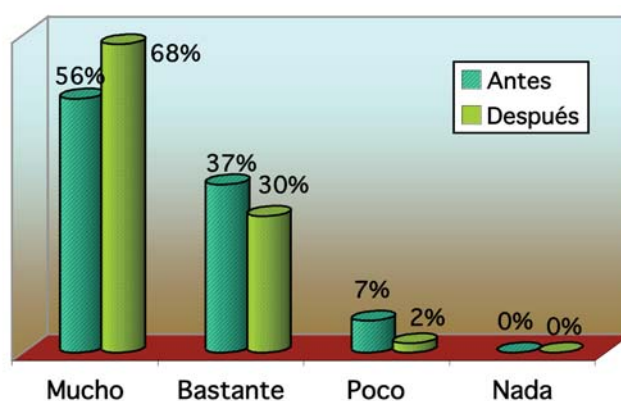


Figura 59: Las Matemáticas son imprescindibles.

Al indicarnos su opinión respecto de si las **“Matemáticas son imprescindibles”**, comprobamos que mayoritariamente, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, dijeron que eran muy o bastante imprescindibles, aumentando considerablemente,



después del estudio del tema y de las técnicas su opinión respecto de que eran muy imprescindibles. Mayoritariamente piensan que son difíciles y a la vez que son imprescindibles.

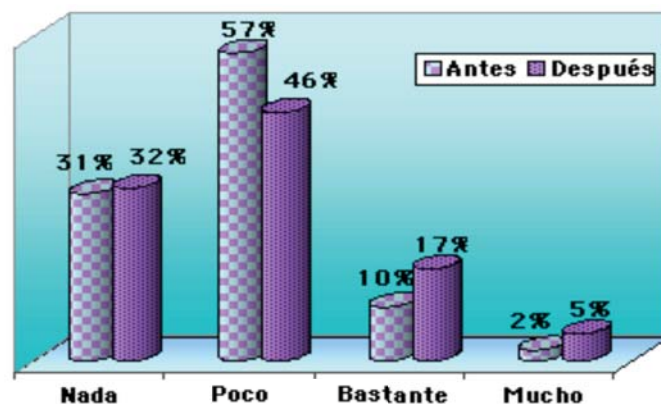


Figura 60: Las Matemáticas son “un tostón”.

En el caso de la pregunta de si “las Matemáticas son un **tostón**”, mayoritariamente respondieron que nada o poco, aunque, según vemos en la figura anterior, aumenta su apreciación de que son “un tostón” después del estudio del tema y de las técnicas. Creemos que pueden considerarlas un tostón porque hemos intentado hacer un estudio en profundidad del tema, lo que supone gran esfuerzo por su parte. Hemos empleado el término “tostón” para calificar a las Matemáticas por ser usado frecuentemente en el lenguaje coloquial de los alumnos.

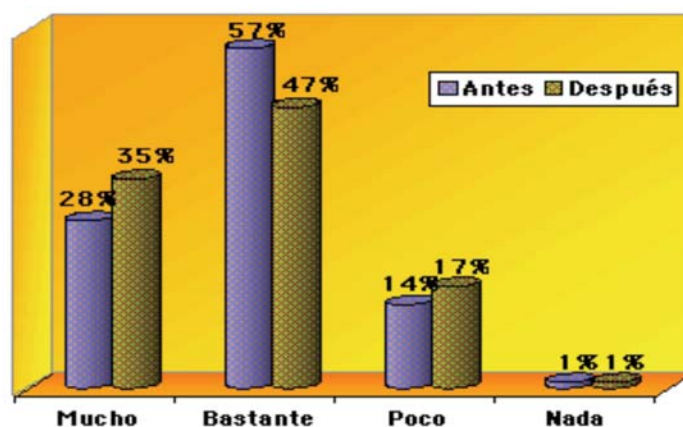


Figura 61: Las Matemáticas son interesantes.

Al proponerles que consideren hasta qué punto “las Matemáticas son interesantes” también, en este caso, consideran



mayoritariamente que son muy o bastante interesantes. Los que decían que eran poco interesantes, se reafirman y sube ligeramente, después del estudio del tema y de las técnicas, el porcentaje de éstos. Aumenta significativamente el número de alumnos que piensan que son muy interesantes, procedentes del grupo que decía que eran bastante interesantes.

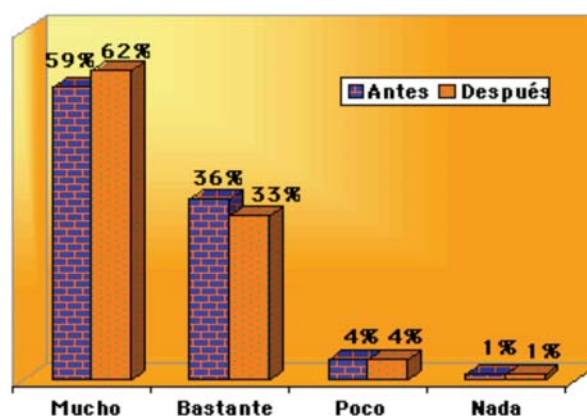


Figura 62: Las Matemáticas son precisas.

Al plantearse los alumnos hasta qué punto **“las Matemáticas son precisas”**, responden mayoritariamente que lo son mucho o bastante. Nos ha resultado sorprendente que haya alumnos (aunque sólo un 5%) que consideren que no son precisas. Habríamos debido preguntarles ejemplos de materias más precisas que las Matemáticas.

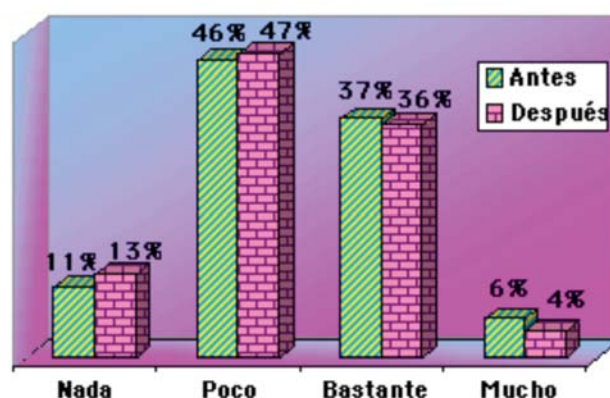


Figura 63: Las Matemáticas son engorrosas.

Planteamos a los alumnos la cuestión; **“las matemáticas son engorrosas”**; sabemos que las Matemáticas tienen su dificultad para los alumnos que consultamos, ya que son pocos los que proceden de

estudios de esta asignatura. Quizá sea por eso por lo que hay un porcentaje considerable que opinan que son bastante o muy engorrosas, si bien la mayoría opina que lo son nada o poco, aumentando levemente después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y disminuyendo también en pequeña escala los que consideran que son bastante o muy engorrosas.

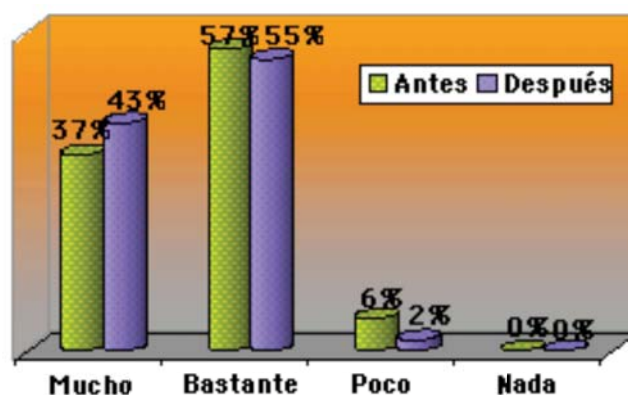


Figura 64: Las Matemáticas son formativas.

En el caso de valorar en qué medida “las Matemáticas son formativas”, mayoritariamente consideran que son mucho o bastante formativas, aumentando su percepción después del estudio del tema y de las técnicas, pues aunque disminuye en un 2% la cantidad de los que opinan que son bastante formativas, aumenta un 6% la de los que opinan que lo son mucho.

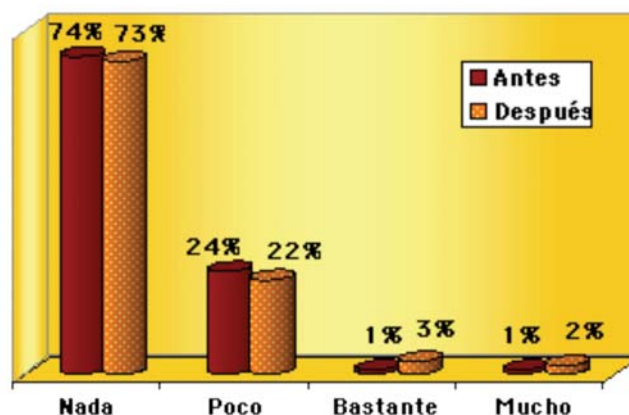


Figura 65: Las Matemáticas no son prácticas.

Para que opinaran acerca de hasta qué punto consideraban que **“las Matemáticas son prácticas”**, se lo planteamos en sentido negativo. El porcentaje es claramente significativo a favor de que son prácticas, con un 98% antes del estudio del tema y de las técnicas y un 95% después. Las variaciones antes de estudiarse el tema y después son mínimas.

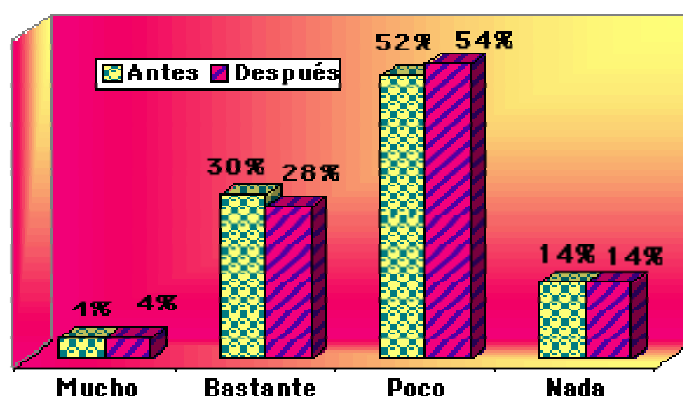


Figura 66: Las Matemáticas son divertidas.

Era lógico pensar que los alumnos con los que contamos, salvo una pequeña minoría, no podrían considerar que **“las Matemáticas son divertidas”**, no fue una ilusión ni una utopía, y así nos lo confirman los resultados encontrados; aunque nos alegra que haya un porcentaje, aunque sea pequeño, que opinen que son muy divertidas y otro, no ya tan pequeño, que consideran que son bastante divertidas, habiendo una pequeña disminución después del estudio del tema y de las técnicas (2%), quizá debido a la dificultad que tuvieron por la profundidad de dicho estudio.

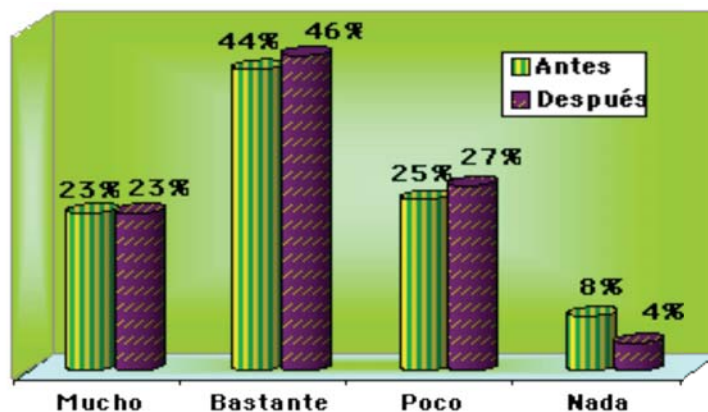


Figura 67: Me gustan las Matemáticas.

Es bonito lo que nos hemos encontrado como resultado de cuánto **“les gustan las Matemáticas”**: una mayoría opina que les gustan mucho o bastante, algo más de la cuarta parte de los alumnos dicen que les gustan poco o nada. Después del estudio del tema y de las técnicas aumenta un poco el gusto por las Matemáticas, pues sólo disminuye el porcentaje de los que opinan que no les gustan nada; además, el porcentaje de los que les gustan mucho o bastante las Matemáticas pasa del 67%, antes del estudio del tema y de las técnicas, al 69%, después.

En resumen, podemos decir que esto era lo que esperábamos: el aprecio por las Matemáticas ha aumentado, aunque levemente, después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida”. El hecho de que el aumento por el gusto hacia las Matemáticas no fuera mayor pensamos que es debido a la influencia de un pequeño grupo, que aparecía cada año, formado por alumnos que, obligatoriamente, tuvieron que elegir alguna de estas dos asignaturas.

#### **5.2.2.1. Comparación de las opiniones sobre las Matemáticas.**

En las dos figuras que vienen a continuación comparamos las opiniones sobre las Matemáticas antes y después, respectivamente, de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa.

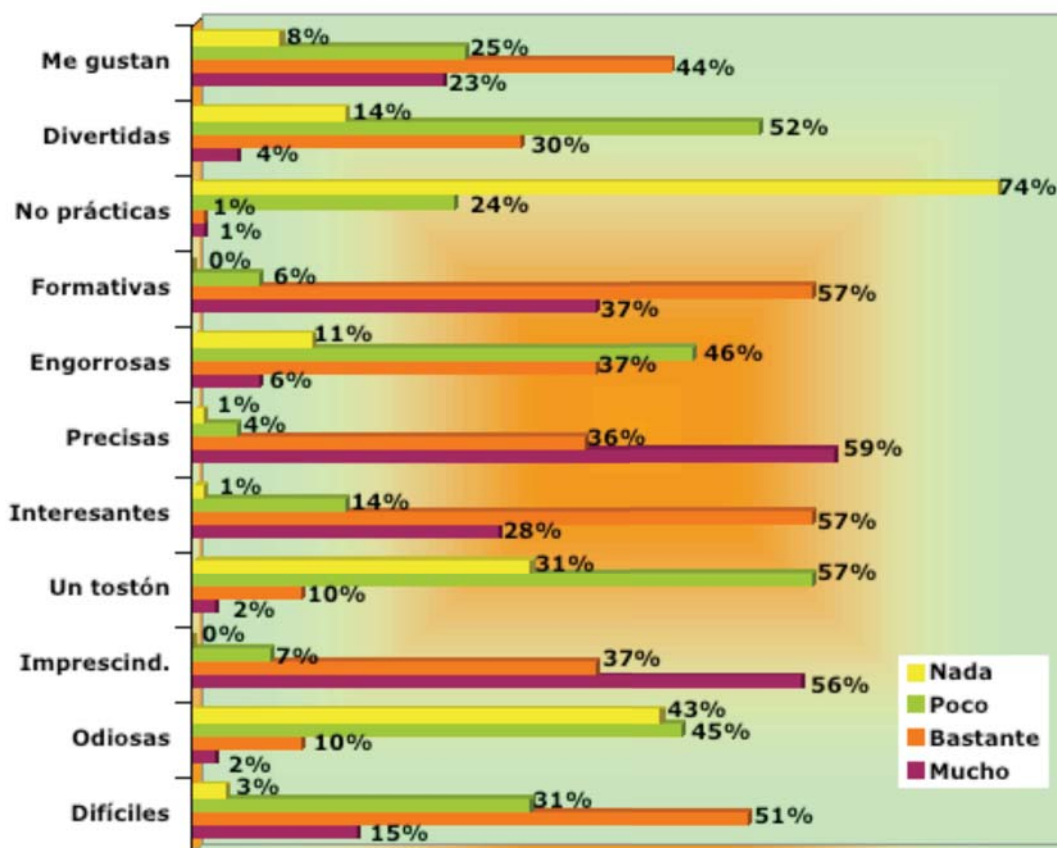


Figura 68: Comparación de las opiniones sobre las Matemáticas antes.

Antes del estudio de las dos parcelas que han motivado nuestro trabajo, puede observarse en la figura precedente que mayoritariamente piensan que las Matemáticas son prácticas (98% mucho o bastante), formativas (94% mucho o bastante), no engorrosas (57% nada o poco), precisas (95% mucho o bastante), interesantes (85% mucho o bastante), no son un tostón (88% nada o poco), imprescindibles (93% mucho o bastante), no son odiosas (88% nada o poco) y difíciles (66% mucho o bastante). Por tanto si los alumnos consideran que son difíciles y añaden todos los calificativos descritos, no nos queda más remedio que pedir que se intensifique la dedicación a ellas utilizando las técnicas de Metodología Creativa para conseguir hacérselas divertidas, que es una cualidad que no consideran que tengan (66% poco o nada).

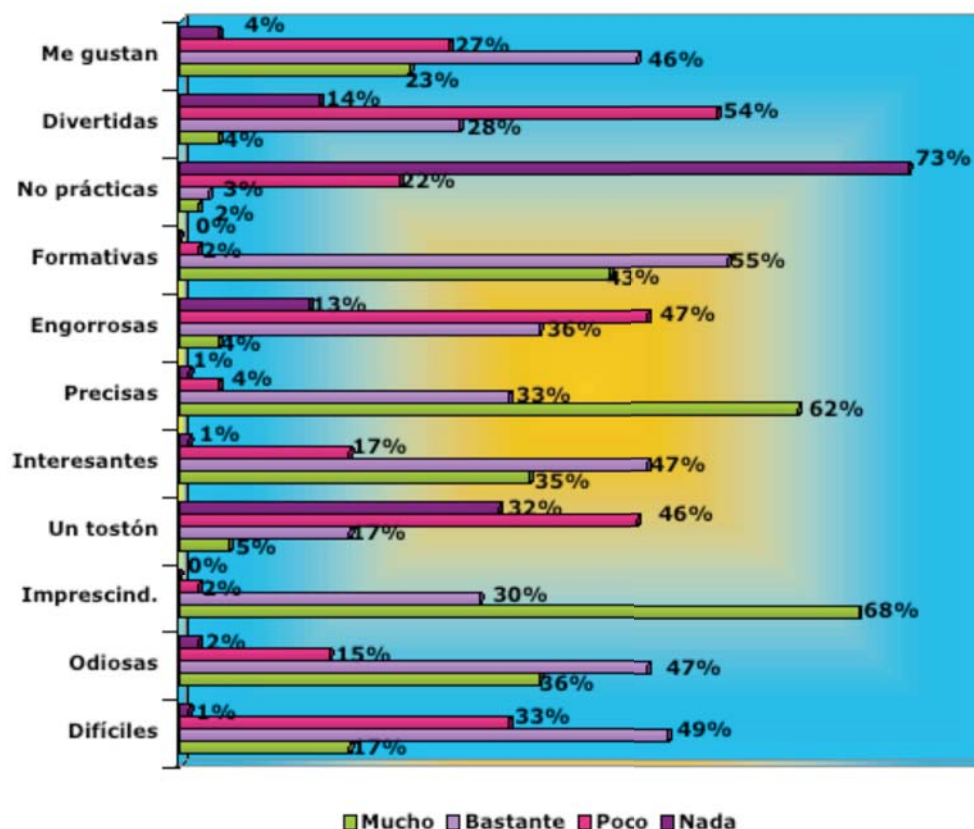


Figura 69: Comparación de las opiniones sobre las Matemáticas después.

Después del estudio del tema y de las técnicas siguen sin gustarles las Matemáticas a nuestros alumnos (69% poco o nada); además, mayoritariamente consideran que son prácticas (95% no prácticas poco o nada), formativas (98% mucho o bastante), no son engorrosas (60% poco o nada engorrosas), precisas (95% mucho o bastante), interesantes (82% mucho o bastante), no son odiosas (83% mucho o bastante) y difíciles (66% mucho o bastante). Basándonos en las opiniones anteriores y en las de ahora, diríamos algo parecido a lo que hemos comentado antes, es decir: consideramos que es necesario un cambio en los planes de estudio para aumentar las horas dedicadas a las Matemáticas y que desde las primeras edades se utilicen las técnicas de Metodología Creativa.

### 5.2.3. Estudio de frecuencias del segundo apartado

Empezamos planteando a los alumnos una serie de preguntas para que opinen qué grado de conocimientos debe tener un profesor que imparta Matemáticas en Educación Infantil. Les proponemos cuatro posibilidades para que respondan, que son: muy de acuerdo, bastante de acuerdo, poco de acuerdo y nada de acuerdo.

#### 5.2.3.1. Dominio de las Matemáticas

Les preguntamos si los maestros deben tener amplios conocimientos en Matemáticas, esto es, ser licenciados en Matemáticas. A nosotros nos parecía que un Maestro de Educación Infantil no necesita un nivel tan alto de conocimientos, pero quisimos saber la opinión de los alumnos.

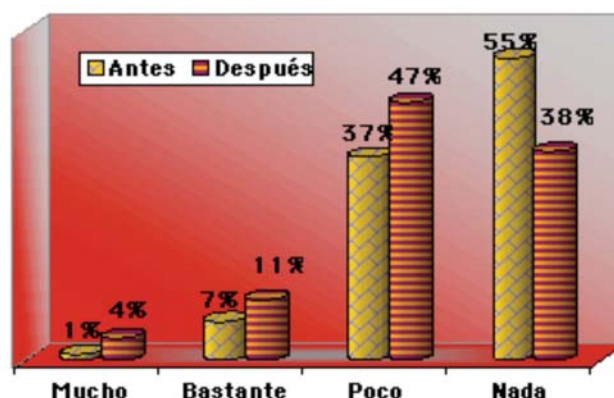


Figura 70: Dominio total de las Matemáticas.

Observando la figura adjunta, que corresponde a los resultados de las dos encuestas, vemos que después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” aumenta el tanto por ciento de alumnos que piensa que está muy de acuerdo, bastante de acuerdo y poco de acuerdo en que debe dominar totalmente las Matemáticas. Disminuye el número de los que dicen que el maestro no debe dominar totalmente las Matemáticas. Es lógico que en su mayoría digan que no han de dominarse por completo las Matemáticas, aunque consideren que algo sí hay que saber.

Después del estudio del tema y de las técnicas disminuye considerablemente el número de los que no están nada de acuerdo con que el dominio deba ser total.



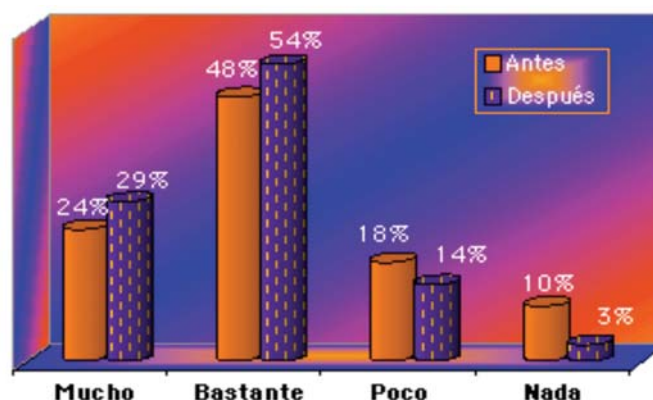


Figura 71: Dominio aceptable de las Matemáticas.

Cuando les planteamos en qué medida están de acuerdo con que el maestro debe dominar a un nivel aceptable, un poco más de lo que se da en Bachillerato, los contenidos matemáticos que tengan alguna repercusión en Educación Infantil, vemos, en la figura anterior, que mayoritariamente responden que están muy de acuerdo o que están bastante de acuerdo (72% antes del estudio del tema y de las técnicas y 82% después). Además, aumenta el porcentaje después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” en un 11%, lo cual nos indica que han valorado el estudio de dicho tema. Aunque es mínimo el número de alumnos que responden en un primer momento que están poco de acuerdo o nada de acuerdo (28%), el porcentaje de los que dan estas respuestas disminuye después de estudiarse el tema un 11%.

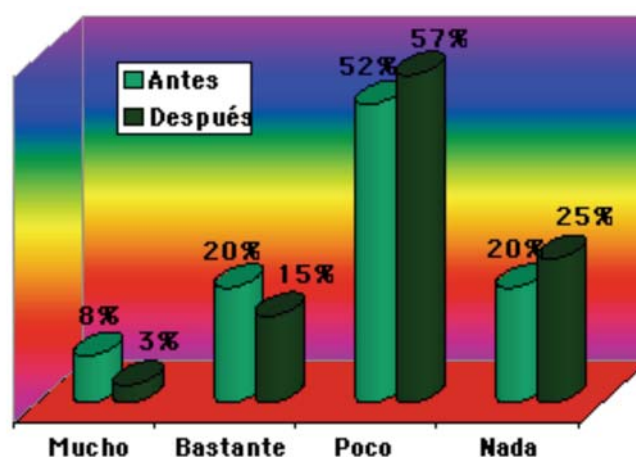


Figura 72: Los conocimientos del matemáticos del Instituto son suficientes.

Les preguntamos en qué medida los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes, no porque nos parezca que eso debe ser



así, sino porque esos conocimientos son los que tienen la mayoría de los maestros que terminan en la actualidad. Nos alegra que el resultado sea el que aparece en la figura precedente; podemos ver que la mayoría (72%) opina que está poco de acuerdo o nada de acuerdo; aumenta el porcentaje en un 11% después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y, por tanto, disminuye el porcentaje de los que dicen que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo.

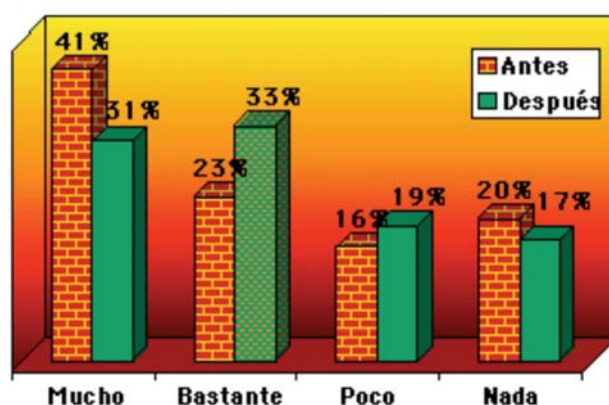


Figura 73: Necesidad de conocer las Matemáticas del libro de texto.

La última pregunta que les planteamos sobre lo que opinan que deben conocer de Matemáticas los maestros supone lo mínimo que se le puede pedir a un profesional de la enseñanza: que conozca las Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio. Una mayoría de los alumnos (64%) dicen que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo en ambas encuestas. El 36% restante puede proceder de los alumnos que han aprendido muchas cosas del tema “las Magnitudes y su Medida”, han preparado actividades sobre medidas de algunas magnitudes para trabajarlas con los alumnos de Educación Infantil, y piensan que poco les puede aportar el libro de texto.

Se puede interpretar también, a la vista de las preguntas anteriores, que piensan que deben tener un dominio aceptable de las Matemáticas, es decir, deben dominar esa parcela de esta asignatura que tenga alguna repercusión en Educación Infantil: ni ser licenciados, ni los conocimientos con los que acabaron el Bachillerato.

### 5.2.3.2. Dominio de la Didáctica de la Matemática

Empezamos con las preguntas relativas a los conocimientos de Didáctica de la Matemática que debe tener un profesor de Educación Infantil para proponer algunas actividades a los niños. Les dejamos

cuatro alternativas para dar sus respuestas: muy de acuerdo, bastante de acuerdo, poco de acuerdo y nada de acuerdo.

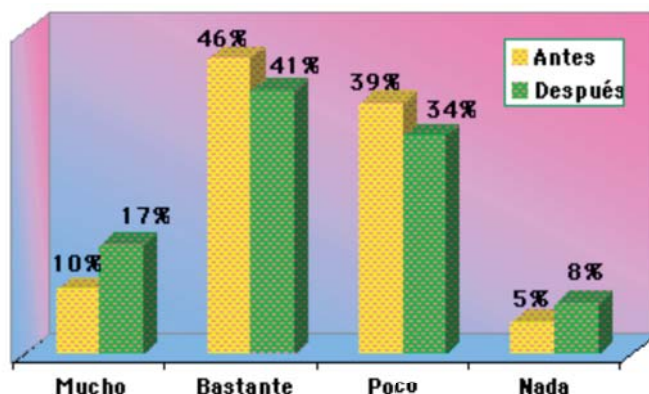


Figura 74: Dominio total de la Didáctica de la Matemática.

Les planteamos si el maestro debe tener un dominio total de Didáctica de la Matemática para impartir docencia en Educación Infantil. Como puede verse en la figura adjunta, la mayoría opinan que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo antes y después de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología creativa (56% y 58% respectivamente). Esperábamos que al ver su dificultad a la hora de proponer actividades, la respuesta fuese de este estilo. Después del estudio del tema y de las técnicas aumenta levemente el porcentaje de los que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo; disminuye, por tanto, el porcentaje de los que están poco de acuerdo o nada de acuerdo. Quizás, tras el estudio del tema y de las técnicas, los alumnos valoran más tener conocimientos a un elevado nivel de Didáctica de la Matemática. A nosotros nos parece que es mucho pedir que un maestro domine toda la Didáctica de la Matemática.

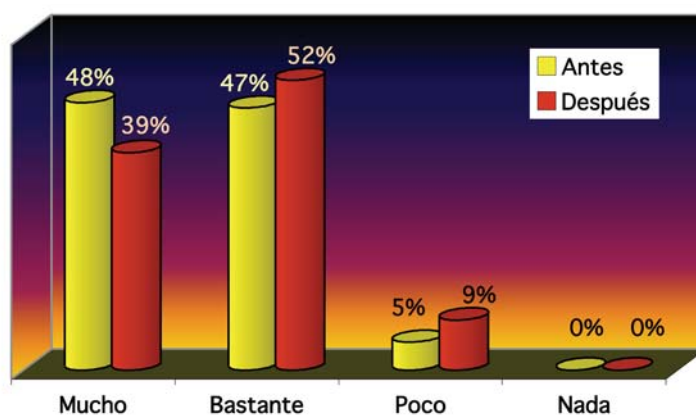


Figura 75: Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática.

Proponemos a los alumnos que opinen acerca de la afirmación de que el maestro debe conocer la Didáctica de la Matemática que tenga alguna repercusión en Educación Infantil a un nivel medio. Es abrumadora la respuesta dada: un 95% antes y un 91% después considera que deben ser vastos los conocimientos en Didáctica de la Matemática que han de tenerse. Destacar que no hay ningún alumno que esté nada de acuerdo. Hay un pequeño aumento (4%) de los que consideraban que no hay que dominar la Didáctica de la Matemática a este nivel. La razón podría estar en la complejidad del tema estudiado. La misma puede dar lugar a que piensen que por mucha Didáctica de la Matemática que se sepa hay que conocer las Matemáticas también.

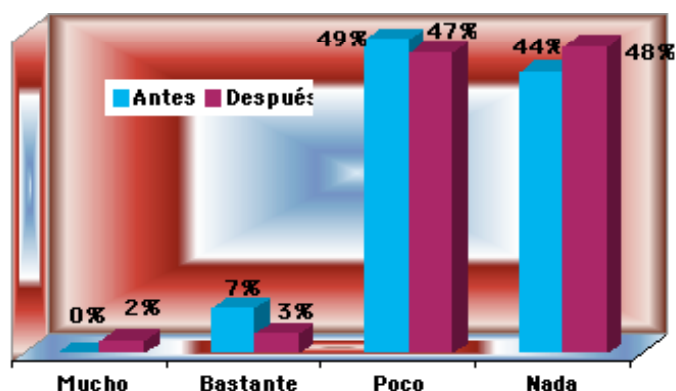


Figura 76: No es necesaria la Didáctica de la Matemática.

Al final de este punto les preguntamos en qué medida están de acuerdo en que no es necesario saber nada de Didáctica de la Matemática, sabiendo algo de Matemáticas y de Didáctica es suficiente. De nuevo hay una mayoría aplastante que no está de acuerdo en que no es necesaria la Didáctica de la Matemática (93% antes y 95% después). Aunque esperábamos esa respuesta no imaginábamos su calibre.

### 5.2.3.3. Dominio de la Didáctica

Se les plantea que si para proponer actividades a los niños de Educación Infantil el maestro debe dominar totalmente la Didáctica: debe ser licenciado en Pedagogía. Dejamos cuatro niveles para que valoren sus respuestas: muy de acuerdo, bastante de acuerdo, poco de acuerdo y nada de acuerdo.

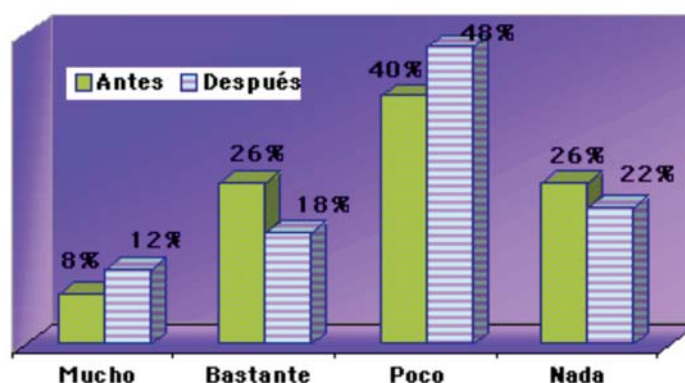


Figura 77: Dominio total de la Didáctica.

Es lógico pensar que se está pidiendo demasiado; es normal que mayoritariamente respondan que están poco de acuerdo o nada de acuerdo, tanto antes (66%) como después de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa (70%), aunque sí aumenta en un 4% el número de los que están poco o nada de acuerdo. Esto nos lleva a pensar nuevamente que consideran que, aparte de los conocimientos necesarios de Didáctica, hay que saber de Matemáticas.

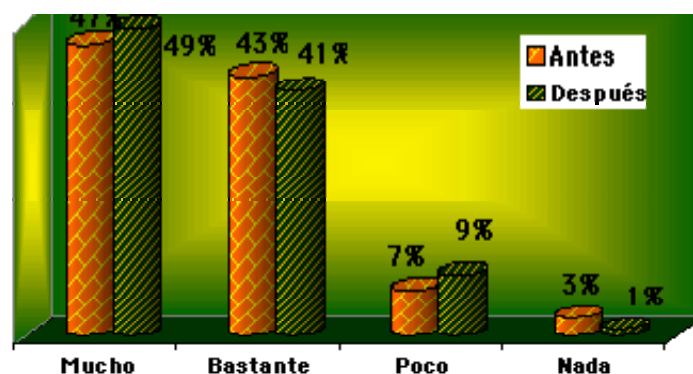


Figura 78: Dominio aceptable de la Didáctica.

Vamos disminuyendo el nivel de exigencias respecto del dominio que debe tener el maestro de Didáctica y les decimos a los alumnos que en qué medida están de acuerdo en que se debe conocer la parte de Didáctica que tenga alguna repercusión en Educación Infantil. Es normal que el 90% estén muy de acuerdo o bastante de acuerdo. Es curioso observar que la variación antes y después del estudio del tema y de las técnicas es prácticamente inexistente.

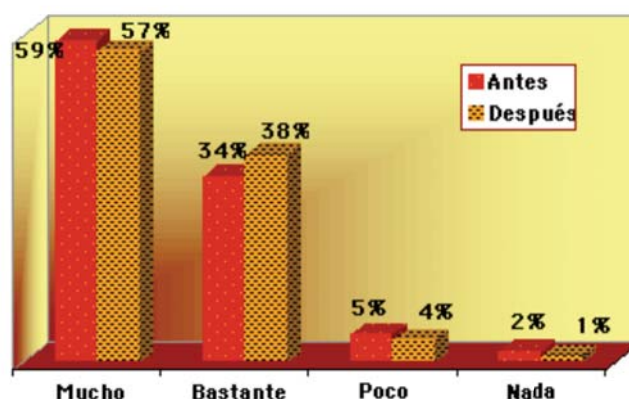


Figura 79: No es necesaria la Didáctica.

Al final de este apartado les hacemos la consideración: no es necesario saber Didáctica, con la intuición que tiene cualquier persona para enseñar es suficiente. Este razonamiento parece bastante lógico para el que no quiere que le exijan conocimientos no didácticos para enseñar. Los alumnos responden mayoritariamente, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, que están nada de acuerdo o poco de acuerdo (93% antes frente al 95% después). La variación de un 2% que hay después del estudio del tema y de las técnicas no consideramos que sea achacable a norma alguna, pensamos que quizás pueda ser debido a la facilidad o dificultad que tengan para proponer actividades.

#### 5.2.3.4. Dominio de la Psicología

Les planteamos a los alumnos distintas preguntas para que nos digan a qué nivel tiene que dominar el maestro la Psicología. Les dejamos cuatro posibilidades para que valoren sus respuestas: muy de acuerdo, bastante, poco y nada de acuerdo.

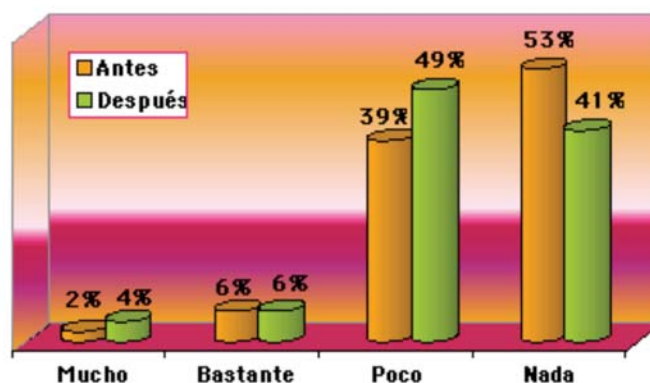


Figura 80: Necesidad de un dominio total de la Psicología.

Como en los casos anteriores, empezamos este punto planteándoles a los alumnos si para realizar actividades con niños de Educación Infantil, enfocadas a que el niño comprenda ciertas nociones de Matemáticas, el maestro debe dominar totalmente la Psicología: debe ser licenciado en Psicología. Los resultados de las encuestas, como puede verse en la figura adjunta, son análogos a los que teníamos en el caso de las Matemáticas y, por tanto, los comentarios no los vamos a repetir.

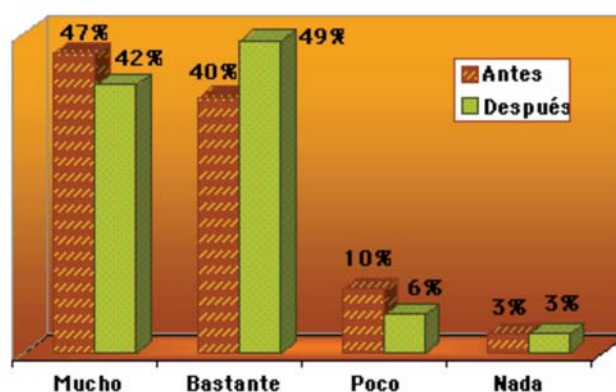


Figura 81: Dominio aceptable de la Psicología.

Cuando les preguntamos si el profesor de Educación Infantil debe conocer la Psicología que le permita entender al niño en esas edades, tal y como esperábamos, en su mayoría responden que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo (87% antes y 91% después). Aumenta este porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas; la razón puede estar en la dificultad que han tenido en la primera encuesta para preparar actividades para los niños de estas edades. Hay un pequeño porcentaje (del 13% antes y del 8% después) que está poco o nada de acuerdo. Tal vez se corresponda con esos alumnos que consideran que debe tenerse un dominio máximo de la Psicología.



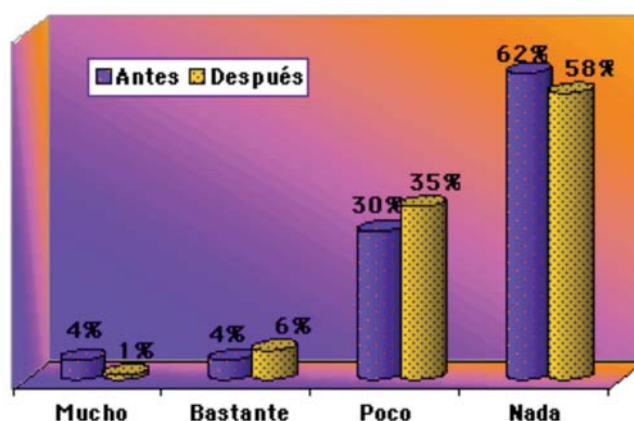


Figura 82: No se necesita estudiar Psicología.

Finalmente, en este punto, planteamos a los alumnos si el maestro de Educación Infantil no necesita ningún conocimiento psicológico, con la intuición que le da la vida es suficiente. Aunque, como es lógico, nosotros no estamos de acuerdo con lo que les planteamos, hemos procurado que el razonamiento tuviera una apariencia de lógica.

Mayoritariamente han respondido que están poco de acuerdo o nada de acuerdo (92% antes y 93% después). La variación de las opiniones después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa es muy pequeña. Disminuye el porcentaje de los que dicen que están muy de acuerdo, cosa que no se esperaba. También aumenta el porcentaje de los que dicen que están bastante y el de los que opinan que están poco de acuerdo. Teniendo en cuenta que el 92% antes y el 93% después dicen que están poco o nada de acuerdo pensamos que se debe a que valoran los conocimientos psicológicos, y los han echado en falta a la hora de proponer actividades. Finalmente queremos destacar que disminuye un 4% los que no están nada de acuerdo con que no se necesita estudiar Psicología.

#### 5.2.3.5. Necesidad de conocer las técnicas de Metodología Creativa

En este punto consideramos sólo dos tipos de preguntas: es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa o no es necesario conocer tales técnicas, ya que entendemos que en este caso no tiene sentido pensar en otras posibilidades. Para valorar dichas preguntas consideramos cinco niveles: muy de acuerdo, bastante de acuerdo, poco de acuerdo y nada de acuerdo.

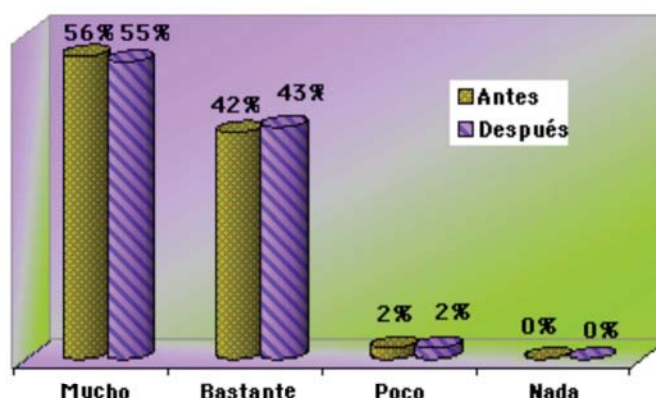


Figura 83: Es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa.

Los alumnos encuestados no conocen las técnicas de Metodología Creativa comentadas en el Capítulo I antes de que les planteemos la primera de las encuestas. Al preguntarles en qué medida es necesario que el maestro de Educación Infantil conozca las técnicas de Metodología Creativa, no es de extrañar que mayoritariamente respondan que mucho ya que la creatividad está muy valorada, que junto con los que responden que bastante supone, tanto antes de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa el 98%. El 2% restante dice que poco y no hay ningún alumno que diga que nada. Este era el resultado esperado.

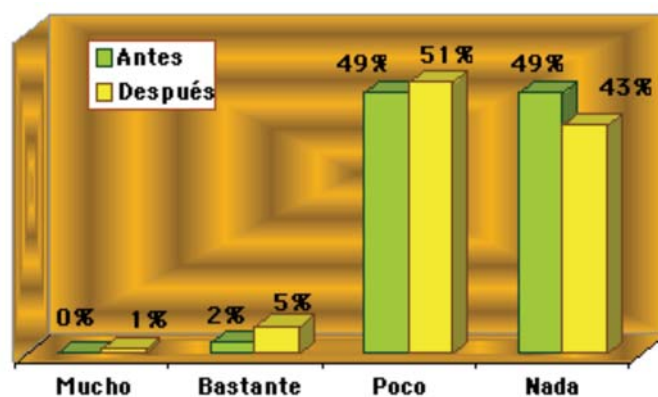


Figura 84: No es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa.

Aunque con la respuesta anterior tendríamos suficiente para saber qué opinan respecto del conocimiento de las técnicas de Metodología Creativa por el Maestro de Educación Infantil, les planteamos que para proponer actividades a los niños de Educación Infantil no es necesaria ninguna técnica de Metodología Creativa, que todos somos algo creativos. La respuesta que ahora dan es perfectamente compatible con la que daban en la pregunta anterior y es por eso que haya algunos



alumnos más que digan que están bastante de acuerdo. Estamos satisfechos al conocer que el 98% antes del estudio del tema y de las técnicas y el 94% después está entre los que dicen que están poco de acuerdo y los que dicen que están nada de acuerdo. El estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” creemos que no tiene ninguna repercusión en esta respuesta. Su aumento o disminución no sigue ninguna regla uniforme que nos haga pensar se deba a algunas causas lógicas.

### 5.2.3.6. Comparación de los resultados de los dominios entre las distintas materias

Aunque pensamos que no es necesario que un Maestro de Educación Infantil haya de tener un dominio total en ninguna de las dos asignaturas: Matemáticas y Didáctica, hemos querido compararlas para ver cuál es la imagen que tienen nuestros alumnos de cada una de ellas.

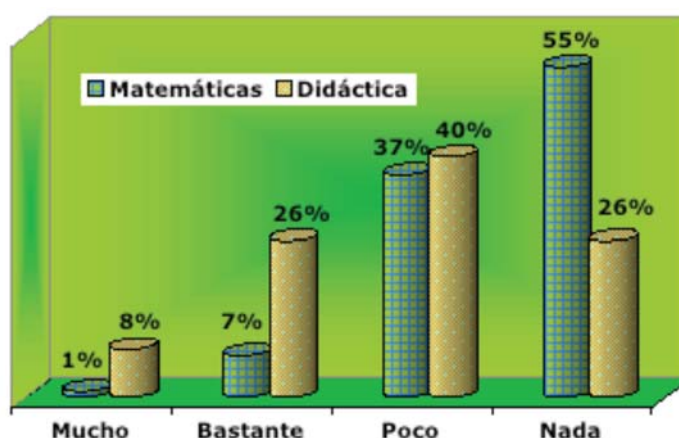


Figura 85: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica antes.

Considerando que a los estudiantes, en general, les cuestan más las Matemáticas que la Didáctica, la respuesta era de esperar. Como vemos en la figura precede, antes del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” hay más alumnos que creen que el maestro debe dominar más la Didáctica que las Matemáticas.

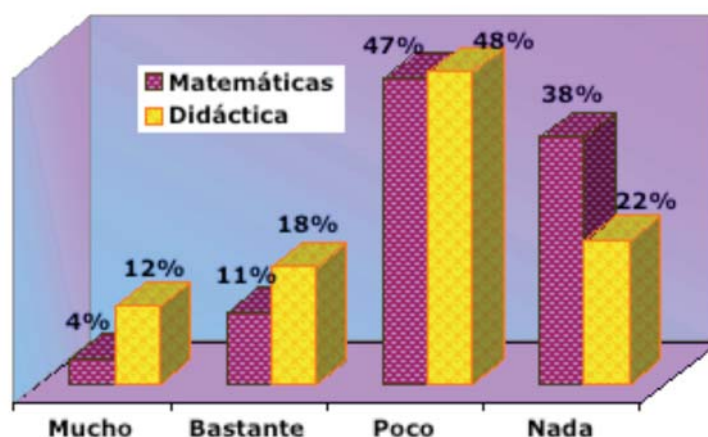


Figura 86: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica después.

Era de esperar que después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” la diferencia entre los alumnos que opinan que el maestro debe tener un dominio total de las Matemáticas y los que opinan que debe tener un dominio total de Didáctica se mantuviera, aunque menos acentuado, y esto es lo que observamos en la figura precedente. Ello quiere decir que han valorado el conocimiento de Matemáticas que han conseguido con la explicación y el estudio del tema y de las técnicas.

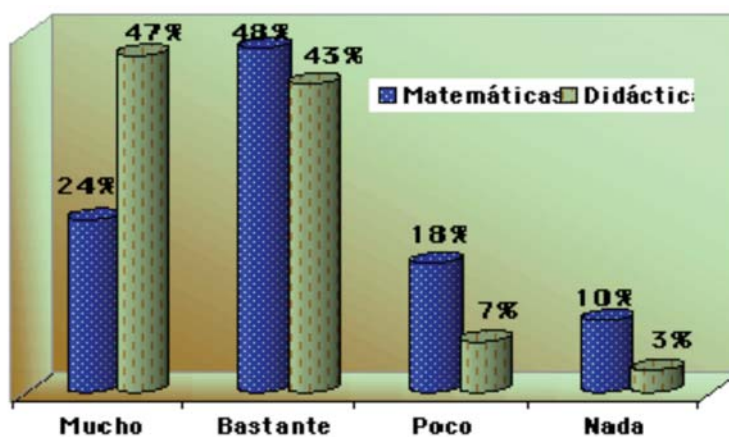


Figura 87: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas con Didáctica, antes.

Observando la figura anterior vemos que, antes de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida”, los alumnos a los que les pasamos la encuesta tienen más claro que el maestro que quiere realizar actividades con niños de 0 a 6 años para que comprendan algunas nociones Matemáticas (las que tengan alguna repercusión en Educación Infantil), debe conocer mejor, a un nivel aceptable la parte de Didáctica que los contenidos matemáticos. Es comprensible que ocurra esto ya que aún no

han visto la utilidad que puede tener estudiar Matemáticas para proponer actividades a niños tan pequeños y, sin embargo, algunos —los que estudian Magisterio— saben que estudiar Didáctica les ha servido, además de para otras cosas, para saber lo que es una actividad, cómo deben redactarlas y los tipos de actividades que pueden proponer.

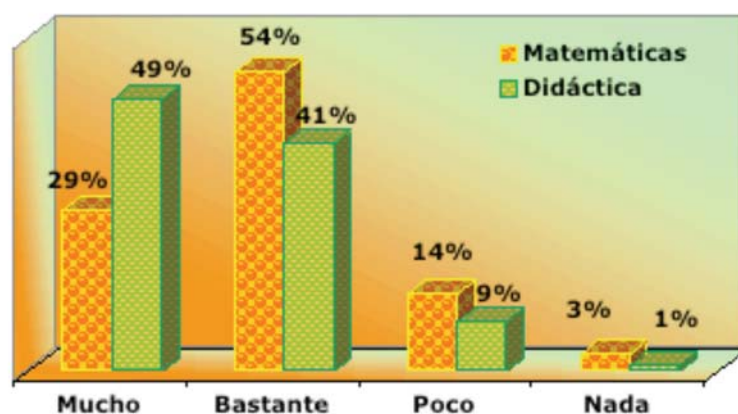


Figura 88: Comparación del dominio de aceptable de Matemáticas con Didáctica, después.

Después de estudiarse el tema, las opiniones de que deben conocer los contenidos matemáticos ganan sobre las de que deben conocer los didácticos. Quizás sea porque descubren que la idea que ellos tenían de magnitud y de medida no era del todo correcta y, aunque intuitivamente puedan proponer actividades a los niños de Infantil, no saben para qué les sirven dichas actividades y qué conocimientos puede obtener o descubrir el niño con ellas.

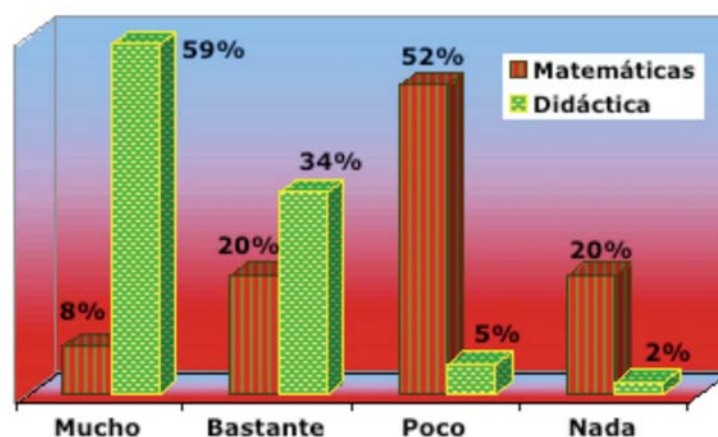


Figura 89: Comparación de no estudiar Matemáticas con no estudiar Didáctica, antes.

Comparamos las respuestas que dan cuando se les dice que con los conocimientos matemáticos que aprendieron en el Instituto es suficiente, con que no es necesario saber Didáctica pues con la intuición

que tiene cualquier persona para enseñar es suficiente. Esto lo hacemos antes de que se estudien el tema “las Magnitudes y su Medida”. En la figura precedente vemos que son muchos más los que piensan que no es necesario estudiar Didáctica (93% mucho o bastante) que los que opinan que no es necesario estudiar más Matemáticas (28% mucho o bastante). Esto era de esperar, en parte porque son los que a ellos les cuestan más, los más valorados por la sociedad.

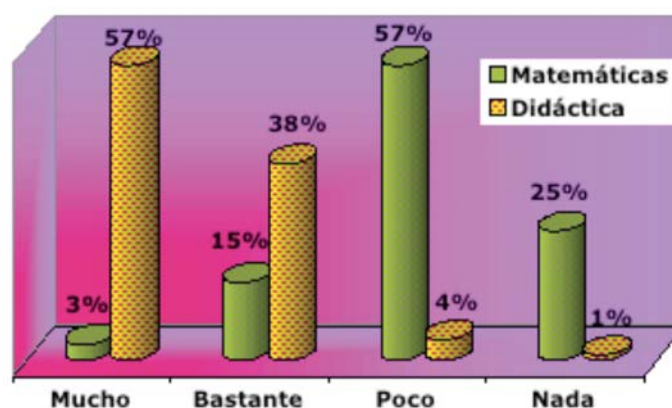


Figura 90: Comparación de no estudiar Matemáticas con no estudiar Didáctica, después.

Como podemos observar en la figura precedente son muchísimos más los alumnos que opinan que no es necesario estudiar Didáctica (95% mucho o bastante) que los que consideran que no es necesario estudiar Matemáticas (18% mucho o bastante), después del estudio del tema y de las técnicas. Los comentarios son análogos a los que hemos hecho en el apartado anterior.

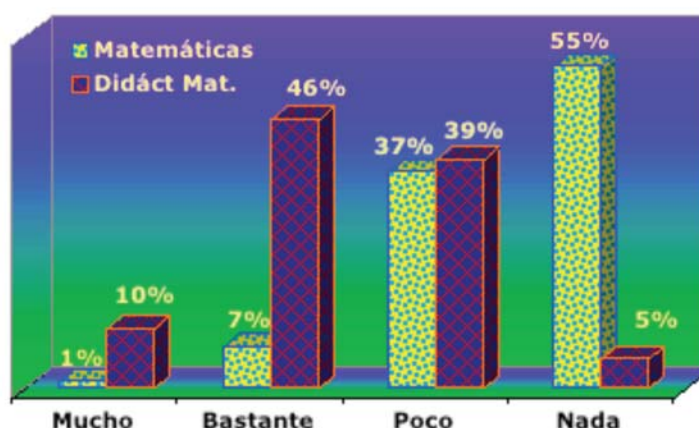


Figura 91: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica de la Matemática, antes.

Como podemos ver en la figura precedente, antes del estudio del tema y de las técnicas de Metodología Creativa, los alumnos consideran mayoritariamente que para realizar actividades con niños de Educación Infantil sobre algunas nociones de Matemáticas, el maestro debe tener un dominio total de Didáctica de la Matemáticas (56% mucho o bastante). Sin embargo, para el dominio total de Matemáticas, una mayoría aplastante entiende que no tiene que tener un dominio total (92% poco o nada).

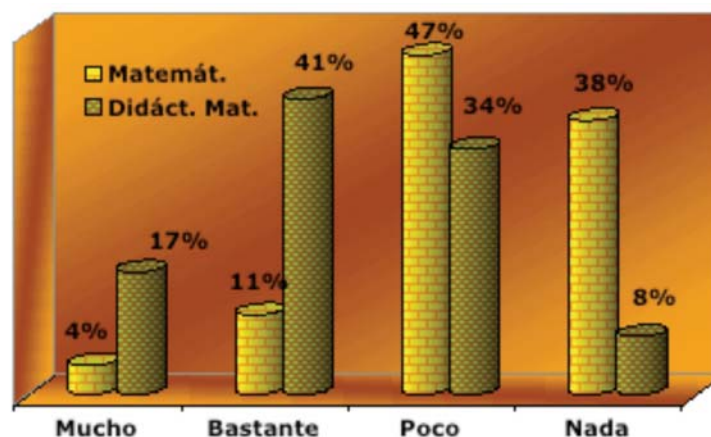


Figura 92: Comparación de dominio total de Matemáticas con Didáctica de la Matemática, después.

Después del estudio del tema y de las técnicas, como podemos observar en la figura adjunta, la diferencia entre los que opinan que es necesario tener un conocimiento total de Didáctica de la Matemática (58% mucho o bastante) pero no de Matemáticas (85% poco o nada) se suaviza un poco.

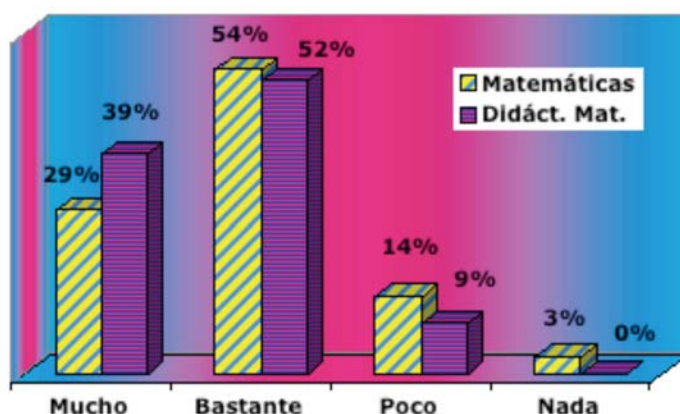


Figura 93: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas con Didáctica de la Matemática, antes.



La mayoría de los alumnos están a favor de que la persona que quiera proponer actividades a los niños de Educación Infantil deba tener un dominio aceptable tanto en Matemáticas (75% mucho o bastante) como en Didáctica de la Matemática (95% mucho o bastante), inclinándose la balanza a favor de esta última. Pensamos que la causa puede ser que haya influido en esta respuesta el hecho de que haya un grupo —los que no estudian Magisterio— que ha visto la necesidad del estudio de esta asignatura.

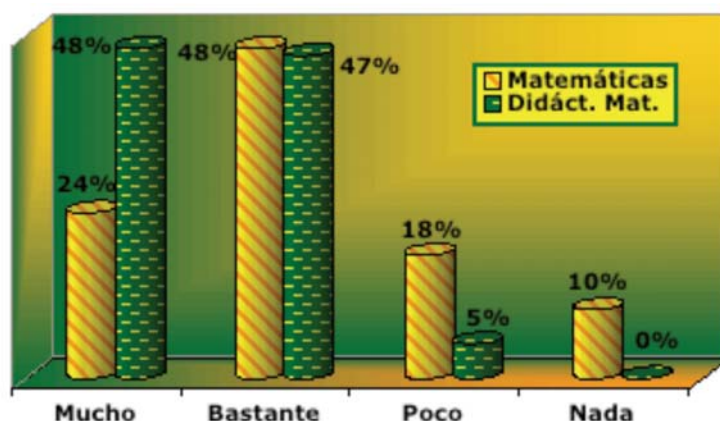


Figura 94: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas con Didáctica de la Matemática, después.

Después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos continúan opinando que la persona que quiera proponer actividades a los niños sobre algunos temas de Matemáticas debe tener un conocimiento aceptable de Matemáticas (83% mucho o bastante) y de Didáctica de la Matemática (91% mucho o bastante), disminuyendo la diferencia que antes había.

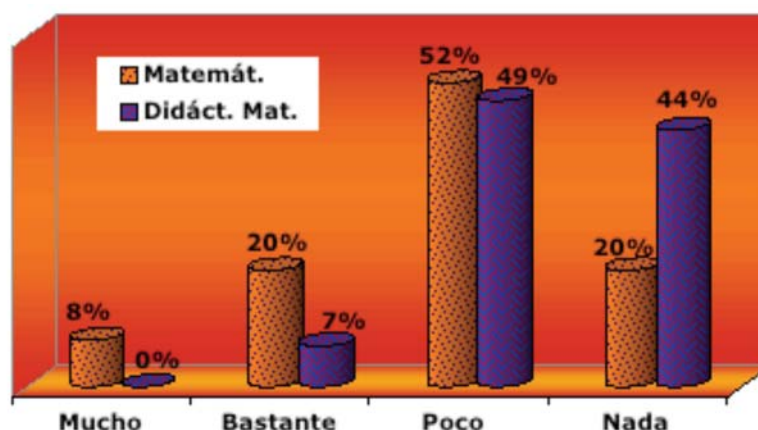


Figura 95: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Didáctica de la Matemática, antes.

Como podemos ver en la figura anterior, antes del estudio del tema y de las técnicas los alumnos opinan que es necesario estudiar Matemáticas (72% poco o nada) y Didáctica de la Matemática (93% poco o nada), inclinándose a favor de ésta última. La razón puede ser la dificultad que supone el estudio de las Matemáticas y la ignorancia por parte de los alumnos de hasta dónde se puede llegar a profundizar en Didáctica de la Matemática.

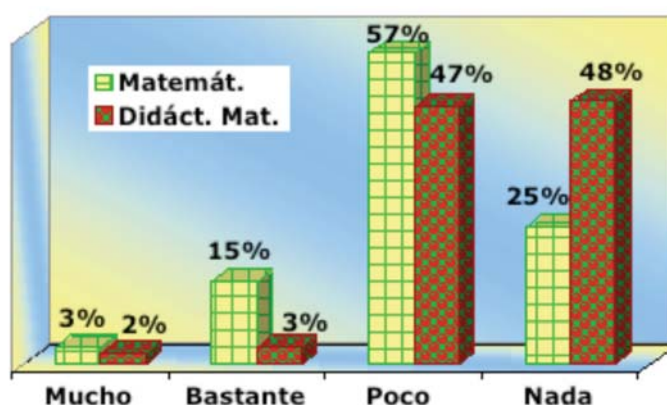


Figura 96: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Didáctica de la Matemática, después.

Después del estudio del tema y de las técnicas, las diferencias entre los porcentajes de los alumnos que opinan que no es necesario estudiar Matemáticas (82% poco o nada) con los que creen que no es necesario estudiar Didáctica de la Matemática (95% poco o nada) se reduce un poco, aunque todavía gana la asignatura Didáctica de la Matemática.

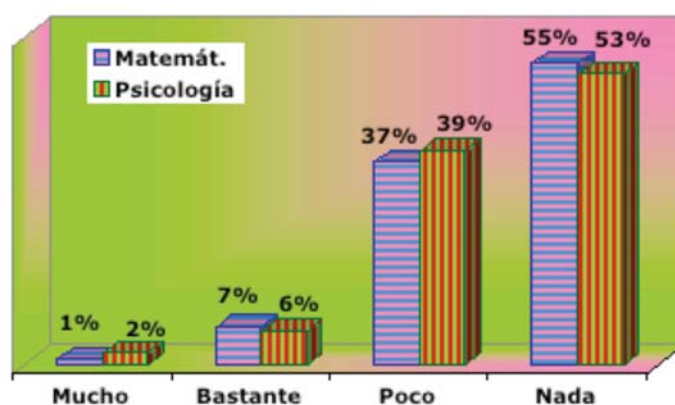


Figura 97: Comparación de dominio total de Matemáticas con Psicología, antes.

Como puede verse en la figura anterior, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos consideran, con los mismos porcentajes

(92% poco o nada), que no se debe tener un dominio total de Matemáticas ni de Psicología.

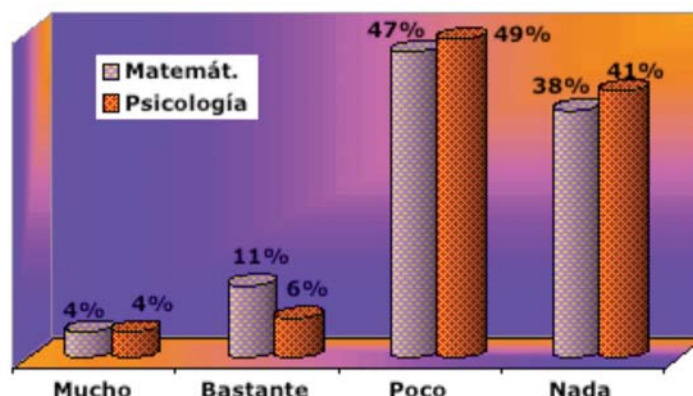


**Figura 98: Comparación de dominio total de Matemáticas con Psicología, después.**

Después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos siguen pensando que no debe tenerse un dominio total ni en Matemáticas (85% poco o nada) ni en Psicología (90% poco o nada), aunque existe una pequeña diferencia entre ambos porcentajes a favor de ésta última. Después de ver la dificultad que supone el estudio del tema “las Magnitudes y su Medida”, algunos alumnos han pensado que para proponer actividades a los niños de Educación Infantil sobre Matemáticas es mejor tener conocimientos de esta parcela del saber.

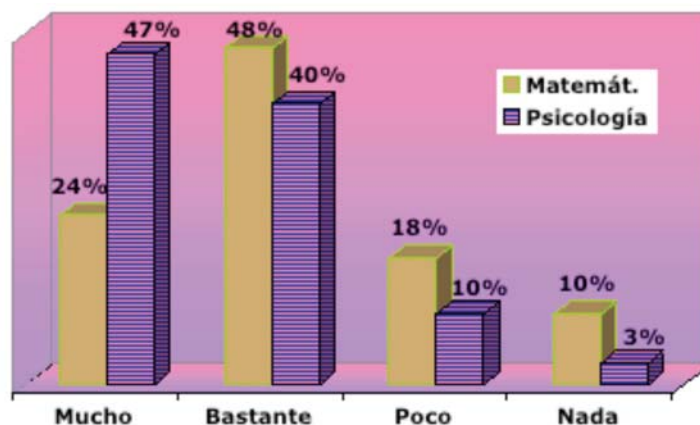


**Figura 99: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas y de Psicología antes.**

Como podemos observar en la figura que precede, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos consideran mayoritariamente que para proponer actividades a los niños se debe tener un dominio aceptable tanto de Matemáticas (72% mucho o bastante) como de Psicología (87% mucho o bastante). En este caso



hay un aumento a favor de esta última asignatura. Pensamos que puede ser debido a que las Matemáticas ya las conocen de su paso por el Bachillerato, sin embargo los que no cursan Magisterio no tienen ningún conocimiento de Psicología.

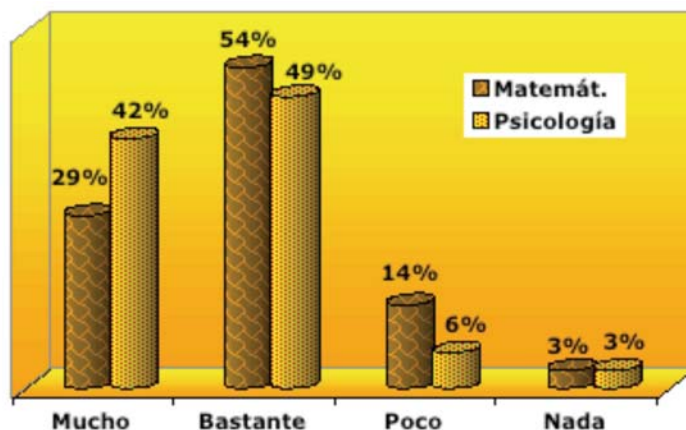


Figura 100: Comparación de dominio aceptable de Matemáticas y de Psicología, después.

Después del estudio del tema y de las técnicas, siguen pensando mayoritariamente que se debe tener un conocimiento aceptable tanto de Matemáticas (83% mucho o bastante) como de Psicología (91% mucho o bastante). Aunque los porcentajes han aumentado, las diferencias se mantienen, de forma parecida a como ocurría antes del estudio del tema y de las técnicas.

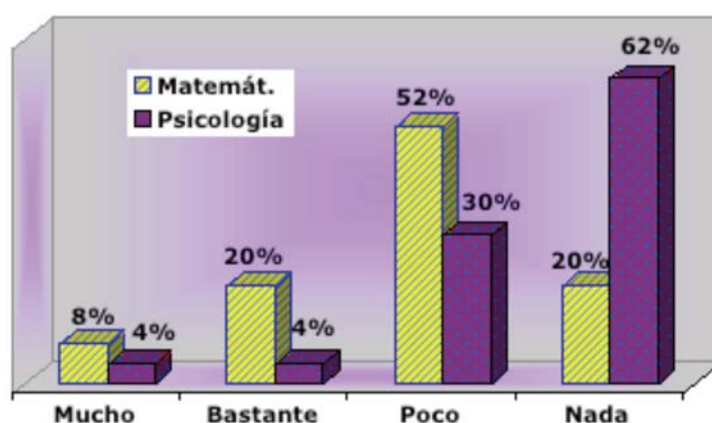


Figura 101: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Psicología, antes.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, la mayoría de los alumnos opinan que es necesario estudiar algo de Psicología (92% poco o nada) y algo más de lo que han estudiado hasta ahora de Matemáticas (72% poco o nada). Pensamos que a la hora de tener que plantearles

actividades a los niños de Educación Infantil han visto que necesitaban estas materias.

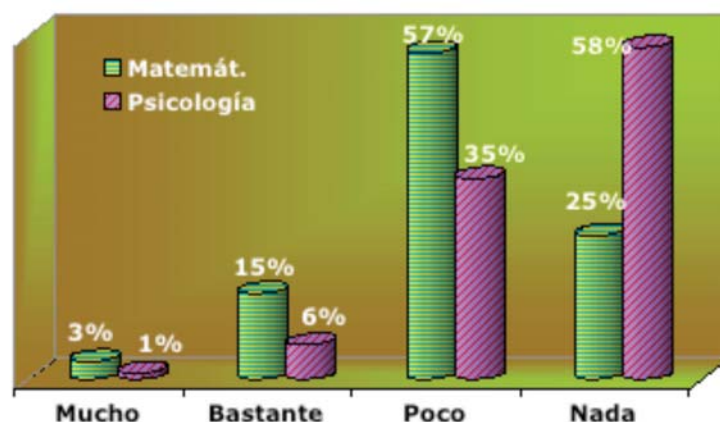


Figura 102: Comparación de no es necesario estudiar Matemáticas con Psicología, después.

Después de estudiarse el tema y las técnicas siguen pensando que se deben tener mayores conocimientos de Matemáticas (82% poco o nada) que los de Bachillerato y algunos de Psicología (93% poco o nada). Siguen manteniéndose las diferencias de porcentajes a favor de ésta última.

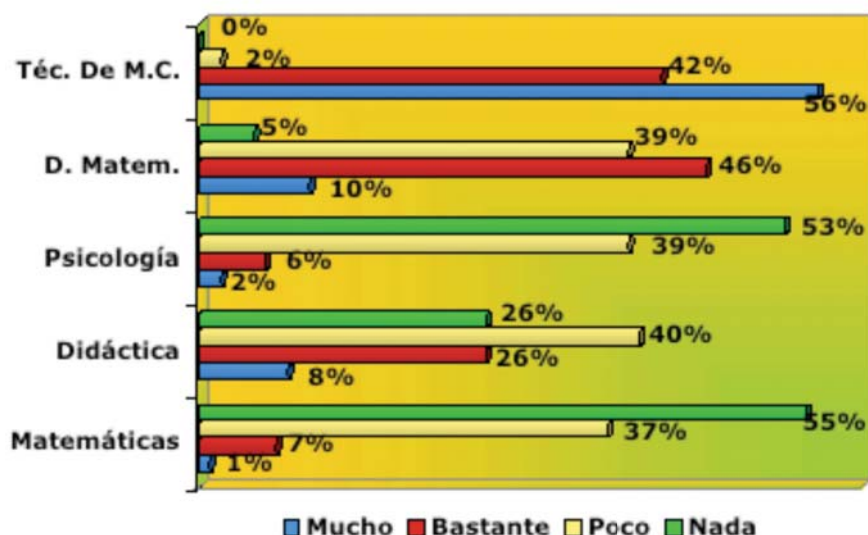


Figura 103: Comparación del dominio total de las distintas materias antes.

En la figura anterior y en la que viene a continuación comparamos las opiniones que dan del dominio total de las distintas materias, antes y después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa. Antes del estudio de ambas materias,

vemos que el porcentaje de los alumnos que opinan que están muy de acuerdo va en este orden: 1° las técnicas de Metodología Creativa (56%), 2° la Didáctica de la Matemática (10%), 3° la Didáctica (8%), 4° la Psicología (2%) y 5° las Matemáticas (1%). Los que opinan que están bastante de acuerdo van en este orden: 1° la Didáctica de la Matemática (46%), 2° las técnicas de Metodología Creativa (42%), 3° la Didáctica (26%), 4° las Matemáticas (7%) y 5° Psicología (6%).

Considerando conjuntamente estos resultados podemos afirmar que los porcentajes de los que dicen que están mucho o bastante de acuerdo de que se debe tener un dominio total de las materias consideradas va en este orden: 1° técnicas de Metodología Creativa (98%), 2° Didáctica de la Matemática (52%), 3° Didáctica (34%) y 4° Matemáticas y Psicología en el mismo nivel (8%).

En resumen: opinan mayoritariamente que es muy importante conocer las técnicas de Metodología Creativa y, sin embargo, no es necesario tener un dominio total de Matemáticas y, además, menos que de ninguna otra materia de las consideradas excepto de Psicología. Creemos que es debido a que les han encantado las técnicas de Metodología Creativa y, por otro lado, a que saben las dificultades que tiene el estudio de las Matemáticas y a que piensan que el nivel necesario para enseñarlas no tiene por qué ser alto.

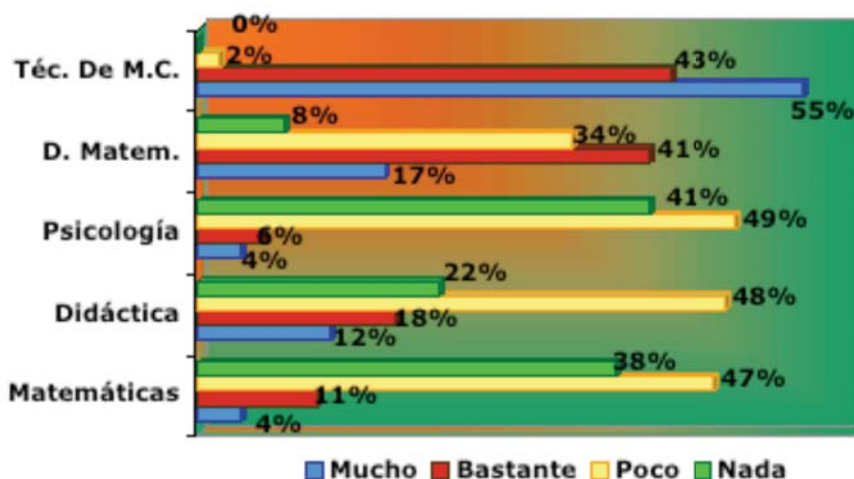


Figura 104: Comparación del dominio total de las distintas materias, después.

Después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa, consideran que están muy de acuerdo en que se debe tener un dominio total 1° de las técnicas de Metodología Creativa (55%), 2° de la Didáctica de las Matemáticas

(41%), 3° de la Didáctica (12%), 4° de la Psicología y de las Matemáticas, ambas con el mismo porcentaje (4%) y aumentando un poco respecto de lo que pasaba antes del estudio del tema y de las técnicas. El porcentaje de los que están bastante de acuerdo va en este orden: 1° las técnicas de Metodología Creativa (43%), 2° la Didáctica de las Matemáticas (41%), 3° la Didáctica (18%), 4° las Matemáticas (11%) y 5° la Psicología (6%).

Considerando conjuntamente los que opinan que están mucho o bastante de acuerdo con el dominio total de las materias consideradas tenemos: 1° las técnicas de Metodología Creativa (98%), 2° la Didáctica de la Matemática (82%), 3° la Didáctica (30%), 4° las Matemáticas (15%) y 5° la Psicología (10%).

Concluyendo, podemos decir que los alumnos opinan que se deben conocer las técnicas de Metodología Creativa, pero sin embargo, no piensan que se deba tener un dominio total de las Matemáticas, y el porcentaje es un poco mayor que para los que piensan que no hay que tener un dominio total de Psicología.

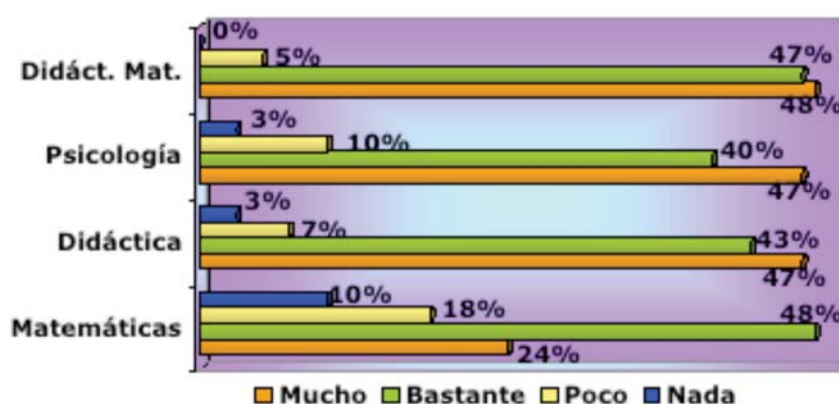


**Figura105: Comparación de dominio aceptable de las distintas materias, antes.**

En el gráfico anterior comparamos los resultados de los dominios aceptables de las distintas materias antes. No incluimos las técnicas de Metodología Creativa porque para esta materia sólo consideramos que fuese o no motivo de estudio. Como puede observarse están muy de acuerdo en que se debe tener un dominio aceptable (conocer los contenidos que tengan alguna repercusión en Educación Infantil) en este orden: 1° Didáctica de la Matemática (48%), 2° Didáctica y Psicología con el mismo porcentaje (47%) y 3° Matemáticas (24%). Los porcentajes de los que están bastante de acuerdo van en este orden: 1°

Matemáticas (48%), 2º Didáctica de la Matemática (47%), 3º Didáctica (43%) y 4º Psicología (40%).

Por tanto los alumnos, antes del estudio del tema y de las técnicas, consideran mayoritariamente que se debe tener un dominio aceptable de las distintas materias objeto de nuestro estudio. Si bien, para los que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo, los porcentajes van en este orden: 1º Didáctica de la Matemática (95%), 2º Didáctica (90%), 3º Psicología (87%) y por último Matemáticas (72%). Pensamos que las Matemáticas quedan en último lugar porque es la asignatura que más les cuesta y algunos creen que es mejor dejar las cosas como están, sin profundizar de forma obligatoria en los contenidos matemáticos que después de alguna forma van a ser útiles en su futuro profesional.

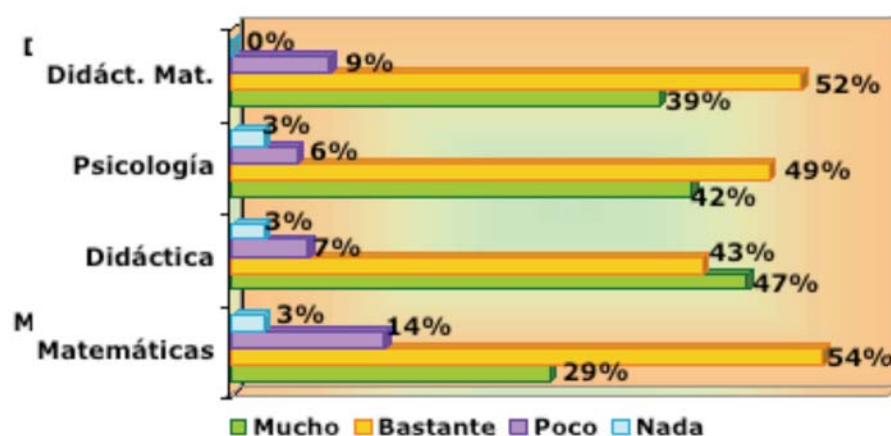


Figura 106: Comparación de dominio aceptable de las distintas materias, después.

Después del estudio del tema y de las técnicas los porcentajes de los alumnos que están muy de acuerdo en que se debe tener un dominio aceptable de las distintas materias van en este orden: 1º Didáctica (47%), 2º Psicología (42%), 3º Didáctica de la Matemática (39%) y 4º Matemáticas (29%). Los porcentajes de los que están bastante de acuerdo van desde 1º Matemáticas (54%), 2º Didáctica de la Matemática (52%), 3º Psicología (49%) y por último Didáctica (43%).

Concluyendo podemos decir que, después del estudio del tema y de las técnicas, están muy de acuerdo o bastante de acuerdo en que se debe tener un dominio aceptable 1º de Psicología y de Didáctica de la Matemática con el mismo porcentaje (91%), 2º de Didáctica (90%), y 3º de Matemáticas (83%). Respecto de lo que opinaban antes los

porcentajes han aumentado para todas las materias menos para Didáctica de la Matemática, eso puede ser debido a la necesidad que han experimentado, a la hora de proponer actividades, del estudio de las demás asignaturas.

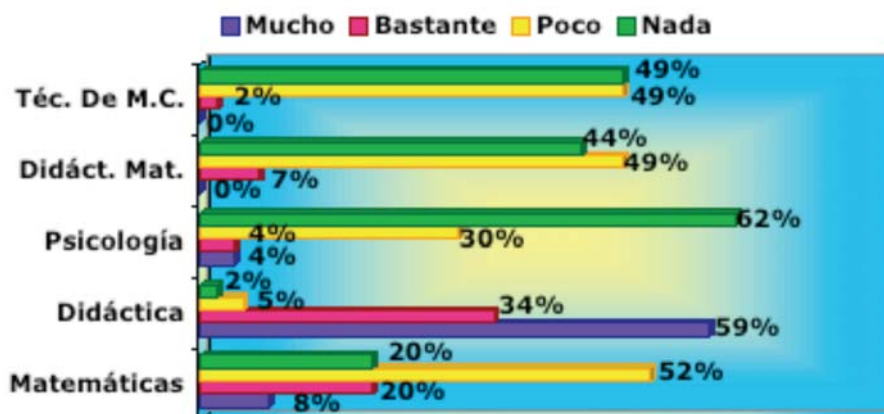


**Figura 107: Comparación de no es necesario el estudio de las distintas materias, antes.**

En este caso, volvemos a incluir las técnicas de Metodología Creativa porque tiene sentido plantear a los alumnos si consideran o no necesario el estudio de dichas técnicas.

Antes del estudio del tema y de las técnicas los porcentajes de los que no están nada de acuerdo van en este orden: 1º Psicología (62%), 2º técnicas de Metodología Creativa (49%), 3º Didáctica de la Matemática (44%), 4º Matemáticas (20%) y 5º Didáctica (2%). Los porcentajes de los que están poco de acuerdo van desde: 1º Matemáticas (51%), 2º técnicas de Metodología Creativa y Didáctica de la Matemática con el mismo porcentaje (49%), 3º Psicología (30%) y 5º Didáctica (5%).

Por tanto los porcentajes de los alumnos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, están nada de acuerdo o poco de acuerdo en que no se deben de estudiar las distintas materias objeto de nuestra consideración van en este orden: 1º técnicas de Metodología Creativa (98%), 2º Didáctica de la Matemática (93%), 3º Psicología (92%), 4º Matemáticas (71%) y Didáctica (7%). Excepto para la Didáctica la mayoría tienen claro que es necesario estudiar las distintas asignaturas.



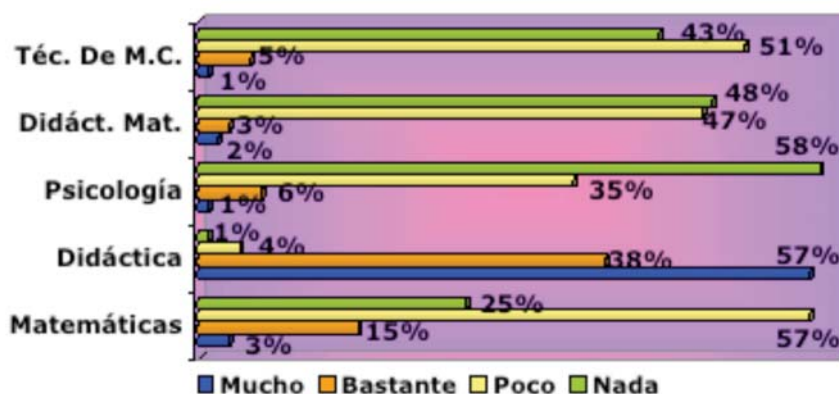


Figura 108: Comparación de no es necesario el estudio de las distintas materias, después.

Después del estudio del tema y de las técnicas los porcentajes de los alumnos que dicen que no están nada de acuerdo en que no se deben de estudiar las materias que hemos considerado van en este orden: 1° Psicología (58%), 2° Didáctica de la Matemática (48%), 3° técnicas de Metodología Creativa (43%), 4° Matemáticas (25%) y 5° Didáctica (1%). Los porcentajes de los que dicen que están poco de acuerdo van: 1° Matemáticas (57%), 2° técnicas de Metodología Creativa (51%), 3° Didáctica de la Matemática (47%), 4° Psicología (35%) y 5° Didáctica (4%).

Considerando conjuntamente los que dicen que no están nada de acuerdo y los que dicen que están poco de acuerdo los resultados son: 1° Didáctica de la Matemática (95%), 2° técnicas de Metodología Creativa (94%), 3° Psicología (93%), 4° Matemáticas (82%) y Didáctica (5%). También después del estudio del tema y de las técnicas la mayoría considera que se deben estudiar las distintas materias excepto la Didáctica.

#### 5.2.3.7. Comparación de los resultados de los dominios de cada una de las materias

Vamos a comparar los resultados obtenidos en la consulta al segundo apartado de las dos encuestas. Para ver más fácilmente todos estos resultados vamos a sumar, por un lado, los que dicen que están muy de acuerdo con los que están bastante de acuerdo y les vamos a llamar sí, y vamos a sumar, por otro, los que dicen que están poco de acuerdo con los que están nada de acuerdo y les vamos a llamar no. Se

van a considerar dos o tres niveles en el dominio de las distintas materias, según los casos: total, aceptable y bajo o del Instituto, en este último se consideran que son necesarios sólo los conocimientos que se adquieren con la vida, sin ningún estudio previo ó, en el caso de las Matemáticas, con los conocimientos que ya tienen del Instituto. Recogiendo todo lo que hemos visto anteriormente tenemos las figuras que vienen a continuación.

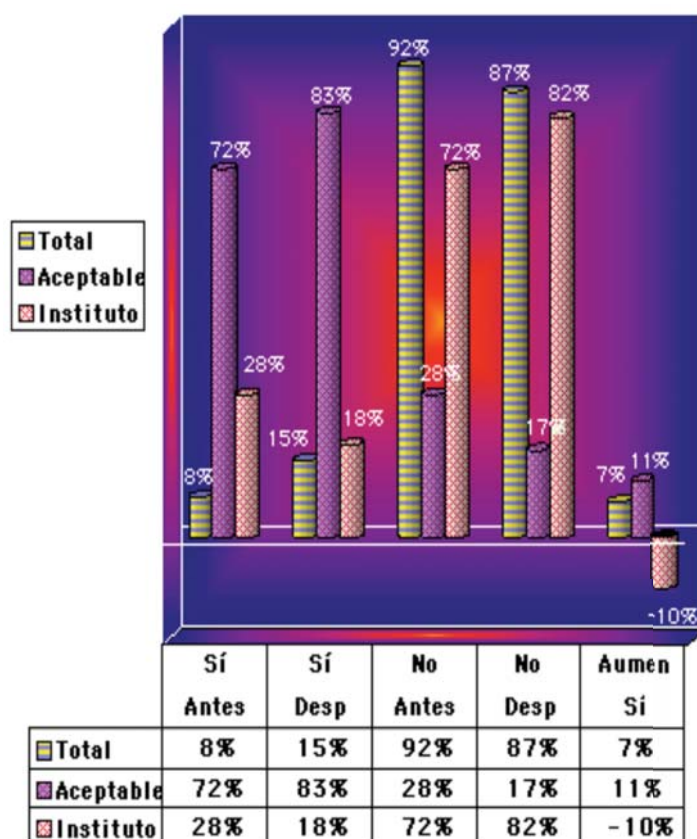


Figura109: Dominio de las Matemáticas.

Se observa un aumento, después del estudio del tema y de las técnicas, del sí, tanto en el dominio total como en el aceptable de las Matemáticas. Sin embargo, hay una disminución en la consideración de que con los conocimientos matemáticos del Instituto tengan bastante para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.



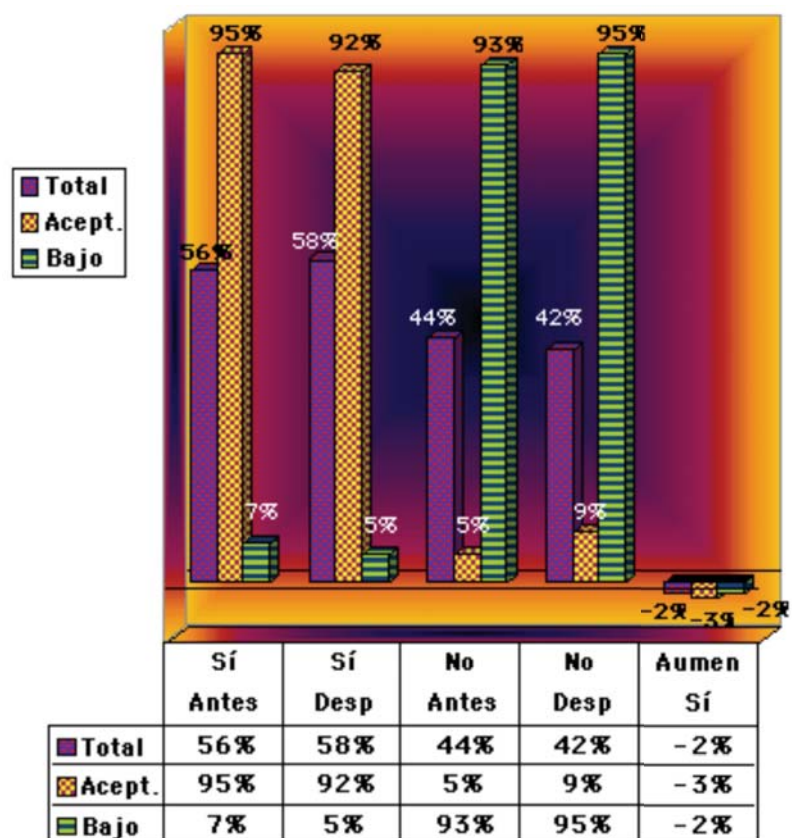


Figura 110: Dominio de la Didáctica de la Matemática.

En el caso del dominio de la Didáctica de la Matemática se tiene una disminución, después del estudio del tema y de las técnicas, en todos los niveles: total, aceptable y bajo.

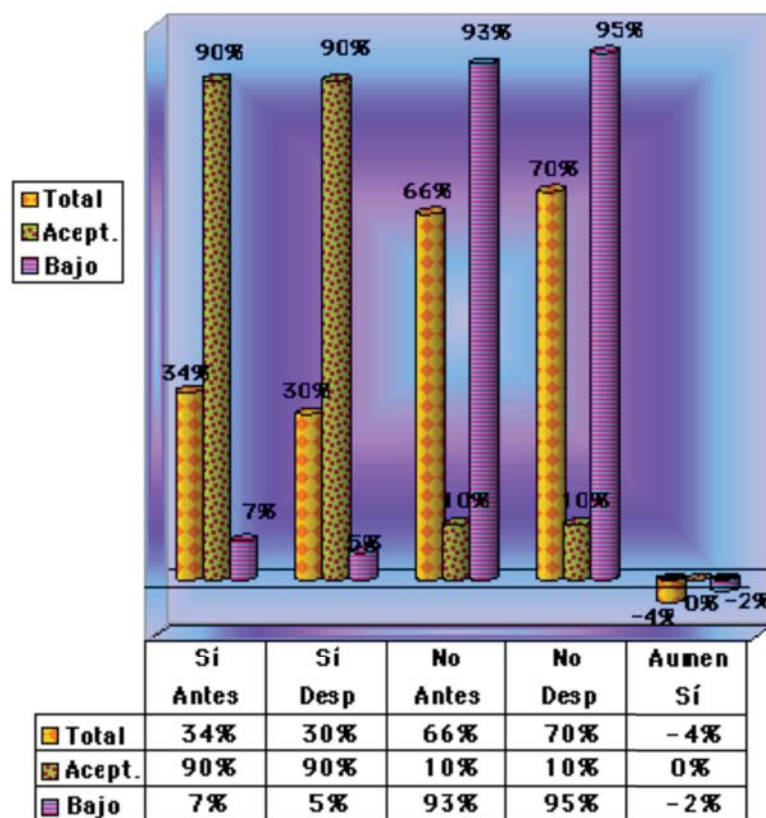


Figura 111: Dominio de la Didáctica.

Con el dominio de la Didáctica se tiene una situación bastante parecida a la que había en el caso de la Didáctica de la Matemática, aunque en este caso se mantiene el dominio aceptable.

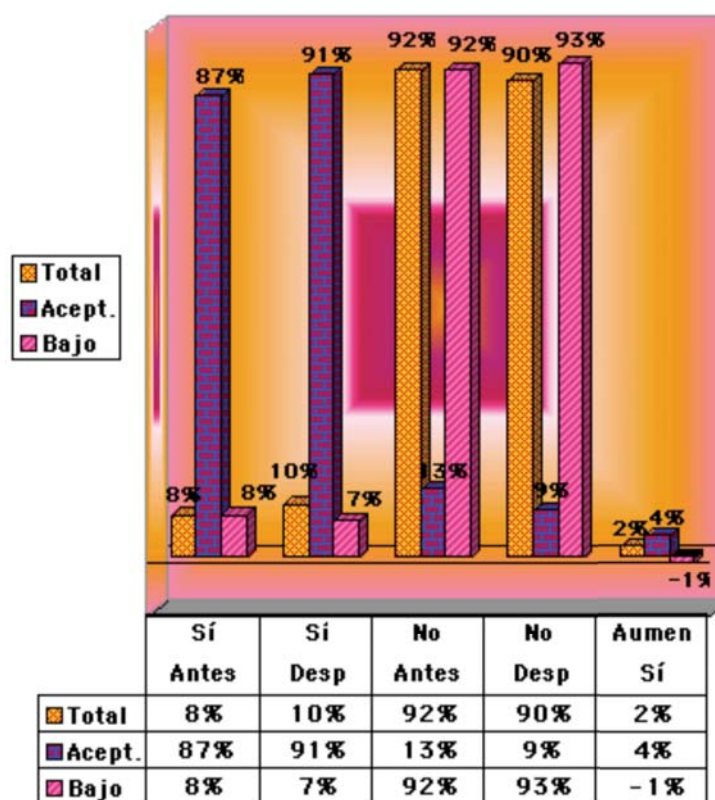


Figura112: Dominio de la Psicología.

De la figura adjunta y de la tabla que le acompaña se puede deducir que la situación es bastante parecida a la que se tenía en el caso de las Matemáticas: aumenta el dominio total y aceptable y disminuye el bajo.

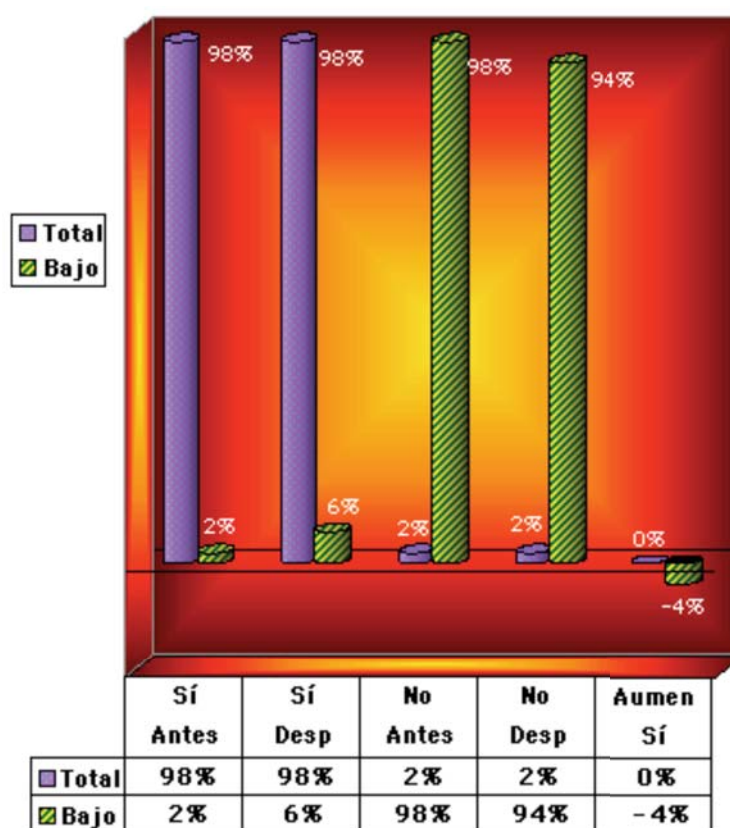


Figura 113: Dominio de las técnicas de Metodología Creativa.

Aunque el porcentaje de alumnos que dice que sí se debe tener un dominio total de las técnicas de Metodología Creativa es bastante alto, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, no varía, después de dicho estudio, el dominio total y disminuye el dominio bajo.

A la vista de los resultados anteriores, podemos decir que hay mayor número de alumnos que piensan que con las Matemáticas que aprendieron en el Instituto es suficiente; quizás sea porque reconocen que de Matemáticas tienen algunos conocimientos anteriores, mientras que no ocurre lo mismo con las otras tres parcelas del saber.

Los mayores aumentos se producen en Matemáticas, a lo mejor puede ser debido a que al estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” se dan cuenta de que necesitan profundizar más en esta asignatura.

Hay homogeneidad en las respuestas: mayoritariamente consideran que se han de tener conocimientos medios de todo, no extremos (ni muchos, como ser licenciado, ni pocos, como los que se adquieren de manera espontánea).

### 5.2.4. Estudio de frecuencias del tercer apartado

En este apartado les decimos que planteen tres actividades que puedan realizar con niños de Educación Infantil, sin consultar ningún material. La diferencia entre las dos encuestas es que, cuando responden a la Evaluación Final, ya han adquirido conocimientos sobre el tema y sobre las técnicas.

Para valorar las respuestas hemos considerado: la creatividad, el número de magnitudes que han utilizado y la precisión que han tenido al hacer sus planteamientos.

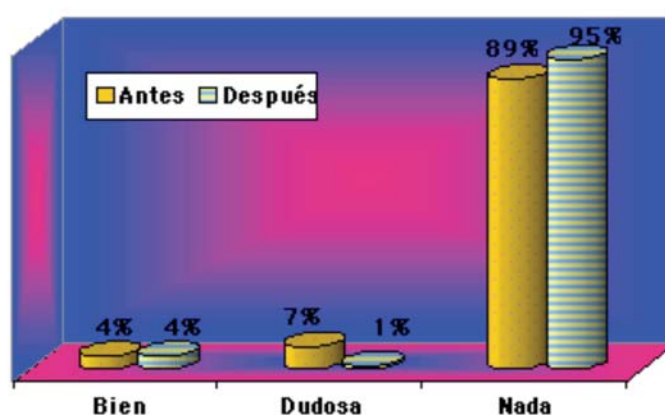


Figura 114: Tercer apartado de la encuesta.

Les pedimos que nos digan si están seguros de que la respuesta que han dado es la correcta, poniendo una B delante del número que indica el apartado que están respondiendo, o poniendo una D si tienen dudas acerca de dicha respuesta.

Son muy pocos los que escriben B o D. Creemos que ello puede ser debido a que no se han leído el párrafo donde se indica que determinen la certeza o la duda de cada respuesta emitida, van directamente a responder las cuestiones que les planteamos. El número disminuye todavía más después de leerse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa, quizás pueda ser debido a que piensan que las preguntas son las mismas que en la Evaluación Inicial, hasta ahora es así, después varían algunas. De todos modos, después de estudiarse el tema y las técnicas disminuye el porcentaje de alumnos que creen que tienen dudas en su respuesta, lo cual significa que consideran que se han enterado del tema y que las técnicas les han servido para algo.

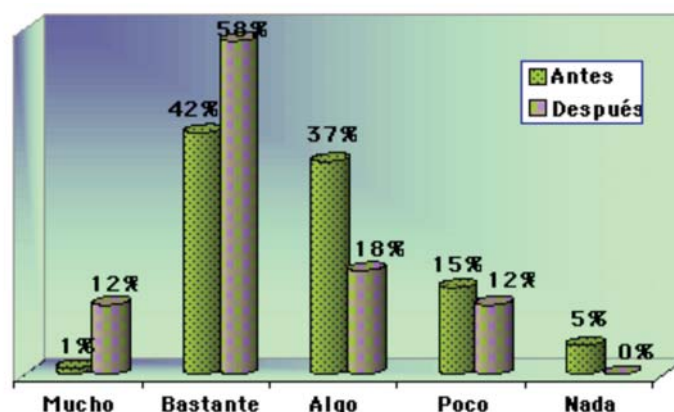


Figura 115: Creatividad en el tercer apartado.

Para medir la creatividad hemos utilizado los indicadores ya señalados en el Capítulo I, que son:

a) **Fluidez:** Considerábamos la capacidad para producir abundantes ideas cuando proponían las actividades, es decir, utilizaban varias magnitudes, establecían relaciones de igualdad o de orden entre sus cantidades...

b) **Originalidad o innovación:** Observábamos la capacidad para producir ideas diferentes, pues al proponer las actividades veíamos si eran corrientes o tenían algo más de novedad.

c) **Flexibilidad:** Vimos la capacidad de producir ideas diferentes cuando las actividades eran variadas, cuando no todas eran del mismo tipo...

d) **Elaboración:** Tuvimos en cuenta la capacidad para producir ideas reestructuradas y valoramos la riqueza de detalles, al proponer las actividades, que matizaban la idea original.

e) **Apertura:** Considerábamos la capacidad para incluir en las actividades nuevas ideas, aunque fuesen de otros y para, al proponer las actividades, hacerlo desde otros puntos de vista, algunos de los cuales no se habían comentado con anterioridad.

f) **Comunicación:** Vimos la facilidad para dar forma a la hora de redactar las actividades y también vimos la facilidad para dar a conocer a los demás de manera comprensible lo creado, cuando contaban en clase las actividades propuestas.

g) Sensibilidad y recepción: Considerábamos la capacidad para captar pequeños detalles y reaccionar ante ellos al redactar las actividades.

h) Imaginación: Tuvimos en cuenta la capacidad para “ver” lo que a simple vista no se destaca por no estar presente en la realidad, ya que no tenían delante a los niños y habían de imaginarse cómo plantear las actividades para que les gustara jugar y aprender con dichas actividades.

i) Intuición: Vimos la capacidad, por parte de nuestros alumnos, para anticiparse a ver si los niños iban a ser capaces de hacer las actividades que les planteaban.

j) Impacto: Tuvimos en cuenta la capacidad de asombrar de manera intensa a sus compañeros con las actividades.

k) Redefinición: Consideramos la capacidad para cambiar alguno o todos los datos, cambiar todo el problema o enunciarlo de forma distinta, cuando redactaran las distintas actividades.

En resumen, el nivel creativo que tuvimos en cuenta fue: expresivo, productivo, inventivo, innovador y emergente (ver Marín y De la Torre, 1991: 84 a 89).

En la figura adjunta indicamos los porcentajes del nivel de creatividad en el planteamiento, antes y después del estudio del tema. Hemos considerado cinco niveles para valorar la creatividad: muy creativa, bastante creativa, poco creativa y nada creativa. Como puede verse en la figura anterior, son mucho más creativos después del estudio del tema.

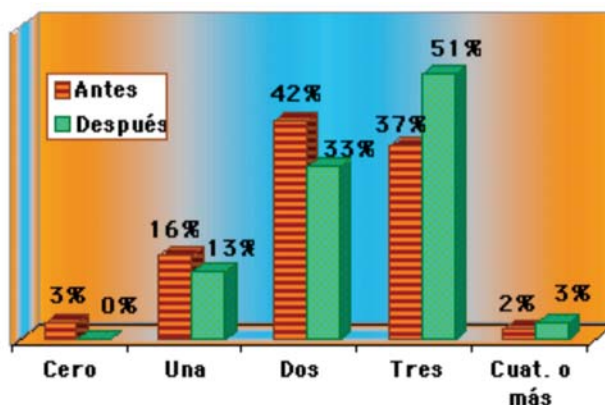


Figura 116: Número de magnitudes en el tercer apartado.



La figura anterior refleja el número de magnitudes que han utilizado a la hora de proponer actividades para niños de Educación Infantil: cero magnitudes, una magnitud, dos magnitudes, tres magnitudes, cuatro o más magnitudes. Vemos que utilizan mayor número de magnitudes después de estudiarse el tema.

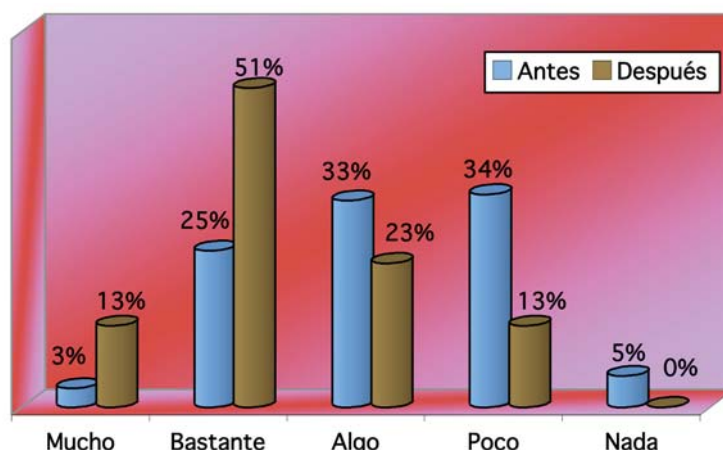


Figura 117: Precisión en el tercer apartado.

La precisión que tuvimos en cuenta consistió en la utilización del lenguaje matemático de forma correcta, aunque adaptando sus términos a lo que el niño conoce, sin que ello suponga pérdida de rigor, es decir, las actividades sobre “las Magnitudes y su Medida” tenían que dejar claro si hablaban de magnitudes o cantidades, y si la actividad conllevaban una medida, tenían que señalar, sin que hubiera lugar a dudas, con qué unidad se llevaba a cabo la medición. Si comparaban cantidades mediante la relación de orden, también había que dejar claro cómo se comparaban. En todo ello tenían que indicar los pasos a seguir y el orden en que se daban estos pasos.

Por ejemplo, si dijeran: les dejamos a los niños una serie de objetos para que los ordenen según su longitud, no sería muy precisa la actividad ya que no se dice cómo comparan los objetos para poder decir cuál es más largo o cuál es más corto. Podríamos haber añadido cómo pueden comparar los objetos: bien acercando uno al otro o bien llevando ambos objetos sobre una tira de papel para ver cuál queda más alta, o dejando que los niños decidan cómo hacer la comparación, u otra alternativa cualquiera que sirviera para comparar longitudes. Todo ello teniendo en cuenta, aunque sin mencionarlo, que una longitud es menor o igual que otra cuando hay otra longitud que sumada con la más pequeña nos da la más grande.



A la hora de valorar la precisión en el planteamiento de las actividades para los niños hemos considerado cinco niveles: mucha precisión, bastante precisión, alguna precisión, poca precisión y ninguna precisión.

Se puede observar en la figura precedente que son más precisos después del estudio del tema, ya que mientras antes del estudio del tema el 28% son muy precisos o bastante precisos, después hay un 64% que son muy precisos o bastante precisos.

### 5.2.5. Estudio de frecuencias del cuarto apartado

Este apartado tiene bastantes preguntas. En cada una de ellas, para utilizar un criterio a la hora de valorar las respuestas de los conceptos considerados, hemos creído conveniente dividir las posibles opciones de que disponen en dos: en la primera valoramos las cuatro primeras casillas conjuntamente, añadiendo a éstas el valor nada para el caso en que no marquen ninguna de las cuatro primeras casillas; en la segunda tomamos las otras dos últimas opciones analizadas a la vez; también en este caso añadimos nada por la misma razón que antes.

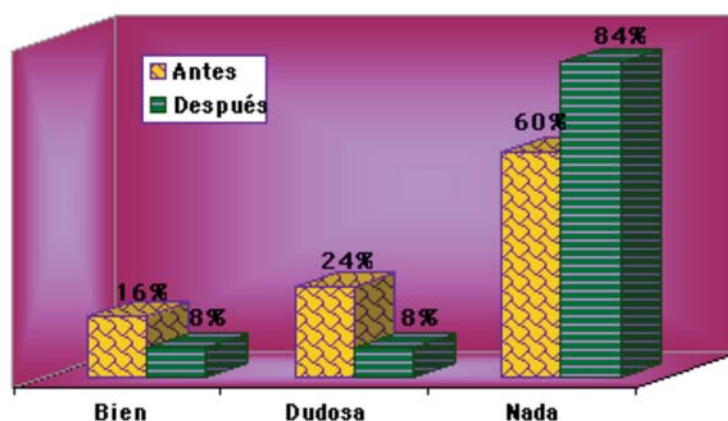


Figura 118: Cuarto apartado de la encuesta.

En la primera pregunta de este apartado les proponemos que nos digan si han tenido seguridad en las respuestas, poniendo una B delante del número, o si han tenido dudas, poniendo una D. Como antes, en el tercer apartado, la mayoría no responde nada, aumentando el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. La razón creemos que es la misma que hemos indicado en el apartado tres. Vemos en la figura precedente que disminuye notablemente el porcentaje de los que dicen que tienen dudas después del estudio del tema y de las técnicas, lo cual

era de esperar ya que esto indica que el estudio del tema y de las técnicas les aporta confianza en las respuestas que dan.

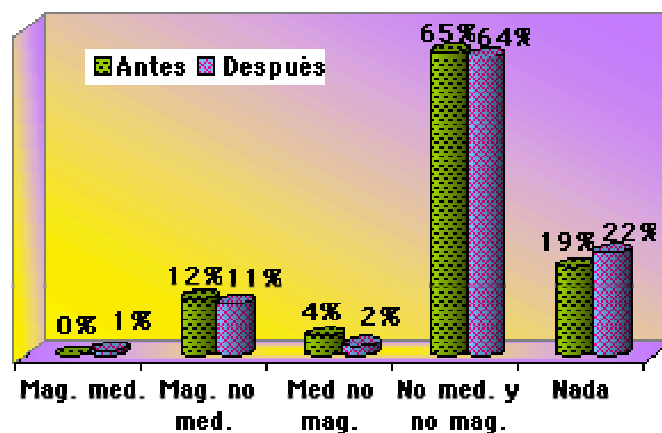


Figura 119: El cariño.

En el caso del cariño esperábamos que mayoritariamente dieran con la respuesta acertada: no es medible y no es magnitud y, como puede verse en la figura anterior, así fue. Aunque el porcentaje disminuyó un 1% después del estudio del tema y de las técnicas, la cantidad es bastante pequeña para ser tomada en cuenta. Pensamos que no respondieron por considerar que esta pregunta era igual que la que les planteamos en la Evaluación Inicial, pues el porcentaje de los que no dicen nada es mayor después del estudio del tema y de las técnicas que antes. El porcentaje de los alumnos que se equivocan al dar la respuesta a esta pregunta es mayor antes (16%) que después del estudio del tema y de las técnicas (14%), como puede verse sumando los porcentajes de los que dicen que es magnitud medible, es magnitud no medible o es medible y no es magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

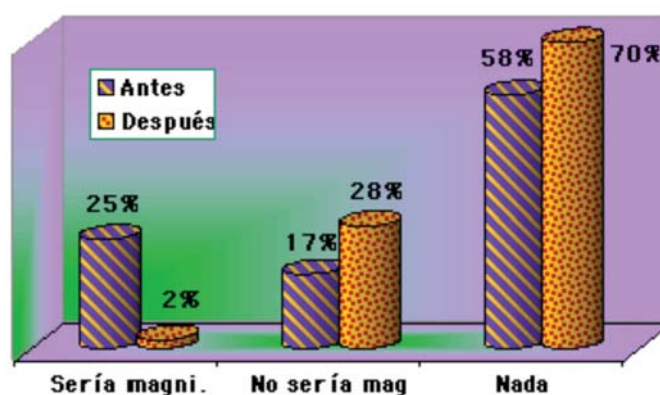


Figura 120: Si se pudiera medir el cariño, ¿sería magnitud?

Parece que no tienen claro qué pasaría si se pudiera medir el cariño, ya que la mayoría no dice nada y, lógicamente, los que responden que no es medible y no es magnitud, tendrían que haber marcado alguna de estas dos opciones finales. Sin embargo, después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa, aumenta el número de alumnos que aciertan al decir que no sería magnitud. También vemos que disminuye el porcentaje de alumnos que se equivocan diciendo que si se pudiera medir el cariño sería una magnitud. Estas dos diferencias indican que estos alumnos han comprendido esta parte del tema.

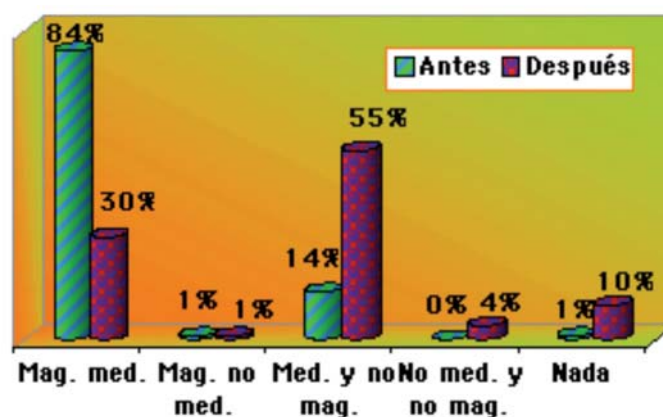


Figura 121: La temperatura.

A la hora de decidirse los alumnos por marcar las opciones que hay en el caso de la temperatura, observamos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, mayoritariamente dicen que es una magnitud medible; después disminuye considerablemente el número de alumnos que consideran que la temperatura es una magnitud no medible. Esto denota que hay alumnos que han comprendido que la temperatura es medible pero no es magnitud. Son muy pocos los que no marcan alguna de estas cuatro primeras opciones, aunque aumenta el número después del estudio del tema y de las técnicas. Quizás estos alumnos van directamente a marcar, y no leen las preguntas por considerar que ya las conocen de la Evaluación Inicial; también puede ser que estén incluidos en el 11% que después responde que no sería magnitud ni aunque se pudiera medir.

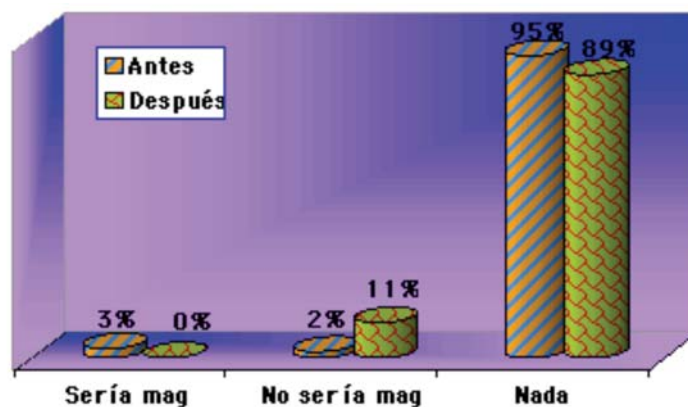


Figura 122: Si se pudiera medir la temperatura, ¿sería magnitud?

La mayoría de los alumnos no marca ninguna de las dos últimas opciones que aparecen en esta pregunta, lo cual indica que ya han marcado otra de las cuatro primeras, disminuyendo el número después del estudio del tema y de las técnicas, aunque, como se ve en la figura precedente, éstos son el 11%, que han dicho que no es magnitud ni aunque se pueda medir.

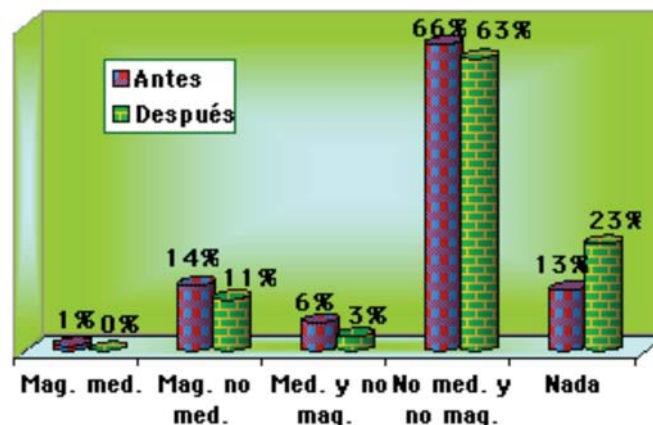


Figura 123: La alegría.

Los porcentajes que aparecen en las respuestas que dieron sobre si la alegría es o no una magnitud, es o no medible, son análogos, con pequeñas diferencias, a los que aparecieron en el caso del cariño, por tanto no vamos a repetir los comentarios.

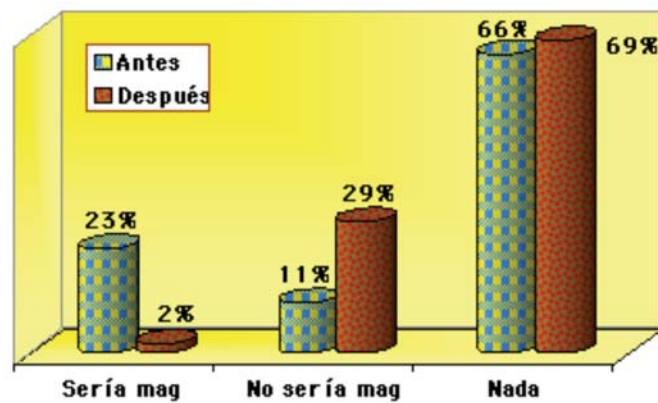


Figura 124: Si se pudiera medir la alegría, ¿sería magnitud?

También las dos últimas opciones que pueden elegir en el caso de la alegría son, con pequeñas diferencias, análogas a las que eligieron antes en el cariño. Por tanto, el comentario anterior nos sirve en este caso y no lo vamos a repetir.

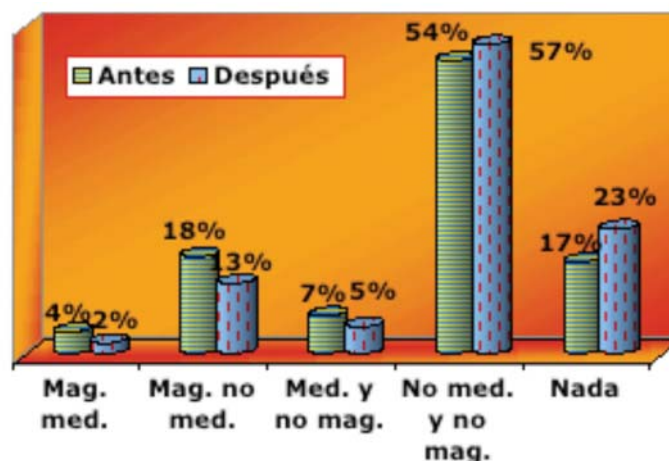


Figura 125: El dolor.

Cuando los alumnos eligen las opciones que les dejamos para que decidan si el dolor es o no una magnitud medible o no, los porcentajes son, con pequeñas diferencias, análogos a los que teníamos en el caso del cariño y no vamos a hacer otros comentarios.

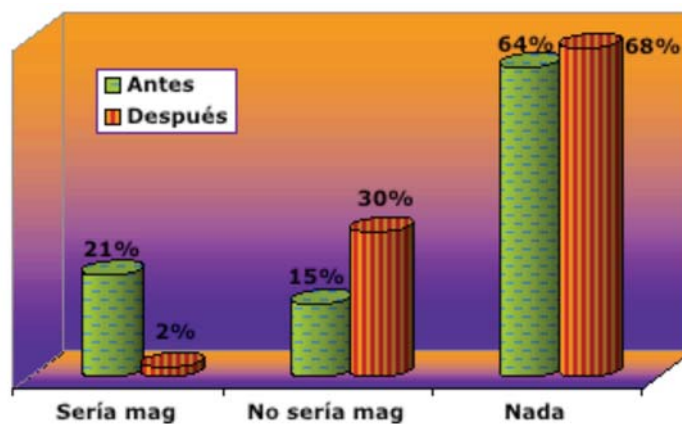


Figura 126: Si se pudiera medir el dolor, ¿sería magnitud?

Las respuestas que dan en las dos últimas opciones, en el caso del dolor, son muy parecidas a las que dieron en el cariño, por tanto repetimos los comentarios.

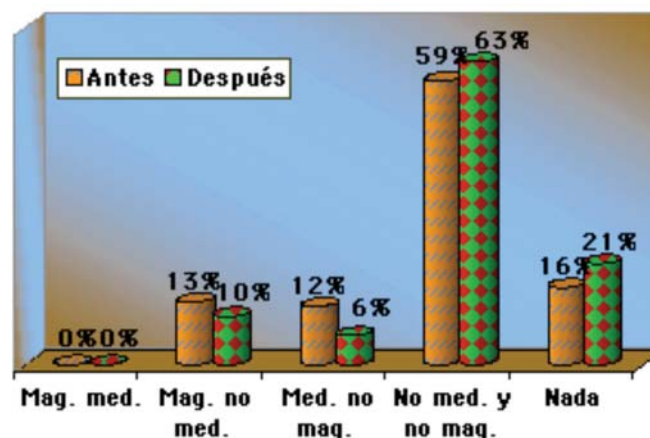


Figura 127: La fama.

Al plantearles a los alumnos si la fama es o no una magnitud, si es o no medible, vemos en el gráfico adjunto que esta pregunta ofrece alguna variación respecto del cariño: en este caso no hay ningún alumno que se despiste y diga que es magnitud medible, pensamos que es porque han ido analizando los casos anteriores y han comprendido las definiciones de magnitud y de medibilidad de una magnitud. En este caso, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de los que dicen que no es medible y no es magnitud; hay alguno más que se ha dado cuenta de que puede dar esta respuesta.



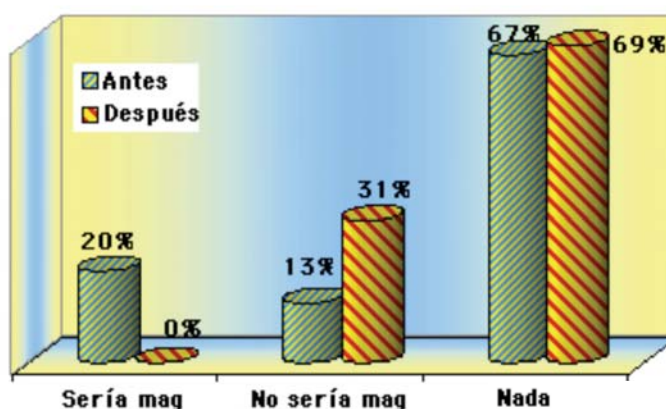


Figura 128: Si se pudiera medir la fama, ¿sería magnitud?

Cuando les planteamos a los alumnos que si podría llegar a ser una magnitud la fama en caso de llegar a medirse, observamos que las respuestas, salvo pequeñas diferencias, son prácticamente análogas a las del cariño, sólo que en este caso, después del estudio del tema y de las técnicas, no hay ningún alumno que diga que podría ser una magnitud. Esto denota que cuando han pensado en casos parecidos, van dándose cuenta de lo que es correcto.

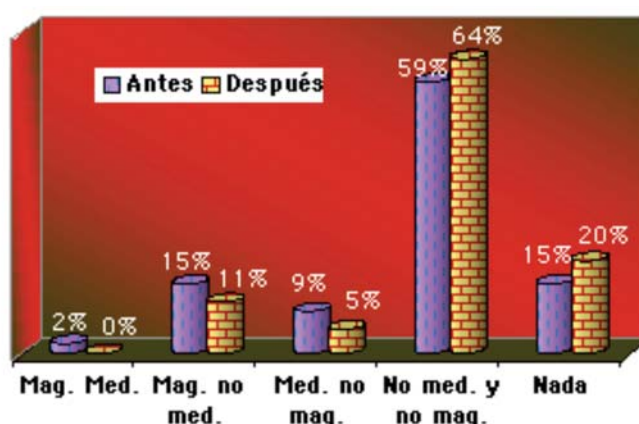


Figura 129: El interés.

El porcentaje de alumnos que han seleccionado alguna de las cuatro primeras opciones de la pregunta acerca de si el interés es una magnitud o no, si es o no medible, es muy parecido al de la pregunta análoga correspondiente al cariño. Sin embargo, en este caso, después del estudio del tema y de las técnicas no hay ningún alumno que afirme que es magnitud no medible y aumenta el porcentaje de los que afirman que el interés no es medible y no es magnitud.

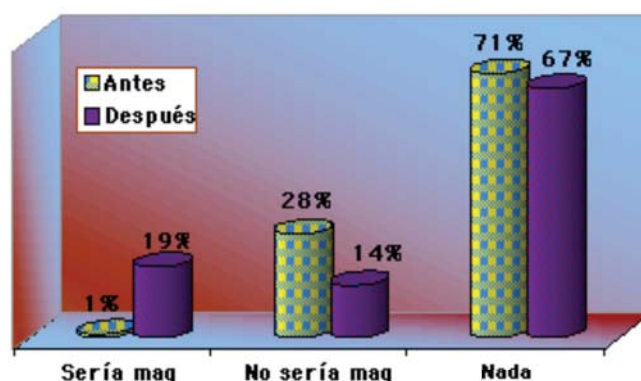


Figura 130: Si se pudiera medir el interés, ¿sería magnitud?

En este caso ha pasado algo extraño ya que, después del estudio del tema y de las técnicas, ha aumentado el porcentaje de los alumnos que afirman que si se pudiera medir el interés, sería una magnitud y ha disminuido el de los que dicen que no sería magnitud ni aunque se pudiera medir. Puede ser debido a que algunos hayan pensado que nos referíamos al interés que produce un capital. No quisimos especificar el tipo de interés del que estábamos hablando para que les surgiera la duda y, como comentábamos en la técnica el arte de preguntar, fuesen los mismos alumnos los que nos preguntaran acerca del interés del que se trataba. Sin embargo, ninguno nos hizo tal pregunta. Cada uno debió pensar en un tipo de interés distinto.

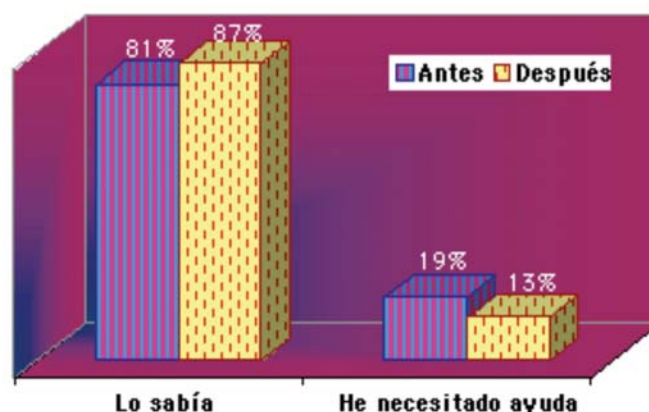


Figura 131: Ayuda para responder al 4º apartado.

El porcentaje de alumnos que dicen que han necesitado ayuda para responder las preguntas de este 4º apartado es mínimo, disminuyendo aún más después del estudio del tema y de las técnicas, como era de esperar.



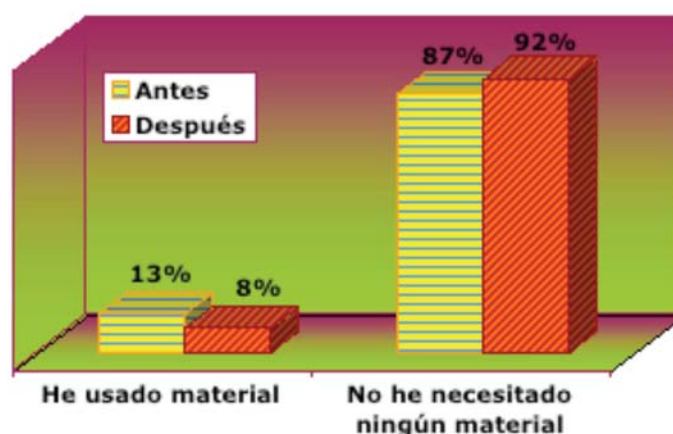


Figura 132: Material utilizado en la 4ª apartado.

El porcentaje de alumnos que utilizan algún material es mínimo y disminuye después del estudio del tema y de las técnicas, cosa lógica teniendo en cuenta, además, que permitimos que se consultaran los apuntes del tema.

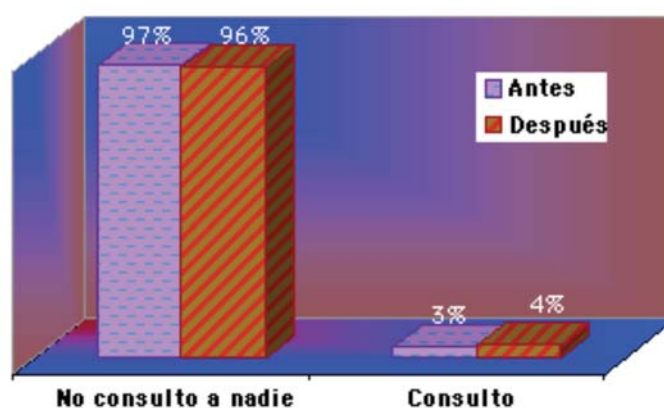


Figura 133: Personas a las que consulto para el apartado 4º.

Una mayoría de los alumnos encuestados tampoco hace uso de la posibilidad que tiene de preguntar a alguien. Hemos de destacar que hay más alumnos que consultan con alguien después del estudio del tema y de las técnicas; sin embargo, el porcentaje de los mismos es tan pequeño que no merece la pena tenerlo en cuenta.

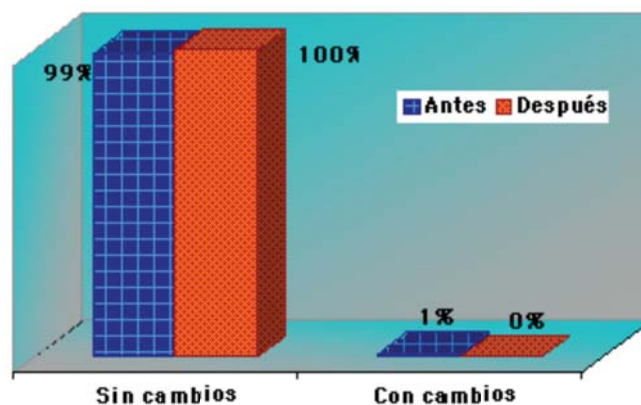


Figura 134: Cambios efectuados en la respuesta al 4º apartado.

Podemos afirmar que prácticamente no hay cambios a la hora de dar las respuestas; sólo un 1% efectúa algún cambio antes de ver el tema. Es lógico que después, al considerar que ya saben casi todo lo que esperan aprender, se den por satisfechos.

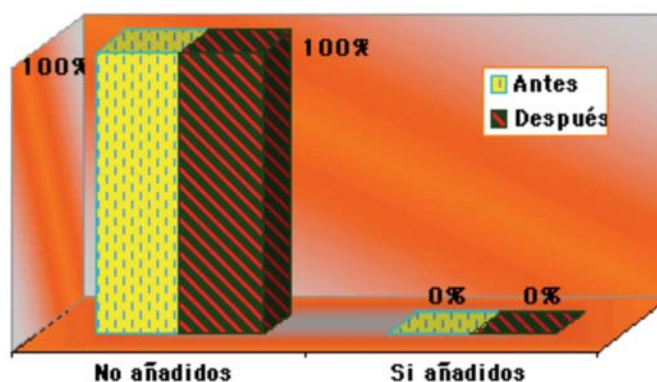


Figura 135: Añadidos en la respuesta al 4ª apartado.

Nadie añade nada a lo que se les ha ocurrido contestar, o han visto que era lo correcto afirmar, en este apartado.

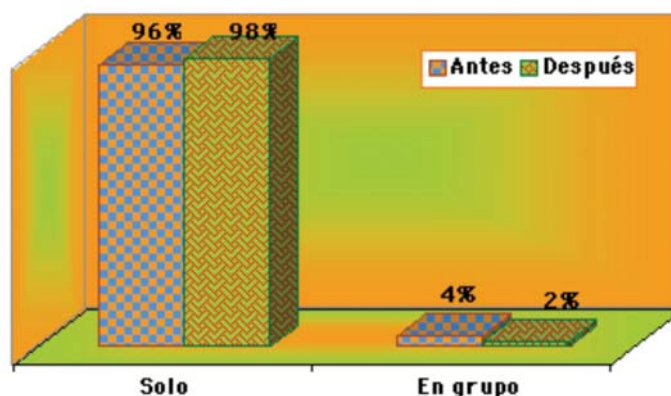


Figura 136: Grupos para responder al 4º apartado.

Son muy pocos los alumnos que consideran que es mejor trabajar sus respuestas en grupo. Aunque después, en la Evaluación Final, disminuye levemente el porcentaje de éstos, la diferencia es tan insignificante que no creemos que se deba a nada relacionado con el estudio del tema ni de las técnicas.

### 5.2.6. Estudio de frecuencias del quinto apartado de la Evaluación Inicial

Empezamos con las preguntas a las que les asignamos números distintos en la Evaluación Inicial y en la Evaluación Final. Esto es debido a que en la Evaluación Final incluimos otra pregunta más, que también comentamos al final de este apartado.

El apartado quinto de la Evaluación Inicial y el sexto de la final versan sobre la definición de magnitud. Para evaluarlo tenemos solamente en cuenta la exactitud con que dan tal definición.

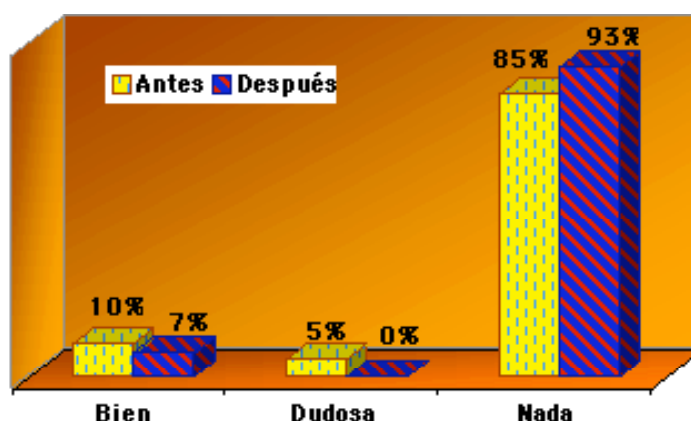


Figura 137: Quinto apartado de la Evaluación Inicial.

Como en los apartados anteriores, son muy pocos los alumnos que dicen si piensan que han respondido bien o que han tenido dudas a la hora de responder las cuestiones que les planteamos, aumentando el porcentaje de los mismos después del estudio del tema y de las técnicas. Quizás podamos achacar tal comportamiento a que van directamente a responder a las preguntas, sin reparar en que les habíamos advertido que debían marcar B o D. Son muchos menos los que tienen dudas después del estudio del tema y de las técnicas, lo que consideramos lógico, entre otras razones, porque el tema está dado con bastante profundidad.

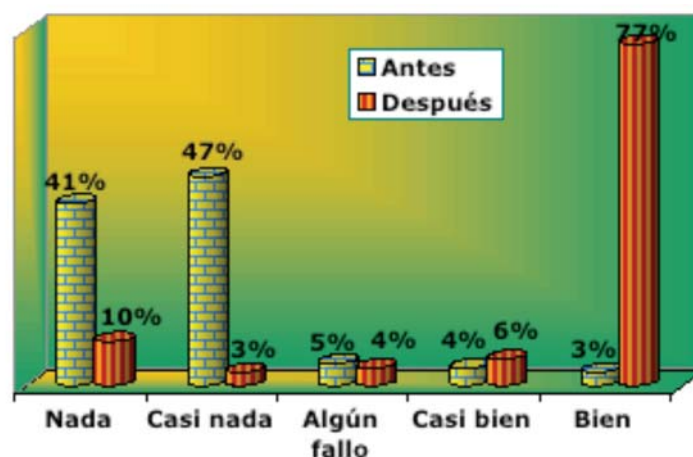


Figura 138: Exactitud en la definición de magnitud.

A la hora de definir lo que es una magnitud, hemos considerado la exactitud de la respuesta y hemos tenido en cuenta cinco niveles: no dicen nada, no dicen casi nada, dicen algo pero tienen algún fallo, la respuesta está casi bien y la respuesta está bien. Como puede verse de manera clarísima, la respuesta acertada que la gran mayoría da, después del estudio del tema y de las técnicas, ha aumentando considerablemente el porcentaje con respecto al de los que habían dado una respuesta acertada antes. De nuevo es lógico lo que se observa: que un gran número de alumnos ( $4\% + 6\% + 77\% = 89\%$ ) ha comprendido la definición de magnitud.

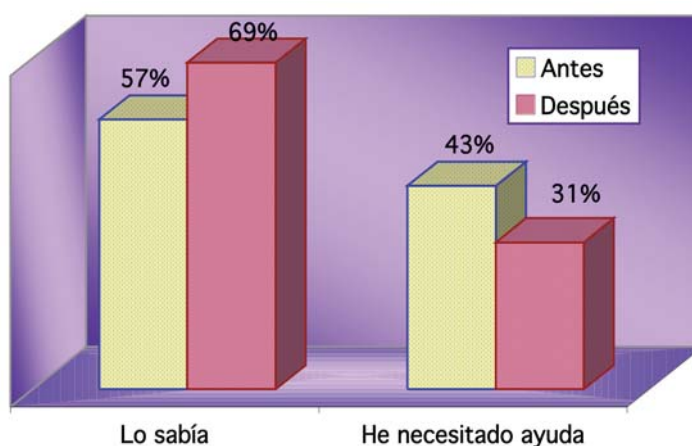


Figura 139: Ayuda en la definición de magnitud.

En este apartado, el porcentaje de alumnos que dicen que han necesitado ayuda es mayor que en los apartados anteriores, si bien dicho porcentaje era superior antes del estudio del tema y de las técnicas. Nos parece lógico lo que ocurre porque cuando vieron esta pregunta (y otras del estilo) se quedaron sorprendidos. Incluso hubo algún alumno al que

“se le tambaleó todo” al ser preguntado acerca de magnitudes no medibles.

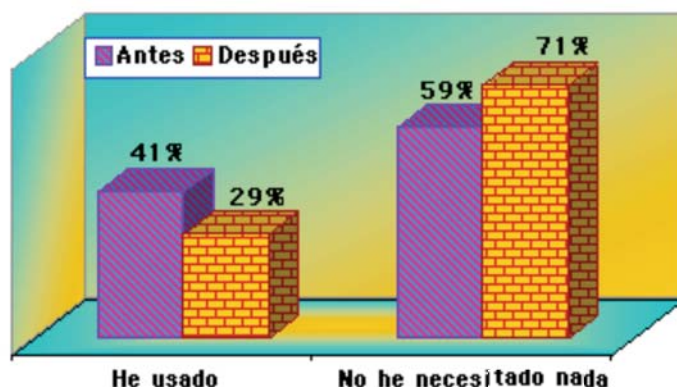


Figura 140: Material en la definición de magnitud.

En cuanto al uso o no de algún material para responder a la definición de magnitud, se aprecia que disminuye el porcentaje de alumnos que, después del estudio del tema y de las técnicas, hacen uso de dicho material. Es lógico que ocurra esto pues los apuntes que les damos ya son un buen apoyo.

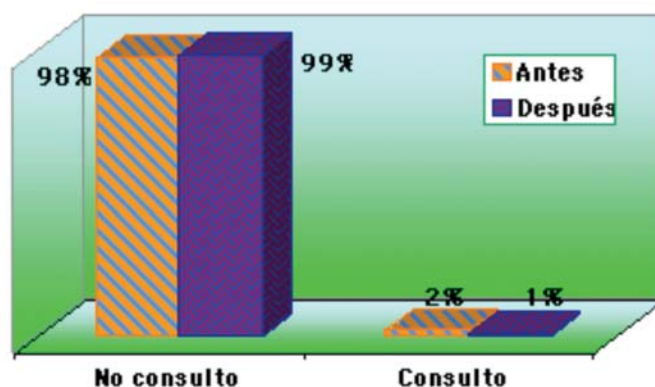


Figura 141: Persona en la definición de magnitud.

Es mínimo el número de alumnos que consultan a alguien las dudas para dar la definición de magnitud; creen que la saben, o la saben realmente, y no hacen uso de esta posibilidad. Aumenta levemente la cifra después del estudio del tema y de las técnicas.

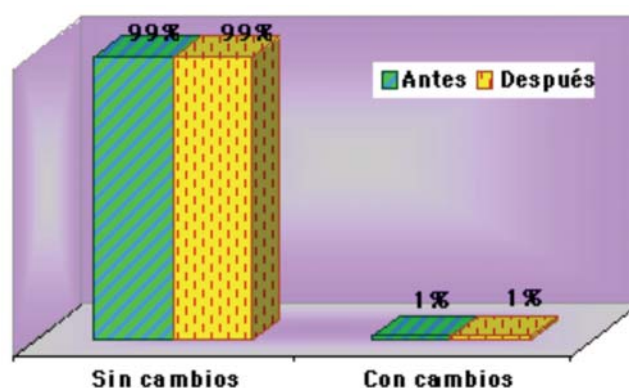


Figura 142: Cambios en la definición de magnitud.

A la vista de los resultados, afirmamos que no cambian nada de la definición de magnitud que conocen. El porcentaje se conserva después del estudio del tema y de las técnicas.

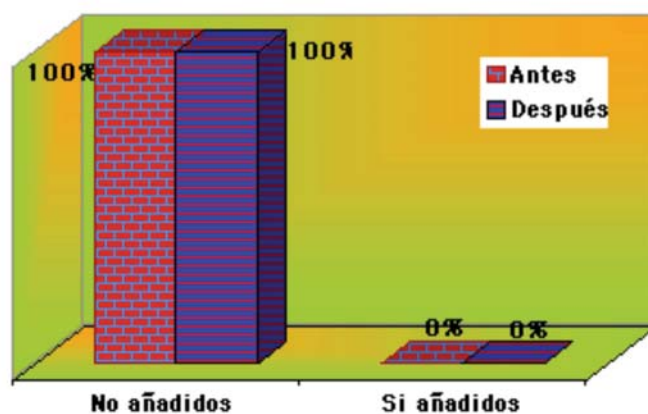


Figura 143: Añadidos a la definición de magnitud.

No añaden nada a la definición de magnitud que conocen ni antes ni después de haberse estudiado el tema que les damos.

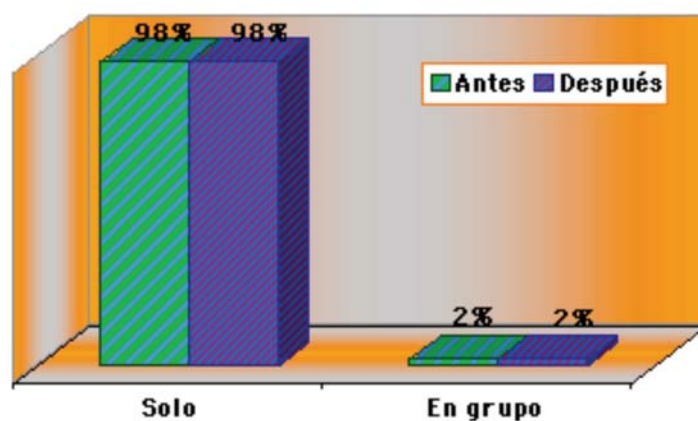


Figura 144: Grupos para la definición de magnitud.



Son muy pocos los que se reúnen en grupo para responder a este apartado y, además, son los mismos antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

### 5.2.7. Estudio de frecuencias del quinto apartado de la Evaluación Final

Aquí empiezan las pequeñas diferencias entre los números que les asignamos a los apartados de la Evaluación Inicial y de la final en los que hacemos las mismas preguntas. En el quinto apartado de la Evaluación Final, como nuestros alumnos ya tienen algunos conocimientos del tema y de las técnicas, teníamos la duda de si esto les había servido de algo; es por lo que les planteamos si después del estudio del tema y de las técnicas había variado en algo su capacidad para proponer actividades. Les dejamos total libertad para que dijeran lo que quisieran.

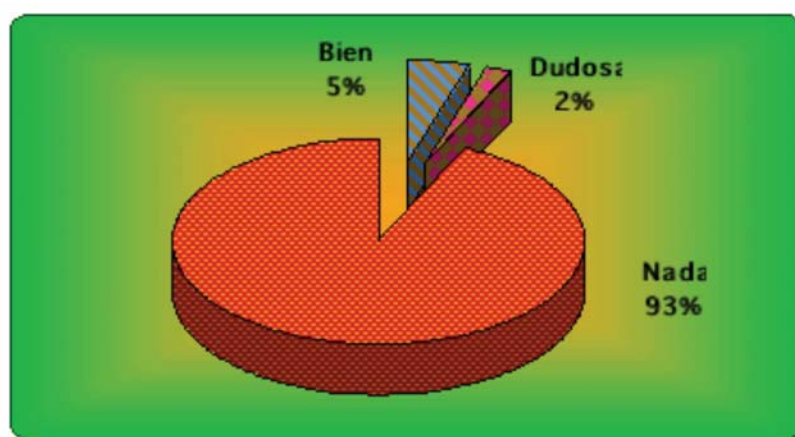


Figura 145: Quinto apartado de Evaluación Final.

Como en apartados anteriores, la mayoría de los alumnos no dice nada sobre si tiene dudas o ha respondido bien. En este caso, entre los que dicen algo, es mayor el porcentaje de los que consideran que la respuesta que han dado es correcta.

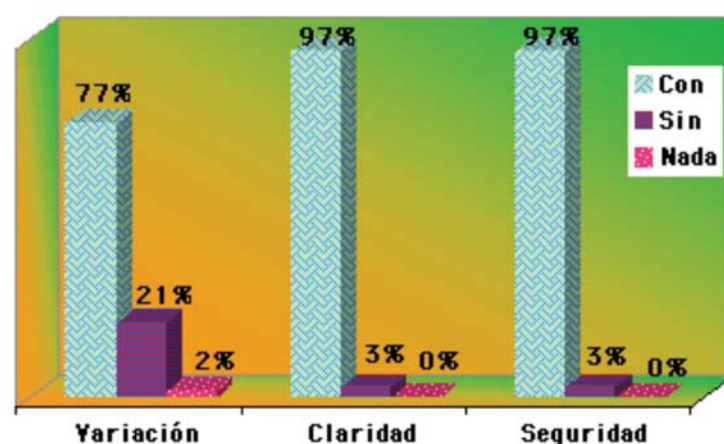


Figura 146: Variación para proponer actividades en la E. Final.

Mayoritariamente han dicho que ha variado en algo su capacidad para proponer actividades después del estudio del tema y de las técnicas y de conocer las técnicas de Metodología Creativa. La mayoría afirmaba que tenía más claro qué tipo de actividades podía proponer a los niños de Educación Infantil y que tenía más seguridad a la hora de elegir dichas actividades. Estamos convencidos de que estos resultados dicen mucho de la gran importancia que tiene el estudio del tema y de las técnicas, y su repercusión en la enseñanza que estos futuros profesores serán capaces de proporcionar a sus alumnos: sabrán, cuando propongan alguna actividad, de qué les están hablando y por qué proponen dicha actividad y no otra o ninguna; conocerán la relación que tiene la actividad propuesta con lo que ellos dominan sobre el tema “las Magnitudes y su Medida”; trabajarán con el niño mayor número de magnitudes y unidades de medida si conocen a fondo el tema que si sólo tienen una idea intuitiva de él... Además, las técnicas les aportan un material insustituible para organizar dichas actividades y fomentar la creatividad de sus futuros alumnos.

### 5.2.8. Estudio de frecuencias del sexto apartado

En este apartado planteamos a los estudiantes que nos digan lo que entienden por medida de una magnitud. Todos nuestros alumnos han realizado medidas de muchas magnitudes y con distintas unidades, a pesar de lo cual tienen sus problemas a la hora de dar dicha definición, como vemos a continuación.



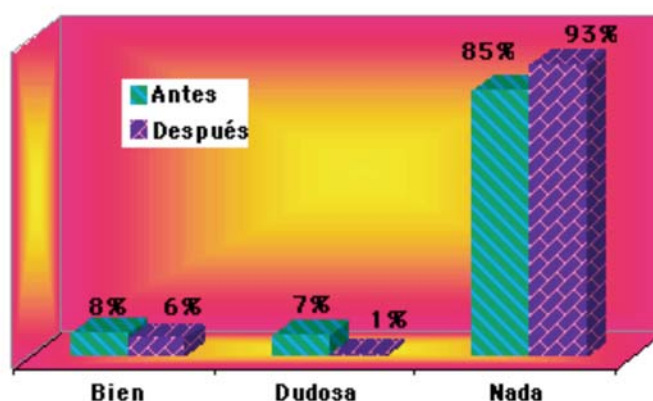


Figura 147: Sexto apartado de la E. Inicial y séptimo de E. Final.

Como en los apartados anteriores, son muy pocos los que responden si creen que han dado bien esta respuesta o han tenido dudas, aunque aumenta el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. Creemos que puede ser debido a que van directamente a responder las preguntas y no se acuerdan de que antes del tercer apartado les dijimos que marcaran B o D si consideraban que la respuesta era correcta o si tenían dudas, respectivamente.



Figura 148: Exactitud en la definición de medida de una magnitud.

A la hora de valorar la definición que dan de magnitud, consideramos cinco niveles: no dicen nada, dicen casi nada, dicen algo con fallos, dan la definición casi bien y definen la medida correctamente. Como vemos en la figura precedente, hay gran diferencia en los porcentajes antes de estudiarse el tema y después. Antes del estudio del tema y de las técnicas, el 80% de los alumnos no aporta nada o casi nada con la respuesta que da. Por el contrario, después, el 60% de los alumnos da una respuesta que está bien o casi bien.

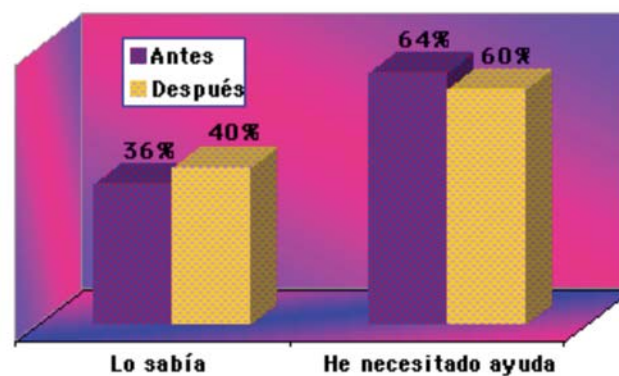


Figura 149: Ayuda en la definición de medida de una magnitud.

En esta pregunta, la mayoría de los alumnos ha necesitado alguna ayuda para darla, disminuyendo el número después del estudio del tema y de las técnicas. Parece razonable este resultado, teniendo en cuenta el material que les proporcionamos, y su estudio.

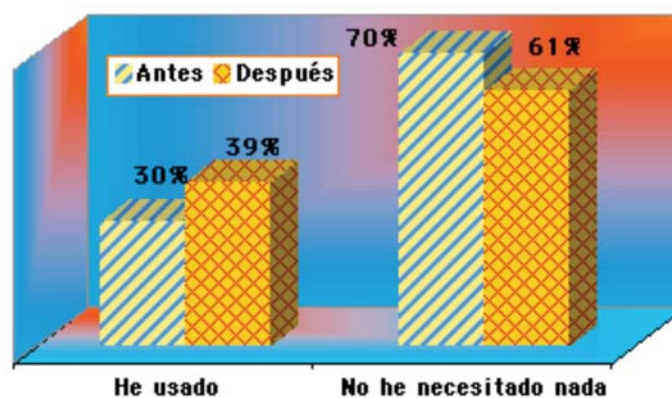


Figura 150: Materia en la definición de media de una magnitud.

Mayoritariamente, los alumnos dicen que no han usado ningún material, disminuyendo el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. Puede ser debido a que, como ya hemos comentado, la definición de medida de una magnitud les ha costado bastante, y aunque el tema es un buen material para responder esta pregunta, han buscado otra información para comparar con lo que venía en los apuntes.



Figura 151: Persona en la definición de medida de una magnitud.

Hay un porcentaje mínimo de estudiantes que dicen que, antes del estudio del tema y de las técnicas, han consultado a alguien para dar la definición de magnitud. Después del estudio del tema y de las técnicas ningún alumno consulta a nadie, lo que nos parece muy alentador.

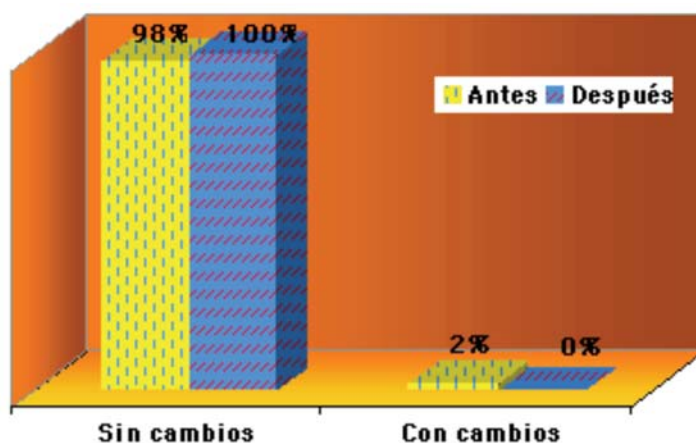


Figura 152: Cambios en la definición de medida de una magnitud.

Son muy pocos los que cambian algo antes del estudio del tema y de las técnicas; después, ningún alumno realiza ningún cambio.

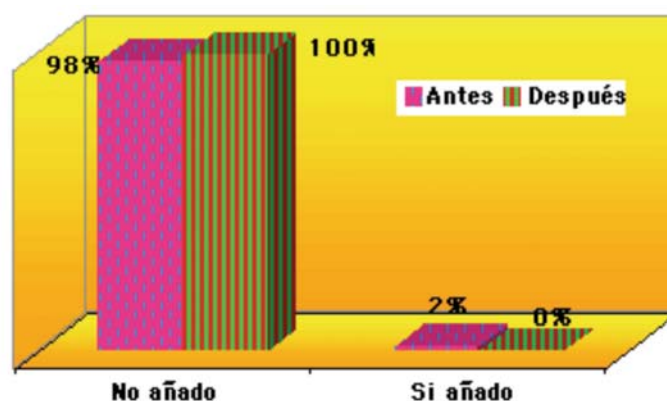


Figura 153: Añadidos a la definición de medida de una magnitud.

En los añadidos, los porcentajes son idénticos a los cambios. Parece lógico pensar que son los mismos alumnos los que están representados en los respectivos tantos por ciento.

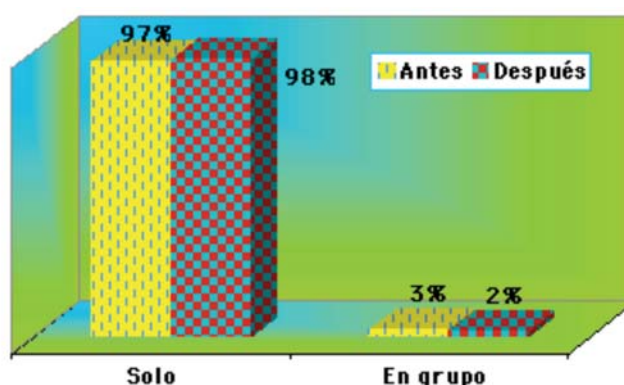


Figura 154: Grupos para la definición de medida de una magnitud.

Son muy pocos los que para dar la definición de medida de una magnitud se reúnen en grupo, disminuyendo el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas, aunque levemente. Esto nos dice que no guarda ninguna relación con el hecho de que se hayan estudiado el tema o no.

### 5.2.9. Estudio de frecuencias del séptimo apartado

En este apartado pedimos a los encuestados ejemplos de magnitudes medibles y no medibles. El hablarles de magnitudes no medibles les desconcertó enormemente antes del estudio del tema y de las técnicas, ya que ellos entendían por magnitud todo aquello que se puede medir. Pensamos que, para algunos de ellos, éste fue el aliciente

para que se entusiasmaran con el tema a fondo. A la hora de valorar las respuestas hemos tenido en cuenta: el número de magnitudes que dicen, la precisión al indicar cómo se miden esas magnitudes, las unidades de medida que utilizan y las magnitudes no medibles que dan.

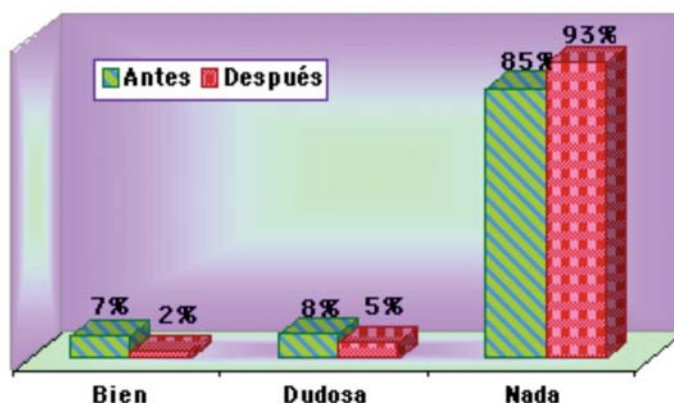


Figura 155: Séptimo apartado de E. Inicial y octavo de E. Final.

Como en los apartados anteriores, son muy pocos los alumnos que se acuerdan de decirnos si han respondido correctamente o tienen dudas; aumenta el porcentaje de los que no dicen nada después del estudio del tema y de las técnicas; la razón puede ser la misma que ya hemos dado: van directamente a contestar las preguntas sin reparar en lo que previamente les habíamos pedido.

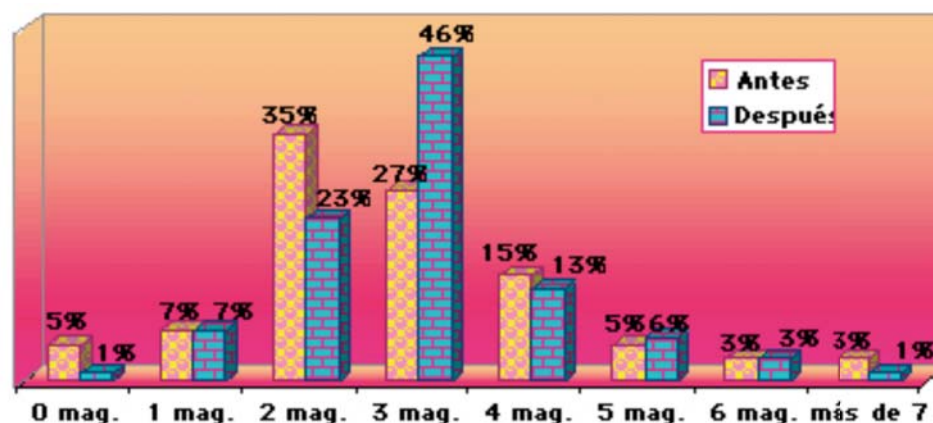


Figura 156: Número de magnitudes.

Hemos considerado esta variable en nuestro estudio porque es una forma de poder conocer la capacidad creativa de nuestros alumnos. Queremos destacar que no nos parece altamente significativo para indicar que conocen el tema que utilicen muchas magnitudes o pocas magnitudes para poner los ejemplos, sino que creemos que lo importante es que no se confundan y nos den como ejemplo de magnitud algo que lo sea. Como se puede ver en el gráfico que precede, antes del estudio



del tema y de las técnicas, la mayoría de los alumnos dan 2 ó 3 magnitudes, y después del estudio del tema y de las técnicas dan 3 ó 4.

Si nos fijamos en la distribución de los porcentajes obtenidos al considerar el número de magnitudes que utilizan, y unimos los puntos medios de los cuadrados de las bases superiores de los prismas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, observamos que, en ambos casos, corresponden a una campana de Gauss. Si bien, esto no quiere decir nada ya que no se trata de una variable continua.

Agrupando el número de magnitudes que utilizan para proponer las actividades en: 0 magnitudes, 1 ó 2 magnitudes, 3 ó cuatro magnitudes y más de 4 magnitudes, obtenemos la figura siguiente:

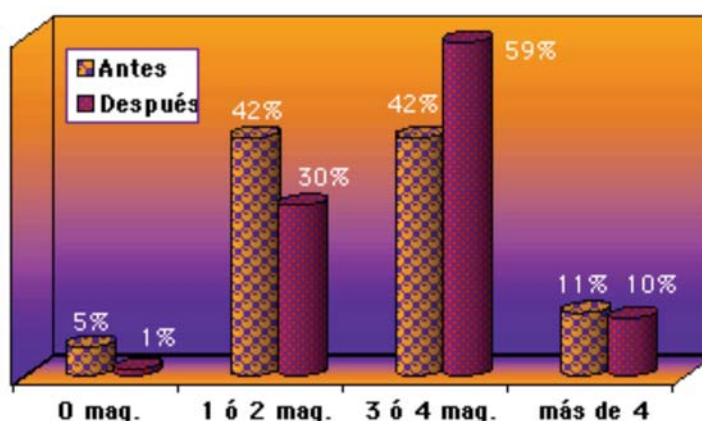


Figura157: Número de magnitudes.

No vamos a hacer ningún comentario en esta nueva distribución porque ya teníamos en la anterior un estudio más preciso.

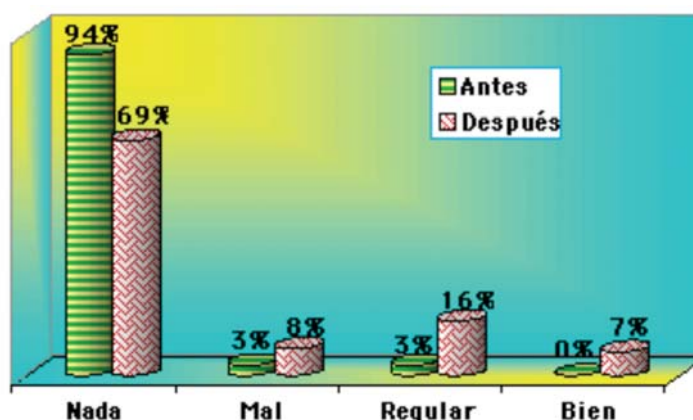


Figura 158: ¿Cómo se mide?

Para valorar la respuesta a ¿cómo se miden?, hemos considerado cuatro niveles: no dicen nada, dicen algo pero mal, lo dicen regular y responden correctamente. Aunque todos han realizado múltiples medidas, la mayoría no acierta a decirnos eso que hacen cuando miden. Antes del estudio del tema y de las técnicas tienen más problema aún para decirnos cómo se miden las magnitudes que han dado, disminuyendo en un 5% después. La razón es que nunca antes han visto lo que es un isomorfismo, definición abstracta que cuesta trabajo asimilar. Hay un 23% que, después del estudio del tema y de las técnicas, responde regular o bien.

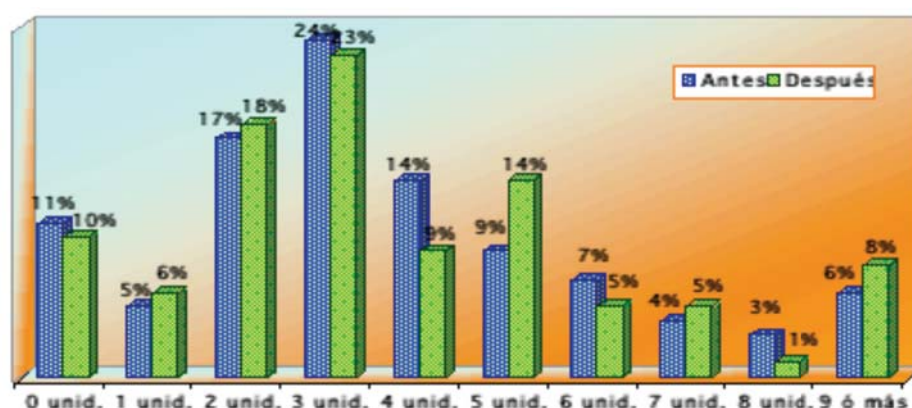


Figura 159: ¿Con qué unidades se mide?

Es muy variado el número de unidades que utilizan para medir las magnitudes medibles que previamente han considerado. Antes del estudio del tema y de las técnicas el 29% han dicho 5 ó más unidades; después del estudio del tema y de las técnicas los que han dicho estas unidades suponen el 37%. Esto quiere decir que después del estudio del tema y de las técnicas dicen más unidades de medida.

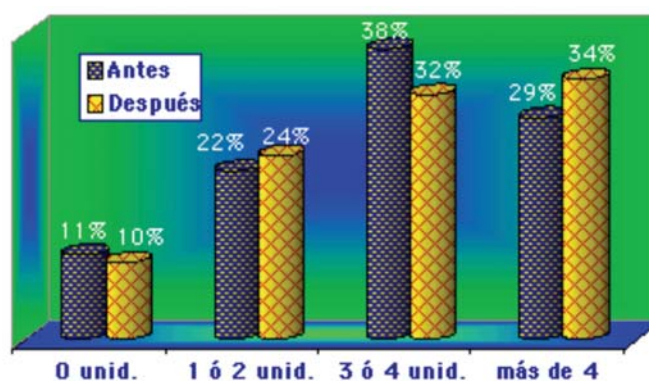


Figura 160: ¿Con qué unidades se mide?



Agrupando de otra forma el número de unidades de medida que utilizan los encuestados para proponer las actividades, obtenemos la figura anterior, que deja aún más claro los comentarios que hemos hecho. En ella se ve también que el porcentaje de alumnos que utilizan los distintos números de magnitudes aumenta cuando aumenta dicho número.

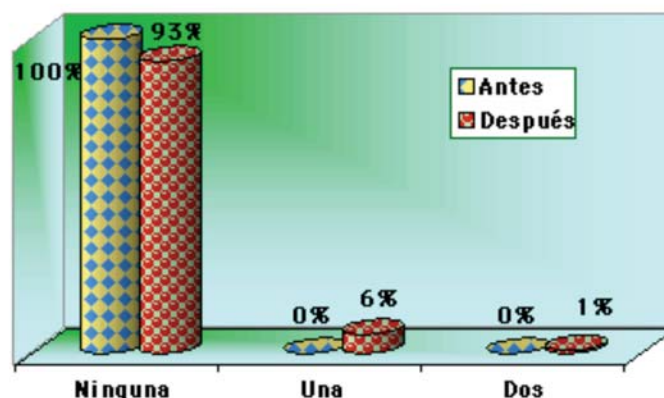


Figura 161: Número de magnitudes no medibles.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, ningún alumno pensaba que hubiera magnitudes no medibles. Aún después del estudio del tema y de las técnicas, y a pesar de haber visto ejemplos de magnitudes no medibles, parece que no acaban de asimilar el hecho de que la medida de una magnitud no va indisolublemente unida a la magnitud misma. Hay, sin embargo, un pequeño porcentaje de estudiantes que dicen una o dos magnitudes no medibles.

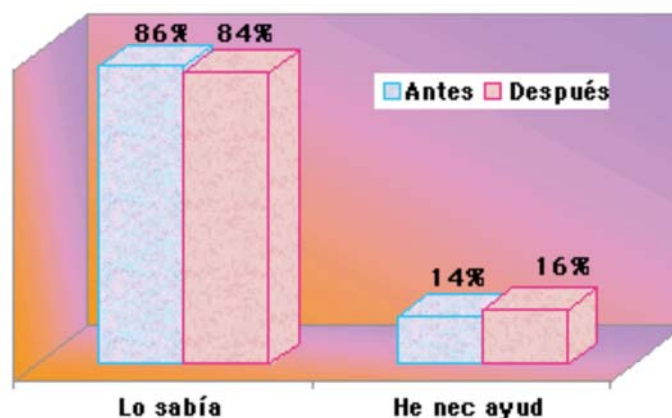


Figura 162: Ayuda al poner ejemplos de magnitudes.

En general, son pocos los que dicen que necesitan ayuda; además, el porcentaje aumenta levemente después del estudio del tema y de las técnicas. La razón pensamos que es porque, aunque tienen el tema y su estudio como la ayuda idónea para responder las cuestiones que les

planteamos, esto ha hecho que no consideren ahora como magnitud todo lo que antes entendían por tal, e incluso que para poner ejemplos de magnitudes medibles y no medibles no tengan que necesitar alguna ayuda.

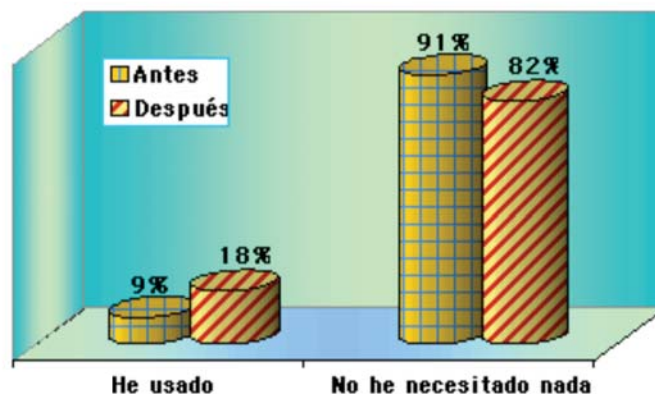


Figura 163: Material utilizado para poner ejemplos de magnitudes.

La mayoría de los alumnos no suele utilizar ningún material para responder a este apartado, y en este caso aumenta el porcentaje de los que lo usa después del estudio del tema y de las técnicas. Puede ser que, como el concepto de medida de una magnitud les ha ofrecido alguna dificultad, han pensado que deben profundizar algo más en él antes de dar sus respuestas.

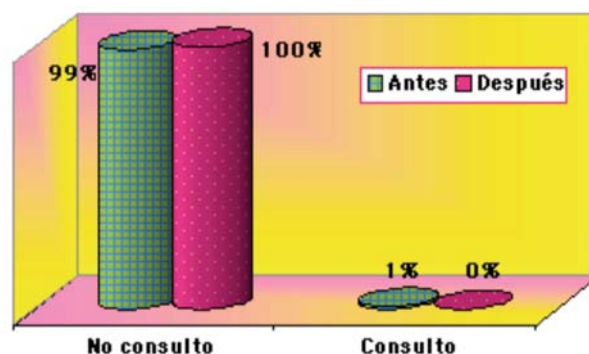


Figura 164: Persona consultada para poner ejemplos de magnitudes.

Aunque este apartado les ha supuesto más dificultad que otros, son muy pocos los alumnos que lo consultan con alguien antes del estudio del tema y de las técnicas; después, ninguno consulta.

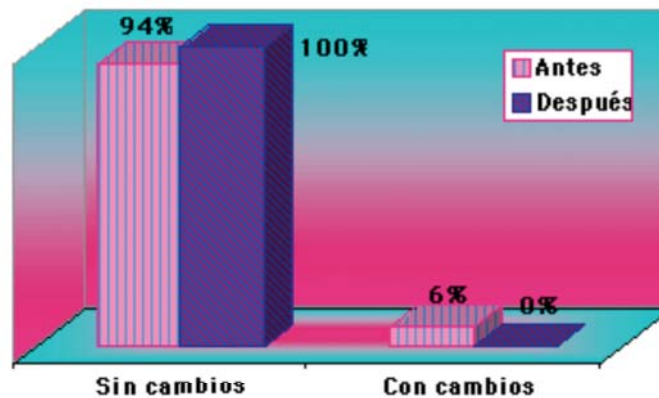


Figura 165: Cambios realizados al poner ejemplos de magnitudes.

Antes del estudio del tema y de las técnicas son muy pocos los que hacen algún cambio de lo que han encontrado sobre medida de una magnitud; después, ninguno.

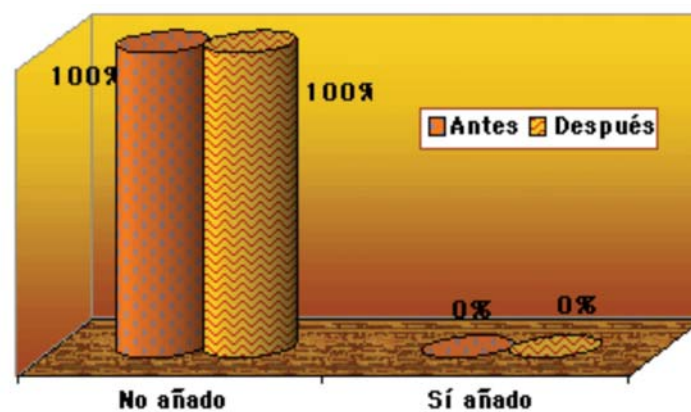


Figura 166: Añadidos a los ejemplos encontrados de magnitudes.

Ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas realizan ningún añadido a los ejemplos encontrados de magnitudes medibles o no medibles.

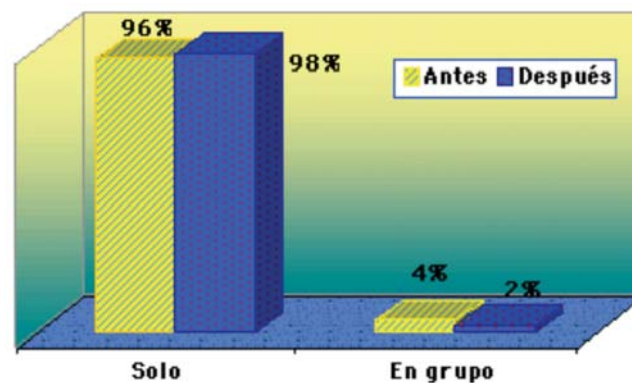


Figura 167: Grupos el los ejemplos de magnitudes medibles y no medibles.

La mayoría de los alumnos da una respuesta a nivel individual; sólo una pequeña minoría se reúne para darla. Después del estudio del tema y de las técnicas, el porcentaje de los alumnos que dan sus respuestas solos es aún mayor, si bien pensamos que esto no tiene nada que ver con dicho estudio.

### 5.2.10. Estudio de frecuencias del octavo apartado

En este apartado planteamos las preguntas de si las magnitudes y su medida es un tema apropiado para ser trabajado en Educación Infantil y por qué. Estas preguntas se las hacemos para que antes de decirles que propongan actividades para los niños de 3 a 6 años, sean ellos los que decidan si es o no un tema apropiado.

Para valorar las respuestas hemos tenido en cuenta tres opciones: apropiado, no apropiado y no sabe.

En este caso va a tener poca repercusión en el acierto a las respuestas el estudio del tema y de las técnicas; los alumnos que han tenido algún contacto con niños de estas edades son los que van a tener alguna ventaja.

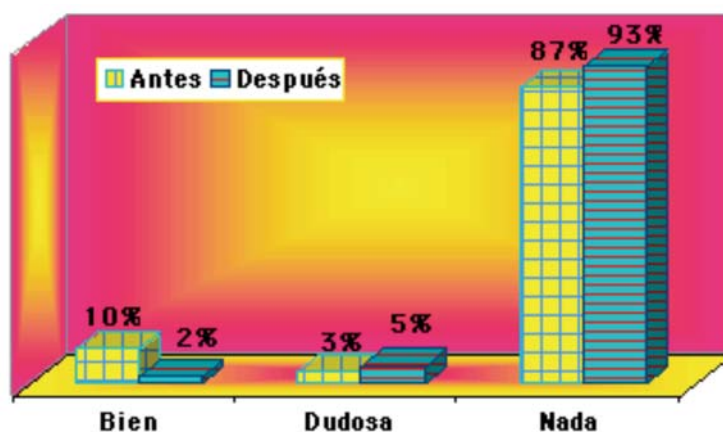


Figura 168: Octavo apartado de la E. Inicial y noveno de la Final.

Como en otros casos, la mayoría de los alumnos no nos dice nada acerca de si tiene duda o no en las respuestas de este apartado, aumentando el número después del estudio del tema y de las técnicas. Después del estudio del tema y de las técnicas disminuye el porcentaje de los que consideran que han acertado en sus respuestas y aumenta el de los que tienen dudas.

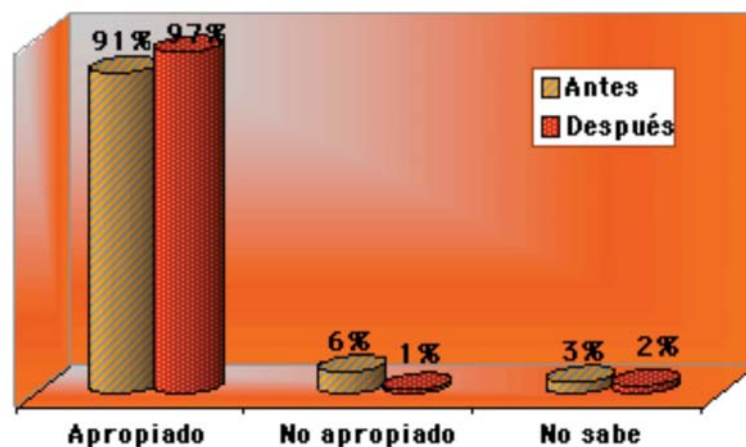


Figura 169: ¿"Las Magnitudes y su Medida" es un tema apropiado para Educación Infantil?

Como se puede observar en la figura precedente, una amplia mayoría está de acuerdo en que es un tema apropiado, aumentando el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas.



Figura 170: Ayuda para el octavo apartado.

Como en casos anteriores, el porcentaje de alumnos que ha considerado que necesita ayuda es mínimo, disminuyendo después de haberse estudiado el tema y las técnicas. La razón no la vamos a repetir por considerar que es análoga a la que dimos antes.

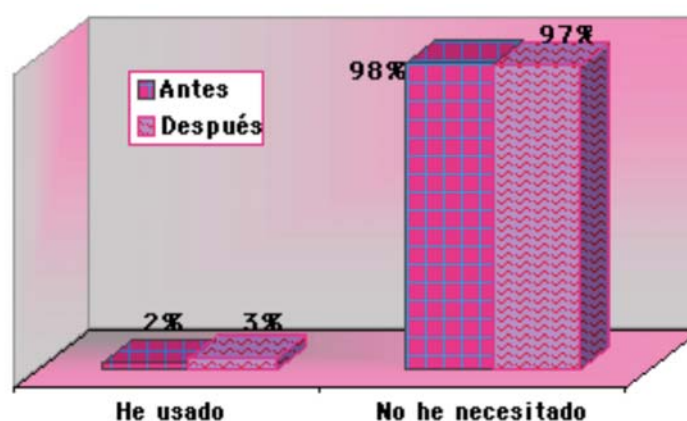


Figura 171: Material para el octavo apartado.

También en este caso, como en los anteriores, el porcentaje de los que utilizan algún material es mínimo, aumentando levemente después del estudio del tema y de las técnicas; en esta pregunta, las razones pueden ser debidas a las dudas que les hemos creado al saber que hay magnitudes no medibles. También las razones pueden ser de índole personal, sin que tengan nada que ver con los conocimientos que han adquirido, sino con los ejemplos de actividades para Educación Infantil que pueden encontrar en otros libros o en internet.

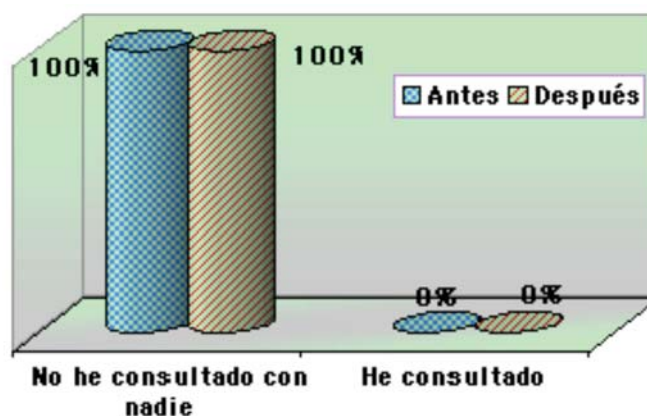


Figura 172: Persona consultada en el octavo apartado.

En este caso, como en otros ya vistos, no han consultado a nadie ni antes ni después del tema, parece ser que se consideran autosuficientes. Tal vez, en esta ocasión, podrían haberle preguntado a algún maestro.



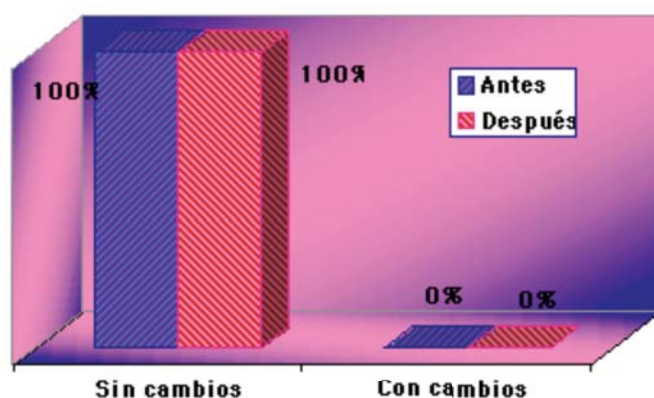


Figura 173: Cambios hechos para responder al octavo apartado.

No realizan ningún cambio ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas.

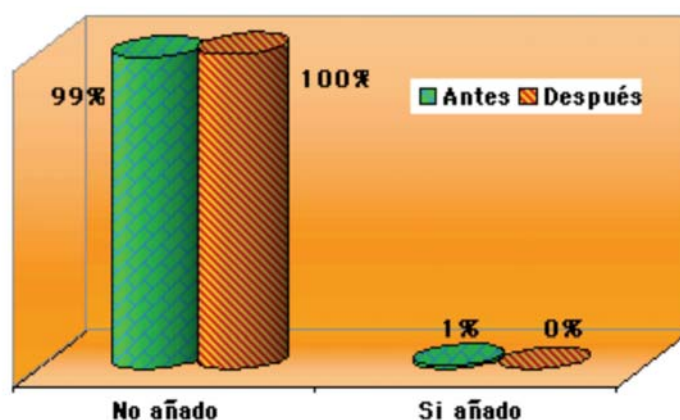


Figura 174: Añadidos en la respuesta al octavo apartado.

Hay pocos añadidos, y se realizan antes del estudio del tema y de las técnicas. La proporción es tan mínima que no merece ningún comentario extra.

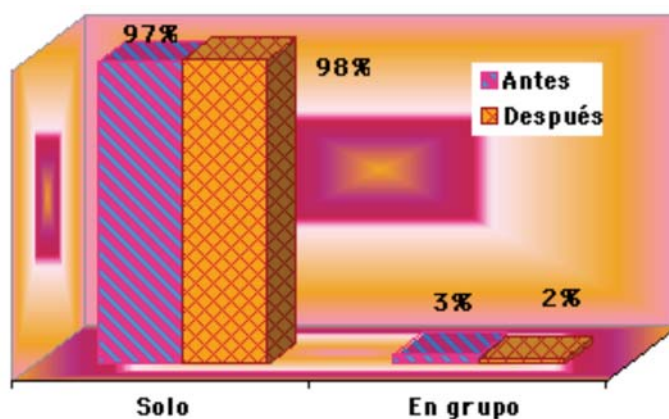


Figura 175: Grupos para la respuesta a la octava pregunta.



Son muy pocos los que optan por trabajar en grupo, disminuyendo el número después del estudio del tema y de las técnicas. Coincidimos plenamente con la idea de que para decidir si “las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para Educación Infantil, no es necesario trabajar en grupo.

### 5.2.11 Estudio de frecuencias del noveno apartado

Como ya antes han dicho ejemplos de magnitudes medibles y no medibles y de unidades con las que las podamos medir, ahora les preguntamos por las magnitudes que se pueden trabajar en Educación Infantil, cuándo, con qué unidades y por qué.

A la hora de valorar las respuestas consideramos: el número de magnitudes que dicen, el número de unidades de medida y la exactitud en los razonamientos.

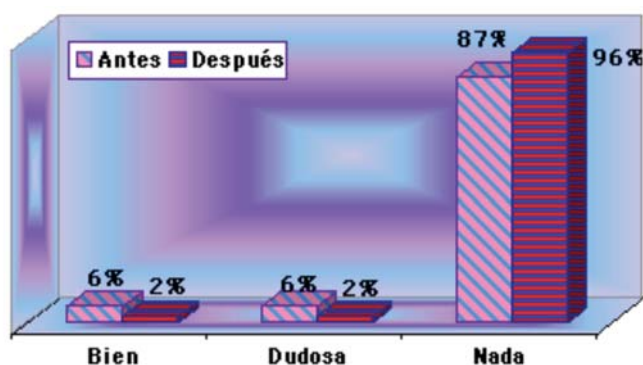


Figura 176: Noveno apartado de la E. Inicial y décimo de la Final.

Son muy pocos los alumnos que dicen si consideran que han respondido bien o si tienen dudas, disminuyendo el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. La razón es la misma que hemos dado anteriormente y no vamos a repetirla.

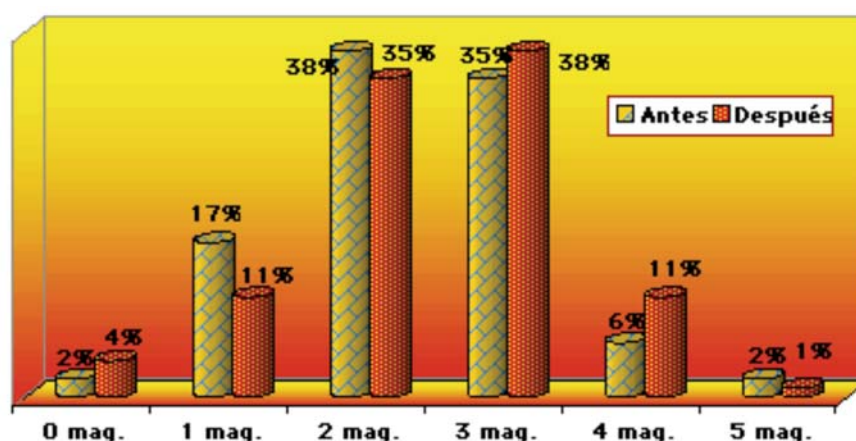


Figura 177: Número de magnitudes en el apartado noveno.

El número de magnitudes que dicen que se pueden trabajar en Educación Infantil es bastante variado. La diferencia entre los porcentajes de las magnitudes que dicen antes y después del estudio del tema y de las técnicas es: antes, el 43% dicen tres o más magnitudes, y después aumenta hasta el 50%.

Como en el séptimo apartado, aquí también podemos observar que en la figura anterior si unimos las bases superiores de los cilindros, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, obtenemos una campana de Gauss. Como en el caso anterior, esto no quiere decir nada ya que no se trata de una variable continua.

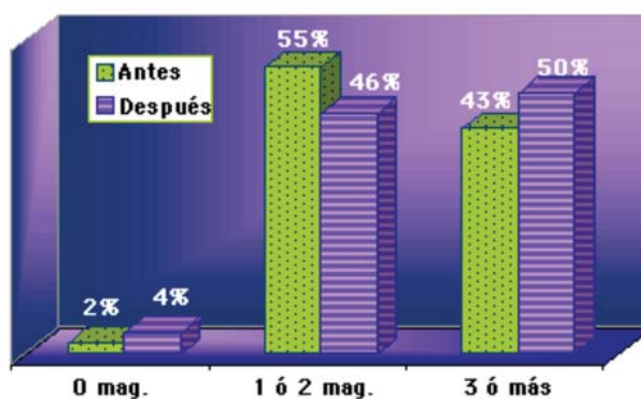


Figura 178: Número de magnitudes en la pregunta novena.

En la figura precedente hemos agrupado el número de magnitudes que dicen que se pueden utilizar para proponer actividades para Educación Infantil, de forma que se vea más claro lo que antes hemos comentado.

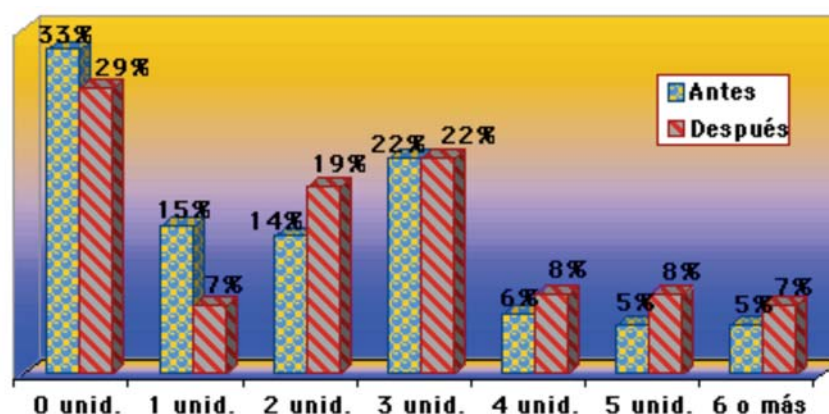


Figura 179: Número de unidades en el noveno apartado.

Si observamos el gráfico, vemos que a partir de 3 unidades el porcentaje aumenta después del estudio del tema y de las técnicas, lo cual muestra que su influencia se nota a la hora de decir unidades de medida que se puedan trabajar en Educación Infantil.

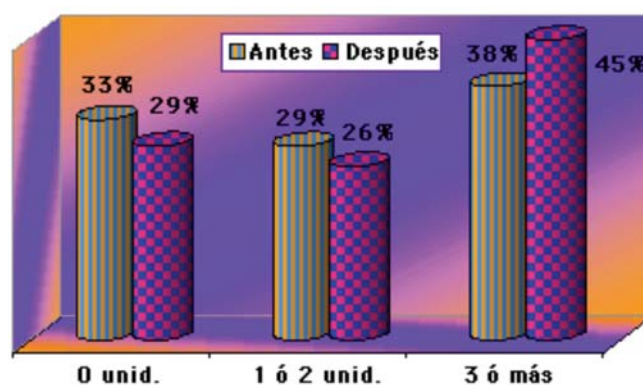


Figura 180: Número de unidades en el noveno apartado.

En la figura adjunta queda reflejado lo que decimos respecto del aumento que experimenta el número de unidades que dicen después del estudio del tema y de las técnicas.

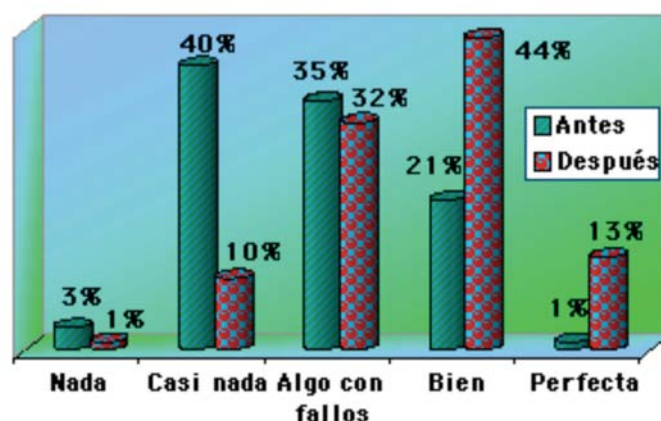


Figura 181: Exactitud en el noveno apartado.

Para valorar la exactitud en los razonamientos consideramos cinco niveles: no dice nada, no dice casi nada, dice algo con fallos, lo que dice está bien, y responde perfectamente. Como podemos ver en la figura adjunta, antes del estudio del tema y de las técnicas, el 80% de los alumnos no dice nada, no dice casi nada o dice algo con algunos fallos. Después, el 57% dice algo que está bien o responde perfectamente. Esto indica que el conocimiento del tema y de las técnicas ha influido significativamente a la hora de responder a las cuestiones que les planteamos.

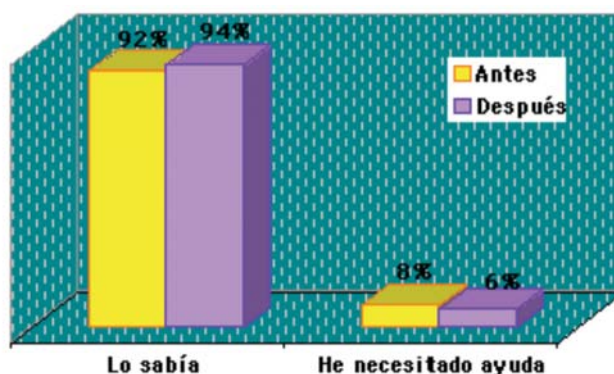


Figura 182: Ayuda para responder al noveno apartado.

El porcentaje de alumnos que necesita ayuda para responder este apartado ha sido mínimo, como venía sucediendo anteriormente, disminuyendo aún más después del estudio del tema y de las técnicas, como era de esperar.

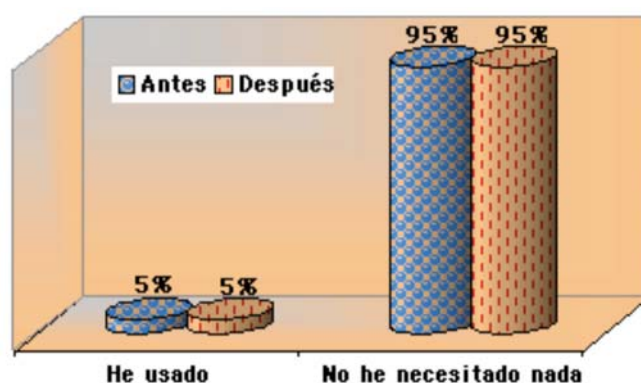


Figura 183: Material en el noveno apartado.

Es mayoritario el número de alumnos que dicen que no han necesitado ningún material, siendo igual el porcentaje antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

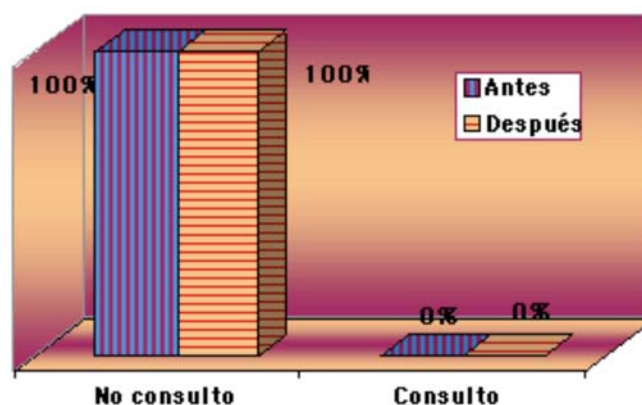


Figura 184: Persona en el noveno.

Como podemos observar en la figura precedente, ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas consultan con nadie, consideran que sus conocimientos son suficientes.

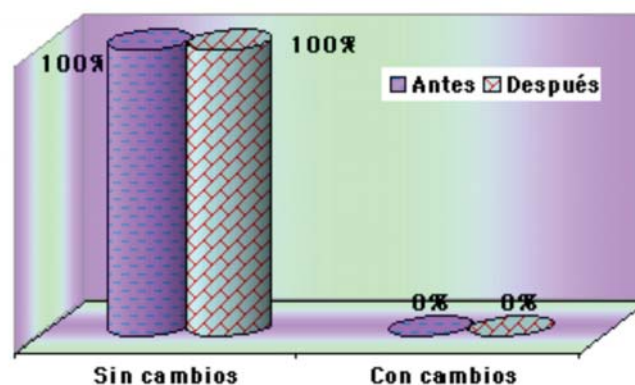


Figura 185: Cambios en el noveno apartado.

Como en casos anteriores, no se realiza ningún cambio ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas.

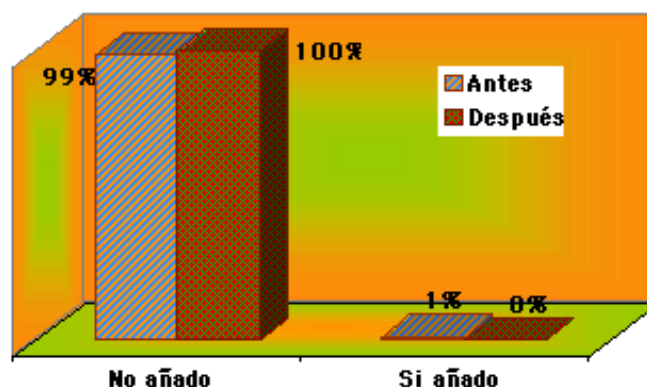


Figura 186: Añadidos en el noveno apartado.

Sólo antes del estudio del tema y de las técnicas hay una muy pequeña proporción que realiza algún añadido; después no realizan ninguno.

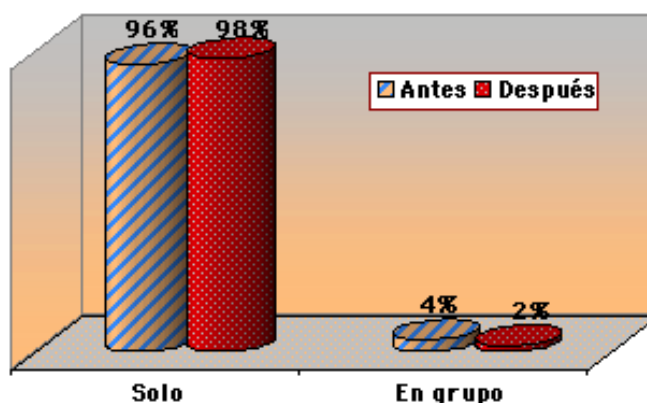


Figura 187: Grupos en el noveno apartado.

Son muy pocos los que se deciden por responder en grupo, disminuyendo su porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. Quizás fuese porque algunos consideran que una vez trabajado el tema y las técnicas se tienen conocimientos suficientes como para no necesitar la colaboración de otros compañeros.

### 5.2.12. Estudio de frecuencias del décimo apartado

En este apartado pedimos a los alumnos que propongan actividades con cada una de las magnitudes que han dicho en el



apartado anterior que se pueden llevar a cabo en Educación Infantil. Para valorar las respuestas hemos tenido en cuenta los siguientes aspectos: la creatividad en los planteamientos, el número de magnitudes, el número de unidades de medida, la precisión con que las han planteado y hasta qué punto son adecuadas para este nivel.

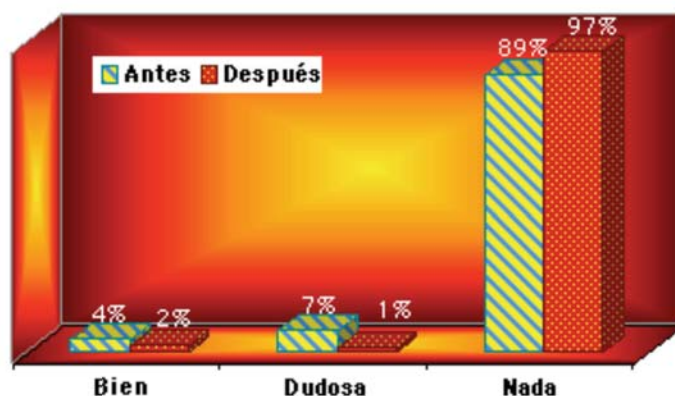


Figura 188: Décimo apartado de la E. Inicial y decimoprimer de la Final.

Se repite la situación que teníamos en otros apartados anteriores: son muy pocos los que dicen si piensan que las respuestas que han dado han sido correctas o tienen alguna duda, aumentando dicho porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. La razón, consideramos que es análoga a la que dimos antes y no la vamos a repetir.

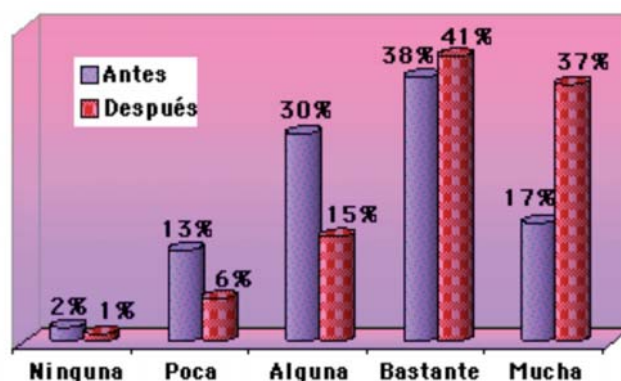


Figura 189: Creatividad en el décimo apartado.

Para valorar la creatividad en las actividades que les planteamos consideramos cinco niveles: ninguna, poca, alguna, bastante y mucha creatividad. Los indicadores que hemos tenido en cuenta para establecer estos niveles son los mismos que comentamos en el tercer apartado.

Como podemos observar en la figura precedente, los porcentajes de los que no tienen ninguna creatividad, tienen poca o tienen alguna



son mayores antes que después del estudio del tema y de las técnicas. Sin embargo, cuando observamos los porcentajes de los que tienen bastante o mucha creatividad, la situación se invierte. Esto quiere decir que, incluso para ser creativos en las actividades que proponen los alumnos para los niños de Educación Infantil, han sido bastante importantes el estudio del tema y de las técnicas. Destaquemos que se pasa de un 55% antes (bastante o mucha) a un 78% después.

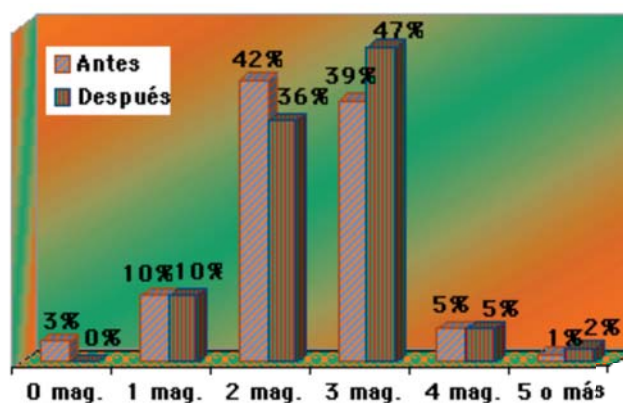


Figura 190: Número de magnitudes en el décimo apartado.

En este apartado, los números de magnitudes que hemos tenido en cuenta han sido: 0, 1, 2, 3, 4 y 5 ó más magnitudes. Si observamos los resultados de las dos encuestas en la figura anterior, podemos afirmar que, en este caso, el resultado es análogo al que obteníamos cuando considerábamos la creatividad: el porcentaje de los alumnos que utilizan 3 ó más magnitudes es mayor después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa que antes; y para los que proponen 0, 1 2 ó 3 magnitudes la situación se invierte. Esto quiere decir que después del estudio del tema y de las técnicas, son capaces de utilizar mayor número de magnitudes a la hora de proponer actividades para niños de Educación Infantil.

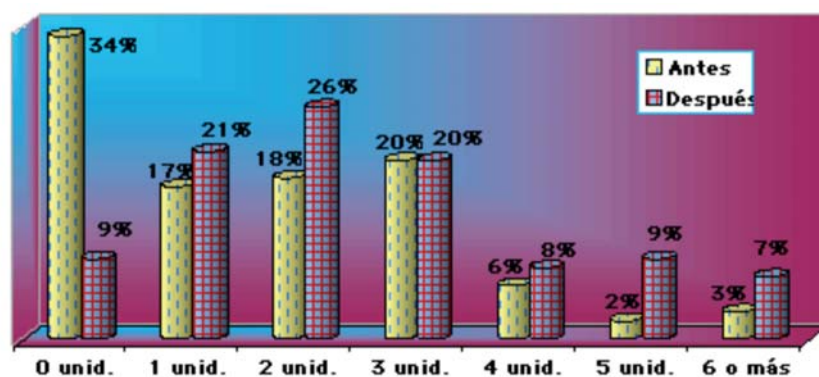


Figura 191: Número de unidades de medida en el décimo apartado.

El número de unidades de medida utilizadas a la hora de proponer actividades para niños de Educación Infantil puede apreciarse en la figura adjunta. Se ve claramente que el porcentaje de los que no usan ninguna unidad es mayor antes del estudio del tema y de las técnicas (34%) que después (98%); por el contrario, los porcentajes de los que usan una unidad o más es abrumadoramente mayor después del estudio del tema y de las técnicas (91%) que antes (66%).

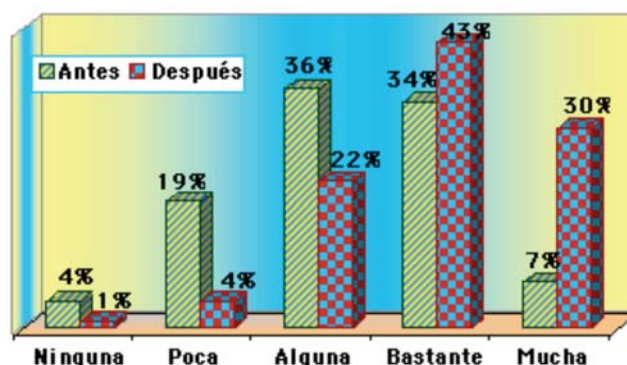


Figura 192: Precisión a la hora de proponer actividades.

Para valorar la precisión al proponer actividades para niños de Educación Infantil hemos considerado cinco niveles: ninguna, poca, alguna, bastante y mucha precisión. Ya comentamos en el apartado tercero en qué nos basamos para establecer estos niveles.

Como podemos observar en la figura adjunta, también en este caso se da una situación parecida a las anteriores: antes del estudio del tema y de las técnicas el porcentaje de alumnos que tienen bastante o mucha precisión es menor antes del estudio del tema y de las técnicas (41%) que después (73%); se invierte la situación para los que no tienen ninguna precisión, tienen poca o tienen alguna (se pasa del 59% antes al 28% después). Por tanto, después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos son más precisos cuando proponen las actividades para niños de Educación Infantil, lo cual es bastante interesante.

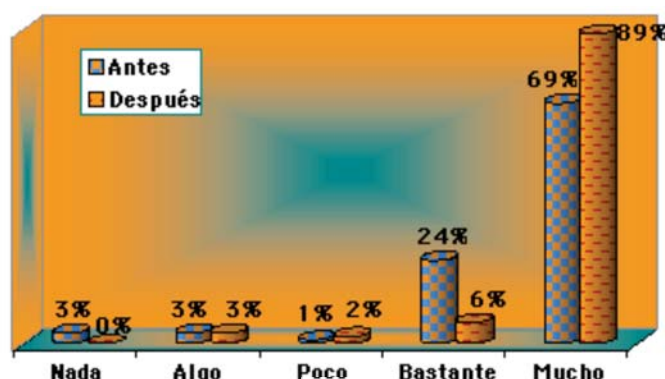


Figura 193: Adecuación de las actividades propuestas.

Para valorar si son adecuadas las actividades que proponen consideramos cinco niveles: nada, algo, poco, bastante y muy adecuadas. Aunque, como podemos ver en la figura adjunta, las actividades son, mayoritariamente, bastante o muy adecuadas tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. El porcentaje de las muy adecuadas es mayor después del estudio del tema y de las técnicas (pasa del 69% al 89%, produciéndose un aumento muy significativo). También en este caso el estudio del tema y de las técnicas les ayuda a plantear las actividades más adecuadas para los niños de Educación Infantil.

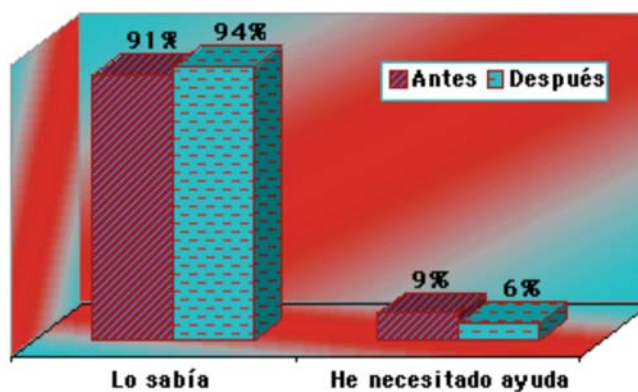


Figura 194: Ayuda en el décimo.

El porcentaje de alumnos que han necesitado ayuda, como en casos anteriores, es mínimo, disminuyendo levemente después del estudio del tema y de las técnicas. La razón es la que ya hemos comentado: después del estudio del tema y de las técnicas tienen conocimientos suficientes para proponer las actividades que les pedimos. O piensan que son autosuficientes o consideran que no hay mucha gente a quien acudir para pedir ayuda o no saben dónde acudir.

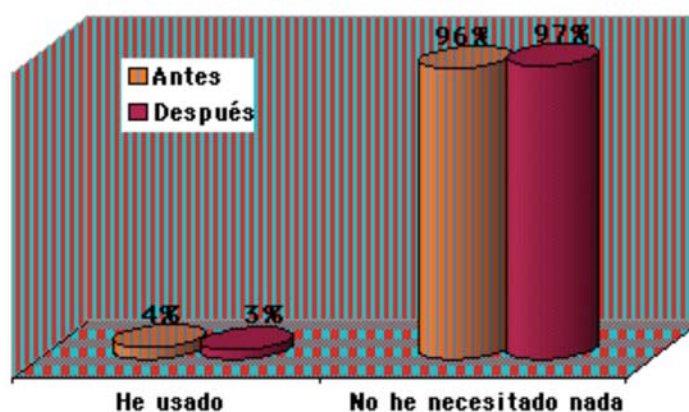


Figura 195: Material en la décima.

Se repite la situación que teníamos en otros apartados: son muy pocos los alumnos que dicen que han utilizado algún material, disminuyendo su número después del estudio del tema y de las técnicas. La razón ya la hemos dado en otros apartados y no vamos a insistir.

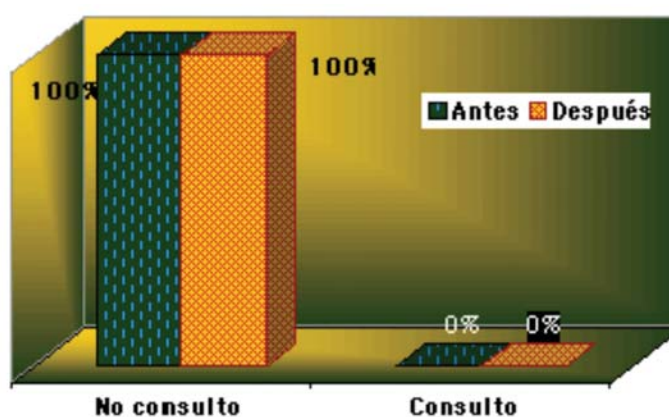


Figura 196: Persona en la décima.

En este caso también se repite otra situación anterior: no consultan con nadie para decirnos actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Consideramos que la razón es la misma que en aquel momento, y no la vamos a repetir.

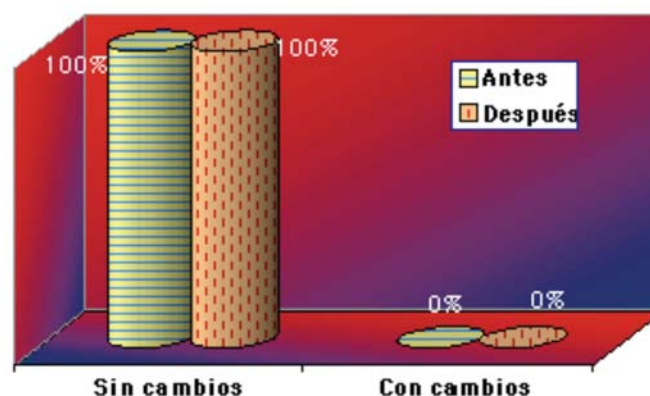


Figura 197: Cambios en la décima.

En este apartado tampoco realizan ningún cambio, ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas. La razón es la misma que en casos anteriores y el por qué ya lo comentamos, no los vamos a repetir.

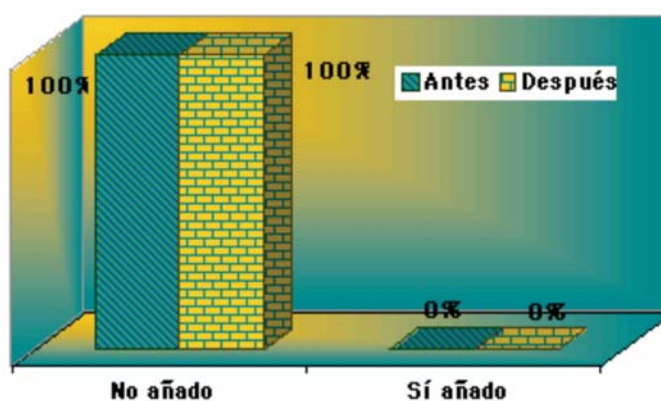


Figura 198: Añadidos en la décima.

No dicen que hayan añadido nada a lo encontrado o estudiado ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas. La razón es análoga a la que dimos en situaciones anteriores y no queremos abundar en ello.

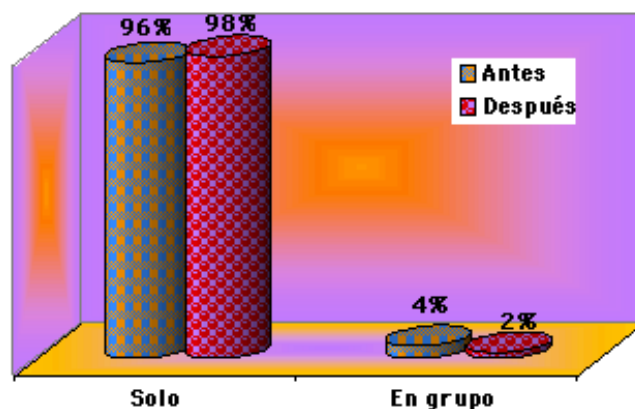


Figura 199: Grupos en la décima.

Son muy pocos los alumnos que para dar sus respuestas lo hacen en grupo, disminuyendo su número después del estudio del tema y de las técnicas. La razón puede ser porque al tener alguna idea del tema y de las técnicas, se consideran autosuficientes para plantear actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Es muy poco significativo el porcentaje.

### 5.2.13. Estudio de frecuencias del decimoprimer apartado

En este apartado decimos a los alumnos que razonen para qué le sirven al niño cada una de las actividades que se les plantearon en el apartado anterior. Para valorar las respuestas consideramos: la utilidad que hayan dicho y la precisión con que hayan respondido.

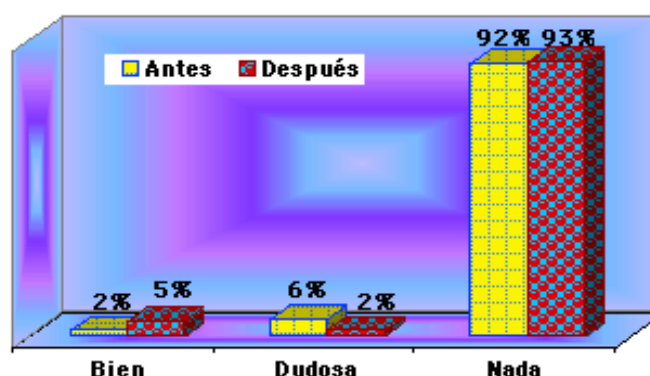


Figura 200: Undécimo apartado de la E. Inicial y duodécimo de la Final.



Son muy pocos los que dicen si creen que han respondido correctamente o si tienen dudas, aumentando los que consideran que responden bien después del estudio del tema.

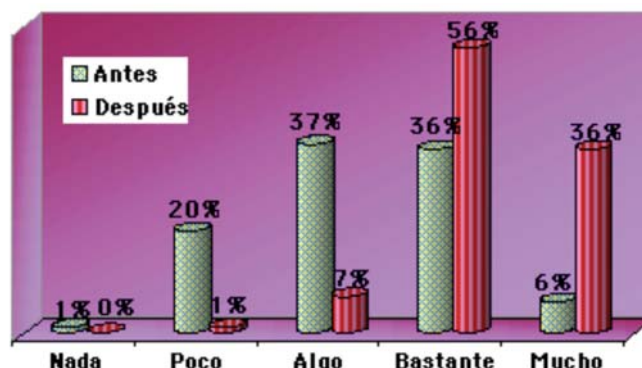


Figura 201: Utilidad de las actividades planteadas.

Para valorar los comentarios que hacen acerca de la utilidad de las actividades planteadas, consideramos cinco niveles: ninguna, poca, alguna, bastante y mucha utilidad. Como puede verse en la figura precedente, los porcentajes de los alumnos que creen que las actividades no tienen ninguna utilidad, poca o alguna es mayor antes que después del estudio del tema y de las técnicas; la situación se invierte cuando se ve, en lo que comentan, que tiene bastante o mucha utilidad. Esto quiere decir que saben ver, comentar y encontrar mayor utilidad a las actividades propuestas después del estudio del tema y de las técnicas. No en vano el porcentaje ha pasado del 42% al 92%.

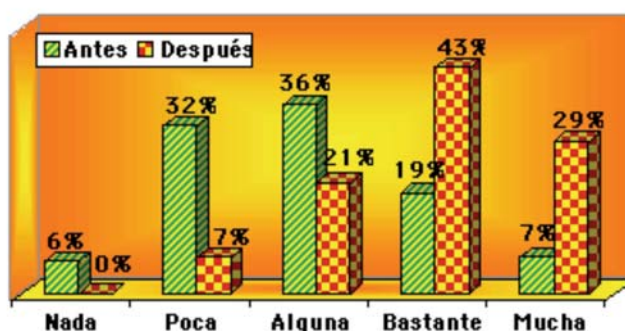


Figura 202: Precisión en la respuesta a la undécima pregunta.

Cuando valoramos la precisión para comentar para qué les sirven las actividades planteadas, consideramos cinco niveles: ninguna, poca, alguna, bastante y mucha precisión. Como puede verse en la figura adjunta, antes del estudio del tema y de las técnicas, el porcentaje de las respuestas que son nada precisas, poco o algo precisas es mayor antes



(74%) que después (28%); pero cuando la precisión es bastante o mucha los porcentajes se invierten, siendo mayor después: pasa del 26% al 71%. Esto quiere decir que el estudio del tema les ha sido bastante útil a la hora de razonar para qué sirven las actividades planteadas.

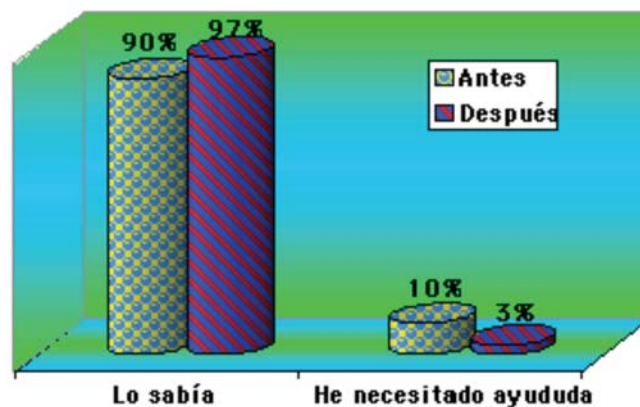


Figura 203: Ayuda a la pregunta undécima.

Son pocos los alumnos que dicen que han necesitado ayuda al razonar para qué le sirve al niño cada una de las actividades que planteó en el apartado anterior, disminuyendo el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. La situación es análoga a la que se ha planteado en otras ocasiones y la razón es la misma, por lo que no la vamos a repetir.



Figura 204: Material en la undécima pregunta.

El porcentaje de los alumnos que consideran que han necesitado algún material es mínimo, siendo aún menor después del estudio del tema y de las técnicas. La razón ya la conocemos: el tema que han estudiado es un material más que suficiente para dar sus respuestas.

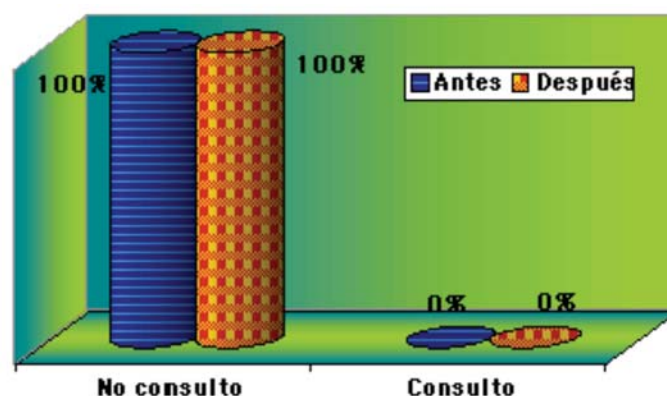


Figura 205: Persona en la undécima pregunta.

Como en otros casos, no consultan con nadie la respuesta a la pregunta, ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas. La razón es la misma que dimos antes y no queremos repetirla para no resultar pesados.

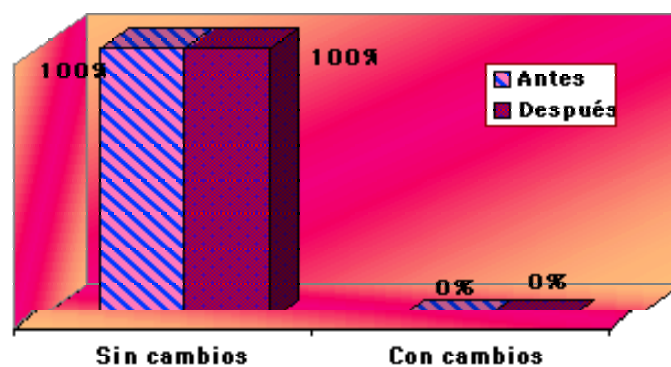


Figura 206: Cambios en el undécimo apartado.

En este caso no realizan ningún cambio ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas. Ya en otros apartados tenemos una situación análoga a la que se ve en la figura anterior respecto del porcentaje de los cambios. La razón es análoga a la que dimos antes.

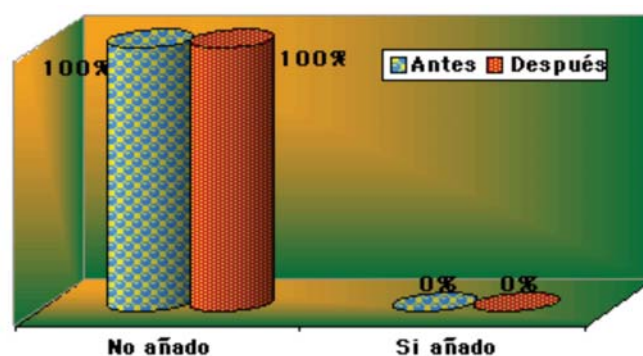


Figura 207: Añadidos en el undécimo apartado.

Ningún alumno nos dice que añada algo a lo que han encontrado o estudiado, ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas. Esto ya ha pasado en otros casos; la razón creemos que es la misma y no vamos a insistir en ella.

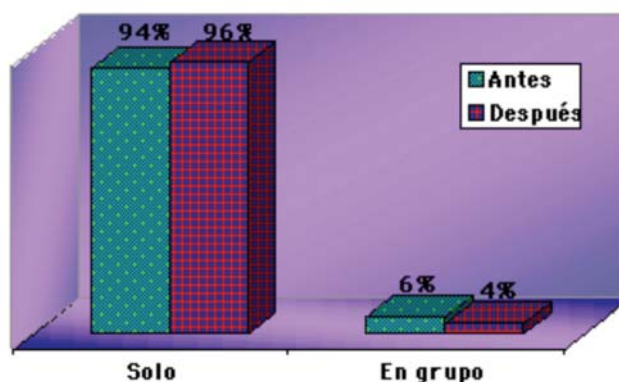


Figura 208: Grupos en la undécima pregunta.

De nuevo son muy pocos los alumnos que se deciden por dar sus respuestas en grupo, disminuyendo el porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas. Esta situación ya la hemos encontrado antes; la razón creemos que es análoga a la que dimos en aquel momento.

#### 5.2.14. Estudio de frecuencias del decimosegundo apartado

En este apartado preguntamos a los alumnos si necesitan conocer mejor el tema “las magnitudes y su medida” para poder proponer actividades que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro. En este caso hemos considerado sólo tres opciones: sí, no y otros.

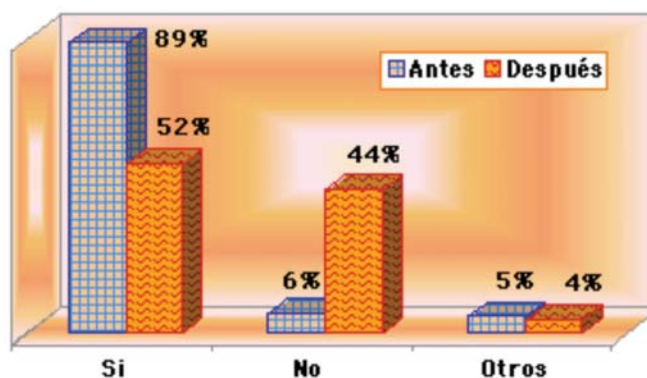


Figura 209: Decimosegundo apartado de E. Inicial y decimotercero de E. Final.

La mayoría de los alumnos dice que sí necesitan saber más del tema “las Magnitudes y su Medida” para proponer actividades para Educación Infantil que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro, tanto antes (89%) como después del estudio del tema y de las técnicas (52%), si bien la mayoría es más aplastante antes de dicho estudio. Que un 89% de los alumnos opine que necesita conocer mejor el tema es razonable ya que sin conocimiento difícilmente pueden proponerse actividades suficientemente formativas, originales, creativas, etc. Tras el estudio del tema y de las técnicas también es lógico que haya alumnos que consideren que han de saber más, pues cuanto más se profundiza en un tema, más consciente se es de lo que se desconoce.

### 5.2.15. Estudio de frecuencias del decimotercer apartado

En este apartado les preguntamos si consideran que deben comprender mejor las técnicas de Metodología Creativa para que las actividades que propongan sean más originales.

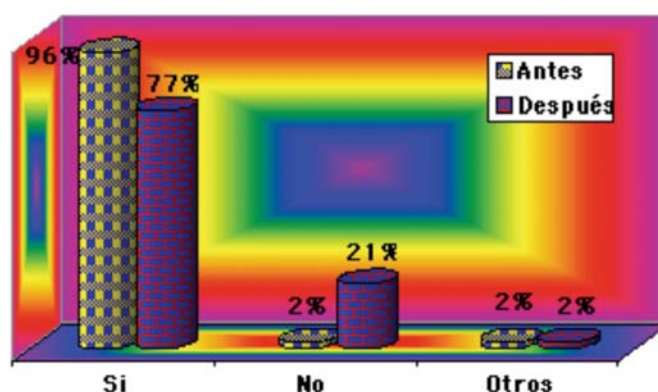


Figura 210: Decimotercero apartado de E. Inicial y decimocuarto de E. Final.

La mayoría de los alumnos dice que sí necesitan comprender mejor las técnicas de Metodología Creativa, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, aunque el porcentaje es mayor antes (96%) que después (77%). De nuevo podemos pensar que el conocimiento despierta la inquietud, el interés por hacer cosas nuevas.

### 5.2.16. Estudio de frecuencias del decimocuarto apartado

Les decimos a los alumnos si les gustaría que les explicásemos el tema y las técnicas de Metodología Creativa para volver a plantearles cuestiones análogas. Obviamente esta pregunta no se la hacemos en la Evaluación final pues en ese momento los alumnos ya han visto el tema y las técnicas.

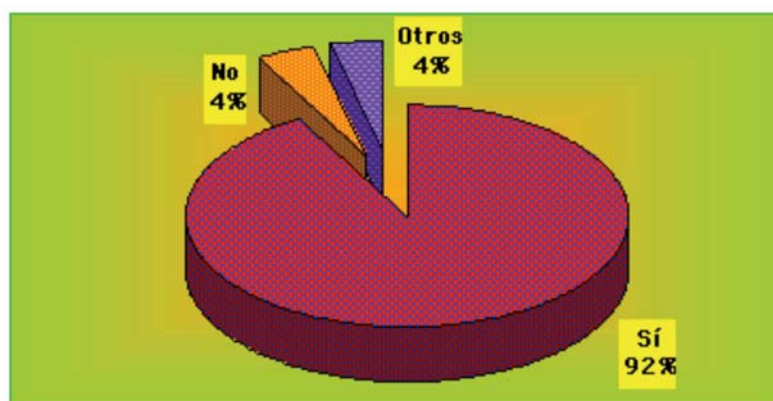


Figura 211: Decimocuarto apartado de Evaluación Inicial.

Como puede observarse en el diagrama de sectores donde se reflejan las respuestas, vemos que una amplia mayoría dice que sí. La verdad es que no esperábamos menos de nuestros alumnos, pues ya pensábamos que estos temas iban a despertar su interés.

### 5.2.17. Estudio de frecuencias del decimoquinto apartado

Preguntamos a los alumnos que si les ha servido el estudio del tema y de las técnicas para proponer actividades para Educación Infantil. Lógicamente esta pregunta sólo podemos plantearla en la Evaluación final. Para valorar cuánto creen que les ha servido lo estudiado consideramos cuatro niveles: mucho, poco, nada y otros.

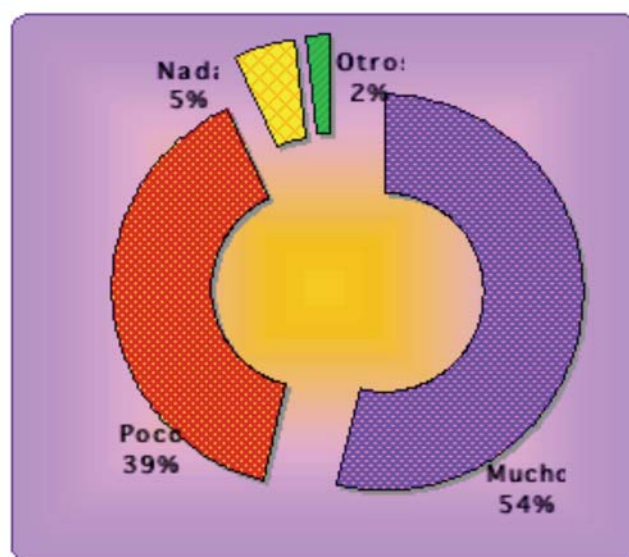


Figura 212: Decimoquinto apartado de Evaluación Final.

La mayoría de los alumnos ha dicho que el estudio del tema y de las técnicas les ha servido mucho para proponer actividades para Educación Infantil (54%), siendo mínimo el porcentaje de los alumnos que han dicho que no les ha servido nada (5%). Esto era lo que esperábamos. Después de analizar esta estadística, nos damos cuenta de que también a nosotros nos ha servido bastante profundizar en el tema para descubrir cosas nuevas en distintas partes de él, como después comentaremos en las conclusiones de la tesis.

#### 5.2.18. Estudio de frecuencias del decimosexto apartado

En esta pregunta les dejamos la posibilidad de que nos digan todo lo que consideran que es necesario para trabajar con niños de Educación Infantil, con una metodología adaptada a esas edades, para conseguir los objetivos fundamentales de esta etapa. Es una pregunta bastante amplia pues no ponemos ninguna limitación.

Comentamos en primer lugar la estadística acerca de cómo consideran que han respondido esta pregunta.





Figura 213: Decimosexto apartado de Evaluación Final.

Como en otros apartados en los que decían si tenían seguridad en sus respuestas o tenían dudas, el porcentaje de los que la responden es muy reducido. La razón es análoga a la que dimos antes: van directamente a responder la pregunta inicial y no se acuerdan de que ésta era una pregunta que les hicimos antes y han de responderla cada vez.



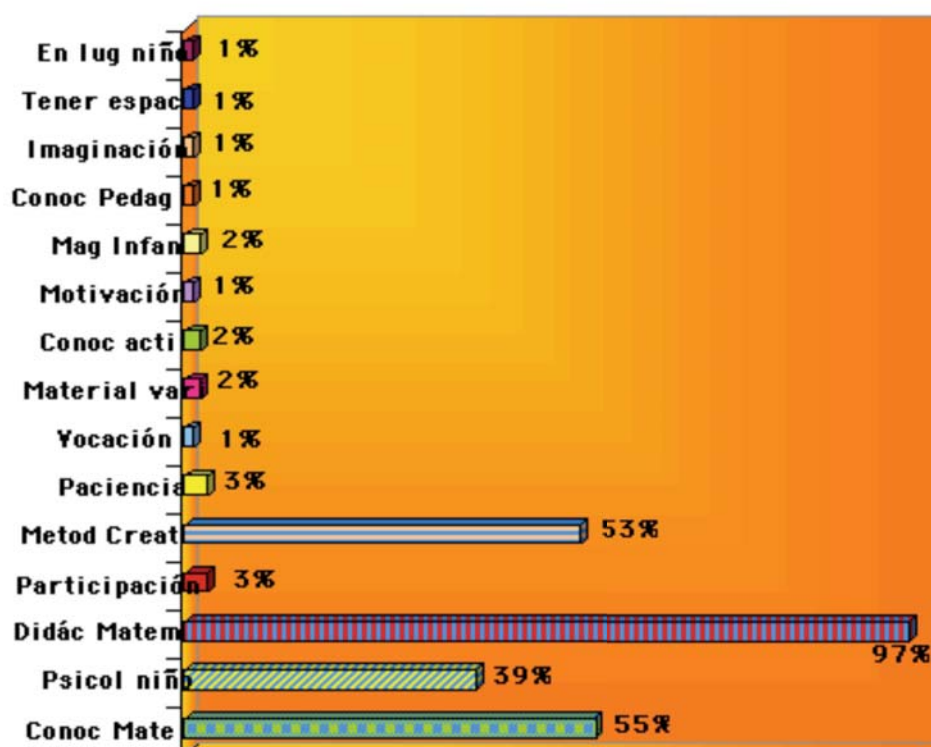


Figura 214: ¿Qué consideras necesario para trabajar con niños de Educación Infantil?

Son muchas las cosas que han dicho que consideran necesarias conocer para trabajar con niños de Educación Infantil; todas ellas quedan reflejadas en la figura adjunta. Destacamos aquéllas que dicen la mayoría de los alumnos: la Didáctica de la Matemática (97%), los conocimientos matemáticos (55%), las técnicas de Metodología Creativa (53%) y la Psicología (39%). Nos parece que la elección ha sido acertada. Es lógico que la Didáctica de la Matemática fuese la más elegida pues han visto tanto su necesidad como su utilidad a la hora de proponer actividades a los niños. Después han elegido los conocimientos matemáticos, ya que han visto su utilidad. El porcentaje de alumnos que dicen que son necesarios los conocimientos matemáticos ha sido menor que el porcentaje de los que dicen que es necesaria la Didáctica de la Matemática. Puede ser debido a que les resulte más agradable, o más próximo a sus intereses, o más fácil, el estudio de la Didáctica de las Matemáticas que de las Matemáticas en sí.

La diferencia de porcentajes entre la Didáctica de la Matemática y las técnicas de Metodología Creativa creemos que puede ser debida a que los alumnos destacan mayoritariamente que para proponer actividades a los niños de Educación Infantil necesitan aquello que no hemos trabajado con ellos.

### 5.3. Estudio estadístico de los resultados de las encuestas

Además del estudio de los porcentajes de los resultados de las encuestas que se ha llevado a cabo con los alumnos, y que se ha visto anteriormente, hacemos a continuación algunos estudios estadísticos más para corroborar las consecuencias extraídas. Para todo ello se tendrá en cuenta lo que dicen Pardo y Ruiz (2002: 257 y siguientes).

#### 5.3.1. Modelo lineal general de medidas repetidas

Utilizaremos varios programas estadísticos para contrastar los resultados. Vamos a trabajar con el *modelo lineal general* (MLG) de *medidas repetidas* (MR), que sirve para estudiar el efecto de uno o más factores cuando al menos uno de ellos es un factor *intra-sujetos*. En los factores *inter-sujetos* o *completamente aleatorizados*, a cada nivel del factor se le asigna un grupo diferente de sujetos. Por el contrario, un factor *intra-sujeto* o con *medidas repetidas* se caracteriza porque todos los niveles del factor se aplican a los mismos sujetos.

El diseño más simple de medidas repetidas consiste en medir dos variables en una misma muestra de sujetos. Los datos de este diseño se analizan con la prueba *T* para *muestras relacionadas*, que permite contrastar hipótesis referidas a la diferencia entre dos medias relacionadas. Pero los diseños de medidas repetidas pueden tener más de dos medidas y más de un factor.

Se dispone de una población de diferencias con media  $\mu_D$ , obtenida al restar las puntuaciones del mismo grupo de casos en dos variables diferentes o en la misma variable medida en dos momentos diferentes (de ahí que se hable de muestras relacionadas). De esta población de diferencias se extrae una muestra aleatoria de tamaño  $n$  y se utiliza la media,  $\bar{Y}_D$ , de esas  $n$  diferencias para contrastar la hipótesis nula de que la media  $\mu_D$  de la población de diferencias vale cero. En nuestro caso, la muestra la formaremos por los valores asignados a las respuestas dadas

por los alumnos a cada una de las preguntas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

Puede tipificarse la media  $\bar{Y}_D$  de esa muestra restándole su valor esperado (que es justamente la media de la población  $E(\bar{Y}_D)=\mu_D$ ) y dividiendo esa diferencia por su error típico ( $\sigma_{\bar{Y}_D}$ ), es decir:

$$Z = \frac{\bar{Y}_D - \mu_D}{\sigma_{\bar{Y}_D}}.$$

Se obtiene así una puntuación Z normalmente distribuida, con media 0 y desviación típica 1, que puede interpretarse utilizando la distribución normal estandarizada  $N(0,1)$ . En una distribución  $N(0,1)$ , entre  $\pm 1,96$  puntuaciones típicas se encuentra el 95% de los casos; entre  $\pm 2,58$  puntuaciones típicas se encuentra el 99% de los casos, etc.

El error típico de la media ( $\sigma_{\bar{Y}_D}$ ) es la desviación típica de la distribución muestral  $\bar{Y}_D$ , es decir, la desviación típica de las medias calculadas en todas las muestras de tamaño n que es posible extraer de una determinada población. Se obtiene mediante:  $\sigma_{\bar{Y}_D} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$  (siendo  $\sigma_D$  la desviación típica de la población).

El problema que surge al intentar obtener  $\sigma_{\bar{Y}_D}$  es que el valor de la desviación típica poblacional  $\sigma_D$  es, en general, desconocido. Es necesario estimarlo utilizando la desviación típica muestral,  $S_{D_{n-1}}$ , en cuyo caso, el error típico de la media se obtiene mediante:  $\hat{\sigma}_{\bar{Y}_D} = \frac{S_{D_{n-1}}}{\sqrt{n}}$ . El hecho de tener que estimar la desviación típica poblacional hace que la tipificación del estadístico  $\bar{Y}_D$  ya no sea una puntuación Z, sino una puntuación T:

$$T = \frac{\bar{Y}_D - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\bar{Y}_D}} = \frac{\bar{Y}_D - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

( $S_D$  se refiere a la desviación típica insesgada de las n diferencias). Este estadístico T se distribuye según el modelo *t de Student* con n-1 grados de libertad y, por tanto, permite conocer la población asociada a los diferentes valores  $\bar{Y}_D$  que es posible obtener en muestras aleatorias de tamaño n.

Para que el valor T se ajuste apropiadamente al modelo de distribución de probabilidad *t de Student*, es necesario que la población

de diferencias sea *normal*. No obstante, con tamaños muestrales grandes el ajuste del estadístico T a la distribución *t de Student* es lo suficientemente bueno incluso con poblaciones originales alejadas de la normalidad.

En la tesis que se está llevando a cabo, hay situaciones en las que al tener que dividir la muestra en subconjuntos, dependiendo de lo que se analice: género, año de realización, curso, edad, especialidad o bachillerato, en algunos casos el tamaño de éstos es pequeño, lo que podría dar lugar a la aparición de errores si no utilizáramos el modelo estadístico adecuado. Además, las variables que se utilizan son discretas y las distribuciones paramétricas son más adecuadas para variables continuas. Aunque se sabe que el análisis paramétrico no es totalmente adecuado al tipo de variables con las que se trabajan, se utiliza porque es el único del que se dispone que permite comparar dos factores intra-sujetos con un factor inter-sujeto a la vez.

En el presente trabajo, como se viene apuntando, se considera la investigación diseñada para valorar los conocimientos u opiniones de los alumnos sobre los distintos apartados de que constan las dos encuestas: Evaluación Inicial y Evaluación Final. Se selecciona un solo grupo de alumnos formado por los que estén matriculados en alguna de las asignaturas optativas y de libre configuración: “Introducción al Algebra” o “Elementos de Algebra y Geometría en la Educación Infantil”, y se le pide a los alumnos que expresen su opinión sobre cada uno de los apartados de las dos encuestas. En este caso, se tiene un diseño de un factor (cada pregunta de las encuestas, con dos niveles), pero un solo grupo de sujetos que pasa por las dos condiciones definidas por los niveles del factor (todos los sujetos opinan sobre las dos encuestas). Para analizar los datos de este diseño se puede utilizar un modelo lineal general de *un factor con medidas repetidas*.

En lugar de esto, se podría haber optado por seleccionar dos grupos de estudiantes, un grupo de universitarios que no tuviera nada que ver con la enseñanza-aprendizaje de ninguna de las asignaturas “Introducción al Algebra” y “Elementos de Algebra y Geometría en la Educación Infantil”, para pasarles la primera encuesta, y los matriculados en alguna de éstas asignaturas, para que respondieran a la segunda. De esta manera se tendría un diseño con un factor y tantos grupos de sujetos como niveles tiene el factor (dos). Para analizar los datos de este diseño se podría utilizar un modelo lineal general de *un factor completamente aleatorizado*. Sin embargo, nuestra elección nos ha

parecido la más adecuada por las razones que comentamos a continuación.

Las ventajas de los diseños de medidas repetidas son evidentes: requieren menos alumnos que un diseño completamente aleatorizado y permiten eliminar la variación residual debida a las diferencias entre los sujetos (pues se utilizan los mismos). Como contrapartida, es necesario vigilar algunos efectos atribuibles precisamente a la utilización de los mismos sujetos, tales como el efecto de *arrastre*, que ocurre cuando se administra una condición antes de que haya finalizado el efecto de la otra administrada previamente; o el efecto del *aprendizaje por la práctica*, que ocurre cuando las respuestas de los sujetos pueden mejorar con la repetición y, como consecuencia de ello, los tratamientos administrados en último lugar parecen más efectivos que los administrados en primer lugar, sin que haya diferencias reales entre ellos (en estos casos es importante controlar el orden de presentación de las condiciones). Obviamente, conviene conocer las ventajas e inconvenientes de estos diseños para decidir correctamente cuándo es apropiado utilizarlos.

Se va a utilizar el modelo lineal general de medidas repetidas en el caso más simple: el modelo de un factor. Los datos que permite analizar este modelo son los procedimientos de un diseño con un solo grupo de sujetos (los alumnos de las asignaturas “Introducción al Álgebra” o “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil”) y un único factor (cada una de las preguntas) cuyos niveles (antes y después del estudio del tema y de las técnicas) se aplican a todos los sujetos.

Se recogen todos los datos de las respuestas de las dos encuestas, llevadas a cabo una antes y otra después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa, empleando como software el programa SPSS (Statistical Product and Service Solutions). Se va a estudiar el efecto sobre cada una de las valoraciones (comentadas anteriormente al hacer el análisis de las frecuencias) que se han tenido en cuenta en las respuestas de cada una de las preguntas ya vistas, del estudio del tema y de las técnicas, en el grupo de alumnos anteriormente descrito. Se trata de un diseño de un factor (al que puede llamarse antes/después) con dos niveles (la misma pregunta planteada antes y después del estudio del tema y de las técnicas) y una variable dependiente (la calidad de la respuesta).

Desde el punto de vista de la disposición de los datos, la diferencia más evidente entre un factor completamente aleatorizado (CA) y un

factor con medidas repetidas (MR) se encuentra en la correspondencia existente entre el factor y el número de variables del archivo de datos. Mientras que un factor CA se corresponde con una única variable del archivo de datos (una variable que toma distintos valores, cada uno de los cuales define un valor del factor), un factor MR se corresponde con tantas variables del archivo de datos como niveles tiene el factor (cada una de esas variables define un nivel del factor MR).

Para comparar los distintos factores inter-sujetos, cuando sea significativo el resultado, se elige Post hoc (también llamado a posteriori). En este caso el estadístico F del modelo lineal general permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Aquí se ve dónde se encuentran las diferencias detectadas: ¿difieren entre sí todas las medias?, ¿hay una media que difiere de las demás?, etc. Para efectuar comparaciones post hoc, y ver qué media en concreto difiere de qué otra, se elige el método de comparación *Scheffé* que se basa en la distribución F y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias (una con otra, una con todas las demás, dos con dos, etc.). Utilizado para efectuar sólo comparaciones por pares es un método muy conservador: tiende a considerar significativas menos diferencias de las que debería.

La estrategia para poner a prueba la hipótesis de igualdad de medias consiste en obtener un estadístico llamado F que refleja el grado de parecido existente entre las medias que se están comparando. El numerador del estadístico F es una estimación de la varianza poblacional basada en la variabilidad existente entre las medias de cada grupo:  $\hat{\sigma}_1^2 = n\hat{\sigma}_{\bar{Y}}^2$ . El denominador del estadístico F es también una estimación de la varianza poblacional, pero basada en la variabilidad existente dentro de cada grupo:  $\hat{\sigma}_2^2 = \bar{S}_j^2$  (j se refiere a los distintos grupos o niveles del factor):

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{n\hat{\sigma}_{\bar{Y}}^2}{\bar{S}_j^2}$$

Si las medias poblacionales son iguales, las medias muestrales de los diferentes grupos serán parecidas, existiendo entre ellas tan sólo diferencias atribuibles al azar. En ese caso, la estimación  $\hat{\sigma}_1^2$  (basada en las diferencias entre las medias muestrales) reflejará el mismo grado de variación que la estimación  $\hat{\sigma}_2^2$  (basada en las diferencias entre las puntuaciones individuales dentro de cada grupo) y el cociente F tomará un valor próximo a 1. Por el contrario, si las medias muestrales son

distintas, la estimación  $\hat{\sigma}_1^2$  reflejará mayor grado de variación que la estimación  $\hat{\sigma}_2^2$ , en cuyo caso el cociente F tomará un valor mayor que 1. Cuanto más diferentes sean las medias muestrales, mayor será el valor de F.

Si las poblaciones muestrales son normales y sus varianzas iguales, el estadístico F se distribuye según el modelo de Probabilidad *F de Fisher-Snedecor* (los grados de libertad del numerador son el número de grupos menos 1; los del denominador, el número total de observaciones menos el número de grupos). Suponiendo cierta la hipótesis de igualdad de medias, es posible conocer la probabilidad de obtener un valor F como el obtenido o mayor.

El estadístico F se interpreta de forma similar a como se interpreta el estadístico T. Si el nivel crítico asociado al estadístico F (es decir, si la probabilidad de obtener valores como el obtenido o mayores) es menor que 0.05, deberá rechazarse la hipótesis de igualdad de medias y podrá concluirse que no todas las medias poblacionales comparadas son iguales. Se tomarán los valores de significación del siguiente modo: si  $0.01 \leq p < 0.05$ , es significativo; y si  $p < 0.01$ , es muy significativo. En caso contrario, no se podrá rechazar la hipótesis nula ni, consecuentemente, afirmar que los grupos comparados difieran en sus promedios poblacionales.

### 5.3.2. Análisis no paramétrico

Para completar el estudio, vamos a utilizar también en nuestra investigación *contrastes no paramétricos*. Estos contrastes permiten poner a prueba hipótesis no referidas a parámetros poblacionales, no necesitan establecer supuestos exigentes sobre las poblaciones de donde se extraen las muestras y no necesitan trabajar con datos obtenidos con una escala de medida de intervalo o razón.

Los *contrastes paramétricos* tienen una serie de características que son:

1. Permiten contrastar hipótesis referidas a algún parámetro ( $\mu$ ,  $\sigma^2$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ , etc.).
2. Exigen el cumplimiento de determinados supuestos sobre las poblaciones originales de las que se extraen los datos (generalmente normalidad y homocedasticidad).
3. Analizan datos obtenidos con una escala de medida o razón.



Los contrastes serán clasificados tomando como referencia el *tipo de datos* que permitan analizar (independientemente del tipo de hipótesis que permitan contrastar e independientemente de los supuestos que sea necesario establecer). Utilizaremos la denominación genérica de contrastes *no paramétricos* para todos aquéllos que no se ajusten a una cualquiera de las tres características de los contrastes *paramétricos* y se englobarán en ese término los contrastes *de distribución libre*, que son aquéllos que no establecen supuestos demasiado exigentes sobre las poblaciones originales de donde se obtiene la muestra. En las pruebas no paramétricas no se pueden mezclar dos factores, por esta causa trabajamos también con pruebas paramétricas.

Las pruebas no paramétricas que vamos a utilizar van a ser:

- a) Pruebas para muestras relacionadas.
- b) Pruebas para dos muestras independientes.
- c) Pruebas para varias muestras independientes.

### 5.3.2.1. Pruebas para dos muestras relacionadas

Las pruebas para muestras relacionadas permiten analizar datos provenientes de diseños con medidas repetidas. Este es nuestro caso, pues hacemos el análisis de las respuestas dadas a las dos encuestas y, después de que los alumnos se estudien el tema y las técnicas, repetimos las preguntas. De entre ellas, en este trabajo se emplea la prueba de Wilcoxon.

### 5.3.2.2. Prueba de Wilcoxon

Para esta prueba se toman dos medidas ( $X_i$  e  $Y_i$ ) a un grupo de  $m$  sujetos y se calculan las diferencias, en valor absoluto, entre las dos puntuaciones de cada par:

$$D_i = |X_i - Y_i| \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

Se desechan las  $D_i$  nulas y únicamente se consideran las  $n$  diferencias  $D_i$  no nulas ( $n \leq m$ ). Se asignan rangos ( $R_i$ ) desde 1 hasta  $n$  a esas  $D_i$  no nulas: rango 1 a la  $D_i$  más pequeña, el rango 2 a la  $D_i$  más pequeña de las restantes, ..., el rango  $n$  a la  $D_i$  más grande (si existen empates, se resuelven asignando el promedio de los rangos). Se suman, por un lado, los  $R_i^+$ , es decir, los rangos correspondientes a los  $D_i$  con  $X_i > Y_i$ , y se llama  $S_+$  a esta suma; se suman, por otro lado, los  $R_i^-$ , es decir, los rangos correspondientes a los  $D_i$  con  $X_i < Y_i$ , y se llama  $S_-$  a esta suma. Hecho

esto, si se asume que las puntuaciones  $X_i$  e  $Y_i$  proceden de poblaciones con la misma mediana ( $Mdn_X = Mdn_Y$ ), cabe esperar que:

$$P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i)$$

por lo que, la hipótesis  $H_0: Mdn_X = Mdn_Y$  es verdadera. En una muestra aleatoria de  $n$  observaciones cabe encontrar aproximadamente tantos valores  $X_i > Y_i$  como  $X_i < Y_i$  (salvando, por supuesto, las fluctuaciones atribuibles al azar muestral). Pero, además, si la distribución de las diferencias es *simétrica* (lo cual exige escala de intervalo o razón), las  $D_i$  se alejan de cero en *igual medida* que las  $D_i$  negativas, por lo cual es fácil deducir que:

$$S_+ = \sum R_i^+ \approx S_- = \sum R_i^-.$$

Es decir, si  $Mdn_X = Mdn_Y$  y la distribución de las diferencias  $D_i$  es simétrica,  $S_+$  y  $S_-$  tomarán valores parecidos. De modo que una fuerte discrepancia entre  $S_+$  y  $S_-$  hará dudar de la veracidad de  $H_0: Mdn_X = Mdn_Y$ .

Con tamaños muestrales pequeños no resulta complicado obtener la distribución exacta de  $S_+$  o  $S_-$ . Pero es más fácil obtener una tipificación de  $S$  ( $S$  se refiere al menor de  $S_+$  y  $S_-$ ) cuya distribución se aproxima, conforme el tamaño de la muestra va aumentando, al modelo de probabilidad normal  $N(0,1)$ :

$$Z = \frac{S - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \sum_{i=1}^k \frac{t_i^3 - t_i}{48}}}$$

( $k$  se refiere al número de rangos distintos en los que existen empates y  $t_i$  al número de puntuaciones empatadas en el rango  $i$ ). El SPSS ofrece el nivel crítico bilateral resultante de multiplicar por 2 la probabilidad de obtener valores menores o iguales que  $Z$ .

### 5.3.2.3. Pruebas para dos muestras independientes.

Este procedimiento contiene varias pruebas no paramétricas, todas ellas diseñadas para analizar datos provenientes de diseños con una variable independiente categórica (con dos niveles que definen dos grupos o muestras) y una variable dependiente cuantitativa al menos ordinal (en la cual interesa comparar los dos grupos o muestras). Este es el caso con el que nos encontramos cuando queremos comparar los resultados de las respuestas de los alumnos en las dos encuestas con la variable independiente género.

De las pruebas, para muestras independientes existentes, aquí se emplea la prueba *U de Mann-Whitney*.

#### 5.3.2.4. Prueba U de Mann-Whitney

La prueba U de Mann-Whitney es una excelente alternativa a la prueba t sobre diferencias de medias cuando no se cumplen los supuestos en los que se basa la prueba t (normalidad y homocedasticidad), o cuando no es apropiado utilizar la prueba t porque el nivel de medida de los datos es ordinal.

Consideremos dos muestras independientes:  $Y_1$ , de tamaño  $n_1$ , e  $Y_2$ , de tamaño  $n_2$ , extraídas de la misma población o de dos poblaciones idénticas. Al mezclar las  $n_1+n_2=n$  observaciones y, como si se tratara de una sola muestra, asignar rangos  $R_i$  a las  $n$  puntuaciones (un 1 a la más pequeña, un 2 a la más pequeña de las restantes..., un  $n$  a la más grande; resolviendo los empates asignando el rango promedio), se obtienen  $n_1$  rangos  $R_{i1}$  (los  $n_1$  rangos correspondientes a las observaciones de la muestra  $Y_1$ ) y  $n_2$  rangos  $R_{i2}$  (los  $n_2$  rangos correspondientes a las observaciones de la muestra  $Y_2$ ). En ocasiones la asignación de rangos se ha hecho en orden inverso.

Entre los múltiples estadísticos que podrían definirse en una condición como la descrita, tenemos estos dos:  $S_1$ ="suma de rangos asignados a la muestra 1" y  $S_2$ ="suma de rangos asignados a la muestra 2". Teniendo esto en cuenta, el estadístico U adopta la siguiente forma en cada grupo:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - S_1 \quad \text{y} \quad U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - S_2.$$

Puesto que se está suponiendo que las dos muestras se han extraído de dos poblaciones idénticas, cabe esperar que  $U_1$  y  $U_2$  sean aproximadamente iguales (excepto en la cantidad atribuible a las fluctuaciones propias del azar muestral). Si los valores de  $U_1$  y de  $U_2$  son muy distintos, existirá cierta evidencia de que las muestras proceden de poblaciones distintas. Por tanto, la hipótesis nula de que ambos promedios poblacionales son iguales podría rechazarse si  $U_1$  (o  $U_2$ ) es demasiado grande o demasiado pequeño.

Para determinar esto último, la decisión puede basarse en la probabilidad concreta asociada al estadístico U:

$$U = U_1 \quad \text{si } U_1 < \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$U = U_2 \quad \text{si } U_1 > \frac{n_1 n_2}{2}$$

Con muestras pequeñas ( $n \leq 30$ ) el SPSS ofrece el nivel crítico bilateral exacto asociado al estadístico U, el cual se obtiene multiplicando por 2 la probabilidad de obtener valores menores o iguales que U (esta probabilidad se calcula utilizando el algoritmo de Dineen y Blakesley).

Con muestras grandes ( $n > 30$ ), el SPSS ofrece una tipificación del estadístico U (incluyendo corrección por empates) que se ajusta aproximadamente según la distribución  $N(0,1)$ :

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n(n-1)} \left( \frac{n^3 - n}{12} - \sum_{i=1}^k \frac{t_i^3 - t_i}{12} \right)}}$$

(k se refiere al número de rangos distintos en los que existen empates y  $t_i$  al número de puntuaciones empatadas en el rango i). El nivel crítico bilateral se obtiene multiplicando por 2 la probabilidad de obtener valores menores o iguales que Z.

### 5.3.2.5. Pruebas para varias muestras independientes

Este procedimiento contiene varias pruebas no paramétricas, todas ellas diseñadas para analizar datos provenientes de diseños con una variable independiente categórica (con más de dos niveles que definen más de dos grupos o muestras) y una variable dependiente cuantitativa, al menos ordinal, en la cual interesa comparar las muestras. Este es el caso en que nos encontramos nosotros cuando queremos analizar los resultados de las respuestas dadas en las dos encuestas teniendo en cuenta cada una de las variables independientes: año de realización, curso, edad, especialidad y bachillerato. De los procedimientos existentes empleamos la prueba *H de Kruskal-Wallis*.

### 5.3.2.6. Prueba H de Kruskal-Wallis

La prueba U de Mann-Whitney para dos muestras independientes fue extendida al caso de más de dos muestras por Kruskal-Wallis. La situación experimental que permite resolver esta prueba es similar a la estudiada a propósito del MLG de un factor completamente aleatorizado: J muestras son aleatorias e independientes extraídas de J poblaciones para averiguar si las J poblaciones son idénticas o alguna de ellas presenta promedios mayores que otra.

Las ventajas fundamentales de esta prueba frente al estadístico F del modelo lineal general de un factor completamente aleatorizado son dos: 1) no necesitan establecer supuestos sobre las poblaciones originales como las del estadístico F (normalidad y homocedasticidad), y 2) permiten trabajar con datos ordinales. Por el contrario, si se cumplen los supuestos en los que se basa el estadístico F, la potencia de éste es mayor que la que es posible alcanzar con el estadístico H de Kruskal-Wallis.

Ahora bien, teniendo en cuenta que en muchas situaciones reales resulta demasiado arriesgado suponer normalidad y homocedasticidad (especialmente si las muestras son pequeñas y/o los tamaños muestrales desiguales), y considerando además que en otras situaciones el nivel de medidas de los datos puede no ir más allá del ordinal, la prueba de Kruskal-Wallis representa una excelente alternativa al MLG de un factor completamente aleatorizado, como es nuestro caso.

Consideramos un diseño con J muestras aleatorias e independientes de tamaños  $n_1, n_2, \dots, n_j$  extraídas de la misma población o de J poblaciones idénticas, con  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_j$  (es decir, siendo n el conjunto total de observaciones). Asignando rangos desde 1 hasta n a ese conjunto de n observaciones como si se tratara de una sola muestra (si existen empates se asigna el promedio de los rangos empatados), es posible definir los valores  $R_{ij}$ ="rangos asignados a las observaciones i de la muestra j" y  $R_j$ ="suma de los rangos asignados a las  $n_j$  observaciones de la muestra j", es decir:

$$R_j = \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij} \quad \text{y} \quad \bar{R}_j = \frac{R_j}{n_j}$$

Obviamente, si la hipótesis nula de que las J poblaciones son idénticas es verdadera, los  $R_j$  de las distintas muestras serán parecidos. Siguiendo una lógica similar a la del estadístico U de Mann-Whiney, es posible obtener, tomando como punto de partida la suma de los rangos de cada muestra, un estadístico con distribución muestral conocida capaz de ofrecer información sobre el parecido existente entre las J poblaciones:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^J \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1)$$

Bajo la hipótesis nula de que los J promedios poblacionales son iguales, el estadístico H se distribuye según el modelo de probabilidad chi-cuadrado, con J-1 grados de libertad.

### 5.3.3. Estudio Estadístico del primer apartado de las Encuestas

En esta sección se hará un estudio estadístico para analizar la influencia del estudio del tema y de las técnicas en la opinión de los alumnos, sucesivamente, sobre cada una de las afirmaciones: “las Matemáticas son difíciles”, “las Matemáticas son odiosas”, “las Matemáticas son imprescindibles”, “las Matemáticas son un tostón”, “las Matemáticas son interesantes”, “las Matemáticas son precisas”, “las Matemáticas son engorrosas”, “las Matemáticas son formativas”, “las Matemáticas no son prácticas”, “las Matemáticas son divertidas” y “me gustan las Matemáticas”, que están planteadas en el primer apartado en las dos encuestas.

Se trabaja con el programa estadístico SPSS, se selecciona la opción *modelo lineal general* y en él se elige *medidas repetidas* del menú *Analizar* para acceder al cuadro de diálogo *definir factor/es de medidas repetidas*. Se marcará sucesivamente cada una de las afirmaciones “las Matemáticas son...” o “me gustan las Matemáticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. Después se le asignará como nombre, al factor de muestras relacionadas, antes/después y se marcará el número de niveles, dos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, más tarde se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la opinión de los alumnos sobre el grado de dificultad, de odio, de imprescindibles, etc. de las Matemáticas, según cada una de estas variables.

Se verán los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados (la *traza de Pillai*, la *lambda de Wilks*, la *traza de Hotelling*, y la *raíz mayor de Roy*), y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico *F* (la no corregida: esfericidad asumida y las tres corregidas: *Greenhouse-Geisser*, *Huynh-Feldt* y *Límite inferior*), y se rechaza o acepta que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se toman los valores de significación del siguiente modo: si  $0.01 \leq p < 0.05$ , es significativo, y si  $p < 0.01$  es muy significativo; en ambos casos se puede rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias y concluir que las respuestas antes y después del citado estudio no son iguales. Esta circunstancia la destacaremos en las tablas que incluimos a continuación, escribiendo en rojo los valores críticos y marcando con un asterisco o dos según sea significativo o muy significativo.

### 5.3.3.1. Las Matemáticas son difíciles

Se empieza analizando la influencia del estudio del tema y de las técnicas en la opinión de los alumnos sobre *las Matemáticas son difíciles*. Se siguen los pasos antes señalados. Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados salen mayores que 0.05, y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico *F* resultan ser también mayores que 0.05, se tiene que rechazar que existan diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después de dicho estudio.

Esto viene a corroborar lo que se tenía cuando se consideró el diagrama de frecuencias; en él las diferencias entre los que respondían que estaban muy o bastante de acuerdo quedaban compensadas con los que decían que estaban poco o nada de acuerdo, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

Se copia el gráfico que da el programa estadístico respecto de la variación antes/después del estudio del tema y de las técnicas.



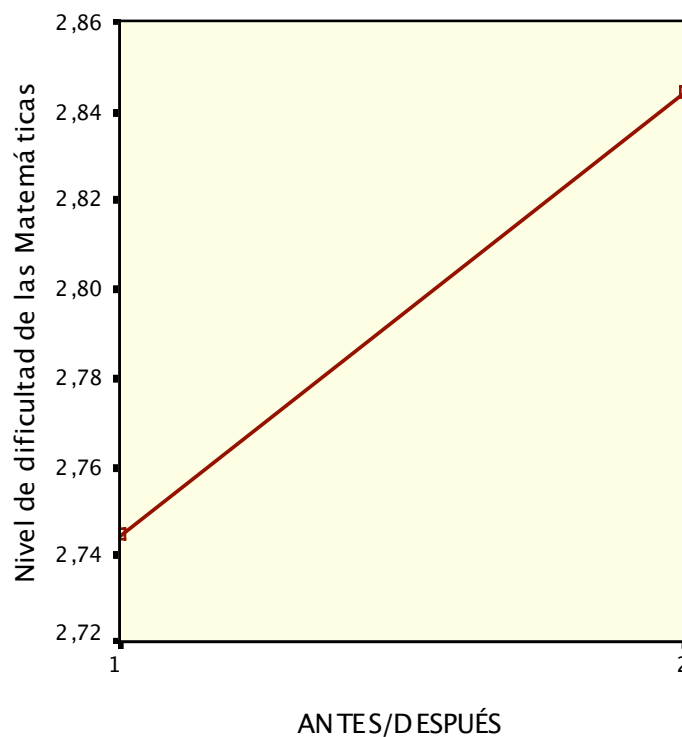


**Figura 215: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después.**

En la figura precedente se ve una diferencia entre las opiniones que dan los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas, siendo mayor en el valor 2 (después) que en el 1 (antes). La escala de valoración era la siguiente: 1=“nada de acuerdo”, 2=“poco de acuerdo”, 3=“bastante de acuerdo” y 4=“muy de acuerdo”, por tanto, se sabe que si el nivel aumenta, la consideración de que las Matemáticas son difíciles también aumenta, y recíprocamente. Por ello se puede afirmar que después del citado estudio los alumnos consideran que las Matemáticas son más difíciles.

## Género

Se analiza, tomando como variable inter-sujeto el “género”, si la opinión de los alumnos sobre la dificultad de las Matemáticas varía después de estudiarse el tema y las técnicas, respecto de la opinión que tenían antes. Como en el caso anterior, los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados resultan ser mayores que 0.05, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también salen mayores que 0.05, se tiene que rechazar que existan

diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después de dicho estudio. Por tanto, se puede concluir que no existen diferencias significativas entre las opiniones sobre la dificultad de las Matemáticas, antes y después del citado estudio, dentro de cada uno de los géneros, ni entre los géneros. Se obtiene la figura siguiente:

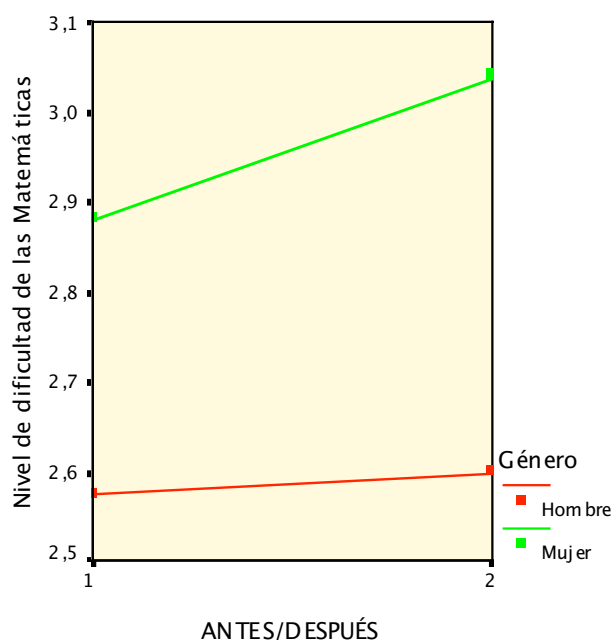


**Figura 216: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “género”.**

Como puede observarse, en los hombres apenas hay diferencia entre las opiniones de antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En las mujeres sí hay diferencias, aumentando después de dicho estudio la idea de que las Matemáticas son difíciles, más que para los hombres. Ahora bien, otra información que se desprende de la figura es que, aun sin haber diferencias “antes/después”, sí se muestran niveles inferiores en los hombres respecto de las mujeres en ambos momentos, luego las mujeres consideran las Matemáticas más difíciles que los hombres.

### Año de realización

Se obtienen resultados análogos al comparar las opiniones sobre la dificultad de las Matemáticas en los distintos años de realización de las encuestas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas: dan los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos mayores que 0.05, luego “el año de realización” de la prueba no tiene una repercusión significativa en la opinión sobre la dificultad de las Matemáticas.

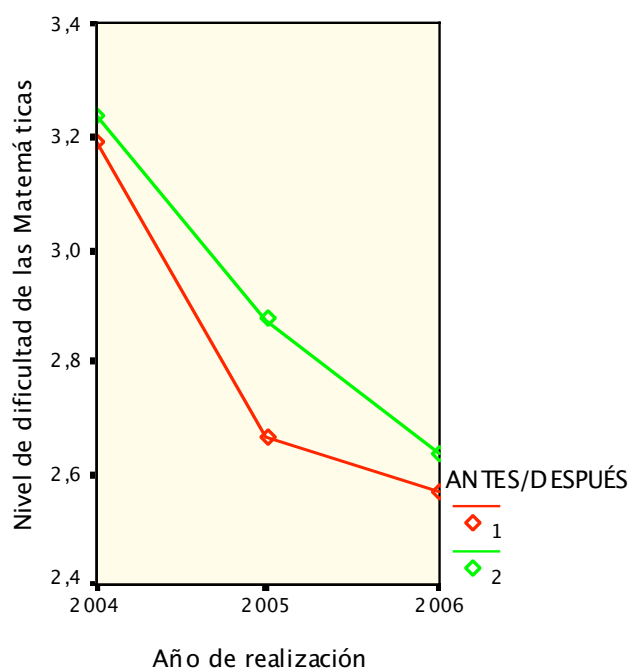


**Figura 217: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “año de realización”.**

Aunque no existen diferencias significativas, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la percepción sobre la dificultad de las Matemáticas en todos los casos, aunque de manera más suave para los que contestaron las encuestas en el curso 2003/2004 —al que llamamos 2004— y más bruscamente para los que lo hicieron en 2004/2005. Los alumnos que consideran las Matemáticas más difíciles son los que respondieron las encuestas en 2003/2004 y disminuye, sucesivamente, para los alumnos que completaron las dos encuestas en 2004/2005 y 2005/2006.

## Curso

Se pasa a analizar si son o no significativas las diferencias en cuanto a la percepción del grado de dificultad de las Matemáticas antes y después del estudio del tema y de las técnicas, y teniendo en cuenta “el curso” en que están matriculados los alumnos objeto de estudio. Vemos que en ninguno de los cuatro estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas dan los niveles críticos asociados menores que 0.05, luego se tiene que concluir que no hay diferencias significativas de la apreciación de la dificultad de las Matemáticas por los alumnos antes y después del citado estudio, según “el curso”. Por tanto, la consideración de la dificultad de las Matemáticas

no depende del “curso” en el que estén matriculados los alumnos. Uno de los gráficos que se obtiene es el que viene a continuación.

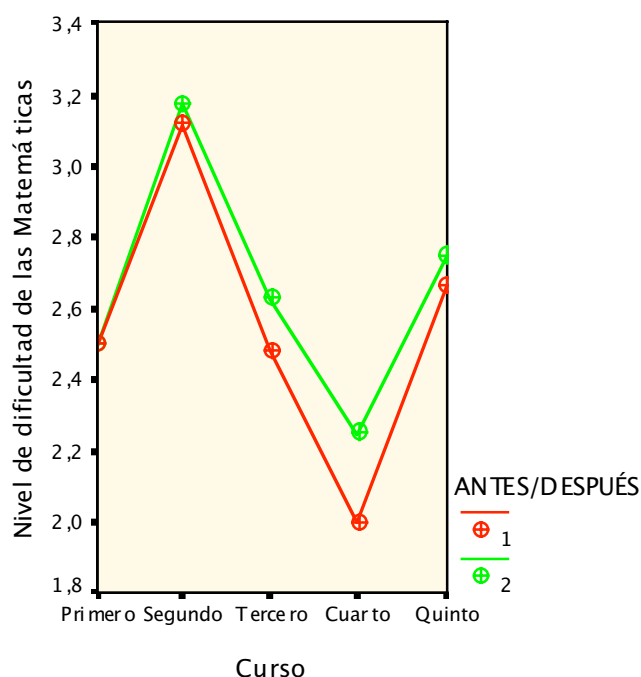


**Figura 218: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “curso”.**

Como puede verse en el gráfico adjunto, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los alumnos que están matriculados en segundo los que consideran que es mayor la dificultad de las Matemáticas frente a los matriculados en los demás cursos, y es menor para los que están matriculados en cuarto que para el resto. También puede observarse en esta figura que aumentan levemente las diferencias de percepción del grado de dificultad de las Matemáticas después del citado estudio, aunque dichas diferencias son muy pequeñas en cualquiera de los cursos, siendo mayor en los alumnos que cursaban cuarto.

## Edad

Cuando se ve el grado de dificultad de las Matemáticas antes y después del estudio del tema y de las técnicas, por edades, se observa que en el modelo lineal general de medidas repetidas no es significativa “la edad” que tengan. Pasemos a ver alguno de los gráficos que se obtienen.

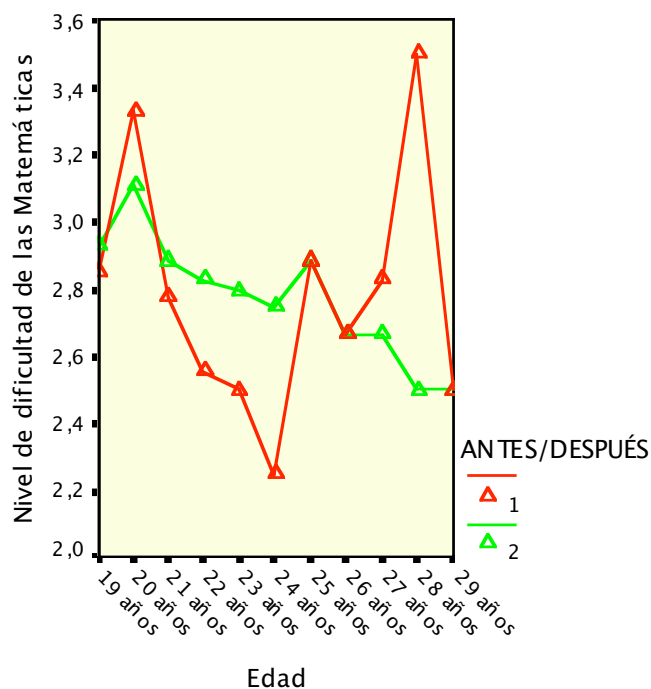


**Figura 219: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “edad”.**

En esta figura queda claro que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que tienen 28 años son los que consideran que las Matemáticas son más difíciles, seguidos del grupo de los de 20 años, y los que las consideran menos difíciles son los que tienen 24 años. Después del citado estudio las diferencias entre todos los alumnos son menores que antes; los que tienen 20 años siguen siendo los que consideran que las Matemáticas son más difíciles. Como son muchas las submuestras que incluye este caso, para tener la información algo más clara se adjunta la figura siguiente.

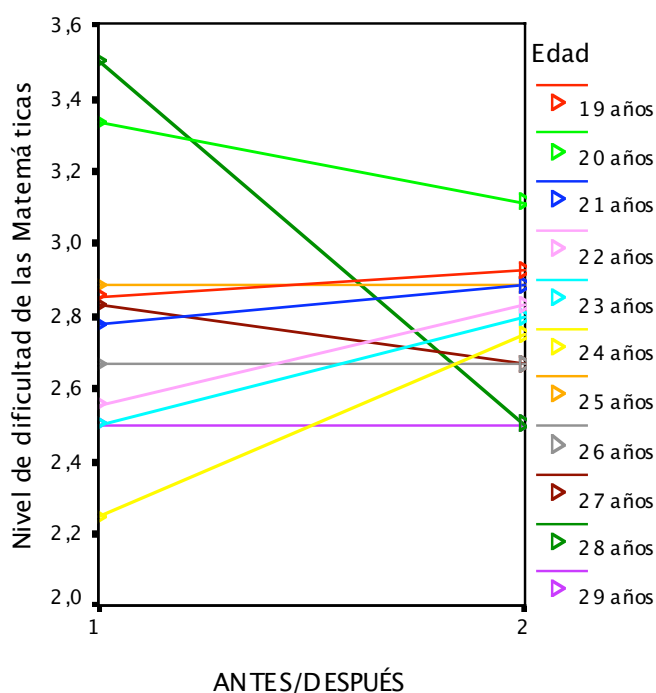


**Figura 220: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “edad”.**

Las diferencias de apreciación, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, de la dificultad de las Matemáticas según “la edad”, son muy variadas, como puede verse en la figura precedente, siendo la diferencia mayor para los que tienen 28 años, para quienes disminuye su percepción de que las Matemáticas son difíciles después de dicho estudio.

## Especialidad

Analizamos, por especialidades, las consideraciones de los alumnos sobre la dificultad de las Matemáticas antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos son mayores que 0.05, luego la idea de dificultad de las Matemáticas por parte de los alumnos no depende de “la especialidad” de la que procedan. Pasamos a analizar los gráficos que obtenemos en el citado estudio.

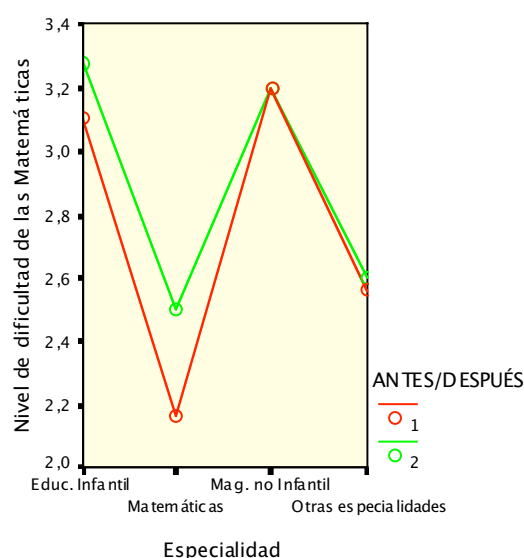


**Figura 221: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos que consideran que son más difíciles las Matemáticas son los de Magisterio, siendo mayor para los alumnos de especialidades distintas de Educación Infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas, y para los de Educación Infantil, después, aunque quedan muy próximos. Los alumnos que consideran que son menos difíciles son los de la licenciatura de Matemáticas. Cabe pensar que los alumnos que dedican sus estudios a las Matemáticas piensen que son más fáciles. Todo lo que se dice aquí se puede completar y aclarar en la figura que viene a continuación.

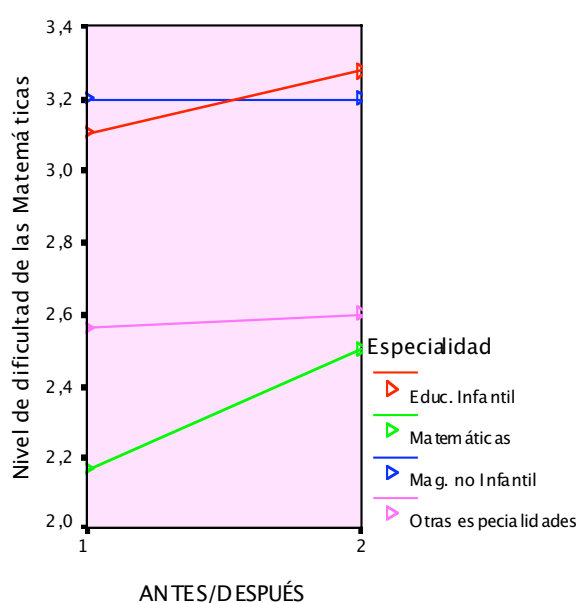


**Figura 222: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “especialidad”.**



Se puede ver en esta figura que la percepción de dificultad en las distintas especialidades se mantiene o aumenta después del estudio del tema y de las técnicas, siendo el aumento mayor para los alumnos que antes consideraban que eran más fáciles: los de Matemáticas. El hecho de que los que estaban cursando la licenciatura de Matemáticas hayan considerado, después del citado estudio, que éstas son más difíciles, nos hace pensar que el nivel dado al tema ha sido muy bueno.

## Bachillerato

Se estudia, con el modelo lineal general de medidas repetidas, si la percepción de que las Matemáticas son difíciles depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos. Se observa que ninguno de los estadísticos que son objeto de estudio da niveles críticos asociados menores que 0.05, luego la idea de dificultad de las Matemáticas por los alumnos no depende del “bachillerato” que hubieran cursado.

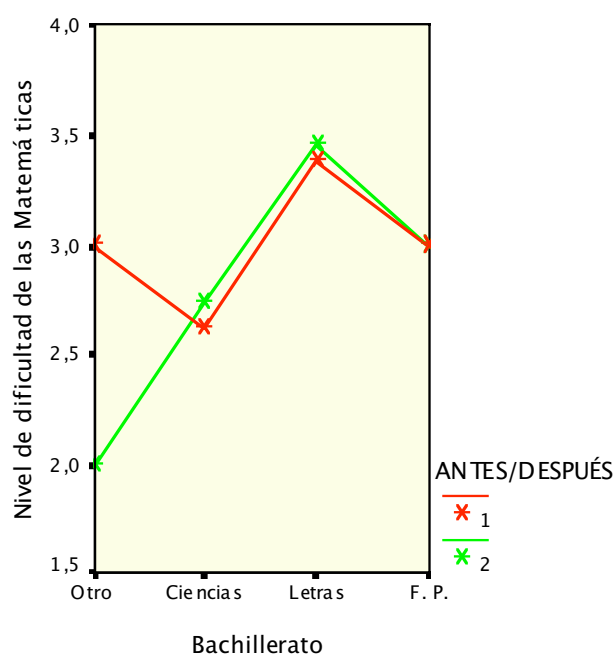


**Figura 223: Estimación de “las Matemáticas son difíciles” antes/después, por “bachillerato”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que proceden del bachillerato de Letras son los que consideran que las Matemáticas son más difíciles —lo cual parece bastante razonable—, siendo después del citado estudio mayor aún. Antes de dicho estudio, los que consideran que las Matemáticas son

menos difíciles son los alumnos que cursaron un bachillerato de Ciencias y después, los que llamamos “Otro”, es decir, los alumnos que hicieron el acceso a la Universidad para mayores de 25 años. Para casi todos se mantiene o aumenta levemente su percepción por la dificultad de las Matemáticas después del mencionado estudio, excepto para los que provienen del examen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años, que disminuye. Esto es lógico, pues su preparación matemática, según nuestro criterio, puede ser algo deficiente.

En la tabla que viene a continuación recogemos los niveles críticos obtenidos en la percepción de los alumnos sobre que “las Matemáticas son difíciles”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                      | Momento                    | Interacción                                      | Figura |
|--------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas son DIFÍCILES</b> | Antes / después: $p=0.171$ |                                                  | 211    |
|                                      | Antes / después: $p=0.209$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.358$       | 212    |
|                                      | Antes / después: $p=0.168$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.674$          | 213    |
|                                      | Antes / después: $p=0.326$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.968$        | 214    |
|                                      | Antes / después: $p=0.898$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.215$         | 215-6  |
|                                      | Antes / después: $p=0.229$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.690$ | 217-8  |
|                                      | Antes / después: $p=0.359$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.448$ | 219    |

**Tabla 24: “Las Matemáticas son difíciles”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.2. Las Matemáticas son odiosas

Se sigue utilizando el modelo lineal general y en él también se eligen medidas repetidas del menú Analizar. Ahora se marcan las afirmaciones *Matemáticas odiosas* antes y después del estudio del tema y de las técnicas como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto. Después, se asigna como nombre al factor de muestras relacionadas, antes/después, y se marca el número de niveles, dos. Se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en su opinión sobre el grado de odio hacia las Matemáticas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados es  $p=0.035 < 0.05$ , y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan tener  $p=0.035 < 0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema

y de las técnicas. Como ya se ha dicho, se toman los valores de significación del siguiente modo: si  $p < 0.05$ , es significativo; si  $p < 0.01$ , es muy significativo. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.035 < 0.05$ , con lo que se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Esto viene a corroborar lo que se obtenía en el diagrama de frecuencias: mayoritariamente opinan que son nada odiosas o poco, tanto antes de estudiar el tema (88%) como después (83%), lo que se pudo interpretar como que los alumnos a los que se dirigía la investigación presentaban una especial predilección por las Matemáticas. Sin embargo, después de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida”, aumentó levemente su percepción del odio hacia las Matemáticas.

Los valores asignados a esta variable son análogos a los que se tenían en el apartado anterior, y se sigue manteniendo la escala de cuatro puntos que van desde “nada de acuerdo” (1) a “muy de acuerdo” (4). Por tanto, cuando aumenta el valor, aumenta la idea de que las Matemáticas son odiosas y recíprocamente.

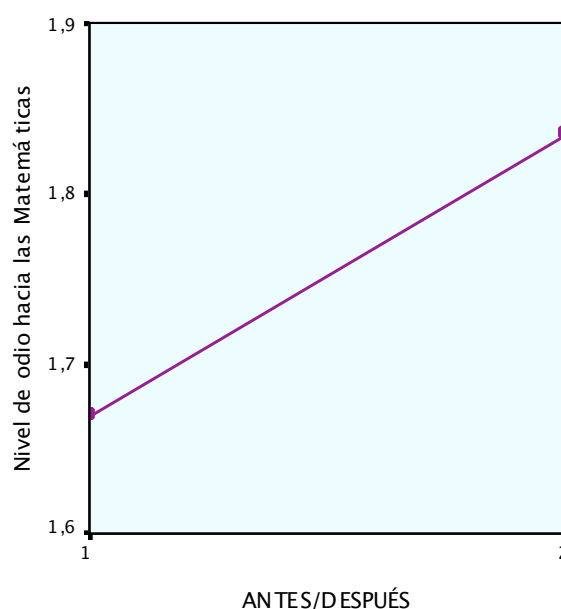


**Figura 224: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después.**

El gráfico que se obtiene mediante el modelo lineal general viene a confirmar lo que ya sabíamos: aumenta el odio hacia las Matemáticas

después del estudio del tema y de las técnicas, lo que creemos que puede ser debido a la profundidad con que lo tratamos.

## Género

Se elige como factor inter-sujeto “el género” y se estudia si hay diferencias significativas dentro de cada género y entre los géneros. En este caso se observa en los resultados obtenidos que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.035 < 0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada género, y  $p=0.945 > 0.05$  cuando se analizan entre los géneros. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Se tiene que afirmar, por tanto, que existen diferencias significativas en cada uno de los géneros para las opiniones que dan antes y las que dan después del estudio del tema y de las técnicas, sobre si las Matemáticas son odiosas, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

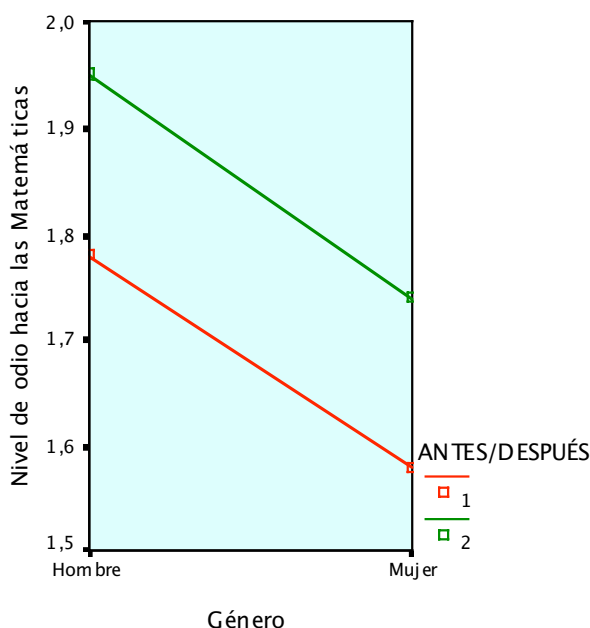


**Figura 225: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “género”.**

El gráfico que se obtiene indica que los hombres opinan que existe mayor odio hacia las Matemáticas que las mujeres, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Después del citado estudio aumenta la percepción de odio, tanto para los hombres como para las mujeres.

## Año de realización

Se estudia si influye “el año de realización” de las encuestas en las opiniones sobre la afirmación: “las Matemáticas son odiosas”, planteada antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observan los resultados obtenidos en todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos antes indicados y se ve que todos ellos son mayores que 0.05, luego se puede concluir que “el año de realización” no explica las opiniones que dan los alumnos antes y después del citado estudio.

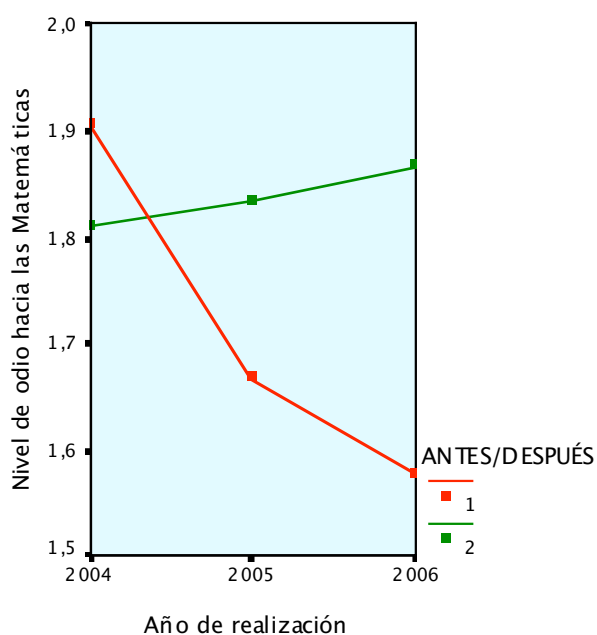


**Figura 226: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “año de realización”.**

El gráfico anterior indica que antes del estudio del tema y de las técnicas, la opinión sobre que las Matemáticas sean odiosas disminuye según van transcurriendo los años. Sin embargo, después del citado estudio ocurre lo contrario, aunque muy levemente. Después de dicho estudio aumenta la percepción del odio hacia las Matemáticas para casi todos los alumnos excepto para los que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004. Una explicación podría ser que en ese curso tuvimos los mejores alumnos, en el sentido de que fueron los que se mostraron más interesados en el tema, los más participativos, los que se preocuparon más por su formación, etc.

## Curso

Al estudiar la repercusión que puede tener “el curso” en la opinión sobre si las Matemáticas son odiosas tanto antes como después del

estudio del tema y de las técnicas, se ve que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados en el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05, luego no parece tener repercusión “el curso” en que estén matriculados los alumnos en la opinión sobre el odio hacia las Matemáticas.

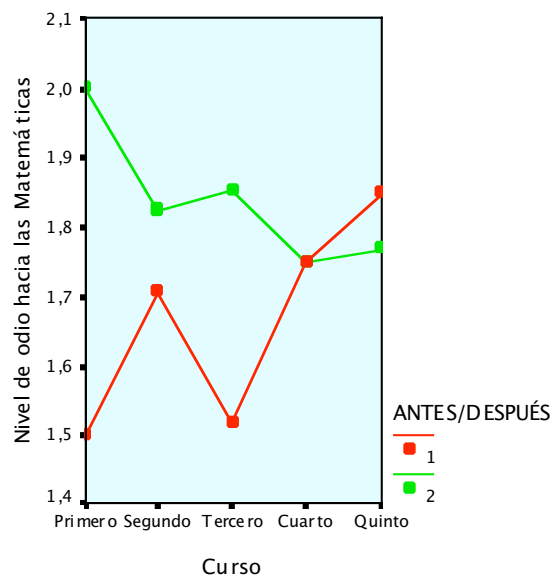


**Figura 227: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “curso”.**

Según el gráfico, los alumnos que están menos de acuerdo con que las Matemáticas sean odiosas, antes del estudio del tema y de las técnicas, parece ser que son los de primer curso, siguiéndoles con poca diferencia los de tercero, siendo los de quinto los que están más de acuerdo con que las Matemáticas son odiosas. Después de dicho estudio la situación cambia, pasando a ser los de primero los que están más de acuerdo con que las Matemáticas sean odiosas y los de cuarto los que opinan que lo son menos. Como los valores quedan muy próximos, para confirmarlo se incluye la figura siguiente.

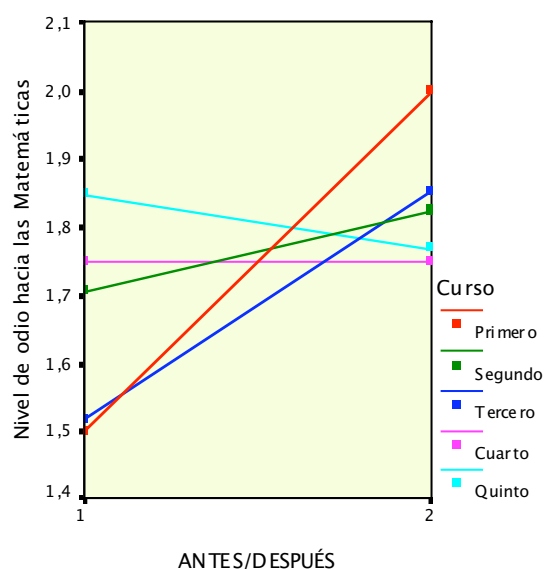


**Figura 228: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “curso”.**

Para casi todos los que están matriculados en los distintos cursos aumenta la valoración sobre el odio hacia las Matemáticas después del estudio del tema y de las técnicas; sólo para los matriculados en quinto curso disminuye, y para los de cuarto se mantiene.

## Edad

Se considera si “la edad” tiene alguna repercusión sobre la opinión acerca de que las Matemáticas sean odiosas antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observan todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados en el modelo lineal general de medidas repetidas y se ve que son mayores que 0.05; esto quiere decir que no parece tener ninguna repercusión “la edad” que tengan los alumnos en su opinión.



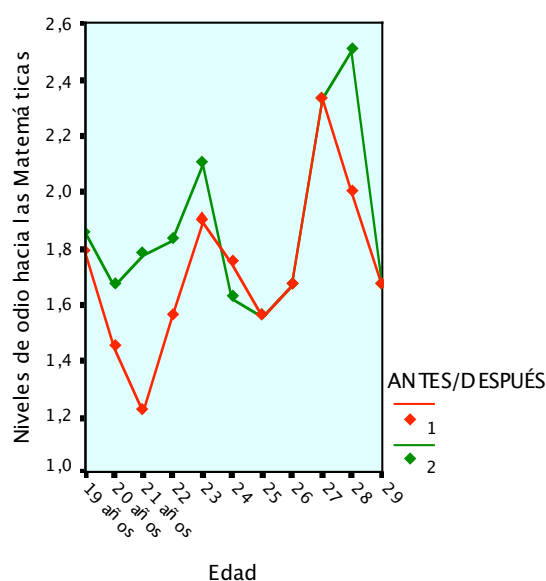


**Figura 229: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “edad”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran que las Matemáticas son menos odiosas son los que tienen 21 años, y los que opinan que las Matemáticas son más odiosas son los de 27 años. Después del citado estudio la situación cambia, pasando a considerar que las Matemáticas son menos odiosas los alumnos que tienen 25 años, y los que opinan que las Matemáticas son más odiosas son el grupo de 28 años. Como son muchas las submuestras que se obtienen en este caso, para verlo todo con más claridad y para confirmar lo que decimos, se puede observar la figura que viene a continuación.

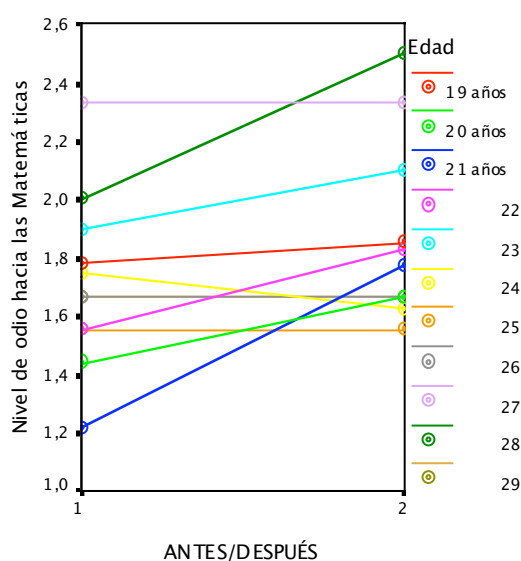


**Figura 230: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “edad”.**

En esta figura, además de ver la confirmación de lo que se decía respecto de la anterior, se observa que para la mayoría de los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas aumenta su percepción de odio hacia las Matemáticas, excepto para los que tienen 24, 25 y 27 años, que se mantiene o desciende levemente.

## Especialidad

Se estudia también si “la especialidad” de la que proceden los alumnos influye sobre su idea de que las Matemáticas sean odiosas antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se ve que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados, en el modelo lineal general de medidas repetidas, son mayores que 0.05. Esto quiere decir que “la especialidad” que cursen los alumnos no parece tener repercusión en su opinión sobre el odio hacia las Matemáticas.

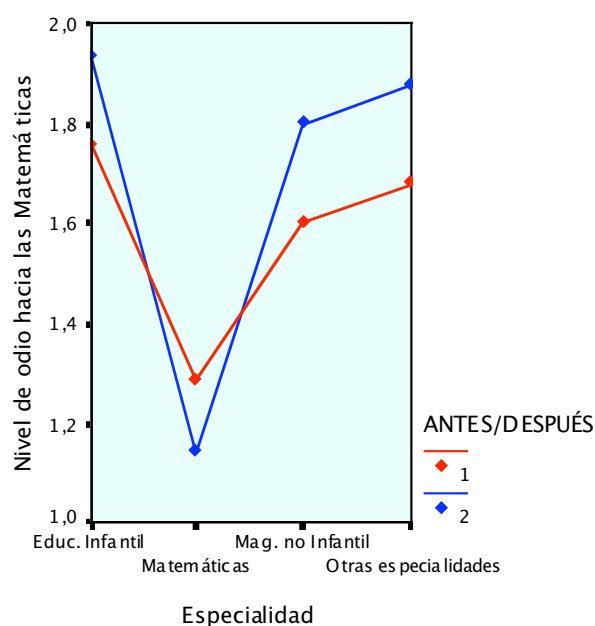


**Figura 231: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “especialidad”.**

El gráfico que se obtiene aporta la información de que para casi todos los alumnos, excepto para los que cursan la licenciatura de Matemáticas, su percepción del odio hacia las Matemáticas aumenta después del estudio del tema y de las técnicas. Tanto antes como después de dicho estudio, los que opinan que las Matemáticas son menos odiosas son los de la licenciatura de Matemáticas.

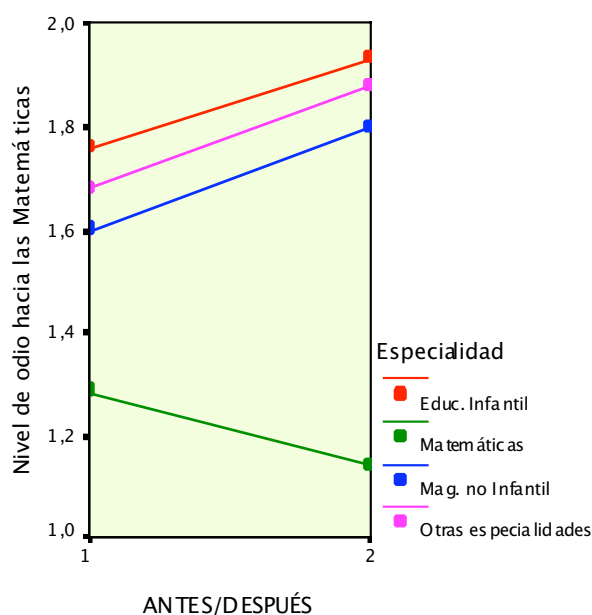


**Figura 232: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos que están matriculados en Magisterio, especialidad Educación Infantil, seguidos por los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, son los que piensan que las Matemáticas son más odiosas.

## Bachillerato

Se analiza también si la idea del odio hacia las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del bachiller que cursaron los alumnos. En los resultados del modelo lineal general de medidas repetidas se observa que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados son mayores que 0.05; esto quiere decir que el bachillerato que cursaron los alumnos no tiene repercusión significativa sobre su opinión acerca del odio hacia las Matemáticas en ambos momentos.

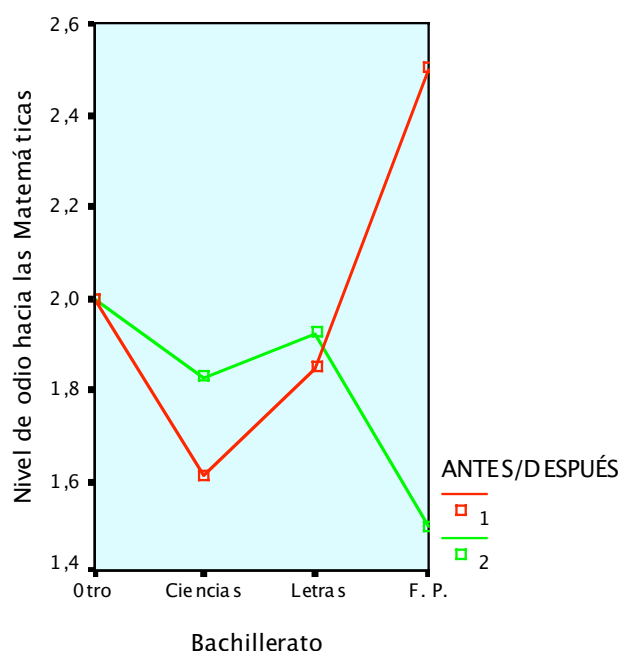


**Figura 233: Estimación de “las Matemáticas son odiosas” antes/después, por “bachillerato”.**

En el gráfico adjunto se ve que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que las Matemáticas sean odiosas son los que cursaron un bachillerato de Ciencias, y los que están más de acuerdo son los que cursaron Formación Profesional. Después del citado estudio la situación cambia radicalmente, pasando a ser los alumnos que provienen de Formación Profesional los que están menos de acuerdo con que las Matemáticas sean odiosas, y los de “otro bachillerato” —acceso a la Universidad para mayores de 25 años— los que opinan que son más odiosas. Se observa también que casi todos los alumnos, cualquiera que sea el bachillerato cursado, después de dicho estudio mantienen o aumentan levemente la idea de que las Matemáticas sean odiosas, excepto los alumnos que proceden de Formación Profesional; para éstos descende drásticamente.

En la tabla que viene a continuación se recogen los distintos niveles críticos obtenidos al analizar “las Matemáticas son odiosas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                    | Momento                      | Interacción                            | Figura          |
|------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------|-----------------|
| <b>Las Matemáticas son ODIOSAS</b> | Antes / después: $p=0.035^*$ |                                        | 220             |
|                                    | Antes / después: $p=0.036^*$ | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.945$ 221   |
|                                    | Antes / después: $p=0.143$   | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.144$ 222   |
|                                    | Antes / después: $p=0.122$   | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.359$ 223-4 |
|                                    | Antes / después: $p=0.115$   | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.833$ 225-6 |
|                                    | Antes / después: $p=0.360$   | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.722$ 227-8 |
|                                    | Antes / después: $p=0.439$   | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.132$ 229   |

**Tabla 25: “Las Matemáticas son odiosas”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.3. Las Matemáticas son imprescindibles

Se pasa a analizar en qué medida están de acuerdo los alumnos con que las “Matemáticas sean imprescindibles”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Se toman las afirmaciones *las Matemáticas son imprescindibles*, antes y después del citado estudio, como variables intra-sujetos. Después se asignará como nombre al factor de muestras relacionadas antes/después, y se marcará el número de niveles, dos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, más tarde se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato” como variables inter-sujeto, para analizar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en su opinión sobre si las Matemáticas son imprescindibles, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.007<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan también  $p=0.007<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.007<0.05$ , por tanto, se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Teniendo en cuenta lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: aumenta considerablemente después del estudio del tema y de las técnicas, la opinión de los alumnos respecto de que las Matemáticas sean muy imprescindibles.

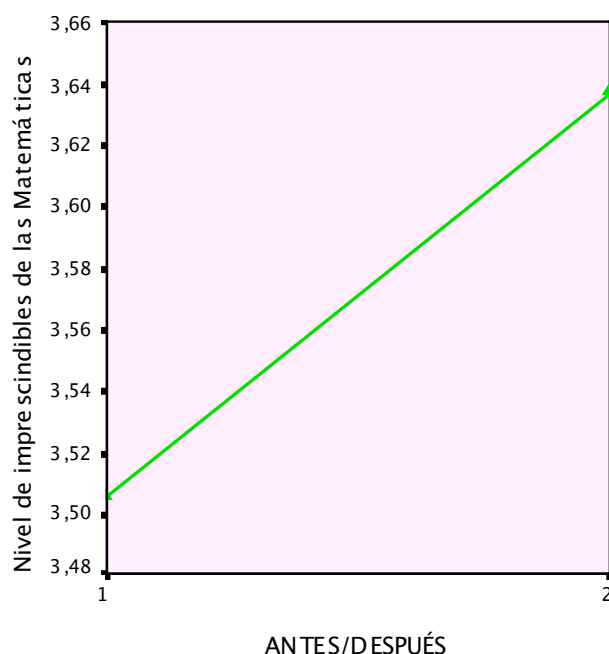


**Figura 234: Estimación de las “Matemáticas son imprescindibles” antes/después.**

El gráfico que da el modelo lineal general, después del estudio del tema y de las técnicas, se acerca más a 4, que era donde se le asignaba el valor “muy de acuerdo” con que las Matemáticas son imprescindibles, luego teniendo en cuenta los valores asignados a “muy de acuerdo” (4), “bastante de acuerdo” (3), “poco de acuerdo” (2) y “nada de acuerdo” (1), se puede concluir que, después del citado estudio, aumenta la percepción de los alumnos de que las Matemáticas sean imprescindibles.

### Género.

Se sigue estudiando la repercusión de las variables inter-sujeto: sucesivamente, “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”. Se analiza, tomando como variable inter-sujeto “el género”, si la opinión de los alumnos sobre si son imprescindibles las Matemáticas varía después de estudiarse el tema y las técnicas, respecto de la opinión que tenían antes. Los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados resultan ser  $p=0.008<0.05$  cuando se considera en el mismo género, y  $p=0.515>0.05$  cuando se considera entre los géneros, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F salen también  $p=0.008<0.05$  cuando se considera en el mismo género, y  $p=0.515>0.05$  cuando se considera entre los géneros. Por tanto, se puede aceptar que existan diferencias muy significativas entre las opiniones de los alumnos, sobre

que las Matemáticas sean imprescindibles, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro de cada uno de los géneros, pero no que existan diferencias significativas entre los géneros.

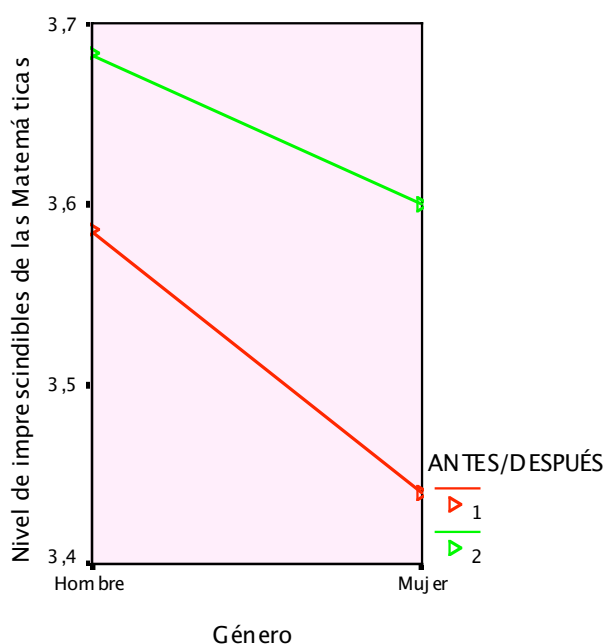


**Figura 235: Estimación de las “Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “género”.**

Como se puede observar en la figura precedente, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres consideran más imprescindibles las Matemáticas que las mujeres. Además, tanto los hombres como las mujeres, después del citado estudio, mejoran su percepción sobre que las Matemáticas sean imprescindibles.

### Año de realización.

Se analiza ahora la repercusión que tiene “el año de realización” de las encuestas en el nivel de acuerdo con la opinión de que las Matemáticas sean imprescindibles. Con el modelo lineal general de medidas repetidas se obtienen niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos multivariados  $p=0.008<0.05$  cuando se considera dentro del mismo año de realización, y  $p=0.356>0.05$  cuando se considera entre dos años de realización distintos, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también tienen los mismos valores. Por ello se afirma que existen diferencias muy significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro del mismo año de realización, pero no existen diferencias significativas entre los distintos años de realización.



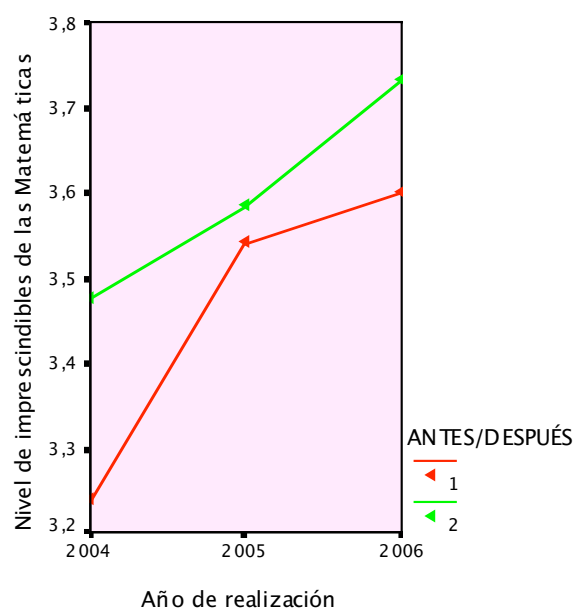


**Figura 236: Estimación de las “Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “año de realización”.**

El gráfico que precede indica que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, la opinión de que las Matemáticas son imprescindibles es menor para los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004, y es mayor para los que las respondieron en el 2005/2006. En todos los años de realización de las encuestas, la percepción de que las Matemáticas sean imprescindibles es mayor después del citado estudio.

### Curso.

Estudiamos si la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean imprescindibles, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “curso” en que estén matriculados. También se consiguen los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos antes indicados mayores que 0.05, luego se puede rechazar la hipótesis de que la opinión de los alumnos dependa del “curso”.

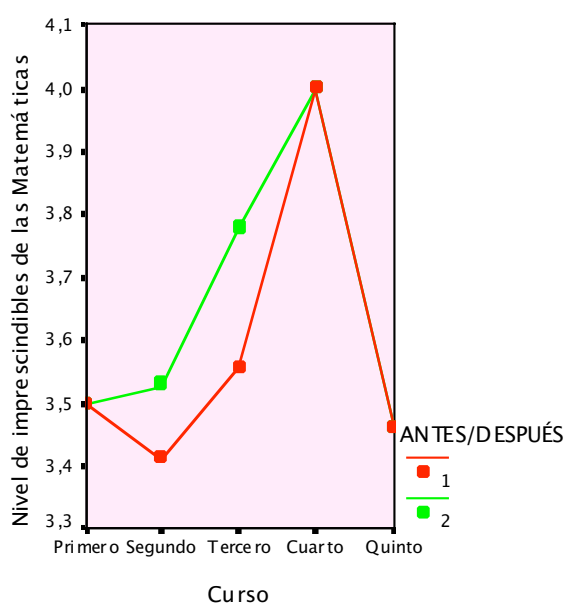


**Figura 237: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “curso”.**

En el gráfico que se obtiene se ve claramente que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que las Matemáticas sean imprescindibles son los que están matriculados en cuarto curso. Los que están menos de acuerdo, antes del citado estudio, son los alumnos de segundo, y después, los de quinto, con una pequeña diferencia con los de primero. Para verlo más claro, interpretemos la figura que viene a continuación.

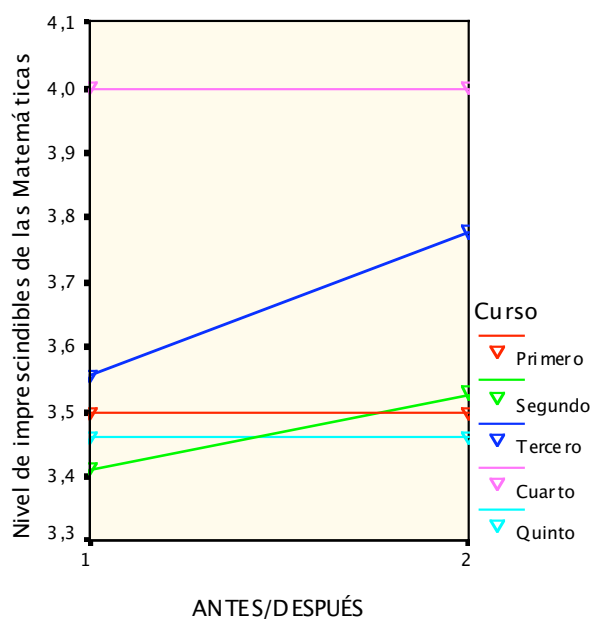


**Figura 238: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “curso”.**

La opinión sobre si las Matemáticas son imprescindibles, prácticamente se mantiene después del estudio del tema y de las técnicas, para los alumnos matriculados en primero, cuarto y quinto, y aumenta para el resto.

### Edad.

Se estudia ahora si el nivel de acuerdo con la respuesta sobre que las Matemáticas sean imprescindibles depende de “la edad”. En el resultado obtenido con el modelo lineal general de medidas repetidas vemos que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos multivariados son  $p=0.014 < 0.05$  dentro de la misma edad, pero  $p=0.345 > 0.05$  entre las distintas edades, y también les ocurre lo mismo a los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F. Se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro de la misma edad, pero no entre distintas edades.

Para comparar las distintas edades se elige la prueba Post hoc (o también llamada a posteriori); en este caso, el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Los niveles críticos que resultan son mayores que 0.05, luego se confirma que no hay diferencias significativas entre las distintas edades.

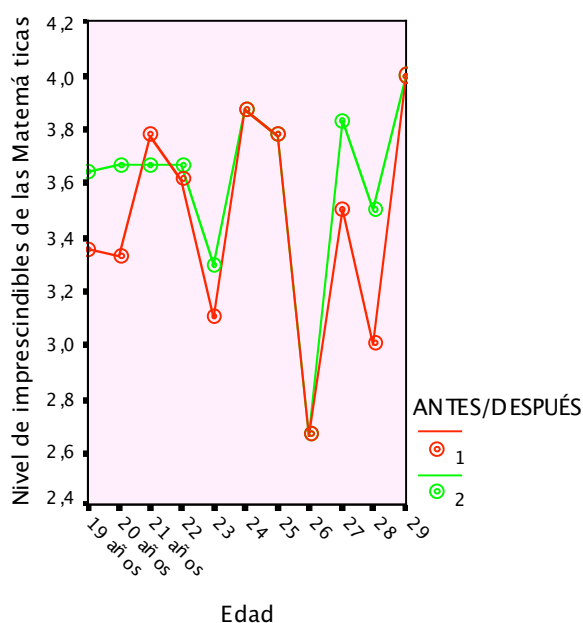


Figura 239: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “edad”.

Se observa en esta figura que los alumnos que están menos de acuerdo con que las Matemáticas son imprescindibles, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, son los que tienen 26 años, y los que están más de acuerdo son los que tienen 29 años.

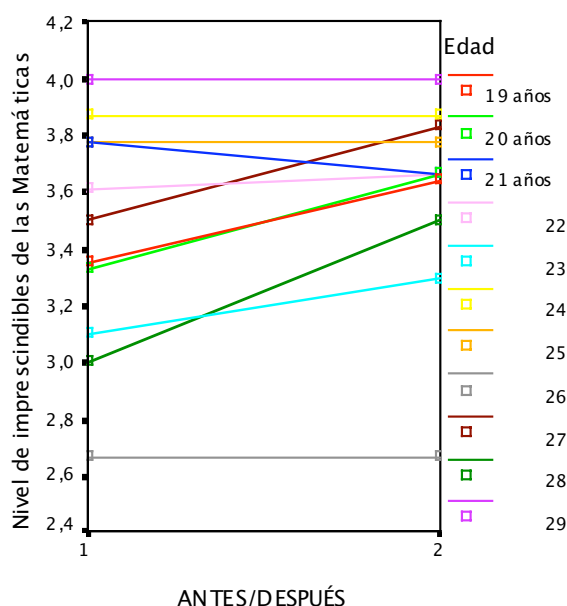


**Figura 240: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “edad”.**

Como la figura que analizamos antes era muy complicada por la cantidad de submuestras obtenidas, se toma ésta para confirmar lo que decíamos. Además, aquí se observa que la idea de que las Matemáticas son imprescindibles se mantiene para los alumnos que tienen 22, 24, 25, 26 y 29 años; disminuye para los que tienen 21 años y para los demás aumenta.

### Especialidad.

Se analiza si “la especialidad” influye en la opinión de los alumnos sobre si las Matemáticas son imprescindibles, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se ve que ninguno de los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo lineal general de medidas repetidas es menor que 0.05, luego se puede concluir que la opinión sobre si las Matemáticas son imprescindibles no depende de “la especialidad” en que estén matriculados los alumnos. Pasamos a ver los gráficos que da el modelo.

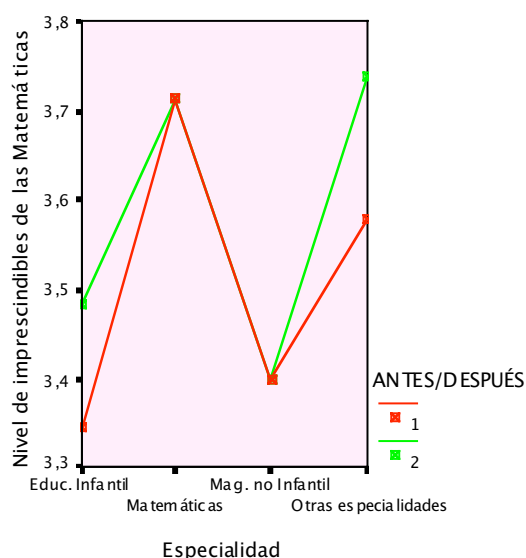


**Figura 241: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos que consideran que las Matemáticas son menos imprescindibles, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de Educación infantil, y los que piensan que son más imprescindibles son los de la Licenciatura de Matemáticas. Después de dicho estudio, los que cursan Magisterio de otra especialidad distinta de Infantil son los que están menos de acuerdo con que las Matemáticas son imprescindibles, y los que están más de acuerdo son los de otras especialidades distintas de Matemáticas y Magisterio. Por quedar algunos niveles muy próximos, para confirmarlo se pasa a ver la figura siguiente.

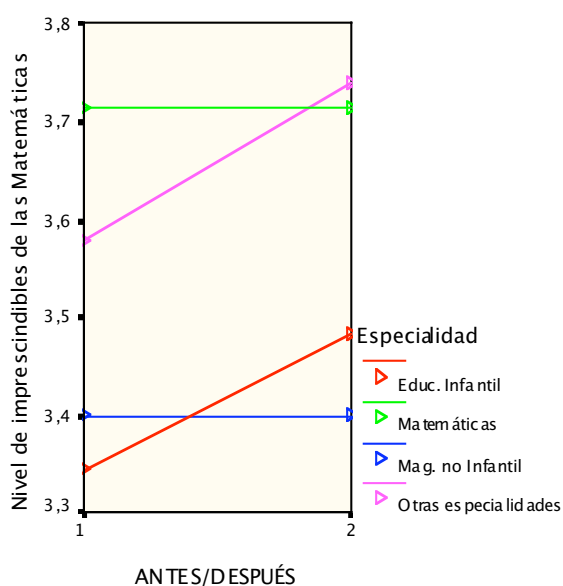


**Figura 242: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “especialidad”.**

Este gráfico deja bastante claro que se decía antes, además, se observa que la idea de que las Matemáticas sean imprescindibles se mantiene después del estudio del tema y de las técnicas para los alumnos de Magisterio de otra especialidad distinta de Educación Infantil y para los de Matemáticas, y aumenta para el resto.

### Bachillerato.

Según los resultados que se obtienen analizando si la opinión de los alumnos acerca de si las Matemáticas son imprescindibles depende del “bachillerato” que cursaron, los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05, luego se puede pensar que la idea de que las Matemáticas sean imprescindibles no depende del “bachillerato” cursado.

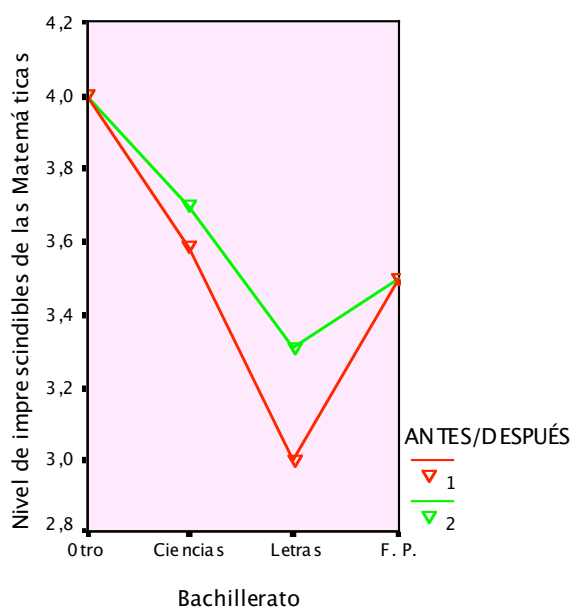


**Figura 243: Estimación de “las Matemáticas son imprescindibles” antes/después, por “bachillerato”.**

En el gráfico obtenido se ve que los alumnos que opinan que las Matemáticas son más imprescindibles provienen de los que denominamos “otros” —que son los alumnos de acceso a la Universidad para mayores de 25 años—, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Y los que consideran que son menos imprescindibles, tanto antes como después del mencionado estudio, son los que cursaron un bachillerato de Letras. Además, la idea de que las Matemáticas son imprescindibles se mantiene después de dicho estudio, para los que provienen del bachillerato de Letras y para los de Formación Profesional, y aumenta para los demás.

En la tabla siguiente se observan los distintos niveles críticos obtenidos cuando se analizaron las afirmaciones “las Matemáticas son imprescindibles”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                            | Momento                         | Interacción                                      | Figura |
|--------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas son IMPRESCINDIBLES</b> | Antes / después: $p=0.007^{**}$ |                                                  | 230    |
|                                            | Antes / después: $p=0.008^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.515$       | 231    |
|                                            | Antes / después: $p=0.008^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.356$          | 232    |
|                                            | Antes / después: $p=0.358$      | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.598$        | 233-4  |
|                                            | Antes / después: $p=0.014^{*}$  | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.345$         | 235-6  |
|                                            | Antes / después: $p=0.304$      | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.755$ | 237-8  |
|                                            | Antes / después: $p=0.471$      | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.491$ | 239    |

**Tabla 26: “Las Matemáticas son imprescindibles”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

#### 5.3.3.4. Las Matemáticas son un “tostón”

Se pasa a estudiar las opiniones sobre la afirmación: “las Matemáticas son un tostón”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman como variables intra-sujetos *las Matemáticas son un tostón*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Iremos eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato” como variables inter-sujeto, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en su opinión sobre la percepción de las Matemáticas como un “tostón”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.031<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F que se obtienen son también  $p=0.031<0.05$ , se puede afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la media poblacional vale cero, da también  $p=0.031<0.05$ , por lo que se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo anterior: aumenta considerablemente, después del estudio del tema y de las



técnicas, la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas son un tostón.

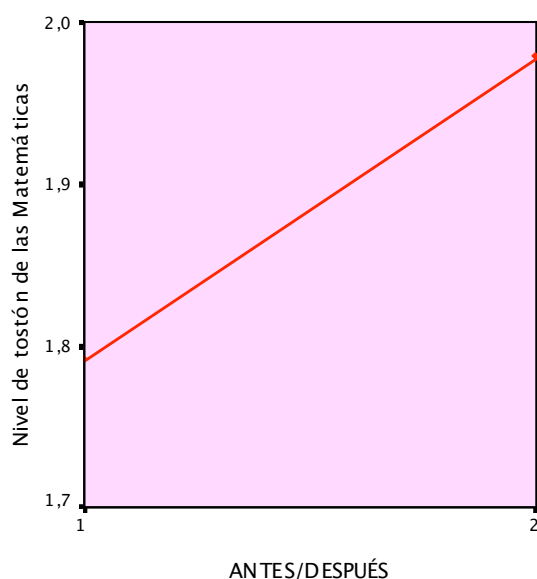


**Figura 244: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después.**

La figura que precede indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos encuestados están más de acuerdo con que las Matemáticas sean un tostón, conclusión que coincide con lo que pasaba en el estudio de frecuencias.

## Género

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el género” explica la opinión sobre la frase: “las Matemáticas son un tostón”. Se obtienen niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo  $p=0.031 < 0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo género; por ello se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro del mismo género; y entre los dos géneros resulta  $p=0.731 > 0.05$ , luego no hay diferencia significativa entre los géneros acerca de que las Matemáticas sean un “tostón”. Estudiamos el gráfico que proporciona dicho modelo.

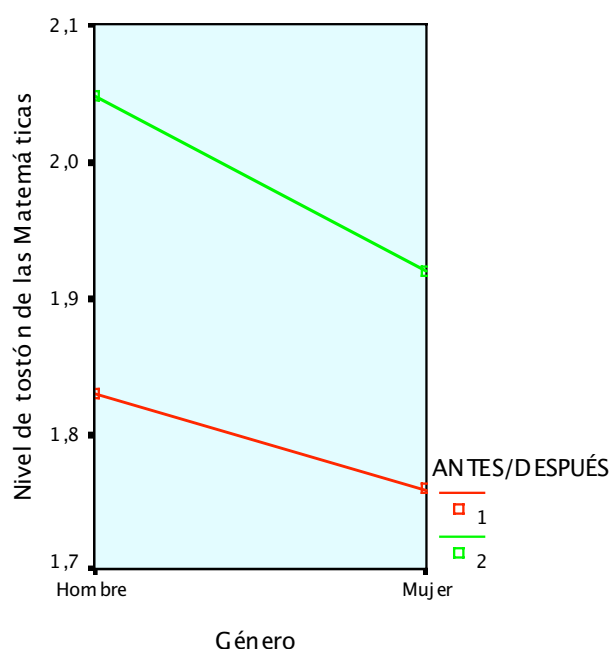


**Figura 245: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “género”.**

Los hombres están más de acuerdo que las mujeres en considerar las Matemáticas como un “tostón”, y esa opinión aumenta para ambos, hombres y mujeres, después de la explicación del tema y de las técnicas, un poco más para los hombres.

### Año de realización

Se analiza si “el año de realización” explica la opinión sobre si las Matemáticas son un tostón, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Los niveles críticos asociados a los estadísticos son  $p=0.036 < 0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo año de realización. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del mencionado estudio dentro del mismo año de realización. Entre dos años distintos de realización de la encuesta se obtiene  $p=0.159 > 0.05$ , luego no hay diferencia significativa entre los distintos años de realización de las encuestas en la opinión de que las Matemáticas sean un tostón.

Para comparar los distintos años de realización de las encuestas se elige Post hoc (o a posteriori); en este caso, el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Aquí vemos dónde se encuentran las diferencias detectadas: ¿difieren entre sí las medias?, ¿hay una media que difiere de las demás?,

etc. Con este procedimiento se obtienen los niveles críticos mayores que 0.05, luego se confirma que no hay diferencias significativas entre los distintos años de realización.

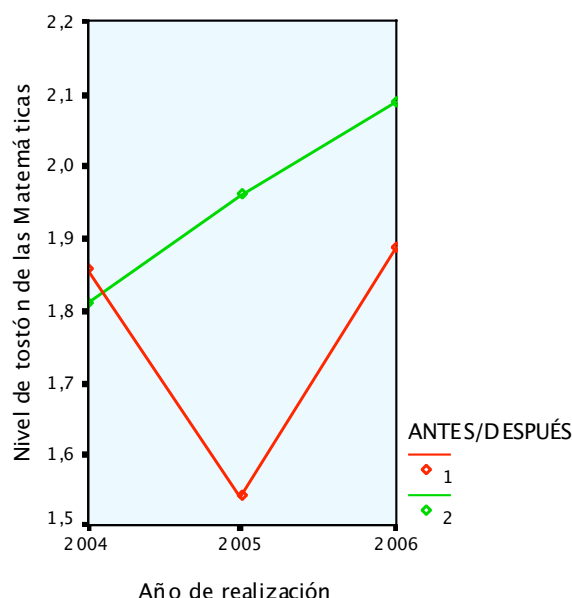


**Figura 246: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “año de realización”.**

Se puede observar en la figura precedente que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que las Matemáticas sean un tostón son los que respondieron las encuestas en el curso 2004/2005, los otros están al mismo nivel. Después de dicho estudio los alumnos que están menos de acuerdo en considerar las Matemáticas como un tostón son los que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004, y los que están más de acuerdo son los que las respondieron en el 2005/2006. Además, para los que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004, después del citado estudio disminuye la idea de que las Matemáticas sean un tostón, lo que no sucede para los demás.

## Curso

Se pasa a obtener los niveles críticos asociados a los estadísticos del modelo lineal general de medidas repetidas, que resultan como consecuencia de analizar el grado de acuerdo de los alumnos sobre la frase: “las Matemáticas son un tostón”, en función del “curso” en que estén matriculados, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Estos resultados son mayores que 0.05, luego se tiene que afirmar que la idea de que las Matemáticas sean un tostón no se explica por “el curso”.

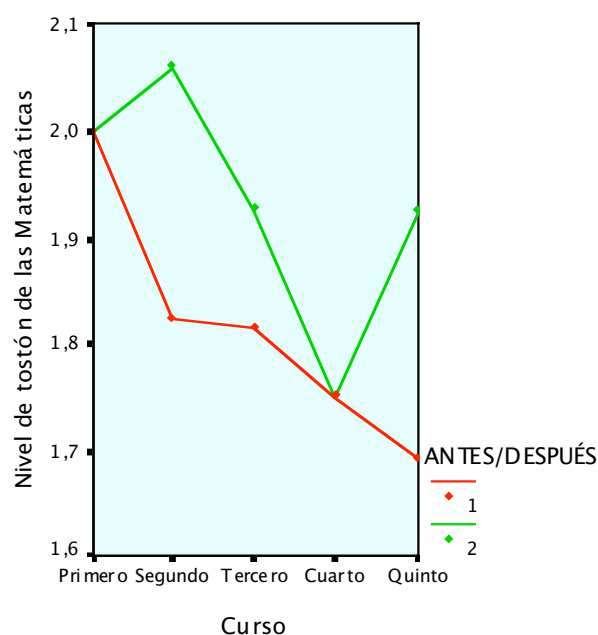


**Figura 247: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “curso”.**

Como se ve en el gráfico adjunto, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran que las Matemáticas son menos tostón son aquellos matriculados en quinto, y los que consideran que son más tostón, los matriculados en primero. Después del citado estudio, pasan a ser los de cuarto los que consideran las Matemáticas menos tostón y los de segundo los que las consideran más tostón. Además, se puede ver que, después de dicho estudio, se mantiene el nivel de tostón de las Matemáticas para los alumnos matriculados en primero o en cuarto y para los demás aumenta.

## Edad

Se analizan los resultados obtenidos mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver si el grado de acuerdo de los alumnos sobre la frase: “las Matemáticas son un tostón”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la edad”. Se ve que los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo son mayores que 0.05, luego “la edad” de los alumnos no influye significativamente sobre esta afirmación.

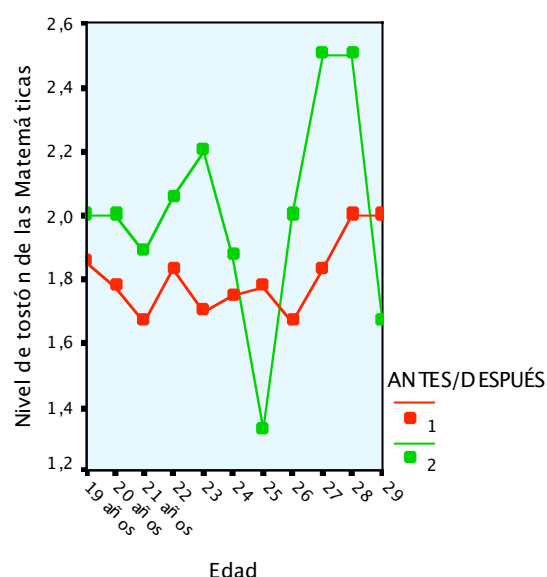


**Figura 248: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “edad”.**

El gráfico que antecede indica que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran menos tostón las Matemáticas son los que tienen 21 y 26 años, y los que las consideraban más tostón son los de 28 y 29 años, aunque hay pocas diferencias entre todos ellos. Después del mencionado estudio las diferencias aumentan, pasando a ser los alumnos de 25 años los que consideran las Matemáticas menos tostón, y más tostón los de 27 y 28 años. Por si surge alguna duda, se incluye la figura siguiente.

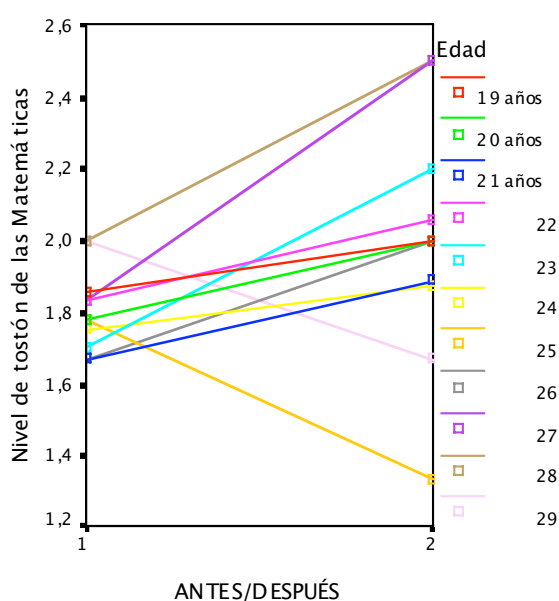


**Figura 249: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “edad”.**

Esta figura viene a confirmarnos lo que decíamos en la anterior, y además informa de que después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todos, excepto para los alumnos que tenían 25 y 29 años, aumenta la idea de que las Matemáticas son un tostón.

## Especialidad

En el caso de estudiar si la idea de que las Matemáticas son un tostón, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la especialidad” en que estén matriculados los alumnos, se sigue el modelo lineal general de medidas repetidas, y se obtiene que los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas son un tostón no se explica por “la especialidad”.

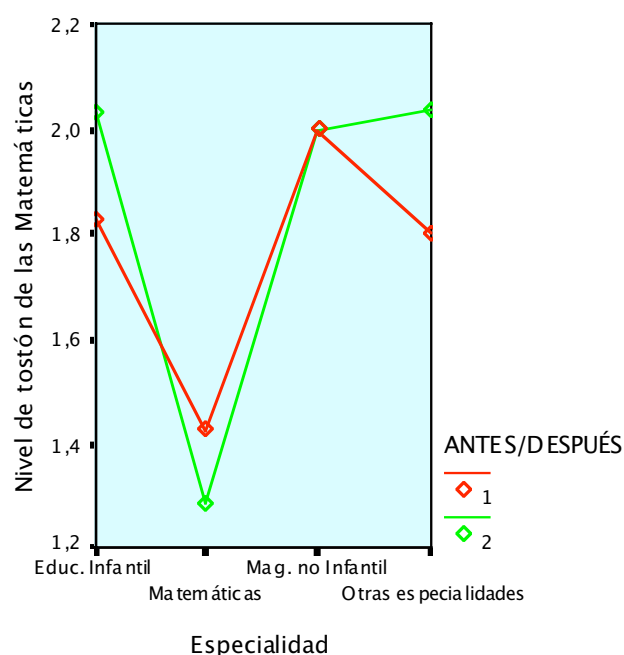


**Figura 250: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “especialidad”.**

En el gráfico precedente se puede ver que los alumnos que consideran menos tostón las Matemáticas, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de la licenciatura de Matemáticas, y los que las consideran más tostón son, antes del citado estudio, los de Magisterio que no son de la especialidad de Educación Infantil, y después, los de Educación Infantil y los de Otras especialidades al mismo nivel. Como los valores quedan muy próximos, se confirman los

resultados comentados con la información que aporta la figura que viene a continuación.

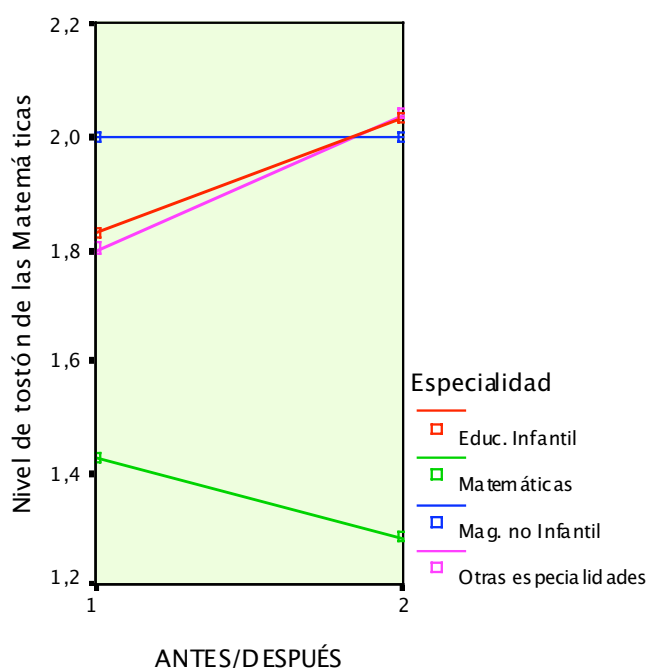


**Figura 251: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “especialidad”.**

El gráfico que se tiene delante, aparte de confirmar lo que aportaba la figura anterior, deja claro que después del estudio del tema y de las técnicas se mantiene la idea de que las Matemáticas son un tostón para los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, disminuye para los de la licenciatura de Matemáticas y para el resto aumenta.

## Bachillerato

Se pasa a estudiar si la idea de que las Matemáticas son un tostón, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “bachillerato” que cursaran los alumnos, y lo hacemos mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Se observa que los niveles críticos asociados a los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo son mayores que 0.05, luego se rechaza la hipótesis de que esta idea dependa del “bachillerato”.



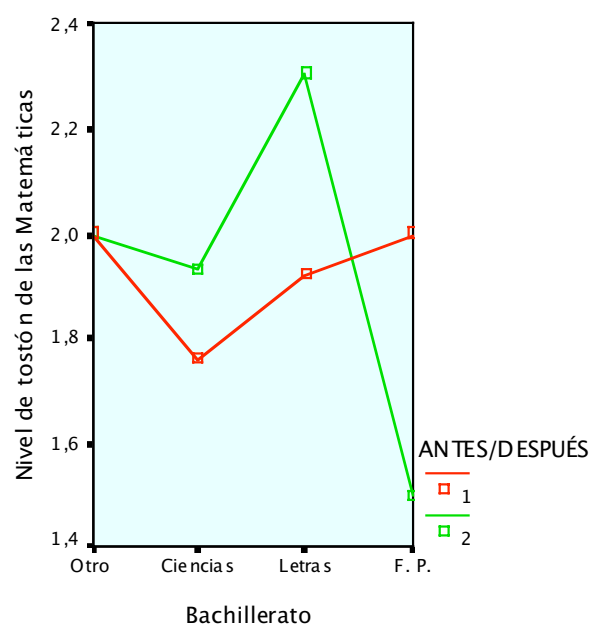


**Figura 252: Estimación de “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “bachillerato”.**

En la figura que precede se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran menos tostón las Matemáticas son los que cursaron un bachillerato de Ciencias, y después del citado estudio son los que provienen de Formación Profesional. Los que consideran más tostón las Matemáticas antes de dicho estudio son los alumnos de Otro bachillerato y los de Formación Profesional, al mismo nivel, y después son los que estudiaron el bachillerato de Letras.

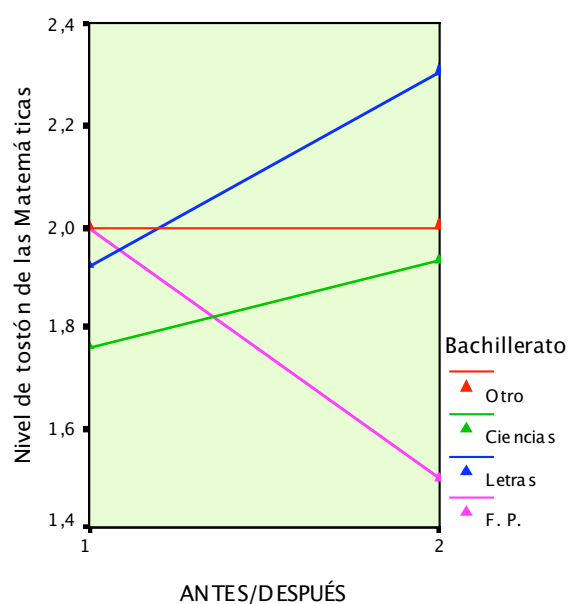


**Figura 253: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son un tostón” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura, además de corroborar lo que decía la anterior, informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, para los alumnos de otro bachillerato se mantiene el nivel de tostón de las Matemáticas, disminuye para los que hicieron Formación Profesional y aumenta para los demás.

Recogemos todos los niveles críticos obtenidos en el estudio de las afirmaciones “las Matemáticas son un tostón”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en la tabla que viene a continuación.

|                                        | Momento                      | Interacción                                     | Figura |
|----------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas son UN ‘TOSTÓN’</b> | Antes / después: $p=0.031^*$ |                                                 | 240    |
|                                        | Antes / después: $p=0.031^*$ | Antes / después y <b>Género</b> $p=0.731$       | 241    |
|                                        | Antes / después: $p=0.036^*$ | Antes / después y <b>Año</b> $p=0.159$          | 242    |
|                                        | Antes / después: $p=0.398$   | Antes / después y <b>Curso</b> $p=0.948$        | 243    |
|                                        | Antes / después: $p=0.065$   | Antes / después y <b>Edad</b> $p=0.386$         | 244-5  |
|                                        | Antes / después: $p=0.559$   | Antes / después y <b>Especialidad</b> $p=0.658$ | 246-7  |
|                                        | Antes / después: $p=0.955$   | Antes / después y <b>Bachillerato</b> $p=0.527$ | 248-9  |

**Tabla 27: “Las Matemáticas son un tostón”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.5. Las Matemáticas son interesantes

Se pasa a estudiar las opiniones de los alumnos sobre la afirmación: “las Matemáticas son interesantes”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *las Matemáticas son interesantes*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en su opinión sobre el grado de interesantes de las Matemáticas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.657>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.657>0.05$ , se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $p=0.657>0.05$ ; por tanto, se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Si observamos lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: después del estudio del tema y de las técnicas sube ligeramente el porcentaje de los que decían que las Matemáticas son muy o bastante interesantes.

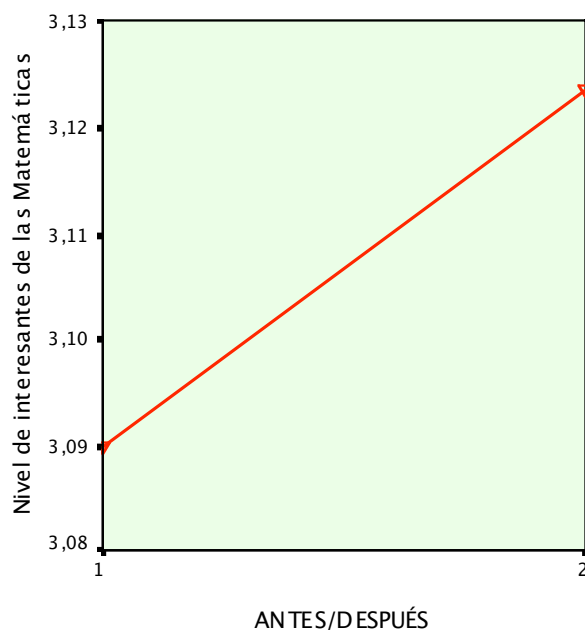


**Figura 254: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable dependiente “las Matemáticas son interesantes” son iguales a los anteriores, se puede afirmar que cuando sube el valor asignado, aumenta la opinión de que las Matemáticas son interesantes, y recíprocamente. Por tanto, se puede afirmar que después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos consideran que las Matemáticas son más interesantes.

## Género

Se pasa a estudiar si la idea de que las Matemáticas son interesantes, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “género” y se analiza mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Se observa que los niveles críticos asociados a los distintos estadísticos obtenidos son mayores que 0.05, luego podemos rechazar la hipótesis de que la idea de que las Matemáticas sean interesantes dependa del “género”.

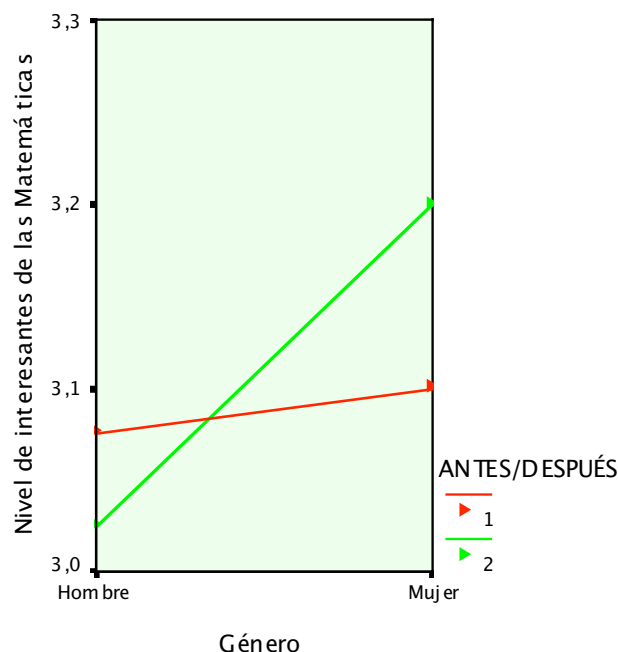


**Figura 255: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “género”.**

La figura señala que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres encuestados consideran las Matemáticas menos interesantes que las mujeres. Para los hombres, después del citado estudio, disminuye la idea de que las Matemáticas son interesantes, y para las mujeres aumenta.

### Año de realización

Estudiamos ahora si la idea de que las Matemáticas sean interesantes, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “año de realización” de las encuestas. Se observa que los niveles críticos asociados a los distintos estadísticos obtenidos son mayores que 0.05, luego rechazamos la hipótesis de que la idea de que las Matemáticas sean interesantes dependa del “año de realización” de las encuestas.

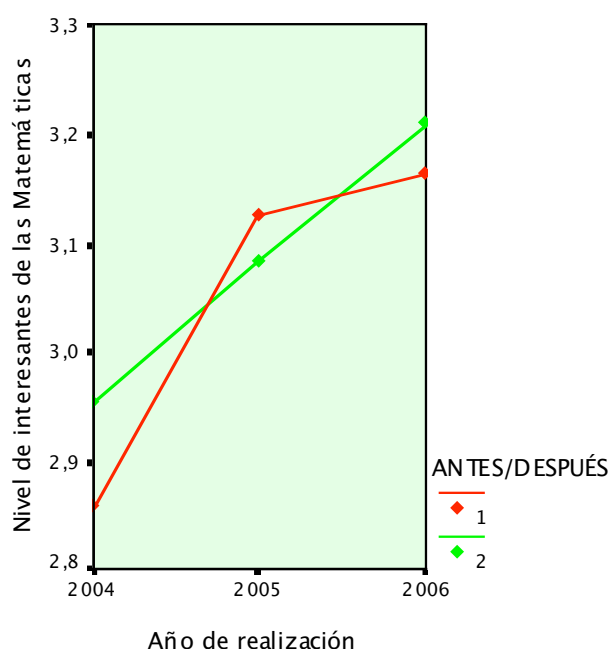


**Figura 256: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “año de realización”.**

Observando el gráfico adjunto se puede decir que los alumnos que respondieron la encuesta el curso 2003/2004 son los que, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, consideran que las Matemáticas son menos interesantes. Los alumnos que opinan que las Matemáticas son más interesantes son los que respondieron las encuestas en 2005/2006. Después de dicho estudio aumenta la consideración de que las Matemáticas son interesantes en los alumnos de los cursos 2003/2004 y 2005/2006, y disminuye en el otro.

## Curso

Queremos saber ahora si “el curso” en que estén matriculados los alumnos encuestados influye en su opinión sobre si las Matemáticas son interesantes, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa en los distintos estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas que los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego el interés por las Matemáticas parece no estar relacionado con “el curso” en que estén matriculados los estudiantes.

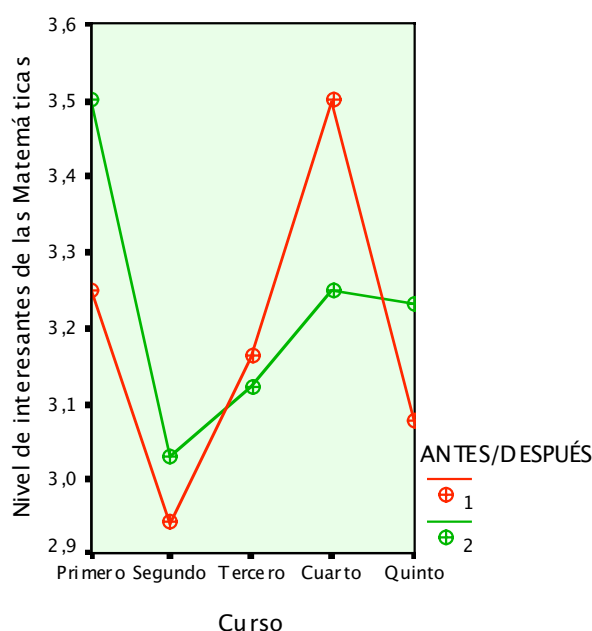


**Figura 257: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “curso”.**

En la figura obtenida se ve que los alumnos que consideran las Matemáticas más interesantes, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que están matriculados en cuarto, pasando, después del citado estudio, a ocupar este lugar los de primero. Los que consideran las Matemáticas menos interesantes, tanto antes como después del mencionado estudio, son los que están matriculados en segundo. También podemos ver que para los alumnos matriculados en primero, segundo y quinto, después de dicho estudio aumenta el interés por las Matemáticas, y para los demás disminuye.

## Edad

Se continúa trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas para estudiar si “la edad” influye en la opinión sobre que las Matemáticas son interesantes, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se ve en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo que los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se tiene que afirmar que la idea de que las Matemáticas sean interesantes no depende de “la edad” que tuvieran los alumnos que respondieron a las encuestas. La probabilidad asociada que se obtiene es 0.055, muy próxima al nivel de significación 0.05.

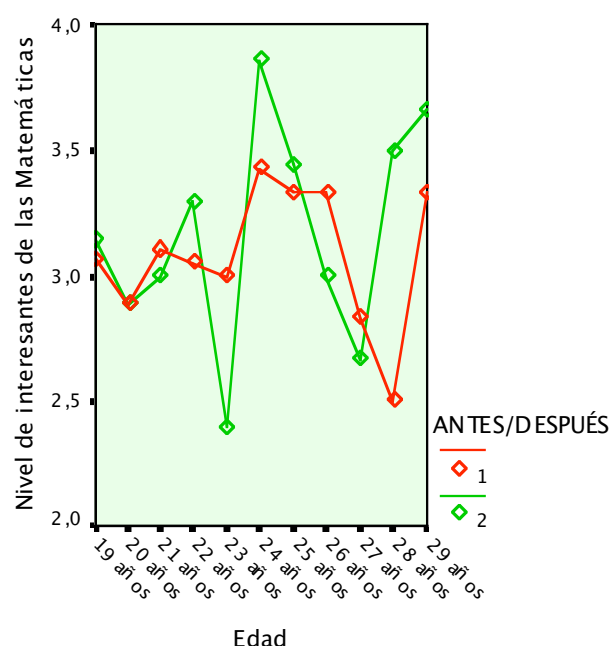


**Figura 258: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “edad”.**

Los alumnos que consideran las Matemáticas más interesantes, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los que tenían 24 años en el momento de responder las encuestas. Y los alumnos que las consideran menos interesantes, antes del citado estudio, son los que tenían 28 años, y después los de 23 años.

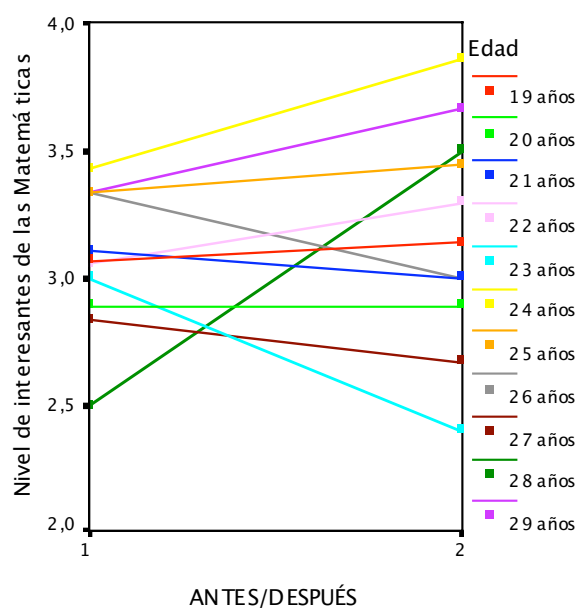


**Figura 259: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “edad”.**



Como en este caso hay muchas submuestras, se completa la información mediante la figura adjunta. Se observa además que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la opinión de que las Matemáticas son interesantes para los alumnos que tienen 19, 22, 24, 25, 28 y 29 años; se mantiene para los de 20 años y descende para el resto.

## Especialidad

Se pasa a ver ahora si influye “la especialidad” en que estén matriculados los alumnos en la opinión sobre que las Matemáticas sean interesantes, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En los distintos estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas son interesantes no depende de “la especialidad” en que tuvieron matriculados los alumnos que respondieron a las encuestas.

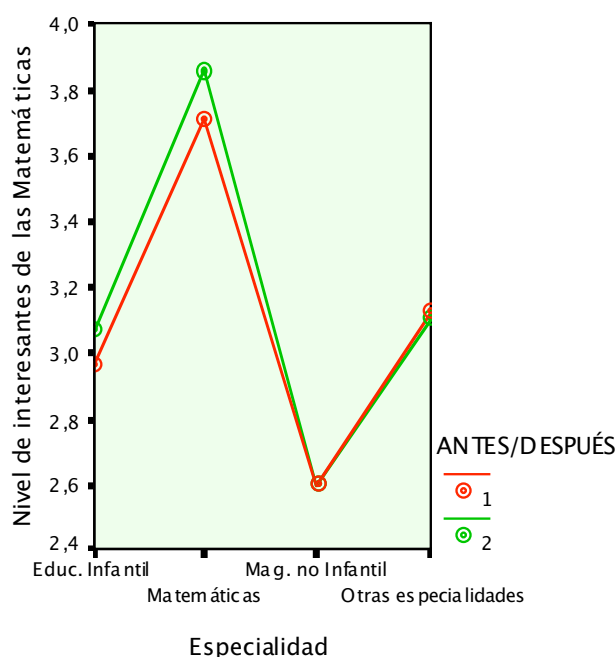


**Figura 260: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “especialidad”.**

En la figura que antecede se ve que, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran que las Matemáticas son más interesantes son los que están matriculados en la licenciatura de Matemáticas, y los que las ven menos interesantes son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil. Las opiniones sobre que las Matemáticas sean interesantes prácticamente se

mantienen en todas las especialidades, aumentando para los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y para los de la licenciatura de Matemáticas.

## Bachillerato

Se pasa a estudiar si influye “el bachillerato” cursado en la opinión sobre que las Matemáticas sean interesantes, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los distintos estadísticos que proporciona tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego parece que la idea de que las Matemáticas son interesantes no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos que respondieron las encuestas.

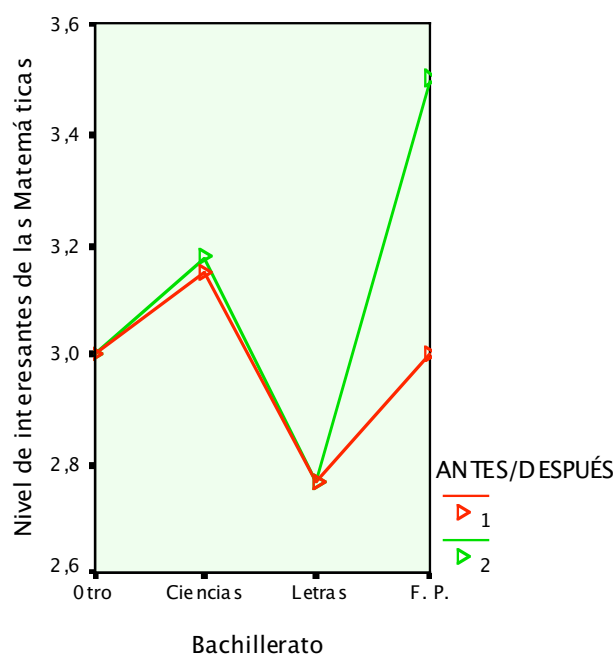


**Figura 261: Estimación de “las Matemáticas son interesantes” antes/después, por “bachillerato”.**

En el gráfico que proporciona el modelo, que es el que aparece en la figura adjunta, vemos que los alumnos que consideran las Matemáticas más interesantes, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que cursaron el bachillerato de Ciencias, y después del citado estudio, los que proceden de Formación Profesional. Los que consideran las Matemáticas menos interesantes, tanto antes como después de dicho estudio, son los que hicieron el bachillerato de Letras. Después del mencionado estudio aumenta considerablemente la idea de que las

Matemáticas son interesantes en los alumnos que cursaron Formación Profesional; en los demás prácticamente se mantiene.

Para poder observar más fácilmente todos los niveles críticos obtenidos al analizar las afirmaciones “las Matemáticas son interesantes”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se tiene la figura siguiente.

|                                         | Momento                    | Interacción                                      | Figura |
|-----------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas son INTERESANTES</b> | Antes / después: $p=0.657$ |                                                  | 250    |
|                                         | Antes / después: $p=0.750$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.324$       | 251    |
|                                         | Antes / después: $p=0.682$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.809$          | 252    |
|                                         | Antes / después: $p=0.741$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.809$        | 253    |
|                                         | Antes / después: $p=0.322$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.055$         | 254-5  |
|                                         | Antes / después: $p=0.623$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.870$ | 256    |
|                                         | Antes / después: $p=0.565$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.833$ | 257    |

**Tabla 28: “Las Matemáticas son interesantes”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.6. Las Matemáticas son precisas

Vamos a considerar ahora el nivel de acuerdo de nuestros alumnos sobre la afirmación: “las Matemáticas son precisas”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *las Matemáticas son precisas*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. También vamos eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato” como variables inter-sujeto, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en la opinión de los alumnos sobre el grado de acuerdo con la afirmación “las Matemáticas son precisas”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.567>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también son  $p=0.567>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: responden mayoritariamente, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, que las Matemáticas son muy o bastante precisas.

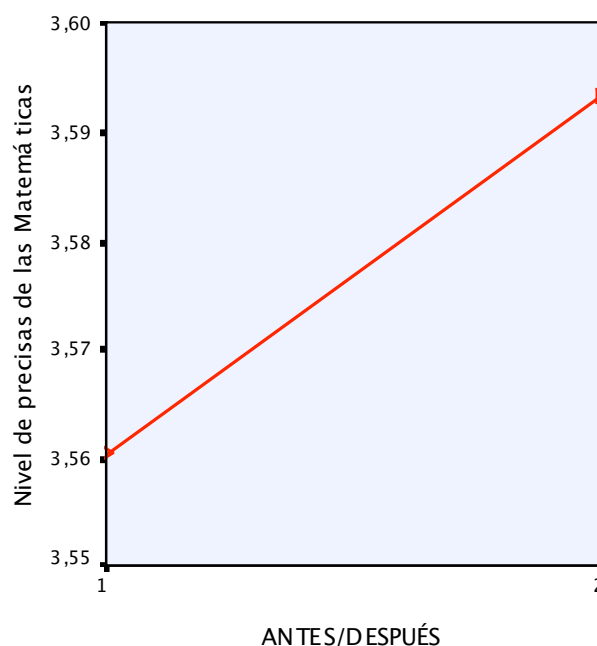


**Figura 262: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después.**

Teniendo en cuenta los valores asignados a la variable “las Matemáticas son precisas” que son análogos a los que se tenían en el apartado anterior, como entonces, se puede afirmar que el grado de acuerdo es mayor cuanto mayor sea el valor asignado, y a la inversa. Viendo la figura adjunta se puede deducir que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos consideran que las Matemáticas son más precisas.

## Género

Se empieza trabajando con la variable inter-sujeto “género” para estudiar si éste influye en la opinión de los alumnos sobre si las Matemáticas son precisas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se ve que en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego estamos en condiciones de poder afirmar que la idea de que las Matemáticas sean precisas no depende del “género”.

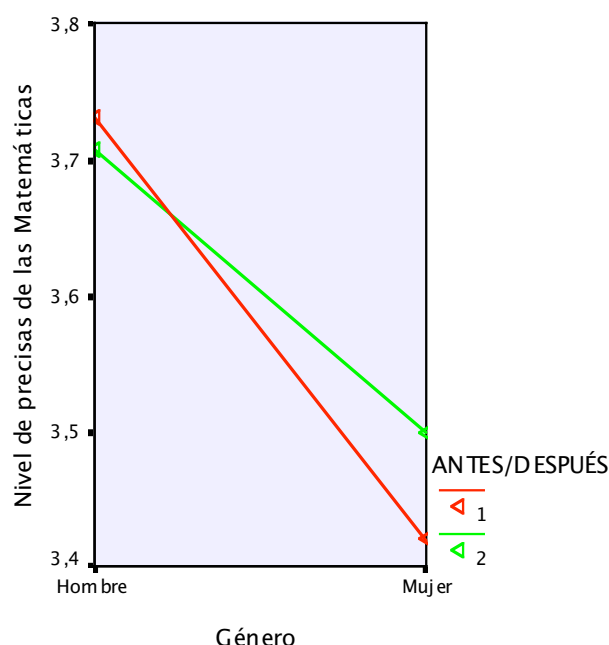


**Figura 263: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “género”.**

Se observa en la figura adjunta que los hombres consideran más precisas las Matemáticas que las mujeres, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Para los hombres, después de dicho estudio, disminuye levemente la percepción de que las Matemáticas son precisas, y sin embargo para las mujeres aumenta.

### Año de realización

Se estudia si la opinión sobre la precisión de las Matemáticas depende del “año de realización”. En el modelo lineal general de medidas repetidas, los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y a los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p > 0.05$ . Por ello se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, según “el año de realización” de las encuestas.

Para comparar los distintos años de realización se elige Post hoc; en este caso el estadístico F del MLG permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones post hoc se utiliza el método de comparación Scheffé, que se basa en la distribución F. Los niveles críticos son mayores que 0.05, lo que confirma, como habíamos indicado, que no hay diferencias

significativas entre los distintos años de realización de las encuestas. Este estudio, aunque lo hacemos siempre, en lo sucesivo no lo comentaremos cuando las diferencias no sean significativas.

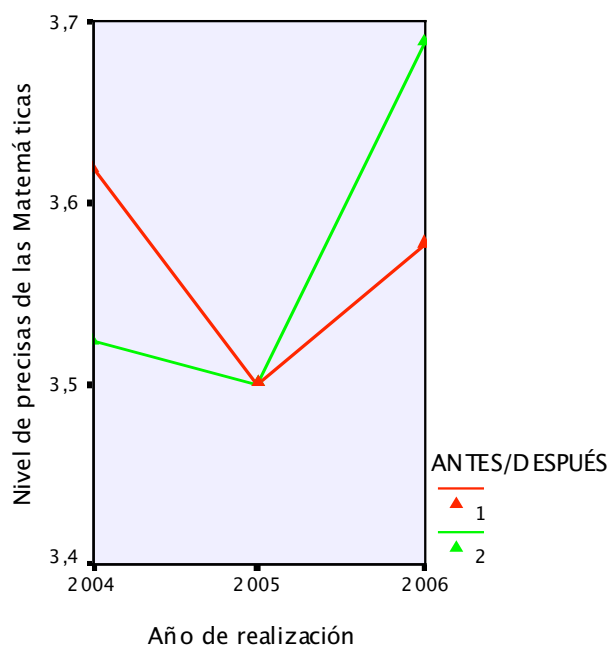


**Figura 264: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “año de realización”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que respondieron las encuestas el curso 2003/2004 consideran las Matemáticas más precisas, y después del citado estudio son los alumnos del curso 2005/2006. Tanto antes como después de dicho estudio, los alumnos que consideran las Matemáticas menos precisas son los que respondieron las encuestas el curso 2004/2005. Igualmente, para los alumnos que respondieron las dos encuestas en el 2005/2006, después del mencionado estudio aumenta su idea de que las Matemáticas son precisas; para los de 2004/2005 se mantiene y para los demás baja.

## Curso

Veamos si la variable inter-sujeto “curso” influye en la opinión sobre que las Matemáticas sean precisas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas; los distintos estadísticos que proporciona tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean precisas no se explica por “el curso”.

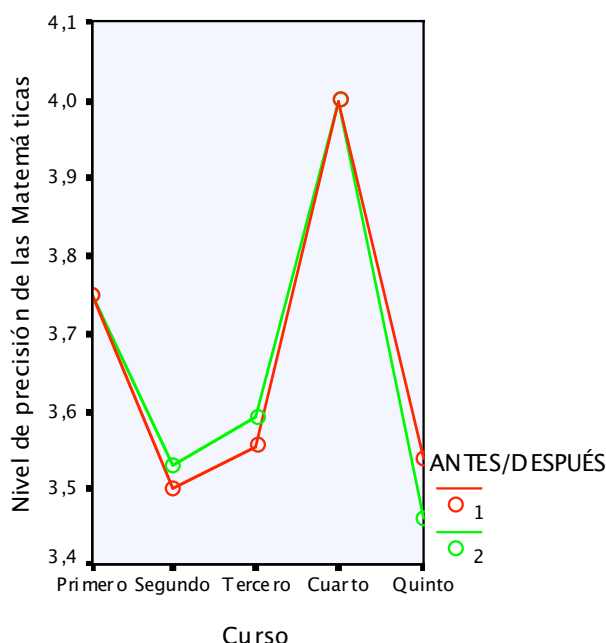


**Figura 265: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “curso”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas más precisas son los que estaban matriculados en cuarto en el momento en que respondieron ambas encuestas. Y los que consideran las Matemáticas menos precisas, antes del citado estudio, son los de segundo. Después de dicho estudio, son los de quinto. Tras el mencionado estudio aumenta la idea de que las Matemáticas son precisas para los alumnos que cursaban segundo y tercero, se mantiene para los de primero y para los de cuarto, y desciende para el resto.

## Edad

Se pasa a estudiar si la opinión sobre la precisión de las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la edad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados, así como los asociados a las cuatro versiones del estadístico F. Resulta  $p > 0.05$  cuando se considera si hay diferencias dentro de la misma edad, y se obtiene  $p = 0.007 < 0.05$  cuando se considera si hay diferencia entre las distintas edades. Se puede afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del citado estudio, entre los grupos de alumnos de las distintas edades, pero no existen diferencias entre los que tienen la misma edad.

Para comparar las diferencias entre las distintas edades se elige Post hoc; en este caso el estadístico F del modelo permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones post hoc se va a utilizar el método de comparación Scheffé, que se basa en la distribución F. En este caso, los valores de los niveles críticos resultan ser mayores que 0.05, lo que quiere decir que este estadístico no ha encontrado diferencias significativas en las opiniones de los alumnos entre las distintas edades.

Se analiza, mediante las pruebas no paramétricas, dónde se encuentran las diferencias significativas, si las hay, comparando las distintas edades. La razón de hacer el estudio mediante las pruebas no paramétricas es porque, como ya hemos comentado, no necesitan establecer supuestos sobre las poblaciones de donde se extraen las muestras, y consideramos que éste es el caso que nos ocupa. Hemos trabajado primero con las pruebas paramétricas porque en ellas se pueden mezclar dos factores; en nuestro caso hemos mezclado las respuestas que dan los alumnos a las preguntas antes y después del estudio del tema y de las técnicas, lo que no se puede hacer con las no paramétricas.

En este caso se utiliza la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para varias muestras independientes. Los niveles críticos que resultan son  $p=0.005<0.05$  para las respuestas que dieron antes del estudio del tema y de las técnicas, y  $p=0.017<0.05$  para las respuestas que dieron después. Por lo tanto, se puede decir que existen diferencias significativas para las respuestas que dieron antes del citado estudio, y existen diferencias significativas para las respuestas que dieron después.

Se comparan por pares las distintas edades, con objeto de encontrar entre cuáles hay diferencias significativas. Para ello se eligen dos muestras independientes, y se toman en lista de afirmaciones “las Matemáticas son precisas”, en ambos momentos; como variable de agrupación se elige “la edad”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: los alumnos de 19 y los de 20 años, los de 19 y los de 21, etc., hasta agotar todas las posibilidades. En la tabla que viene a continuación destacamos sólo aquellos casos en que hay diferencia significativa, y por tanto, no se indica ningún valor si entre dos edades no existen diferencias significativas antes o después del estudio del tema y de las técnicas.



| Edades | Niveles críticos antes | Niveles críticos después |
|--------|------------------------|--------------------------|
| 19—22  | $p=0.038<0.05.$        |                          |
| 19—23  |                        | $p=0.038<0.05.$          |
| 20—22  |                        | $p=0.022<0.05.$          |
| 20—23  | $p=0.011<0.05.$        |                          |
| 20—26  | $p=0.027<0.05.$        |                          |
| 21—22  | $p=0.005<0.05.$        |                          |
| 21—23  |                        | $p=0.038<0.05.$          |
| 21—24  | $p=0.031<0.05.$        |                          |
| 22—23  | $p=0.001<0.05.$        | $p=0.002<0.05.$          |
| 22—25  |                        | $p=0.007<0.05.$          |
| 22—26  | $p=0.002<0.05.$        | $p=0.001<0.05.$          |
| 23—24  | $p=0.005<0.05.$        |                          |
| 23—27  | $p=0.039<0.05.$        |                          |
| 23—29  | $p=0.021<0.05.$        | $p=0.023<0.05$           |
| 24—26  | $p=0.010<0.05.$        |                          |
| 26—29  | $p=0.025<0.05.$        | $p=0.025<0.05.$          |

**Tabla 29: Probabilidades de error en la significación de “las Matemáticas son precisa”, antes o después, por “edad”. Pruebas no paramétricas.**

Todos los demás niveles de significación resultan ser mayores que 0.05, luego sólo entre las parejas que hemos destacado hay diferencias significativas o muy significativas.

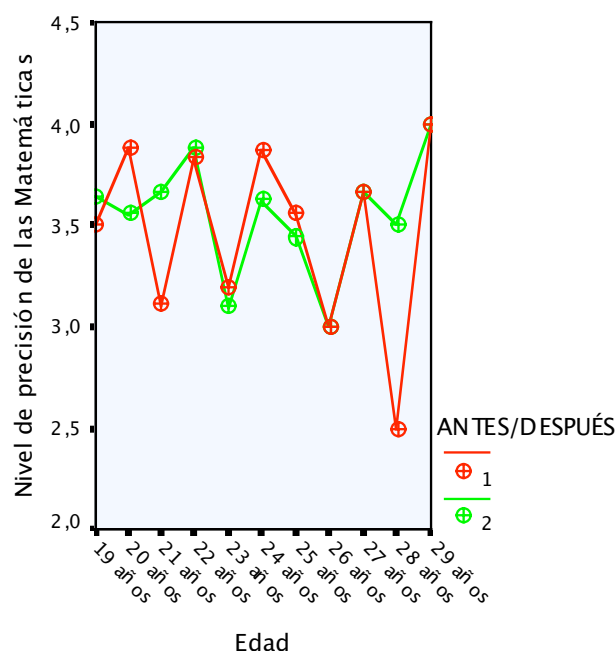


**Figura 266: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “edad”.**

Con esta figura se puede observar que, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas más precisas son los que tienen 29 años en el momento de

responder ambas encuestas. Los que consideran menos precisas las Matemáticas, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los alumnos de 28 años, y después, los de 26 años.

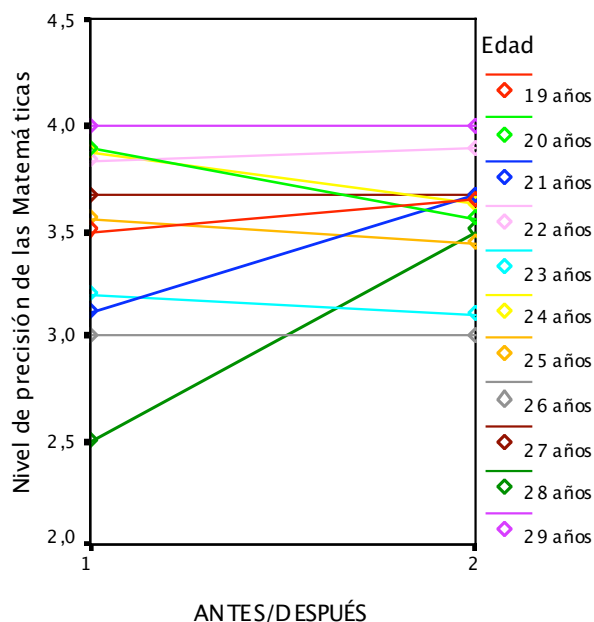


**Figura 267: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “edad”.**

Todo lo que se ha comentado en la figura anterior queda claro en ésta; además, aquí vemos que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que las Matemáticas son precisas para los alumnos de 19, 21, 22, y 28 años; se mantiene para los de 26, 27 y 29 años y disminuye para los demás.

## Especialidad

Se considera “la especialidad” como variable inter-sujeto y se estudia si influye en la opinión sobre la idea de que las Matemáticas son precisas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se ve que en los distintos estadísticos que proporciona se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas sean precisas no depende de “la especialidad”.

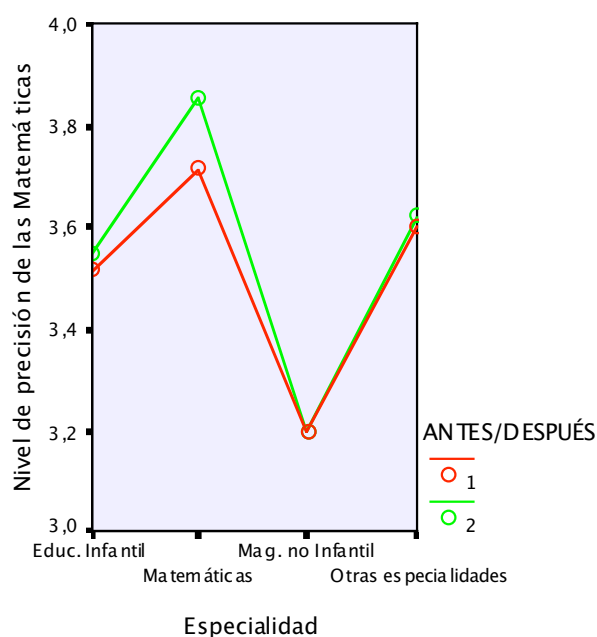


**Figura 268: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “especialidad”.**

En el gráfico que se obtiene mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, que es el que antecede, vemos que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que estudiaban la licenciatura de Matemáticas son los que están más de acuerdo con que las Matemáticas son precisas, y los que están menos de acuerdo son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil. Además, esta figura informa de que, prácticamente, se mantiene la idea de que las Matemáticas sean precisas, tras el citado estudio, para todas las especialidades, excepto para los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y los de la licenciatura de Matemáticas, que aumenta.

## Bachillerato

Se toma ahora como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver si influye en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas son precisas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que en los distintos estadísticos que proporciona se tienen niveles críticos asociados  $p > 0.05$ , luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas son precisas no se explica por “el bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

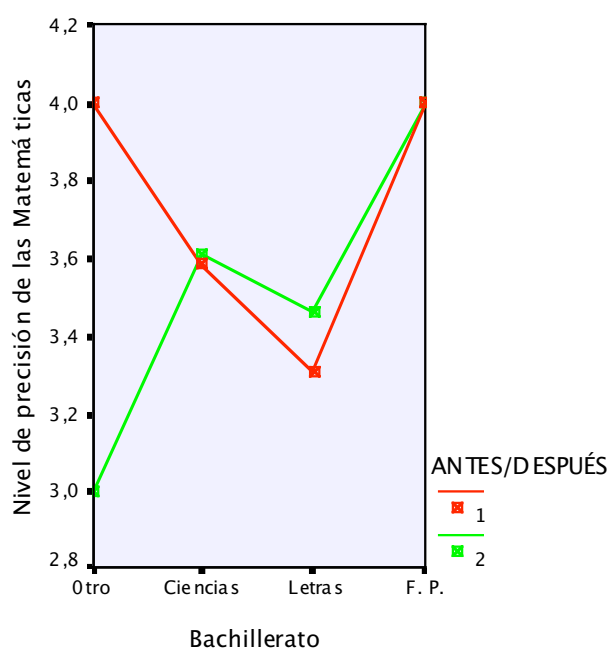


**Figura 209: Estimación de “las Matemáticas son precisas” antes/después, por “bachillerato”.**

En la figura que antecede se puede ver que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas más precisas son los que cursaron Formación Profesional y los que llamamos Otros —alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años—, y los que las consideran menos precisas son los del bachillerato de Letras. Después del citado estudio, continúan siendo los alumnos de Formación Profesional los que consideran las Matemáticas más precisas, y los que llamamos Otros pasan a ser los que las consideran menos precisas. Pensamos que la razón puede ser que les desconcertó la idea de que pudieran existir magnitudes no medibles. Además, tras el mencionado estudio, para los alumnos que estudiaron bachillerato de Ciencias y para los que proceden de Formación Profesional se mantiene el nivel de acuerdo con que las Matemáticas son precisas; aumenta levemente para los de Letras y desciende drásticamente para los que llamamos Otros.

En la tabla que viene a continuación se recogen los niveles críticos obtenidos y comentados sobre “las Matemáticas son precisas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                     | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|-------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas son PRECISAS</b> | Antes / después: $p=0.567$ |                                                   | 258    |
|                                     | Antes / después: $p=0.631$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.368$       | 259    |
|                                     | Antes / después: $p=0.931$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.347$          | 260    |
|                                     | Antes / después: $p=0.982$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.982$        | 261    |
|                                     | Antes / después: $p=0.182$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.007^{**}$    | 262-3  |
|                                     | Antes / después: $p=0.574$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.956$ | 264    |
|                                     | Antes / después: $p=0.235$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.240$ | 265    |

**Tabla 30: “Las Matemáticas son precisas”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.7. Las Matemáticas son engorrosas

Pasamos a estudiar el nivel de acuerdo de los alumnos sobre la afirmación: “las Matemáticas son engorrosas”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *las Matemáticas son engorrosas*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas son engorrosas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.818 > 0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.818 > 0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos vale también  $p=0.818 > 0.05$ , luego se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: la mayoría de los alumnos opina que las Matemáticas son nada o poco engorrosas, aumentando levemente después del estudio del tema y de las técnicas “las Magnitudes y su Medida” y disminuyendo también en pequeña escala el número de los que consideran que son bastante o muy engorrosas.

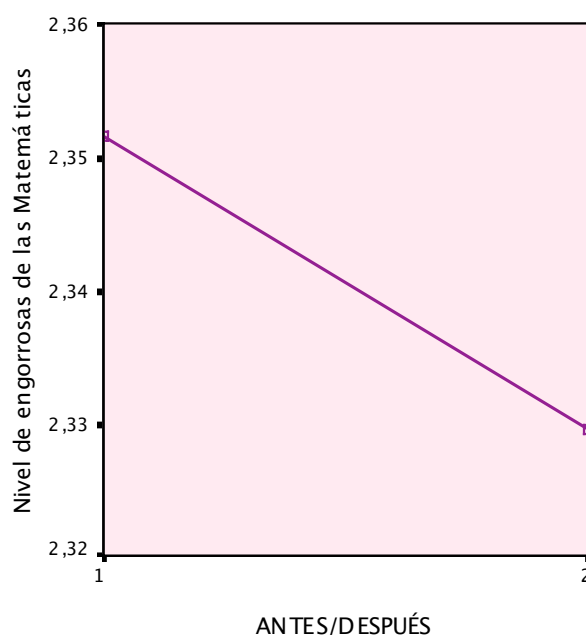


**Figura 270: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después.**

En este caso la asignación de valores a la variable “las Matemáticas son engorrosas” es análoga al anterior; por tanto, si aumenta el nivel de acuerdo, aumenta el valor asignado, y recíprocamente. Teniendo en cuenta esta consideración, y a la vista del gráfico, se puede decir que después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos consideran que las Matemáticas son menos engorrosas.

## Género

Se elige como variable inter-sujeto “el género” y se va a estudiar su influencia en la opinión sobre las “Matemáticas son engorrosas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que en los distintos estadísticos que proporciona se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la opinión sobre “las Matemáticas son engorrosas” no depende del “género”.

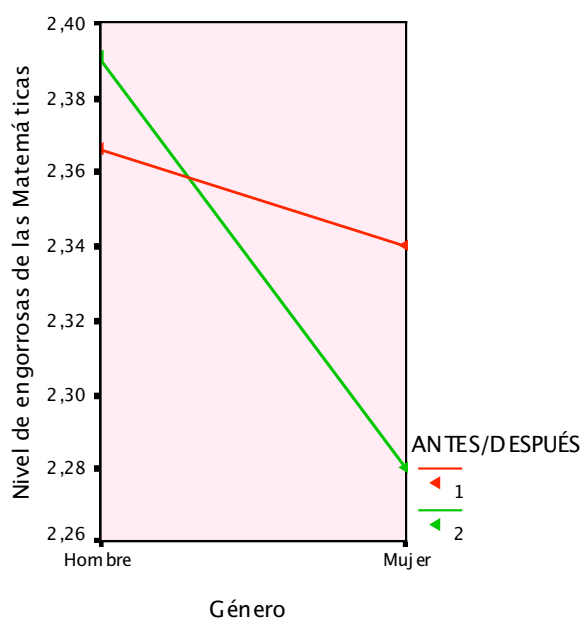


**Figura 271: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “género”.**

La figura que precede indica que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres consideran las Matemáticas menos engorrosas que los hombres. Después de dicho estudio, disminuye la idea de que las Matemáticas sean engorrosas en las mujeres, y aumenta en los hombres.

### Año de realización

Se considera ahora si la idea de que las Matemáticas sean engorrosas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “año de realización” de las encuestas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados  $p=0.297>0.05$  cuando se considera la influencia del “año de realización” dentro del mismo año, y  $p=0.012<0.05$  cuando se considera la influencia entre los distintos años, y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F tienen también los mismos valores. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos sobre las “Matemáticas son engorrosas”, antes y después del citado estudio, entre los distintos años de realización de las encuestas, pero no existen diferencias significativas dentro del mismo año de realización.

Para comparar los distintos años de realización de las encuestas se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones post hoc para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación Scheffé, que se basa en la distribución F. En este caso los niveles críticos dan mayores que 0.05, lo que quiere decir que no hay diferencias significativas entre los distintos años de realización.

Lo que ocurre en este caso es debido a que se fuerzan los datos al trabajar con el modelo lineal general de medidas repetidas debido a la métrica de las variables. Es evidente que los datos son más flojos respecto del cumplimiento de las condiciones de aplicación del modelo lineal general, por eso optamos por las pruebas no paramétricas. Se eligen k muestras independientes, se toman “las Matemáticas son engorrosas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en la lista de variables; en el grupo de variables se elige “año de realización”, y se marca el estadístico Kruskal-Wallis; se definen los rangos de modo que recoja todos los años de realización de las encuestas. En este caso los niveles críticos son mayores que 0.05, luego no hay diferencias significativas ni dentro del mismo año de realización ni entre los distintos años de realización.

Para confirmar que no hay diferencias significativas se comparan por pares los distintos años de realización de las encuestas con objeto de estudiar si hay diferencias significativas entre algunos de ellos. Se elige el apartado dos muestras independientes, y se toman en lista de afirmaciones “las Matemáticas son engorrosas”, en ambos momentos; como variable de agrupación se toma “el año de realización”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: el de los alumnos que respondieron las encuestas en 2003 ó anteriores y los del año 2004, los alumnos de los del año 2003 ó anteriores y los del 2005, etc., hasta agotar todos los pares. En todos los casos los niveles de significación son mayores que 0.05, luego nos confirma que no hay diferencias significativas ni dentro de cada año de realización ni entre los distintos años de realización.



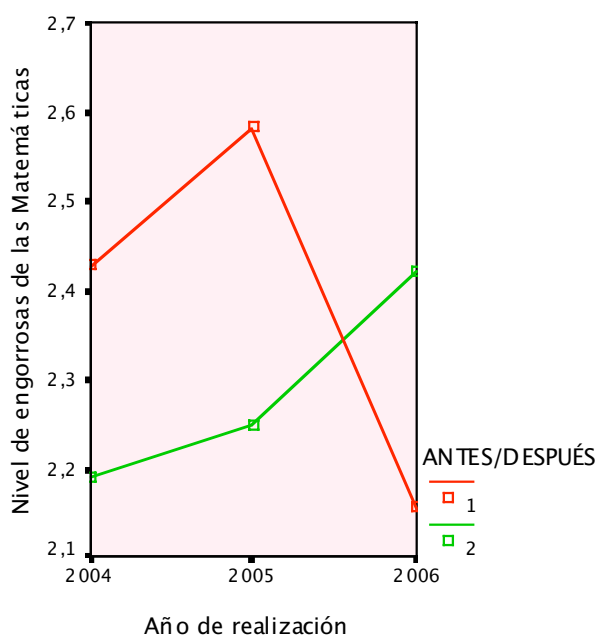


**Figura 272: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “año de realización”.**

En esta figura se ve que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas menos engorrosas son los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006 y los que consideran las Matemáticas más engorrosas son los del curso 2004/2005. Después de dicho estudio cambia totalmente la situación, pasando a ser los alumnos que consideran las Matemáticas menos engorrosas los que respondieron las encuestas en 2003/2004, y los que las respondieron en 2005/2006 los que más. Además, se observa que, después del citado estudio, las Matemáticas resultan menos engorrosas que antes a los alumnos que respondieron las encuestas en los cursos 2003/2004 y 2004/2005, y a los otros alumnos les resultan más engorrosas.

## Curso

Se toma ahora como variable inter-sujeto “el curso” para ver si influye en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean engorrosas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean engorrosas no depende del “curso” en el que estuvieran matriculados los alumnos.

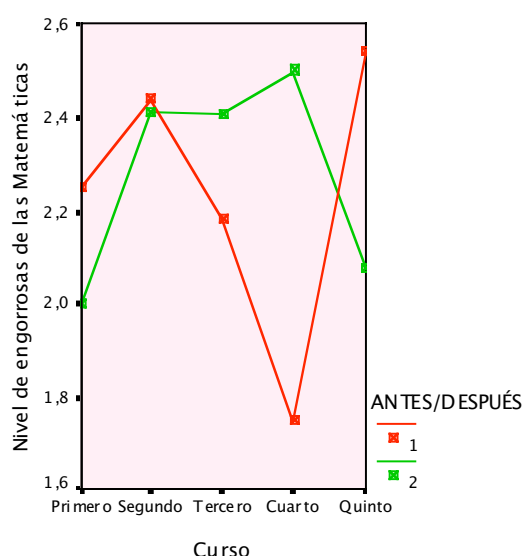


**Figura 273: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “curso”.**

En la figura adjunta se puede ver que los alumnos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, consideraban las Matemáticas menos engorrosas son los que cursaban cuarto, y los que las consideran más engorrosas son los de quinto. Después del mencionado estudio la situación varía totalmente, siendo los alumnos de primero los que consideran las Matemáticas menos engorrosas, aunque quedan muy cerca de los de quinto, y los que las consideran más engorrosas son los de cuarto. Como los niveles quedan muy próximos, para verlo más claro se toma la figura siguiente.

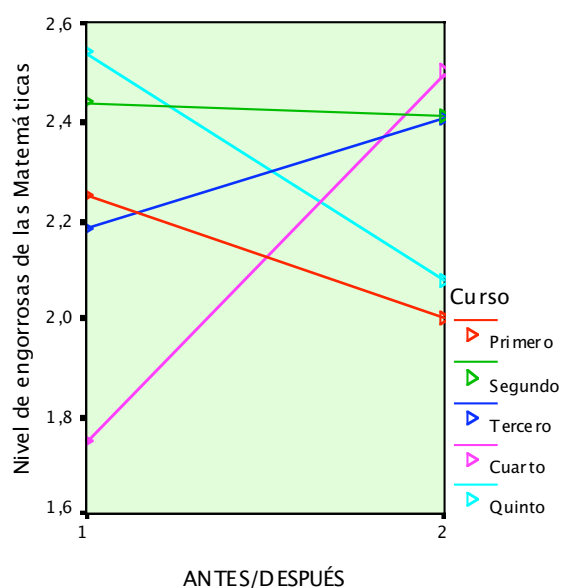


**Figura 274: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “curso”.**

En esta figura queda más claro lo que se decía en la figura anterior; además se puede ver que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que las Matemáticas sean engorrosas para los alumnos de primero, segundo y quinto, y para los demás aumenta.

## Edad

Se considera ahora como variable inter-sujeto “la edad” para ver la repercusión que tiene en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean engorrosas. Se observa que en los distintos estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean engorrosas no depende de “la edad” que tuvieran los alumnos.

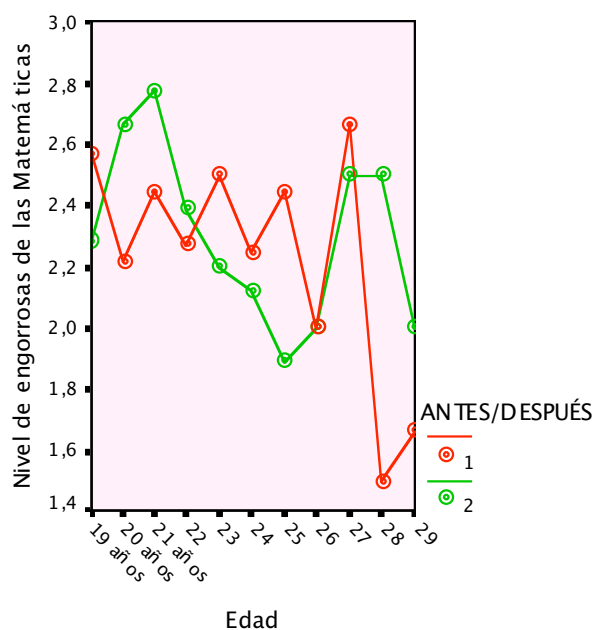


**Figura 275: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “edad”.**

Se puede observar en la figura que antecede que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas menos engorrosas son los que tenían 28 años en el momento de responder a las encuestas, y los que las consideran más engorrosas son los que tenían 27 años. Después de dicho estudio pasan a ser los alumnos que tenían 25 años los que consideran las Matemáticas menos engorrosas y los de 21 años los que las consideran más engorrosas.

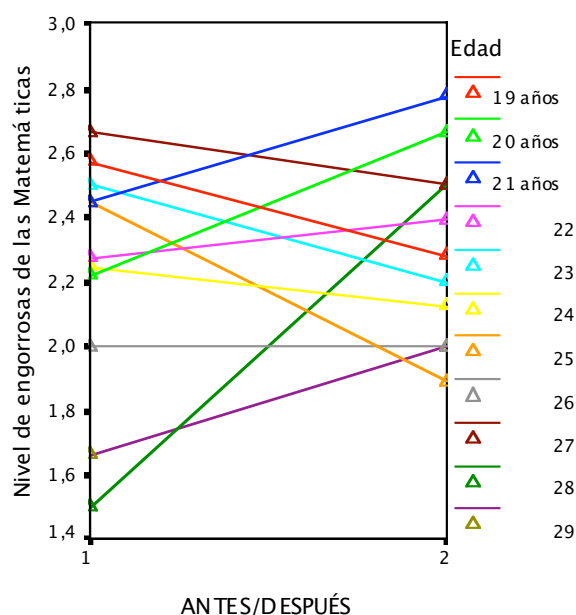


**Figura 276: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “edad”.**

En esta figura se puede confirmar lo que se decía antes; además se ve más claro cómo varían las opiniones de los alumnos de las distintas edades después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, después de dicho estudio, disminuye la idea de que las Matemáticas sean engorrosas para los alumnos que tenían 19, 23, 24, 25 y 27 años, se mantiene para los que tenían 26 años y para los demás aumenta.

## Especialidad

Se toma ahora como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver la repercusión que tiene en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean engorrosas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que en los distintos estadísticos que proporciona el modelo se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean engorrosas no se explica por “la especialidad” que estuvieran cursando los alumnos.

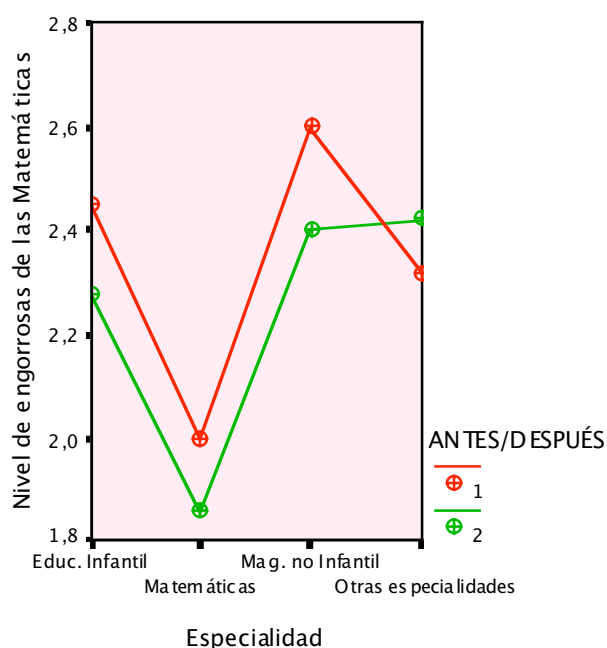


**Figura 277: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “especialidad”.**

En la figura que antecede se puede ver que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas menos engorrosas son los que estaban cursando la licenciatura de Matemáticas y los que las consideran más engorrosas, antes del citado estudio, son los de Magisterio de la especialidad Educación Infantil y después los de Otras especialidades. Después de dicho estudio, disminuye la idea de que las Matemáticas sean engorrosas para casi todos los alumnos, excepto para los de Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

## Bachillerato

En el modelo lineal general de medidas repetidas se toma como variable inter-sujeto el tipo de “bachillerato” cursado. Se estudia si influye “el bachillerato” en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean engorrosas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas sean engorrosas no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

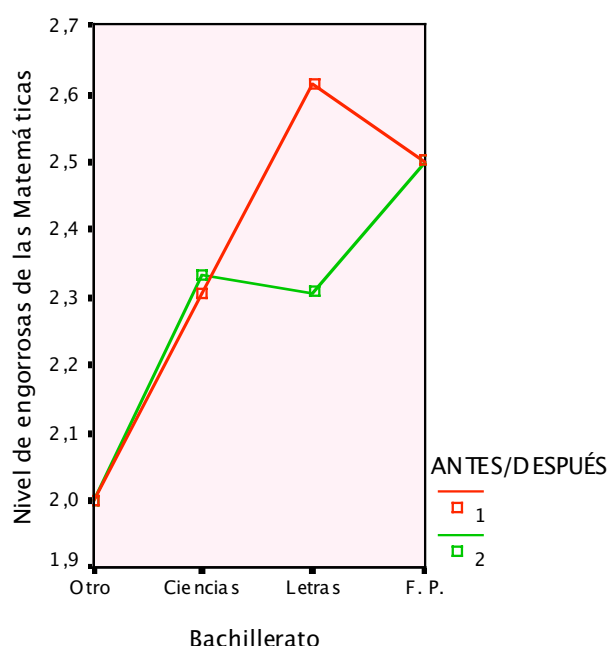


**Figura 278: Estimación de “las Matemáticas son engorrosas” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura se puede ver que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas menos engorrosas son los que llamamos Otros —procedentes de acceso a la Universidad para mayores de 25 años— y los que las consideran más engorrosas antes del citado estudio son los que cursaron el bachillerato de Letras, y después, los de Formación Profesional. La idea de que las Matemáticas sean engorrosas disminuye, después del mencionado estudio, para los alumnos que cursaron el bachillerato de Letras y para los demás prácticamente se mantiene.

Recogemos todos los niveles críticos antes indicados sobre “las Matemáticas son engorrosas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                       | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas son ENGORROSAS</b> | Antes / después: $p=0.818$ |                                                   | 266    |
|                                       | Antes / después: $p=0.853$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.661$       | 267    |
|                                       | Antes / después: $p=0.297$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.012^*$        | 268    |
|                                       | Antes / después: $p=0.741$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.079$        | 269-70 |
|                                       | Antes / después: $p=0.535$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.240$         | 271-2  |
|                                       | Antes / después: $p=0.472$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.575$ | 273    |
|                                       | Antes / después: $p=0.808$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.687$ | 274    |

**Tabla 31: “Las Matemáticas son engorrosas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**

### 5.3.3.8. Las Matemáticas son formativas

Se pasa a analizar ahora hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación “las Matemáticas son formativas”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *las Matemáticas son formativas*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para ver qué influencia tiene dicho estudio en su opinión sobre la idea de que las Matemáticas son formativas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados salen  $p=0.131>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan  $p=0.131>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.131>0.05$ ; se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: mayoritariamente consideran que las Matemáticas son muy o bastante formativas, aumentando su percepción después del estudio del tema y de las técnicas.

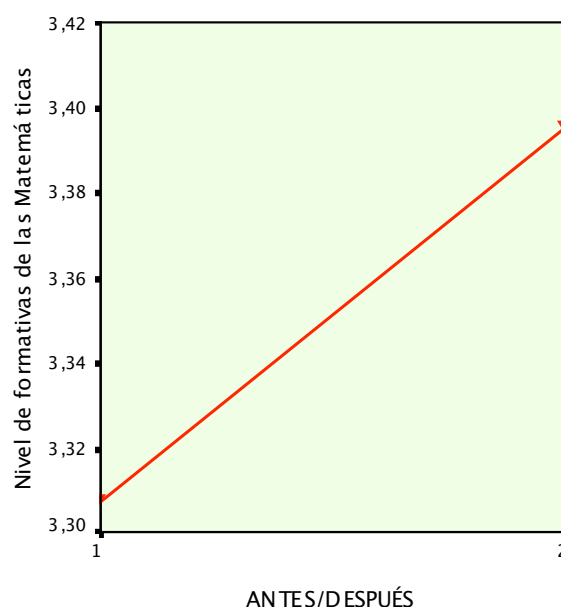


**Figura 279: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después.**

Teniendo en cuenta los valores asignados al nivel de acuerdo con que “las Matemáticas son formativas”, que son análogos a los anteriores, se debe pensar que cuando aumenta el nivel, aumenta la idea de que las Matemáticas son formativas, y recíprocamente. Por tanto, la figura que precede informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el grado de acuerdo con que las Matemáticas son formativas.

## Género

Se añade como variable inter-sujeto “el género”, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver si influye en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean formativas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona el modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean formativas no se explica por “el género”.

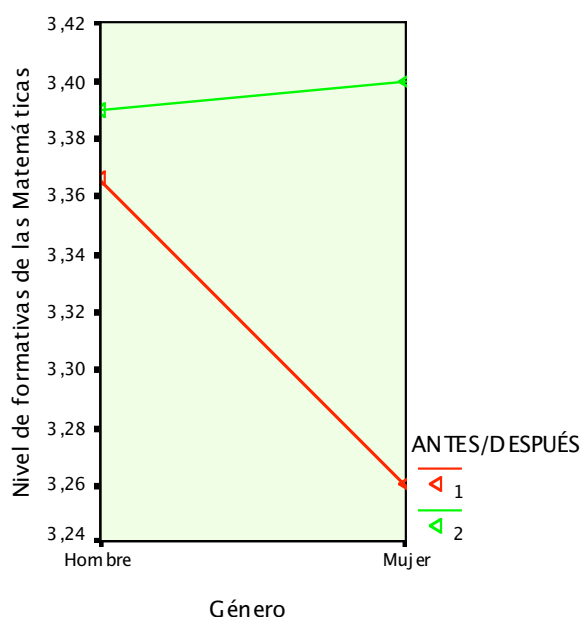


**Figura 280: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “género”.**

Se puede ver en esta figura que la idea de que las Matemáticas sean formativas, antes del estudio del tema y de las técnicas, es mayor para los hombres que para las mujeres, y después del mencionado estudio es un poco mayor para las mujeres que para los hombres. Después de dicho estudio, aumenta la idea de que las Matemáticas sean formativas para ambos, aunque mucho más para las mujeres que para los hombres.



## Año de realización

Se toma ahora como variable inter-sujeto “el año de realización”, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver si influye en la opinión de los alumnos sobre la idea de que las Matemáticas sean formativas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona el modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “el año de realización” no tiene una repercusión significativa en la idea de que las Matemáticas sean formativas.

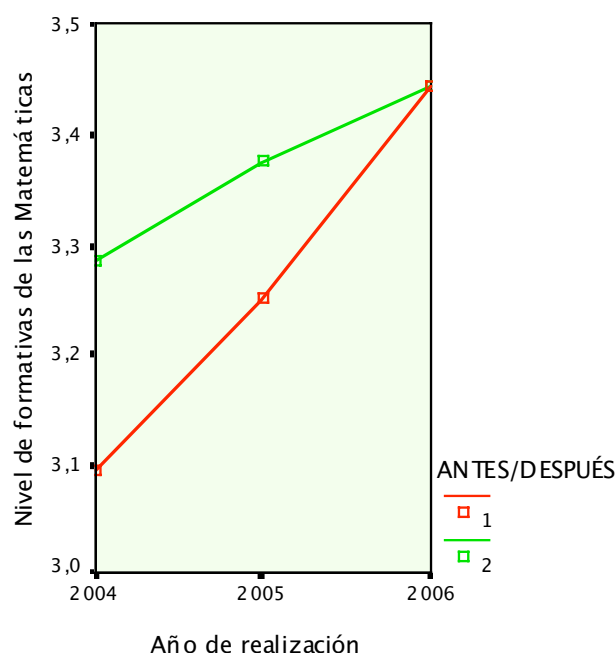


**Figura 281: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “año de realización”.**

En la figura que precede se puede ver que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas más formativas son los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006 y los que las consideraron menos formativas son los que las respondieron en el 2003/2004. Después de dicho estudio, aumenta la idea de que las Matemáticas sean formativas en todos los años en que se realizaron las encuestas, salvo para los que respondieron las encuestas en 2005/2006 que se mantiene.

## Curso

Se estudia a continuación si la idea de que las Matemáticas sean formativas depende del “curso” en el que estuvieran matriculados los alumnos; se hace mediante el modelo lineal general de medidas

repetidas. Se observa que en los distintos estadísticos que proporciona se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean formativas no depende del “curso” en que estuvieran matriculados los alumnos.

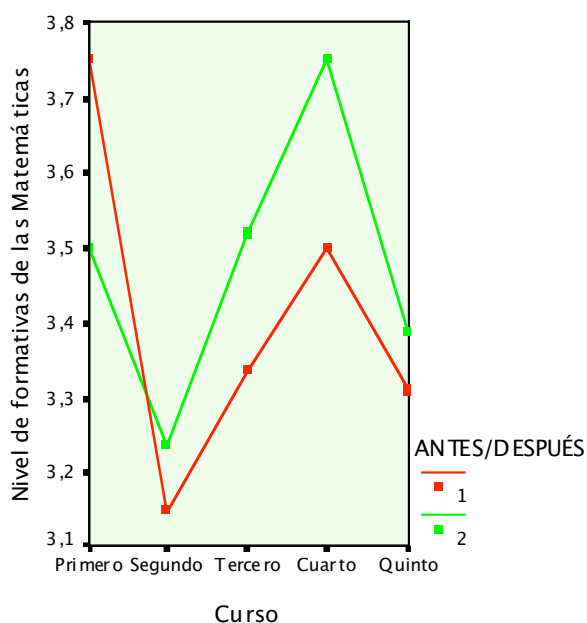


**Figura 282: Estimación de las “Matemáticas son formativas” antes/después, por “curso”.**

La figura que precede informa de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que las Matemáticas son formativas son los que cursaban primero, y después del citado estudio los de cuarto. Los que consideran las Matemáticas menos formativas, tanto antes como después de dicho estudio, son los de segundo.

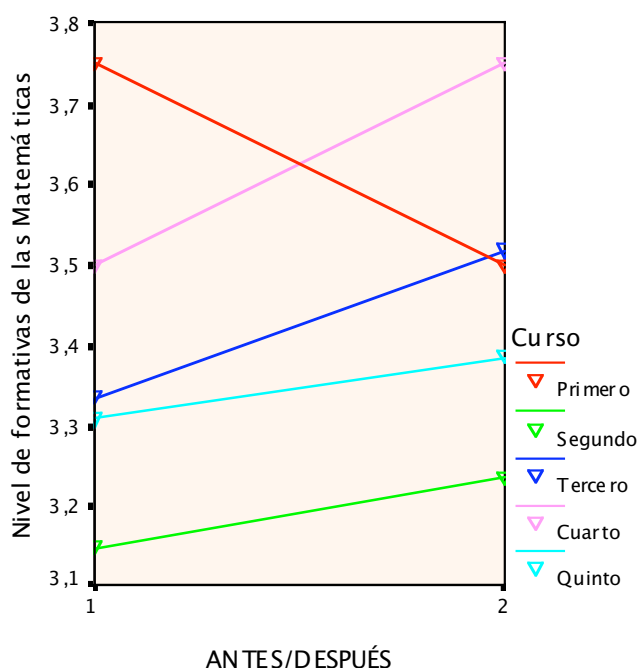


**Figura 283: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “curso”.**

Esta figura se escoge también para ver cómo quedan las distintas submuestras de alumnos. Además, aquí se ve que para casi todos los alumnos, excepto para los que estaban matriculados en primero, después del estudio del tema y de las técnicas aumenta la idea de que las Matemáticas sean formativas.

## Edad

Se pasa a estudiar si “la edad” repercute en la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean formativas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas, y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas sean formativas no se explica por “la edad” que tuvieron los alumnos cuando respondieron las encuestas.

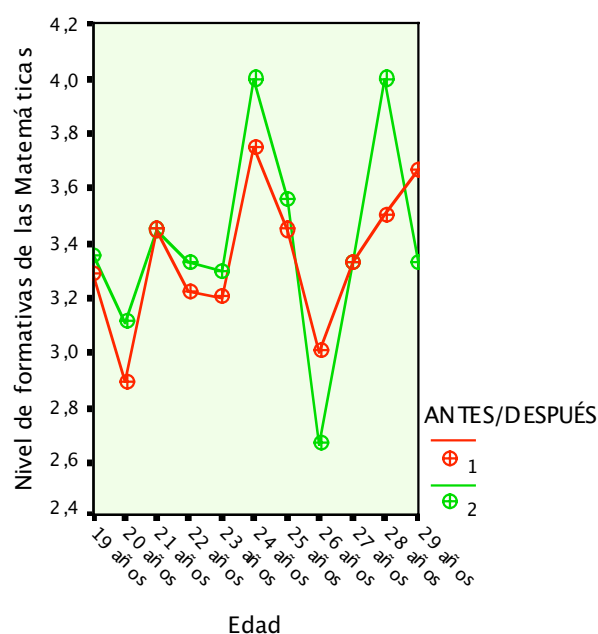


**Figura 284: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “edad”.**

En la figura obtenida se puede observar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas más formativas son los que, en ese momento, tenían 24 años, y los que las consideran menos formativas son los que tenían 20 años. Después del citado estudio, siguen siendo los alumnos de 24 años, además de los de 28, los que consideran las Matemáticas más formativas, y pasan a ser los de 26 años los que las consideran menos formativas.

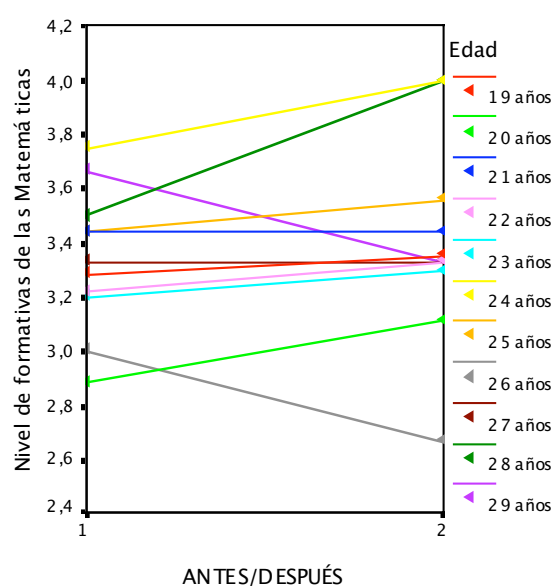


**Figura 285: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “edad”.**

Por ser muchas las submuestras que se obtienen como resultado de esta clasificación, para que quede más claro cómo está cada una de estas submuestras, se elige la figura adjunta. En ella además de confirmar lo que se decía antes, se puede destacar que la idea de que las Matemáticas sean formativas aumenta para los que tenían 19, 20, 22, 23, 24, 25 y 28 años, se mantiene para los de 21 y 27 años, y descende para los de 26 y 29 años.

## Especialidad

Se considera ahora si “la especialidad” que estuvieran cursando los alumnos repercute en la opinión sobre que las Matemáticas sean formativas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Para confirmarlo o desmentirlo se utiliza el modelo lineal general de medidas repetidas, y se observa que en los distintos estadísticos que proporciona el modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean formativas no depende de “la especialidad” de la que procedan los alumnos.

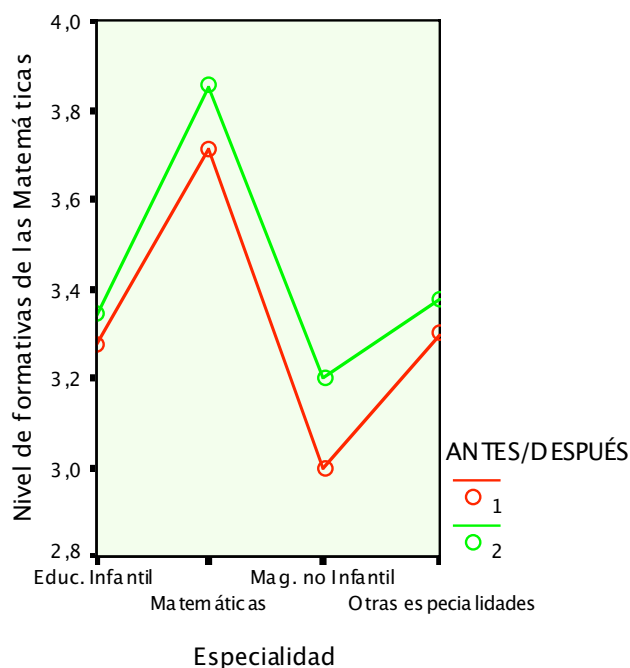


**Figura 286: Estimación de “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “especialidad”.**

En esta figura se puede ver que la idea de que las Matemáticas sean formativas es mayor, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, para los matriculados en la Licenciatura de Matemáticas y es menor para los de Magisterio de la especialidad de

Educación Infantil. Además, después de dicho estudio, para todas las especialidades aumenta la percepción de que las Matemáticas sean formativas.

## Bachillerato

Se toma “el bachillerato” como variable inter-sujeto para estudiar la repercusión que tiene en el nivel de acuerdo con que las Matemáticas sean formativas. Se recurre al modelo lineal general de medidas repetidas, y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego su idea de que las Matemáticas sean formativas no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

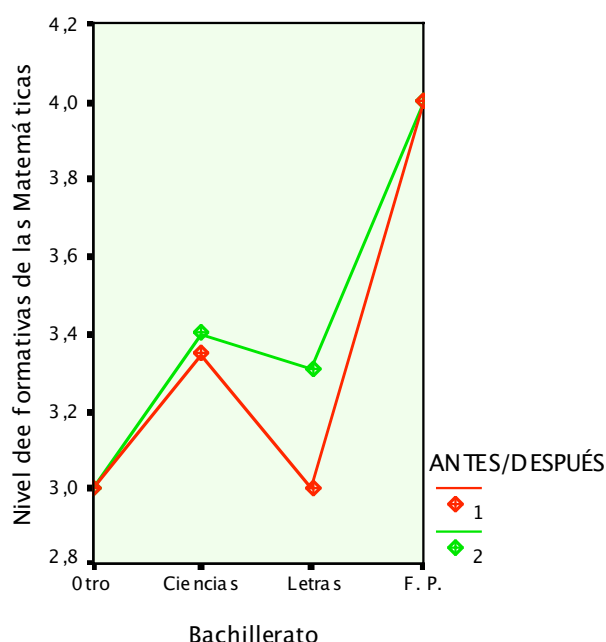


**Figura 287: Estimación de las “Matemáticas son formativas” antes/después, por “bachillerato”.**

En la figura adjunta se ve que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que las Matemáticas sean formativas son los que proceden de Formación Profesional, y los que consideran que son menos formativas son, antes del estudio del tema y de las técnicas, los llamados Otros —acceso a la Universidad para mayores de 25 años— y los del bachillerato de Letras, y después del citado estudio, sólo los que llamamos Otros.

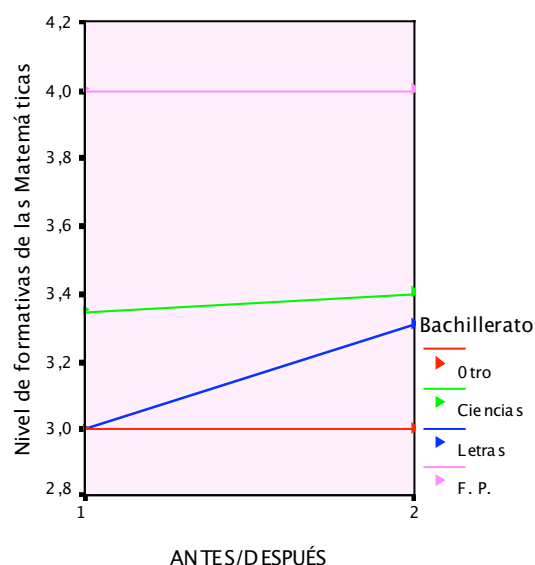


**Figura 288: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son formativas” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura deja claro lo que decíamos antes, además, se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que las Matemáticas sean formativas para los que proceden del bachiller de Letras y prácticamente se mantiene para todos los demás.

En la tabla que viene a continuación se recogen todos los niveles críticos de “las Matemáticas son formativas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                       | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas son FORMATIVAS</b> | Antes / después: $p=0.131$ |                                                   | 275    |
|                                       | Antes / después: $p=0.160$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.322$       | 276    |
|                                       | Antes / después: $p=0.087$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.373$          | 277    |
|                                       | Antes / después: $p=0.429$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.631$        | 278-9  |
|                                       | Antes / después: $p=0.385$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.807$         | 280-1  |
|                                       | Antes / después: $p=0.166$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.958$ | 282    |
|                                       | Antes / después: $p=0.606$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.492$ | 283-4  |

**Tabla 32: “Las Matemáticas son formativas”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.9. Las Matemáticas no son prácticas

Se pasa a estudiar hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: “las Matemáticas no son prácticas”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las

afirmaciones *las Matemáticas no son prácticas*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. Después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en la idea de que las Matemáticas no sean prácticas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.379>0.05$ , y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.379>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total, da también  $0.379>0.05$ , luego se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: el porcentaje es claramente significativo a favor de que son prácticas, con un 98% antes del estudio del tema y de las técnicas y un 95% después. Las variaciones antes de estudiarse el tema y después son mínimas.

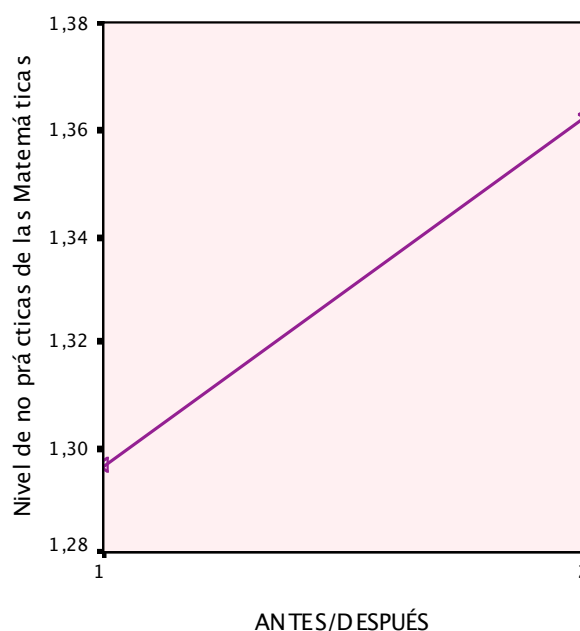


**Figura 289: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después.**

Los cuatro valores asignados a la variable “las Matemáticas no son prácticas” son análogos a los que se tenían en el apartado anterior, y



como entonces, al aumentar el valor, aumenta el nivel de acuerdo, y recíprocamente. Por tanto, se puede afirmar que si aumenta el valor, disminuye la idea de que las Matemáticas son prácticas, y recíprocamente. Teniendo en cuenta todo esto y a la vista de la figura precedente, se puede afirmar que después del estudio del tema y de las técnicas disminuye la idea de que las Matemáticas son prácticas. Pensamos que puede ser debido al nivel de abstracción que se le dio al tema, aunque a la vez este tema es tremendamente útil.

## Género

Se pasa a ver si “el género” influye en la idea de que las Matemáticas no sean prácticas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas, se elige “el género” como variable inter-sujeto y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que no existen diferencias significativas dentro del mismo género ni entre ellos sobre la idea de que las Matemáticas no sean prácticas.

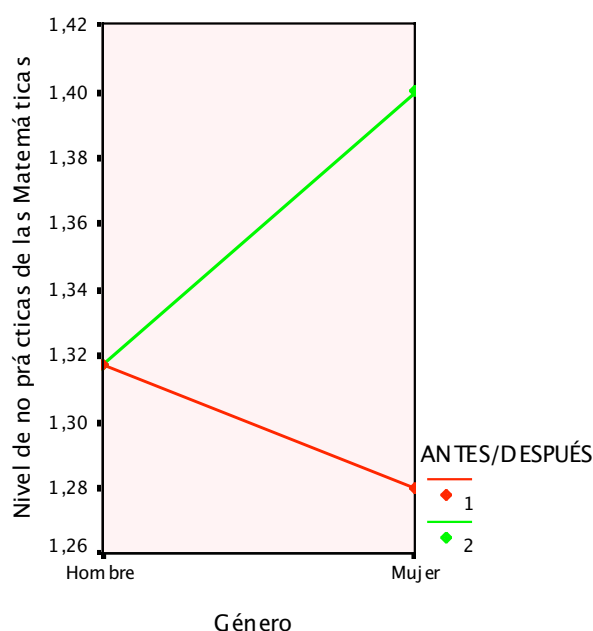


**Figura 290: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “género”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, como se puede ver en este gráfico, las mujeres consideran las Matemáticas más prácticas que los hombres. Después del mencionado estudio la situación se invierte. Para los hombres, después de dicho estudio, se mantiene el grado de acuerdo con que las Matemáticas sean prácticas, y para las mujeres disminuye.

## Año de realización

Se sigue trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas. Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver la influencia que puede tener en las opiniones sobre la afirmación: “las Matemáticas no son prácticas”, planteada antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “el año de realización” de las encuestas no influye en las opiniones que dan los alumnos antes y después del citado estudio.

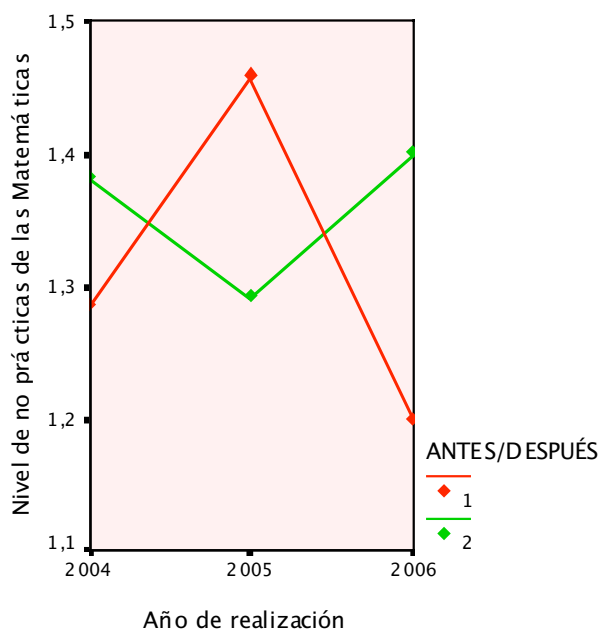


**Figura 291: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “año de realización”.**

Los alumnos que consideran las Matemáticas más prácticas, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que respondieron las encuestas en 2005/2006, y los que las consideran menos prácticas son los que las respondieron en 2004/2005. Después de dicho estudio, los alumnos que están más de acuerdo con que las Matemáticas son prácticas son los que antes estaban menos de acuerdo (los de 2004/2005), y los otros dos quedan al mismo nivel.

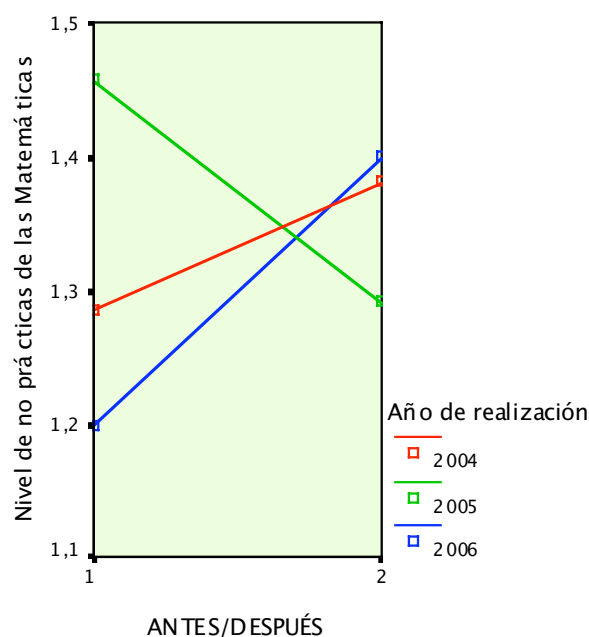


**Figura 292: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “año de realización”.**

En la figura anterior, por estar los niveles muy próximos, puede quedarnos alguna duda de lo que se dice; esta figura viene a confirmarlo. Además, se observa que para los alumnos que respondieron las encuestas en 2004/2005, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que las Matemáticas son prácticas y para los demás disminuye.

## Curso

Se considera ahora como variable inter-sujeto “el curso”, para estudiar si la opinión sobre que las Matemáticas no son prácticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “curso”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados  $p=0.933>0.05$  cuando se considera la influencia del “curso” en las Matemáticas no son prácticas, dentro de cada curso, y  $p=0.043<0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan también los mismos valores. Se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del citado estudio, entre los cursos, pero no existe diferencia dentro del mismo curso.

Para comparar los distintos cursos elegimos Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar estas comparaciones se va a utilizar el método de comparación Scheffé, que se basa en la distribución F. En este caso todos los niveles críticos dan mayores que 0.05, luego se puede afirmar que no hay diferencias significativas entre los distintos cursos.

Para analizar lo que ocurre en este caso se trabaja con las pruebas no paramétricas, se eligen k muestras independientes, se toman “las Matemáticas no son prácticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en la lista de variables, en el grupo de variables se elige “curso”, y se marca el estadístico Kruskal-Wallis, se definen los rangos de modo que recoja todos los cursos. En este caso los niveles críticos son mayores que 0.05, luego no hay diferencias significativas ni dentro de cada curso ni entre los distintos cursos.

Para confirmar que no hay diferencias significativas se comparan por pares los distintos cursos con objeto de estudiar si hay diferencias significativas entre algunos de ellos. Se elige el apartado dos muestras independientes, y se toman en lista de afirmaciones “las Matemáticas no son prácticas”, en ambos momentos; como variable de agrupación se elige “el curso”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: el de los alumnos que cursan primero y los de segundo, los alumnos de primero y los de tercero, etc., hasta agotar todos los pares. En todos los casos los niveles de significación son mayores que 0.05, luego se confirma que no hay diferencias significativas ni dentro de cada curso ni entre los distintos cursos.

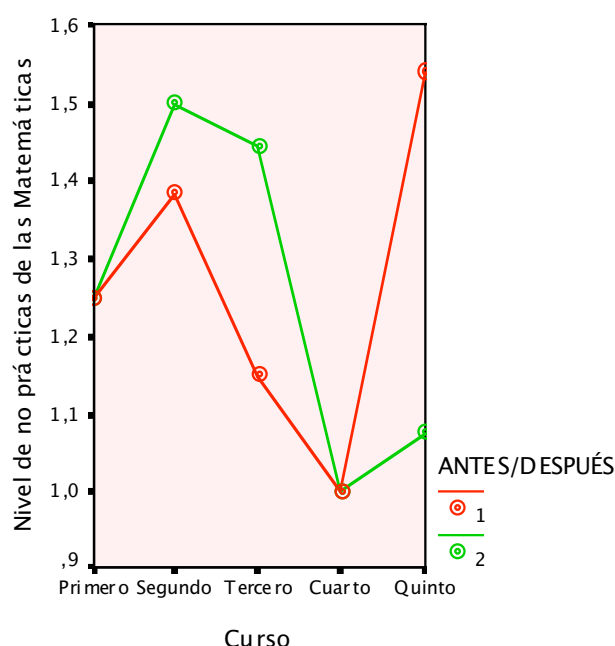


**Figura 293: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “curso”.**

Observando la figura que precede, se puede decir que los alumnos matriculados en cuarto curso son los que opinan que las Matemáticas son más prácticas, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Y los que consideran que son menos prácticas, antes de dicho estudio, son los de quinto, y después los de segundo. Aumenta la idea de que las Matemáticas son prácticas en los alumnos que estaban matriculados en quinto, se mantiene para los de primero y cuarto y para los demás disminuye.

## Edad

Se considera “la edad” como variable inter-sujeto, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver la influencia que puede tener en la opinión sobre la idea de que las Matemáticas no sean prácticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego no parece tener repercusión “la edad” que tengan los alumnos en la opinión sobre que las Matemáticas no sean prácticas.

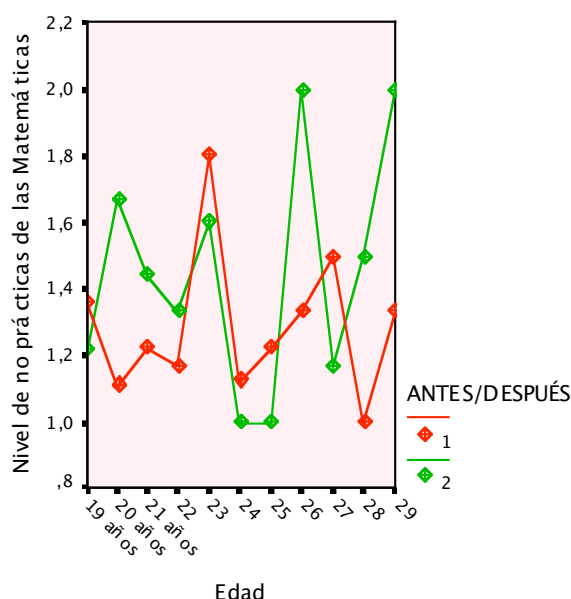


**Figura 294: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “edad”.**

En la figura adjunta se ve que los alumnos que consideran las Matemáticas más prácticas, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que en el momento de responder las encuestas tenían 28 años y los que las consideran menos prácticas son los que tenían 23 años. Después de dicho estudio pasan a ser los alumnos de 24 y 25 años los que las consideran más prácticas y los de 26 y 29 años los que las consideran menos prácticas.

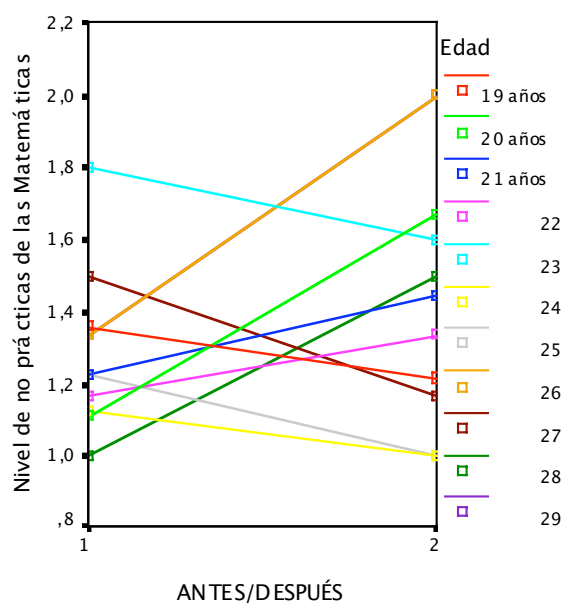


**Figura 295: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “edad”.**

Se coge esta figura porque en la figura anterior se tiene alguna dificultad para ver con claridad los niveles; ésta confirma lo que antes se decía. Aquí se observa que para los alumnos que tenían 19, 23, 24, 25 y 27 años, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que las Matemáticas son prácticas, y disminuye para los demás. En este caso se tiene que aclarar que no se ve la recta que indica la variación de percepción de que las Matemáticas no son prácticas, antes y después del citado estudio, para los alumnos que tenían 29 años por coincidir con la que representa a los que tenían 26.

## Especialidad

Se toma ahora como variable inter-sujeto “la especialidad”, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver la influencia que puede tener en la opinión sobre que las Matemáticas no sean prácticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “la especialidad” no parece tener repercusión en las opiniones de los alumnos.

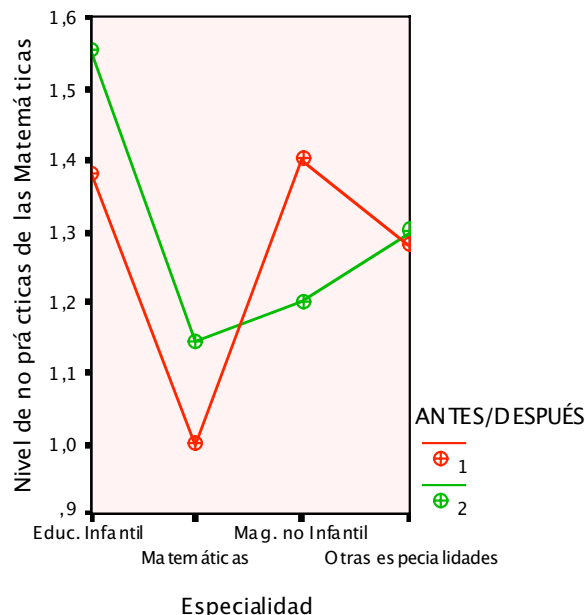


**Figura 296: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos que están más de acuerdo con que las Matemáticas sean prácticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, son los de la licenciatura de Matemáticas, y los que están menos de acuerdo son los de Magisterio; parece ser que, antes del citado estudio,

son los de todas las especialidades, y después los de Educación Infantil. Como algunos puntos de esta figura quedan muy próximos, para verlo más claro se usa la figura que viene a continuación.

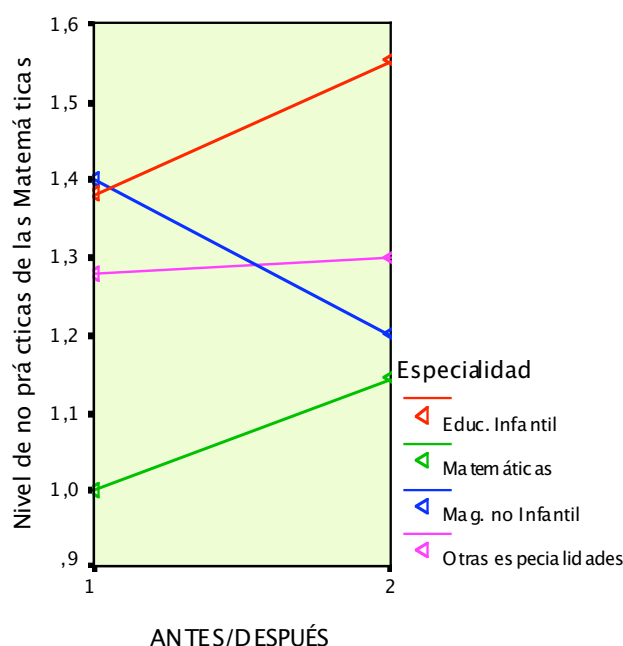


**Figura 297: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “especialidad”.**

En la figura precedente se puede ver que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los que están menos de acuerdo con que las Matemáticas sean prácticas son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, y después del mencionado estudio son los de Educación Infantil. Después de dicho estudio aumenta la idea de que las Matemáticas son prácticas en los que estaban matriculados en Magisterio en especialidades distintas de Educación Infantil y disminuye en los demás.

## Bachillerato

Se elige como variable inter-sujeto “el bachillerato” que hubieran cursado los alumnos, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver la influencia que puede tener en la opinión sobre que las Matemáticas no sean prácticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la opinión de los alumnos no depende del “bachillerato”.



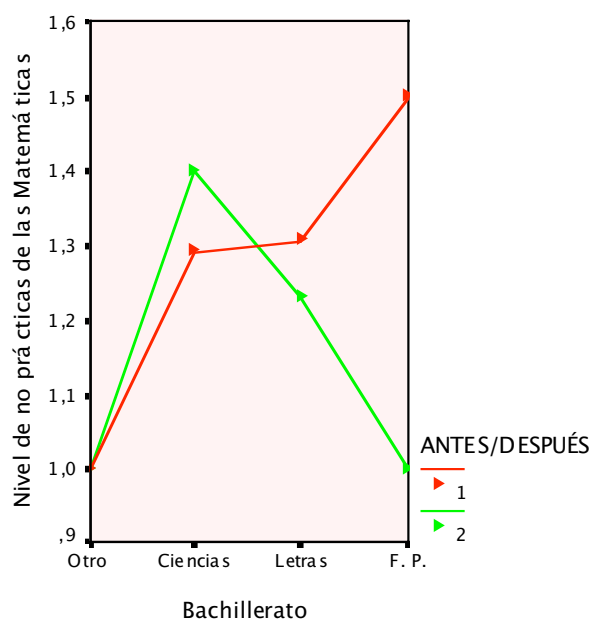


**Figura 298: Estimación de “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “bachillerato”.**

En la figura adjunta se puede observar que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos llamados Otros —procedentes de acceso a la Universidad para mayores de 25 años— son los que consideran las Matemáticas más prácticas, a éstos se suman, después de dicho estudio, los de F P; y los alumnos que las consideran menos prácticas son: antes del citado estudio, los de Formación Profesional, y después, los de Ciencias.

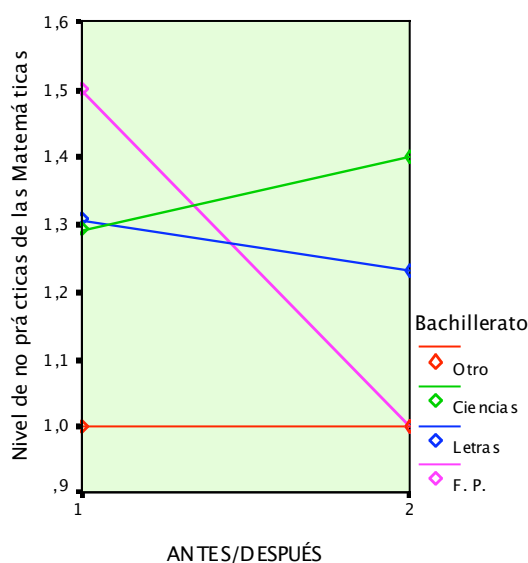


**Figura 299: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas no son prácticas” antes/después, por “bachillerato”.**

Para que quede más clara la figura anterior elegimos ésta, en la que se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, la idea de que las Matemáticas sean prácticas aumenta para los alumnos que cursaron bachillerato de Letras y para los que proceden de Formación Profesional; para los demás disminuye.

En la tabla siguiente se tienen todos los niveles críticos obtenidos trabajando con “las Matemáticas no son prácticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                         | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|-----------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>Las Matemáticas no son PRÁCTICAS</b> | Antes / después: $p=0.379$ |                                                   | 285    |
|                                         | Antes / después: $p=0.427$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.427$       | 286    |
|                                         | Antes / después: $p=0.582$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.120$          | 287-8  |
|                                         | Antes / después: $p=0.933$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.043^*$      | 289    |
|                                         | Antes / después: $p=0.074$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.072$         | 290-1  |
|                                         | Antes / después: $p=0.766$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.658$ | 292-3  |
|                                         | Antes / después: $p=0.604$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.571$ | 294-5  |

**Tabla 33: “Las Matemáticas no son prácticas”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.10. Las Matemáticas son divertidas

Se pasa a analizar hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: “las Matemáticas son divertidas”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman como variables intra-sujetos *las Matemáticas son divertidas*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Después se van eligiendo las variables inter-sujeto, sucesivamente: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en la opinión de los alumnos sobre la idea de que las Matemáticas son divertidas, según cada una de estas variables.

Como se obtienen los niveles críticos y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F  $p=1.000>0.05$ , se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $p=1.000>0.05$ , luego se puede concluir que la media total vale cero.

Si se compara con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: los alumnos con los que se cuenta, salvo una pequeña minoría, no consideran las Matemáticas divertidas, aunque haya un porcentaje, aunque sea pequeño, que opinen que son muy divertidas y otro, no ya tan pequeño, que consideran que son bastante divertidas, habiendo una pequeña disminución después del estudio del tema y de las técnicas (2%).

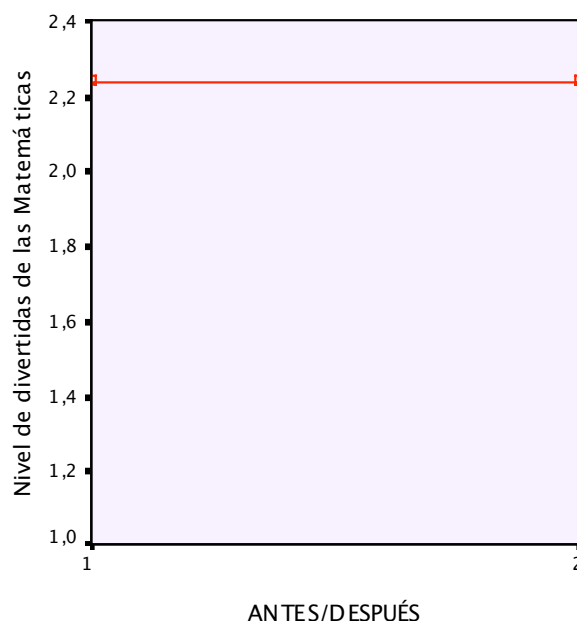


**Figura 300: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después.**

Se vuelven a asignar los valores a “las Matemáticas son divertidas” de forma análoga a como se ha venido haciendo hasta ahora, y no vamos a repetir las consecuencias que se derivan de ello. Con el gráfico que antecede se puede decir que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos mantienen en el mismo nivel la idea de que las Matemáticas sean divertidas, la disminución del 2% que se tenía en el estudio de frecuencias, no se detecta en este caso.

## Género

Se pasa a considerar como variable inter-sujeto “el género”, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver la influencia que puede tener en la opinión sobre que las Matemáticas sean divertidas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05. Esto nos dice que “el

género” no parece tener repercusión en la idea de que las Matemáticas sean divertidas.

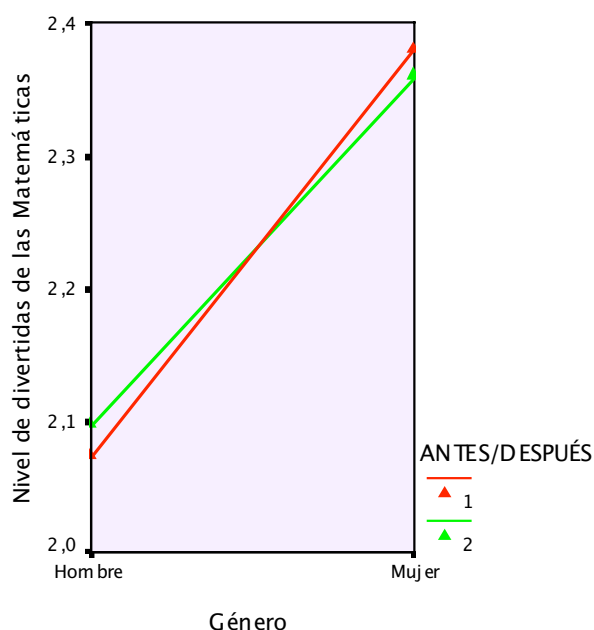


**Figura 301: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “género”.**

En el gráfico que precede se observa que la idea de que las Matemáticas sean divertidas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, es menor en los hombres que en las mujeres. Se puede ver también que la idea de que las Matemáticas sean divertidas, después de dicho estudio, varía muy poco, aumentando para los hombres y disminuyendo para las mujeres.

### Año de realización

Junto a las “Matemáticas son divertidas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver la influencia que puede tener en la opinión de los alumnos. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “el año de realización” de las encuestas parece ser independiente de la opinión de los alumnos sobre que las Matemáticas sean divertidas.

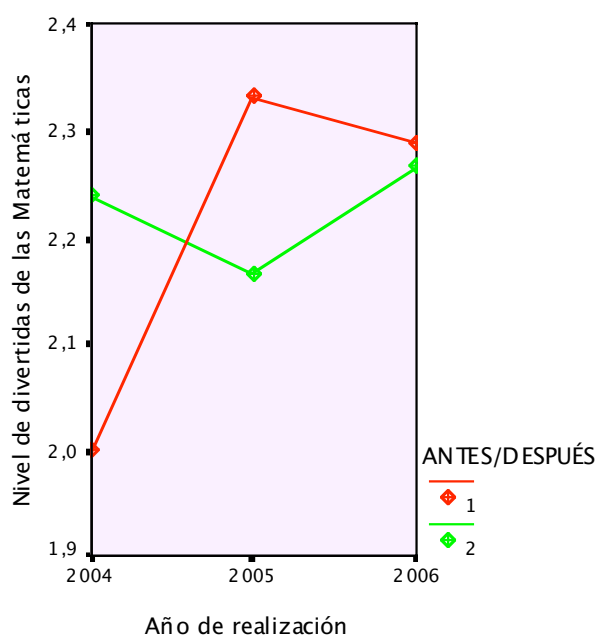


**Figura 302: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “año de realización”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran las Matemáticas más divertidas son los que responden las encuestas en 2004/2005 y los que las consideran menos divertidas son los que las responden en 2003/2004. Después del citado estudio pasan a ser los alumnos del curso 2005/2006 los que consideran las Matemáticas más divertidas y los del 2003/2004 los que menos. Se puede ver que, después de dicho estudio, para los alumnos que respondieron las encuestas en 2003/2004 aumentó la idea de que las Matemáticas sean divertidas y para los demás disminuyó.

## Curso

Se elige ahora como variable inter-sujeto “el curso” en que estuvieran matriculados los alumnos, para estudiar la influencia que pueda existir con la idea de que las Matemáticas sean divertidas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que las Matemáticas sean divertidas no depende del “curso”.

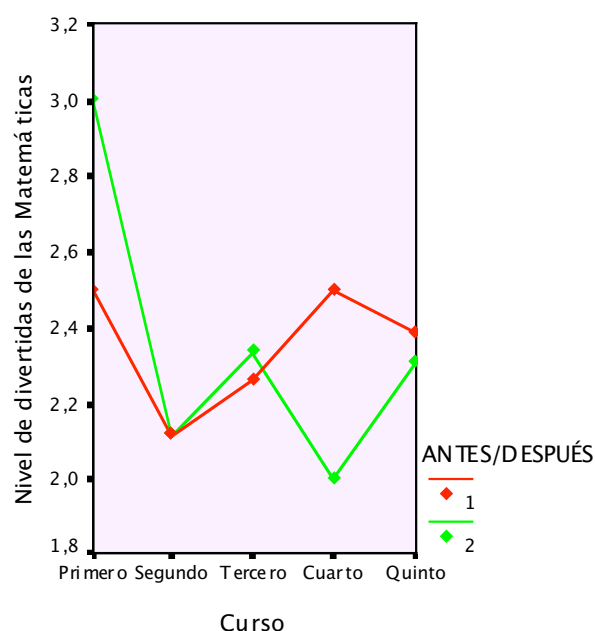


**Figura 303: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “curso”.**

En la figura que precede se puede ver que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que estudiaban cuarto y primero son los que están más de acuerdo con que las Matemáticas son divertidas, y los que están menos de acuerdo son los que estudiaban segundo. Después de dicho estudio pasan a ser los alumnos de primero los que están más de acuerdo con que las Matemáticas son divertidas, y los de cuarto los que lo están menos. Después del citado estudio, para los alumnos de primero y tercero aumenta la idea de que las Matemáticas sean divertidas, para los de segundo se mantiene y para los demás baja.

## Edad

Se pasa a estudiar, en el momento de completar las dos encuestas, cómo influye la variable inter-sujeto “edad” que tuvieron los alumnos en la idea de que las Matemáticas sean divertidas. Para dicho estudio se utiliza el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas sean divertidas no depende de “la edad”.

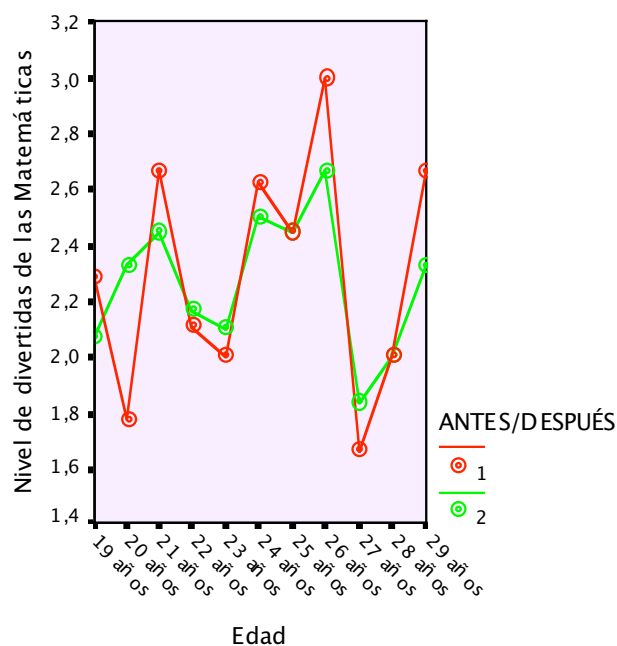


**Figura 304: Estimación de "las Matemáticas son divertidas" antes/después, por "edad".**

En esta figura se ve que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que tenían 26 años cuando completaron las encuestas son los que consideran las Matemáticas más divertidas, y los que las consideran menos divertidas son los que tenían 27 años.

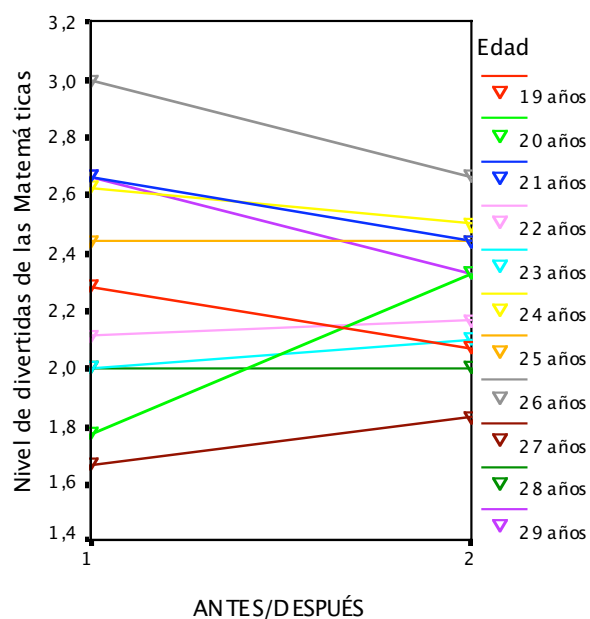


**Figura 305: Ampliación de la comparación: "las Matemáticas son divertidas" antes/después, por "edad".**

Aunque son muchas las ideas que nos proporciona la figura anterior, trabajamos con ésta última para confirmar y completar la información. Observándola detenidamente vemos que para los alumnos que tenían 20, 22, 23, 27 años, después del estudio del tema y de las técnicas, aumentó la idea de que las Matemáticas sean divertidas; para los de 25 y 28 años se mantuvo y para los demás disminuyó.

## Especialidad

Se estudia ahora si influye la variable inter-sujeto “especialidad” que estuvieran cursando los alumnos, en la idea de que las Matemáticas sean divertidas; se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “la especialidad” no parece tener repercusión en la idea de que las Matemáticas sean divertidas.

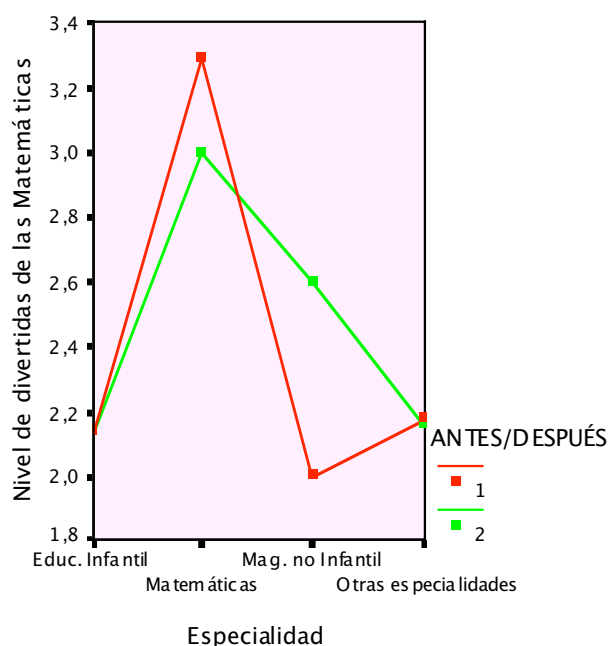


**Figura 306: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos que consideran las Matemáticas más divertidas, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, según informa la figura que precede, son los que estaban realizando la licenciatura de Matemáticas. Los alumnos que las consideran menos divertidas, antes del citado estudio, son los que estaban matriculados en Educación Infantil, y después de dicho estudio, continúan éstos y se agregan los de Otras especialidades, parece que al mismo nivel.



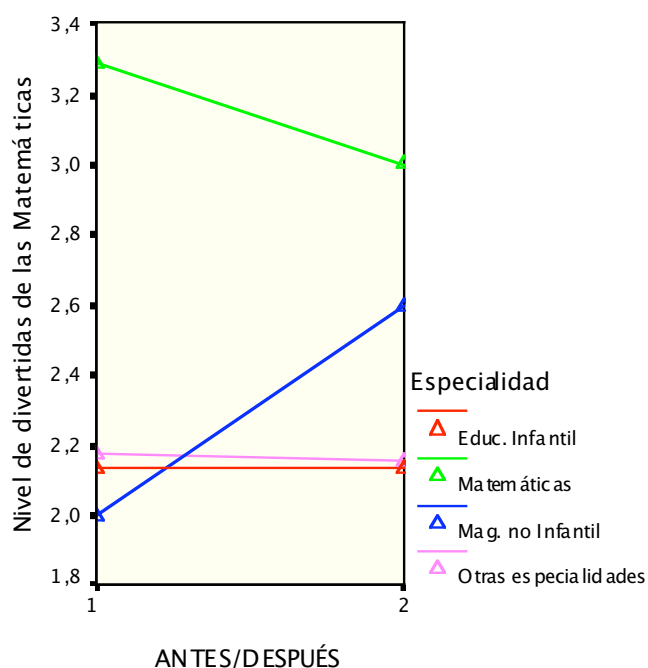


**Figura 307: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “especialidad”.**

Como no quedaba muy claro en la figura anterior, se coge ésta. Aquí se ve que, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene o aumenta la idea de que las Matemáticas sean divertidas para todas las especialidades, excepto para los alumnos de la licenciatura de Matemáticas.

## Bachillerato

Se estudia ahora cómo influye “el bachillerato” cursado en la idea de que las Matemáticas sean divertidas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que las Matemáticas sean divertidas no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los estudiantes.

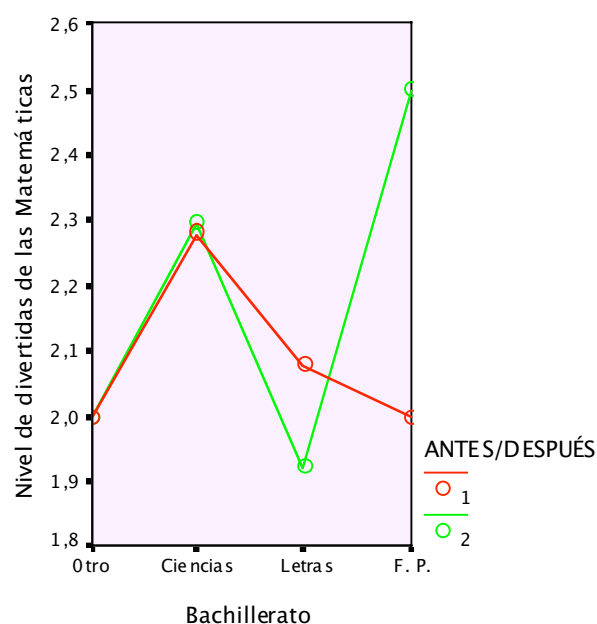


**Figura 308: Estimación de “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “bachillerato”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que cursaron el bachillerato de Ciencias son los que consideran las Matemáticas más divertidas, pasando a ser, después de dicho estudio, los de Formación Profesional. Los alumnos que consideran las Matemáticas menos divertidas son: antes, los de Formación Profesional y los que llamamos Otros, y después, los de Letras.

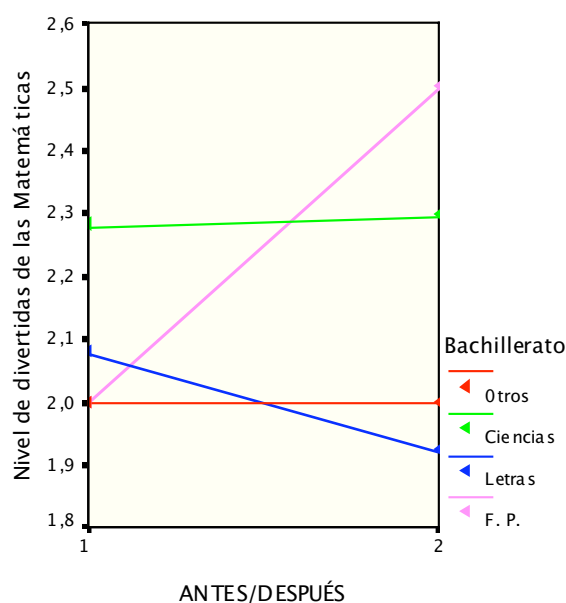


**Figura 309: Ampliación de la comparación: “las Matemáticas son divertidas” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura se confirma lo que se veía en la anterior; además se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que las Matemáticas sean divertidas para los que cursaron Formación Profesional, prácticamente se mantiene para los que llamamos Otros y para los de Ciencias, y baja para los de Letras.

Para poder observar a la vez todos los niveles críticos obtenidos al trabajar con “las Matemáticas son divertidas” se introduce la tabla que viene a continuación.

|                                       | Momento                    | Interacción                                      | Figura  |
|---------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|---------|
| <b>Las Matemáticas son DIVERTIDAS</b> | Antes / después: $p=1.000$ |                                                  | 296     |
|                                       | Antes / después: $p=0.972$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.726$       | 297     |
|                                       | Antes / después: $p=0.803$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.072$          | 298     |
|                                       | Antes / después: $p=0.995$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.185$        | 299     |
|                                       | Antes / después: $p=0.672$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.165$         | 300-1   |
|                                       | Antes / después: $p=0.426$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.079$ | 302-3   |
|                                       | Antes / después: $p=0.635$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.517$ | 304-305 |

**Tabla 34: “Las Matemáticas son divertidas”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.3.11. Me gustan las Matemáticas

Se elige el último punto del segundo apartado de las dos encuestas para analizar cuál es el nivel de acuerdo de los alumnos sobre la afirmación “me gustan las Matemáticas”, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *me gustan las Matemáticas*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujeto. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene dicho estudio en la idea de que “me gustan las Matemáticas”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.664>0.05$ , luego se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $p=0.664>0.05$ , por lo que se puede concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se realizó el estudio de frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: una mayoría opina que le gustan mucho o bastante las Matemáticas, algo más de la cuarta parte de los alumnos dice que le gustan poco o nada. Después del estudio del tema y de las técnicas aumenta un poco el gusto por las Matemáticas, pues sólo disminuye el porcentaje de los que opinan que no le gustan nada; además, el porcentaje de los que le gustan mucho o bastante pasa del 67%, antes de dicho estudio, al 69%, después.

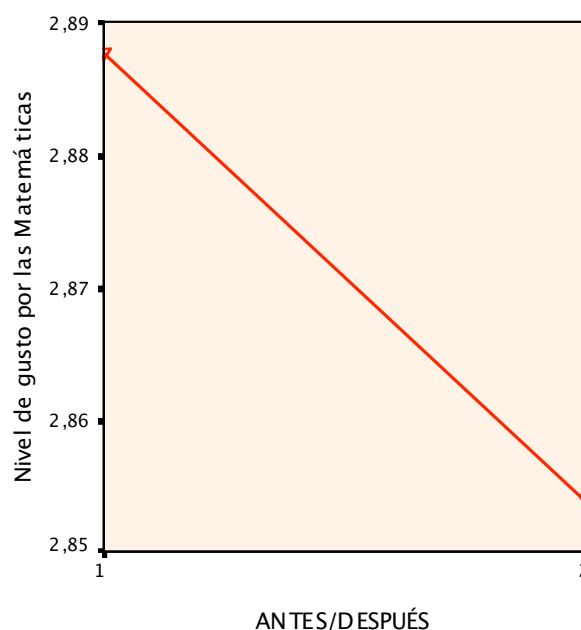


**Figura 310: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después.**

Para poder decir algo sobre este gráfico habría que recordar cómo se han asignado los valores a la variable “me gustan las Matemáticas”, que son análogos a cómo se hizo en el apartado anterior, y no necesita más comentarios. Por tanto, se puede afirmar que después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye el gusto por las Matemáticas. Lo que se obtiene en este caso no coincide con lo que se tenía cuando se estudió la variación mediante las frecuencias; tendremos que hacer otro estudio para ver si lo confirma o lo desmiente.

Para analizar mejor lo que ocurre en este caso se utilizan las pruebas para muestras relacionadas, ya que permiten analizar datos provenientes de diseños con medidas repetidas. Para ello, en pruebas no paramétricas se eligen los pares “me gustan las Matemáticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas; como tipo de prueba se toma Wilcoxon. Se obtienen niveles críticos mayores que 0.05, luego la diferencia de valores no es significativa: el estudio del tema y de las

técnicas no explica significativamente el gusto por las Matemáticas. Esto era lo que se decía antes. Creemos que tenemos que quedarnos con lo que decía el estudio de frecuencias por los problemas que tiene el modelo lineal general y que ya hemos comentado. Además, habría que considerar también el grado de abandono por parte de los alumnos que no respondieron la encuesta después del mencionado estudio.

## Género

Se considera ahora como variable inter-sujeto “el género”, para estudiar cómo influye en la idea de que les gusten las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que no parece tener influencia significativa “el género” en la idea de que les gusten las Matemáticas.

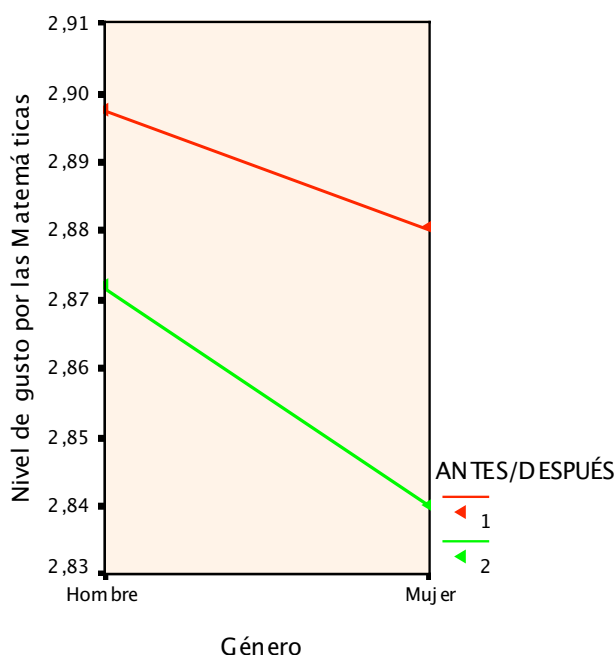


**Figura 311: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “género”.**

Como se puede ver en esta figura, se tiene que afirmar que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, a los hombres les gustan más las Matemáticas que a las mujeres. Después de dicho estudio disminuye el gusto por las Matemáticas tanto en los hombres como en las mujeres.

## Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de la encuesta para ver cómo influye en la idea de que les gusten las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego el gusto por las Matemáticas no parece estar relacionado con el año en que se realizaron las encuestas.

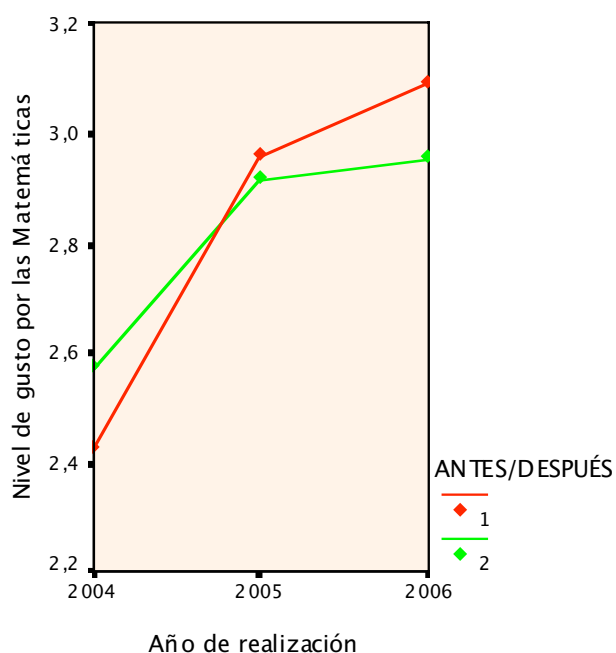


**Figura 312: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”.**

Como se puede ver en la figura que precede, según van pasando los años, va aumentando el gusto por las Matemáticas, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Además, después del mencionado estudio, aumenta el gusto por las Matemáticas para los alumnos que respondieron las encuestas en 2004/2005, y para los demás disminuye.

## Curso

Se pasa a estudiar la influencia de la variable inter-sujeto “curso” en el gusto por las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona

dicho modelo, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede rechazar la hipótesis de que el gusto por las Matemáticas dependa del curso en que estén matriculados los alumnos.

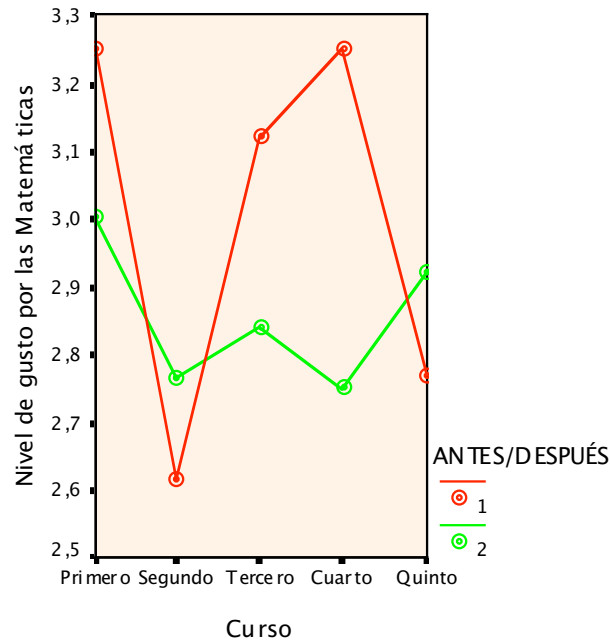


**Figura 313: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “curso”.**

Observando la figura que precede, se puede afirmar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, a los alumnos que les gustan más las Matemáticas son a los de primero y cuarto, y menos a los de segundo. Después de dicho estudio, se mantienen los de primero como a los que les gustan más y pasan a ser los de segundo y cuarto a los que les gustan menos. Para verlo más claro, se traslada la figura siguiente.

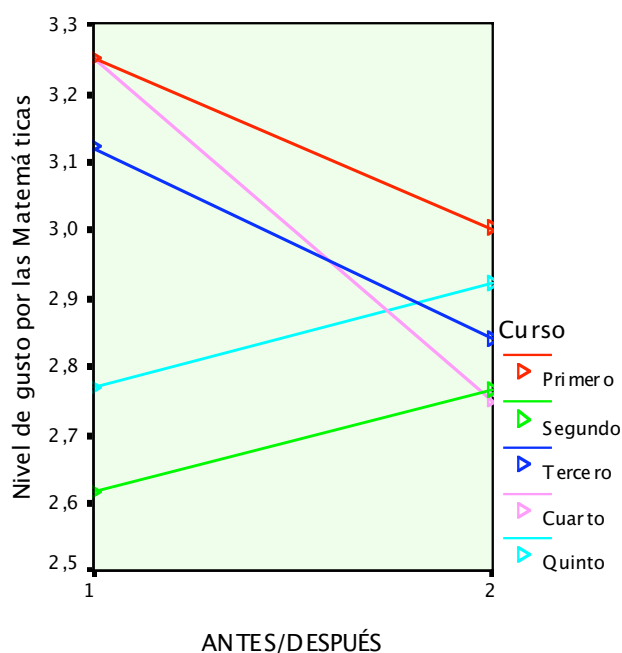


**Figura 314: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “curso”.**

En esta figura se observa lo que se decía antes. Además, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el gusto por las Matemáticas para los que estaban matriculados en segundo y quinto, y disminuye para los demás.

## Edad

Se considera la influencia de la variable inter-sujeto “edad” en el gusto por las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Para ello se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona el modelo, se obtienen niveles críticos asociados  $p=0.975 > 0.05$  cuando se considera la relación dentro de la misma edad, y  $p=0.05$  cuando se trata de la relación entre las distintas edades, luego se debe afirmar que la idea de que les gusten las Matemáticas no depende de “la edad” y está al límite de depender cuando se refiere a la relación entre las distintas edades.



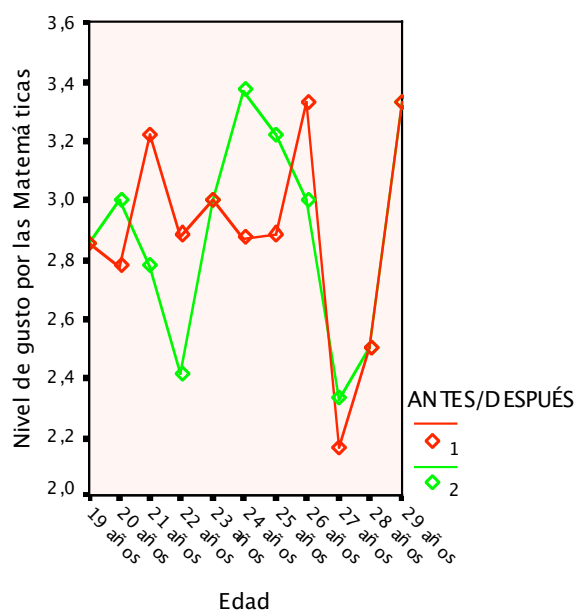


**Figura 315: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “edad”.**

Se ve en esta figura que, antes del estudio del tema y de las técnicas, a los alumnos que les más gustan las Matemáticas son a los que tenían 26 años en el momento en que respondieron las encuestas, y a los que les gustan menos son a los que tenían 27 años. Después de dicho estudio, pasan a ser los alumnos de 24 años a los que les gustan más las Matemáticas y siguen siendo los de 27 años a los que les gustan menos.

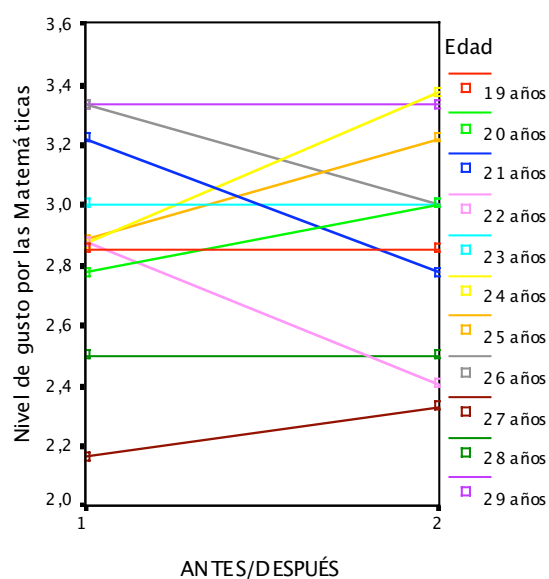


**Figura 316: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “edad”.**

Al ser muchas las clases que se tienen con “la edad”, hemos visto adecuado incluir esta figura, en ella se confirma lo que se decía respecto de la anterior, además se puede observar en las dos figuras que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el gusto por las Matemáticas para los alumnos que tenían 20, 24, 25 y 27 años; se mantiene para los que tenían 19, 23, 28 y 29 años y disminuye para el resto.

## Especialidad

Se quiere analizar también la influencia de la variable inter-sujeto “especialidad” en el gusto por las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, por tanto, se rechaza la hipótesis de que la idea de que les gusten las Matemáticas dependa de “la especialidad” en que estén matriculados los alumnos.

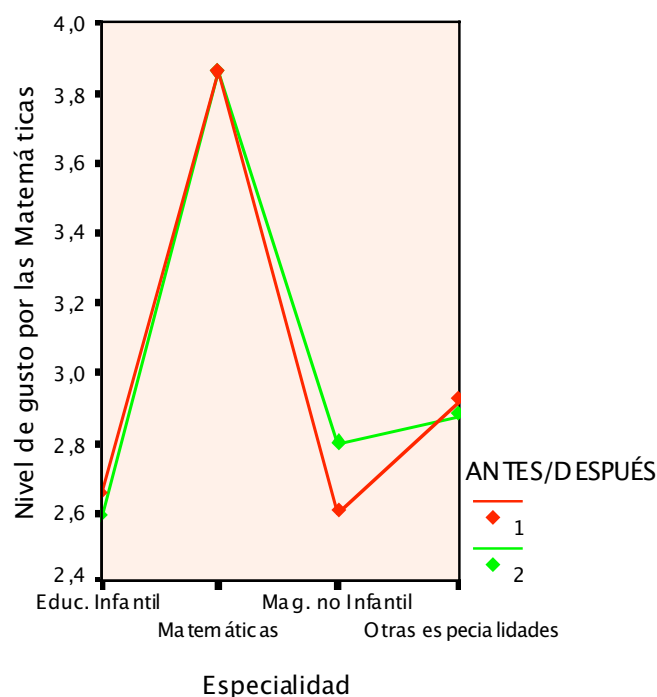


**Figura 317: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “especialidad”.**

Se observa en esta figura que hay pocas diferencias en el gusto por las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, ya que las dos gráficas están, prácticamente, una encima de la

otra. A los alumnos de la licenciatura de Matemáticas son a los que más les gustan las Matemáticas, tanto antes como después del citado estudio. A los que menos les gustan las Matemáticas son: antes del mencionado estudio, a los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil y después, a los de Educación Infantil.

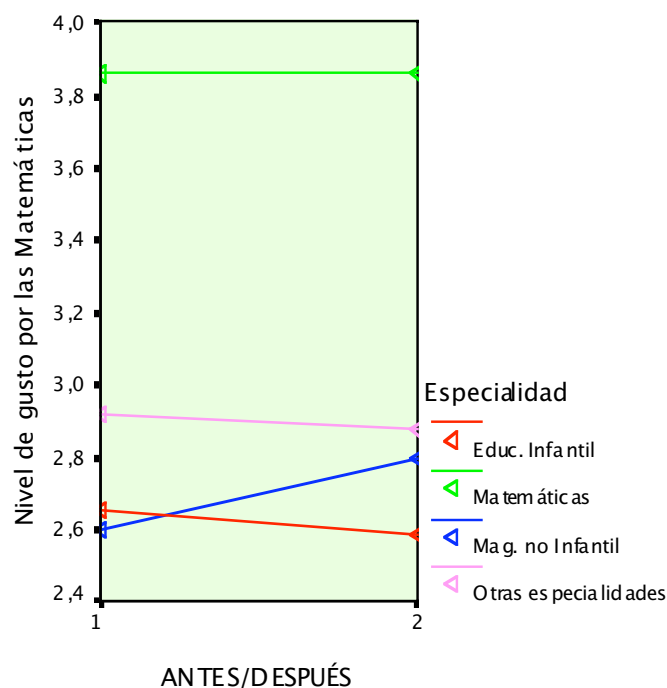


**Figura 318: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “especialidad”.**

En esta figura se ve que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que les gustan las Matemáticas en los alumnos de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, se mantiene en los de la licenciatura de Matemáticas y desciende levemente en los demás.

## Bachillerato

Se tomamos ahora la variable inter-sujeto “bachillerato” para estudiar si la opinión sobre que les gusten las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “bachillerato”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.880 > 0.05$  cuando se considera la influencia del “bachillerato” en que les gusten las Matemáticas dentro del mismo bachillerato, y  $p=0.043 < 0.05$  cuando se considera entre dos bachilleratos cualesquiera; y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F tienen también los mismos valores. Por tanto, se puede

afirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos, antes y después del citado estudio, entre bachilleratos distintos, pero no existen diferencias significativas dentro del mismo bachillerato.

Para comparar las diferencias entre los distintos bachilleratos se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados sean iguales. Para efectuar comparaciones post hoc se va a utilizar el método de comparación Scheffé, que se basa en la distribución F. En este caso, los valores de los niveles críticos resultan ser mayores que 0.05, lo que quiere decir que este estadístico no ha encontrado diferencias significativas en las opiniones de los alumnos entre los distintos bachilleratos.

Se analiza, mediante las pruebas no paramétricas, dónde se encuentran las diferencias significativas, si las hay, comparando los distintos bachilleratos. La razón de hacer el estudio mediante las pruebas no paramétricas es porque, como ya hemos comentado, no necesitan establecer supuestos sobre las poblaciones de donde se extraen las muestras, y consideramos que éste es el caso que nos ocupa. Hemos trabajado primero con las pruebas paramétricas porque en ellas se pueden mezclar dos factores; en nuestro caso hemos mezclado las respuestas que dan los alumnos a las preguntas antes y después del estudio del tema y de las técnicas, lo que no se puede hacer con las no paramétricas.

En este caso se utiliza la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para varias muestras independientes. Los niveles críticos que resultan son  $p=0.000<0.05$  para las respuestas que dieron antes del estudio del tema y de las técnicas, y  $p=0.076>0.05$  para las respuestas que dieron después. Por lo tanto, se puede decir que existen diferencias muy significativas entre las respuestas que dieron antes del citado estudio, y no existen diferencias significativas entre las respuestas que dieron después.

Se comparan por pares los distintos bachilleratos, con objeto de encontrar entre cuáles hay diferencias significativas. Para ello se eligen dos muestras independientes, y se toman en lista de afirmaciones “me gustan las Matemáticas”, en ambos momentos; como variable de agrupación se elige “el bachillerato”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: los alumnos de Ciencias y los de Letras años, los de Ciencias y los de Formación Profesional, etc., hasta

agotar todas las posibilidades. Sólo entre los alumnos que cursaron bachiller de Ciencias y los de Letras se han encontrado los niveles de significación  $p=0.000<0.05$  antes del estudio del tema y de las técnicas y  $p=0.049<0.05$  después, luego sólo hay diferencias muy significativas entre estos dos bachilleratos antes y después de dicho estudio; los demás niveles de significación son mayores que 0.05, por tanto, entre el resto no existen diferencias significativas ni antes ni después del citado estudio.

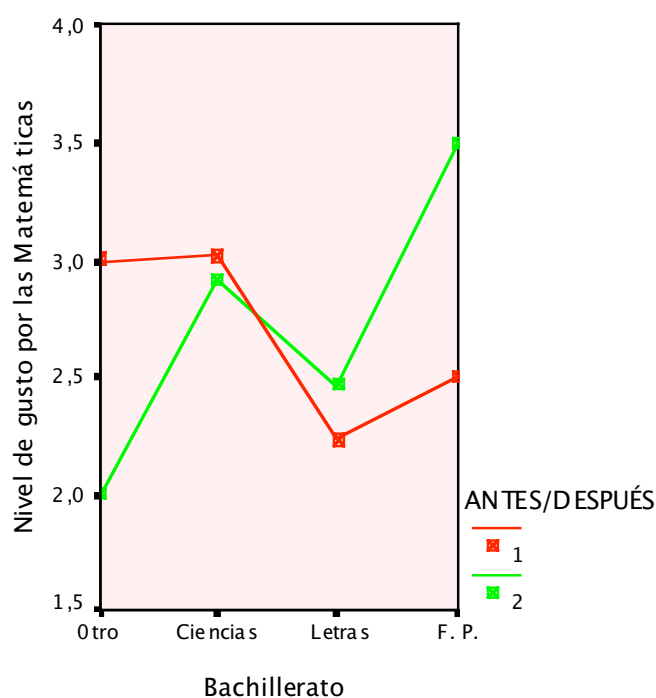


**Figura 319: Estimación de “me gustan las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, a los alumnos que más les gustan las Matemáticas son a los de Ciencias y a los que llamamos Otros, y a los que menos a los de Letras. Después de dicho estudio, a los que les gustan más las Matemáticas son a los de Formación Profesional, y a los que menos a los que llamamos Otros.

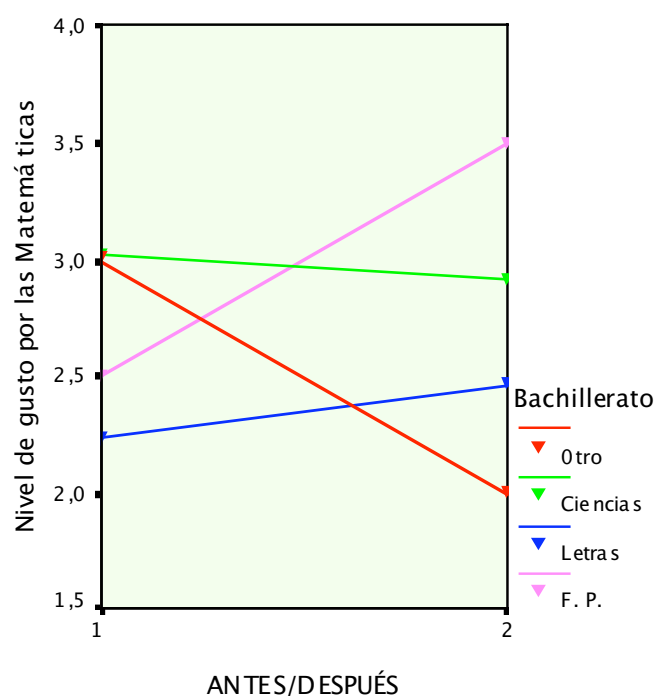


**Figura 320: Ampliación de la comparación: “me gustan las Matemáticas”, por “bachillerato”.**

En esta figura se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el gusto por las Matemáticas para los de Formación Profesional y para los de Letras, y disminuye para los demás.

Se recogen todos los niveles críticos obtenidos al trabajar con las afirmaciones “me gustan las Matemáticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en la tabla siguiente.

|                                  | Momento                    | Interacción                                        | Figura |
|----------------------------------|----------------------------|----------------------------------------------------|--------|
| <b>ME GUSTAN las Matemáticas</b> | Antes / después: $p=0.664$ |                                                    | 306    |
|                                  | Antes / después: $p=0.677$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.927$         | 307    |
|                                  | Antes / después: $p=0.875$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.347$            | 308    |
|                                  | Antes / después: $p=0.222$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.118$          | 309-10 |
|                                  | Antes / después: $p=0.979$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.050$           | 311-2  |
|                                  | Antes / después: $p=0.849$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.900$   | 313-4  |
|                                  | Antes / después: $p=0.880$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.043^*$ | 315-6  |

**Tabla 35: “Me gustan las Matemáticas”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**

### 5.3.3.12. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado

Se recogerá en esta parte la variación experimentada, después del estudio del tema y de las técnicas, en el nivel de acuerdo con los distintos aspectos relativos a las Matemáticas que se han analizado anteriormente. Además, se comparará cómo quedan cada una de las clases consideradas según las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, teniendo en cuenta ambos momentos.

Para verlo más claro, se van a distinguir dos tipos de variables intra-sujeto: las se refieren a afirmaciones positivas respecto de las Matemáticas como: “las Matemáticas son imprescindibles”, “las Matemáticas son interesantes”, “las Matemáticas son precisas”, “las Matemáticas son formativas”, “las Matemáticas son divertidas” y “me gustan las Matemáticas”, que se destacarán escribiéndolas en azul, y las negativas: “las Matemáticas son difíciles”, “las Matemáticas son odiosas”, “las Matemáticas son “un tostón”, “las Matemáticas son engorrosas” y “las Matemáticas no son prácticas”, que se escribirán en negro.

### Variables intra-sujeto

En la tabla siguiente se va a ir indicando si se mantiene, aumenta o disminuye el nivel de acuerdo de los alumnos sobre cada una de las variables intra-sujeto que hemos considerado en este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Variación experimentada |
|-------------------------------------|-------------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Aumenta                 |
| Las Matemáticas son odiosas         | Aumenta                 |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Aumenta                 |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Aumenta                 |
| Las Matemáticas son interesantes    | Aumenta                 |
| Las Matemáticas son precisas        | Aumenta                 |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Disminuye               |
| Las Matemáticas son formativas      | Aumenta                 |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Aumenta                 |
| Las Matemáticas son divertidas      | Se mantiene             |
| Me gustan las Matemáticas           | Aumenta                 |

Tabla 36: Variación experimentada por las variables intra-sujeto, en el primer apartado.

Observando esta tabla, se puede decir que aumenta la mayoría de las afirmaciones positivas y negativas, excepto “las Matemáticas son

divertidas” que se mantiene, y “las Matemáticas son engorrosas” que disminuye.

## Variables inter-sujeto

En este caso se va a resumir cuál es la variación experimentada por cada una de las submuestras consideradas en las distintas variables inter-sujeto después del estudio del tema y de las técnicas, y cuáles son los máximos y los mínimos en ambos momentos.

## Género

Se pasa a agrupar en las tablas siguientes la variación experimentada en cada una de las variables intra-sujeto por las dos submuestras que determina la variable “género”, y los máximos en cada una de las variables, en ambos momentos.

## Variaciones

En la tabla siguiente se indica cuál es la variación experimentada en cada una de las variables intra-sujeto por los dos valores de la variable “género”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|-------------------------------------|----------------------|----------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Se mantiene          | Aumenta              |
| Las Matemáticas son odiosas         | Aumenta              | Aumenta              |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Aumenta              | Aumenta              |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Aumenta              | Aumenta              |
| Las Matemáticas son interesantes    | Disminuye            | Aumenta              |
| Las Matemáticas son precisas        | Disminuye            | Aumenta              |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Aumenta              | Disminuye            |
| Las Matemáticas son formativas      | Aumenta              | Aumenta              |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Se mantiene          | Aumenta              |
| Las Matemáticas son divertidas      | Aumenta              | Disminuye            |
| Me gustan las Matemáticas           | Disminuye            | Disminuye            |

Tabla 37: Variación experimentada por la variable “género”, en el primer apartado.

Obsérvese que las seis variables intra-sujeto que se pueden considerar positivas respecto de las Matemáticas, en los hombres no varían de la misma forma después del estudio del tema y de las técnicas que en las mujeres, pues mientras en los hombres aumentan tres afirmaciones y las otras tres disminuyen. En las mujeres las afirmaciones que aumentan no son las mismas que en los hombres; en ellas aumentan



cuatro afirmaciones y disminuyen dos, luego en la mujeres aumentan más variables intra-sujeto positivas que en los hombres.

Si observamos las variables intra-sujeto que podríamos llamar negativas, los hombres sólo cuentan en todas ellas con se mantienen y aumentan. En las mujeres disminuye una variable y aumentan las demás. Por tanto, se puede decir que domina en ambos géneros el carácter negativo hacia las Matemáticas, aunque en las mujeres es menor.

## Máximos

Se destaca, en la tabla que viene a continuación, qué grupo de alumnos alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos. No se construye otra tabla para los valores mínimos ya que al tener sólo dos casos posibles, si uno es el máximo, el otro será el mínimo.

| Variable intra-sujeto               | Antes es mayor | Después es mayor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Las mujeres    | Las mujeres      |
| Las Matemáticas son odiosas         | Los hombres    | Los hombres      |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Los hombres    | Los hombres      |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Los hombres    | Los hombres      |
| Las Matemáticas son interesantes    | Las mujeres    | Las mujeres      |
| Las Matemáticas son precisas        | Los hombres    | Los hombres      |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Los hombres    | Los hombres      |
| Las Matemáticas son formativas      | Los hombres    | Las mujeres      |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Las mujeres    | Los hombres      |
| Las Matemáticas son divertidas      | Las mujeres    | Las mujeres      |
| Me gustan las Matemáticas           | Los hombres    | Los hombres      |

Tabla 38: Máximos de la variable “género”, en el primer apartado, antes/después.

El máximo se mantiene en el mismo género después del estudio del tema y de las técnicas en casi todos los casos, salvo en “las Matemáticas son formativas”, “las Matemáticas no son prácticas” y “las Matemáticas son divertidas”, que se invierte.

En las afirmaciones positivas, antes del estudio del tema y de las técnicas, el mayor número de máximos lo alcanzan los hombres, y después del citado estudio, los hombres y las mujeres cuentan con el mismo número.

En los aspectos negativos podemos decir que son los hombres los que alcanzan mayor número de máximos, en ambos momentos.

## Año de realización

Se resumen ahora las variaciones que experimenta la variable inter-sujeto “año de realización”, respecto de cada una de las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En los años de realización no figura en el primer apartado el 2003 ó anteriores, ya que la idea de considerar la necesidad de estudiar las distintas variables intra-sujetos del primer apartado fue posterior a estos años.

## Variaciones

En la tabla siguiente se refleja la variación experimentada en cada una de las variables intra-sujeto por los tres valores de la variable “año de realización” después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Variación en 2004 | Variación en 2005 | Variación en 2006 |
|-------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| Las Matemáticas son odiosas         | Disminuye         | Aumenta           | Aumenta           |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Disminuye         | Aumenta           | Aumenta           |
| Las Matemáticas son interesantes    | Aumenta           | Disminuye         | Aumenta           |
| Las Matemáticas son precisas        | Disminuye         | Se mantiene       | Aumenta           |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Disminuye         | Disminuye         | Aumenta           |
| Las Matemáticas son formativas      | Aumenta           | Aumenta           | Se mantiene       |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Aumenta           | Disminuye         | Aumenta           |
| Las Matemáticas son divertidas      | Aumenta           | Disminuye         | Disminuye         |
| Me gustan las Matemáticas           | Disminuye         | Aumenta           | Disminuye         |

Tabla 39: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el primer apartado.

Para los alumnos que respondieron las encuestas en 2003/2004 aumentan más afirmaciones positivas que para los demás en las variables intra-sujeto positivas respecto de las Matemáticas.

También son para los alumnos que respondieron las encuestas en 2003/2004 para los que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye mayor número de afirmaciones negativas.

## Máximos

En esta tabla se destaca qué grupo de alumnos alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto               | Antes es mayor | Después es mayor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | 2004           | 2004             |
| Las Matemáticas son odiosas         | 2004           | 2006             |
| Las Matemáticas son imprescindibles | 2005           | 2005             |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | 2004 y 2006    | 2006             |
| Las Matemáticas son interesantes    | 2006           | 2006             |
| Las Matemáticas son precisas        | 2004           | 2006             |
| Las Matemáticas son engorrosas      | 2005           | 2006             |
| Las Matemáticas son formativas      | 2006           | 2006             |
| Las Matemáticas no son prácticas    | 2005           | 2006             |
| Las Matemáticas son divertidas      | 2004           | 2006             |
| Me gustan las Matemáticas           | 2006           | 2006             |

Tabla 40: Máximos de la variable “año de realización”, en el primer apartado, antes/después.

El mayor número de máximos de las afirmaciones que hemos llamado positivas lo consiguen los alumnos que respondieron las encuestas en 2005/2006, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

Si se piensa en las cinco afirmaciones que se han considerado negativas, se puede decir que los alumnos que respondieron las encuestas en 2003/2004 dan mayor número de máximos en aspectos negativos de las Matemáticas antes de dicho estudio; después del citado estudio son los alumnos que respondieron las encuestas en 2005/2006 los que dan mayores número de máximos.

## Mínimos

Se construye la tabla que viene a continuación para tener los valores mínimos. Por ser tres las submuestras con las que se cuenta en este caso, se puede deducir que el año que no aparece ni en la tabla anterior ni en la que sigue, será el año en que se alcanza el valor intermedio.

| Variable intra-sujeto               | Antes es menor | Después es menor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | 2006           | 2006             |
| Las Matemáticas son odiosas         | 2006           | 2004             |
| Las Matemáticas son imprescindibles | 2004           | 2004             |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | 2005           | 2004             |
| Las Matemáticas son interesantes    | 2004           | 2004             |
| Las Matemáticas son precisas        | 2005           | 2005             |
| Las Matemáticas son engorrosas      | 2006           | 2004             |
| Las Matemáticas son formativas      | 2004           | 2004             |
| Las Matemáticas no son prácticas    | 2006           | 2005             |
| Las Matemáticas son divertidas      | 2004           | 2005             |
| Me gustan las Matemáticas           | 2004           | 2004             |

Tabla 41: Mínimos de la variable “año de realización”, en el primer apartado, antes/después.

Observando la tabla, la mayoría de los seis mínimos de las afirmaciones positivas para las Matemática, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, son alcanzados por los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004, excepto el de la variable “las Matemáticas son precisas”, antes y después del citado estudio, y “las Matemáticas son divertidas”, después de dicho estudio. En este caso son los alumnos que respondieron en 2004/2005 los que obtienen el mínimo.

De las cinco afirmaciones negativas, antes del estudio del tema y de las técnicas, tienen mayor número de mínimos los alumnos que respondieron las encuestas en 2005/2006, y después de dicho estudio los que consiguen mayor número de mínimos son los del 2003/2004.

## Curso

Se van a recoger las variaciones que sufren las variables intra-sujeto de este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas, en la variable inter-sujeto “curso”. También se pondrán en sus respectiva tablas los máximos y los mínimos de las variables intra-sujeto, antes y después del citado estudio.

## Variaciones

Se continúa recogiendo en la tabla siguiente la variación experimentada por la variable inter-sujeto “curso” después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Variación en primero | Variación en segundo | Variación en tercero | Variación en cuarto | Variación en quinto |
|-------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta             |
| Las Matemáticas son odiosas         | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Disminuye           |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Se mantiene         |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Aumenta             |
| Las Matemáticas son interesantes    | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye            | Disminuye           | Aumenta             |
| Las Matemáticas son precisas        | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Disminuye           |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Disminuye            | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta             | Disminuye           |
| Las Matemáticas son formativas      | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta             |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Disminuye           |
| Las Matemáticas son divertidas      | Aumenta              | Se mantiene          | Aumenta              | Disminuye           | Disminuye           |
| Me gustan las Matemáticas           | Disminuye            | Aumenta              | Disminuye            | Disminuye           | Aumenta             |

Tabla 42: Variación experimentada por la variable “curso”, en el primer apartado.

Como viene siendo habitual, se siguen considerando variables intra-sujeto positivas y negativas. En las afirmaciones positivas los alumnos que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan en más afirmaciones positivas son los de segundo, seguidos por los de tercero.

Los alumnos que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuyen en más afirmaciones negativas respecto de las Matemáticas son los de quinto.

## Máximos

En la siguiente tabla se destacan los cursos que consiguieron mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto que se han considerado en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Antes es mayor   | Después es mayor |
|-------------------------------------|------------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Segundo          | Segundo          |
| Las Matemáticas son odiosas         | Quinto           | Primero          |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Cuarto           | Cuarto           |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Primero          | Segundo          |
| Las Matemáticas son interesantes    | Cuarto           | Primero          |
| Las Matemáticas son precisas        | Cuarto           | Cuarto           |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Quinto           | Cuarto           |
| Las Matemáticas son formativas      | Primero          | Cuarto           |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Quinto           | Segundo          |
| Las Matemáticas son divertidas      | Cuarto           | Primero          |
| Me gustan las Matemáticas           | Primero y Cuarto | Primero          |

Tabla 43: Máximos de la variable “curso”, en el primer apartado, antes/después.

En las afirmaciones positivas respecto al calificativo que le dan a las Matemáticas se puede decir que los máximos de las afirmaciones positivas se quedan en primero y cuarto, siendo los de cuarto los que consiguen mayor número de ellos, antes del citado estudio; después del citado estudio ambos alcanzan el mismo número de máximos.

En las afirmaciones negativas respecto de las Matemáticas, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que obtienen mayor número de máximos en las afirmaciones negativas son los de quinto, y después los de segundo.

## Mínimos

En la tabla que sigue se recogen los mínimos de los valores negativos alcanzados por las variables intra-sujeto consideradas en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Antes es menor | Después es menor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Cuarto         | Cuarto           |
| Las Matemáticas son odiosas         | Primero        | Cuarto           |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Segundo        | Quinto           |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Quinto         | Cuarto           |
| Las Matemáticas son interesantes    | Segundo        | Segundo          |
| Las Matemáticas son precisas        | Segundo        | Quinto           |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Cuarto         | Primero          |
| Las Matemáticas son formativas      | Segundo        | Segundo          |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Cuarto         | Cuarto           |
| Las Matemáticas son divertidas      | Segundo        | Cuarto           |
| Me gustan las Matemáticas           | Segundo        | Cuarto           |

Tabla 44: Mínimos de la variable “curso”, en el primer apartado antes/después.

En las afirmaciones positivas, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de segundo tienen valores mínimos en todas ellas. Después de dicho estudio los alumnos de segundo, cuarto y quinto están en los mínimos de las afirmaciones positivas con el mismo número cada uno.

El mayor número de los mínimos de las afirmaciones negativas, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alcanzan los alumnos de cuarto.

## Edad

En este caso son muchas las submuestras que se tienen; para que puedan aparecer todas ellas y las variaciones que experimentan, después del estudio del tema y de las técnicas, se denotará con x años la variación que sufren los alumnos de x años. Además, cuando se quiera decir que aumenta, pondremos una A; para indicar que disminuye, escribiremos D y en el caso en que tengamos que decir que se mantiene, escribiremos SM

| Variable intra-sujeto               | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 23 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|-------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Las Matemáticas son difíciles       | A       | D       | A       | A       | A       | A       | SM      | SM      | D       | D       | SM      |
| Las Matemáticas son odiosas         | A       | A       | A       | A       | A       | D       | SM      | SM      | SM      | A       | SM      |
| Las Matemáticas son imprescindibles | A       | A       | D       | A       | A       | SM      | SM      | SM      | A       | A       | SM      |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | A       | A       | A       | A       | A       | A       | D       | A       | A       | A       | D       |
| Las Matemáticas son interesantes    | A       | SM      | D       | A       | D       | A       | A       | D       | D       | A       | A       |
| Las Matemáticas son precisas        | A       | D       | A       | A       | D       | D       | D       | SM      | SM      | A       | SM      |
| Las Matemáticas son engorrosas      | D       | A       | A       | A       | D       | D       | D       | SM      | D       | A       | A       |
| Las Matemáticas son formativas      | A       | A       | SM      | A       | A       | A       | A       | D       | SM      | A       | D       |
| Las Matemáticas no son prácticas    | D       | A       | A       | A       | D       | D       | D       | A       | A       | A       | A       |
| Las Matemáticas son divertidas      | D       | A       | D       | A       | A       | D       | SM      | D       | A       | SM      | D       |
| Me gustan las Matemáticas           | SM      | A       | D       | D       | SM      | A       | A       | D       | A       | SM      | SM      |

Tabla 45: Variación experimentada por la variable “edad”, en el primer apartado.

Podemos afirmar que en los alumnos de 22 años hay un mayor aumento de afirmaciones positivas, seguidos de los de 28 años.

Se consideran ahora las afirmaciones negativas respecto de las Matemáticas; y se observa que en los alumnos de 24 y 25 años disminuyen los niveles de mayor número de afirmaciones negativas.

## Máximos

En la tabla que viene a continuación se resumen los máximos y los mínimos de las variables intra-sujeto consideradas en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Antes es mayor | Después es mayor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | 28 años        | 20 después       |
| Las Matemáticas son odiosas         | 27 años        | 28 años          |
| Las Matemáticas son imprescindibles | 29 años        | 29 años          |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | 28 y 29 años   | 27 y 28 años     |
| Las Matemáticas son interesantes    | 24 años        | 24 años          |
| Las Matemáticas son precisas        | 29 años        | 29 años          |
| Las Matemáticas son engorrosas      | 27 años        | 21 años          |
| Las Matemáticas son formativas      | 24 años        | 24 y 28 años     |
| Las Matemáticas no son prácticas    | 23 años        | 26 y 29 años     |
| Las Matemáticas son divertidas      | 26 años        | 26 años          |
| Me gustan las Matemáticas           | 26 y 29 años   | 24 años          |

Tabla 46: Máximos de la variable “edad”, en el primer apartado, antes/después.

Si se observa esta tabla, se puede ver que en las afirmaciones positivas los alumnos que alcanzan los máximos, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de 24, 26, y 29 años, siendo los alumnos de 29 años los que alcanzan mayor número de máximos. Después del citado estudio alcanzan los máximos los alumnos de 24, 26, 28 y 29 años, siendo los de 24 años los que consiguen mayor número de máximos.

Los máximos de las afirmaciones negativas, antes del estudio del tema y de las técnicas, los tienen los alumnos de 23, 27, 28 y 29 años; en este caso los que tienen mayor número de máximos son los de 27 y 28 años. Después de dicho estudio los máximos son de los alumnos de 20, 21, 26, 27, 28 y 29 años, y de ellos los de 28 años son los que tienen mayor número de máximos de afirmaciones negativas.

## Mínimos

En la tabla siguiente se tienen los mínimos de las variables intra-sujeto según “la edad”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.



| Variable intra-sujeto               | Antes es menor | Después es menor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | 24 años        | 28 y 29 años     |
| Las Matemáticas son odiosas         | 21 años        | 25 años          |
| Las Matemáticas son imprescindibles | 26 años        | 26 años          |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | 21 y 26 años   | 25 años          |
| Las Matemáticas son interesantes    | 28 años        | 23 años          |
| Las Matemáticas son precisas        | 28 años        | 26 años          |
| Las Matemáticas son engorrosas      | 28 años        | 25 años          |
| Las Matemáticas son formativas      | 20 años        | 26 años          |
| Las Matemáticas no son prácticas    | 28 años        | 24 y 25 años     |
| Las Matemáticas son divertidas      | 27 años        | 27 años          |
| Me gustan las Matemáticas           | 27 años        | 27 años          |

Tabla 47: Mínimos de la variable “edad”, en el primer apartado, antes/después.

Las afirmaciones positivas tienen sus mínimos, antes del estudio del tema y de las técnicas, en los alumnos de 20, 26, 27 y 28 años, siendo los de 27 y 28 años los que tienen mayor número de mínimos. Después de dicho estudio son los alumnos de 23, 26 y 27 años los que tienen los mínimos, y de ellos los de 26 años son los que tienen mayor número.

Los mínimos de las afirmaciones negativas son de los alumnos de 21, 24, 26 y 28 años, y los que tienen mayor número de mínimos son los de 21 y 28 años. Después del citado estudio los mínimos son de los alumnos de 24, 25, 28 y 29 años, siendo los de 25 años los que tienen mayor número de ellos.

## Especialidad

Pasamos a recoger los resultados según “la especialidad”, de modo que se puedan observar en todas y cada una de las submuestras en que hemos dividido a los alumnos, las variaciones experimentadas por cada una de las variables intra-sujeto consideradas en este apartado.

## Variaciones

Se concentran en la tabla siguiente las variaciones que experimentas las afirmaciones de este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|-------------------------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Aumenta            | Aumenta     | Se mantiene            | Aumenta              |
| Las Matemáticas son odiosas         | Aumenta            | Disminuye   | Aumenta                | Aumenta              |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Aumenta            | Se mantiene | Se mantiene            | Aumenta              |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Aumenta            | Disminuye   | Se mantiene            | Aumenta              |
| Las Matemáticas son interesantes    | Aumenta            | Aumenta     | Se mantiene            | Se mantiene          |
| Las Matemáticas son precisas        | Aumenta            | Aumenta     | Se mantiene            | Se mantiene          |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Disminuye          | Disminuye   | Disminuye              | Aumenta              |
| Las Matemáticas son formativas      | Aumenta            | Aumenta     | Aumenta                | Aumenta              |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Aumenta            | Aumenta     | Disminuye              | Se mantiene          |
| Las Matemáticas son divertidas      | Se mantiene        | Disminuye   | Aumenta                | Se mantiene          |
| Me gustan las Matemáticas           | Se mantiene        | Se mantiene | Aumenta                | Disminuye            |

Tabla 48: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el primer apartado.

En la tabla se puede ver que los alumnos de Educación Infantil son los que experimentan mayor número de aumentos en las afirmaciones positivas, seguidos por los de la licenciatura de Matemáticas y por los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

En las afirmaciones negativas los alumnos que experimentan mayor número de disminuciones son los de la licenciatura de Matemáticas, seguidos por los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

## Máximos

En la tabla que viene a continuación se recogen los máximos alcanzados en cada una de las variables intra-sujeto según las especialidades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Antes es mayor         | Después es mayor       |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Magisterio no Infantil | Educación Infantil     |
| Las Matemáticas son odiosas         | Educación Infantil     | Educación Infantil     |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Matemáticas            | Otras especialidades   |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Magisterio no Infantil | Ed. Infantil y Otras   |
| Las Matemáticas son interesantes    | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas son precisas        | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Las Matemáticas son formativas      | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Magisterio no Infantil | Educación Infantil     |
| Las Matemáticas son divertidas      | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Me gustan las Matemáticas           | Matemáticas            | Matemáticas            |

**Tabla 49: Máximos de la variable “especialidad”, en el primer apartado antes/después.**

Se ve bastante claro que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los alumnos de la licenciatura de Matemáticas los que consiguen todos los máximos de las afirmaciones positivas.

Los alumnos que tienen mayor número de máximos de las afirmaciones negativas, antes del estudio del tema y de las técnicas, son de Magisterio de otras especialidades distintas a Educación Infantil. Después de dicho estudio, los alumnos que tienen mayor número de máximos son los de Educación Infantil.

## Mínimos

La tabla siguiente deja ver todos los mínimos de las distintas variables intra-sujeto consideradas en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto               | Antes es menor         | Después es menor       |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas son odiosas         | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Educación Infantil     | Magisterio no Infantil |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas son interesantes    | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Las Matemáticas son precisas        | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas son formativas      | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Matemáticas            | Matemáticas            |
| Las Matemáticas son divertidas      | Magisterio no Infantil | Educación Infantil     |
| Me gustan las Matemáticas           | Magisterio no Infantil | Educación Infantil     |

**Tabla 50: Mínimos de la variable “especialidad”, en el primer apartado, antes/después.**

En las afirmaciones positivas los distintos mínimos los alcanzan los alumnos de Magisterio, siendo los de otras especialidades diferentes de Educación Infantil los que obtienen mayor número de ellos en ambos momentos.

En las afirmaciones negativas todos los valores mínimos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alcanzan los alumnos de la licenciatura de Magisterio.

## Bachillerato

Se considera ahora, en la tabla siguiente, la variación experimentada después del estudio del tema y de las técnicas por la variable inter-sujeto “bachillerato”.

| Variable intra-sujeto               | Otro        | Ciencias    | Letras      | F P         |
|-------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Disminuye   | Aumenta     | Aumenta     | Se mantiene |
| Las Matemáticas son odiosas         | Se mantiene | Aumenta     | Aumenta     | Disminuye   |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Se mantiene | Aumenta     | Aumenta     | Se mantiene |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Se mantiene | Aumenta     | Aumenta     | Disminuye   |
| Las Matemáticas son interesantes    | Se mantiene | Aumenta     | Se mantiene | Aumenta     |
| Las Matemáticas son precisas        | Disminuye   | Se mantiene | Aumenta     | Se mantiene |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Se mantiene | Aumenta     | Disminuye   | Se mantiene |
| Las Matemáticas son formativas      | Se mantiene | Aumenta     | Aumenta     | Se mantiene |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Se mantiene | Aumenta     | Disminuye   | Disminuye   |
| Las Matemáticas son divertidas      | Se mantiene | Aumenta     | Disminuye   | Aumenta     |
| Me gustan las Matemáticas           | Disminuye   | Disminuye   | Aumenta     | Aumenta     |

Tabla 51: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el primer apartado.

En las afirmaciones positivas los alumnos que, después del estudio del tema y de las técnicas experimentan mayor número de aumentos son los de Ciencias, seguidos por los de Letras y por los de F P, al mismo nivel.

El mayor número de disminuciones en las afirmaciones negativas lo experimentan los alumnos que proceden de F P, seguidos por los de Letras.

En la tabla que viene a continuación se destacan los grupos de alumnos que alcanzan los máximos en las distintas afirmaciones, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto               | Antes es mayor | Después es mayor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Letras         | Letras           |
| Las Matemáticas son odiosas         | F P            | Otro             |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Otro           | Otro             |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Otro y F P     | Letras           |
| Las Matemáticas son interesantes    | Ciencias       | F P              |
| Las Matemáticas son precisas        | F P y Otro     | Otro             |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Letras         | F P              |
| Las Matemáticas son formativas      | F P            | F P              |
| Las Matemáticas no son prácticas    | F P            | Ciencias         |
| Las Matemáticas son divertidas      | Ciencias       | F P              |
| Me gustan las Matemáticas           | Ciencias       | F P              |

Tabla 52: Máximos de la variable “bachillerato”, en el primer apartado, antes/después.

En las afirmaciones positivas los alumnos que consiguen mayor número de máximos, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de Ciencias y los de F P, al mismo nivel. Después del citado estudio los alumnos que obtienen mayor número de máximos siguen siendo los de F P.

Los alumnos que alcanzan mayor número de máximos en las afirmaciones negativas, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de F P; después de dicho estudio son los de Letras.

## Mínimos

La tabla siguiente permite ver los mínimos que alcanzan, en las distintas variables intra-sujeto consideradas en este apartado, los alumnos que hemos clasificado según los distintos bachilleratos cursados.

| Variable intra-sujeto               | Antes es menor | Después es menor |
|-------------------------------------|----------------|------------------|
| Las Matemáticas son difíciles       | Ciencias       | Otro             |
| Las Matemáticas son odiosas         | Ciencias       | F P              |
| Las Matemáticas son imprescindibles | Letras         | Letras           |
| Las Matemáticas son “un tostón”     | Ciencias       | F P              |
| Las Matemáticas son interesantes    | Letras         | Letras           |
| Las Matemáticas son precisas        | Letras         | Otro             |
| Las Matemáticas son engorrosas      | Otro           | Otro             |
| Las Matemáticas son formativas      | Letras         | Otro             |
| Las Matemáticas no son prácticas    | Otro           | F P y Otro       |
| Las Matemáticas son divertidas      | F P y Otro     | Letras           |
| Me gustan las Matemáticas           | Letras         | Otro             |

Tabla 53: Mínimos de la variable “bachillerato”, en el primer apartado, antes/después.

Los alumnos que toman mayor número de mínimos en las afirmaciones positivas, antes del estudio del tema y de las técnicas son los de Letras, y después son los de Letras y los que llamamos “Otro” con el mismo número.

En las afirmaciones negativas, antes del estudio del tema y de las técnicas, el mayor número de mínimos lo alcanzan los alumnos Ciencias; y después de dicho estudio son los de F P y Otro al con el mismo número.

#### 5.3.4. Estudio Estadístico del segundo apartado de las Encuestas

Se pasa a trabajar con los resultados obtenidos, como consecuencia de las respuestas que han dado los alumnos, en el segundo apartado de las dos encuestas.

##### 5.3.4.1. Dominio total de las Matemáticas

Vamos a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto los alumnos están de acuerdo con la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes dominar totalmente las Matemáticas: ser licenciado en Matemáticas. En este caso se toman las afirmaciones *dominio total de las Matemáticas*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se le asignará como nombre, al factor de muestras relacionadas, antes/después, y se marcará el número de niveles, dos. Se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en la idea de que “se deban dominar totalmente las Matemáticas”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados: la *traza de Pillai*, la *lambda de Wilks*, la *traza de Hotelling*, y la *raíz mayor de Roy* dan  $p=0.002<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico *F* (la no corregida: esfericidad asumida, y las tres corregidas: *Greenhouse-Geisser*, *Huynh-Feldt* y *Límite inferior*) también resultan ser  $p=0.002<0.05$ , se puede afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos,

antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la media total poblacional vale cero, da también  $0.002 < 0.05$ , luego se tiene que rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que se obtuvo antes: después del estudio del tema y de las técnicas disminuye considerablemente el número de los alumnos que no están nada de acuerdo con que el dominio de las Matemáticas deba ser total. Por tanto, en el estudio de frecuencias se puede decir que, después del citado estudio, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas”.

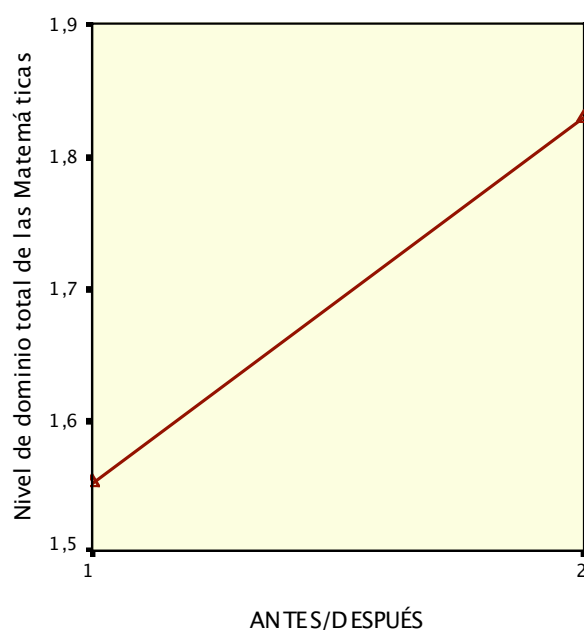


**Figura 321: Estimación del “dominio total de las Matemáticas” antes/después.**

En este caso los valores que le asignamos a las afirmaciones “dominio total de las Matemáticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, fueron: 1=“nada de acuerdo”, 2=“poco de acuerdo”, 3=“bastante de acuerdo” y 4=“muy de acuerdo”, luego al aumentar el nivel aumenta el grado de acuerdo, y recíprocamente. Teniendo en cuenta esto y observando la figura que precede, se puede afirmar que, después de dicho estudio, aumenta la idea de que para proponer actividades a los niños de Educación Infantil “se debe tener un dominio total de las Matemáticas”.

## Género

Se considera ahora como variable inter-sujeto “el género”, para estudiar si la idea de que se debe tener un dominio total de las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, difiere entre hombres y mujeres. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los siguientes niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados:  $p=0.943>0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en el “dominio total de las Matemáticas”, comparando los géneros, y  $p=0.002<0.05$  cuando se considera dentro del mismo género, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también tienen los mismos valores. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos, antes y después del citado estudio, dentro del mismo género, pero no existe diferencia entre los géneros.

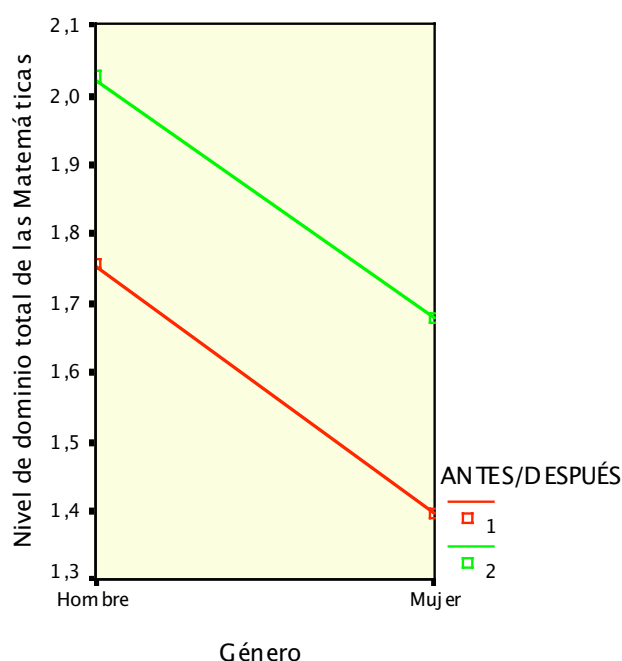


**Figura 322: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “género”.**

La figura precedente dice que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, prevalece la idea de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” en los hombres más que en las mujeres. En todos ellos (hombres y mujeres), después del citado estudio, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas”.



## Año de realización

Se pasa a tomar como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar si la idea de que se debe tener un dominio total de las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “año de realización”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.157>0.05$  cuando se considera la influencia del “año de realización” en el “dominio total de las Matemáticas” entre los distintos años, y sale  $p=0.004<0.05$  cuando se considera dentro del mismo año de realización. Por tanto, se puede confirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas en el mismo año de realización de la encuesta, pero no existen diferencias significativas entre los años.

Para comparar los distintos años de realización se elige Post hoc (o a posteriori); en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso se observa que sólo entre los años 2004 y 2006 los niveles críticos dan  $p=0.038<0.05$ . En los demás casos son mayores que 0.05, luego sólo entre estos dos años hay diferencias significativas. Este resultado se corrobora también con los gráficos que vienen a continuación.

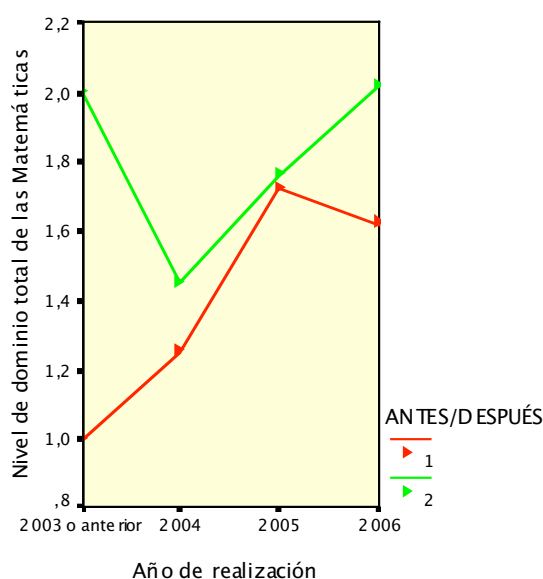


**Figura 323: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”.**

La figura precedente muestra que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2004/2005 son los que están más de acuerdo con que “se debe tener dominio total de las Matemáticas”, y los que las respondieron en el curso 2002/2003 ó anteriores, los que están menos de acuerdo. Para que quede más claro cuál es el máximo después del citado estudio podemos observar la figura siguiente. Después de dicho estudio aumenta para todos los alumnos la idea de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas”.

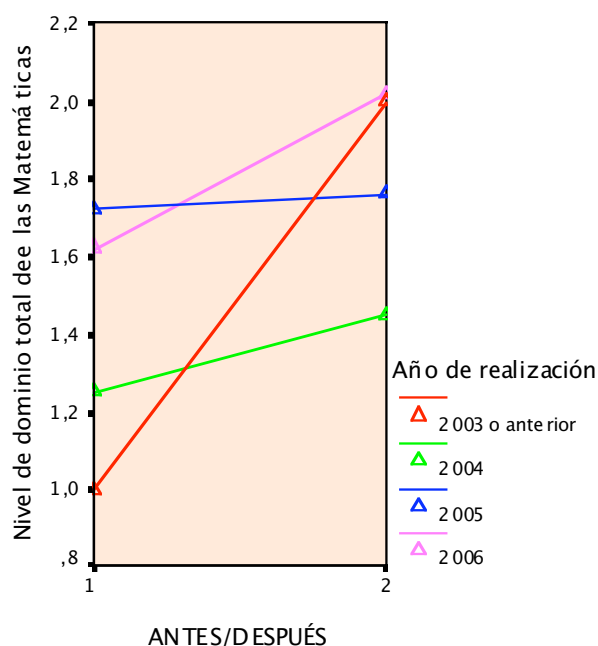


**Figura 324: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que precede informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, el máximo de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” es de los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores y de los de 2005/2006, y el mínimo es de los alumnos del curso 2003/2004.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso”, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver cómo influye en la opinión de los alumnos la idea de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego la idea de que “se

debe tener un dominio total de las Matemáticas” no parece depender del “curso”.

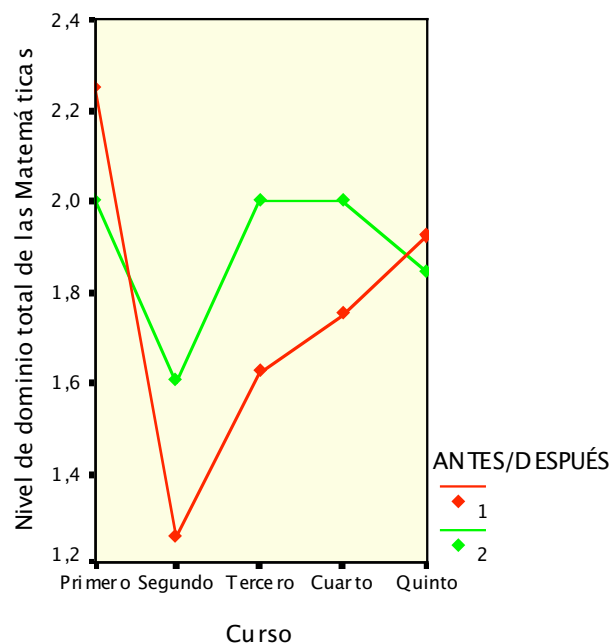


**Figura 325: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “curso”.**

Como se puede ver en este gráfico, los alumnos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas”, son los de primero, y los que están menos de acuerdo los de segundo. Después del mencionado estudio siguen siendo los alumnos de segundo los que están menos de acuerdo y los de primero, tercero y cuarto los que están más de acuerdo.

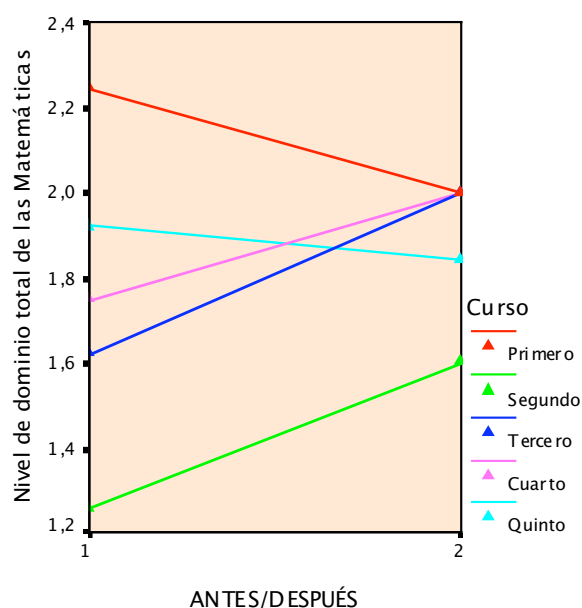


**Figura 326: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “curso”.**

Esta figura confirma lo que se decía en la anterior. La hemos añadido porque en la anterior quedaban muy próximos los niveles. Además, dice que para los alumnos de segundo, tercero y cuarto, después del estudio del tema y de las técnicas aumenta la idea de que para proponer actividades para Educación Infantil “se debe tener un dominio total de las Matemáticas”; para los demás disminuye.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad”, para estudiar si las opiniones de los alumnos sobre que se debe tener un dominio total de las Matemáticas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dependen de “la edad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos obtenidos son  $p=0.018 < 0.05$  cuando se considera la influencia de “la edad” en el “dominio total de las Matemáticas”, dentro de la misma edad, y  $p=0.048 < 0.05$  cuando se considera entre las distintas edades. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos antes y después del citado estudio dentro de la misma edad y entre edades distintas.

Para comparar las distintas edades se elige Post hoc; el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para

el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias de las edades (una con otra, una con todas las demás, dos con dos, etc.). En este caso se observa que todos los niveles críticos son mayores que 0.05, esto quiere decir que este estadístico no ha encontrado diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos de las distintas edades.

Se trabaja con las pruebas no paramétricas para ver si se encuentran las diferencias significativas comparando las distintas edades. La razón de hacer el estudio mediante las pruebas no paramétricas es porque, como ya hemos comentado, no necesitan establecer supuestos exigentes sobre las poblaciones de donde se extraen las muestras, y consideramos que éste es el caso que nos ocupa.

Ahora vamos a utilizar las pruebas no paramétricas de Kruskal-Wallis para varias muestras independientes. Los niveles críticos que resultan son  $p=0.049<0.05$  para las respuestas que dieron antes del estudio del tema y de las técnicas y  $p=0.194>0.05$  para las respuestas que dieron después, luego se puede decir que existen diferencias muy significativas para las respuestas que dieron antes del citado estudio, y no existen diferencias significativas para las que dieron después.

Con objeto de encontrar entre cuáles hay diferencias significativas se comparan por pares las distintas edades; para ello se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: los alumnos de 19 y los de 20 años, los de 19 y los de 21, etc., hasta agotar todos los pares. En la tabla que viene a continuación se destacan sólo aquellos casos en que hay diferencias significativas.

| Edades | Niveles críticos antes | Niveles críticos después |
|--------|------------------------|--------------------------|
| 19—24  |                        | $p=0.021<0.05$ .         |
| 20—22  | $p=0.018<0.05$ .       |                          |
| 20—23  | $p=0.029<0.05$ .       |                          |
| 20—26  | $p=0.034<0.05$ .       |                          |
| 20—27  |                        | $p=0.022<0.05$ .         |
| 20—28  | $p=0.013<0.05$ .       |                          |
| 21—22  | $p=0.045<0.05$ .       |                          |
| 21—23  |                        | $p=0.035<0.05$ .         |
| 21—24  |                        | $p=0.012<0.05$ .         |
| 21—27  | $p=0.045<0.05$ .       | $p=0.001<0.05$ .         |
| 21—28  | $p=0.030<0.05$ .       |                          |

**Tabla 54: Probabilidades de error en la significación de “dominio total de las Matemáticas”, antes o después, por “edad”. Pruebas no paramétricas.**

Todos los demás niveles de significación son mayores que 0.05, luego sólo entre las parejas que hemos destacado hay diferencias significativas.

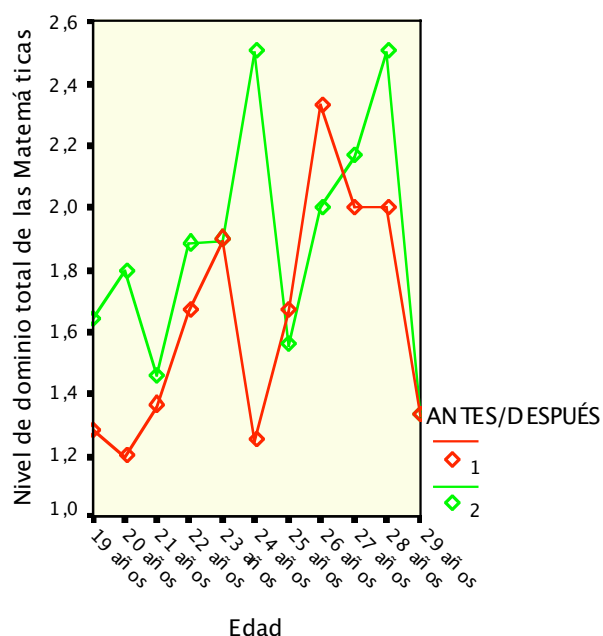


**Figura 327: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “edad”.**

Como se puede ver en la figura precedente, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” son los que tenían, en el momento de responder las encuestas, 26 años, y los que están menos de acuerdo son los de 20 años. Después de dicho estudio, los alumnos que están más de acuerdo son los de 24 y 28 años, y los que están menos de acuerdo los de 29 años. Para ver con mayor claridad todo lo que aquí se afirma, se toma la figura que viene a continuación.

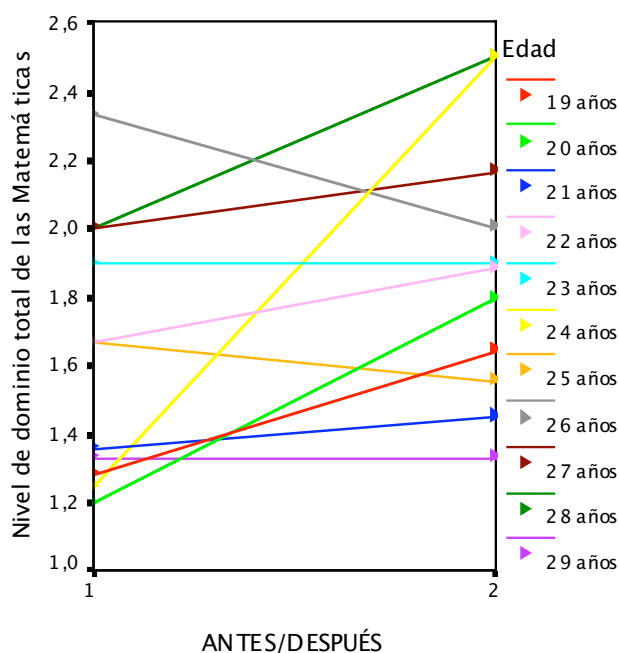


**Figura 328: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “edad”.**

En esta figura se puede ver que, después del estudio del tema, los alumnos que tenían 19, 20, 21, 22, 24, 27 ó 28 años están más de acuerdo en que para proponer actividades para los niños de Educación Infantil “se debe tener un dominio total de las Matemáticas”; prácticamente se mantiene para los que tenían 23 ó 29 años y disminuye para los de 25 y 26 años.

## Especialidad

Se considera como variable inter-sujeto “la especialidad”, en el modelo lineal general de medidas repetidas, para ver si influye en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se rechaza la hipótesis de que esta afirmación dependa de “la especialidad”.

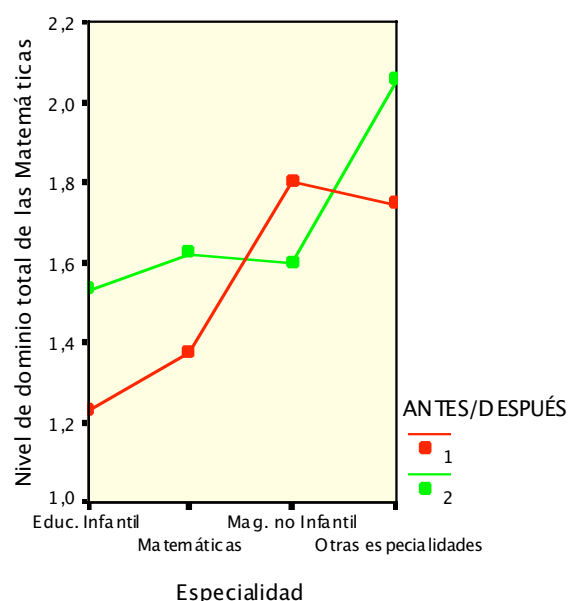


**Figura 329: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad”.**

Esta figura señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, y los alumnos que están menos de acuerdo son los de Educación Infantil. Después del citado estudio los alumnos de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas son los que están más de acuerdo, y los de Educación Infantil siguen siendo los que menos.

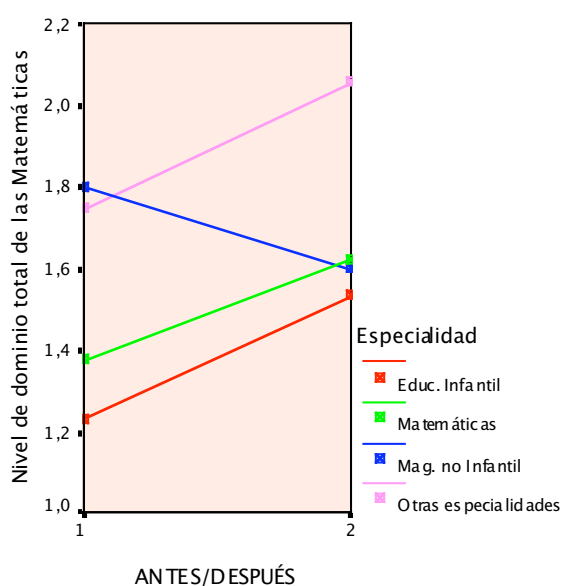


**Figura 330: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad”.**



La figura que precede indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” en las especialidades de: Maestro de Educación Infantil, licenciado en Matemáticas y Otras especialidades, y disminuye en Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Pasamos a estudiar cómo influye la variable inter-sujeto “bachillerato” en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego parece ser que la idea de que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

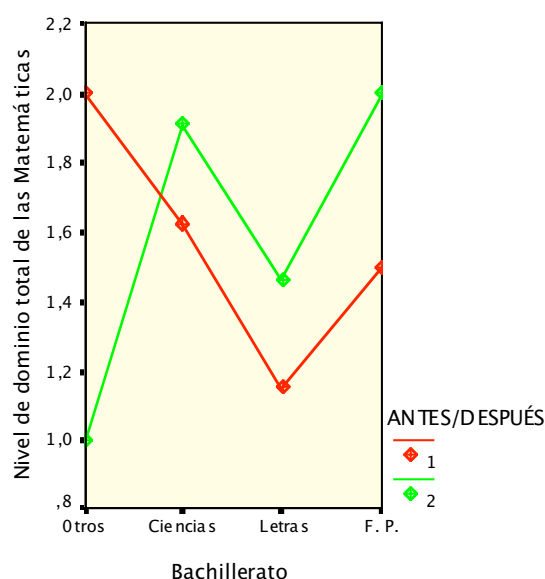


**Figura 331: Estimación de “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura apunta que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo en que se debe tener un dominio total de Matemáticas son los que llamamos Otros —alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años—, y los que están menos de acuerdo son los que cursaron el bachillerato de Letras. Después de dicho estudio, los que están más de acuerdo son los que cursaron el bachillerato de Ciencias y los que están menos de

acuerdo son los que llamamos Otros. Como algunos niveles están muy próximos, se elige la figura siguiente.

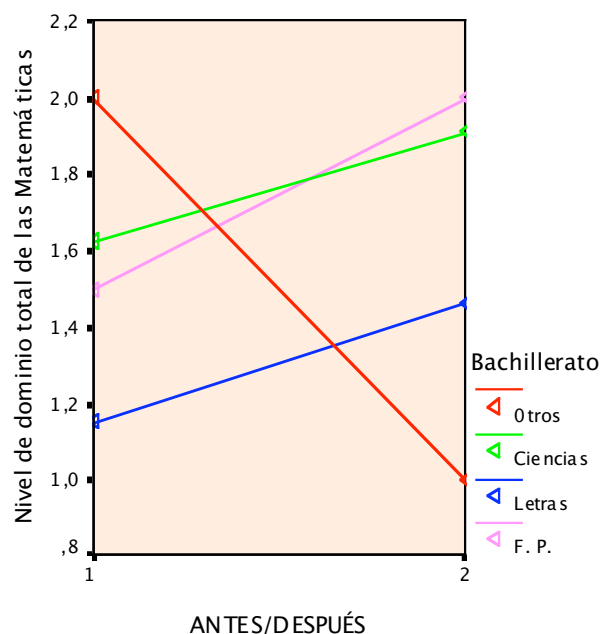


Figura 332: Ampliación de la comparación: “dominio total de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato”.

Como se puede observar en la figura que precede, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el nivel de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de las Matemáticas” para los alumnos que cursaron el bachillerato de Letras, de Ciencias y para los de Formación Profesional, y disminuye para los que llamamos Otros.

Los niveles críticos obtenidos al trabajar “dominio total de las Matemáticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, los recogemos en la tabla que viene a continuación.

|                                         | Momento                         | Interacción                                       | Figura |
|-----------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>DOMINIO TOTAL de las Matemáticas</b> | Antes / después: $p=0.002^{**}$ |                                                   | 317    |
|                                         | Antes / después: $p=0.002^{**}$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.934$       | 318    |
|                                         | Antes / después: $p=0.004^{**}$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.157$          | 319-20 |
|                                         | Antes / después: $p=0.359$      | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.393$        | 321-2  |
|                                         | Antes / después: $p=0.018^{*}$  | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.048^{*}$     | 323-4  |
|                                         | Antes / después: $p=0.209$      | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.642$ | 325-6  |
|                                         | Antes / después: $p=0.931$      | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.498$ | 327-8  |

Tabla 55: “Dominio total de las Matemáticas”.  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.2. Dominio aceptable de las Matemáticas

Se pasa a estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto los alumnos están de acuerdo con la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes dominar a un nivel aceptable, un poco más de lo que se da en Bachillerato, los contenidos matemáticos que tengan alguna repercusión en Educación Infantil. En este caso se toman las afirmaciones *dominio aceptable de las Matemáticas*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.026<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.026<0.05$ , se puede afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.026<0.05$ , luego se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: mayoritariamente responden que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo (72% antes del estudio del tema y de las técnicas y 82% después).

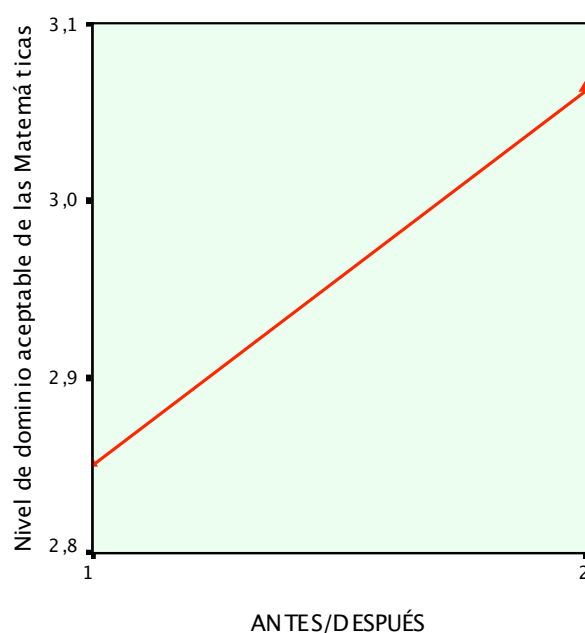


**Figura 333: Estimación del “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después.**

Los cuatro valores que se asignan a la variable “dominio aceptable de las Matemáticas” oscilan, como viene siendo habitual, entre 4 —muy de acuerdo—, y 1 —nada de acuerdo—, luego se puede decir que al aumentar el grado de acuerdo, aumenta el número asignado, y a la inversa. Por tanto, esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el grado de acuerdo con la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”.

## Género

Se pasa a estudiar si el nivel de acuerdo de los alumnos con que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “género”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a los estadísticos multivariados y los asociados al estadístico F  $p=0.038<0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en el “dominio aceptable de las Matemáticas”, dentro del mismo género, y  $p=0.285>0.05$  cuando se considera entre los géneros. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos antes y después del citado estudio dentro del mismo género y no existen diferencias significativas entre los géneros.

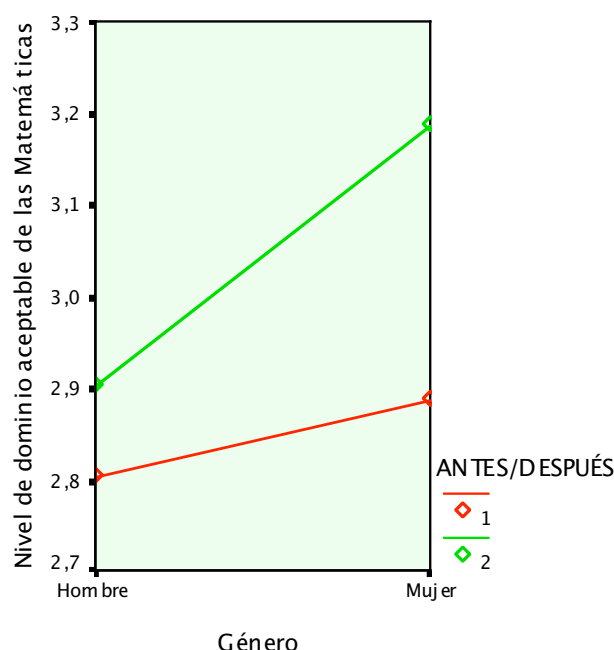


**Figura 334: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “género”.**

Se puede ver en esta figura que, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres están más de acuerdo que los hombres con que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, aumentando en ambos géneros después del mencionado estudio, siendo el incremento mayor en las mujeres que en los hombres.

### Año de realización

Se analiza cómo influye la variable inter-sujeto “año de realización” de la encuesta en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona el modelo, luego “el año de realización” no explica la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”.

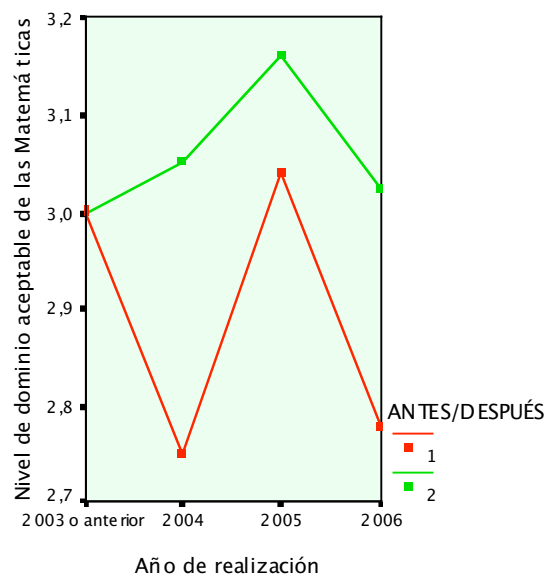


**Figura 335: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”.**

Como se observa en esta figura, después del estudio del tema y de las técnicas, en todos los alumnos aumenta el nivel de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”. Los que están más de acuerdo, tanto antes como después de dicho estudio, son los que respondieron las encuestas en el curso 2004/2005.

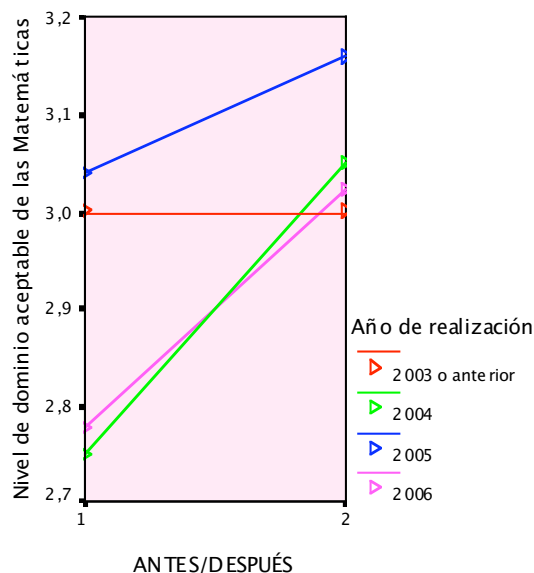


**Figura 336: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “año de realización”.**

Como hay niveles que quedaban muy próximos, cogemos esta figura para completar y confirmar lo que se dice la anterior. En ella se ve

muy claro que los alumnos que respondieron ambas encuestas el curso 2004/2005 son los que están más de acuerdo. Casi en todos los años en los que se han planteado las encuestas, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, excepto en el año 2002/2003 ó anteriores, que se mantiene.

## Curso

Se pasa a analizar cómo influye la variable inter-sujeto “curso” en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” no depende significativamente del “curso” en que estuvieran matriculados los alumnos.

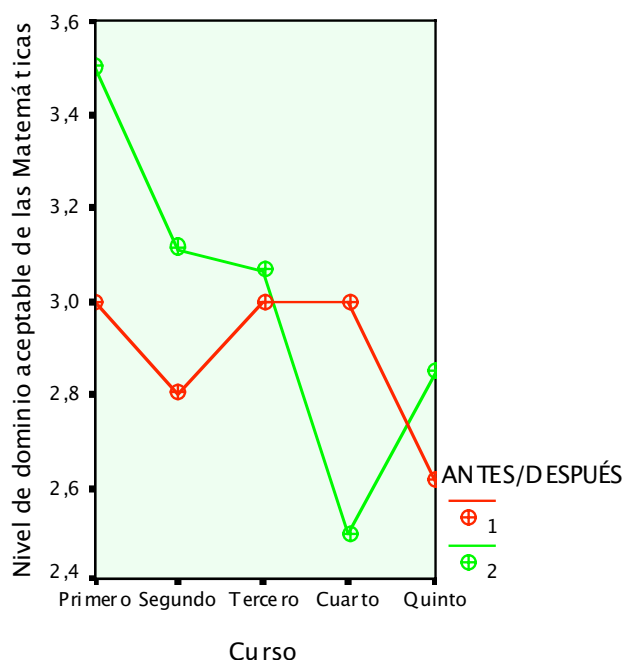


**Figura 337: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “curso”.**

En esta figura se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” son los matriculados en primero, tercero o cuarto, y los que están menos de acuerdo son los de

quinto. Después del citado estudio, los alumnos que están más de acuerdo son los de primero, y los que están menos de acuerdo los de cuarto. Como los niveles quedan muy próximos, se toma la figura siguiente para poder contrastarlo mejor.

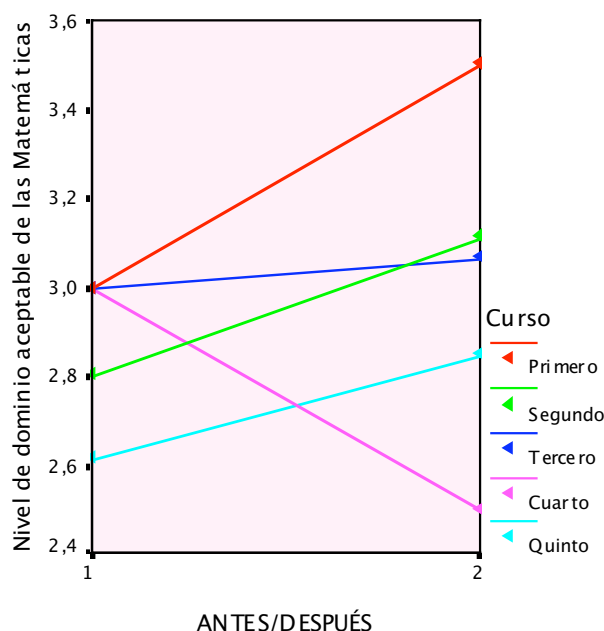


**Figura 338: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “curso”**

La figura que precede confirma lo que se decía antes y, además, informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, en casi todos los alumnos aumenta la opinión de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, excepto en los que estaban matriculados en cuarto, que disminuye.

## Edad

Se estudia la influencia de “la edad” en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego “la edad” que tuvieron los alumnos no parece influir en la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”.



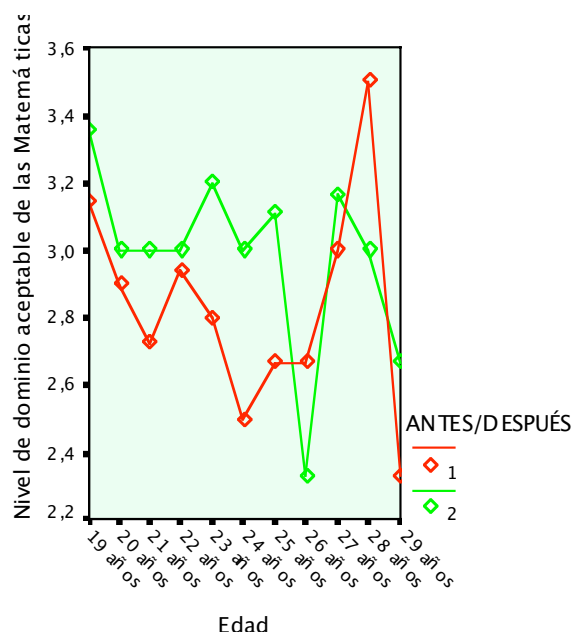


**Figura 339: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “edad”.**

Como se puede ver en esta figura, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” son los que en el momento de responder a las encuestas tenían 28 años y los que están menos de acuerdo son los que tenían 29 años. Después de dicho estudio, pasan a ser los que tenían 19 años los que están más de acuerdo y los de 26 los que menos.

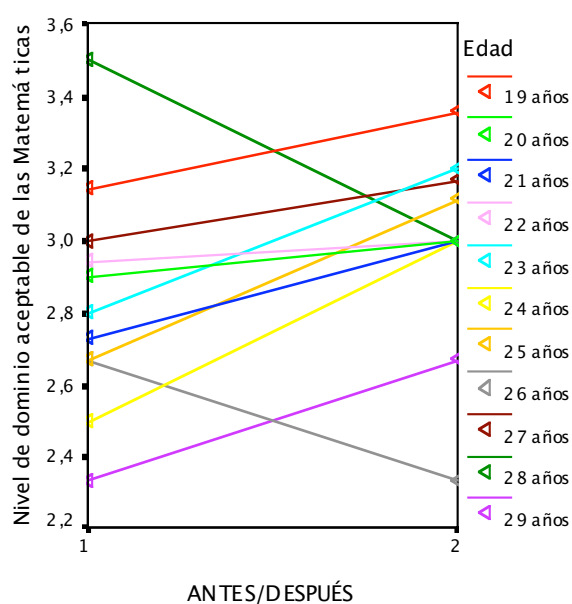


**Figura 340: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “edad”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas se ve en esta figura que para casi todos aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, menos para los alumnos que tenían 26 ó 28 años que disminuye. Se utiliza esta figura porque son muchas las submuestras que se tienen y viene bien considerar las dos figuras para poder hacer todas esas afirmaciones respecto de “la edad”.

## Especialidad

Se toma “la especialidad” como variable inter-sujeto para ver cómo influye en los alumnos la idea de el que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “la especialidad” que cursaran los alumnos parece no tener repercusión sobre la afirmación: “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas para preparar actividades para Educación Infantil”.

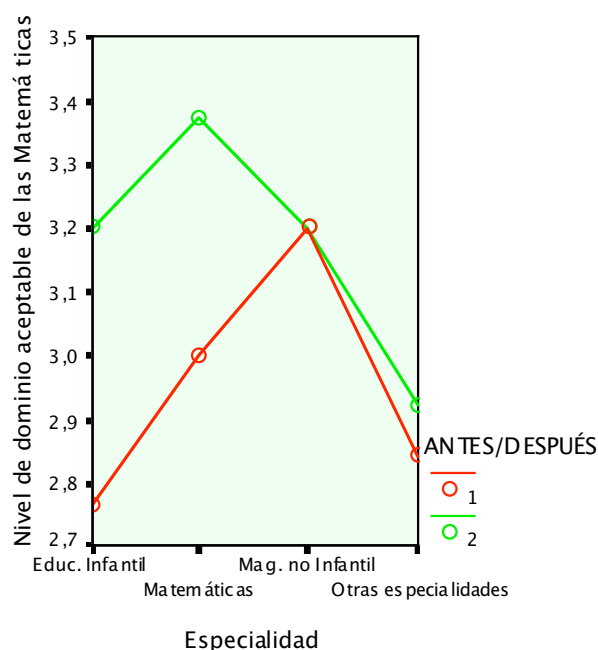


**Figura 341: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad”.**

La figura que precede apunta que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que se debe tener un dominio aceptable de Matemáticas son los de Magisterio de una rama distinta de Educación Infantil, y los que están menos de acuerdo

son los de Educación Infantil. Después del mencionado estudio, los alumnos que están más de acuerdo son los de la licenciatura de Matemáticas, y los que están menos de acuerdo son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

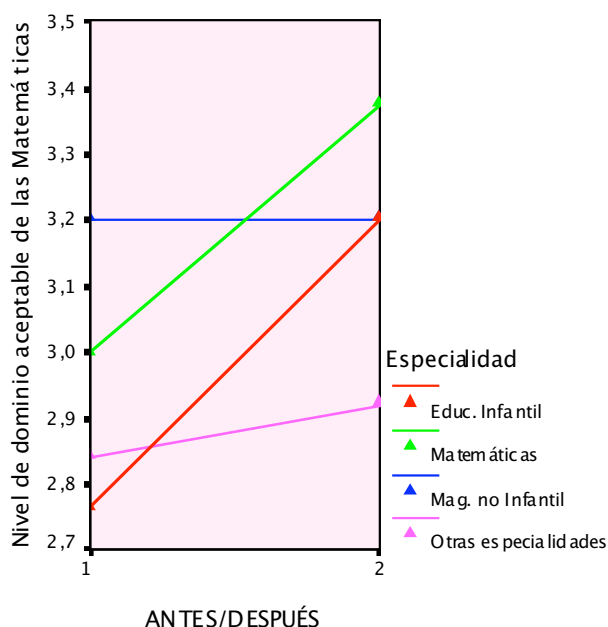


**Figura 342: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “especialidad”.**

Para que se vea mejor cómo están los distintos niveles, se escoge esta figura en la que, además, se puede apreciar que, después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todas las especialidades aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, excepto para los alumnos de Magisterio de especialidad distinta de Educación Infantil, que se mantiene.

## Bachillerato

Se elige como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Matemáticas” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona; por tanto se puede afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas” no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

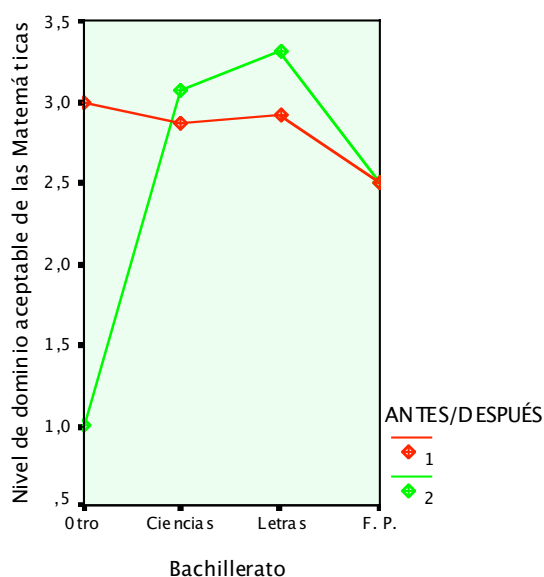


**Figura 343: Estimación de “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato”.**

Se observa en esta figura que, antes del estudio del tema y de las técnicas, casi no hay diferencias entre las opiniones de los alumnos, siendo los alumnos que llamamos Otros —acceso a la Universidad para mayores de 25 años— los que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”, y los de Formación Profesional los que están menos de acuerdo. Después de dicho estudio, los que están más de acuerdo son los que proceden del bachillerato de Letras y los que están menos de acuerdo son precisamente los que antes estaban más de acuerdo (los que llamamos Otros).

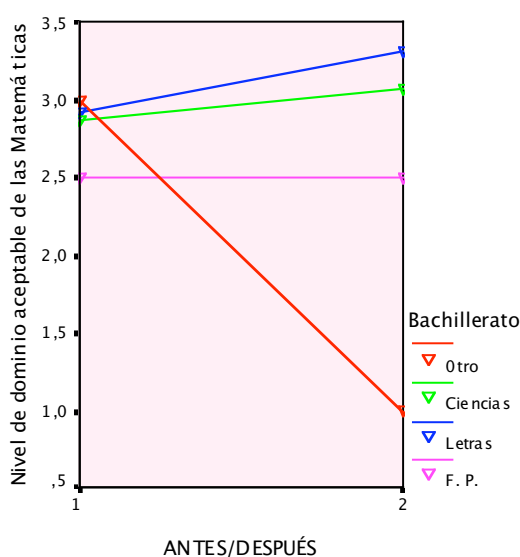


**Figura 344: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de las Matemáticas” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura ayuda a confirmar lo que decíamos antes; además, se puede ver que, después del estudio del tema, para casi todos los alumnos, excepto para los que llamamos Otros, aumenta el nivel de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de las Matemáticas”.

Una vez hecho el estudio del “dominio aceptable de las Matemáticas”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas”, recogemos todos los niveles críticos obtenidos en la tabla siguiente.

|                                                         | Momento                      | Interacción                                       | Figura |
|---------------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>DOMINIO<br/>ACEPTABLE<br/>de las<br/>Matemáticas</b> | Antes / después: $p=0.026^*$ |                                                   | 329    |
|                                                         | Antes / después: $p=0.038^*$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.285$       | 330    |
|                                                         | Antes / después: $p=0.288$   | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.889$          | 331-2  |
|                                                         | Antes / después: $p=0.385$   | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.381$        | 333-4  |
|                                                         | Antes / después: $p=0.217$   | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.912$         | 335-6  |
|                                                         | Antes / después: $p=0.117$   | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.342$ | 337-8  |
|                                                         | Antes / después: $p=0.217$   | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.091$ | 339-40 |

**Tabla 56: “Dominio aceptable de las Matemáticas”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.3. Conocimientos matemáticos del Instituto

Se pasa a estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto los alumnos están de acuerdo con la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, con los conocimientos matemáticos que aprendiste en el Instituto son suficientes. En este caso se toman las afirmaciones *los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que el futuro profesor tiene bastante con los conocimientos matemáticos que aprendió en el Instituto, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.132>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.132>0.05$ ,

por ello se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, resulta ser también  $0.132 > 0.05$ , luego se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: se puede ver que la mayoría (72%) opina que está poco de acuerdo o nada de acuerdo; aumenta el porcentaje en un 11% después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa, por tanto, disminuye el porcentaje de los que dicen que están muy o bastante de acuerdo.

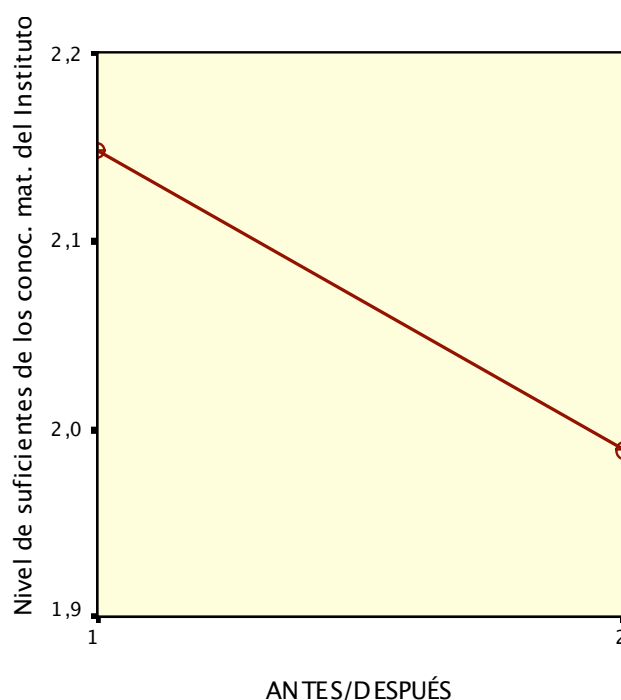


**Figura 345: Estimación de “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después.**

Los valores que se asignan a la variable “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” son los mismos que se asignaban en el apartado anterior, luego al aumentar el número aumenta el grado de acuerdo, y a la inversa. La figura precedente dice que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye el nivel de acuerdo con que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes”, que era análogo a lo que se decía cuando se analizaron los resultados de las frecuencias.

## Género

Se toma como variable inter-sujeto “el género” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que con “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes” no depende del “género”.

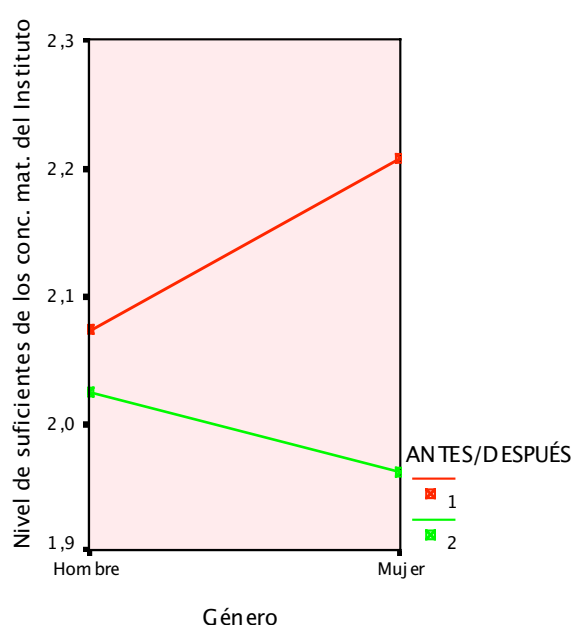


**Figura 346:** Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “género”.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres están más de acuerdo que los hombres con que son suficientes los conocimientos matemáticos del Instituto; después, la situación varía radicalmente, siendo las mujeres las que están menos de acuerdo. Para todos —hombres y mujeres— disminuye el nivel de acuerdo con que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”. Puede ser que, después del citado estudio, los alumnos se hayan dado cuenta de que necesitan mayor preparación matemática para percibir todos los detalles de los conceptos que son necesarios a la hora de preparar actividades para los niños de Educación Infantil.

## Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar si existen diferencias significativas con la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos que resultan son  $p=0.026 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “año de realización”, dentro del mismo año de realización, y  $p=0.306 > 0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos, antes y después del citado estudio, dentro del mismo año de realización y no existen diferencias significativas entre los distintos años de realización.

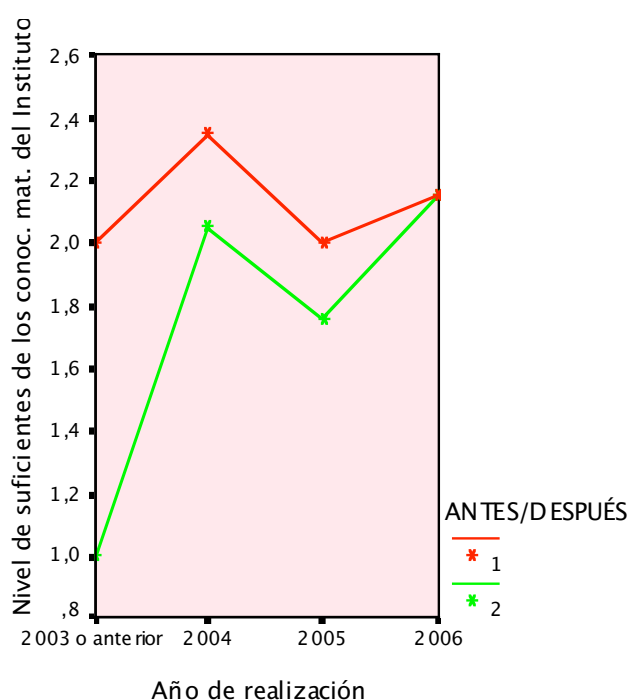


**Figura 347: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “año de realización”.**

En la figura que antecede se puede ver que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos están más de acuerdo con que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”, siendo los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004 los que están menos de acuerdo. Después del estudio del tema, los que cursaron alguna de las asignaturas en 2002/2003 o anteriores son los que están menos de acuerdo. Como en este gráfico hay algunos niveles que no se sabe muy bien si son o no iguales, se pasa a la figura siguiente, pues en ella queda todo mucho más claro.



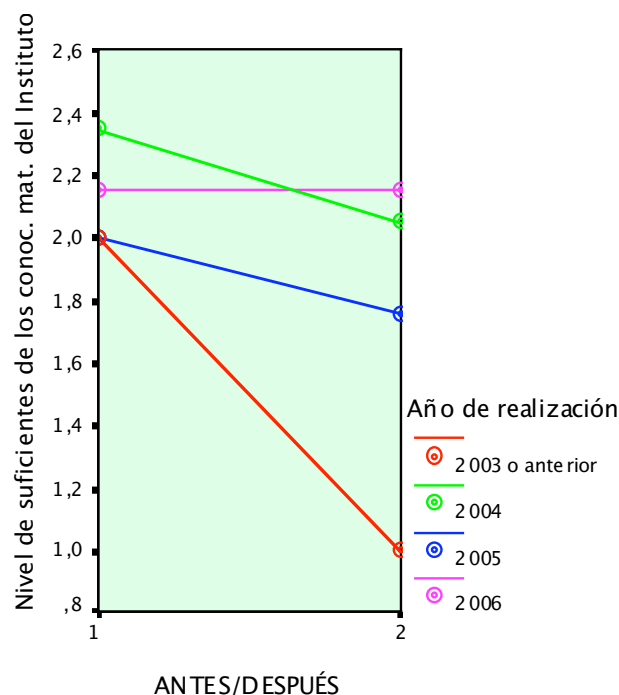


**Figura 348: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que precede deja claro que, después del estudio del tema y de las técnicas, casi siempre disminuye la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”, excepto para los que respondieron las encuestas el curso 2005/2006, que se mantiene.

## Curso

Se elige como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se debe afirmar que la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes” no depende del “curso”.

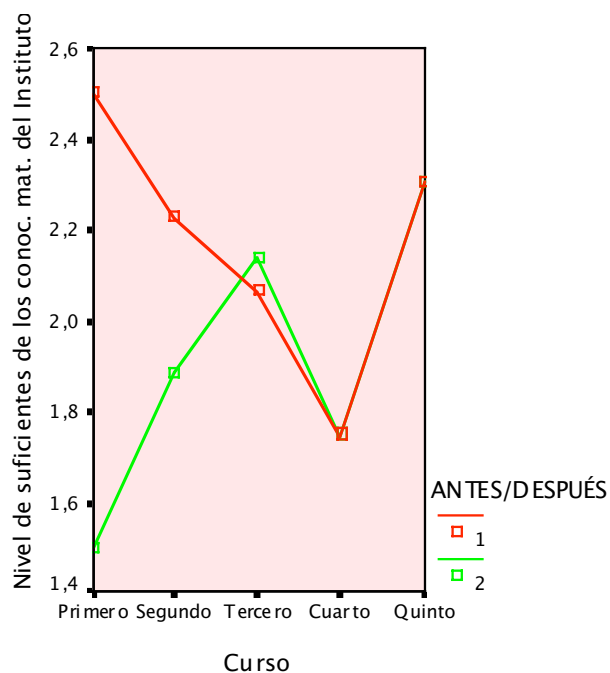


**Figura 349: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “curso”.**

Esta figura indica que, antes del estudio del tema, los alumnos matriculados en cuarto son los que están menos de acuerdo con que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”, y los alumnos de primero son los que están más de acuerdo. Después del estudio del tema y de las técnicas la situación cambia radicalmente, siendo los de primero los que están menos de acuerdo, y los de quinto los que están más de acuerdo. Para los alumnos de primero y segundo disminuye la idea de que “los conocimientos del Instituto sean suficientes” para preparar actividades en Educación Infantil, para los de tercero aumenta levemente y para los de cuarto y quinto no varía.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los distintos estadísticos que proporciona dan niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la edad” no influye significativamente en la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”.

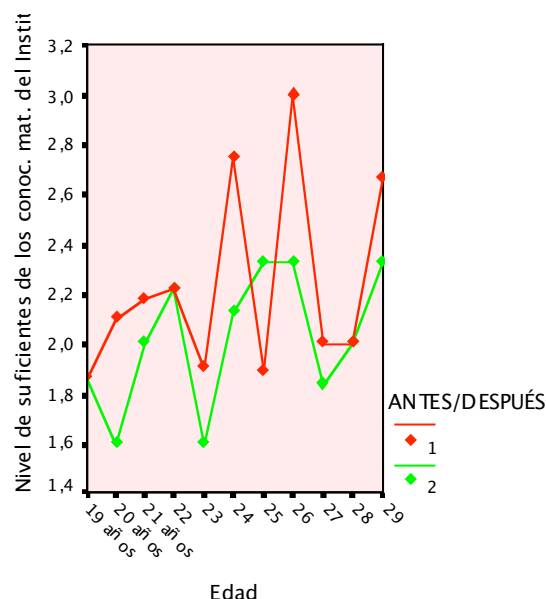


**Figura 350: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “edad”.**

Esta figura muestra que la fluctuación entre edades respecto de la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes” es bastante grande, siendo mayor aún antes que después del estudio del tema y de las técnicas. Los que están más de acuerdo con esta idea, antes de dicho estudio, son los que tenían 26 años y los que están menos de acuerdo son los de 19 años. Después del citado estudio, los alumnos que están menos de acuerdo son los que tenían 20 ó 23 años, y los que están más de acuerdo son los de 25, 26 ó 29 años. Para hacer estas afirmaciones ha ayudado bastante la figura siguiente.

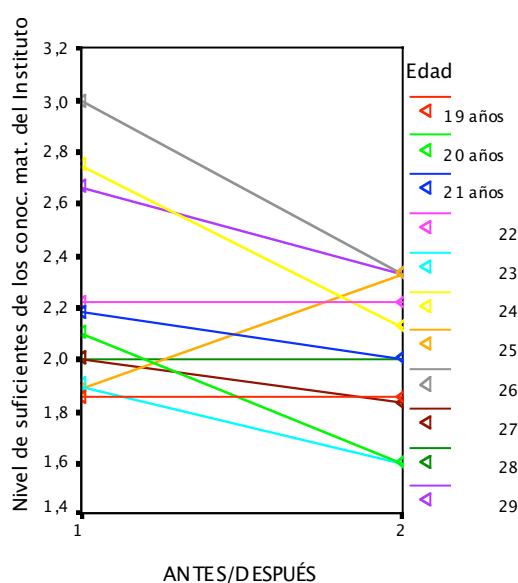


**Figura 351: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “edad”.**

Además, aquí se puede ver que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye o se mantiene la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”, excepto para los que tenían 25 años, que disminuye.

## Especialidad

Se toma como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si influye en la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes”, antes y después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos que proporciona el modelo son  $p=0.023<0.05$  cuando se considera si hay diferencias dentro de la misma especialidad, y  $p=0.017<0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Por tanto, se tiene que afirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos antes y después del mencionado estudio en la misma especialidad y también existen diferencias significativas entre las distintas especialidades.

Para comparar las distintas especialidades se elige Post hoc; el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias de las especialidades. En este caso se observa que todos los niveles críticos son mayores que 0.05, luego, según este estadístico, no hay diferencias significativas entre las distintas especialidades.

Para analizar lo que ocurre en este caso se trabaja con las pruebas no paramétricas, se elige el estadístico Kruskal-Wallis y se definen los rangos de modo que recoja todas las especialidades. En este caso los niveles críticos antes del estudio del tema y de las técnicas son  $p=0.022<0.05$ , y después  $p=0.343>0.05$ , luego antes del estudio del tema y de las técnicas hay diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos y las especialidades, pero después de dicho estudio no hay diferencias significativas.

Para confirmar que hay diferencias significativas se comparan por pares las distintas especialidades que hemos considerado en este estudio para ver si hay diferencias significativas entre algunas de ellas. Se elige el apartado dos muestras independientes, y se toman en lista de

afirmaciones “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes”, en ambos momentos; como variable de agrupación se elige “la especialidad”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: el de los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y los de Matemáticas, los alumnos de Magisterio de Educación Infantil y los de Magisterio que no son de Educación Infantil, etc., hasta agotar todos los pares. Sólo entre los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y los de Otras especialidades, antes del estudio del tema, da  $p=0.002<0.05$ . Por tanto, sólo entre estos dos grupos de alumnos hay diferencias significativas.

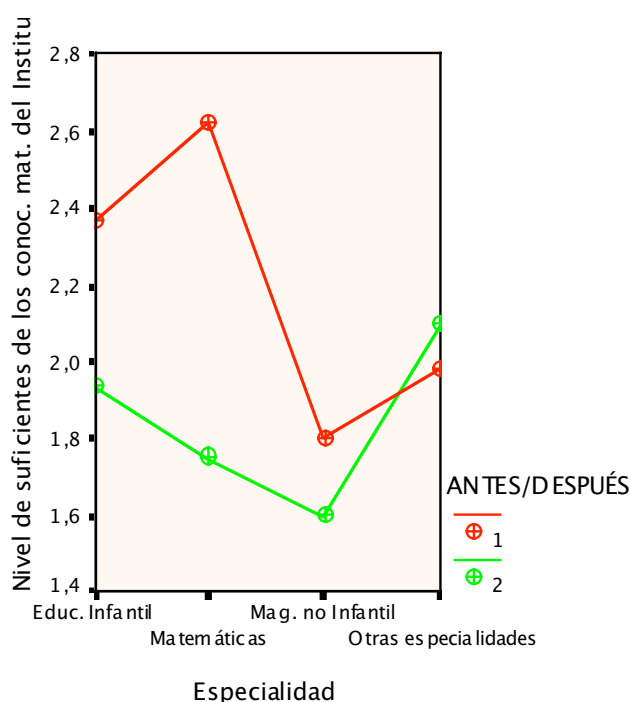


**Figura 352: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, están más de acuerdo con que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” son los de Matemáticas y los que están menos de acuerdo son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil. Después del citado estudio, los alumnos que están menos de acuerdo siguen siendo los de Magisterio no Infantil, y los que están más de acuerdo son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

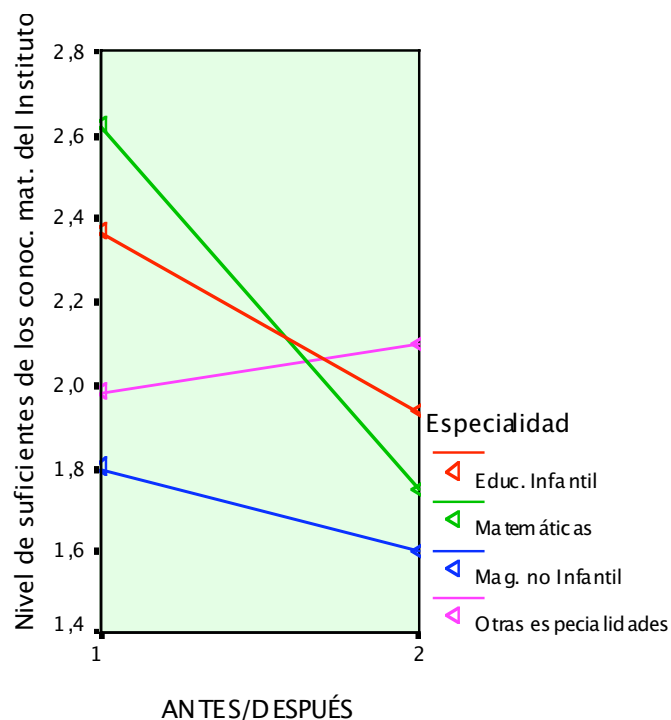


**Figura 353: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “especialidad”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todas las especialidades, excepto para las que no son de Magisterio ni de Matemáticas, disminuye la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”.

## Bachillerato

Se considera como variable inter-sujeto “el bachillerato” que hubieran cursado los alumnos para ver cómo influye en la idea de que con “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre los distintos bachilleratos con respecto a la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

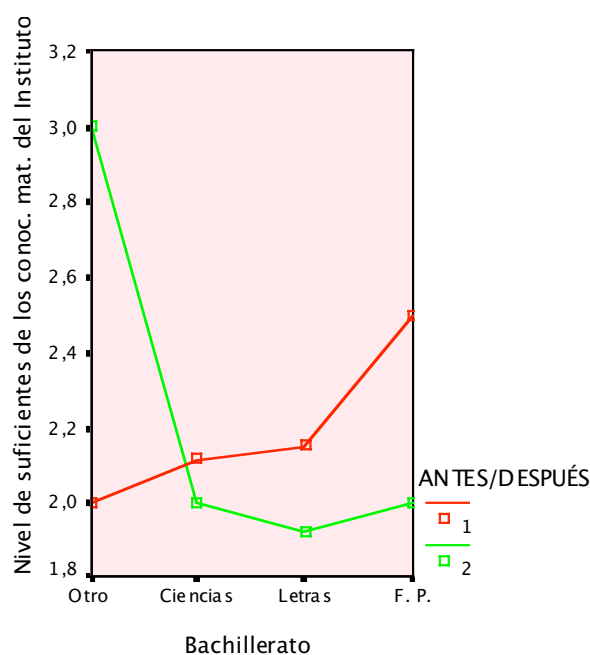


**Figura 354: Estimación de que “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “bachillerato”.**

Los alumnos que están menos de acuerdo, antes del estudio del tema y de las técnicas, con que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes” para preparar actividades para los niños, son los que llamamos Otros (proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años), y los que están más de acuerdo son los que cursaron el bachillerato de Letras. Después de dicho estudio la situación cambia completamente, pasando a ser los alumnos que llamamos Otros los que están más de acuerdo (se considera que les ha parecido muy complicado el tema; pensamos que puede ser debido a la falta de base), y los que están menos de acuerdo son los de letras. La figura que viene a continuación puede servir para ver más claro lo que se dice en la anterior.

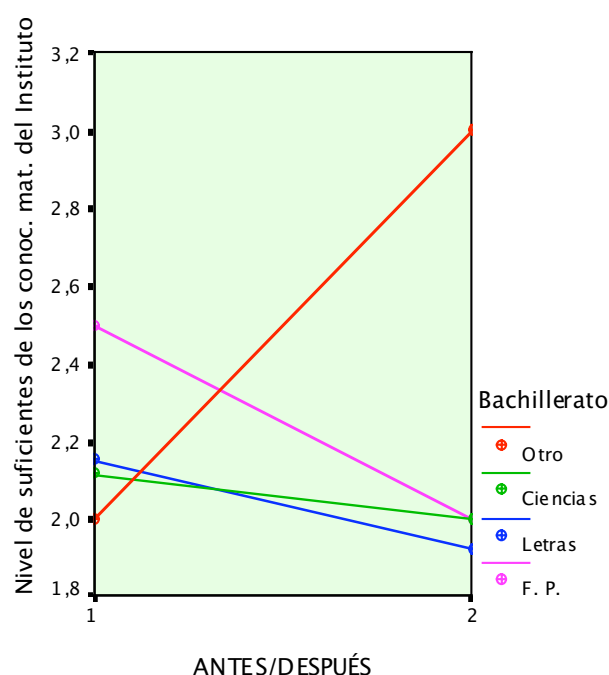


**Figura 355: Ampliación de la comparación: “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes” antes/después, por “bachillerato”.**

Para todos los alumnos, excepto para los que llamamos Otros, después del estudio del tema y de las técnicas disminuye la idea de que “los conocimientos matemáticos del Instituto sean suficientes”.

En la tabla que viene a continuación tenemos los niveles críticos obtenidos al estudiar las respuestas de los alumnos sobre si “los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                               | Momento                      | Interacción                                         | Figura |
|-----------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------|--------|
| <b>CONOCIMIENT. matemáticos del INSTITUTO</b> | Antes / después: $p=0.132$   |                                                     | 341    |
|                                               | Antes / después: $p=0.169$   | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.357$         | 342    |
|                                               | Antes / después: $p=0.026^*$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.306$            | 343-4  |
|                                               | Antes / después: $p=0.128$   | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.246$          | 345    |
|                                               | Antes / después: $p=0.113$   | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.666$           | 346-7  |
|                                               | Antes / después: $p=0.023^*$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.017^*$ | 348-9  |
|                                               | Antes / después: $p=0.903$   | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.630$   | 350-1  |

**Tabla 57: “Conocimientos matemáticos del Instituto”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.



#### 5.3.4.4. Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto

Se pasa a estudiar hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se sigue en el colegio”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.417>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también son  $p=0.417>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.417>0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: una mayoría de los alumnos (64%) dice que está muy de acuerdo o bastante de acuerdo en ambas encuestas. El 36% restante puede proceder de los alumnos que han aprendido muchas cosas del tema “las Magnitudes y su Medida”, han preparado actividades sobre medidas de algunas magnitudes para trabajarlas con los alumnos de Educación Infantil, y piensan que poco les puede aportar el libro de texto.

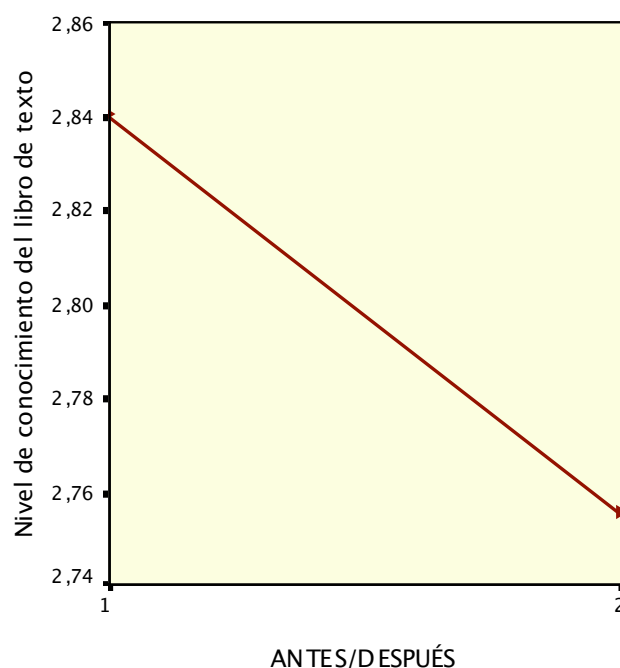


**Figura 356: Estimación de “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después.**

Los valores asignados a la variable “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” son los mismos que teníamos anteriormente. Por tanto, cuando aumenta el valor asignado, aumenta el grado de acuerdo, y al contrario. Teniendo en cuenta la figura precedente, se puede decir que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “deben conocerlas Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio”.

## Género

Se considera como variable inter-sujeto “el género” para ver la influencia que tiene en la idea de que para preparar actividades para Educación Infantil “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” no depende del “género”.

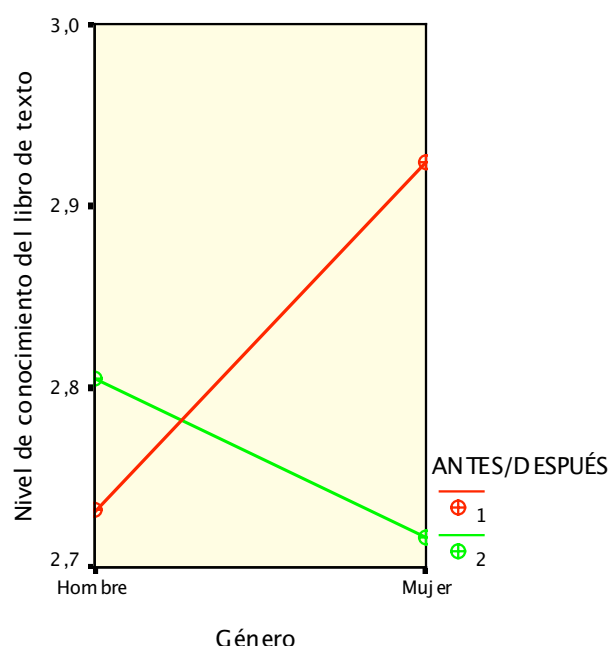


**Figura 357:** Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “género”.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están menos de acuerdo que las mujeres con que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”; después ocurre todo lo contrario. Tras el citado estudio, en los hombres aumenta la idea de que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” y disminuye en las mujeres.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de la encuesta para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas, los niveles críticos asociados obtenidos, en los distintos estadísticos que proporciona, son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” no depende del año en que se realizaron las encuestas.

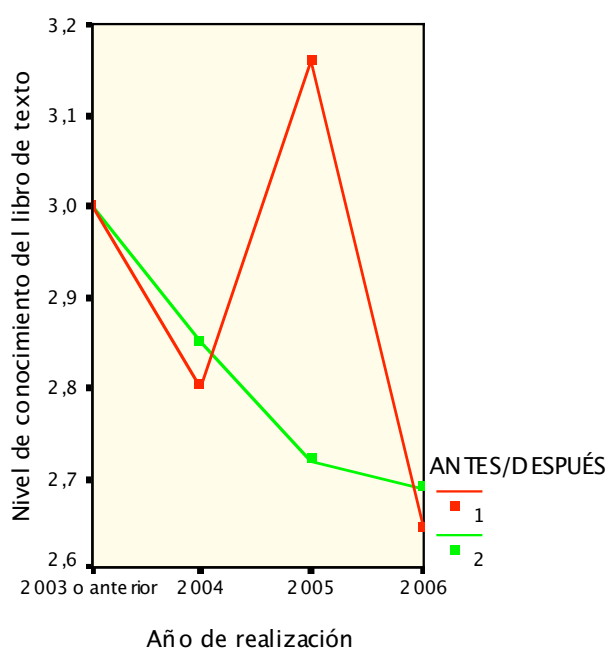


**Figura 358: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “año de realización”.**

Los alumnos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, están más de acuerdo con que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” son los que respondieron las encuestas en 2004/2005, y los que están menos de acuerdo, tanto antes como después de dicho estudio, son los que las respondieron en 2005/2006. Después del mencionado estudio, los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 o anteriores son los que están más de acuerdo. Para los alumnos que respondieron las encuestas en el año 2004/2005, después del citado estudio disminuye drásticamente la idea de que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”; para los que las respondieron en el curso 2002/2003 ó anteriores se mantiene y para los demás aumenta levemente.

## Curso

Se elige ahora como variable inter-sujeto “el curso” en que estén matriculados los alumnos para ver la influencia que ejerce en la idea de que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona. Por ello, se rechaza que existan diferencias significativas entre “el curso” en que estén matriculados los alumnos y las opiniones.

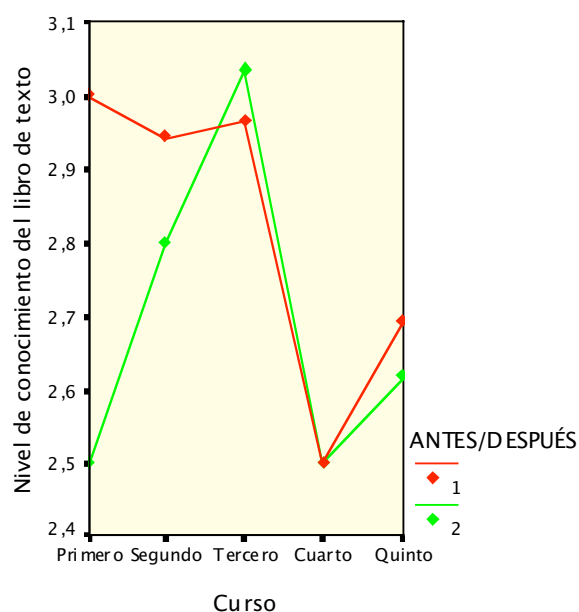


**Figura 359:** Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “curso”.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos matriculados en primero son los que están más de acuerdo con que se “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio”, y los que menos los de cuarto. Después del citado estudio, los alumnos de tercero son los que están más de acuerdo, y los de primero y cuarto los que menos.

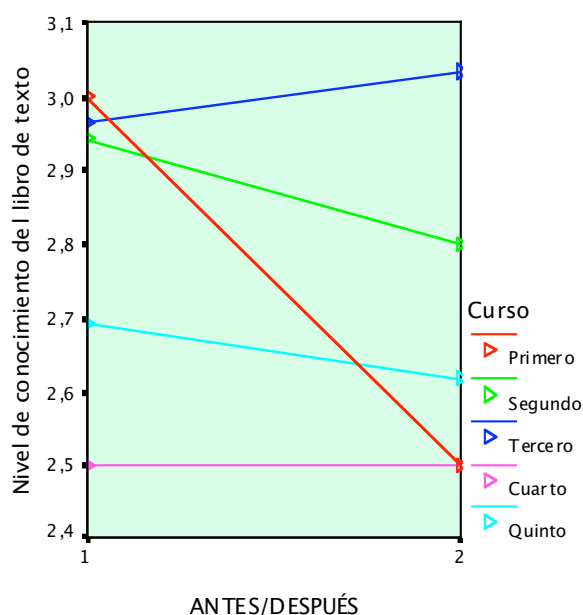


**Figura 360:** Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “curso”.

Esta figura informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, sólo para los alumnos que estaban matriculados en tercero aumenta la idea de que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se sigue en el colegio”, para los de cuarto se mantiene y para los demás descende.

## Edad

Se considera como variable inter-sujeto “la edad”, para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se ha de afirmar que la idea de que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” no depende de “la edad” que tuvieran los alumnos.

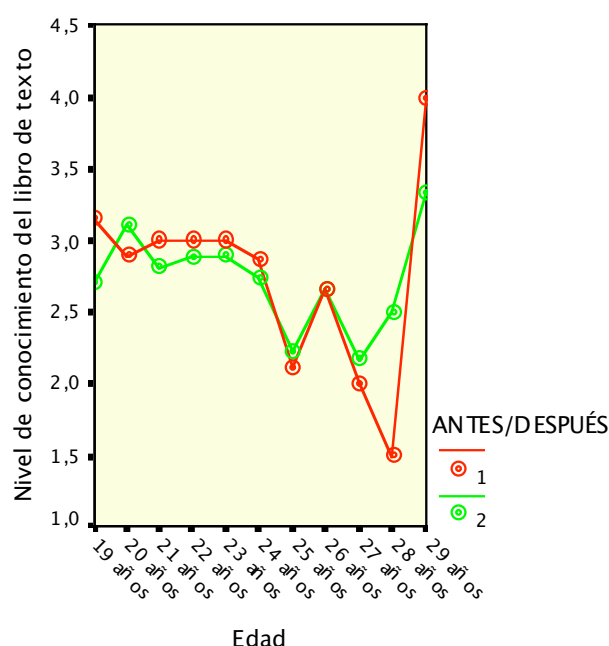


**Figura 361: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “edad”.**

Se puede observar en esta figura que los resultados son bastante parecidos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Siendo, antes de dicho estudio, los de 28 años los que están menos de acuerdo y los de 29 los que están más de acuerdo. Después, siguen siendo los de 28 años los que están más de acuerdo y los de 24 y 26 años los que están menos de acuerdo.

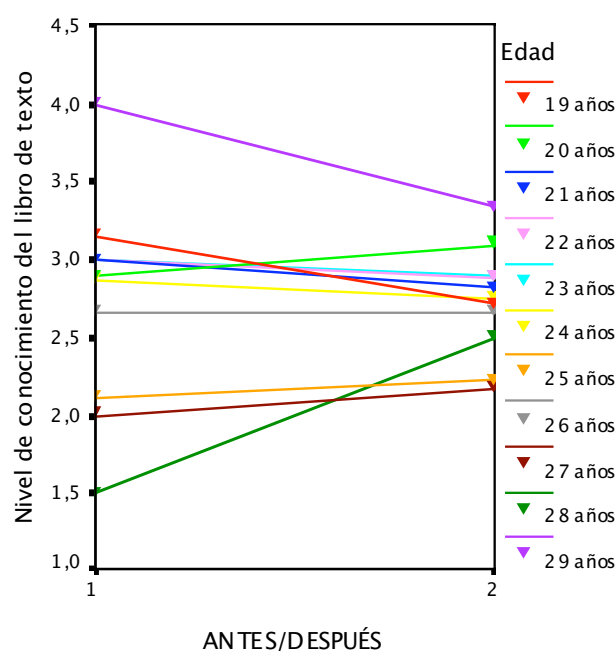


**Figura 362: Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “edad”.**

En esta figura se observa que hay líneas que apenas se ven; esto es debido a que algunos grupos de alumnos opinan prácticamente de la misma forma. Después del estudio del tema y de las técnicas, para los alumnos que tenían 20, 25, 27 ó 28 años aumenta la idea de que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”, se mantiene para los que tenían 26 años y para el resto disminuye.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si influye en la opinión de que deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio, antes y después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos son  $p=0.026 < 0.05$ , cuando se considera la influencia de “la especialidad” en que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”, dentro de la misma especialidad, y  $p=0.088 > 0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después de dicho estudio, cuando se trata de la misma especialidad y no existen diferencias significativas entre las distintas especialidades.

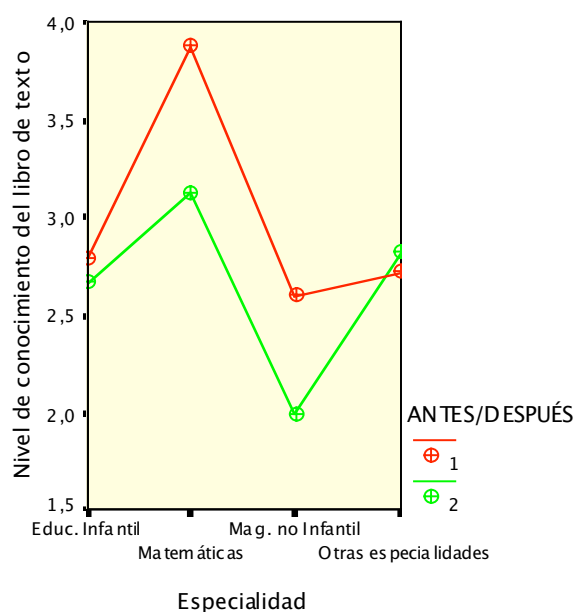


**Figura 363: Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “especialidad”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los que están matriculados en la licenciatura de Matemáticas son los que están más de acuerdo en que se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se siga en el colegio, y los que están menos de acuerdo son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

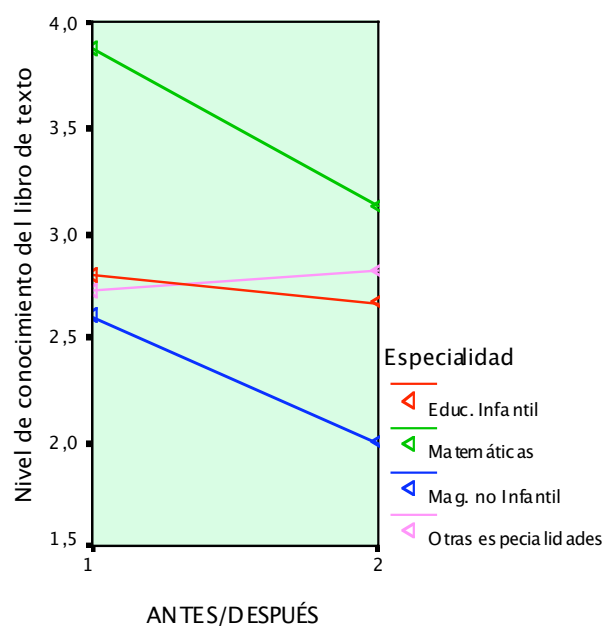


**Figura 364: Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “especialidad”.**



Después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todas las especialidades disminuye la idea de que deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se sigue en el colegio, excepto para otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se encuentran niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego se puede afirmar que la idea de que “deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

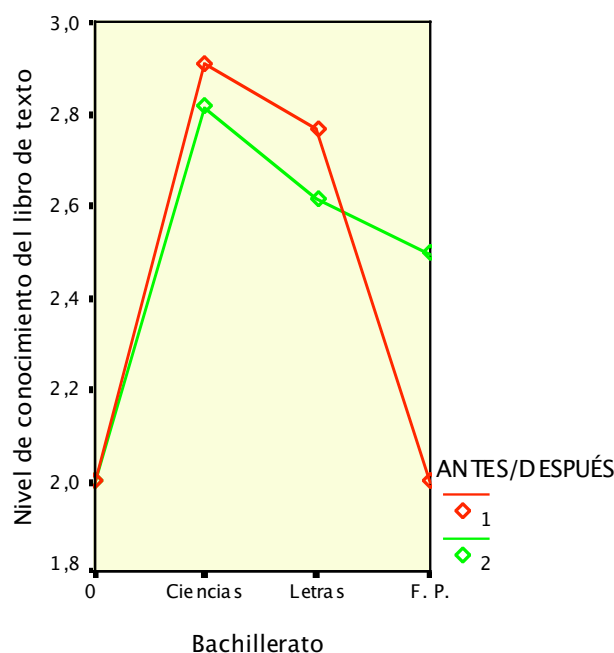


**Figura 365:** Estimación de que “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “bachillerato”.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que provienen de un bachillerato de Ciencias son los que están más de acuerdo con que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”, y los que están menos de acuerdo son los que llamamos Otros —alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años—. Después del citado estudio, siguen siendo los alumnos de

Ciencias los que están más de acuerdo, y los que están menos de acuerdo son los que llamamos Otros, junto con los de Formación Profesional.

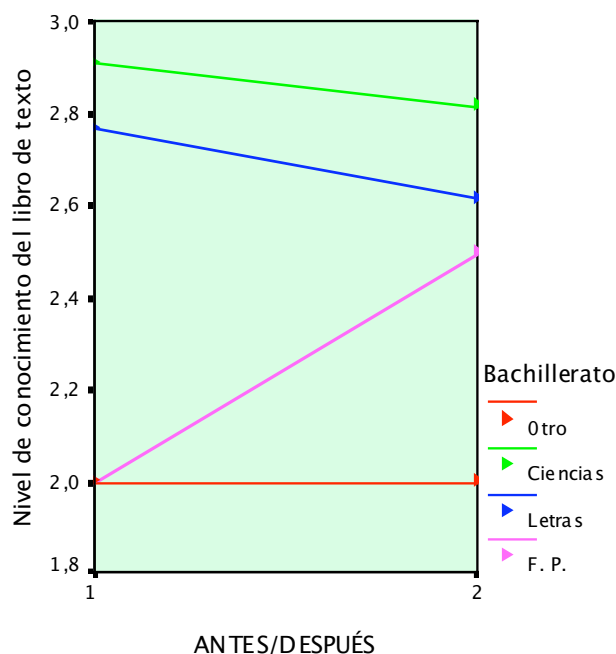


Figura 366: Ampliación de la comparación: “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” antes/después, por “bachillerato”.

Como se puede apreciar en esta figura, para todos, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “se deben conocer las Matemáticas que vienen en el libro que se sigue en el colegio”, excepto para los que cursaron Formación Profesional.

Al considerar los alumnos el nivel de acuerdo con que “debe conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se obtienen unos niveles críticos que son los que vienen en la tabla siguiente.

|                                                            | Momento                      | Interacción                                       | Figura |
|------------------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>Conocer Matemáticas que vienen en el LIBRO DE TEXTO</b> | Antes / después: $p=0.417$   |                                                   | 352    |
|                                                            | Antes / después: $p=0.523$   | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.184$       | 353    |
|                                                            | Antes / después: $p=0.610$   | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.249$          | 354    |
|                                                            | Antes / después: $p=0.419$   | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.825$        | 355-6  |
|                                                            | Antes / después: $p=0.926$   | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.785$         | 357-8  |
|                                                            | Antes / después: $p=0.026^*$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.088$ | 359-60 |
|                                                            | Antes / después: $p=0.845$   | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.870$ | 361-2  |

Tabla 58: “Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.5. Dominio total de la Didáctica

Se consideran ahora ciertas afirmaciones sobre Didáctica para estudiar hasta qué punto están de acuerdo los alumnos con que se debe estudiar esta asignatura y a qué nivel. Se comienza con la siguiente afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes dominar totalmente la Didáctica: ser licenciado en Pedagogía. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *debes dominar totalmente la Didáctica*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.731>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.731>0.05$ , se está en condiciones de poder afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del mencionado estudio. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, es también  $0.731>0.05$ , luego se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: mayoritariamente responden que están poco de acuerdo o nada de acuerdo en que “deben dominar totalmente la Didáctica”, tanto antes (66%) como después de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa (70%).

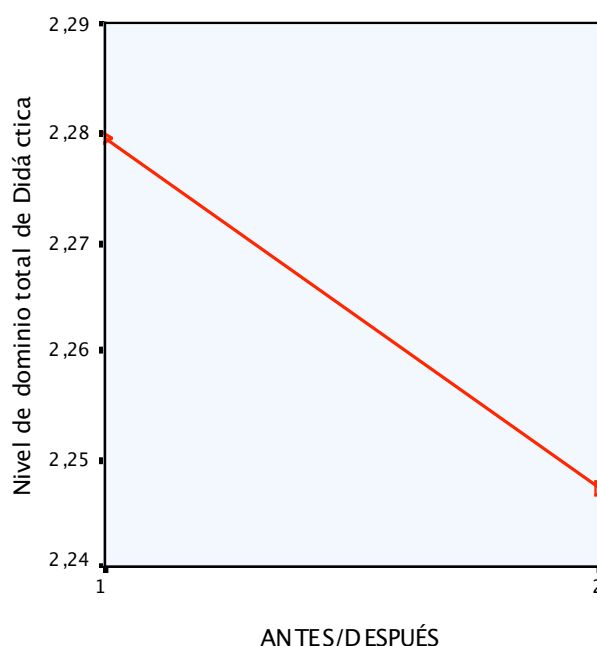


**Figura 367: Estimación del “dominio total de la Didáctica” antes/después.**

Los valores asignados a la variable “debes dominar totalmente la Didáctica” son análogos a los del apartado anterior, luego las consecuencias son las mismas y no las vamos a repetir. Al observar la figura precedente, se puede afirmar que después del estudio del tema y de las técnicas disminuye la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”.

## Género

Se toman las variables inter-sujeto, empezando por “el género”, para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “deben tener un dominio total de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “deben dominar totalmente la Didáctica” no depende del “género”.

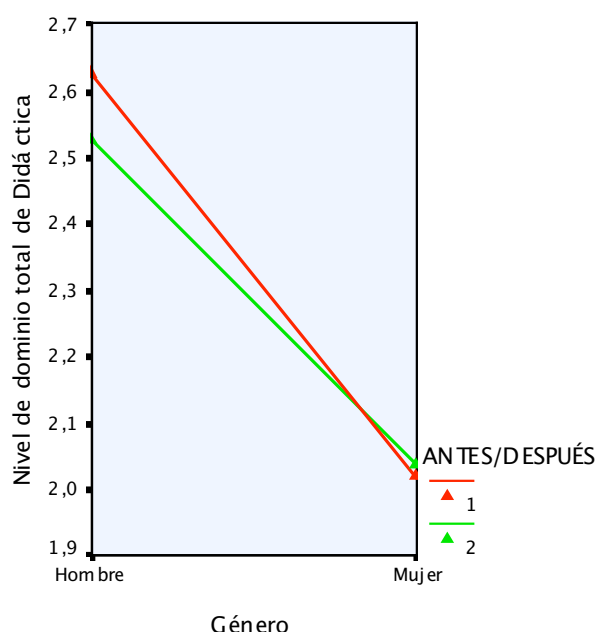


**Figura 368: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “género”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres están menos de acuerdo que los hombres en que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”. Después de dicho estudio, para los hombres disminuye levemente la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”, y para las mujeres aumenta muy poco.

### Año de realización

Se elige como variable inter-sujeto “el año de realización” de la encuesta para ver cómo influye en la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05; esto nos dice que no tiene repercusión significativa “el año de realización” sobre el “dominio total de la Didáctica”.

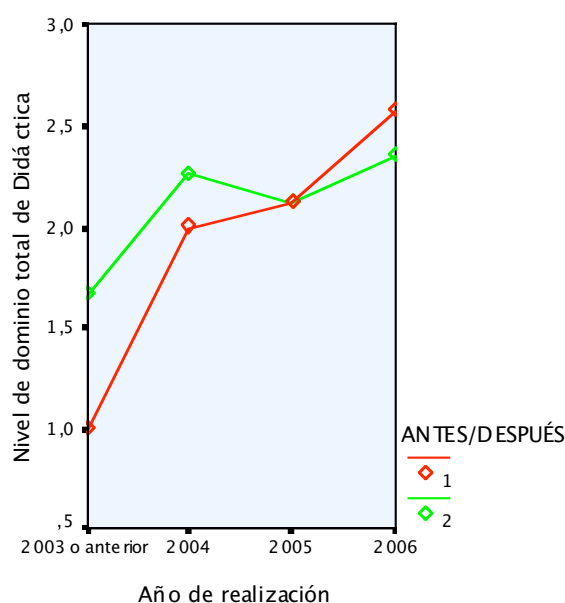


**Figura 369: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura apunta que, antes del estudio del tema y de las técnicas, según van pasando los años va aumentando la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”. Después del citado estudio, los alumnos que respondieron las encuestas en el año 2005/2006 son los que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de Didáctica”, y los que están menos de acuerdo son los que rellenaron las encuestas en el 2002/2003 ó anteriores.

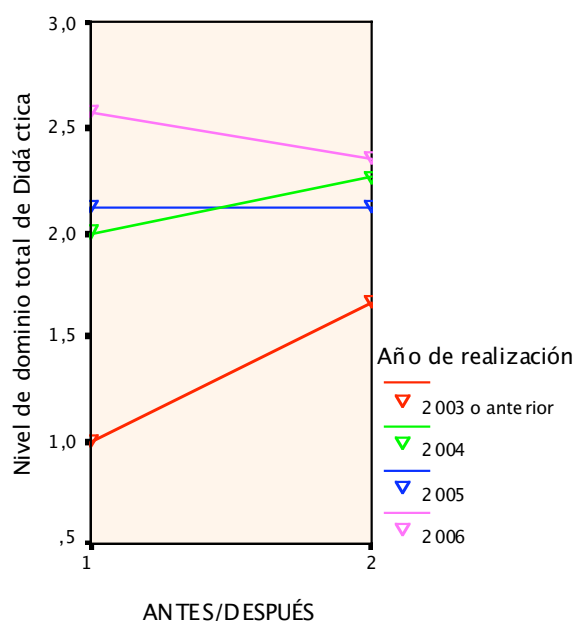


**Figura 370: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “año de realización”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas disminuye la idea de que se debe tener un dominio total de Didáctica para los alumnos que cursaron alguna de las dos asignaturas en 2005/2006, se mantiene para los que las cursaron en 2004/2005 y aumenta para el resto.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica” no depende del “curso” en qué estén matriculados.

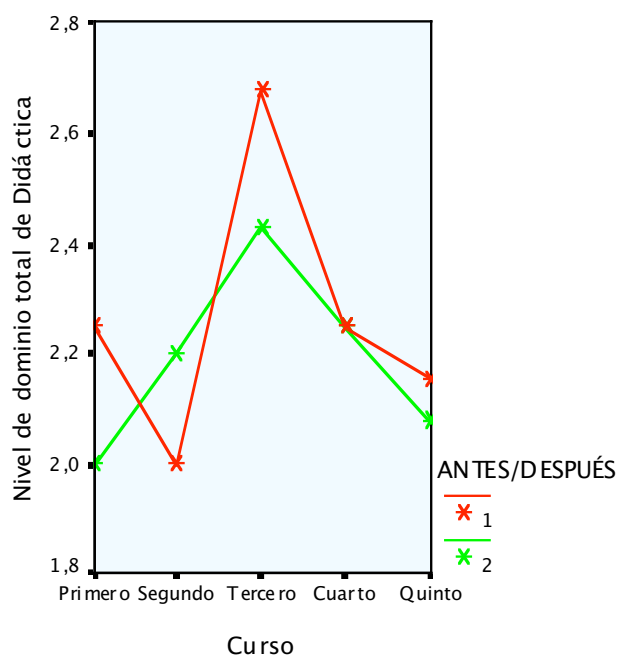


**Figura 371: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “curso”.**

En esta figura se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo en que “se debe tener un dominio total de la Didáctica” son los que estaban matriculados en tercero, y los que están menos de acuerdo los de segundo. Después de dicho estudio, siguen siendo los alumnos de tercero los que están más

de acuerdo, y pasan a ser los de primero los que están menos de acuerdo.

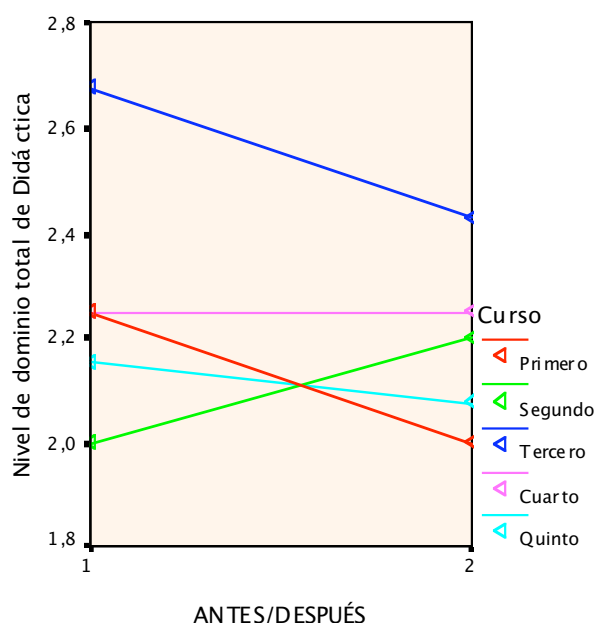


**Figura 372: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “curso”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye para casi todos la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”, excepto para los de segundo, que aumenta y para los de cuarto que se mantiene.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio total de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil, en ambos momentos. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “deben dominar totalmente la Didáctica” no depende de “la edad”.



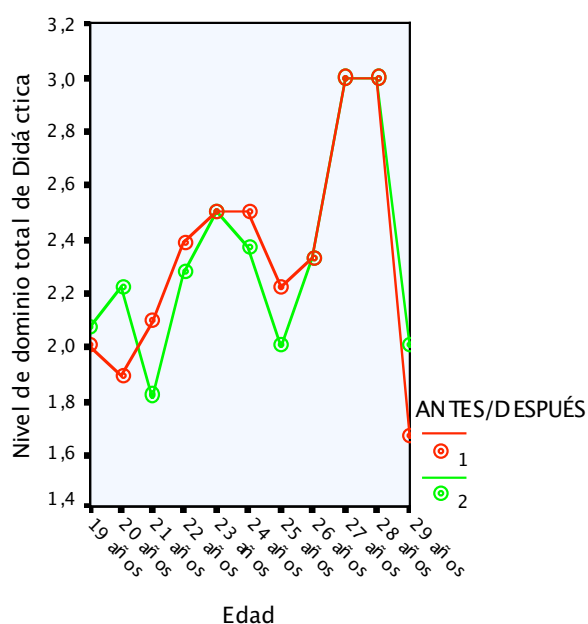


Figura 373: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “edad”.

La figura dice que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que tenían 27 ó 28 años son los que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”, y los que están menos de acuerdo son: antes, los que tenían 29 años y después, los que tenían 21 años.

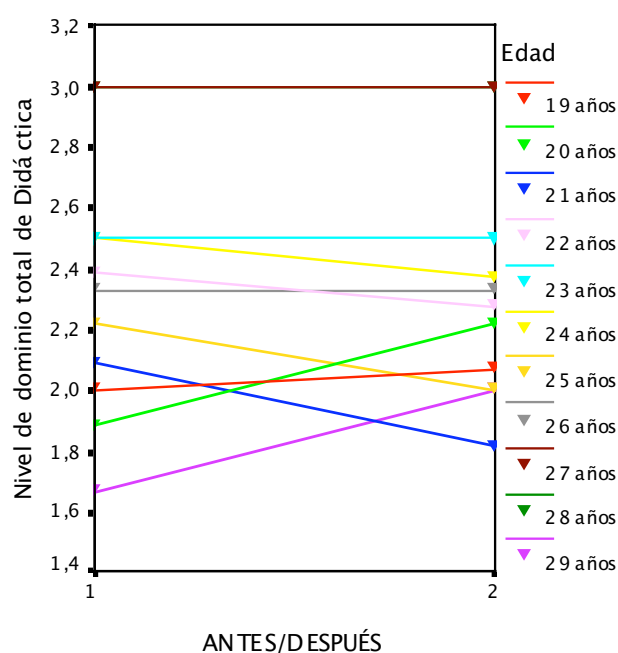


Figura 374: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “edad”.

En esta figura, los que tenían 27 y los que tenían 28 años quedan uno encima del otro. Se puede afirmar que, después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todos los alumnos disminuye o se mantiene la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”, con excepción de los que tenían 20 y 22 años, que aumenta.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos a cerca de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se debe dominar totalmente la Didáctica” no depende de “la especialidad”.

Como los niveles críticos entre especialidades dan 0.095, que está cerca de 0.05, para comparar las distintas especialidades se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones Post hoc para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias. En este caso se ve que sólo entre las especialidades de Educación Infantil y Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, y también entre Matemáticas y Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas los niveles críticos dan  $p=0.007 < 0.05$ , luego sólo en estos casos hay diferencias significativas.

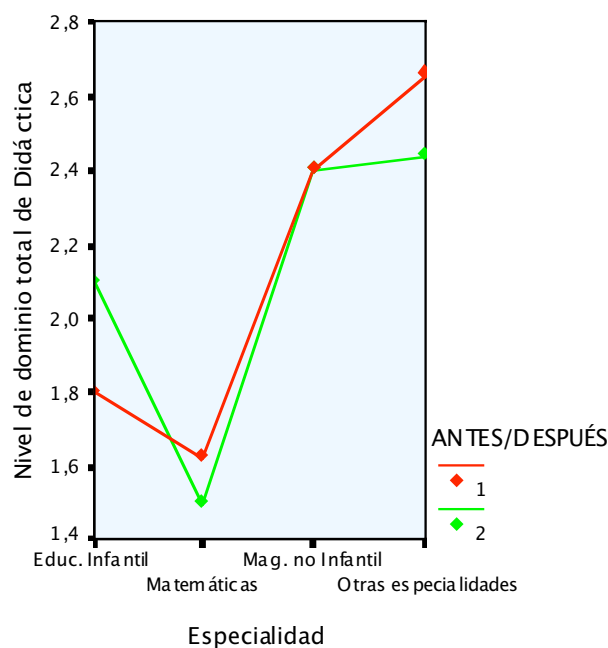


**Figura 375: Estimación de “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “especialidad”.**

En esta figura vemos que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que se debe tener un dominio total de Didáctica son los que están cursando la licenciatura de Matemáticas, y los que están más de acuerdo son los de Otras especialidades distintas de Matemáticas y Magisterio.

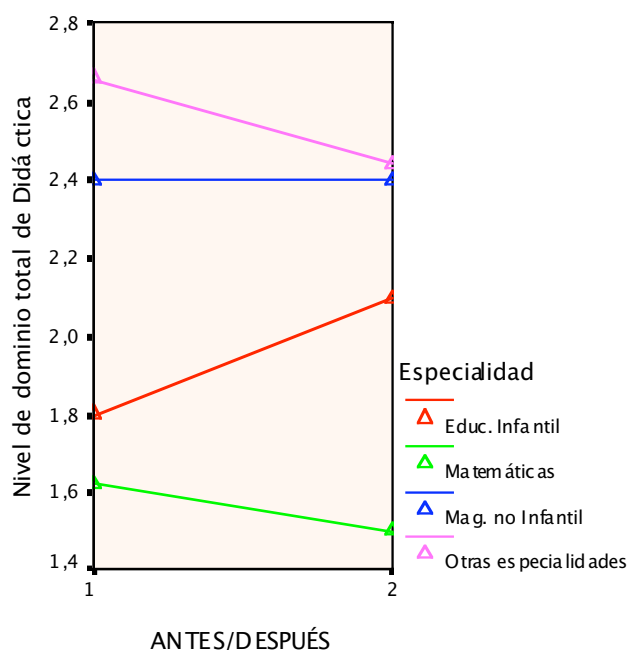


**Figura 376: Ampliación de la comparación: “dominio total de la Didáctica” antes/después, por “especialidad”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todos los alumnos, excepto para los de Magisterio de Educación Infantil, disminuye la idea de que se debe tener un dominio total de Didáctica.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio total de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil, en ambos momentos. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se debe dominar totalmente la Didáctica” no depende del “bachillerato”.

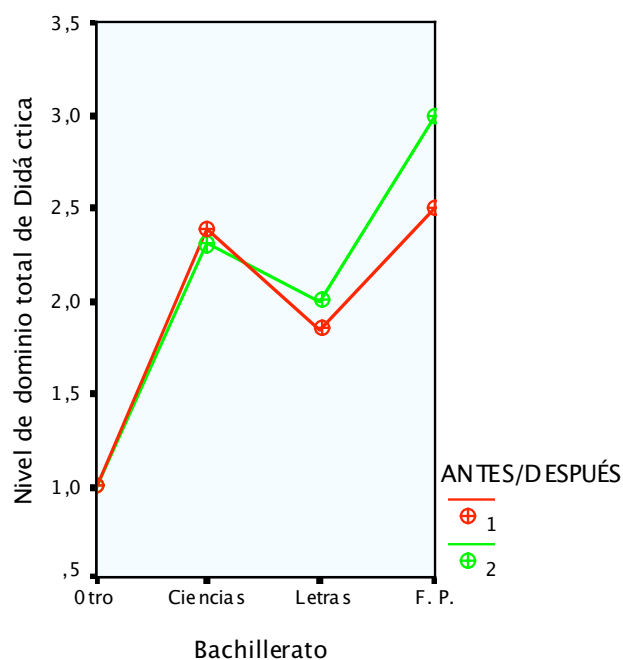


Figura 377: Estimación de dominio total de la Didáctica antes/después, por “bachillerato”.

Se puede ver en esta figura que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que proceden de Otro (acceso a la Universidad para mayores de 25 años) son los que están menos de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de la Didáctica”, y los que están más de acuerdo son los de Formación Profesional.

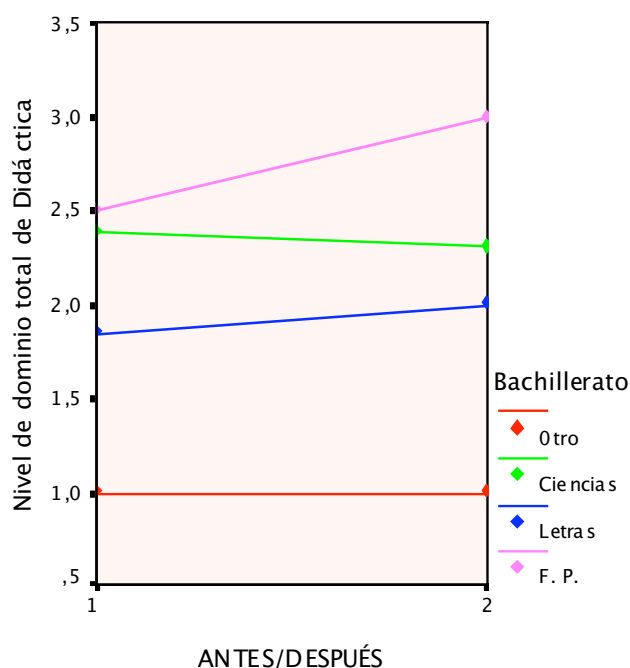


Figura 378: Ampliación de la comparación: "dominio total de la Didáctica" antes/después, por "bachillerato".

Entre la figura anterior y ésta se puede sacar la conclusión de que las variaciones de opinión, después del estudio del tema y de las técnicas, son mínimas, aumentando para los que hicieron Formación Profesional y para los que cursaron bachillerato de Letras, y para los demás manteniéndose o aumentando levemente.

En la tabla que viene a continuación se presentan todos los niveles críticos obtenidos trabajando con las afirmaciones "dominio total de la Didáctica", antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                      | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|--------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>DOMINIO TOTAL de la Didáctica</b> | Antes / después: $p=0.731$ |                                                   | 363    |
|                                      | Antes / después: $p=0.670$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.532$       | 364    |
|                                      | Antes / después: $p=0.240$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.120$          | 365-6  |
|                                      | Antes / después: $p=0.604$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.387$        | 367-8  |
|                                      | Antes / después: $p=0.996$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.970$         | 369-70 |
|                                      | Antes / después: $p=0.934$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.095$ | 371-2  |
|                                      | Antes / después: $p=0.620$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.703$ | 373-4  |

Tabla 59: "Dominio total de la Didáctica".  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.6. Dominio aceptable de la Didáctica

Vamos a estudiar hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes conocer la parte de Didáctica que tenga alguna repercusión en Educación Infantil, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman como variables intra-sujetos *debes tener un dominio aceptable de la Didáctica*, antes y después del estudio del tema. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para analizar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas sobre la idea de que se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.895>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también son  $p=0.895>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.895>0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: es normal que el 90% esté muy de acuerdo o bastante de acuerdo. Es curioso observar que la variación antes y después del estudio del tema y de las técnicas es prácticamente inexistente. En la figura que teníamos antes se ve que, después de dicho estudio, aumenta el porcentaje de los que están muy o poco de acuerdo y disminuye el de los que están bastante o nada de acuerdo, luego al final aumenta el porcentaje.

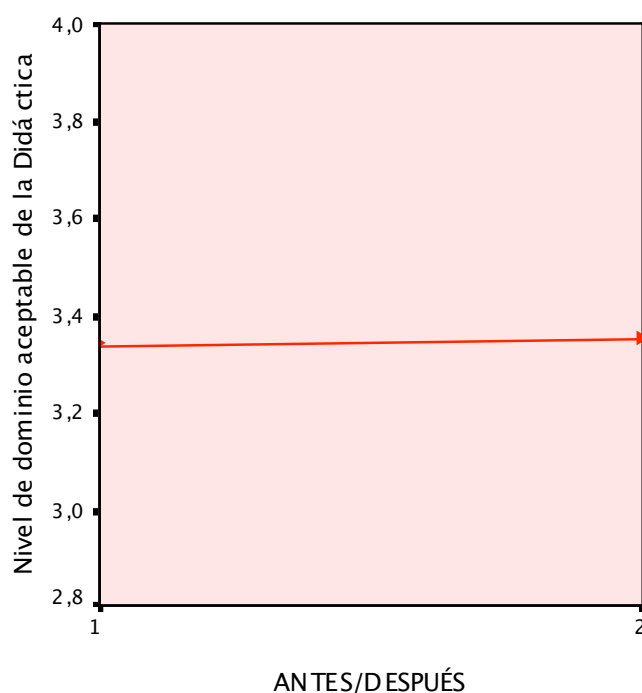


**Figura 379: Estimación del “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable: “debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” son los mismos que los que se le asignaron a la variable anterior, no vamos a repetir todos los comentarios. Igual que antes se tiene que decir que al aumentar el nivel de acuerdo aumenta el número asignado, y recíprocamente. Esta figura informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta levemente la idea de que se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica.

## Género

Se elige como variable inter-sujeto “el género” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos a cerca de que se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y resultan los niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, por tanto, se puede afirmar que “el género” no tiene influencia significativa en la idea de que se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica.

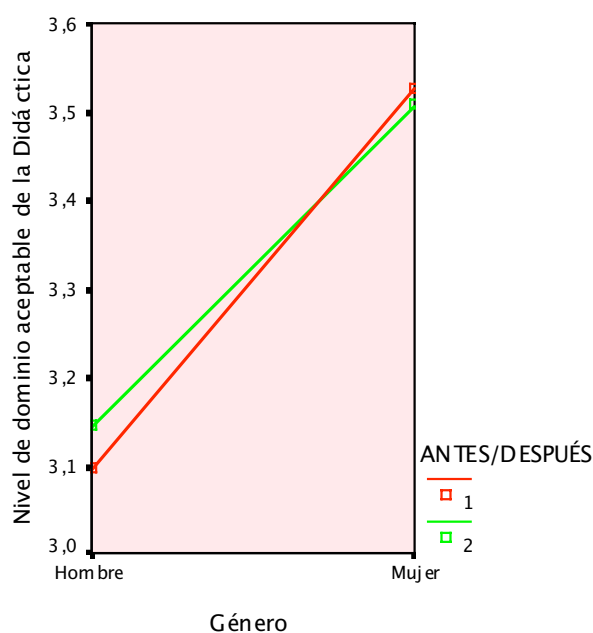


**Figura 380: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “género”.**

La figura que precede indica que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están menos de acuerdo que las mujeres en que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” para proponer actividades a los niños de Educación Infantil. Después del citado estudio, las variaciones de las opiniones de los alumnos son mínimas, aumentando levemente tanto para los hombres como para las mujeres.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” para ver si influye en la opinión de los alumnos sobre que se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica para preparar actividades para Educación Infantil. Trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego no parece tener repercusión “el año de realización” sobre la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica”.



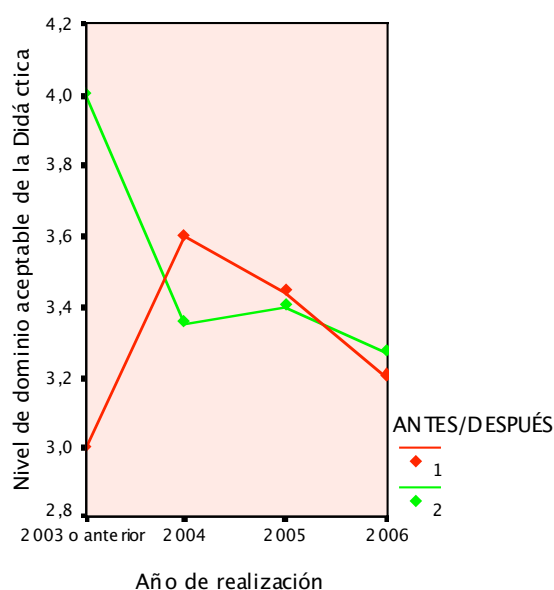


**Figura 381: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “año de realización”.**

En esta figura se puede observar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” son los que respondieron las encuestas el curso 2003/2004, y los que están menos de acuerdo son los que las respondieron en el curso 2002/2003 ó anteriores. Después de dicho estudio la situación cambia radicalmente, pasan a ser los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores los que están más de acuerdo y los que las respondieron en 2005/2006 los que están menos de acuerdo. Aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica” para los que respondieron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores y para los que las respondieron 2005/2006; prácticamente se mantiene para los que las respondieron en 2005/2006 y para los demás disminuye.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso” para ver si influye en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. El estudio se realiza con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede concluir que la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” no depende del “curso”.

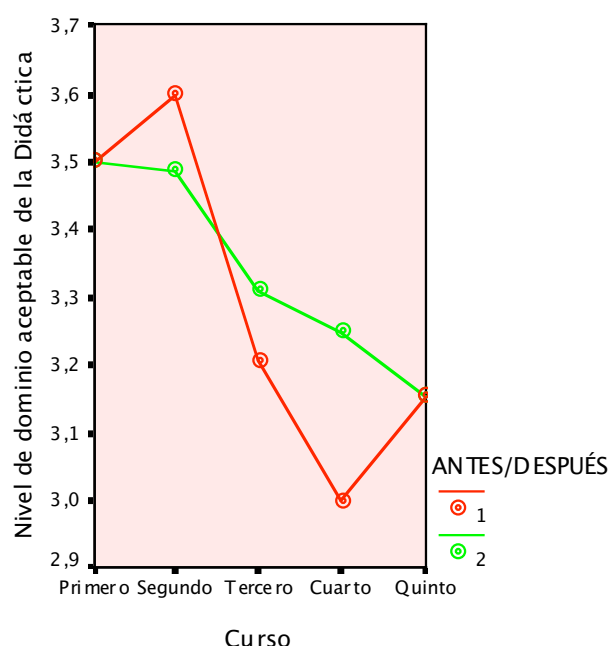


**Figura 382: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “curso”.**

En la figura precedente se puede observar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” son los que cursaban segundo, y los que están menos de acuerdo son los de cuarto. Después de dicho estudio, los alumnos que están más de acuerdo son los de primero y el nivel de acuerdo disminuye según va aumentando el curso en que están matriculados. Después del citado estudio, sólo disminuye la idea de que “se debe tener un nivel aceptable de Didáctica” para los alumnos que cursaban segundo, para los que cursaban tercero y cuarto aumenta y para los demás se mantiene.

## Edad

Se elige como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede concluir que “la edad” no tiene una repercusión significativa sobre la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica”.

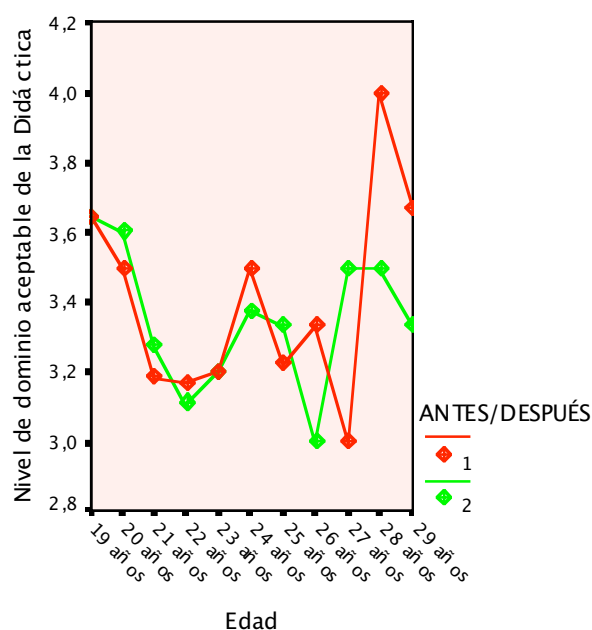


**Figura 383: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “edad”.**

En esta figura y en la que viene a continuación se puede observar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que tenían 28 años son los que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica”, y los que están menos de acuerdo son los que tenían 27 años. Después del mencionado estudio, los alumnos que están más de acuerdo son los que tenían 19 años, y los que están menos de acuerdo son los de 26 años.

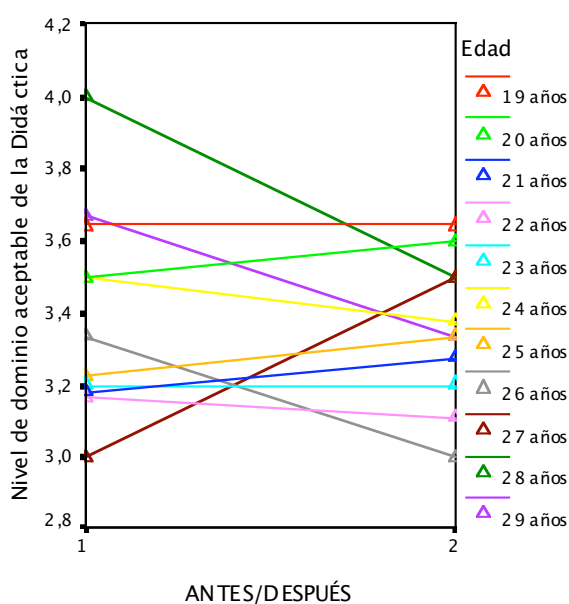


**Figura 384: Ampliación de la comparación: “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “edad”.**

Entre las dos figuras anteriores vemos las variaciones que experimentan las opiniones de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica”, aumentando para los que tenían 20, 21, 24, 25 ó 27 años; se mantiene para los que tenían 19 ó 23 años y para los demás disminuye.

## Especialidad

Se toma como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. El estudio se realiza con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede decir que la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” no depende de “la especialidad”.

Como los estadísticos entre especialidades dan niveles de significación 0.068 muy próximos a 0.05, para comparar las distintas especialidades se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados sean iguales. Para efectuar comparaciones Post hoc para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias. En este caso, sólo entre las especialidades de Educación Infantil y Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas los niveles críticos dan  $p=0.019 < 0.05$ , luego sólo entre estas especialidades hay diferencias significativas.

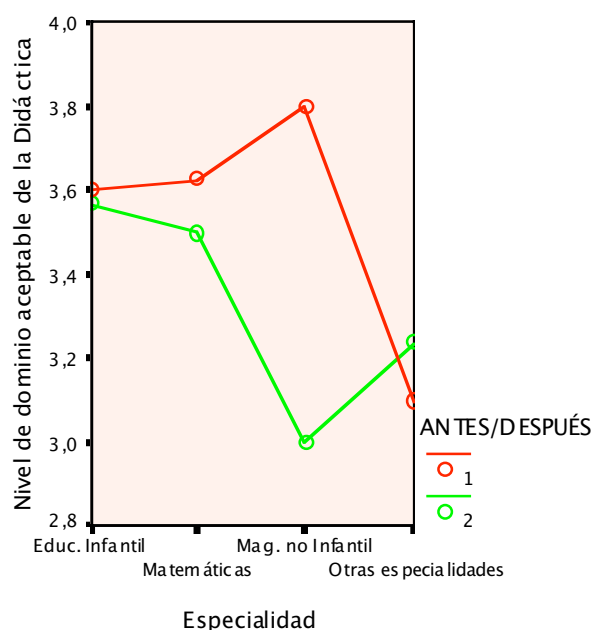


**Figura 385: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “especialidad”.**

Esta figura apunta que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica” son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, y los que están menos de acuerdo son los de Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas. Después de dicho estudio, la situación cambia, siendo los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil los que están más de acuerdo, y los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil pasan a ser los que están menos de acuerdo. Después del mencionado estudio, sólo para los alumnos que llamamos Otros — de especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas— aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica”, para las demás disminuye.

## Bachillerato

Se elige como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver la influencia que tiene en la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “el bachillerato” que hubieran cursado los alumnos parece no tener repercusión significativa en la idea de que “se deba tener un dominio aceptable de la Didáctica”.

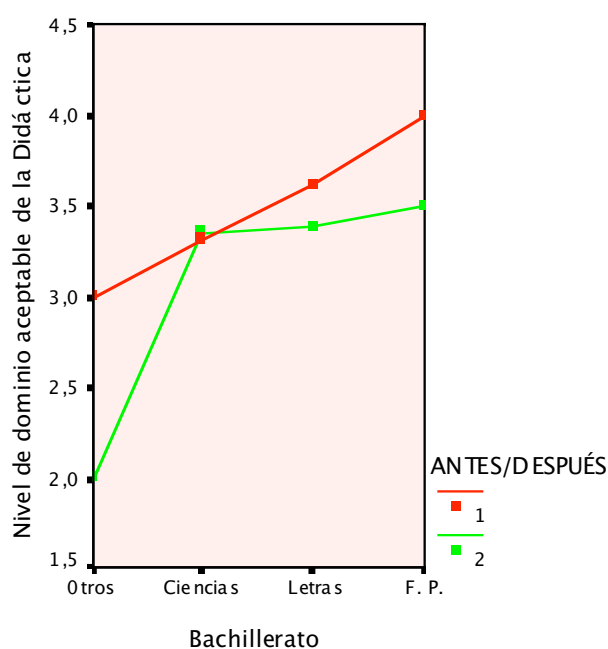


**Figura 386: Estimación de “dominio aceptable de la Didáctica” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura se puede ver que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un nivel aceptable de la Didáctica” son los que provienen de Formación Profesional, y los que están menos de acuerdo son los que llamamos Otros —alumnos que accedieron a la Universidad mediante el examen para mayores de 25 años—. Después de dicho estudio, para los alumnos que cursaron un bachillerato de Ciencias se mantiene la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica”; para los demás disminuye.

Para poder ver todos los niveles críticos relativos a “dominio aceptable de Didáctica”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se tiene la tabla siguiente.

|                                          | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>DOMINIO ACEPTABLE de la Didáctica</b> | Antes / después: $p=0.895$ |                                                   | 375    |
|                                          | Antes / después: $p=0.855$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.680$       | 376    |
|                                          | Antes / después: $p=0.130$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.058$          | 377    |
|                                          | Antes / después: $p=0.714$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.819$        | 378    |
|                                          | Antes / después: $p=0.632$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.896$         | 379-80 |
|                                          | Antes / después: $p=0.084$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.068$ | 381    |
|                                          | Antes / después: $p=0.064$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.228$ | 382    |

**Tabla 60: “Dominio aceptable de la Didáctica”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**

### 5.3.4.7. No es necesario saber Didáctica

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas no es necesario saber Didáctica; con la intuición que tiene cualquier persona para enseñar es suficiente. En este caso se toman las afirmaciones *no es necesario saber Didáctica*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que “no es necesario saber Didáctica”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=1.000>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=1.000>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total, da también  $1.000>0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: los alumnos responden mayoritariamente, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, que están nada de acuerdo o poco de acuerdo (93% antes frente al 95% después).

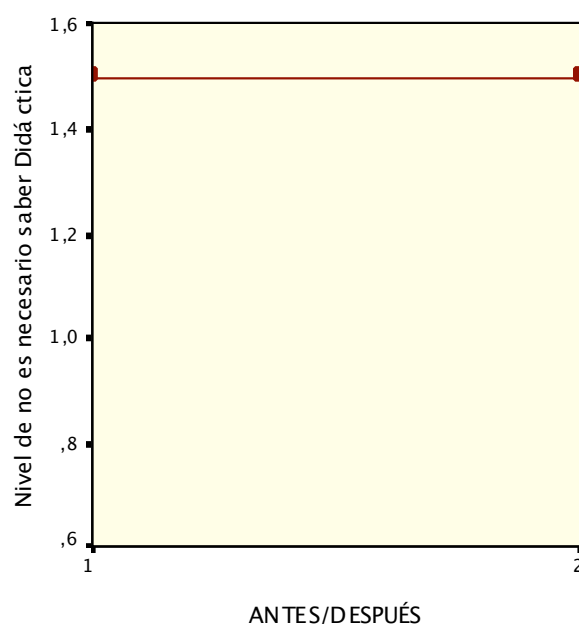


**Figura 387: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después.**

Como se puede observar en esta figura, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene la idea de que “no es necesario saber Didáctica” para proponer actividades para Educación Infantil. En el estudio de frecuencias se vio que aumentaba un 2%, esto no lo detecta el modelo lineal general de medidas repetidas.

## Género

Se van tomando variables inter-sujeto empezando por “el género” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y resultan, en los distintos estadísticos que proporciona, niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego parece ser que la idea de que “no es necesario saber Didáctica” no depende del “género”.



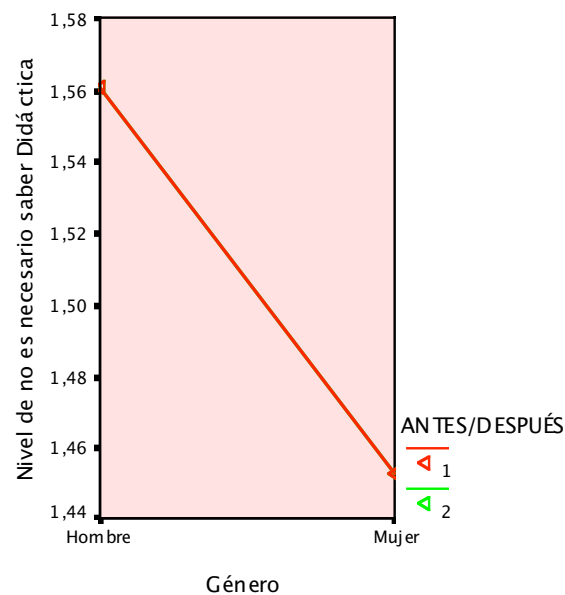


**Figura 388: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “género”.**

En este caso se tiene una situación excepcional, que aclaramos con la figura que viene a continuación. En esta figura coinciden los valores de las respuestas que dieron los alumnos antes del estudio del tema y de las técnicas con las que dieron después. Como en este caso los valores asignados a la variable son análogos a los anteriores, las consecuencias son también iguales a las que se tenían entonces. Se puede afirmar que las mujeres están menos de acuerdo que los hombres con que “no es necesario saber Didáctica”.

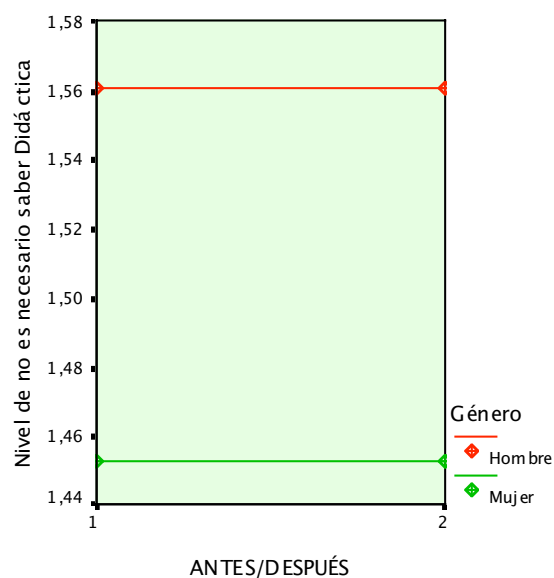


**Figura 389: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “género”.**

Como ya se decía al analizar la figura anterior, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene la idea de que “no es necesario saber Didáctica” tanto para los hombres como para las mujeres.

### Año de realización

Se elige como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver la repercusión que puede tener en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. Se utiliza el modelo lineal general de medidas repetidas para realizar el estudio y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se ha de afirmar que la idea de que “no es necesario saber Didáctica” no parece depender del “año de realización”.

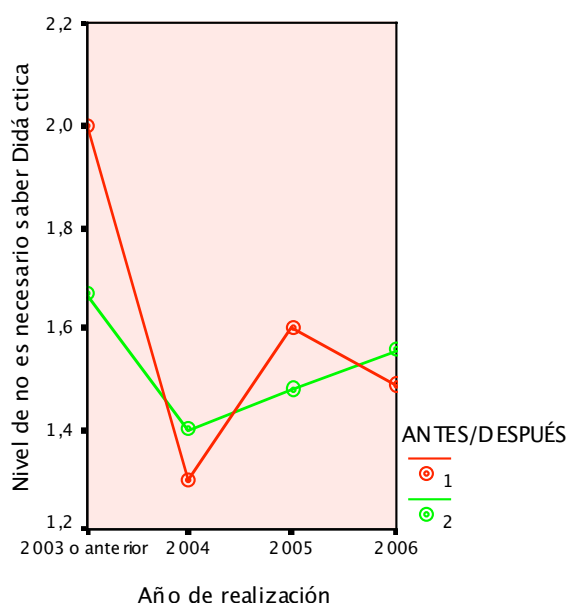


**Figura 390: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “año de realización”.**

Se puede ver en esta figura que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica” son los que respondieron las encuestas el curso 2003/2004 y los que están más de acuerdo son los que las respondieron en 2002/2003 ó anteriores. Después del citado estudio, aumenta la idea de que “no es necesario saber Didáctica” para los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004 y para los que las respondieron en 2005/2006; para los demás disminuye.

## Curso

Se considera “el curso” como variable inter-sujeto para analizar cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. Se utiliza el modelo lineal general de medidas repetidas y se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego se puede afirmar que “el curso” no influye significativamente en la idea de que “no es necesario saber Didáctica”.

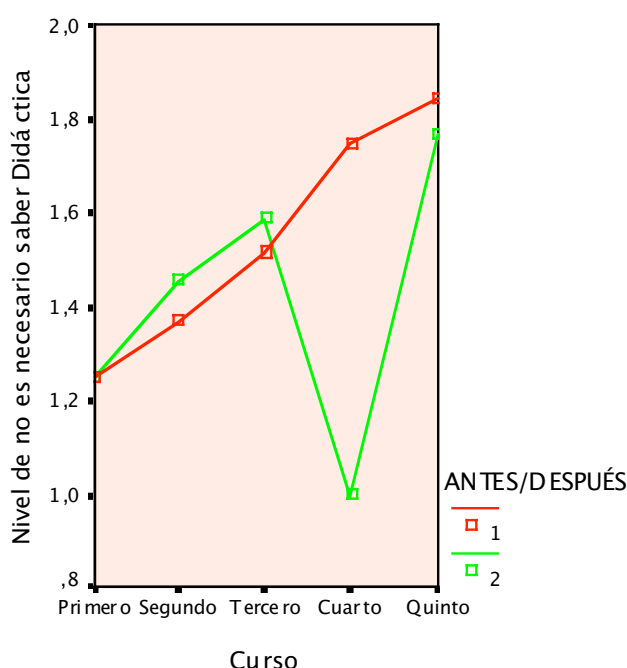


**Figura 391: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “curso”.**

En esta figura se puede ver que, antes del estudio del tema y de las técnicas, el nivel de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica” va aumentando con el curso, siendo los de primero los que están menos de acuerdo y los de quinto los que lo están más. Después del mencionado estudio disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica” para los que cursaban cuarto y quinto, se mantiene para los de primero y aumenta levemente para los demás.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber

Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego parece ser que la idea de que “no es necesario saber Didáctica” no depende significativamente de “la edad”.

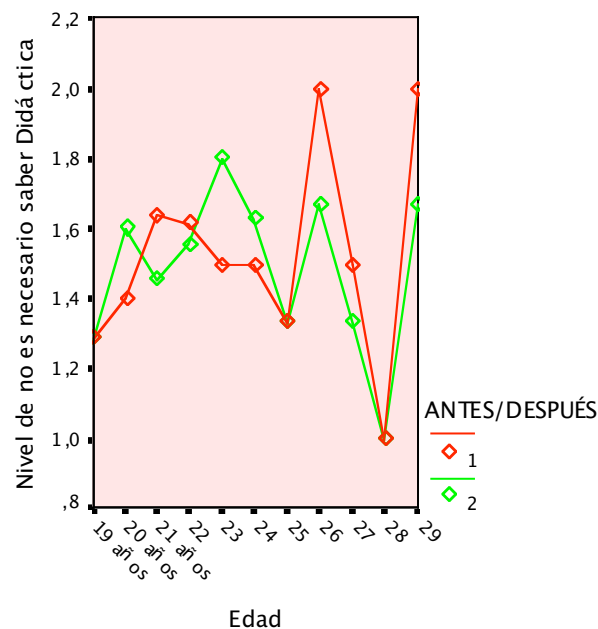


**Figura 392: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “edad”.**

El menor nivel de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, procede de los alumnos que tenían 28 años, y el mayor nivel de acuerdo, antes de dicho estudio, proviene de los alumnos que tenían 26 ó 29 años, y después, de los que tenían 23 años.

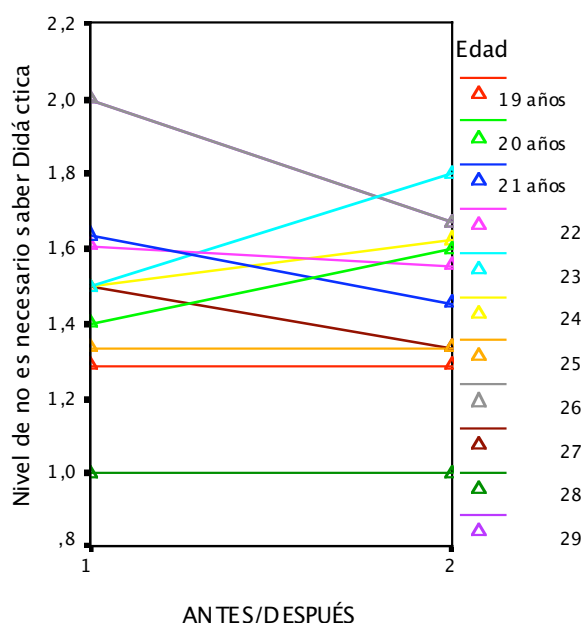


**Figura 393: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “edad”.**

En esta figura coinciden los valores de las respuestas de los alumnos de 26 años con los de 29 años, como se puede ver en esta figura y en la anterior. Después del estudio del tema y de las técnicas disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica” para los alumnos que tenían 21, 22, 26, 27 ó 29 años; se mantiene para los que tenían 19, 25 ó 28 años; para los demás aumenta.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica” para preparar actividades para Educación Infantil. Se observa, en los distintos estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas, que se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede concluir que “la especialidad” no tiene repercusión significativa en la idea de que “no es necesario saber Didáctica”.

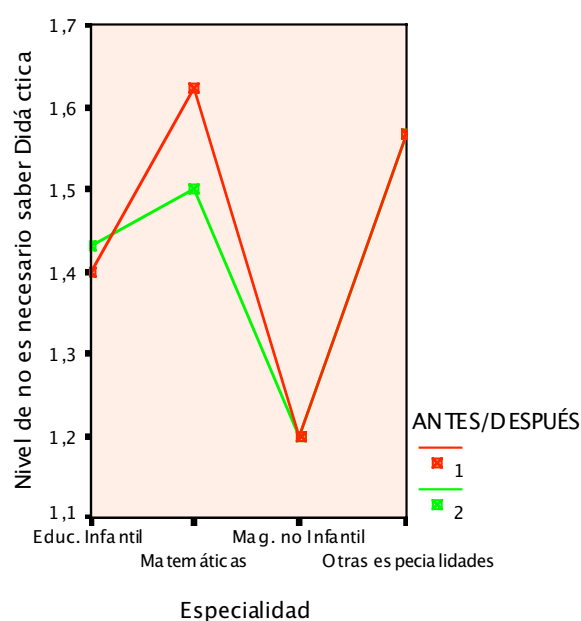


**Figura 394: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “especialidad”.**

Se puede observar en esta figura que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica” son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil. Los que están más de acuerdo, antes del citado estudio, son los de la licenciatura de Matemáticas, y, después, los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas.

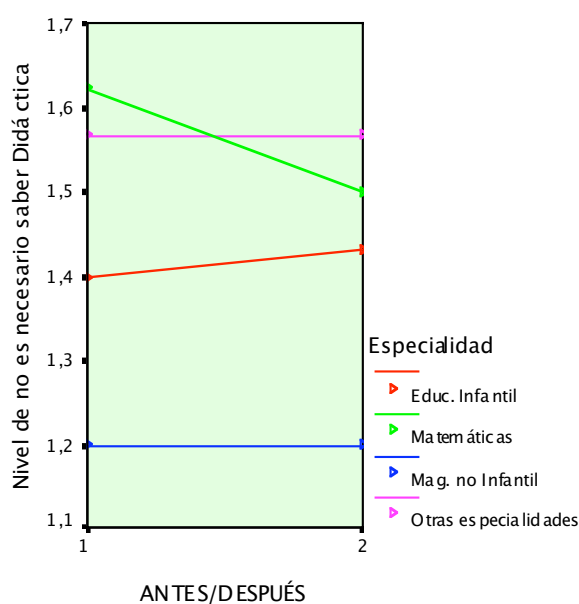


**Figura 395: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “especialidad”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica” en los alumnos de la licenciatura de Matemáticas, se mantiene en los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y aumenta levemente en los demás.

## Bachillerato

Se elige como variable inter-sujeto “el bachillerato” para estudiar si influye en la idea de que “no es necesario saber Didáctica”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los distintos estadísticos dan:  $p=0.029 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “bachillerato” en que “no es necesario saber Didáctica”, dentro del mismo bachillerato, y  $p=0.054 > 0.05$  cuando se considera entre los distintos bachilleratos. Por tanto, se puede afirmar que, antes y después del estudio y de las técnicas, existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos dentro del mismo bachillerato y no existen diferencias significativas entre dos bachilleratos distintos.

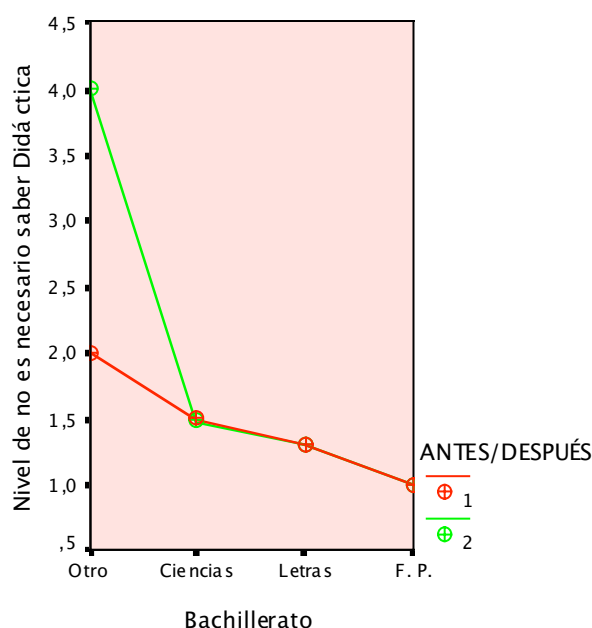


**Figura 396: Estimación de “no es necesario saber Didáctica” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura se ve que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica” son los de Formación Profesional, y los que están más de acuerdo son los que llamamos Otros —alumnos procedentes de acceso a la Universidad para mayores de 25 años.

Después de dicho estudio y de las técnicas, se mantiene la idea de que “no es necesario saber Didáctica” en casi todos los alumnos menos en los que llamamos Otros, que aumenta.

Todos los niveles críticos obtenidos al trabajar con las afirmaciones “no es necesario saber Didáctica”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se recogen en la tabla siguiente.

|                                                    | Momento                      | Interacción                                       | Figura |
|----------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>NO ES<br/>NECESARIO<br/>saber<br/>Didáctica</b> | Antes / después: $p=1.000$   |                                                   | 383    |
|                                                    | Antes / después: $p=1.000$   | Antes / después y <b>Género</b> : $p=1.000$       | 384-5  |
|                                                    | Antes / después: $p=0.560$   | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.572$          | 386    |
|                                                    | Antes / después: $p=0.262$   | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.307$        | 387    |
|                                                    | Antes / después: $p=0.677$   | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.905$         | 388-9  |
|                                                    | Antes / después: $p=0.842$   | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.962$ | 390-1  |
|                                                    | Antes / después: $p=0.029^*$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.54$  | 392    |

**Tabla 61: “No es necesario saber Didáctica”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

#### 5.3.4.8. Dominio total de la Didáctica de la Matemática

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes tener un **dominio total de la Didáctica de la Matemática**. En este caso se toman, como variables intra-sujetos: *se debe tener un dominio total la Didáctica de la Matemática*, antes y después del estudio del tema. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que se debe tener un “dominio total de la Didáctica de la Matemática”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.703>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.703>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la



medida total poblacional vale cero, da también  $0.703 > 0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: la mayoría está muy de acuerdo o bastante de acuerdo antes y después de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa (56% y 58% respectivamente). Después del estudio del tema y de las técnicas aumenta levemente el porcentaje de los que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo; disminuye, por tanto, el porcentaje de los que están poco de acuerdo o nada de acuerdo.

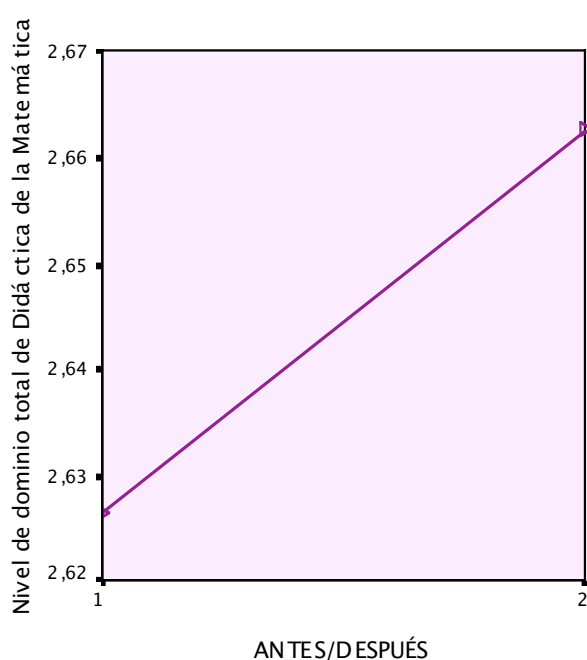


**Figura 397: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después.**

Teniendo en cuenta que los valores asignados a la variable objeto de estudio son los mismos que los que se han asignado anteriormente, las consecuencias son las mismas y no se van a repetir. A la vista de la figura que precede, se puede decir que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que se debe tener un “dominio total de la Didáctica de la Matemática”.

## Género

Se empieza con “el género” eligiendo variables inter-sujeto para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que se debe tener un “dominio total de la Didáctica de la Matemática” para preparar

actividades para Educación Infantil. Se utiliza el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” no depende del “género”.

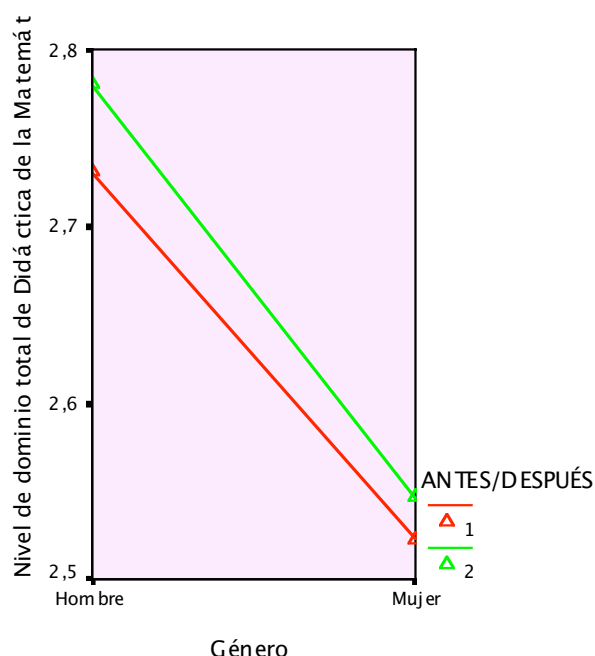


**Figura 398: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “género”.**

La figura que acompaña muestra que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están más de acuerdo que las mujeres con que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática”. Tanto para los hombres como para las mujeres, después del citado estudio, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática”.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de la encuesta para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” no depende significativamente del “año de realización”.

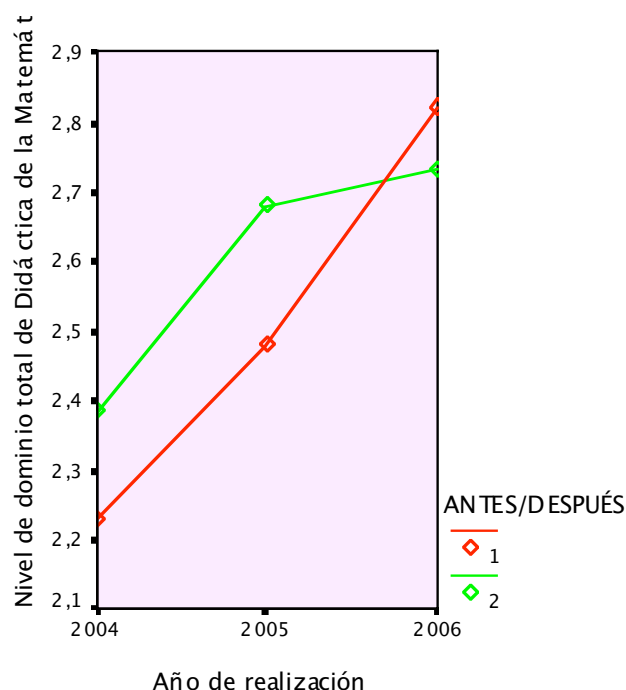


**Figura 399: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “año de realización”.**

Se puede ver en la figura que precede que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, según van pasando los años va aumentando la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática”. Después del mencionado estudio, sólo para los que respondieron las encuestas en los cursos 2003/2004 y 2004/2005 aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática”; para los demás disminuye.

## Curso

Se considera como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona; luego se puede afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” no depende del “curso”.

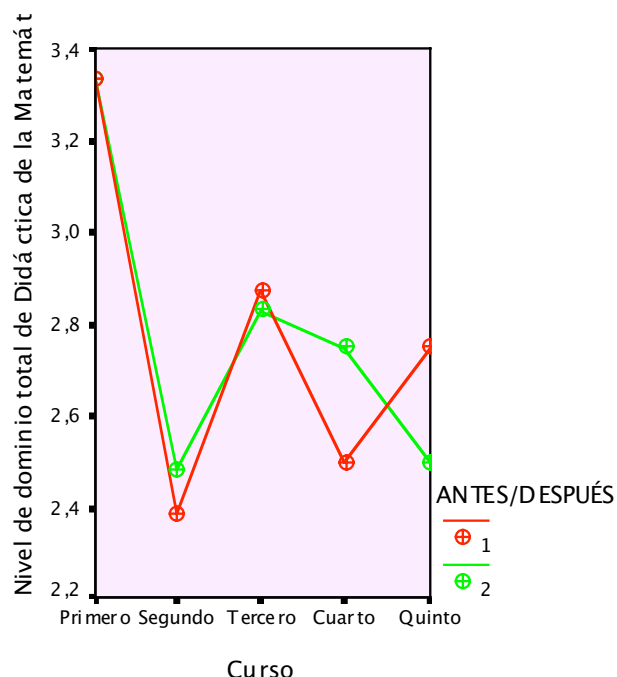


**Figura 400: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” son los que cursaban primero, y los que están menos de acuerdo son los de segundo. Después de dicho estudio, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” para los que estaban matriculados en segundo y cuarto, se mantiene para los que estaban en primero y desciende para el resto.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la edad” no influye significativamente en la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática”.

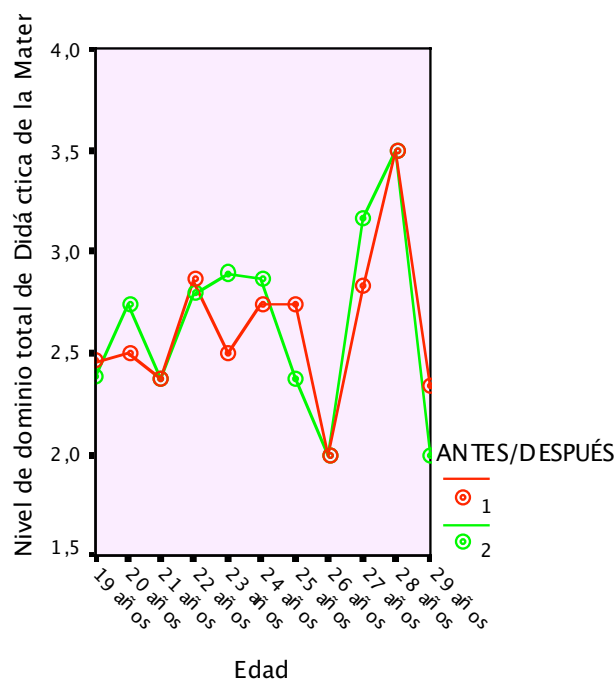


**Figura 401: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.**

La figura que precede y la que sigue informan de que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que tenían 28 años son los que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática”, y los alumnos que están menos de acuerdo son los de 26 años; además, a éstos, después de dicho estudio, se añaden los de 29 años.

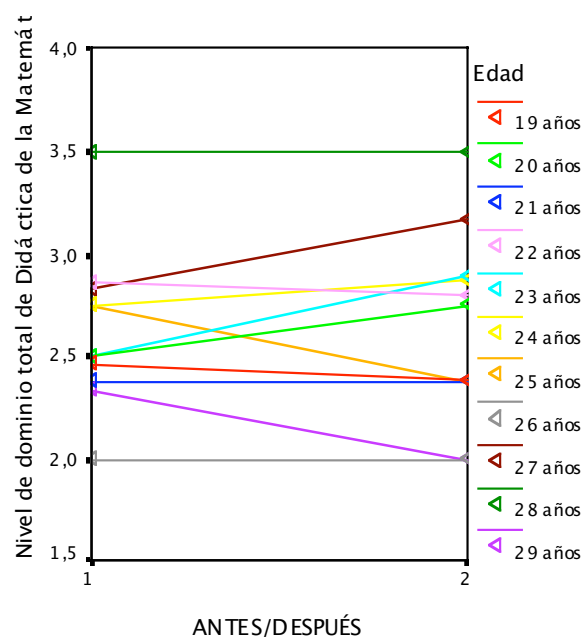


**Figura 402: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.**

Con esta figura y la anterior se puede informar de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” para los que tenían 20, 23, 24 ó 27 años, se mantiene para los que tenían 21, 26 ó 28 años, y para los demás disminuye.

## Especialidad

Se considera como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” a la hora de preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y resultan, en los distintos estadísticos que proporciona, niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” no parece depender significativamente de “la especialidad”.

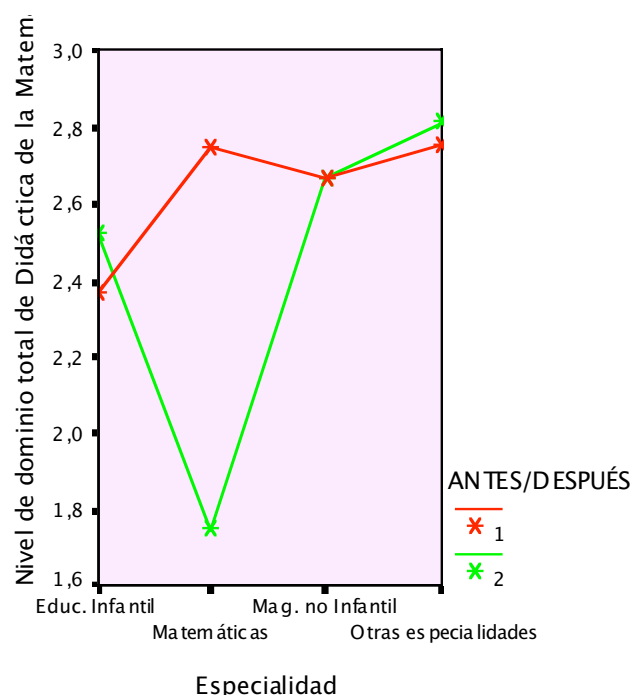


**Figura 403: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.**

La figura que precede señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” son los de la licenciatura de Matemáticas, y los que están menos de acuerdo son los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil. Después del citado estudio la situación cambia radicalmente, pasando a ser los alumnos de

otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas los que están más de acuerdo y los de la licenciatura de Matemáticas los que están menos de acuerdo.

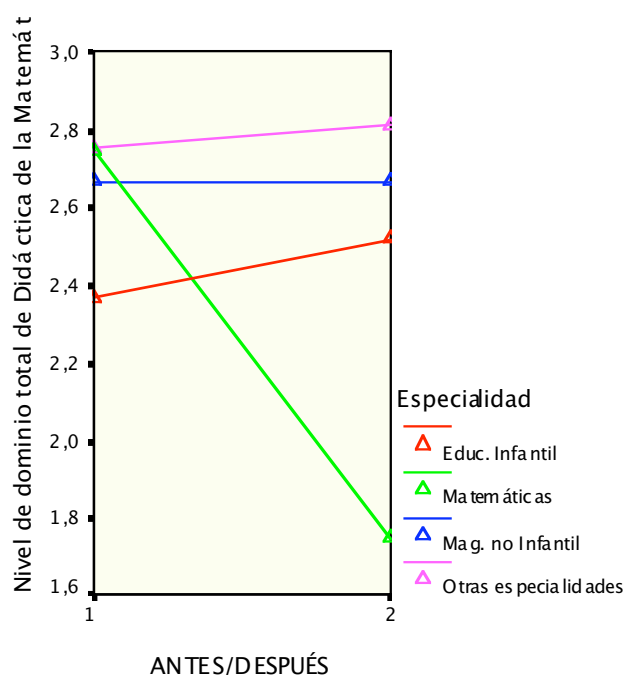


**Figura 404: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.**

Como se puede deducir de la figura que acompaña, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” para los que cursaban las especialidades de Magisterio de Educación Infantil y otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, se mantiene para los alumnos de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, y disminuye para los de la licenciatura de Matemáticas.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se usa el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego “el bachillerato” parece no influir significativamente en la idea de que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática”.

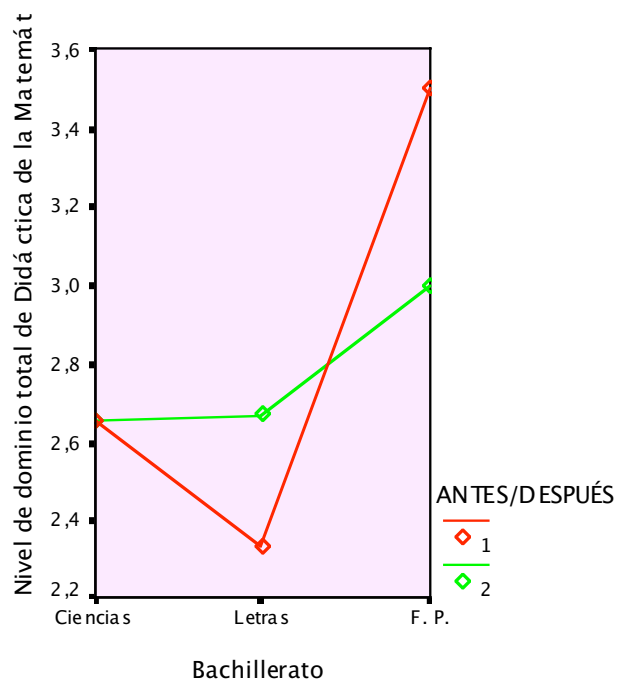


**Figura 405: Estimación de “se debe dominar totalmente la Didáctica de Matemática” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura señala que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” son los de Formación Profesional, y los que están menos de acuerdo, antes de dicho estudio, son los que cursaron un bachillerato de Letras, y después son también éstos y los de Ciencias. Después del citado estudio, aumenta la idea de que “se debe dominar totalmente la Didáctica de la Matemática” en los alumnos que cursaron el bachillerato de Letras, se mantiene para los de Ciencias y disminuye para los que provienen de Formación profesional.

En la tabla que viene a continuación se pueden observar todos los niveles críticos obtenidos trabajando con las afirmaciones “dominio total de la Didáctica de la Matemática”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.



|                                                                       | Momento                    | Interacción                                       | Figura  |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|---------|
| <b>DOMINIO<br/>TOTAL<br/>de la Didáctica<br/>de la<br/>Matemática</b> | Antes / después: $p=0.703$ |                                                   | 393     |
|                                                                       | Antes / después: $p=0.704$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.896$       | 394     |
|                                                                       | Antes / después: $p=0.412$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.355$          | 395     |
|                                                                       | Antes / después: $p=0.939$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.756$        | 396     |
|                                                                       | Antes / después: $p=0.847$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.842$         | 397-8   |
|                                                                       | Antes / después: $p=0.245$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.096$ | 399-400 |
|                                                                       | Antes / después: $p=0.803$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.317$ | 401     |

**Tabla 62: “Dominio total de la Didáctica de la Matemática”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.9. Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes conocer la Didáctica de la Matemática que tenga alguna repercusión en Educación infantil. En este caso se toma como variables intra-sujetos *se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática* antes y después del estudio del tema. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.346 > 0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.346 > 0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, es también  $0.346 > 0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: es abrumadora la respuesta dada: un 95% antes y un 91% después considera que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo con que se

debe conocer la Didáctica de la Matemática que tenga alguna repercusión en Educación Infantil.

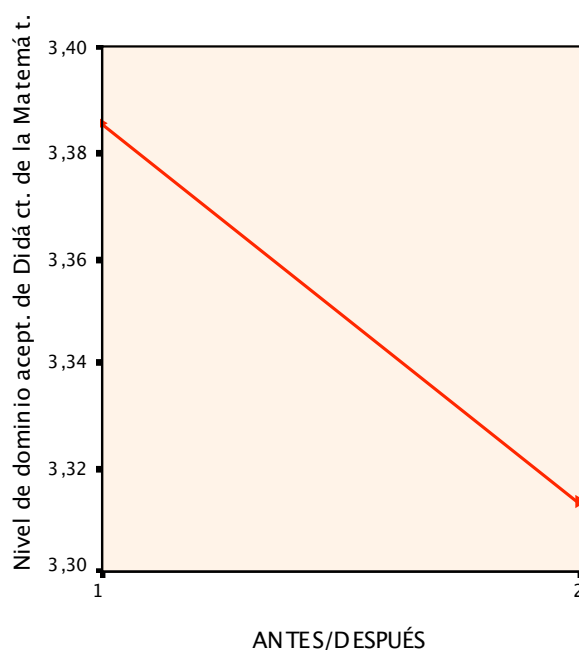


**Figura 406: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después.**

Teniendo en cuenta los valores asignados a la variable “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” que son análogos a los que se tenían en el apartado anterior, se puede afirmar que al aumentar el número, aumenta el grado de acuerdo, y recíprocamente. Se puede observar en esta figura que después del estudio del tema y de las técnicas disminuye la idea de que se debe tener un “dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”.

## Género

Se empieza eligiendo como variable inter-sujeto “el género” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” no depende del “género”.

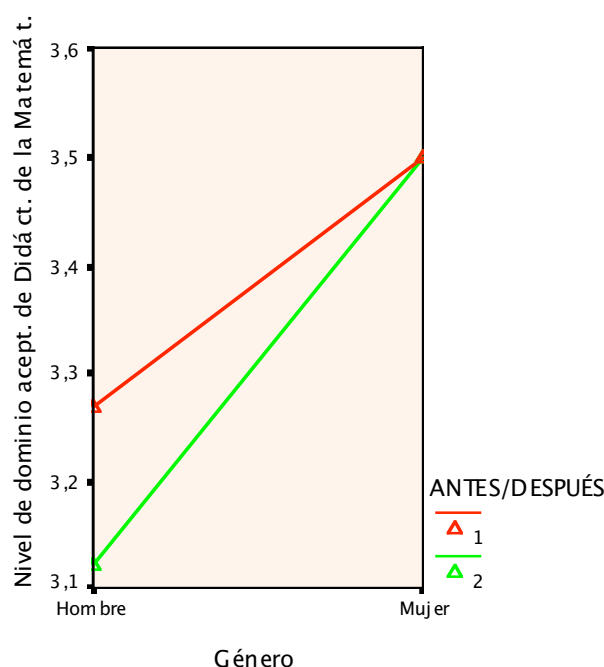


**Figura 407: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “género”.**

Esta figura facilita la información de que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres están más de acuerdo que los hombres en que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”. Después del citado estudio, en las mujeres se mantiene la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”; sin embargo, para los hombres disminuye.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego la idea de que se debe tener un “dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” no se explica por “el año de realización”.

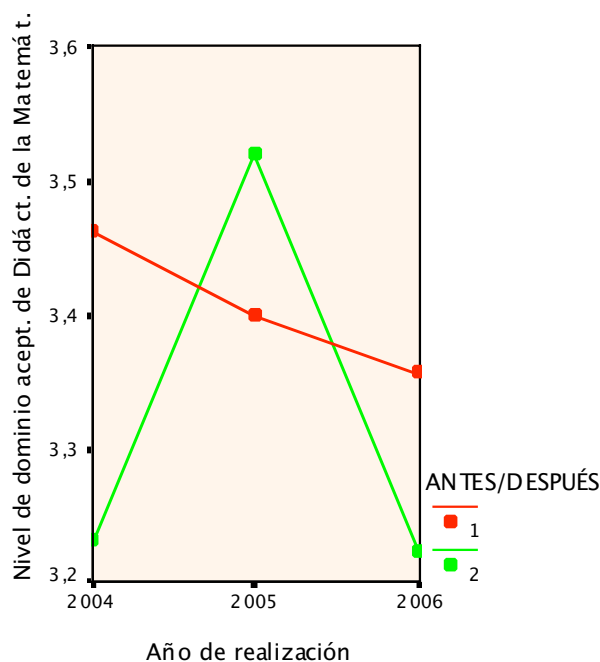


**Figura 408: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “año de realización”.**

En esta figura se puede observar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, a medida de que aumenta el año de realización de las encuestas, disminuye levemente la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”. Después del mencionado estudio, la situación cambia radicalmente: los que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” son los que respondieron las encuestas en 2004/2005, y están menos de acuerdo los demás. Después de dicho estudio, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” para los alumnos que respondieron las encuestas en el año 2004/2005, para los demás casos disminuye.

## Curso

Se considera como variable inter-sujeto “el curso” en qué estén matriculados los alumnos para ver cómo influye en la opinión de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05. Por tanto, se ha de afirmar que “el curso” no influye significativamente en la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”.

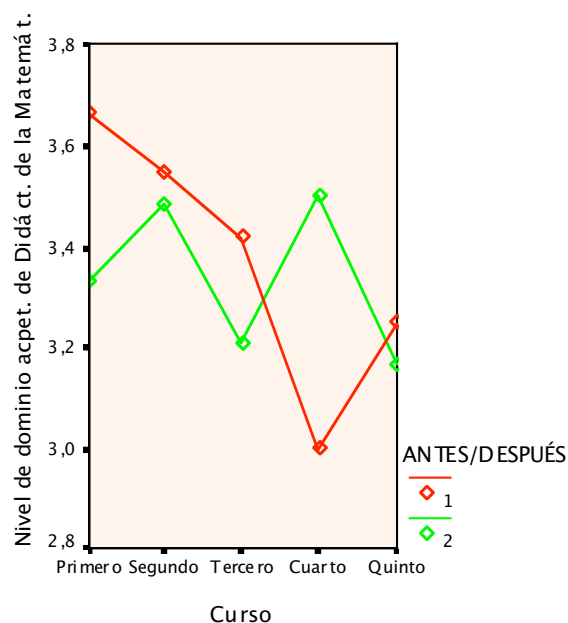


**Figura 409: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.**

Esta figura y la que sigue indica que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que estaban matriculados en primero son los que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática”, y los que están menos de acuerdo son los de cuarto. Después del mencionado estudio, los alumnos que están más de acuerdo son los que estaban matriculados en cuarto y los que están menos de acuerdo son los de quinto.

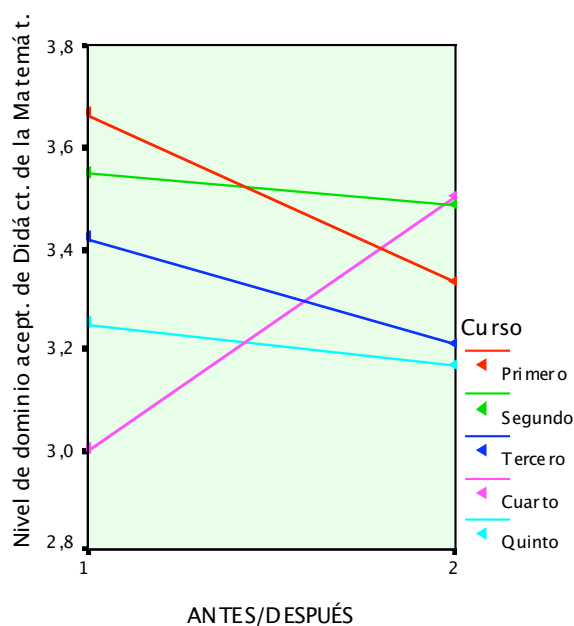


**Figura 410: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.**

Esta figura y la anterior muestra que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” para los alumnos que cursaban cuarto, para los demás disminuye.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se ha de afirmar que la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” no depende de “la edad”.

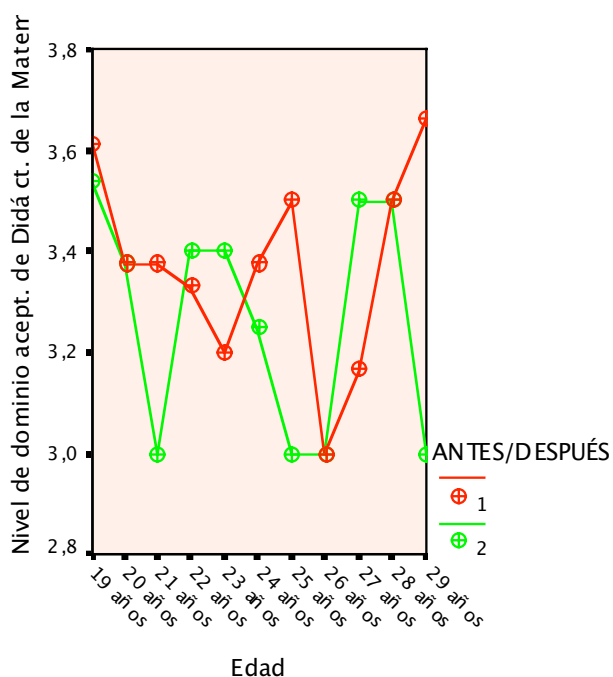


**Figura 411: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.**

En esta figura y en la que sigue se puede ver que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” son los que tenían 29 años, y los que están menos de acuerdo son los que tenían 26. Después de dicho estudio la situación cambia radicalmente, siendo los que tenían 19 años los que están más

de acuerdo y los que tenían 21, 26, 25 ó 29 años los que están menos de acuerdo.

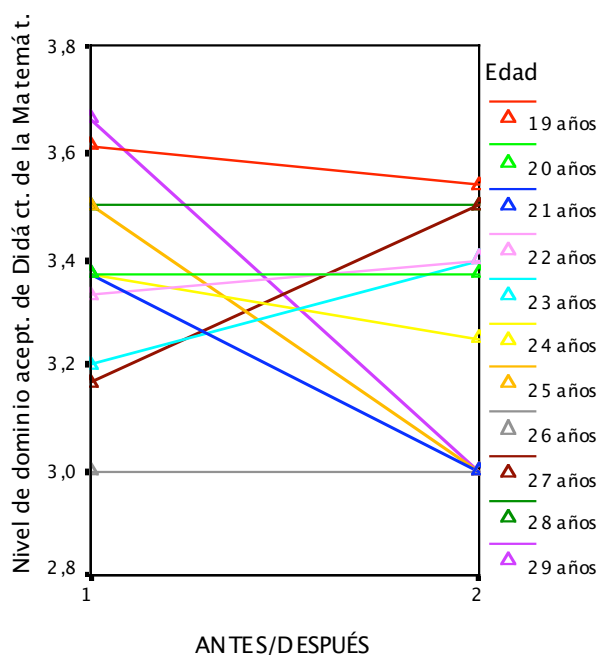


**Figura 412: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.**

Esta figura y la anterior informan de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” para los alumnos que tenían 22, 23 ó 27 años, se mantiene para los que tenían 20, 26 ó 28 años, y disminuye para los demás.

## Especialidad

Se toma como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego se puede afirmar que la idea de que se debe tener un “dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” no depende significativamente de “la especialidad”.

Se elige Post hoc para comparar las distintas especialidades; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones Post hoc con objeto de ver qué media en concreto difiere de qué otra se

va a utilizar el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias. En este caso se observa que sólo entre las especialidades de Educación Infantil y otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas se obtienen los niveles críticos  $p=0.025<0.05$ , luego sólo entre estas especialidades hay diferencias significativas.

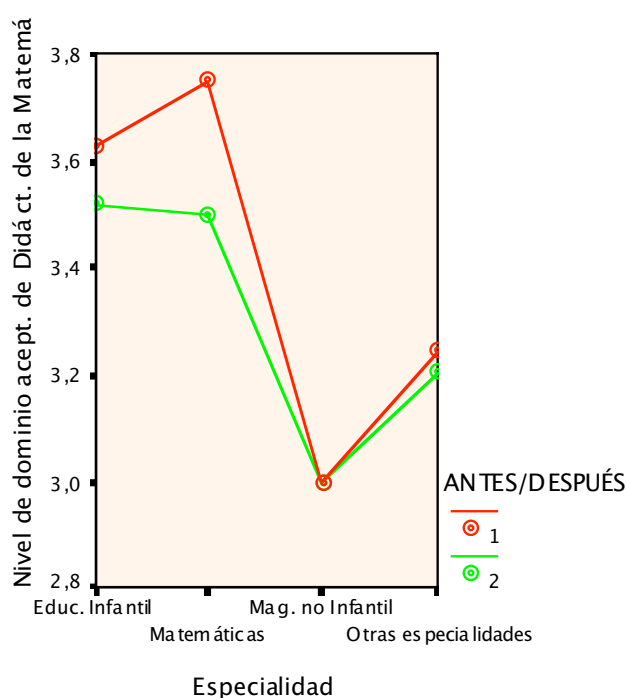


**Figura 413: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.**

Esta figura indica que los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” son: antes del estudio del tema y de las técnicas, los de la licenciatura de Matemáticas, y después, los de Educación Infantil. Los que están menos de acuerdo son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil. Después del citado estudio, para casi todas las especialidades disminuye levemente la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”, excepto para los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, que se mantiene.

## Bachillerato

Se elige como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que se debe tener un “dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” para preparar actividades



para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego se puede concluir que la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” no depende del “bachillerato”.

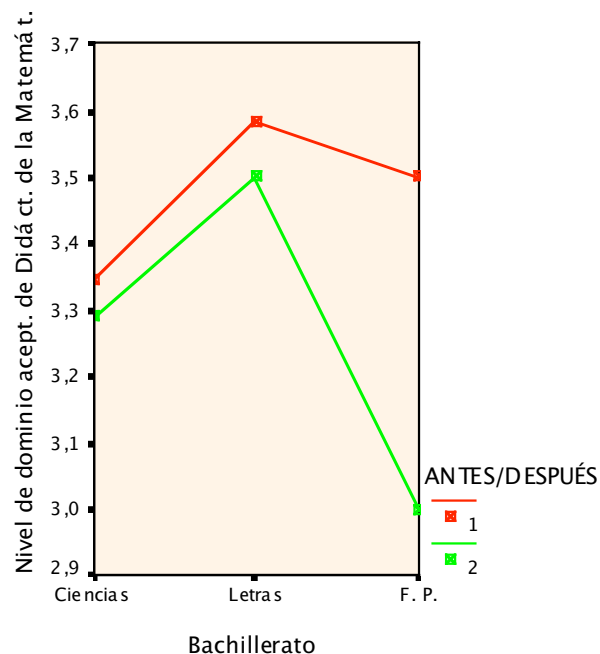


**Figura 414: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de Didáctica de la Matemática” antes/después, por “bachillerato”.**

La figura que acompaña informa de que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo en que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática” son los que cursaron un bachillerato de Letras, y los que están menos de acuerdo son: antes, los de Ciencias, y después, los de Formación Profesional.

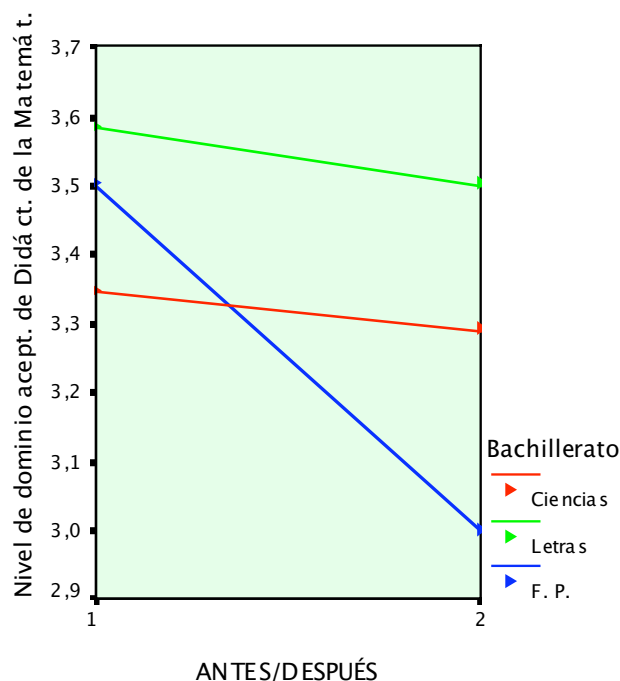


Figura 415: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio total de la Didáctica de la Matemática” antes/después, por “bachillerato”.

La figura que precede indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática”, cualquiera que sea el bachillerato cursado.

Recogemos en la siguiente tabla todos los niveles críticos obtenidos cuando trabajábamos con las afirmaciones “dominio aceptable de Didáctica de la Matemática”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                                        | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>DOMINIO<br/>ACEPTABLE<br/>de Didáctica<br/>de la<br/>Matemática</b> | Antes / después: $p=0.346$ |                                                   | 402    |
|                                                                        | Antes / después: $p=0.340$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.340$       | 403    |
|                                                                        | Antes / después: $p=0.346$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.232$          | 404    |
|                                                                        | Antes / después: $p=0.733$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.332$        | 405-6  |
|                                                                        | Antes / después: $p=0.272$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.354$         | 407-8  |
|                                                                        | Antes / después: $p=0.479$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.926$ | 409    |
|                                                                        | Antes / después: $p=0.239$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.679$ | 410-1  |

Tabla 63: “Dominio aceptable de Didáctica de la Matemática”.  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

#### 5.3.4.10. No es necesario saber Didáctica de la Matemática

Se considera la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, no es necesario saber nada de Didáctica de la Matemática, sabiendo algo de Matemáticas y de Didáctica es suficiente para analizar hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre ella, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las variables intra-sujeto *no es necesario saber nada de Didáctica de la Matemática*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el mencionado estudio en la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.469>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.469>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.469>0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: es abrumadora la respuesta dada: hay una mayoría aplastante que no está de acuerdo en que no es necesaria la Didáctica de la Matemática (93% antes y 95% después).

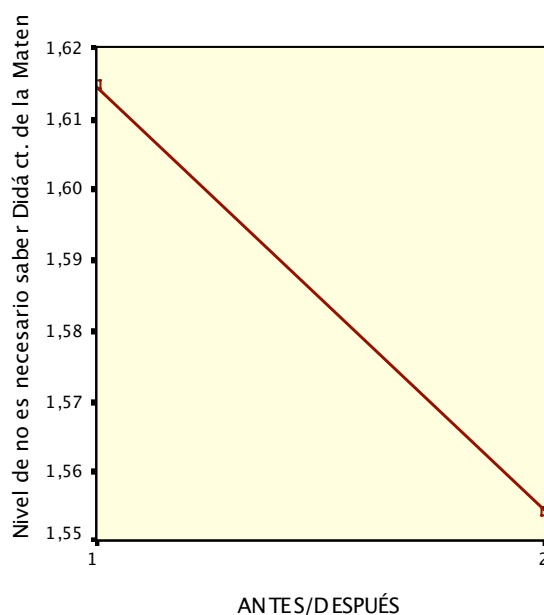


**Figura 416: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después.**

Teniendo en cuenta los valores asignados a la variable “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” que son los mismos que los que se vienen asignando hasta ahora, a la vista de la figura precedente se tiene que concluir que después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye el nivel de acuerdo. Lo que se obtiene en este caso no coincide con lo que se tenía cuando se estudió la variación mediante las frecuencias, por tanto, se tendrá que hacer otro estudio para ver si se confirma o se desmiente.

Para analizar mejor lo que ocurre en este caso se utilizan las pruebas para muestras relacionadas ya que éstas permiten analizar datos provenientes de diseños con medidas repetidas. Para ello, en pruebas no paramétricas, se eligen los pares “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”, antes y después del estudio del tema, como tipo de prueba se toma Wilcoxon. Se obtienen niveles críticos mayores que 0.05, luego la diferencia de valores no es significativo: el estudio del tema y de las técnicas no influye en la opinión de los alumnos de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”. Esto era lo que se tenía antes. Pensamos que tenemos que quedarnos con lo que decía el estudio de frecuencias por los problemas que tiene el modelo lineal general, y que ya hemos comentado. Además, hay otras razones que nos llevan a decidirnos por el estudio de frecuencias; una de ellas es el grado de abandono por parte de los alumnos a la hora de responder la encuesta después del estudio del tema; otra razón puede ser que el modelo lineal

general parece que, en ciertas ocasiones, no percibe la diferencia del 2%, como ya hemos visto en casos anteriores.

## Género

Tomamos como variable inter-sujeto “el género” para ver si influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “el género” parece no influir significativamente en la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”.

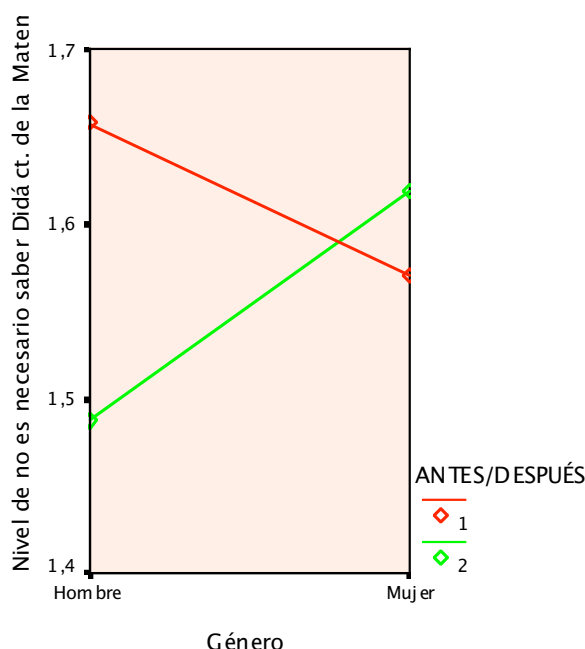


**Figura 417: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “género”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están más de acuerdo que las mujeres en que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”, después la situación se invierte. Después del citado estudio, para los hombres disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”, y para las mujeres aumenta levemente.

## Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es

necesario saber Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego se puede afirmar que la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” no depende del “año de realización”.

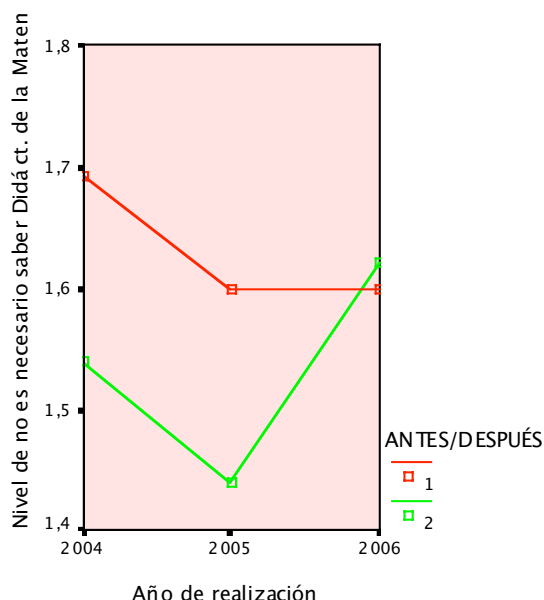


**Figura 418: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” son los que respondieron a las encuestas en los cursos 2004/2005 y en 2005/2006, y los que están menos de acuerdo son los que las respondieron en 2003/2004. Después de dicho estudio, los que respondieron las encuestas en 2004/2005 siguen siendo los que están más de acuerdo, y los que las respondieron en 2005/2006 pasan a ser los que están menos de acuerdo. Después del citado estudio, disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para los que respondieron las encuestas en 2003/2004 y en 2004/2005 y para los demás aumenta levemente.

## Curso

Se elige como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la idea de los alumnos de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y resultan, en

los distintos estadísticos que proporciona, niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” no depende del “curso”.

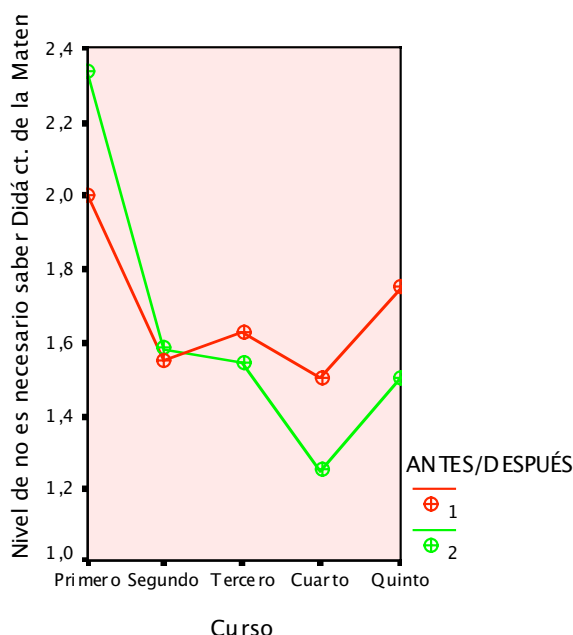


**Figura 419: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” son los que estaban matriculados en cuarto, y los que están más de acuerdo son los de primero.

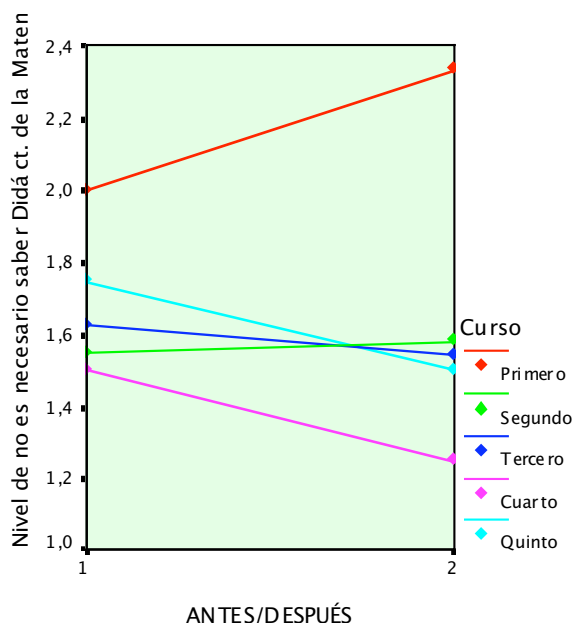


**Figura 420: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “curso”.**

Se observa en esta figura y en la anterior que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para los alumnos que estaban cursando tercero, cuarto o quinto, prácticamente se mantiene para los que estaban en segundo, y sólo aumenta para los de primero.

## Edad

Se elige como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego rechazamos la hipótesis de que la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” dependa de “la edad” que tuvieran los alumnos.

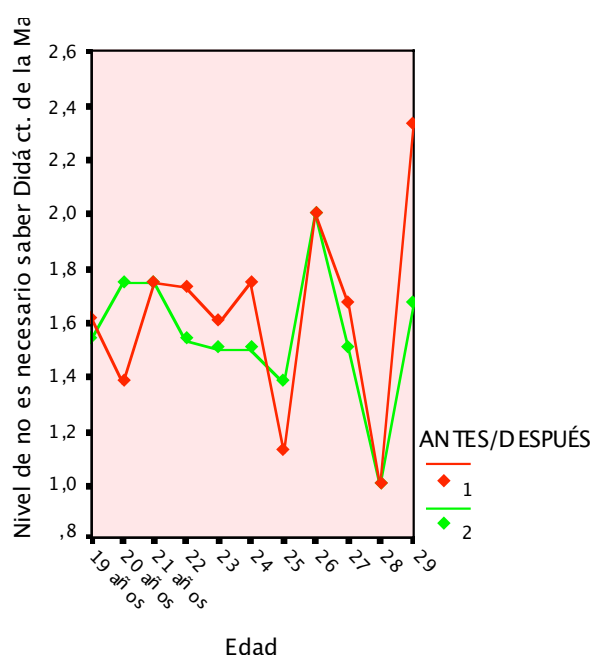


Figura 421: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.

Observando la figura que precede y la que sigue se puede ver que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” son los que tenían 28 años, y los que están menos de acuerdo son los que tenían 29 años. Después de dicho estudio los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber



Didáctica de la Matemática” siguen siendo los que tenían 28 años, y los que están más de acuerdo son los que tenían 26 años.

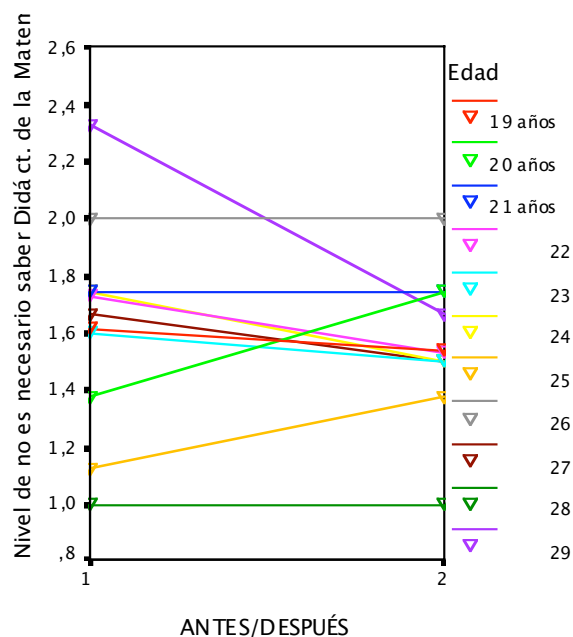


**Figura 422: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “edad”.**

Con esta figura y la anterior se puede observar que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para los alumnos que tenían 19, 22, 23, 24, 27 ó 29 años, se mantiene para los que tenían 21, 26 ó 28 años, y aumenta para el resto.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” no depende de “la especialidad”.

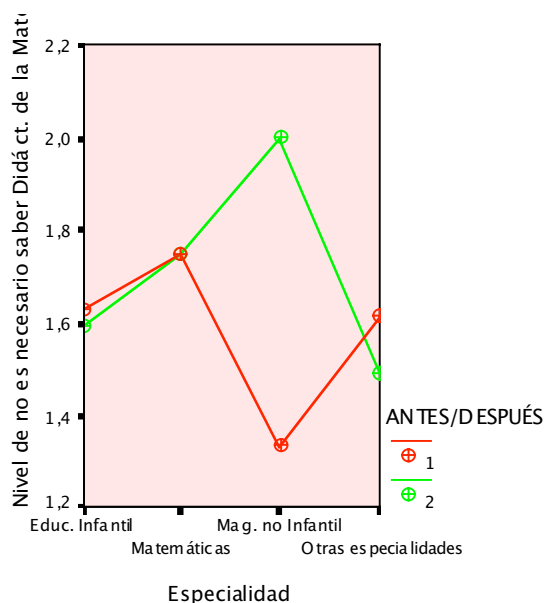


**Figura 423: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.**

La figura que precede informa de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, y los que están más de acuerdo son los de Matemáticas. Después, los que están menos de acuerdo son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, y los que están más de acuerdo pasan a ser los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

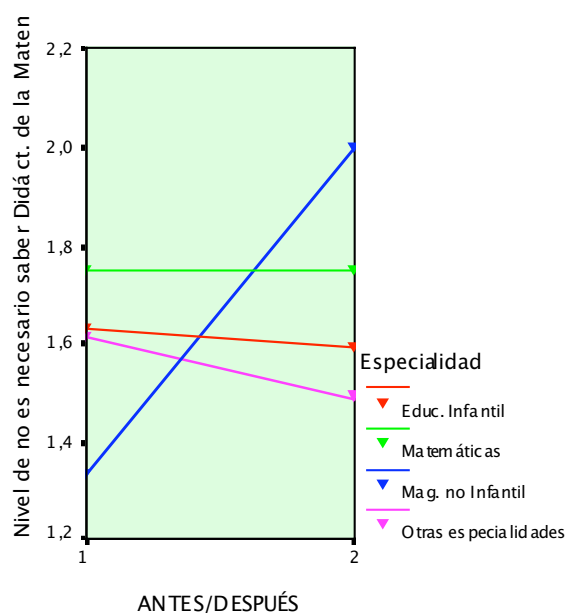


**Figura 424: Ampliación de la comparación: “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “especialidad”.**

Como en otras ocasiones, esta figura viene a completar y a aclarar la información que aportaba la figura anterior, Además, se puede ver que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para los alumnos de Educación Infantil y para los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, se mantiene para los alumnos de Matemáticas y aumenta para el resto.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “el bachillerato” no influye significativamente en la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”.

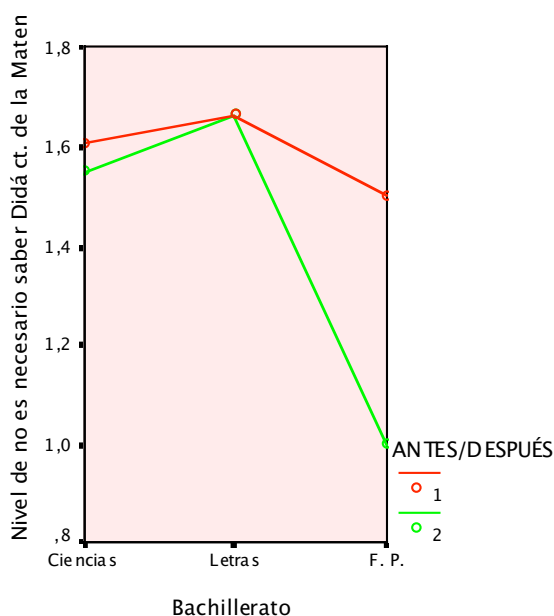


**Figura 425: Estimación de “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura se puede ver que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario saber Didáctica de la Matemática” son los que provienen de Formación Profesional, y los que están más de acuerdo son los que cursaron el bachillerato de Letras. Después de dicho estudio, disminuye la idea de que “no es necesario saber Didáctica de la

Matemática” para todos los alumnos, excepto para los de Letras que se mantiene.

La tabla que viene a continuación recoge todos los niveles críticos obtenidos al trabajar con las afirmaciones “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| NO ES<br>NECESARIO<br>saber<br>Didáctica de la<br>Matemática | Momento                    | Interacción                                      | Figura |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|--------|
|                                                              | Antes / después: $p=0.469$ |                                                  | 412    |
|                                                              | Antes / después: $p=0.458$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.189$       | 413    |
|                                                              | Antes / después: $p=0.306$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.562$          | 414    |
|                                                              | Antes / después: $p=0.748$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.711$        | 415-6  |
|                                                              | Antes / después: $p=0.471$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.728$         | 417-8  |
|                                                              | Antes / después: $p=0.403$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.372$ | 419-20 |
|                                                              | Antes / después: $p=0.346$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.690$ | 421    |

**Tabla 64: “No es necesario saber Didáctica de la Matemática”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.11. Dominio total de la Psicología

Se comienza a estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes dominar totalmente la Psicología: ser licenciado en Psicología. En este caso se toman las afirmaciones *se debe dominar totalmente la Psicología*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. Se seguirán eligiendo sucesivamente las variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en su idea de que “se debe tener un dominio total de Psicología”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.026<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también son  $p=0.026<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, es también  $0.026<0.05$ . Por tanto, no se puede aceptar esta hipótesis y se concluye que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: los resultados de las encuestas son análogos a los que teníamos en el caso de las Matemáticas (91% y 90% poco o nada, antes y después respectivamente).

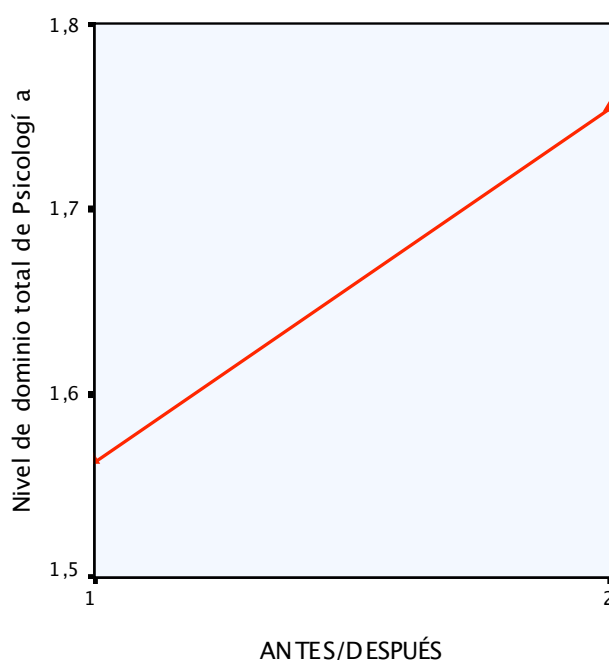


**Figura 426: Estimación del “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable “se debe dominar totalmente la Psicología” son los mismos que vienen siendo habituales, a la vista de la figura que precede, resulta que después del estudio del tema y de las técnicas, están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de Psicología”.

## Género

Se elige como variable inter-sujeto “el género” para estudiar si influye en la opinión de que “para proponer actividades a los niños de Educación Infantil se debe tener un dominio total de Psicología”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.032 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en que “se debe tener un dominio total de Psicología”, dentro del mismo género, y  $p=0.641 > 0.05$  cuando se considera entre los géneros, y los asociados a las cuatro versiones del

estadístico F toman también los mismos valores, luego se puede concluir que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos, antes y después del citado estudio, dentro del mismo género y no existe diferencias significativas entre ambos géneros.

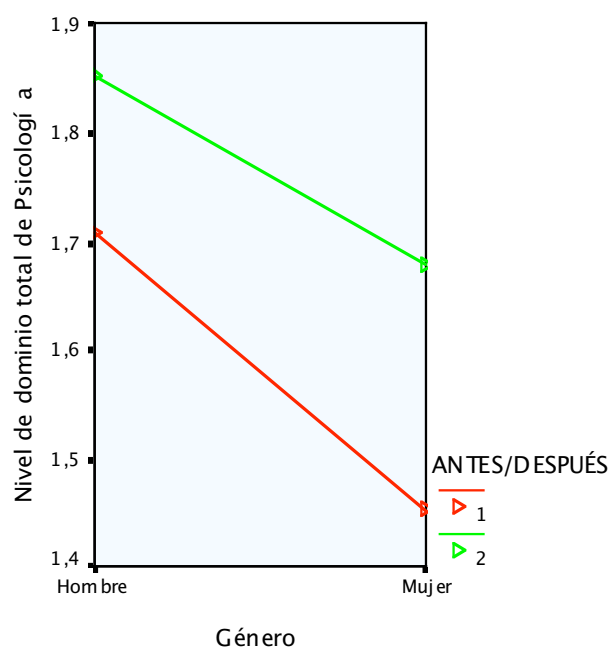


**Figura 427: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “género”.**

Esta figura dice que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están más de acuerdo que las mujeres con que “se debe dominar totalmente la Psicología”. Después del mencionado estudio, tanto para los hombres como para las mujeres aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de la Psicología”; pensamos que puede ser debido a las dificultades que encuentran a la hora de pensar en plantear actividades para los niños de 3 a 6 años.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar si influye en la opinión de que “se debe tener un dominio total de Psicología”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.040 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “año de realización” de las encuestas en que “se debe tener un dominio total de Psicología”, dentro del mismo año de realización, y son  $p=0.783 > 0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F

también toman los mismos valores. Por esto se puede afirmar que existen diferencias significativas en las opiniones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro del mismo año de realización de las encuestas y no existe diferencias significativas entre los distintos años de realización.

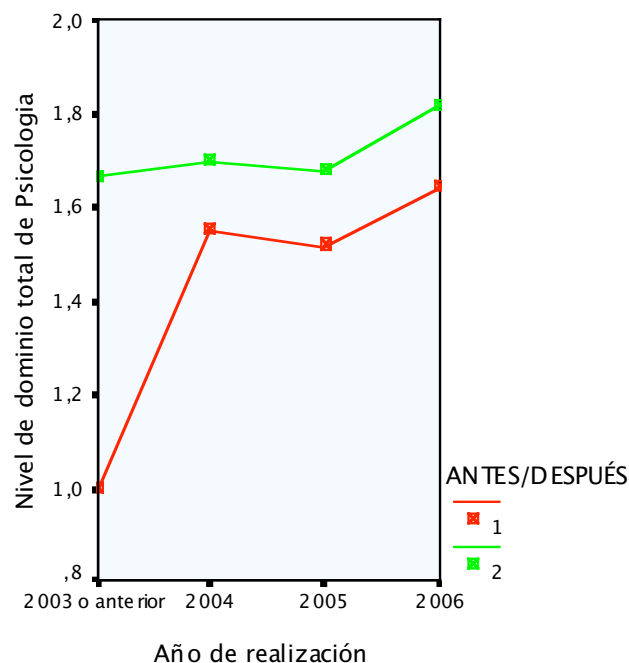


**Figura 428: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura y la que sigue indican que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006 son los que están más de acuerdo en que “se debe tener un dominio total de Psicología”, y los alumno que las respondieron en 2002/2003 ó anteriores son los que están menos de acuerdo.

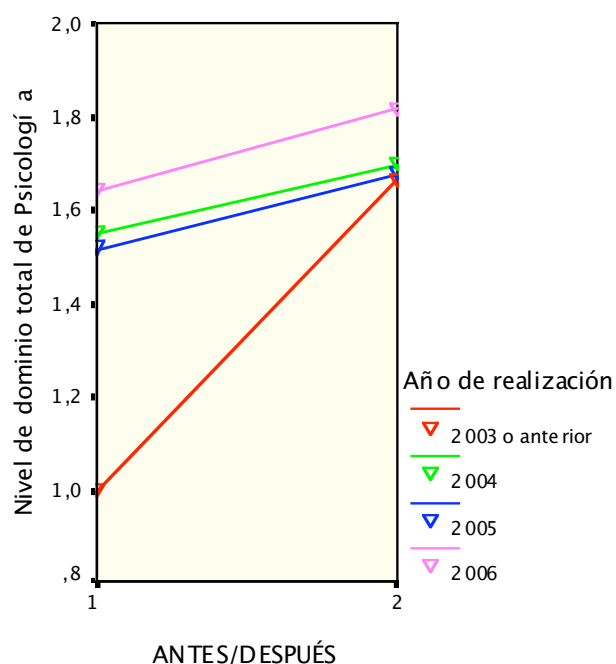


**Figura 429: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “año de realización”.**

En esta figura y en la anterior se observa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, cualquiera que fuera el año en que respondieron las encuestas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de la Psicología”.

## Curso

Se considera como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio total de la Psicología” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se necesita tener un dominio total de Psicología” no depende del “curso”.



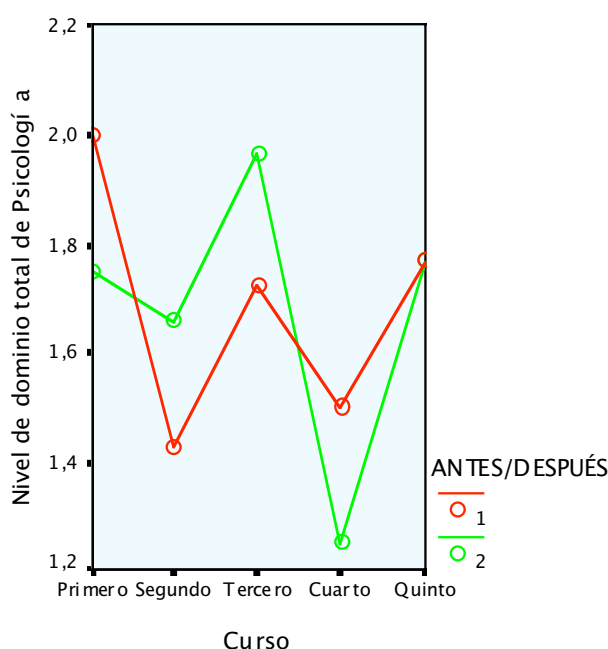


Figura 430: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “curso”.

Se puede observar en esta figura que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de Psicología” son los que estaban matriculados en primero, y los que están menos de acuerdo son los de segundo. Después del citado estudio la situación varía radicalmente, siendo los de tercero los que están más de acuerdo y los de cuarto los que menos.

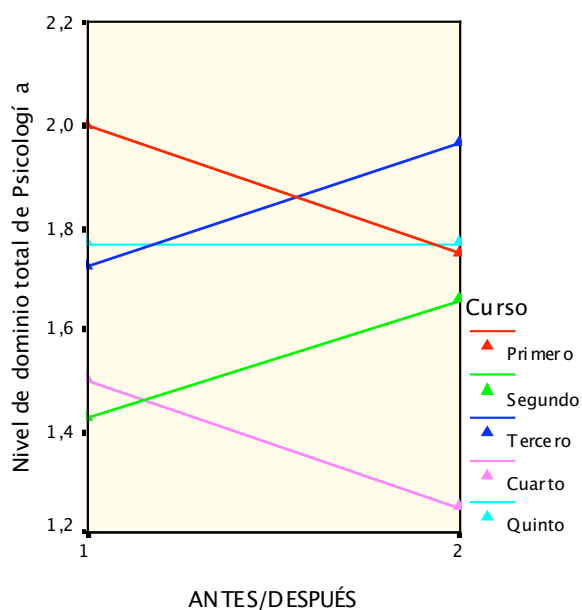


Figura 431: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “curso”.

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de Psicología” para los que estaban matriculados en segundo o tercero, se mantiene para los de quinto y disminuye para los demás.

## Edad

Se elige como variable inter-sujeto “la edad” de los alumnos para analizar si influye en la opinión de que “se debe tener un dominio total de Psicología”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.029<0.05$  cuando se considera la influencia de “la edad” en que “se debe tener un dominio total de Psicología”, dentro de la misma edad, y  $p=0.551>0.05$  cuando se considera entre las distintas edades, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman los mismos valores. Por tanto, se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos con la misma edad, antes y después del citado estudio, y no existe diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos con distintas edades.

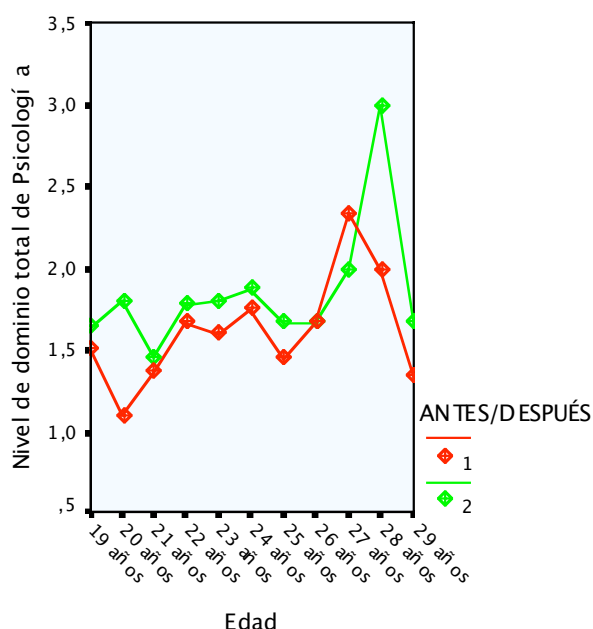


**Figura 432: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “edad”.**

Esta figura y la que sigue muestran que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo en que “se debe tener un dominio total de Psicología” son los que tenían 27

años, y los que están menos de acuerdo son los que tenían 20 años. Después, pasan a ser los alumnos con 28 años los que están más de acuerdo y los de 21 años los que están menos de acuerdo.

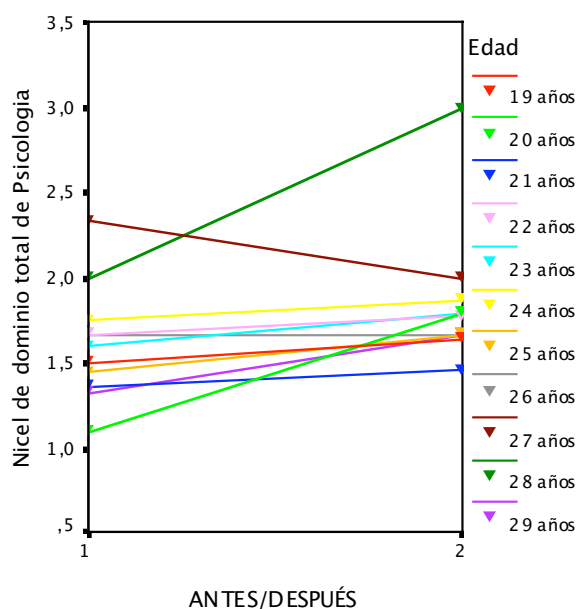


**Figura 433: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “edad”.**

Se puede observar en la figura que precede que, después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todos aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de Psicología”, excepto para los que tenían 27 años que disminuye.

## Especialidad

Se toma como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio total de Psicología para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se necesita tener un dominio total de la Psicología” no depende de “la especialidad”.

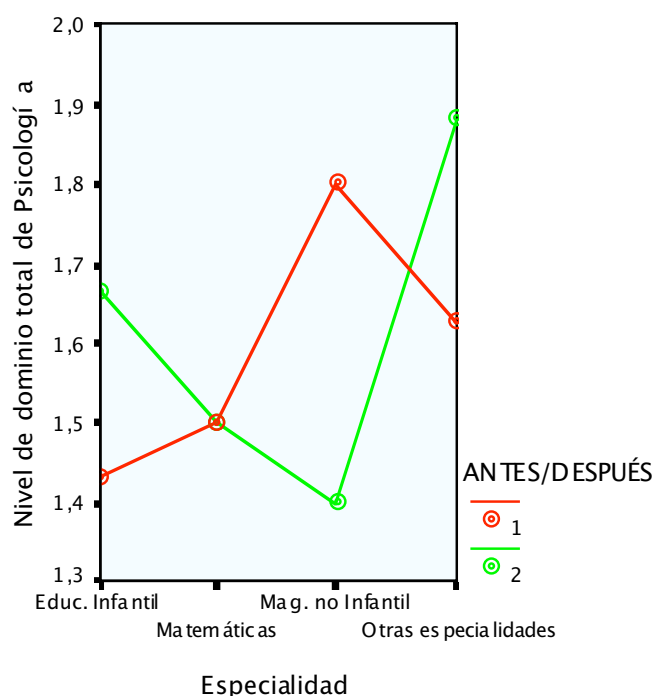


**Figura 434: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “especialidad”.**

En esta figura se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo en que “se debe tener un dominio total de Psicología” son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, y los que están menos de acuerdo son los de Magisterio de Educación Infantil. Después, la situación cambia radicalmente pasando a ser los de Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas los que están más de acuerdo —quizás sea por la dificultad que han tenido en imaginarse lo que el niño de esas edades podría hacer, para proponerle actividades—, y los que están menos de acuerdo son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

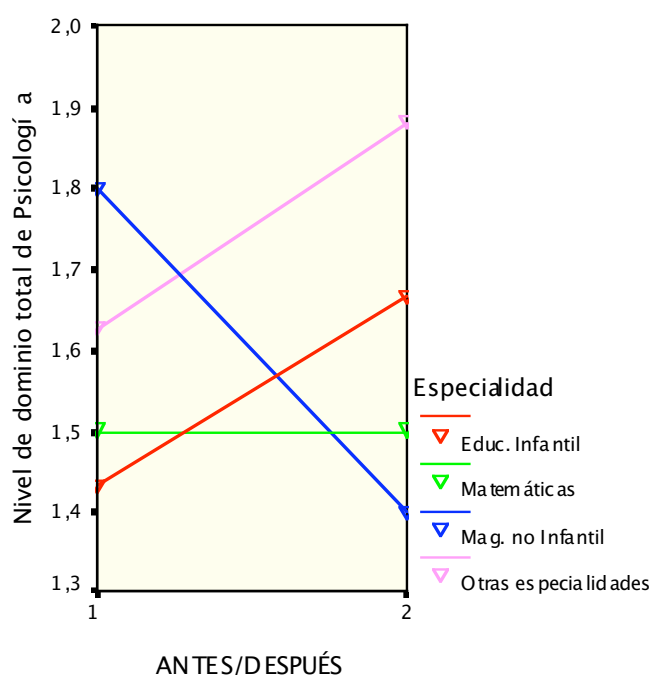


**Figura 435: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por especialidad.**

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe dominar totalmente la Psicología” para los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y para Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, se mantiene para los de la licenciatura de Matemáticas y disminuye para los demás.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio total de Psicología para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “se necesita tener un dominio total de Psicología” no depende del “bachillerato”.

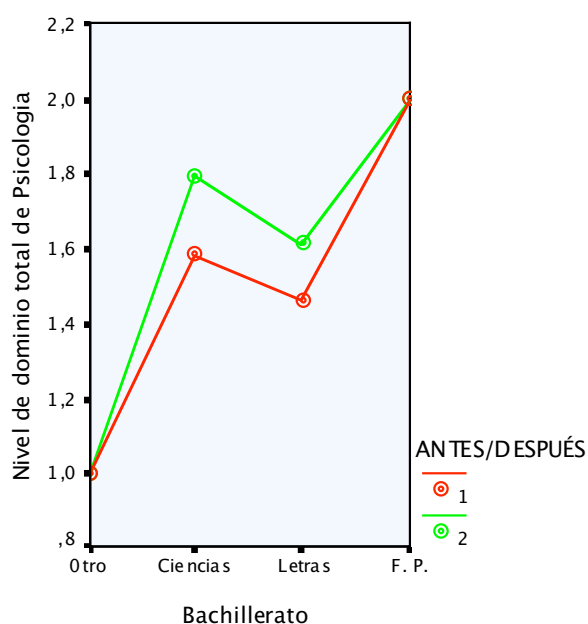


**Figura 436: Estimación de “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura señala que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio total de Psicología” son los que proceden de Formación Profesional, y los que están menos de acuerdo son los que llamamos Otros (alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años).

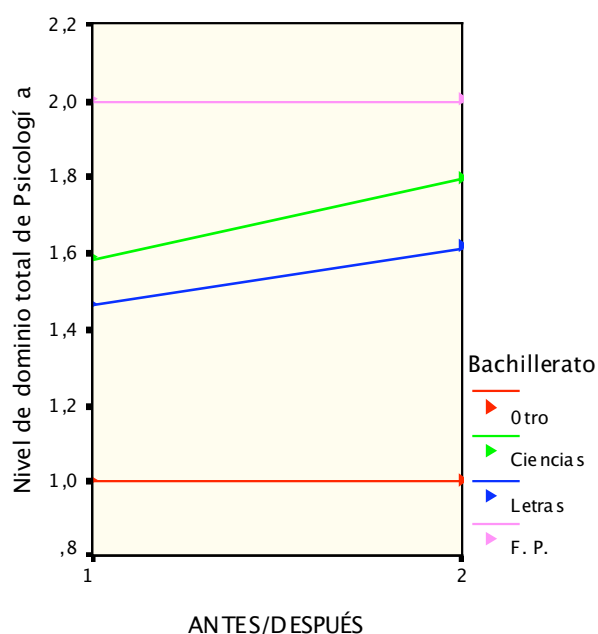


**Figura 437: Ampliación de la comparación: “se debe dominar totalmente la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.**

La figura que precede informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio total de Psicología” en los alumnos que cursaron bachilleratos de Ciencias o de Letras, y se mantiene en los demás. Destacamos que en este caso no desciende el nivel para ninguna de las submuestras consideradas.

Los niveles críticos obtenidos al estudiar la influencia del estudio del tema y de las técnicas en la variable “se debe de dominar totalmente la Psicología”, en ambos momentos, se recogen en la tabla siguiente.

|                                                   | Momento                      | Interacción                                       | Figura |
|---------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>DOMINIO<br/>TOTAL<br/>de la<br/>Psicología</b> | Antes / después: $p=0.026^*$ |                                                   | 422    |
|                                                   | Antes / después: $p=0.032^*$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.641$       | 423    |
|                                                   | Antes / después: $p=0.040^*$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.783$          | 424-5  |
|                                                   | Antes / después: $p=0.965$   | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.586$        | 426-7  |
|                                                   | Antes / después: $p=0.029^*$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.551$         | 428-9  |
|                                                   | Antes / después: $p=0.861$   | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.335$ | 430-1  |
|                                                   | Antes / después: $p=0.733$   | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.975$ | 432-3  |

**Tabla 65: “Dominio total de la Psicología”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.12. Dominio aceptable de la Psicología

Vamos a estudiar hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, debes conocer la Psicología que te permita entender al niño de esas edades, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las variables intra-sujeto *se debe dominar a un nivel aceptable la Psicología*, antes y después del estudio del tema. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.251 > 0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan  $p=0.251 > 0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las

opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.251 > 0.05$ , luego se puede concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: en su mayoría responden que están muy de acuerdo o bastante de acuerdo (87% antes y 91% después). Aumenta este porcentaje después del estudio del tema y de las técnicas.

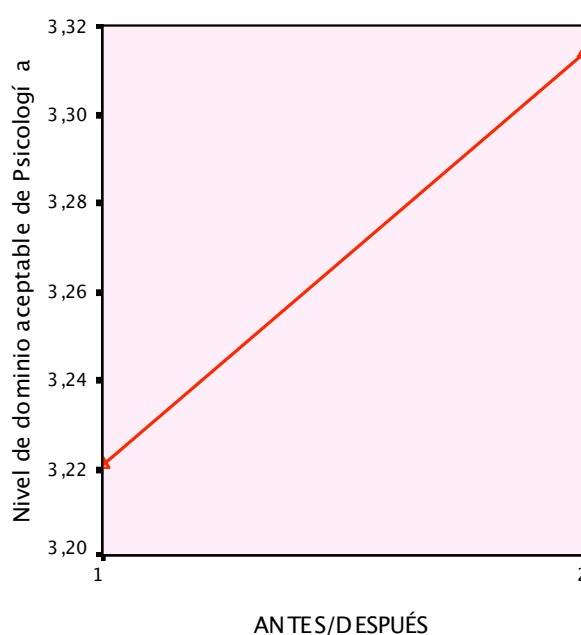


**Figura 438: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después.**

Con esta figura se puede afirmar que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que se debe tener un “dominio aceptable de la Psicología”.

## Género

Se elige como variable inter-sujeto “el género” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede



afirmar que la idea de que se necesita tener un dominio aceptable de Psicología no depende del “género”.

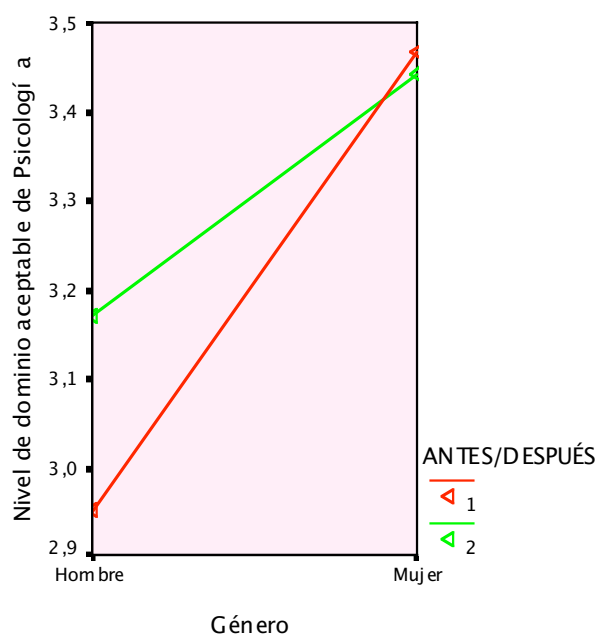


**Figura 439: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “género”.**

En esta figura se observa que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están más de acuerdo que las mujeres en que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología”. Después de dicho estudio, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología” para los hombres y disminuye levemente para las mujeres.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver si existe alguna influencia con la opinión de los alumnos sobre que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego “el año de realización” no tiene una repercusión significativa en la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología”.

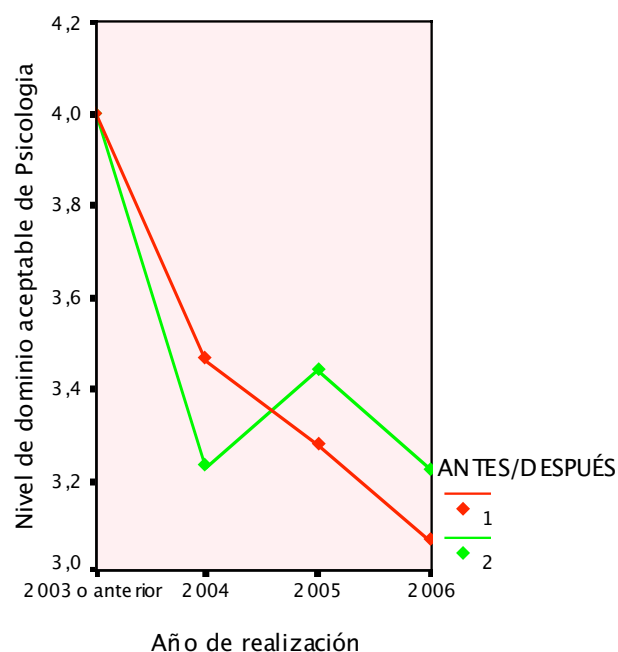


**Figura 440: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura indica que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología” son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores. Antes del citado estudio va disminuyendo progresivamente, según van pasando los años, dicha idea y los que están menos de acuerdo son los que respondieron las encuestas en 2005/2006. Después de dicho estudio, los alumnos que están menos de acuerdo siguen siendo los que respondieron las encuestas en 2005/2006 y a éstos se añaden los que las respondieron en 2003/2004.

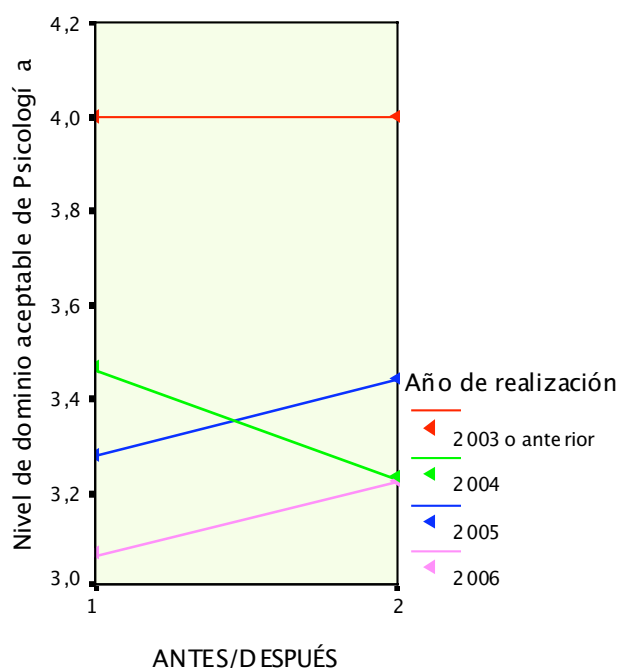


**Figura 441: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “año de realización”.**

Como vemos en esta figura, para los únicos que disminuye, la idea de que se debe tener un dominio aceptable de Psicología después del estudio del tema y de las técnicas, es para los que respondieron las encuestas en 2003/2004, se mantiene para los que las respondieron en 2002/2003 ó anteriores, y para los demás aumenta.

## Curso

Se considera como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa, en los distintos estadísticos que proporciona, que los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “se necesita tener un dominio aceptable de Psicología” no depende del “curso”.

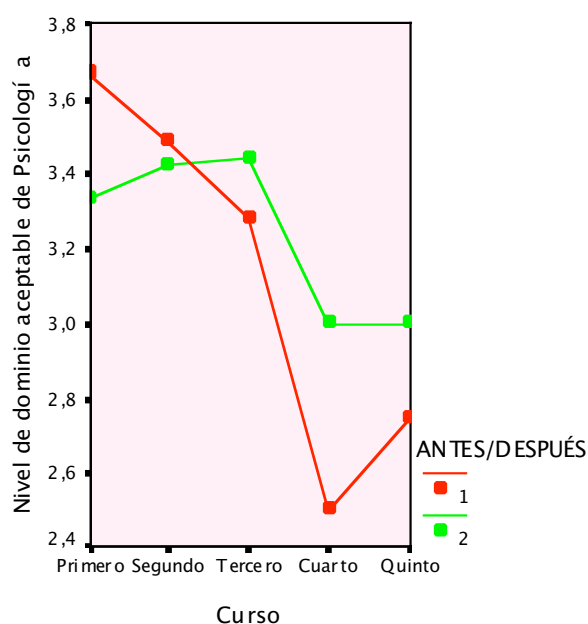


**Figura 442: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “curso”.**

Esta figura muestra que los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología” son: antes del estudio del tema, los que estaban matriculados en primero, y después del estudio del tema y de las técnicas, los de tercero. Los alumnos que están menos de acuerdo son: antes del citado estudio, los de cuarto, y después, los de cuarto y los de quinto.

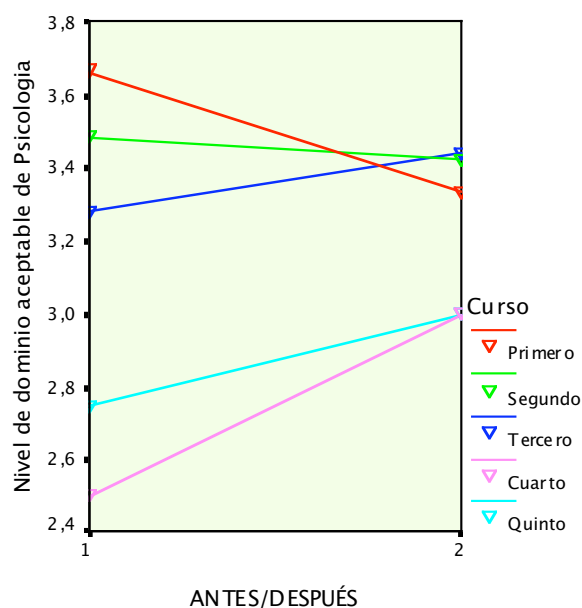


**Figura 443: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “curso”.**

Esta figura señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta para casi todos la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” excepto para los que estaban matriculados en primero o en segundo.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que los niveles críticos asociados resultan mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego estamos en condiciones de poder afirmar que la idea de que “se necesita tener un dominio aceptable de Psicología” no depende de “la edad”.

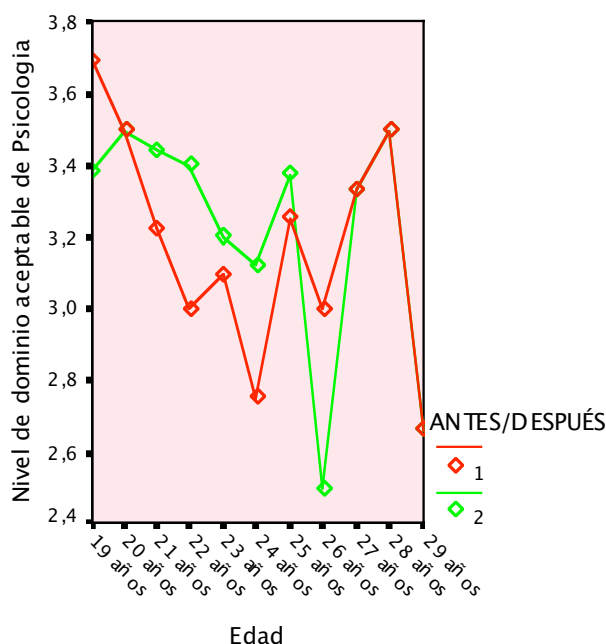


**Figura 444: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “edad”.**

La figura que precede y la que sigue informan de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo en que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología” son los que tenían 19 años, y los que están menos de acuerdo son los que tenían 29 años. Después de dicho estudio, los que están más de acuerdo pasan a ser los de 20 ó 28 años, y los que están menos de acuerdo, los de 26 años.

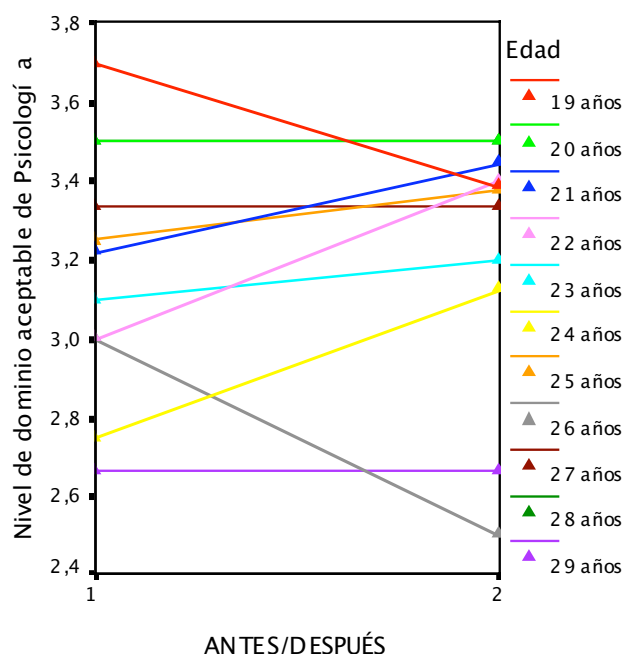


**Figura 445: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “edad”.**

La figura que precede y la anterior a ésta muestran que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta para todos la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología”, excepto para los que tenían 19 y los de 26 años. Se observa que los alumnos que tenían 20 años y los de 28 coinciden en sus opiniones.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos acerca de que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología para proponer actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “la especialidad” no influye significativamente en la idea de que “se necesita tener un dominio aceptable de Psicología”.

Se trabaja con Post hoc (o a posteriori) siempre, aunque no lo comentamos en los casos en que dan valores críticos asociados mayores que 0.05. Aquí comparamos las distintas especialidades, el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones post hoc para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de

comparación *Scheffé* que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias.

En este caso, sólo entre las especialidades de Educación Infantil y otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas los niveles críticos dan  $p=0.046 < 0.05$ , en los demás casos son mayores que 0.05, luego sólo entre estas especialidades hay diferencias significativa.

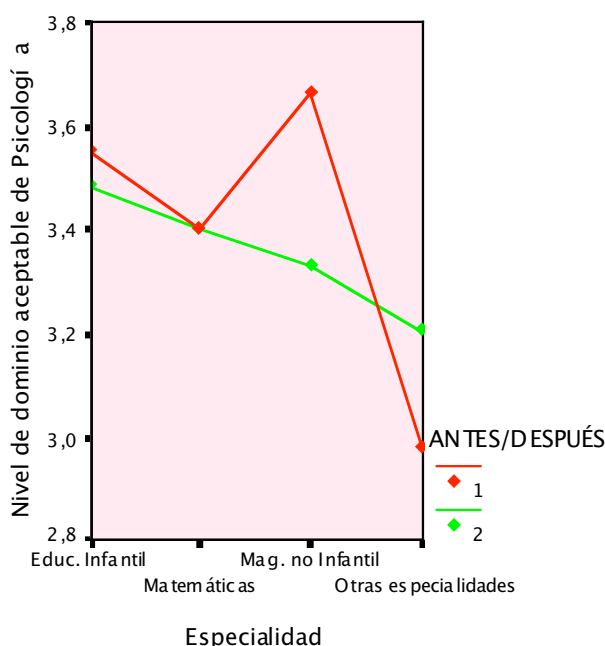


**Figura 446: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por especialidad.**

La figura que precede informa de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, y los que están menos de acuerdo son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas. Después de dicho estudio, los que están más de acuerdo son los de Educación Infantil y los que están menos de acuerdo siguen siendo los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

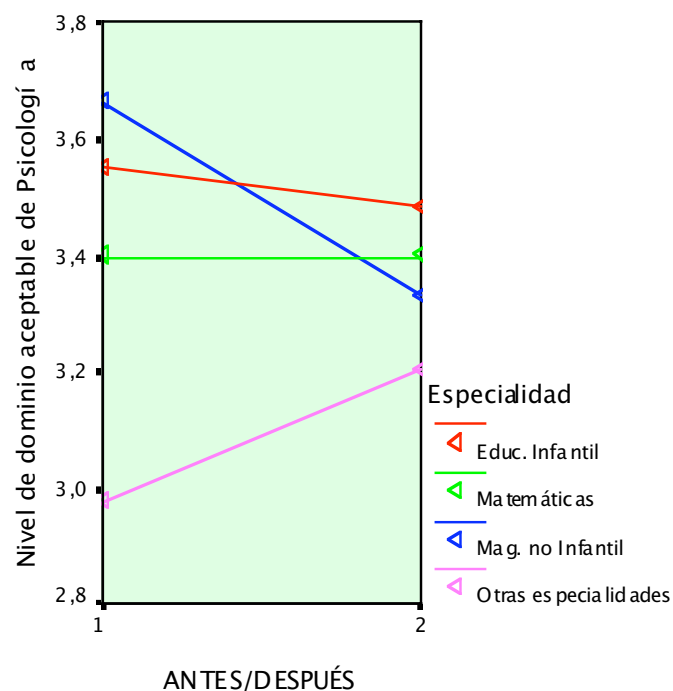


**Figura 447: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por especialidad.**

Esta figura muestra que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología” para los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, y disminuye para los demás.

## Bachillerato

Cogemos como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología” para preparar actividades para Educación Infantil. Se utiliza el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “se necesita tener un dominio aceptable de Psicología” no depende del “bachillerato”.



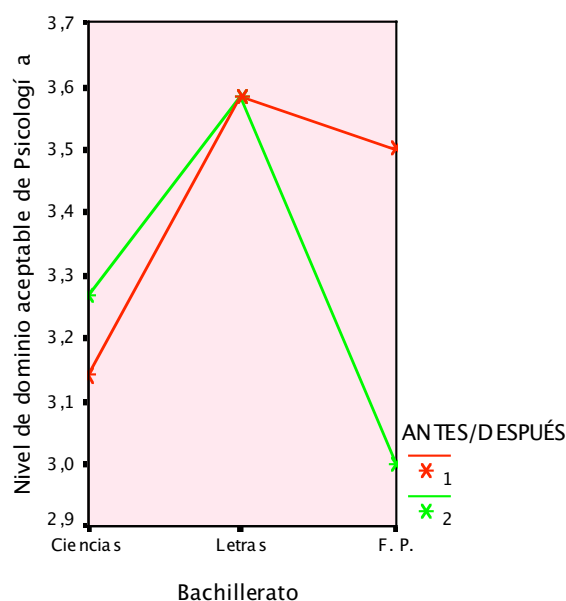


**Figura 448: Estimación de “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.**

La figura que acompaña informa de que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “debe tenerse un dominio total de Psicología” son los que cursaron un bachillerato de Letras. Los alumnos que están menos de acuerdo son: antes, los de Ciencias, y después, los de Formación Profesional.

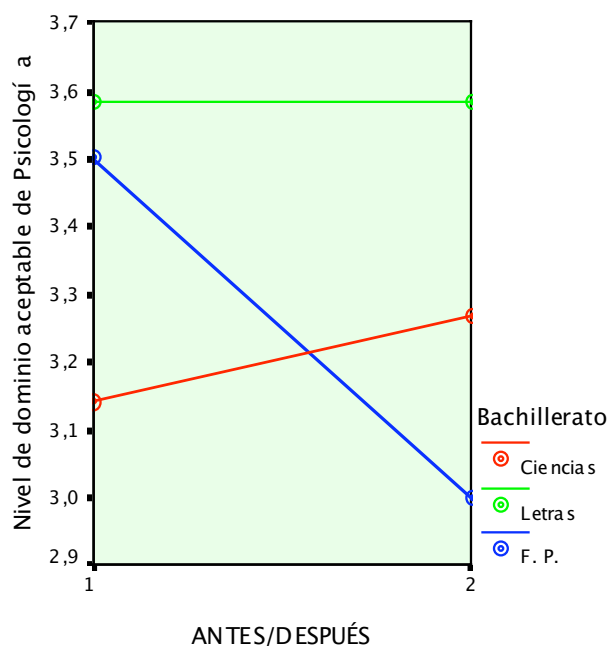


**Figura 449: Ampliación de la comparación: “se debe tener un dominio aceptable de la Psicología” antes/después, por “bachillerato”.**

Aquí, en esta figura, vemos que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “se debe tener un dominio aceptable de Psicología” para los de Ciencias, se mantiene para los de Letras, y descende para el resto.

En la tabla que viene a continuación se tienen todos los niveles críticos obtenidos analizando las afirmaciones “se debe tener un dominio aceptable de Psicología”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                       | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|-------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>DOMINIO<br/>ACEPTABLE<br/>de la<br/>Psicología</b> | Antes / después: $p=0.251$ |                                                   | 434    |
|                                                       | Antes / después: $p=0.220$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.134$       | 435    |
|                                                       | Antes / después: $p=0.869$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.395$          | 436-7  |
|                                                       | Antes / después: $p=0.429$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.393$        | 438-9  |
|                                                       | Antes / después: $p=0.710$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.517$         | 440-1  |
|                                                       | Antes / después: $p=0.755$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.270$ | 442-3  |
|                                                       | Antes / después: $p=0.523$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.459$ | 444-5  |

**Tabla 66: “Dominio aceptable de la Psicología”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.4.13. No se necesita la Psicología

Pasamos a estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, no se necesita ningún conocimiento psicológico, con la intuición que da la vida es suficiente. En este caso se toman las afirmaciones *no se necesita ningún conocimiento psicológico*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.712>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.712>0.05$ . Por tanto, se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas

entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.712 > 0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y se concluye que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: mayoritariamente han respondido que están poco de acuerdo o nada de acuerdo (92% antes y 93% después). Por tanto, después del estudio del tema y de las técnicas, al aumentar los que están poco ó nada de acuerdo, disminuyen los que están muy o bastante de acuerdo, luego disminuye el nivel de acuerdo.

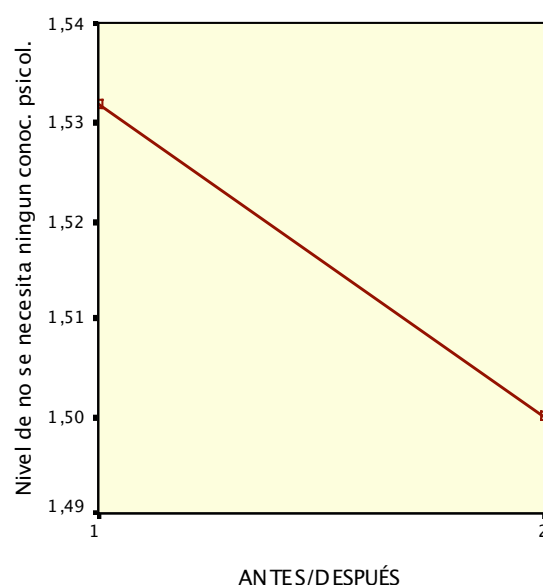


**Figura 450: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable “no se necesita ningún conocimiento psicológico” oscilan entre 1 (nada de acuerdo) y 4 (muy de acuerdo), por tanto, al aumentar el valor, aumenta el grado de acuerdo, y recíprocamente. La figura que precede informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”.

## Género

Se eligen las variables inter-sujeto empezando por “el género” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “no se necesita ningún conocimiento psicológico para preparar actividades para

Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico” no depende del “género”.

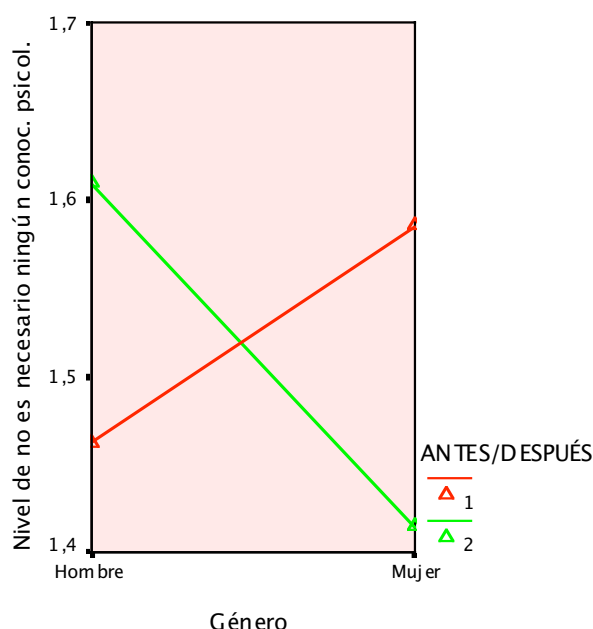


**Figura 451: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “género”.**

La figura que acompaña informa de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están menos de acuerdo que las mujeres con que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”, después la situación cambia. Después del citado estudio, disminuye la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico” para las mujeres y aumenta para los hombres.

### Año de realización

Se elige como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar si influye en la opinión de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.005 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “año de realización” en que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”, dentro del mismo año de realización, y  $p=0.002 < 0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F

son análogos, luego se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, dentro del mismo año, y también existen diferencias significativas entre los que respondieron en años distintos.

Se toma Post hoc para comparar los distintos años de realización de las encuestas, en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones Post hoc para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias. En este caso, sólo entre los años de realización de las encuestas 2002/2003 ó anteriores y todos los demás años de realización los niveles críticos dan  $p=0.000<0.05$ , luego sólo entre estos años de realización de las encuestas hay diferencias muy significativas.

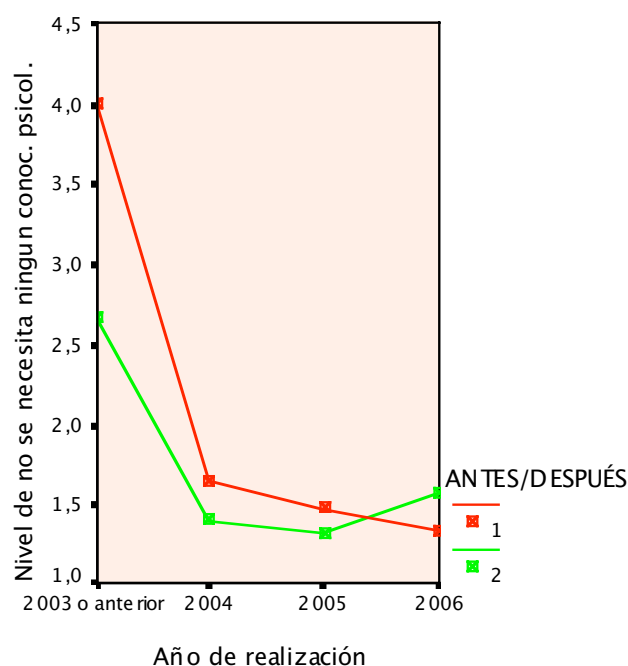


**Figura 452: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que precede y la que sigue dejan claro las diferencias que existen entre en las opiniones de los alumnos que respondieron las encuestas el año 2002/2003 ó anteriores y todos los demás, siendo estos los que más de acuerdo están en que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Los alumnos que están menos de acuerdo son:

antes, los que respondieron las encuestas en 2005/2006, y después, los que las respondieron en 2003/2004.

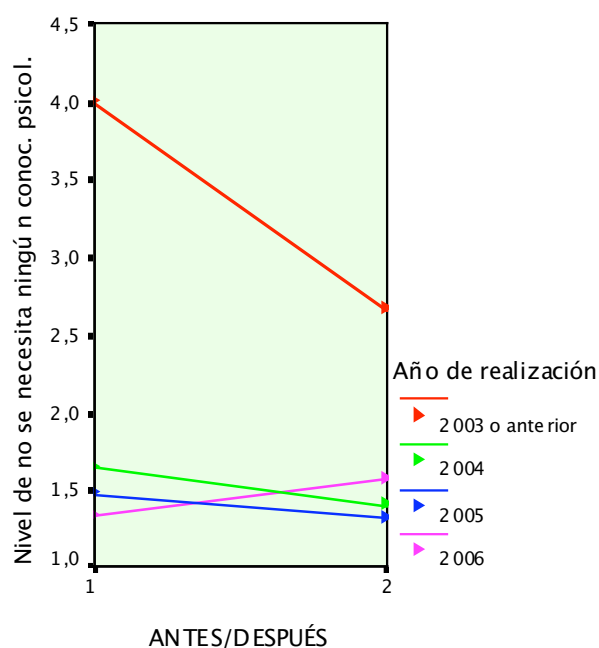


**Figura 453: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “año de realización”.**

Para todos los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”, como deja claro esta figura, excepto para los que respondieron las encuestas en 2005/2006 que aumenta levemente.

## Curso

Se estudia cómo influye la variable inter-sujeto “el curso” en la opinión de los alumnos sobre que “no se necesita ningún conocimiento psicológico para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico” no depende del “curso”.

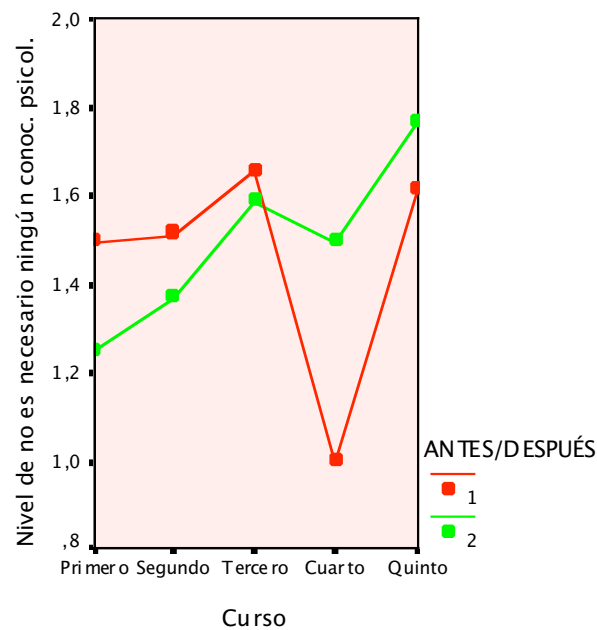


**Figura 454: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “curso”.**

Con esta figura se puede afirmar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que no es necesario ningún conocimiento psicológico son los de cuarto, y los que están más de acuerdo son los de tercero. Después de dicho estudio son los de primero los que están más de acuerdo y los de quinto los que están menos.

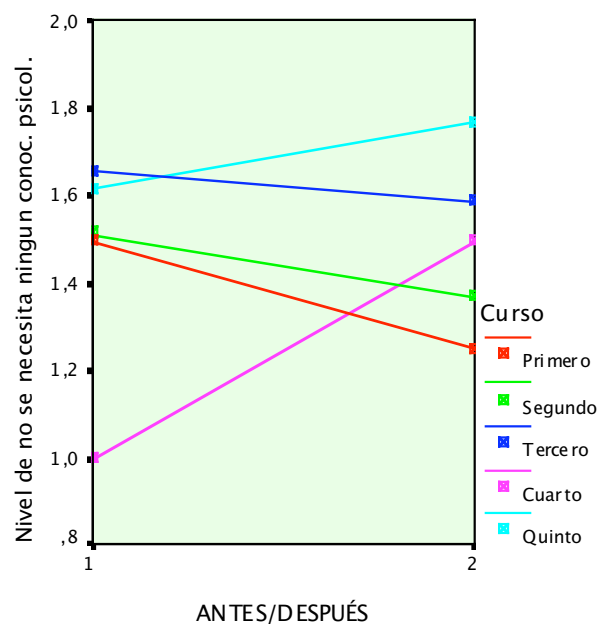


**Figura 455: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “curso”.**

En esta figura se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea, para todos, excepto para los de cuarto y los de quinto, de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “no se necesita ningún conocimiento psicológico para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y como, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, podemos afirmar que la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico” no depende de “la edad”.

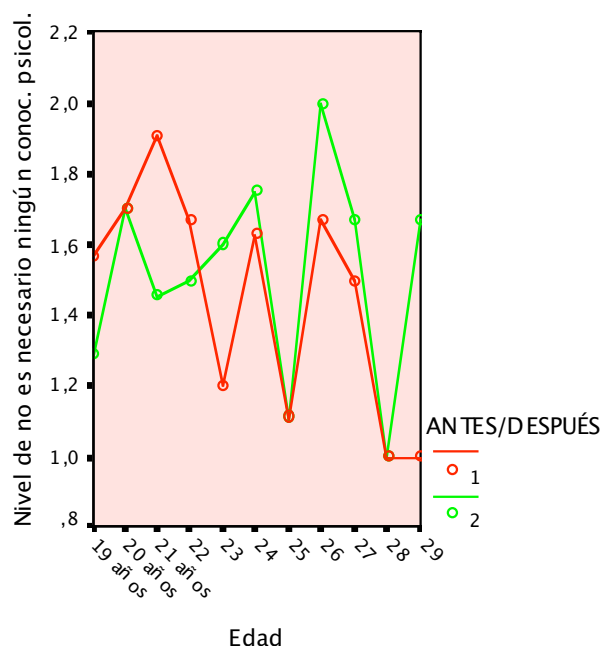


**Figura 456: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “edad”.**

Esta figura indica que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no es necesario ningún conocimiento psicológico” son los que tenían 28 ó 29 años. Los que están más de acuerdo son los que tenían 21 años. Después del estudio del tema y de las técnicas siguen estando menos de acuerdo los que tenían 28 años, y los que están más de acuerdo son los que tenían 26 años.



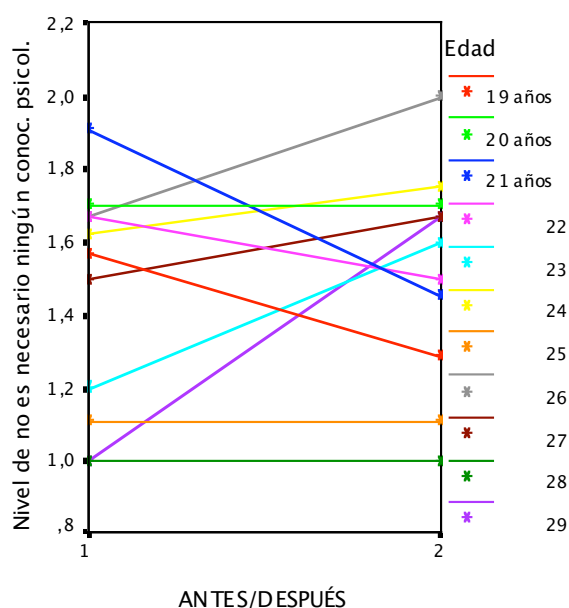


**Figura 457: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “edad”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no es necesario ningún conocimiento psicológico” para los alumnos que tenían 19, 21 ó 22 años; se mantiene para los de 20, 25 ó 28 años; y para los demás aumenta.

## Especialidad

Se elige ahora como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “no se necesita ningún conocimiento psicológico para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede concluir que “la especialidad” no repercute significativamente en la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico”.

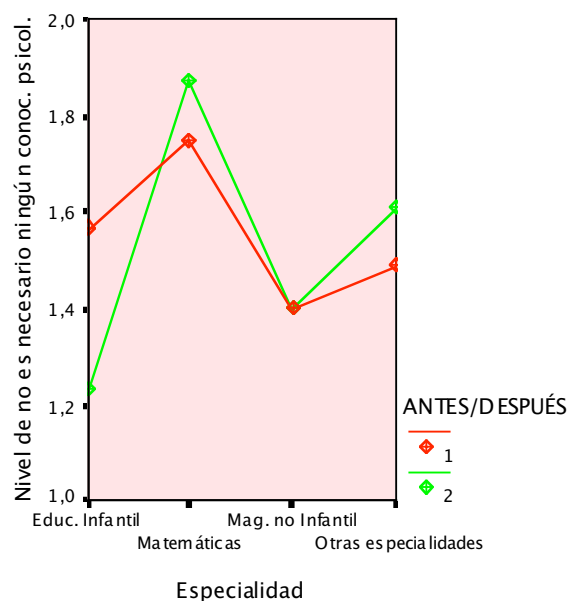


**Figura 458: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por especialidad.**

La figura que precede informa de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que no es necesario ningún conocimiento psicológico son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil, y los que están más de acuerdo son los de la licenciatura de Matemáticas. Después del mencionado estudio pasan a ser los de Magisterio de Educación Infantil los que están menos de acuerdo, y los de la licenciatura de Matemáticas siguen siendo los que están más de acuerdo.

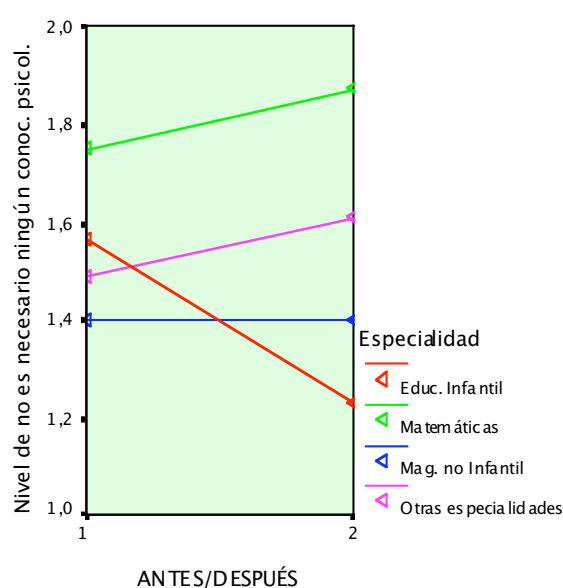


**Figura 459: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por especialidad.**

La figura que precede muestra que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que no es necesario ningún conocimiento psicológico para los de Magisterio de Educación Infantil, se mantiene para los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil, y aumenta para los demás.

## Bachillerato

Se elige como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos el que “no se necesita ningún conocimiento psicológico para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede concluir que la idea de que “no se necesita ningún conocimiento psicológico” no depende del “bachillerato”.

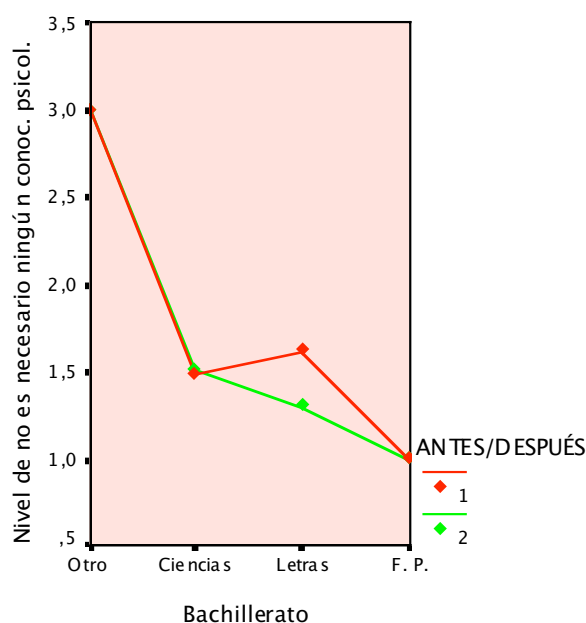


**Figura 460: Estimación de “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “bachillerato”.**

Se ve en esta figura que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que no es necesario ningún conocimiento psicológico son los que proceden de Formación Profesional, y los que están más de acuerdo son los que llamamos Otros (alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años).

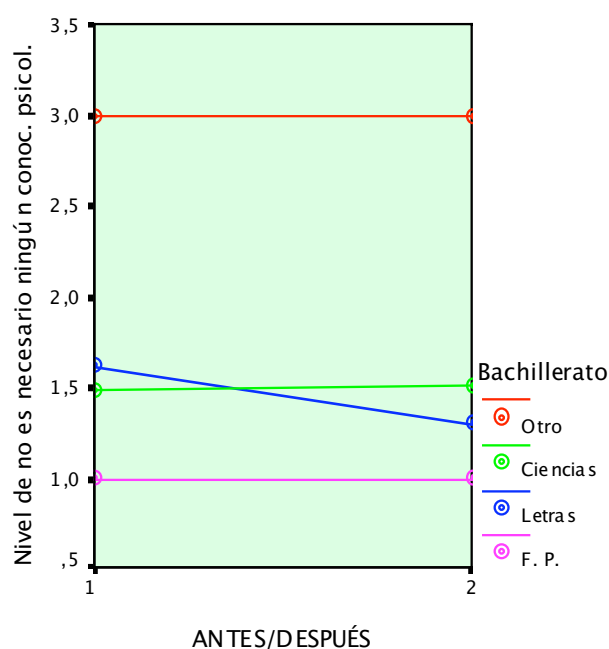


**Figura 461: Ampliación de la comparación: “no es necesario ningún conocimiento psicológico” antes/después, por “bachillerato”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, no aumenta para ninguna submuestra de las consideradas la idea de que no es necesario ningún conocimiento psicológico.

En la tabla siguiente se recogen todos los niveles críticos que se han ido obteniendo considerando las afirmaciones “no se necesita ningún conocimiento psicológico”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                         | Momento                         | Interacción                                       | Figura |
|-----------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>NO ES NECESARIO saber Psicología</b> | Antes / después: $p=0.712$      |                                                   | 446    |
|                                         | Antes / después: $p=0.891$      | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.069$       | 447    |
|                                         | Antes / después: $p=0.005^{**}$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.002^{**}$     | 448-9  |
|                                         | Antes / después: $p=0.785$      | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.580$        | 450-1  |
|                                         | Antes / después: $p=0.506$      | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.399$         | 452-3  |
|                                         | Antes / después: $p=0.858$      | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.119$ | 454-5  |
|                                         | Antes / después: $p=0.791$      | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.625$ | 456-7  |

**Tabla 67: “No es necesario saber Psicología”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

#### 5.3.4.14. Es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa

Se comienza ahora con el estudio de hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, sería bueno conocer las técnicas de Metodología Creativa, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las afirmaciones *es bueno conocer las técnicas de Metodología Creativa*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea de que “es bueno conocer las técnicas de Metodología Creativa”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.708>0.05$ , y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan  $p=0.708>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $p=0.708>0.05$ , luego se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: mayoritariamente responden que mucho ya que la creatividad está muy valorada, que junto con los que responden que bastante supone, tanto antes como después de estudiarse el tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa, el 98%.

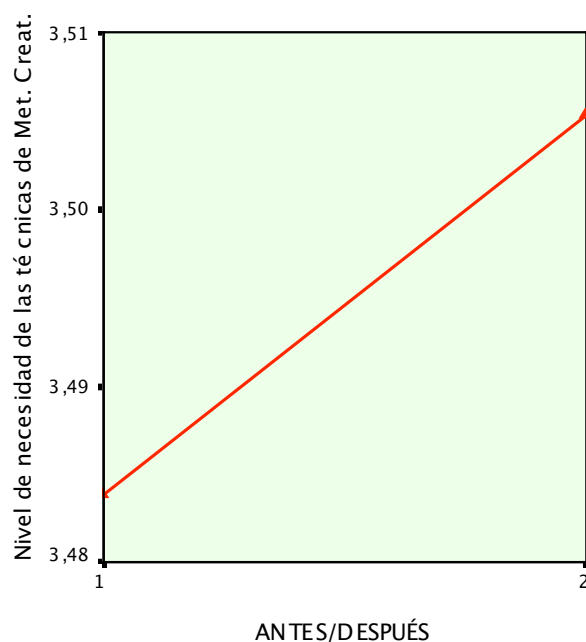


**Figura 462: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” son iguales a los anteriores, la figura que procede indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa”.

## Género

Se van tomando las distintas variables inter-sujeto, empezando por “el género”, para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego se puede afirmar que la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende del “género”.

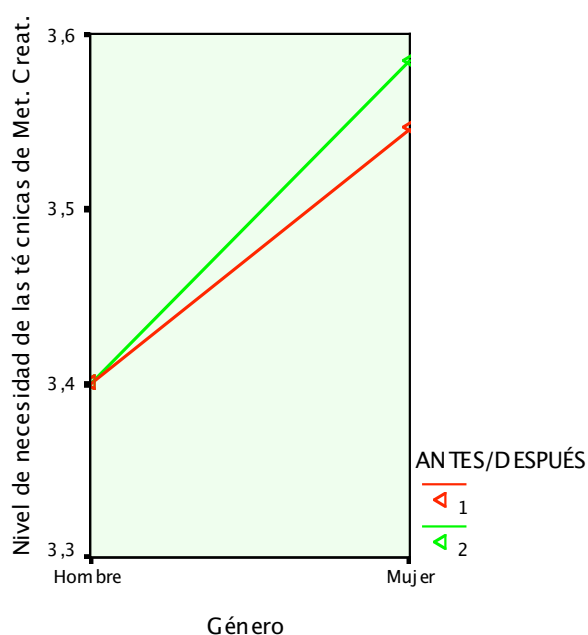


**Figura 463: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “género”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres están más de acuerdo que las mujeres en que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”. Después de dicho estudio, aumenta la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para las mujeres y se mantiene para los hombres.

### Año de realización

Se considera como variable inter-sujeto “el año de realización” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego parece que la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende del “año de realización”.

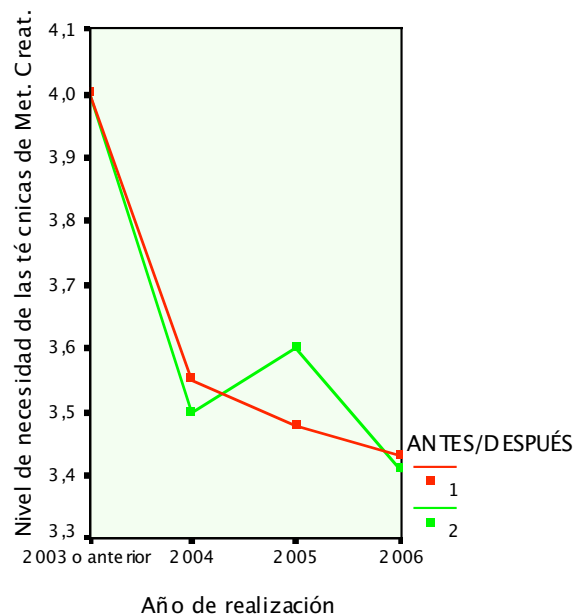


**Figura 464: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura dice que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo en que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y los que están menos de acuerdo son los que las respondieron en 2005/2006.

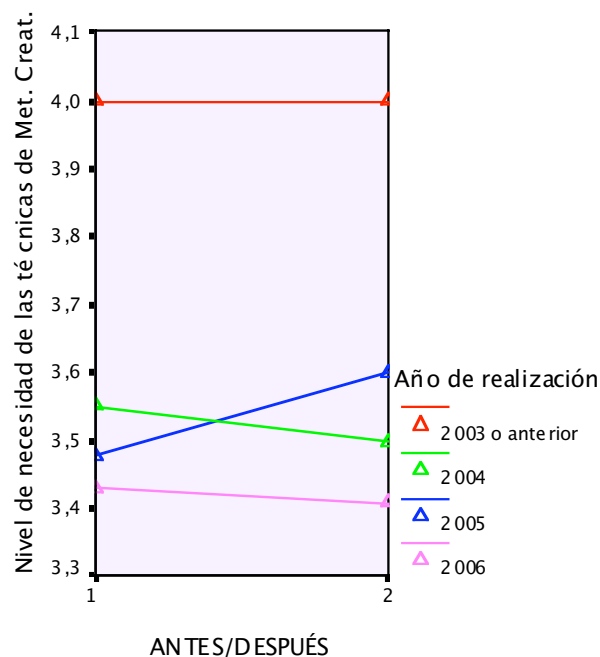


**Figura 465: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”.**



La figura que precede muestra que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para los que respondieron las encuestas en 2003/2004, se mantiene para los que las respondieron en 2002/2003 ó anteriores, y disminuye levemente para los demás.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede razonar que la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende del “curso”.

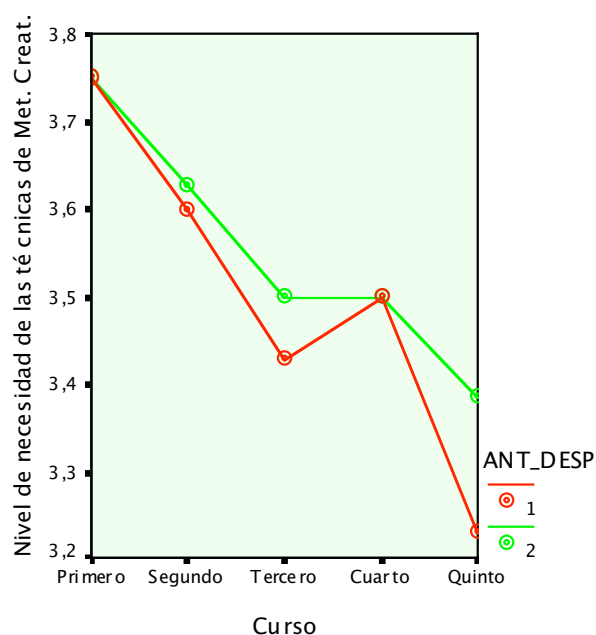


**Figura 466: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.**

Se observa en la figura adjunta que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los de primero, y los que están menos de acuerdo son los de quinto.

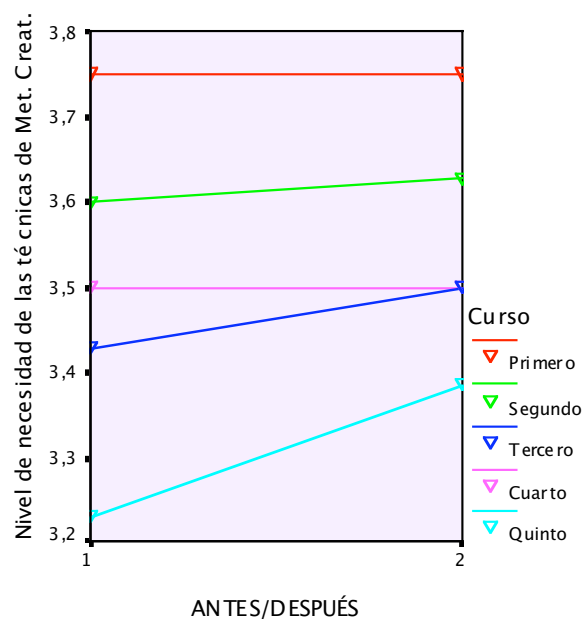


**Figura 467: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.**

En esta figura y en la anterior se ve que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para los matriculados en segundo, tercero ó quinto; para los demás se mantiene.

## Edad

Se analiza si influye, o no, la variable inter-sujeto “edad” en la opinión de los alumnos sobre que “se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no parece estar relacionada con “la edad”.

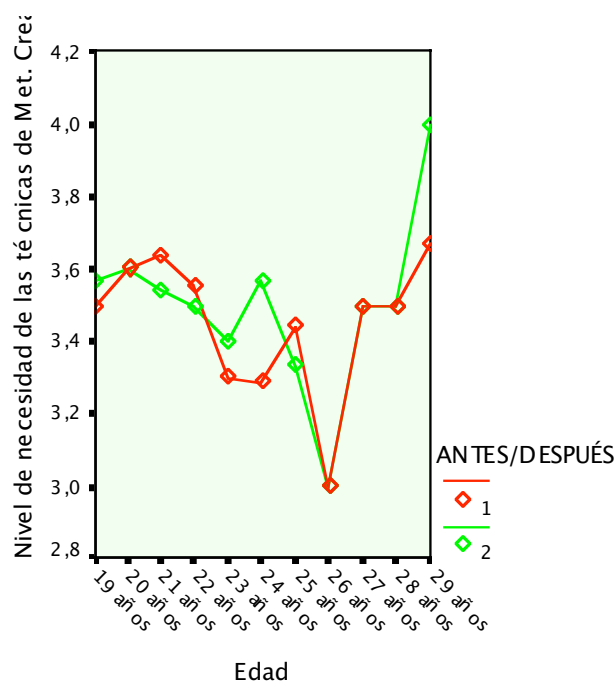


**Figura 468: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.**

La figura que precede y la que sigue señalan que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los que tenían 29 años, y los que están menos de acuerdo son los que tenían 26 años.

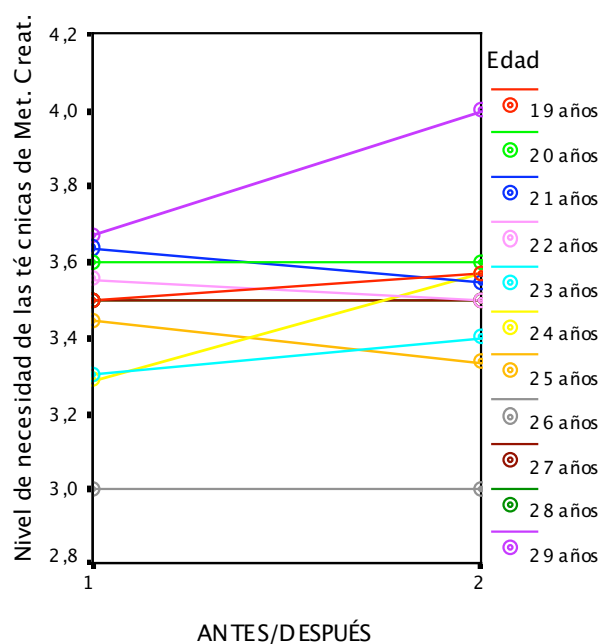


**Figura 469: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.**

Se observa en esta figura y en la anterior que, después del estudio del tema y de las técnicas, sólo disminuye la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para los que tenían 21, 22 ó 25 años, aunque muy levemente; para los demás aumenta o se mantiene.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego no tiene repercusión significativa “la especialidad” sobre la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”.

Se toma Post hoc para comparar las distintas especialidades consideradas en las encuestas, en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones Post hoc para ver qué media en concreto difiere de qué otra se va a utilizar el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias. En este caso vemos que sólo entre las especialidades de Magisterio de Educación Infantil y otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas los niveles críticos dan  $p=0.016<0.05$ , luego sólo entre estas especialidades hay diferencias significativas.

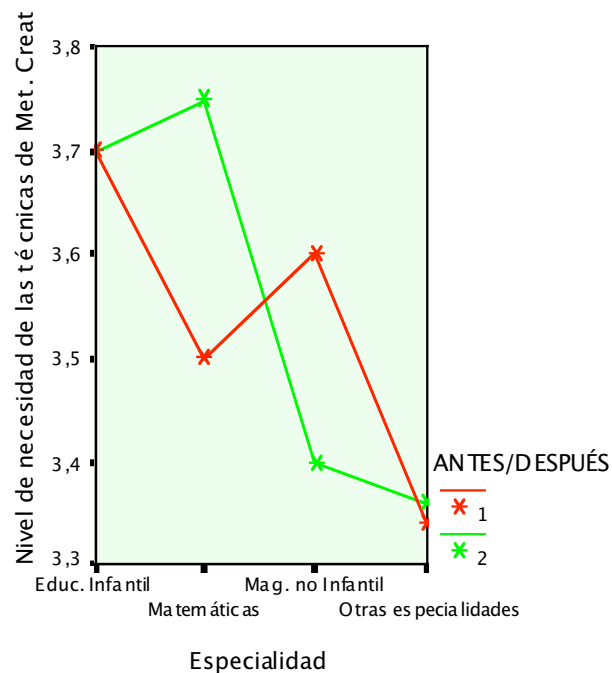


**Figura 470: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.**

En esta figura se ve que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los de Magisterio de Educación Infantil, y los que están menos de acuerdo son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

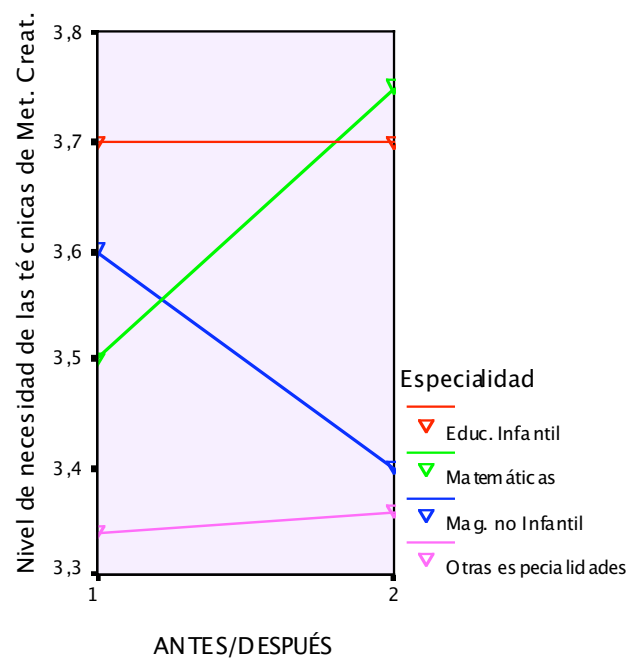


**Figura 471: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, vemos en esta figura que aumenta la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para la mayoría de las especialidades, salvo para los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Se considera como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05. Por ello se rechaza que existan diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos y “el bachillerato”, en ambos momentos.

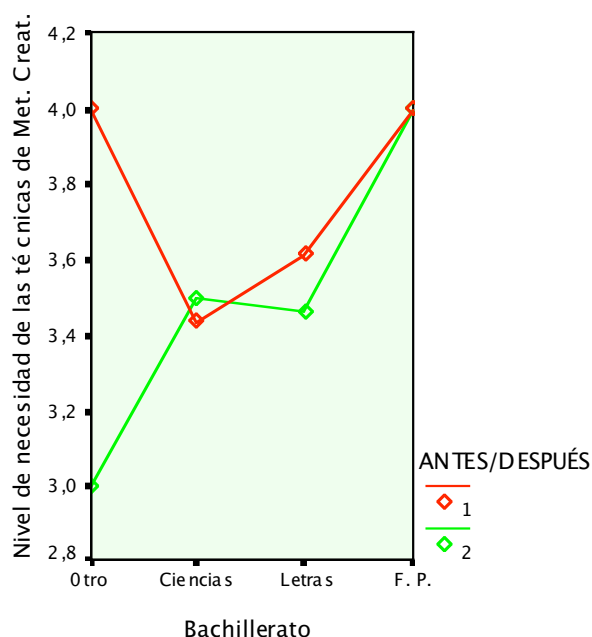


**Figura 472: Estimación de “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”.**

La figura que se tiene delante y la que sigue informan de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están más de acuerdo con que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los de Formación Profesional o los que llamamos Otros (alumnos que provienen acceso a la Universidad para mayores de 25 años), y los que están menos de acuerdo son los de Ciencias. Después del estudio del tema y de las técnicas, siguen siendo los de Formación

Profesional los que están más de acuerdo, y los que están menos de acuerdo pasan a ser los que llamamos Otros.

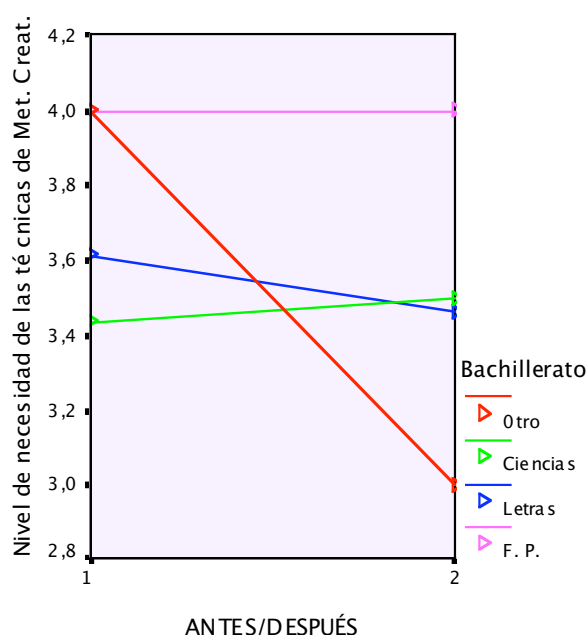


**Figura 473: Ampliación de la comparación: “es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”.**

Observando esta figura se puede ver que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta levemente la idea de que “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para los que proceden de un bachillerato de Ciencias, se mantiene para los de Formación Profesional, y disminuye para los demás.

En la tabla siguiente se concentran todos los niveles críticos de las afirmaciones “son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                                  | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|------------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>ES NECESARIO conocer las técnicas de Metodología Creativa</b> | Antes / después: $p=0.708$ |                                                   | 458    |
|                                                                  | Antes / después: $p=0.746$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.746$       | 459    |
|                                                                  | Antes / después: $p=0.898$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.707$          | 460-1  |
|                                                                  | Antes / después: $p=0.571$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.964$        | 462-3  |
|                                                                  | Antes / después: $p=0.511$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.944$         | 464-5  |
|                                                                  | Antes / después: $p=0.838$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.533$ | 466-7  |
|                                                                  | Antes / después: $p=0.119$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.158$ | 468-9  |

**Tabla 68: “Es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**

### 5.3.4.15. No es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa

Se pasa ahora a estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, hasta qué punto están de acuerdo los alumnos sobre la afirmación: si quieres realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones de Matemáticas, no se necesita ninguna técnicas de Metodología Creativa, todos somos algo creativos. En este caso se toman las afirmaciones *no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad” , “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y las técnicas en la idea de que “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.333>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también son  $p=0.333>0.05$ , luego se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, en ambos momentos. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.333>0.05$ , luego se concluye que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: el 98% antes del estudio del tema y de las técnicas y el 94% después está entre los que dicen que están poco de acuerdo y los que dicen que están nada de acuerdo. Por tanto, aumenta el nivel de acuerdo.



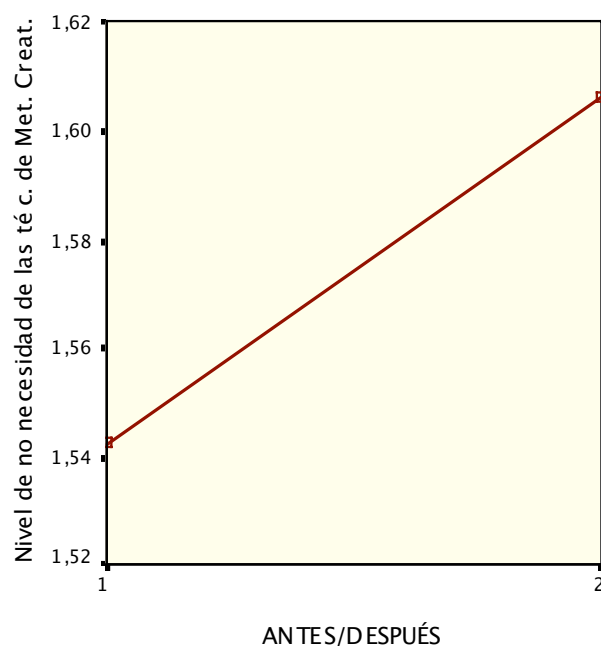


**Figura 474: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después.**

Los valores asignados a la variable “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” son análogos a los anteriores, por tanto, se tiene que al aumentar el valor aumenta el grado de acuerdo, y recíprocamente. A la vista de la figura se tiene que afirmar que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el nivel de acuerdo.

## Género

Se empieza tomando la variable inter-sujeto “género” para analizar cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “no se necesita conocer las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, en los distintos estadísticos que proporciona, luego la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende significativamente del “género”.

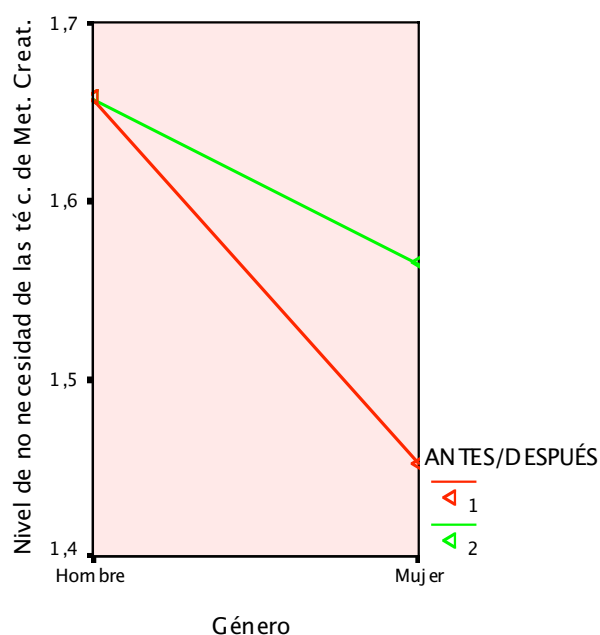


**Figura 475: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “género”.**

La figura que se tiene delante apunta que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres están menos de acuerdo que los hombres con que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”. Después del citado estudio, para los hombres se mantiene la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”, y para las mujeres aumenta.

### Año de realización

Se considera como variable inter-sujeto “el año de realización” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “no se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego “el año de realización” no influye significativamente en la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”.

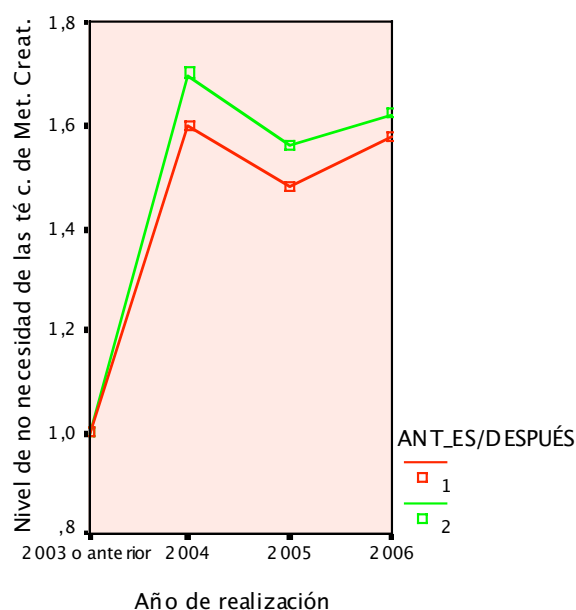


**Figura 476: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”.**

En esta figura y en la que viene a continuación se observa que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los que están menos de acuerdo con que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y los que están menos de acuerdo son los que respondieron las encuestas en 2003/2004.

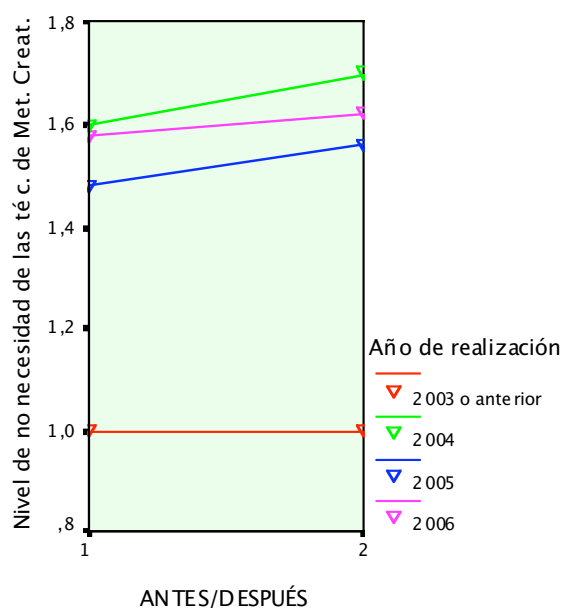


**Figura 477: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “año de realización”.**

En todos los años que planteamos las encuestas, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene o aumenta levemente la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “no se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. En los distintos estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende del “curso”.

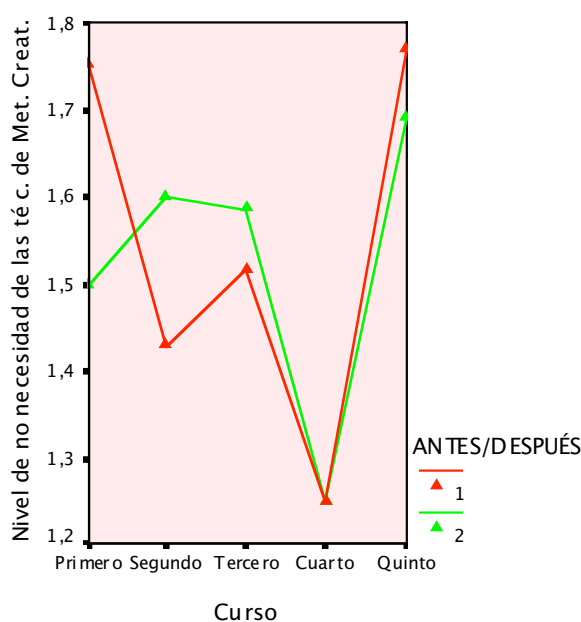


**Figura 478: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.**

Fijándonos en esta figura y viendo la que viene a continuación, se observa que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los que estaban cursando cuarto, y los que están más de acuerdo son los de quinto.

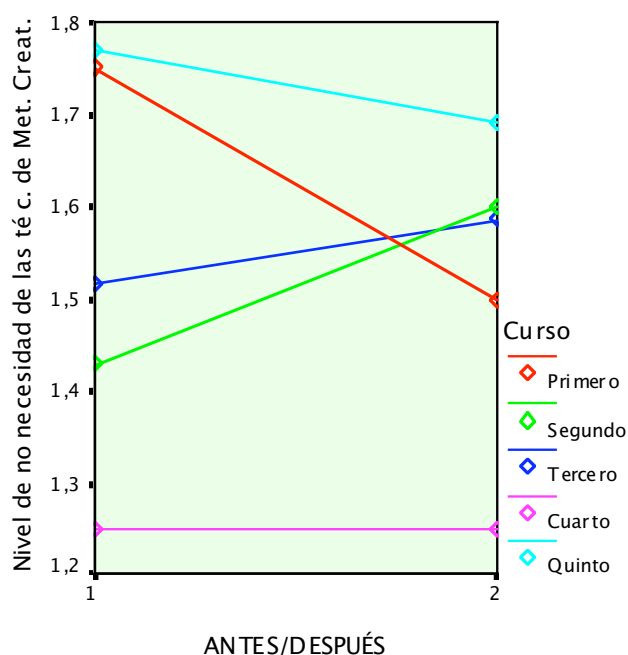


**Figura 479: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “curso”.**

La figura que acompaña informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para los de primero y para los de quinto, se mantiene para los de cuarto y aumenta para los demás.

## Edad

Cogemos como variable inter-sujeto “la edad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “no se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede concluir que la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende de “la edad”.

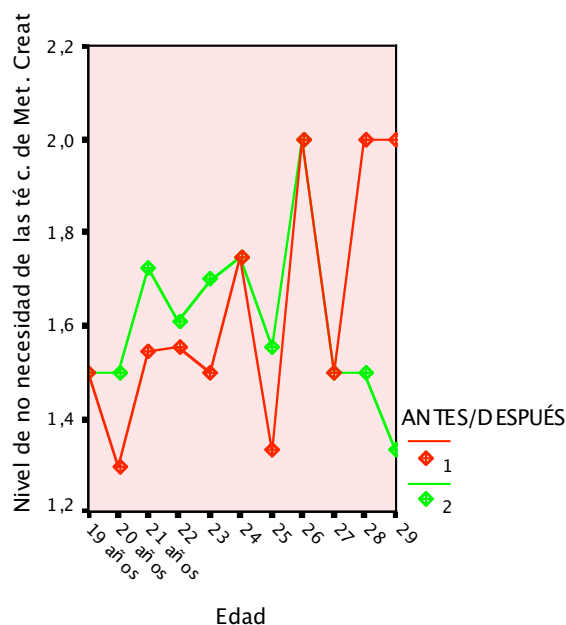


**Figura 480: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.**

En esta figura y en la siguiente se ve que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo con que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los que tenían 20 años, y los que están más de acuerdo son los de 26 años. Después del mencionado estudio la situación cambia, pasando a ser los que tenían 29 años los que están menos de acuerdo, y manteniéndose los que tenían 26 años como los que están más de acuerdo.

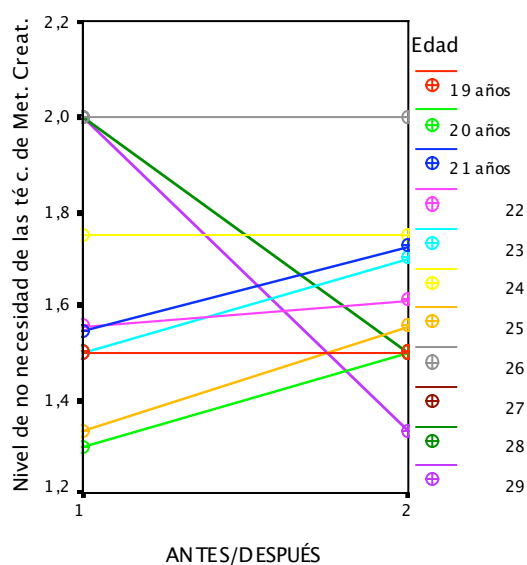


**Figura 481: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “edad”.**

Aunque en esta figura son muchos los cambios que experimentan los alumnos según “la edad”, y el segmento que representa la respuesta de los que tenían 19 años coincide con la de los que tenían 27; se puede observar que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para los que tenían 28 ó 29 años, se mantiene para los que tenían 19, 24 26, ó 27 años, y aumenta para el resto.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “no se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende de la especialidad.

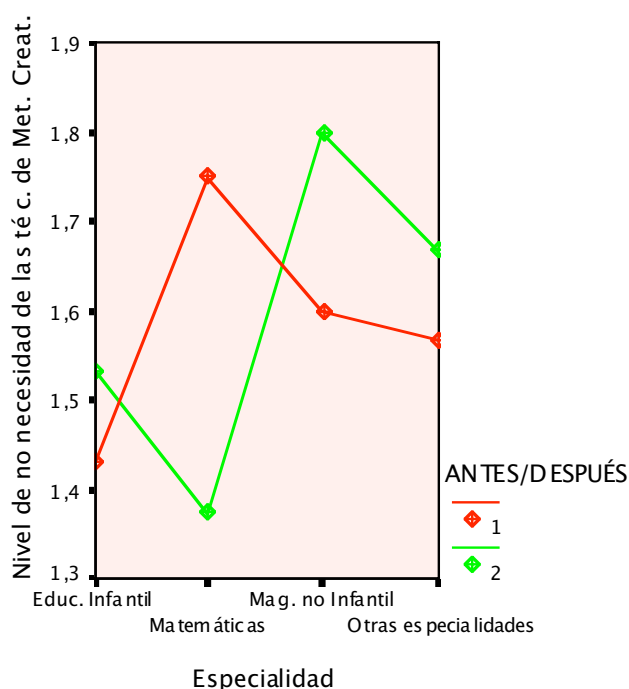


**Figura 482: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.**

Se puede ver en esta figura que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo son los de Magisterio de Educación Infantil, y los que están más de acuerdo son los de la licenciatura de Matemáticas. Después de dicho estudio la situación cambia radicalmente, pasando a ser los alumnos que cursan la

licenciatura de Matemáticas los que están menos de acuerdo, y los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil los que están más de acuerdo.

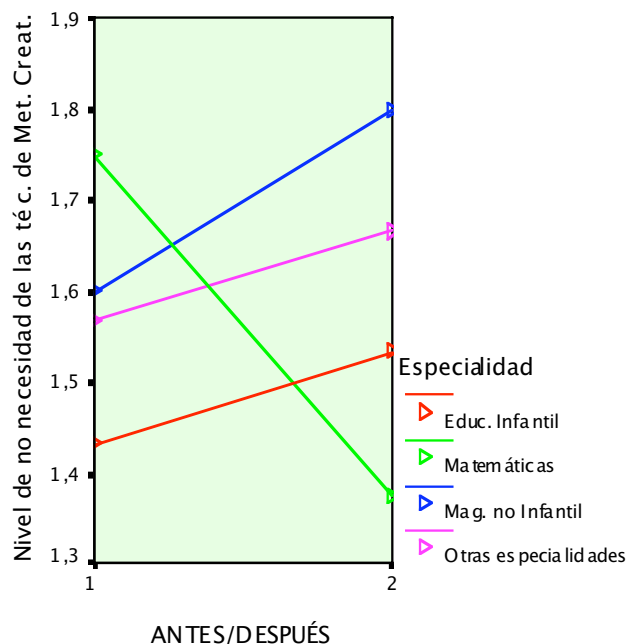


**Figura 483: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por especialidad.**

La figura que precede nos indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, disminuye la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” para los que cursaban la licenciatura de Matemáticas, y aumenta para los demás.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en la opinión de los alumnos sobre que “no se necesitan las técnicas de Metodología Creativa para preparar actividades para Educación Infantil”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los distintos estadísticos que proporciona informan de que los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se puede razonar que la idea de que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” no depende del “bachillerato”.



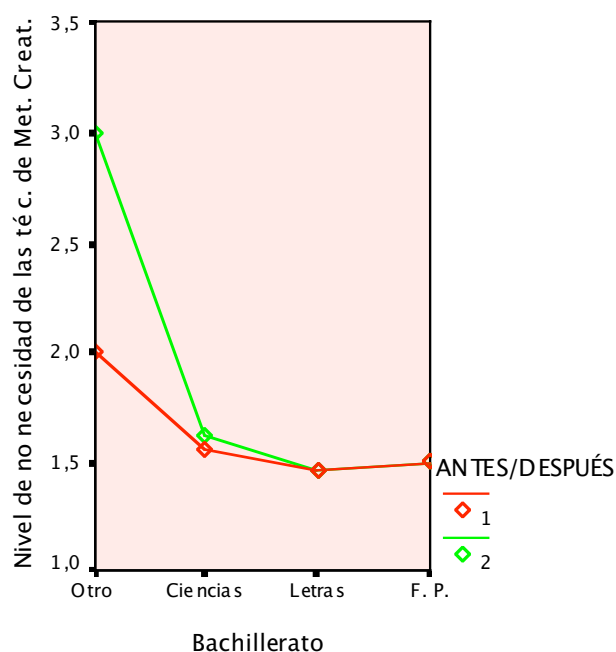


**Figura 484: Estimación de “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”.**

Si se observa esta figura vemos que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que están menos de acuerdo en que “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa” son los que provienen del bachillerato de Letras, y los que están más de acuerdo son los que llamamos Otros (alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años).

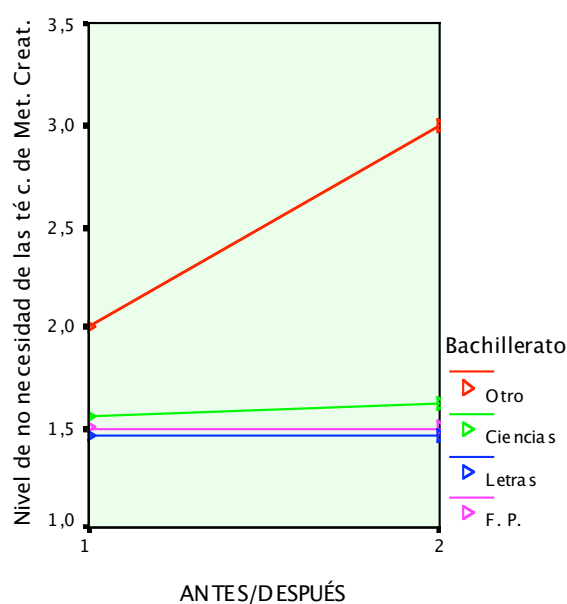


**Figura 485: Ampliación de la comparación: “no es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa” antes/después, por “bachillerato”.**

Las opiniones de los alumnos por “bachillerato” son muy parecidas, salvo para los que llamamos Otros, y prácticamente se mantiene para todos, excepto para los que llamamos Otros, que aumenta.

La tabla que viene a continuación contiene todos los niveles críticos de las afirmaciones “no son necesarias las técnicas de Metodología Creativa”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                                                         | Momento                    | Interacción                                      | Figura |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>NO ES<br/>NECESARIO<br/>conocer<br/>las técnicas de<br/>Metodología<br/>Creativa</b> | Antes / después: $p=0.333$ |                                                  | 470    |
|                                                                                         | Antes / después: $p=0.395$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.395$       | 471    |
|                                                                                         | Antes / después: $p=0.870$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.649$          | 472-3  |
|                                                                                         | Antes / después: $p=0.870$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.649$        | 474-5  |
|                                                                                         | Antes / después: $p=0.736$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.676$         | 476-7  |
|                                                                                         | Antes / después: $p=0.953$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.234$ | 478-9  |
|                                                                                         | Antes / después: $p=0.192$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.520$ | 480-1  |

**Tabla 69: “No es necesario conocer las técnicas de Metodología Creativa”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**

#### 5.3.4.16. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado

De forma análoga a como se ha hecho en el estudio realizado en el apartado anterior, se recogerá en esta parte la variación experimentada, por el nivel de necesidad o no de las distintas afirmaciones que hemos analizado anteriormente, después del estudio del tema y de las técnicas. Además, se comparará cómo quedan cada una de las clases consideradas según las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, teniendo en cuenta ambos momentos.

Por ser muchas las variables intra-sujeto que se tienen en este caso, para que se puedan estudiar con más facilidad se escribirán en rojo las afirmaciones que se refieran al dominio total de las materias consideradas, en azul las que se refieran al dominio aceptable y en negro el resto.

## Variables intra-sujeto

La tabla adjunta va a servir para indicar si se mantiene, aumenta o disminuye, después del estudio del tema y de las técnicas, el nivel de acuerdo de los alumnos sobre cada una de las variables intra-sujeto que hemos considerado en este apartado.

| Variable intra-sujeto                                              | Variación experimentada |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                            | Aumenta                 |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                        | Aumenta                 |
| <b>Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes</b> | Disminuye               |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                               | Disminuye               |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                           | Aumenta                 |
| <b>No es necesario saber Didáctica</b>                             | Se mantiene             |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>              | Aumenta                 |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>          | Disminuye               |
| <b>No es necesario saber Didáctica de la Matemática</b>            | Disminuye               |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                              | Aumenta                 |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                          | Aumenta                 |
| <b>No es necesario saber Psicología</b>                            | Disminuye               |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>       | Aumenta                 |
| <b>No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>    | Aumenta                 |

Tabla 70: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del segundo apartado.

En esta tabla se puede observar que aumentan los dominios total y aceptable de las Matemáticas, y disminuyen los aspectos menos exigentes respecto del dominio de las Matemáticas: “con los conocimientos matemáticos del Instituto tienes bastante” y “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto”. Se advierte que son exigentes respecto de los conocimientos matemáticos que debe tener un maestro para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.

Quizá mirando las opiniones respecto de los conocimientos de Didáctica se puede pensar que los alumnos son más razonables, ya que disminuye la idea de que se debe tener un dominio total, aumenta la consideración de que se debe tener un dominio aceptable y se mantiene el que no es necesario saber Didáctica.

También en esta tabla se puede observar que aumentan los aspectos más exigentes relativos al dominio de la Didáctica de la Matemática.

Si se comparan las variaciones experimentadas por las variables intra-sujeto relativas a la Psicología con las de las Matemáticas, se ve que son bastante parecidas.

No se entiende por qué aumentan ambos aspectos relativos a las técnicas de Metodología Creativa: que son necesarias y que no son necesarias. Puede ser que les desconcertara el planteamiento que se hizo cuando se dijo que no eran necesarias: todos somos algo creativos.

Después del estudio del tema y de las técnicas, la mayoría de las variables intra-sujeto más exigentes respecto del dominio de las distintas materias aumentan; sólo la relativa a la Didáctica disminuye. Se puede pensar que los alumnos son bastante exigentes respecto de su preparación.

Aumenta la idea de que se debe tener un dominio aceptable de casi todas las distintas materias, excepto de Didáctica de la Matemática; creemos que puede ser porque piensen que es mejor que se tenga un “dominio total de la Didáctica de la Matemática”.

Disminuye la mayoría de los valores en el nivel más bajo de exigencia respecto de las distintas materias; sólo se mantiene el que no es necesario saber Didáctica y aumenta el que no se deben conocer las técnicas de Metodología creativa; esto último nos ha desconcertado bastante ya que los alumnos estaban muy ilusionados aprendiendo las distintas técnicas, y viendo dónde se utilizaban cuando se explicaba el tema o aplicándolas ellos mismos al proponer actividades para los niños de Educación Infantil.

### **Variables inter-sujeto**

Se va a reunir en una sola tabla la variación experimentada en las distintas variables intra-sujeto por cada una de las submuestras consideradas en las distintas variables inter-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas, y en otras dos tablas se van a recoger cuáles son los máximos y los mínimos en ambos momentos.

### **Género**

Se pasa a concentrar en las tablas que vienen a continuación las variaciones experimentadas por las distintas variables intra-sujeto en las dos submuestras que determina la variable inter-sujeto “género”.

## Variaciones

Se indica, en la tabla siguiente, cual es la variación experimentada por los dos valores de la variable “género” en cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|--------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Aumenta              | Aumenta              |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Disminuye            | Disminuye            |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Disminuye            | Aumenta              |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Disminuye            | Aumenta              |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Aumenta              | Disminuye            |
| No es necesario saber Didáctica                              | Se mantiene          | Disminuye            |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Disminuye            | Se mantiene          |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Disminuye            | Aumenta              |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Aumenta              | Disminuye            |
| No es necesario saber Psicología                             | Aumenta              | Disminuye            |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Se mantiene          | Aumenta              |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Se mantiene          | Aumenta              |

Tabla 71: Variación experimentada por la variable “género”, en el segundo apartado.

Esta tabla indica que consiguen mayor número de aumentos las mujeres que los hombres en las afirmaciones que tratan de un dominio total de las distintas materias. En las afirmaciones que hablan de un dominio aceptable son los hombres los que experimentan mayor número de aumentos. Las disminuciones son las mismas en ambos.

## Máximos

En la tabla que viene a continuación se destaca qué grupo de alumnos alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos. No se construye otra tabla para los valores mínimos ya que sólo tenemos dos casos posibles, y si uno es el máximo, el otro será el mínimo.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es mayor | Después es mayor |
|--------------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Hombres        | Hombres          |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Mujeres        | Mujeres          |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Mujeres        | Hombres          |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Mujeres        | Hombres          |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Hombres        | Hombres          |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Mujeres        | Mujeres          |
| No es necesario saber Didáctica                              | Hombres        | Hombres          |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Hombres        | Hombres          |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Mujeres        | Mujeres          |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Hombres        | Mujeres          |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Hombres        | Hombres          |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Mujeres        | Mujeres          |
| No es necesario saber Psicología                             | Mujeres        | Hombres          |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Mujeres        | Mujeres          |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Hombres        | Hombres          |

Tabla 72: Máximos de la variable “género” en el segundo apartado, antes/después.

Se puede observar en esta tabla que los máximos de los dominios totales de las distintas materias los alcanzan los hombres, salvo el de las técnicas de Metodología Creativa. Los máximos de los dominios aceptables de las distintas materias son para las mujeres en su totalidad. Los máximos de no necesidad de conocer las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, los ocupan por igual hombres y mujeres; después de dicho estudio casi todos los máximos son ocupados por los hombres, excepto “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”.

## Año de realización

En esta tabla no aparecen las variaciones de la Didáctica de la Matemática en el año 2003, porque no se introdujo esta variable hasta el año siguiente; fue la profesora Dra. D<sup>a</sup> Catalina Fernández Escalona la que nos sugirió este estudio en 2004.

## Variaciones

En la tabla siguiente se refleja la variación experimentada por las distintas variables intra-sujeto, en las submuestras de la variable “año de realización” después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                              | Variación en 2003 ó anter. | Variación en 2004 | Variación en 2005 | Variación en 2006 |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                            | Aumenta                    | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                        | Se mantiene                | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes</b> | Disminuye                  | Disminuye         | Disminuye         | Se mantiene       |
| <b>Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto</b>     | Se mantiene                | Aumenta           | Disminuye         | Aumenta           |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                               | Aumenta                    | Aumenta           | Se mantiene       | Disminuye         |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                           | Aumenta                    | Disminuye         | Disminuye         | Aumenta           |
| <b>No es necesario saber Didáctica</b>                             | Disminuye                  | Aumenta           | Disminuye         | Aumenta           |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>              |                            | Aumenta           | Aumenta           | Disminuye         |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>          |                            | Disminuye         | Aumenta           | Disminuye         |
| <b>No es necesario saber Didáctica de la Matemática</b>            |                            | Disminuye         | Disminuye         | Aumenta           |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                              | Aumenta                    | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                          | Se mantiene                | Disminuye         | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>No es necesario saber Psicología</b>                            | Disminuye                  | Disminuye         | Disminuye         | Aumenta           |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>       | Se mantiene                | Disminuye         | Aumenta           | Disminuye         |
| <b>No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>    | Se mantiene                | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |

Tabla 73: Variación experimentada por la variable “año de realización” en el segundo apartado.

Se puede observar en esta tabla que hay una mayoría de aumentos en los dominios totales de las distintas materias. Las asignaturas que experimentan mayor número de aumentos son las Matemáticas y la Psicología. La que sale peor parada es la necesidad de conocer las técnicas de Metodología Creativa, que sólo tiene un aumento.

Las opiniones de los alumnos respecto de un dominio aceptable también cuentan con una mayoría de aumentos. En este caso son las Matemáticas las que salen más favorecidas.

En las opciones que conllevan menor nivel de exigencia respecto de las distintas materias hay una mayoría de disminuciones después del estudio del tema y de las técnicas. Otra vez son las Matemáticas y la Psicología las que cuentan con mayor número de disminuciones, y las técnicas de Metodología Creativa la que tiene mayor número de aumentos.

## Máximos

En la tabla siguiente se recogen los grupos de alumnos que alcanzan los valores máximos en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es mayor    | Después es mayor         |
|--------------------------------------------------------------|-------------------|--------------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | 2005              | 2003 ó anteriores y 2006 |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | 2005              | 2005                     |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | 2004              | 2006                     |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | 2005              | 2003 ó anteriores        |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | 2006              | 2006                     |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | 2004              | 2003 ó anteriores        |
| No es necesario saber Didáctica                              | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores        |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | 2006              | 2006                     |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | 2004              | 2005                     |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | 2004              | 2006                     |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | 2006              | 2006                     |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores        |
| No es necesario saber Psicología                             | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores        |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores        |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | 2004              | 2004                     |

Tabla 74: Máximos de la variable “año de realización”, en el segundo apartado, antes/después.

La mayoría de los dominios totales de las distintas materias, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, lo logran los alumnos que respondieron las encuestas en 2005/2006.

Antes del mencionado estudio, los que consiguen mayor número de los dominios aceptables son los alumnos del curso 2003/2004, y después de dicho estudio quedan empatados los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores y los de 2004/2005.

Los alumnos que tienen mayor número de máximos en los dominios de las distintas materias que suponen menor nivel de exigencia



son: antes del estudio del tema y de las técnicas, los que respondieron las encuestas en 2003/2004; y después, los de 2002/2003 ó anteriores.

## Mínimos

Se construye la tabla que viene a continuación para recopilar qué grupo de alumnos alcanza el menor valor en cada una de las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es menor           | Después es menor         |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | 2003 ó anteriores        | 2004                     |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | 2004                     | 2003 ó anteriores        |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | 2003 ó anteriores y 2005 | 2003 ó anteriores        |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | 2006                     | 2006                     |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | 2003 ó anteriores        | 2003 ó anteriores        |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | 2003 ó anteriores        | 2006                     |
| No es necesario saber Didáctica                              | 2004                     | 2004                     |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | 2006                     | 2004 y 2006              |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | 2006                     | 2004 y 2006              |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | 2005 y 2006              | 2005                     |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | 2003 ó anteriores        | 2003 ó anteriores y 2005 |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | 2006                     | 2004 y 2006              |
| No es necesario saber Psicología                             | 2006                     | 2005                     |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | 2006                     | 2006                     |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | 2003 ó anteriores        | 2003 ó anteriores        |

Tabla 75: Mínimos de la variable “año de realización” en el segundo apartado, antes/después.

El mayor número de mínimos en los dominios totales de las distintas materias, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, es para los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores.

Los alumnos que alcanzan mayor número de mínimos en la consideración de un dominio aceptable en las distintas materias, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, son los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006.

Por último, los alumnos que consiguen mayor número de mínimos, antes del estudio del tema y de las técnicas, en las opciones que suponen menor nivel de exigencia en las distintas materias son los que

respondieron las encuestasen el curso 2005/2006, y después, los de 2002/2003 ó anteriores y 2004/2005, al mismo nivel.

## Curso

Se pasa a considerar la variable inter-sujeto “curso” para recoger en las tablas siguientes, como venimos haciendo, las variaciones, los máximos y los mínimos de las distintas variables intra-sujeto.

## Variaciones

En la tabla que viene a continuación se recogen la variación experimentada por las distintas variables intra-sujeto en cada una de las submuestras de la variable inter-sujeto “curso”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Variación en primero | Variación en segundo | Variación en tercero | Variación en cuarto | Variación en quinto |
|--------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Disminuye           |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye           | Aumenta             |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Disminuye            | Disminuye            | Aumenta              | Se mantiene         | Se mantiene         |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Disminuye            | Disminuye            | Aumenta              | Se mantiene         | Disminuye           |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Disminuye            | Aumenta              | Disminuye            | Se mantiene         | Disminuye           |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Se mantiene          | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta             | Se mantiene         |
| No es necesario saber Didáctica                              | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye           | Disminuye           |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Se mantiene          | Aumenta              | Disminuye            | Aumenta             | Disminuye           |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Disminuye            | Disminuye            | Disminuye            | Aumenta             | Disminuye           |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye            | Disminuye           | Disminuye           |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye           | Se mantiene         |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Disminuye            | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta             |
| No es necesario saber Psicología                             | Disminuye            | Disminuye            | Disminuye            | Aumenta             | Aumenta             |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Aumenta             |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Disminuye           |

Tabla 76: Variación experimentada por la variable “curso”, en el segundo apartado.

En esta tabla hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto que suponen un dominio total de las distintas materias que son objeto de estudio, siendo las Matemáticas y las técnicas de Metodología Creativa las que experimentan mayor número de aumentos.

Las afirmaciones que conllevan un dominio aceptable tienen el mismo número de aumentos que de los demás —se mantiene y disminuye—; siendo, en este caso, también las Matemáticas, la asignatura que consigue mayor número de aumentos.

Predominan las disminuciones en las variables intra-sujeto que requieren menor esfuerzo; son las afirmaciones que tienen mayor número de disminuciones: “es necesario conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” y “no es necesario saber Didáctica de la Matemática”.

## Máximos

En la tabla siguiente se indican los cursos que consiguen mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto que se han considerado en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es mayor            | Después es mayor          |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Primero                   | Primero, tercero y cuarto |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Primero, tercero y cuarto | Primero                   |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Primero                   | Quinto                    |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Primero                   | Tercero                   |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Tercero                   | Tercero                   |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Segundo                   | Primero                   |
| No es necesario saber Didáctica                              | Quinto                    | Quinto                    |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Primero                   | Primero                   |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Primero                   | Cuarto                    |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Primero                   | Primero                   |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Primero                   | Tercero                   |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Primero                   | Tercero                   |
| No es necesario saber Psicología                             | Tercer                    | Quinto                    |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Primero                   | Primero                   |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Quinto                    | Quinto                    |

Tabla 77: Máximos de la variable “curso”, en el segundo apartado, antes/después.

La mayoría de los valores máximos de las variables intra-sujeto que exigen un dominio total de las distintas materias, antes del estudio del

tema y de las técnicas, los consiguen los alumnos de primero; después del citado estudio lo comparten, con el mismo número, los de primero y los de tercero.

El mayor número de máximos de las afirmaciones que se refieren a un dominio aceptable de las distintas materias, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, lo alcanzan los alumnos de primero.

También, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los alumnos de primero los que tienen el mayor número de máximos en las variables intra-sujeto que conllevan el mínimo esfuerzo, en las distintas materias; después del estudio del tema pasan a ser los de quinto.

## Mínimos

En la tabla que sigue se recogen los mínimos de los valores negativos alcanzados por las variables intra-sujeto consideradas en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es menor | Después es menor |
|--------------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Segundo        | Segundo          |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Quinto         | Cuarto           |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Cuarto         | Primero          |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Cuarto         | Primero y cuarto |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Segundo        | Primero          |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Cuarto         | Quinto           |
| No es necesario saber Didáctica                              | Primero        | Cuarto           |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Segundo        | Segundo          |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Cuarto         | Quinto           |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Cuarto         | Cuarto           |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Segundo        | Cuarto           |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Cuarto         | Cuarto y quinto  |
| No es necesario saber Psicología                             | Cuarto         | Primero          |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Quinto         | Quinto           |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Cuarto         | Cuarto           |

Tabla 78: Mínimos de la variable “curso”, en el segundo apartado, antes/después.

El mayor número de mínimos en las variables intra-sujeto que se refieren al dominio total de las distintas materias, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, es de los alumnos de segundo.

Los mínimos de los dominios aceptables de las distintas materias se los reparten entre los alumnos de cuarto y quinto; siendo mayor, antes del estudio del tema y de las técnicas, para los de cuarto, y después, para los de quinto.

Los valores mínimos de las afirmaciones que no suponen ningún esfuerzo los consiguen los alumnos de primero y cuarto, siendo mayor el número que consiguen los alumnos de cuarto, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

## Edad

Para hacer la tabla de la variación de “la edad” como en el primer apartado, se denotará por  $x$  años la variación que sufren los alumnos de  $x$  años y cuando se quiera decir que aumenta, pondremos una  $A$ ; para indicar que disminuye, escribiremos  $D$  y en el caso en que tengamos que decir que se mantiene, escribiremos  $SM$ . Además, para que pueda caber toda la tabla en una sola página, se han reducido los nombres de las variables intra-sujeto.

## Variaciones

En la siguiente tabla se recogen todas las variaciones experimentadas, después del estudio del tema y de las técnicas, por las variables intra-sujeto que figuran en este apartado, según las edades de los alumnos.

| Variable intra-sujeto                                          | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 23 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|----------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>Dominio total Matemáticas</b>                               | A       | A       | A       | A       | SM      | A       | D       | D       | A       | A       | SM      |
| <b>Dominio aceptable Matemáticas</b>                           | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | D       | A       | D       | A       |
| <b>Conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes</b> | SM      | D       | D       | SM      | D       | D       | A       | D       | D       | SM      | D       |
| <b>Conocer las Matemáticas del libro de texto</b>              | D       | A       | A       | D       | D       | D       | D       | SM      | A       | A       | D       |
| <b>Dominio total Didáctica</b>                                 | A       | A       | D       | D       | SM      | D       | D       | S M     | SM      | SM      | A       |
| <b>Dominio aceptable Didáctica</b>                             | SM      | A       | A       | D       | SM      | D       | A       | D       | A       | D       | D       |
| <b>No es necesaria la Didáctica</b>                            | SM      | A       | D       | D       | A       | A       | SM      | D       | D       | SM      | D       |
| <b>Dominio total Didáctica de la Matemática</b>                | D       | A       | SM      | D       | A       | A       | D       | SM      | A       | SM      | D       |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica Matemática</b>            | D       | SM      | D       | A       | A       | D       | D       | M       | A       | SM      | D       |
| <b>No es necesaria la Didáctica de la Matemática</b>           | D       | A       | SM      | D       | D       | D       | A       | SM      | D       | SM      | D       |
| <b>Dominio total Psicología</b>                                | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | SM      | D       | A       | D       |
| <b>Dominio aceptable Psicología</b>                            | D       | SM      | A       | A       | A       | A       | A       | D       | SM      | SM      | SM      |
| <b>No es necesaria la Psicología</b>                           | D       | SM      | D       | D       | A       | A       | SM      | A       | A       | SM      | A       |
| <b>Es necesario técnicas de Metodología Creativa</b>           | A       | SM      | D       | D       | A       | A       | D       | SM      | SM      | SM      | A       |
| <b>No son necesarias las técnicas de Metodología Creativa</b>  | SM      | A       | A       | A       | A       | SM      | A       | SM      | SM      | D       | D       |

Tabla 79: Variación experimentada por la variable “edad”, en el segundo apartado.

Predominan los aumentos en las afirmaciones que conllevan un dominio total de alguna de las materias objeto de estudio, aunque no

hay mayoría. La asignatura que tiene mayor número de aumentos es la Psicología, seguida de las Matemáticas.

En las afirmaciones que tratan de un dominio aceptable de alguna de las materias sí hay una mayoría de aumentos, y la asignatura que cuenta con más aumentos es las Matemáticas.

En aquellas afirmaciones que requieren menor esfuerzo para el dominio de las distintas materias predominan las disminuciones, siendo la variable que cuenta con mayor número de ellas la que dice: “con los conocimientos Matemáticos que aprendiste en el Instituto tienes bastante”.

## Máximos

En la tabla siguiente se tienen los máximos de las distintas variables intra-sujeto consideradas en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es mayor | Después es mayor |
|--------------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | 26 años        | 24 y 28 años     |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | 28 años        | 19 años          |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | 29 años        | 26 años          |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | 29 años        | 29 años          |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | 27 años        | 27 años          |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | 28 años        | 19 años          |
| No es necesario saber Didáctica                              | 26 y 29 años   | 29 años          |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | 28 años        | 29 años          |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | 29 años        | 19 años          |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | 29 años        | 26 años          |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | 27 años        | 28 años          |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | 19 años        | 20 años          |
| No es necesario saber Psicología                             | 21 años        | 26 años          |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | 29 años        | 29 años          |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | 26 años        | 28 y 29 años     |

Tabla 80: Máximos de la variable “edad”, en el segundo apartado, antes/después.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, el mayor número de máximos en las afirmaciones que hablan de un dominio total de las distintas materias lo consiguen los alumnos de 27 año; después del citado estudio, los de 28 y 29 años al mismo nivel.

Los alumnos que cuentan con mayor número de máximos, antes del estudio del tema y de las técnicas, en las afirmaciones que se

refieren a un dominio aceptable de las distintas materias siguen siendo los de 28 años; vienen después los de 19 años.

En el resto de las afirmaciones los máximos son, antes del estudio del tema y de las técnicas, para los alumnos de 29 años; y después, para los de 26 y 29 años, al mismo nivel.

## Mínimo

En la tabla siguiente se agrupan todos los mínimos de las distintas afirmaciones que se trabajan en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es menor | Después es menor     |
|--------------------------------------------------------------|----------------|----------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | 20 años        | 29 años              |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | 29 años        | 26 años              |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | 19 años        | 20 y 23 años         |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | 28 años        | 27 años              |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | 29 años        | 21 años              |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | 27 años        | 26 años              |
| No es necesario saber Didáctica                              | 28 años        | 29 años              |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | 29 años        | 26 y 29 años         |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | 26 años        | 21, 25, 26 y 29 años |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | 28 años        | 28 años              |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | 20 años        | 21 años              |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | 26 años        | 29 años              |
| No es necesario saber Psicología                             | 28 y 29 años   | 28 años              |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | 26 años        | 26 años              |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | 20 años        | 29 años              |

Tabla 81: Mínimos de la variable “edad” , en el segundo apartado, antes/después.

Los alumnos que adquieren mayor número de mínimos en las afirmaciones que se refieren a un dominio total de las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de 20 y 29 años al mismo nivel, después de dicho estudio son los de 21, 26 y 29 años, con el mismo número.

Los mínimos de las afirmaciones que suponen un dominio aceptable de las distintas materias son ocupados preferentemente por los alumnos de 26 años, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.



En las afirmaciones que reducen el nivel de exigencia en las distintas materias, el mayor número de mínimos lo consiguen, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de 28 años, y después los de 27 y 28, igualados en número.

## Especialidad

Se recogen, en las tablas que vienen a continuación, todos los datos relativos a las variaciones, los máximos y los mínimos de las distintas variables intra-sujeto, en cada una de las submuestras a que da lugar la variable intra-sujeto “especialidad”.

## Variaciones

Se continúa con la tabla que condensa las variaciones experimentadas por las variables intra-sujeto de este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas, según las especialidades que se han tenido en cuenta.

| Variable intra-sujeto                                              | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                            | Aumenta            | Aumenta     | Disminuye              | Aumenta              |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                        | Aumenta            | Aumenta     | Se mantiene            | Aumenta              |
| <b>Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes</b> | Disminuye          | Disminuye   | Disminuye              | Aumenta              |
| <b>Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto</b>     | Disminuye          | Disminuye   | Disminuye              | Aumenta              |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                               | Aumenta            | Disminuye   | Se mantiene            | Disminuye            |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                           | Disminuye          | Disminuye   | Aumenta                | Aumenta              |
| <b>No es necesario saber Didáctica</b>                             | Aumenta            | Disminuye   | Se mantiene            | Se mantiene          |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>              | Aumenta            | Disminuye   | Se mantiene            | Aumenta              |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>          | Disminuye          | Disminuye   | Se mantiene            | Disminuye            |
| <b>No es necesario saber Didáctica de la Matemática</b>            | Disminuye          | Se mantiene | Aumenta                | Disminuye            |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                              | Aumenta            | Se mantiene | Disminuye              | Aumenta              |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                          | Disminuye          | Se mantiene | Disminuye              | Aumenta              |
| <b>No es necesario saber Psicología</b>                            | Disminuye          | Aumenta     | Se mantiene            | Aumenta              |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>       | Se mantiene        | Aumenta     | Disminuye              | Aumenta              |
| <b>No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>    | Aumenta            | Disminuye   | Aumenta                | Aumenta              |

Tabla 82: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el segundo apartado.

Después del estudio del tema y de las técnicas, hay el mismo número de aumentos en las variables intra-sujeto que se refieren a un dominio total de las distintas materias que de mantenimientos y

disminuciones, en las distintas especialidades. La asignatura que experimenta mayor número de aumentos es Matemáticas, y las especialidades que experimentan mayor número de aumentos son Educación Infantil y otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

Sólo se cuenta con seis aumentos en las afirmaciones que tratan del dominio aceptable de las variables, correspondiendo la mitad de ellos a Matemáticas. Si miramos por especialidades, se observa que también son la mitad de los aumentos de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas.

Predominan las disminuciones en las distintas afirmaciones que se refieren a la menor exigencia de conocimientos de las distintas materias, siendo “con los conocimientos matemáticos que aprendiste en el Instituto tienes bastante” y “debes conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto” las que cuentan con mayor número de disminuciones. Los grupos de alumnos que experimentan mayor número de disminuciones son los de Educación Infantil y los de Matemáticas.

## Máximos

Se recopilan, en la tabla siguiente, las especialidades que obtienen los máximos en las distintas variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es mayor         | Después es mayor       |
|--------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Magisterio no Infantil | Otras especialidades   |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Magisterio no Infantil | Matemáticas            |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Matemáticas            | Otras especialidades   |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Matemáticas            | Matemáticas            |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Otras especialidades   | Otras especialidades   |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Magisterio no Infantil | Educación Infantil     |
| No es necesario saber Didáctica                              | Matemáticas            | Otras especialidades   |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Otras especialidades   | Otras especialidades   |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Matemáticas            | Educación Infantil     |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Matemáticas            | Magisterio no Infantil |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Magisterio no Infantil | Otras especialidades   |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Magisterio no Infantil | Educación Infantil     |
| No es necesario saber Psicología                             | Matemáticas            | Matemáticas            |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Educación Infantil     | Matemáticas            |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Matemáticas            | Magisterio no Infantil |

Tabla 83: Máximos de la variable “especialidad”, en el segundo apartado, antes/después.

Los alumnos que consiguen mayor número de máximos, antes del estudio del tema y de las técnicas, en las afirmaciones que implican dominio total de alguna de las materias son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil y los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas. Después de dicho estudio son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas los que logran casi todos los máximos.

El grupo de alumnos que obtiene mayor número de máximos en las afirmaciones que conllevan un dominio aceptable de alguna de las materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, es el de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil; y después del comentado estudio, el de Educación Infantil.

Los alumnos que obtienen los máximos de las variables intra-sujeto que hablan del nivel mínimo de exigencias en las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de Matemáticas; después de dicho estudio, se los reparten por igual los alumnos de: Matemáticas, Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil y los de otras especialidades diferentes de Magisterio y de Matemáticas.

## Mínimos

Se acumulan, en la tabla siguiente, las submuestras de alumnos que logran los mínimos en las distintas variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                              | Antes es menor         | Después es menor       |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                            | Educación Infantil     | Educación Infantil     |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                        | Educación Infantil     | Otras especialidades   |
| <b>Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes</b> | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| <b>Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto</b>     | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                               | Matemáticas            | Matemáticas            |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                           | Otras especialidades   | Magisterio no Infantil |
| <b>No es necesario saber Didáctica</b>                             | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>              | Educación Infantil     | Matemáticas            |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>          | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| <b>No es necesario saber Didáctica de la Matemática</b>            | Magisterio no Infantil | Otras especialidades   |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                              | Educación Infantil     | Magisterio no Infantil |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                          | Otras especialidades   | Otras especialidades   |
| <b>No es necesario saber Psicología</b>                            | Magisterio no Infantil | Educación Infantil     |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>       | Otras especialidades   | Otras especialidades   |
| <b>No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b>    | Educación Infantil     | Matemáticas            |

Tabla 84: Mínimos de la variable “especialidad”, en el segundo apartado, antes/después.

El mayor número de mínimos de las variables intra-sujeto relativas a un dominio total de las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, corresponden a los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y después, a los de Matemáticas.

En las afirmaciones que suponen un dominio aceptable de las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas son los que tienen mayor número de mínimos; después de dicho estudio, estos alumnos se reparten los mínimos, por igual, con los de Magisterio de Educación Infantil.

En las afirmaciones que se refieren al menor nivel de exigencias de las distintas materias los mínimos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, lo consiguen los alumnos de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Finalmente se recogerán en una tabla las variaciones experimentadas por las distintas variables intra-sujeto en las submuestras originadas por la variable inter-sujeto “bachillerato”,

después del estudio del tema y de las técnicas. En otras tablas se tendrán los máximos y los mínimos en ambos momentos.

## Variaciones

Se reúnen ahora las variaciones que experimenta la variable inter-sujeto “bachillerato”, respecto de cada una de la variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En la tabla siguiente hay casillas que quedan vacías, esto es debido a que los alumnos correspondientes no respondieron a esas cuestiones.

| Variable intra-sujeto                                        | Otro        | Ciencias    | Letras      | F P         |
|--------------------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Disminuye   | Aumenta     | Aumenta     | Aumenta     |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Disminuye   | Aumenta     | Aumenta     | Se mantiene |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Aumenta     | Disminuye   | Disminuye   | Disminuye   |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Se mantiene | Disminuye   | Disminuye   | Aumenta     |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Se mantiene | Disminuye   | Aumenta     | Aumenta     |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Disminuye   | Se mantiene | Disminuye   | Disminuye   |
| No es necesario saber Didáctica                              | Aumenta     | Se mantiene | Se mantiene | Se mantiene |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Se mantiene | Aumenta     | Disminuye   |             |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Disminuye   | Disminuye   | Disminuye   |             |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Disminuye   | Se mantiene | Disminuye   |             |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Se mantiene | Aumenta     | Aumenta     | Se mantiene |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Aumenta     | Se mantiene | Disminuye   |             |
| No es necesario saber Psicología                             | Se mantiene | Se mantiene | Disminuye   | Se mantiene |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Disminuye   | Aumenta     | Disminuye   | Se mantiene |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Aumenta     | Aumenta     | Se mantiene | Se mantiene |

Tabla 85: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el segundo apartado.

En esta tabla se observan un mayor número de aumentos en las variables intra-sujeto que se refieren a un dominio total de las distintas materias, siendo las Matemáticas la asignatura que cuenta con mayor número, y los alumnos de Ciencias, seguidos de los de Letras, los que consiguen mayor número de aumentos.

En las variables intra-sujeto que comentan los dominios aceptables de las distintas materias sólo hay tres aumentos, siendo dos de ellos de las Matemáticas.

Sólo se cuentan con ocho disminuciones en las afirmaciones que conllevan menor exigencia en los conocimientos de las distintas materias, siendo tres de ellos de la variable “con los conocimientos matemáticos que aprendiste en el Instituto tienes bastante”. Los alumnos de letras son los que alcanzan el mayor número de disminuciones.

## Máximos

Se concentran en la tabla adjunta las submuestras de alumnos que logran los valores máximos en las distintas variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es mayor | Después es mayor |
|--------------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Otros          | FP               |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | Otros          | FP               |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | FP             | Otros            |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | Ciencias       | Ciencias         |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | FP             | FP               |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | FP             | FP               |
| No es necesario saber Didáctica                              | Otros          | Otros            |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | FP             | FP               |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Letras         | Letras           |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | Letras         | Letras           |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | FP             | FP               |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Letras         | Letras           |
| No es necesario saber Psicología                             | Otros          | Otros            |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | FP y Otros     | FP               |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Otros          | Otros            |

Tabla 86: Máximos de la variable “bachillerato”, en el segundo apartado, antes/después.

Los máximos en las variables intra-sujeto que conllevan un dominio total de las distintas materias los logran, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de F P.

El mayor número de máximos de las variables intra-sujeto que suponen un dominio aceptable de las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, lo consiguen los alumnos de Letras, y después de dicho estudio los de Letras y los de FP, ambos con el mismo número.

El para los alumnos que llamamos Otros son los que tienen el mayor número de máximos en las afirmaciones que conllevan menor nivel

de exigencias en las distintas materias, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Mínimos

Se van a condensar en la tabla siguiente las submuestras de alumnos que reciben los mínimos de las distintas variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                        | Antes es menor | Después es menor |
|--------------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| <b>Dominio total de las Matemáticas</b>                      | Letras         | Otros            |
| <b>Dominio aceptable de las Matemáticas</b>                  | FP             | Otros            |
| Los conocimientos matemáticos del Instituto son suficientes  | Otros          | Letras           |
| Conocer las Matemáticas que vienen en el libro de texto      | FP y Otros     | Otros            |
| <b>Dominio total de la Didáctica</b>                         | Otros          | Otros            |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica</b>                     | Otros          | Otros            |
| No es necesario saber Didáctica                              | FP             | FP               |
| <b>Dominio total de la Didáctica de la Matemática</b>        | Letras         | Ciencias         |
| <b>Dominio aceptable de la Didáctica de la Matemática</b>    | Ciencias       | FP               |
| No es necesario saber Didáctica de la Matemática             | FP             | FP               |
| <b>Dominio total de la Psicología</b>                        | Otros          | Otros            |
| <b>Dominio aceptable de la Psicología</b>                    | Ciencias       | FP               |
| No es necesario saber Psicología                             | FP             | FP               |
| <b>Es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa</b> | Ciencias       | Otros            |
| No es necesario conocer técnicas de Metodología Creativa     | Letras         | Letras           |

Tabla 87: Mínimos de la variable “bachillerato”, en el segundo apartado, antes/después.

Los alumnos que consiguen mayor número de mínimos de las variables intra-sujeto que hablan de dominio total de las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que llamamos Otros —alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años.

El mayor número de mínimos de las afirmaciones que tratan de un dominio aceptable de las distintas materias, antes del estudio del tema y de las técnicas es de los alumnos de Ciencias, y después, de los de FP y de los que llamamos Otros, al mismo nivel.

Los mínimos de las variables intra-sujeto que suponen menor esfuerzo los obtienen en su mayoría los alumnos de FP, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

### 5.3.5. Estadístico del tercer apartado de las Encuestas

Se comienza trabajando con los resultados obtenidos, como consecuencia de las respuestas que han dado los alumnos, en el tercer apartado de las dos encuestas.

Se pasa a analizar cada uno de los aspectos que se han considerado en las respuestas al tercer apartado, que en la Evaluación Inicial decía: plantea tres actividades que podrías realizar con niños de Educación Infantil, de 0 a 6 años, sobre "las Magnitudes y su Medida", sin consultar ningún material ni preguntarle a nadie. Y en la Evaluación Final se cambio por: plantea tres actividades que podrías realizar con niños de Educación Infantil, de 0 a 6 años, sobre "las Magnitudes y su Medida", sin consultar ningún material ni preguntarle a nadie, tan solo puedes usar los conocimientos que hayas aprendido cuando te explicamos el tema.

#### 5.3.5.1. Creatividad

Se empieza estudiando, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, la creatividad que han usado los alumnos a la hora de proponer las actividades. Ya se ha indicado antes que para medir la creatividad se han utilizado los indicadores ya señalados en el Capítulo I, que son: fluidez, originalidad o innovación, flexibilidad, elaboración, apertura, comunicación, sensibilidad y recepción, imaginación, intuición, impacto y redefinición.

En este caso se toman como variables intra-sujeto *la creatividad en el tercer apartado*, antes y después del estudio del tema. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se irán eligiendo sucesivamente las variables: "género", "año de realización", "curso", "edad", "especialidad" y "bachillerato", para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema sobre "la creatividad en el tercer apartado", según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$ , y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.000<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre la creatividad de los alumnos antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que



se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.000 < 0.05$ , por ello se tiene que rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: los alumnos son mucho más creativos después del estudio del tema y de las técnicas.

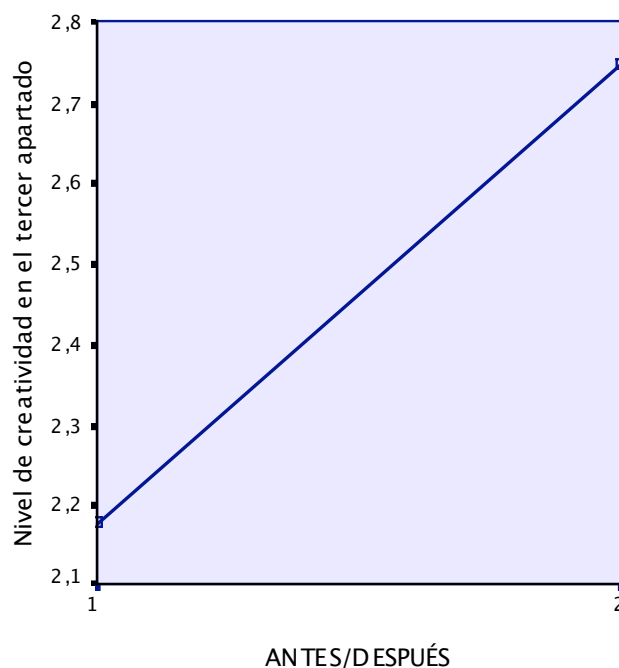


**Figura 486: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable “creatividad en el tercer apartado” han sido: 0=“nada creativo”, 1=“poco creativo”, 2=“algo creativo”, 3=“bastante creativo” y 4=“muy creativo”, se tiene que decir que al aumentar el valor, aumenta el nivel de creatividad; por tanto, esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el nivel de creatividad, los alumnos son más creativos.

## Género

Se empieza ahora tomando variables inter-sujeto comenzando por el “género” para estudiar si “la creatividad” utilizada para proponer las actividades en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema, depende del “género”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en “la creatividad en el tercer apartado” dentro del mismo género, y  $p=0.922>0.05$  cuando se considera entre los géneros, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.000<0.05$ , cuando se considera si hay diferencia dentro del mismo género, y  $p=0.922>0.05$  cuando se considera si hay diferencias entre los géneros. Se puede afirmar, por tanto, que existen diferencias significativas en “la creatividad” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro del mismo género, pero no existe diferencia entre los géneros.

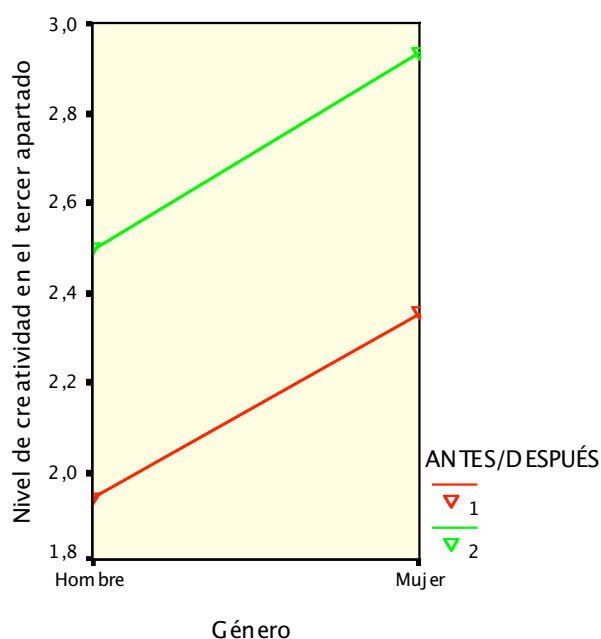


**Figura 487: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “género”.**

En esta figura se observa que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres son más creativas que los hombres. Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la creatividad, tanto en los hombres como en las mujeres.

## Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar si “la creatividad” utilizada para proponer actividades en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “año de realización”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.001<0.05$  cuando se considera la influencia del “año de realización” en “la creatividad” en el tercer apartado dentro del mismo año de realización, y  $p=0.626>0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización, y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.001<0.05$ , cuando se considera si hay diferencia dentro del mismo año de realización, y  $p=0.626>0.05$  cuando se considera si hay diferencias entre los distintos años de realización. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas entre “la creatividad” de los alumnos, antes y después del citado estudio, dentro del mismo año de realización, pero no existe diferencia entre los distintos años de realización.

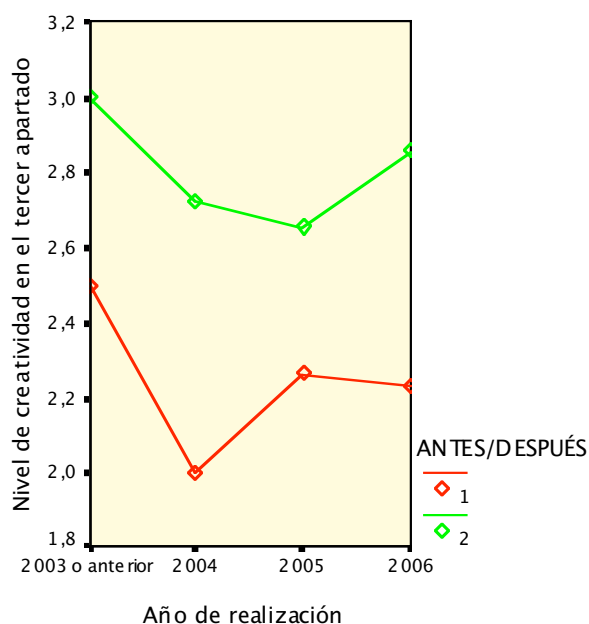


**Figura 488: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura indica que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más creativos son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y los menos creativos son los que las respondieron en 2003/2004. Después de dicho estudio siguen siendo más creativos los alumnos que respondieron las encuestas en

2002/2003 ó anteriores, y los menos creativos son los que las respondieron en 2004/2005. Después del mencionado estudio, aumenta la creatividad de todos los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.

## Curso

Se elige como variable inter-sujeto “el curso” para estudiar si “la creatividad” utilizada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “curso” en que estén matriculados los alumnos. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.001<0.05$ , cuando se considera la influencia del “curso” en que estén matriculados en “la creatividad en el tercer apartado”, dentro del mismo curso, y  $p=0.812>0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos valores. Por todo ello se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la creatividad” de los alumnos antes y después del citado estudio dentro del mismo curso, pero no existe diferencia entre los distintos cursos.

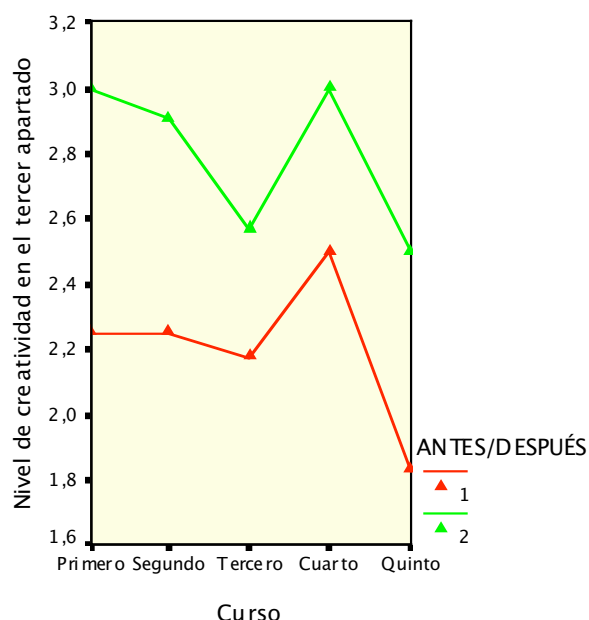


**Figura 489: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.**

La figura que acompaña y la que sigue indican que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más creativos son los de cuarto, y los menos creativos son los de quinto. Después de dicho

estudio los alumnos que antes eran más creativos lo siguen siendo, y además se añaden a ellos los de primero.

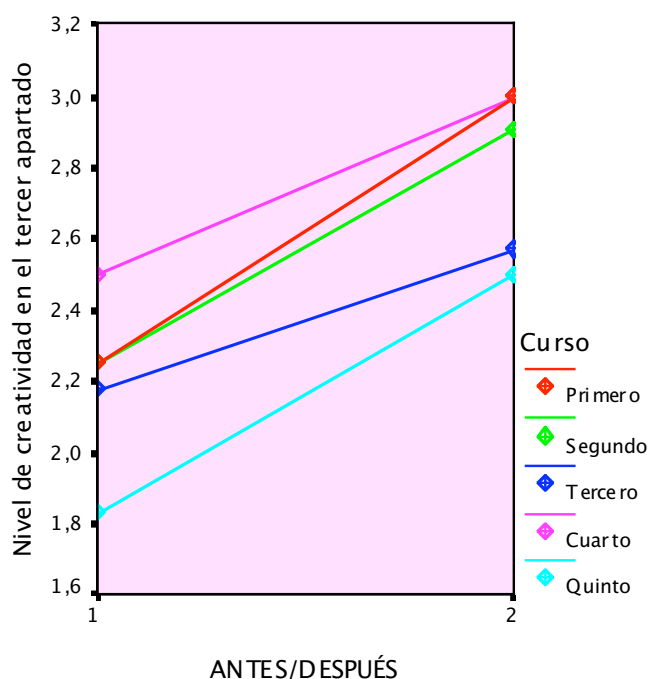


**Figura 490: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura deja claro que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la creatividad de todos los alumnos, sea cual sea el curso en que estén matriculados.

## Edad

Se elige como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar si la creatividad utilizada para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la edad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de “la edad” en “la creatividad en el tercer apartado” dentro de la misma edad, y  $p=0.037<0.05$  cuando se considera entre las distintas edades. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Por tanto, se deduce que existen diferencias muy significativas en “la creatividad” de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro de la misma edad, y existen diferencias significativas entre las distintas edades.

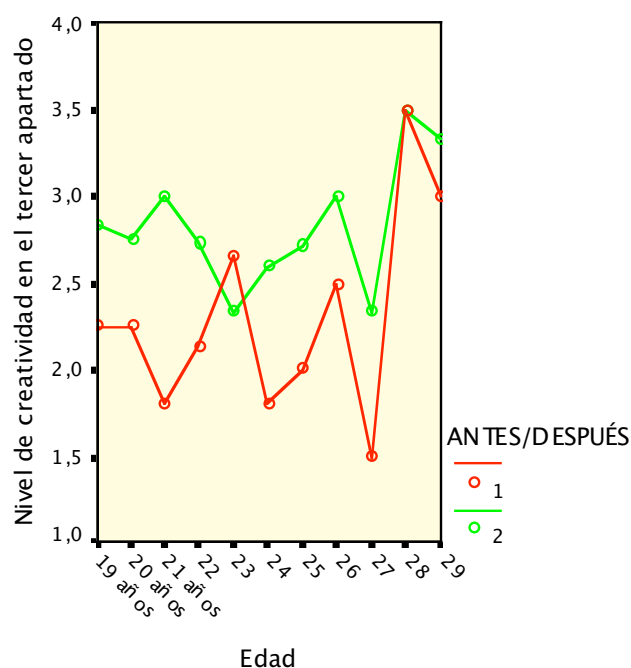


**Figura 491: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.**

En la figura que precede se puede observar que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más creativos son los que tenían 28 años, y los menos creativos son: antes, los de 27 años, y después, los de 27 ó 23 años.

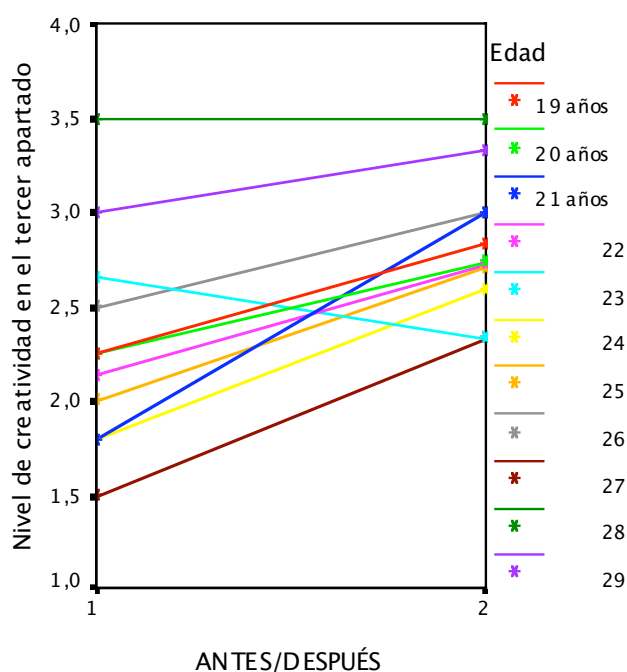


**Figura 492: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.**

Vemos en esta figura que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la creatividad de todos los alumnos, excepto de los que tenían 23 años que disminuye.

## Especialidad

Cogemos como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si “la creatividad” utilizada para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la especialidad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de “la especialidad” en “la creatividad en el tercer apartado” dentro de la misma especialidad, y  $p=0.997>0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también son análogos. Por tanto, se puede concluir que existen diferencias muy significativas en “la creatividad” de los alumnos antes y después del citado estudio cuando se trata de la misma especialidad, y no existen diferencias significativas entre las distintas especialidades.

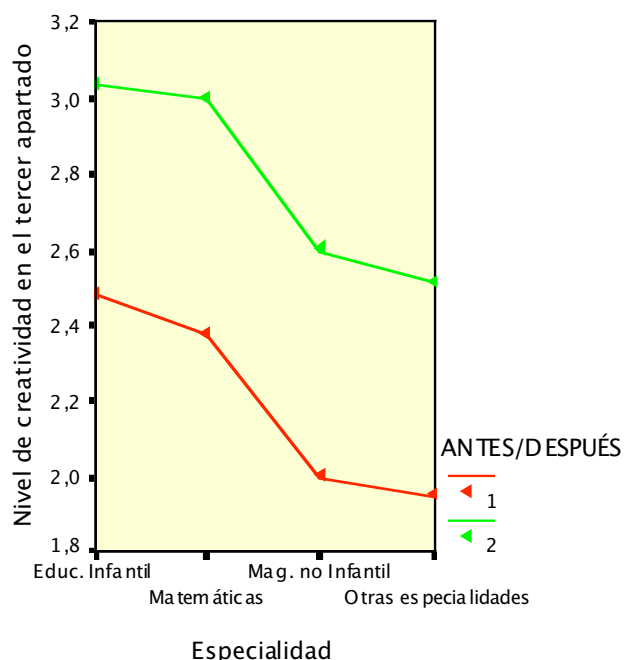


**Figura 493: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.**

La figura que precede informa de que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más creativos son los

de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y los menos creativos son los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas.

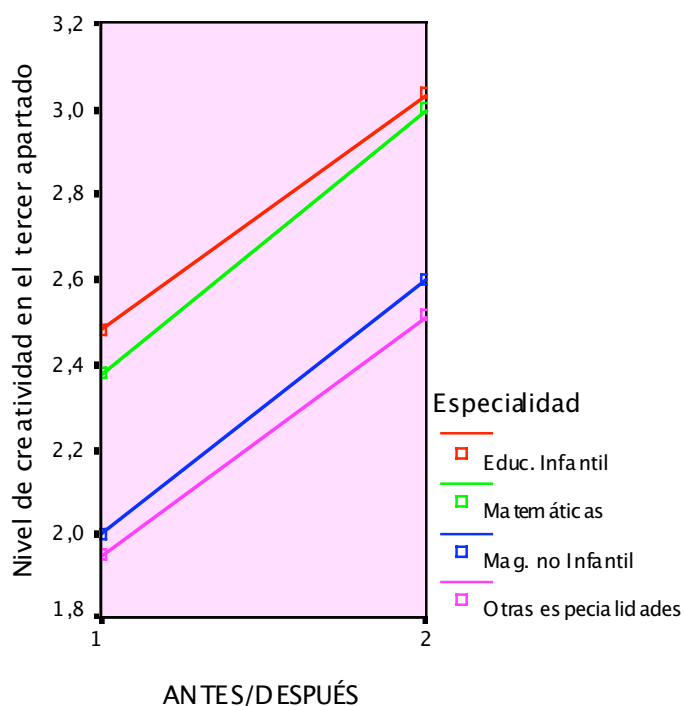


**Figura 494: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Sigue ocurriendo lo mismo que sucede desde que empezamos este apartado: después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la creatividad de todos los alumnos, sea cual sea la especialidad en que estén matriculados.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en “la creatividad” de los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” para proponer actividades no depende del “bachillerato”.



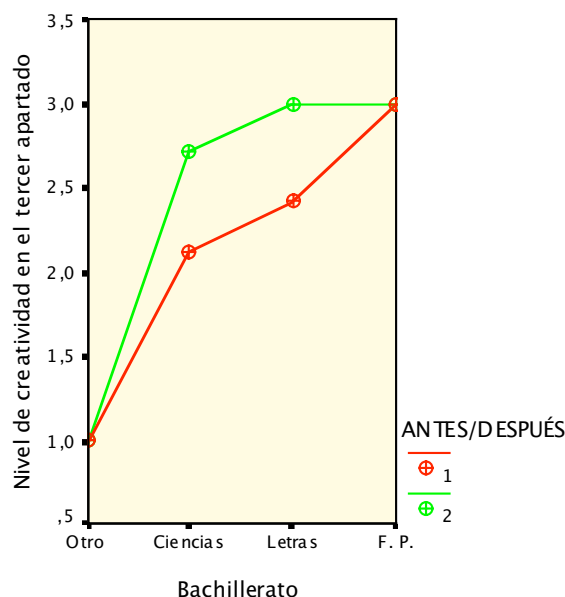


**Figura 495: Estimación de “la creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura deja claro que los alumnos más creativos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de Formación Profesional, a los que, después, se añaden los que habían cursado el bachiller de Letras. Los menos creativos son los que llamamos otros (alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años).

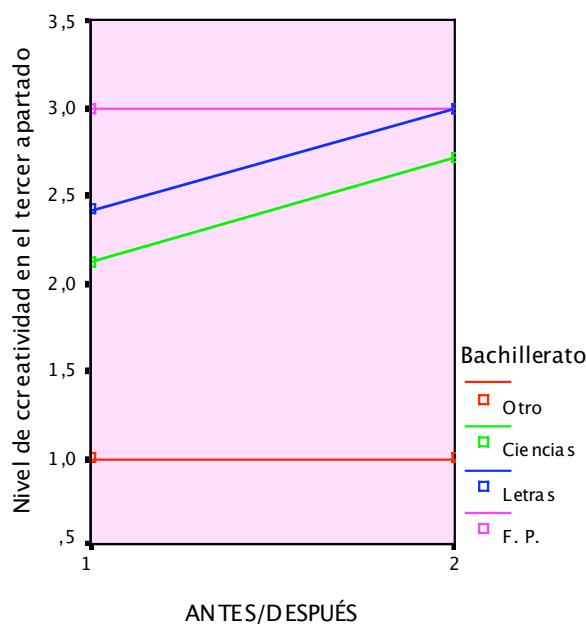


**Figura 496: Ampliación de la comparación: “creatividad en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura vemos que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la creatividad para los que cursaron el bachillerato de Ciencias o de Letras y se mantiene para los demás.

En la tabla siguiente se recogen todos los niveles críticos relativos a las afirmaciones “creatividad en el tercer apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                  | Momento                         | Interacción                            | Figura           |
|--------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------|------------------|
| <b>CREATIVIDAD<br/>en el tercer<br/>apartado</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                        | 482              |
|                                                  | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.922$ 483    |
|                                                  | Antes / después: $p=0.001^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.626$ 484    |
|                                                  | Antes / después: $p=0.001^{**}$ | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.812$ 485-6  |
|                                                  | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.037$ 487-8  |
|                                                  | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.997$ 489-90 |
|                                                  | Antes / después: $p=0.278$      | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.707$ 491-2  |

**Tabla 88: “Creatividad en el tercer apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.5.2. Número de magnitudes

Continuamos estudiando el número de magnitudes que han usado los alumnos a la hora de proponer las actividades mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Se toman las afirmaciones *número de magnitudes en el tercer apartado*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después iremos eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema sobre “el número de magnitudes en el tercer apartado”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.004<0.05$ , y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.004<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “el número de magnitudes” que utilizan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.004<0.05$ , luego se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando analizamos los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: los alumnos utilizan mayor número de magnitudes después de estudiarse el tema y las técnicas.

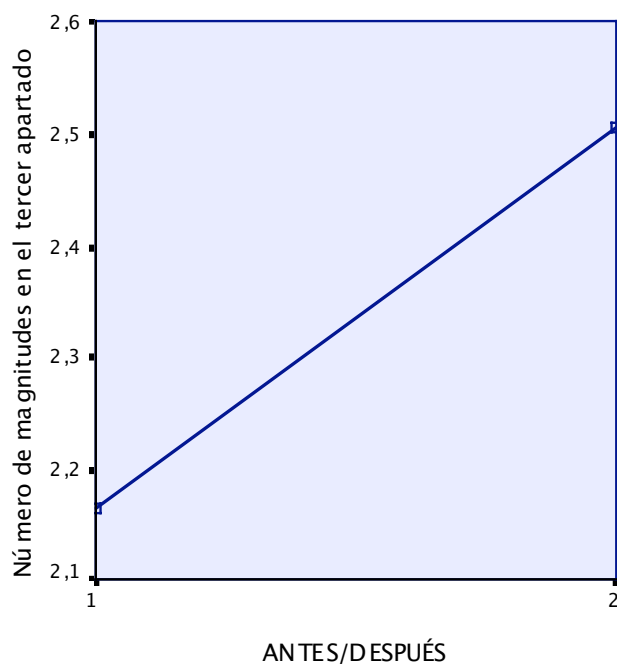


**Figura 497: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable “número de magnitudes en el tercer apartado” han sido: 1=“una magnitud”, 2=“dos magnitudes”, 3=“tres magnitudes”..., se tiene que al aumentar el valor, aumenta el número de magnitudes utilizadas para proponer actividades. La figura que precede informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de magnitudes utilizadas.

## Género

Se elige como variable inter-sujeto “el género” para estudiar si depende de él el número de magnitudes utilizadas para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.005 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en el número de magnitudes en el tercer apartado, dentro del mismo género, y  $p=0.892 > 0.05$  cuando se considera la influencia entre los géneros. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico

F también resultan ser  $p=0.005<0.05$ , cuando se considera si hay diferencia dentro del mismo género, y  $p=0.892>0.05$  cuando se considera si hay diferencias entre los géneros, luego se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en “el número de magnitudes” que utilizan los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas cuando se trata del mismo género, y no existen diferencias significativas entre los géneros.

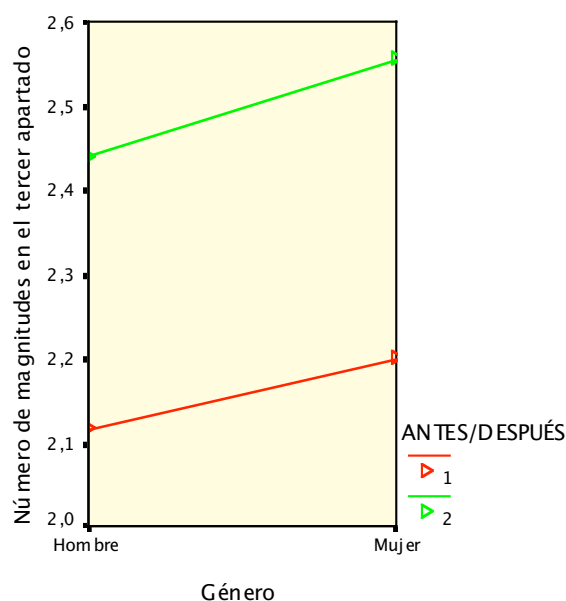


**Figura 498: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “género”.**

En esta figura se observa que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres utilizan mayor número de magnitudes que los hombres para proponer actividades a los niños. Después del estudio del tema y de las técnicas, tanto los hombres como las mujeres utilizan mayor número de magnitudes para proponer actividades.

### Año de realización

Cogemos como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver cómo influye en el número de magnitudes utilizadas por los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego hemos de afirmar que “el año de realización” no influye significativamente en el número de magnitudes utilizadas para proponer actividades.

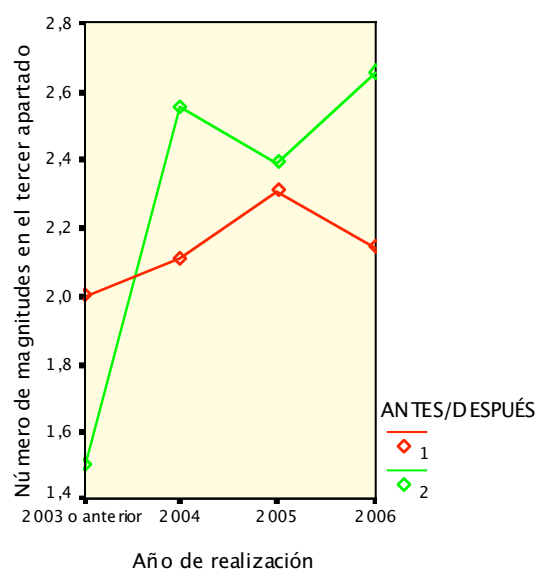


**Figura 499: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Se observa en esta figura y en la siguiente que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan más magnitudes son los que respondieron las encuestas en el curso 2004/2005, y los que utilizan menos magnitudes son los que las respondieron en 2002/2003 ó anteriores. Después de dicho estudio los alumnos que utilizan más magnitudes son los que respondieron las encuestas en 2005/2006, y los que usan menos son los mismos que antes.

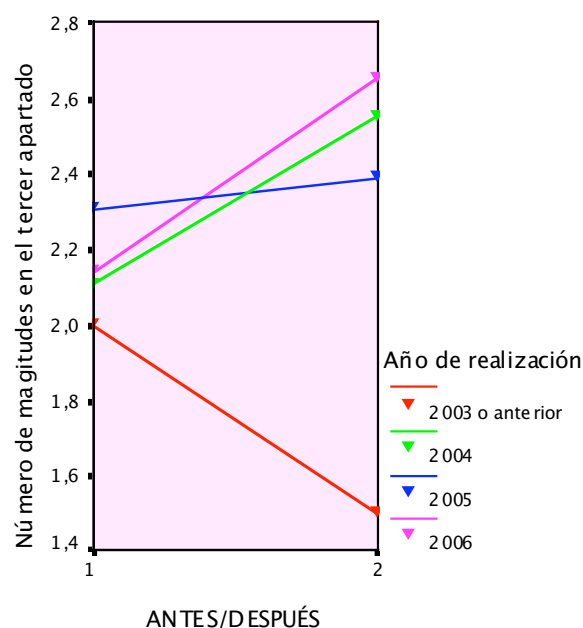


**Figura 500: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura y la anterior señalan que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de magnitudes utilizadas para proponer actividades a los niños, excepto para los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso” para ver cómo influye en el número de magnitudes utilizadas por los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, resultan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “el curso” no tiene repercusión significativa en el número de magnitudes empleadas para proponer actividades.

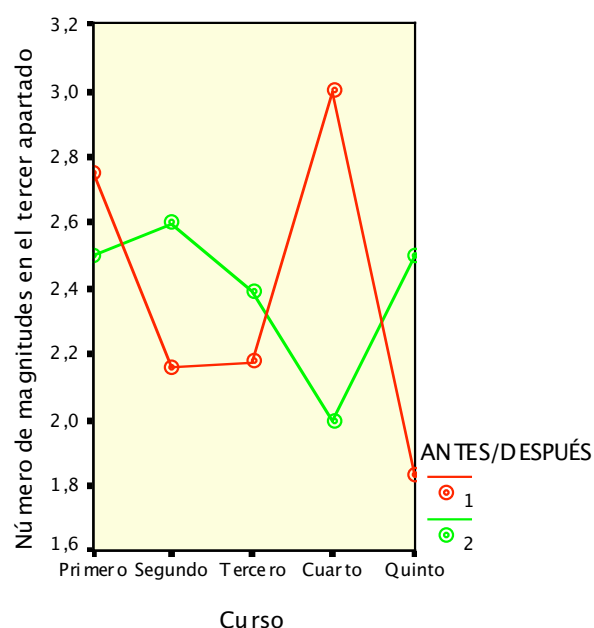


**Figura 501: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.**

En la figura que precede se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan mayor número de magnitudes para proponer actividades a los niños son los de cuarto, y los que usan menor número son los de quinto. Después de dicho estudio la situación cambia radicalmente, siendo los alumnos de segundo los que utilizan más magnitudes y los de cuarto los que menos.

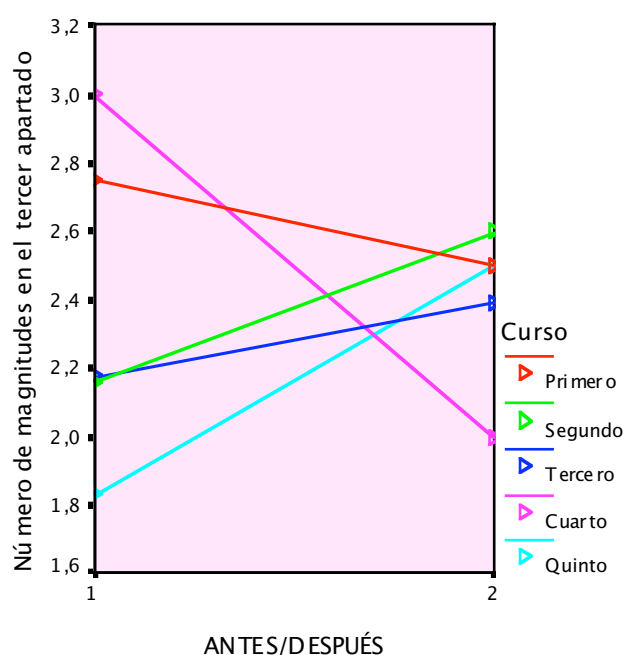


**Figura 502: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura ayuda a ver la anterior y además señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de magnitudes utilizadas por los alumnos que cursaban segundo, tercero ó quinto para proponer actividades a los niños, y disminuye para los demás.

## Edad

Se toma como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar si existe influencia en el número de magnitudes utilizadas por los alumnos para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.004 < 0.05$  cuando se considera la influencia de “la edad” en el número de magnitudes, dentro de la misma edad, y  $p=0.824 > 0.05$  cuando se considera entre las distintas edades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman los mismos valores. Por todo ello se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “el número de magnitudes” que utilizan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata de la misma edad, y no existen diferencias significativas entre las distintas edades.

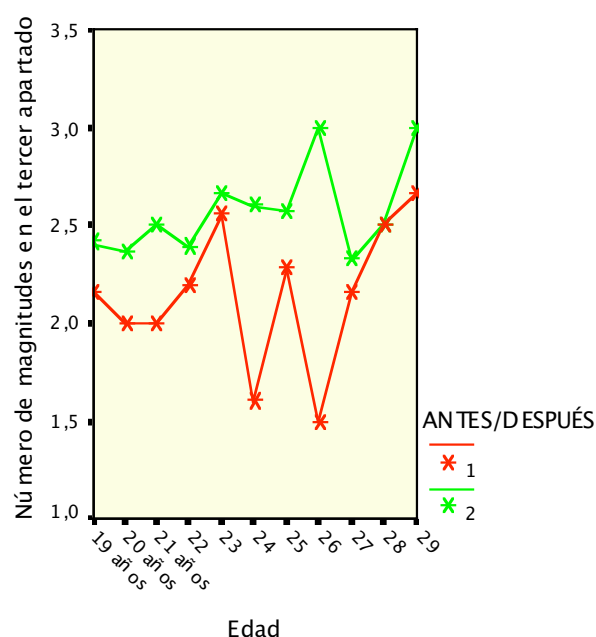


**Figura 503: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.**

En la figura que precede se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan más magnitudes para proponer actividades a los niños son los que tenían 29 años, y los que usan menos son los de 26 años. Después, los que usan más magnitudes son los que tenían 29 ó 26 años, y los que emplean menos son los que tenían 27 años.

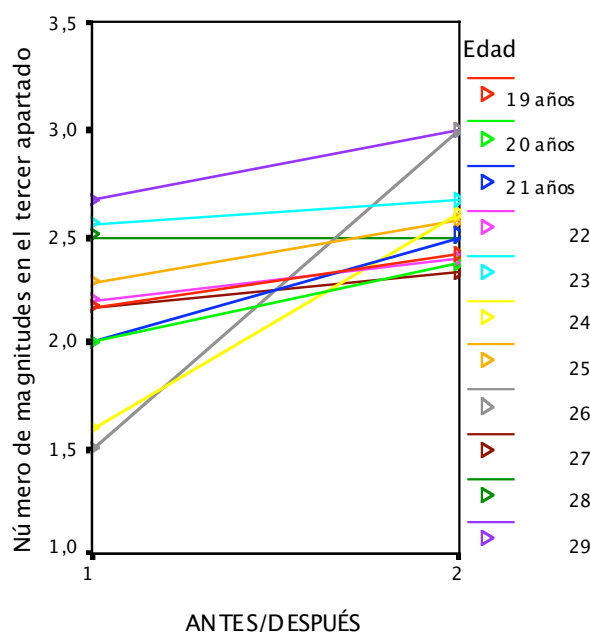


**Figura 504: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.**



Se observa en esta figura que, después del estudio del tema y de las técnicas aumenta o se mantiene el número de magnitudes utilizadas para proponer actividades a los niños; en ningún caso disminuye.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si de ella depende el número de magnitudes utilizadas para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.023<0.05$  cuando se considera la influencia de “la especialidad” en el número de magnitudes en el tercer apartado, dentro de la misma especialidad, y  $p=0.600>0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados, luego se tiene que afirmar que existen diferencias significativas en “el número de magnitudes” que utilizan los alumnos, antes y después del citado estudio, cuando se trata de la misma especialidad, y no existen diferencias significativas entre las distintas especialidades.

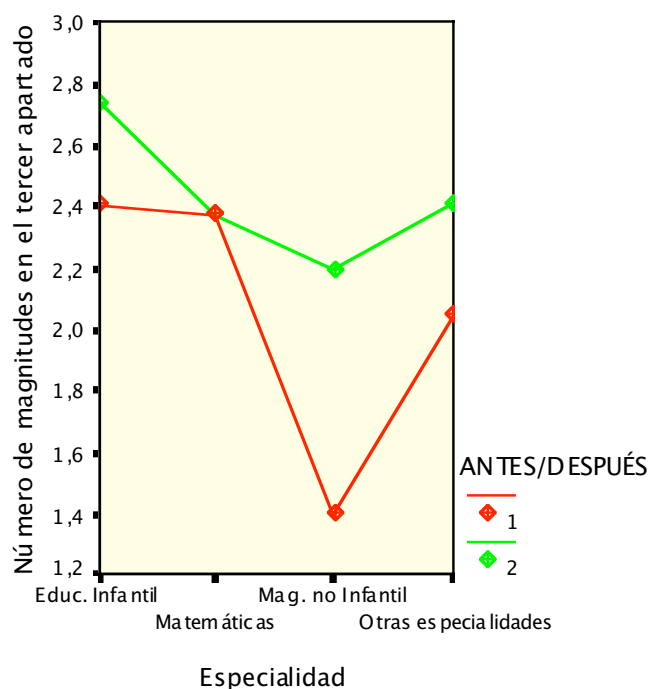


**Figura 505: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.**

En esta figura y en la siguiente se observa que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan más magnitudes son los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y los que usan menos son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

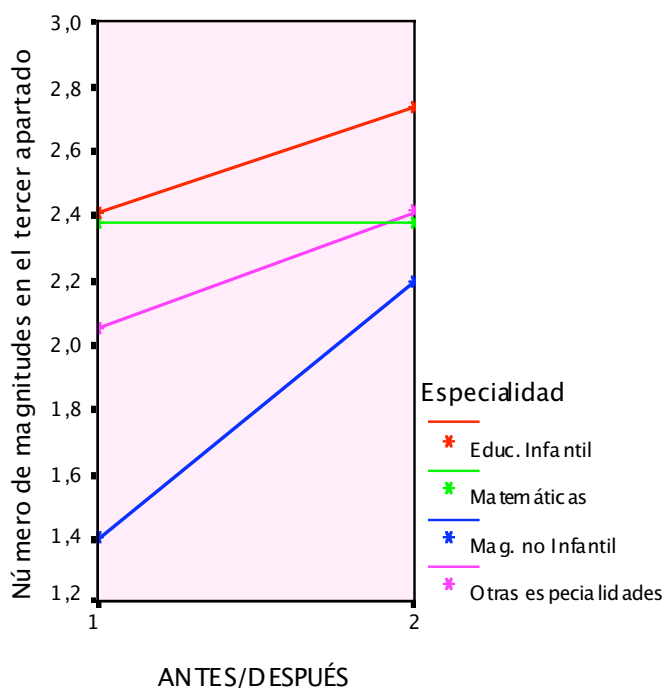


**Figura 506: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.**

La figura apunta que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta, para todos los alumnos, el número de magnitudes utilizadas para proponer actividades para los niños, excepto para los de magisterio, que usan el mismo número.

## Bachillerato

Se considera como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en “el número de magnitudes” utilizadas por los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que el número de magnitudes empleadas para proponer actividades no depende del “bachillerato”.

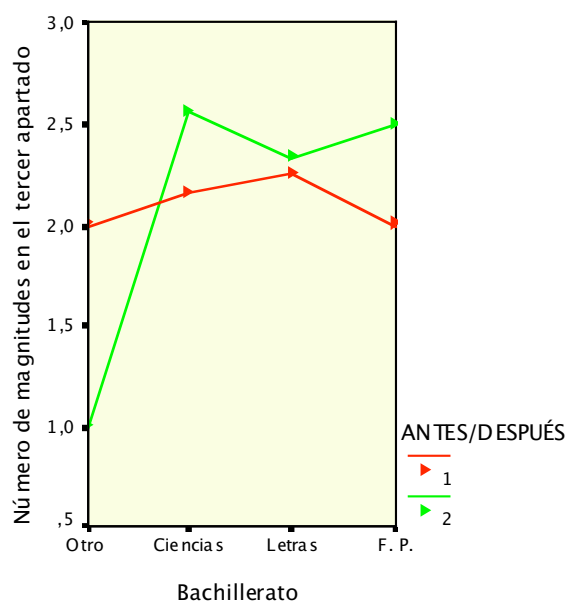


**Figura 507: Estimación del “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

La figura que precede y la que sigue señalan que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan mayor número de magnitudes son los del bachillerato de Letras, y los que menos, los de formación Profesional y los que llamamos Otros (alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años). Después del estudio del tema la situación varía, siendo los de Ciencias los que utilizan mayor número de magnitudes, y los que llamamos Otros los que menos.

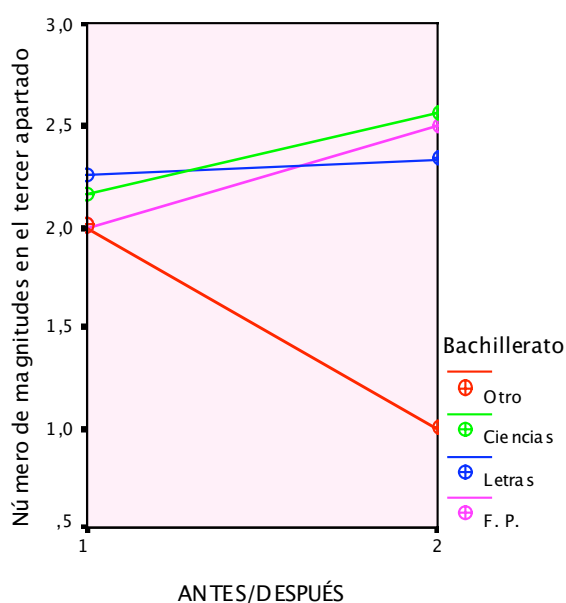


**Figura 508: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

La figura que acompaña dice que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de magnitudes utilizadas por casi todos los alumnos, excepto por los que llamamos Otros, que disminuye.

La tabla siguiente contiene todos los valores de significación obtenidos al considerar las afirmaciones “número de magnitudes en el tercer apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                   | Momento                         | Interacción                            | Figura            |
|---------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------|-------------------|
| <b>NÚMERO DE MAGNITUDES en el tercer apartado</b> | Antes / después: $p=0.004^{**}$ |                                        | 493               |
|                                                   | Antes / después: $p=0.005^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.892$ 494     |
|                                                   | Antes / después: $p=0.503$      | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.275$ 495-6   |
|                                                   | Antes / después: $p=0.942$      | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.172$ 497-8   |
|                                                   | Antes / después: $p=0.004^{**}$ | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.824$ 499-500 |
|                                                   | Antes / después: $p=0.023^{*}$  | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.600$ 501-2   |
|                                                   | Antes / después: $p=0.994$      | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.433$ 503-4   |

**Tabla 89: “Número de magnitudes en el tercer apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.5.3. Precisión

Se continúa estudiando, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, otro aspecto importante en este apartado: la precisión a la hora de proponer las actividades a los niños de Educación infantil. Se toman las afirmaciones *precisión en el tercer apartado*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. En principio no se toma ninguna variable inter-sujeto; después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema sobre “la precisión en el tercer apartado”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$ , y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.000<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.000<0.05$ , luego se tiene que rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: son más precisos después del estudio del tema y de las técnicas, ya que mientras antes de dicho estudio el 28% son muy precisos o bastante precisos, después hay un 64% que son muy precisos o bastante precisos.

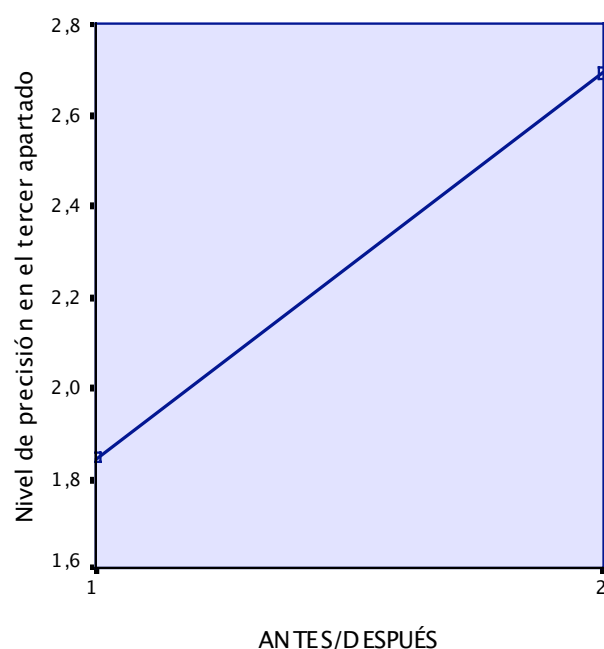


**Figura 509: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable “precisión en el tercer apartado” son: 0=“nada preciso”, 1=“poco preciso”, 2=“algo preciso”, 3=“bastante preciso” y 4=“muy preciso”, sabemos que al aumentar el número, aumenta la precisión. Teniendo en cuenta esto y a la vista de la figura que precede, se puede afirmar que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos son más precisos, como afirmábamos antes.

## Género

Se empieza eligiendo las distintas variables inter-sujeto comenzando por “el género” para estudiar cómo influye en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en “la

precisión” a la hora de proponer las actividades, dentro del mismo género, y  $p=0.384>0.05$  cuando se considera entre los géneros. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman los mismos valores, luego se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” con que proponen las actividades los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata del mismo género, y no existen diferencias significativas entre los géneros.

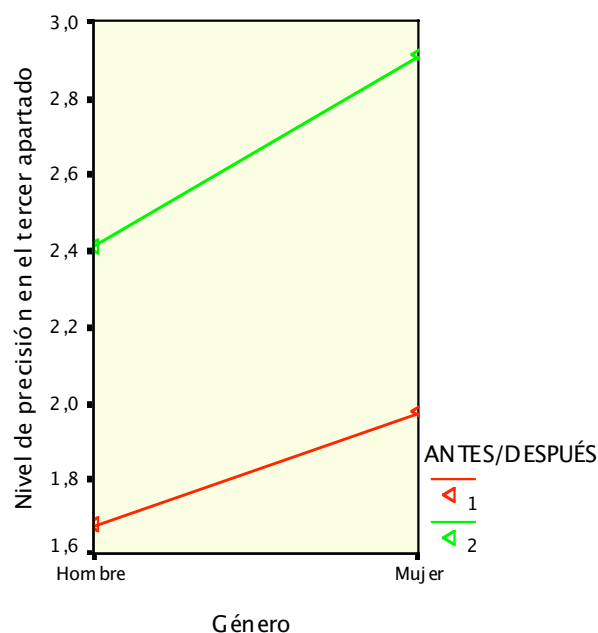


**Figura 510: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “género”.**

Se observa en la figura que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres son más precisas que los hombres a la hora de proponer las actividades a los niños. Después de dicho estudio, aumenta la precisión a la hora de proponer actividades tanto en las mujeres como en los hombres.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar cómo influye en la precisión utilizada para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia del “año de realización” en “la precisión” al proponer las actividades, cuando se toma dentro del mismo año de

realización, y  $p=0.184>0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman los mismos valores, luego se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” de los alumnos para proponer las actividades, antes y después del mencionado estudio, cuando se trata del mismo año de realización, y no existen diferencias significativas entre los distintos años de realización.

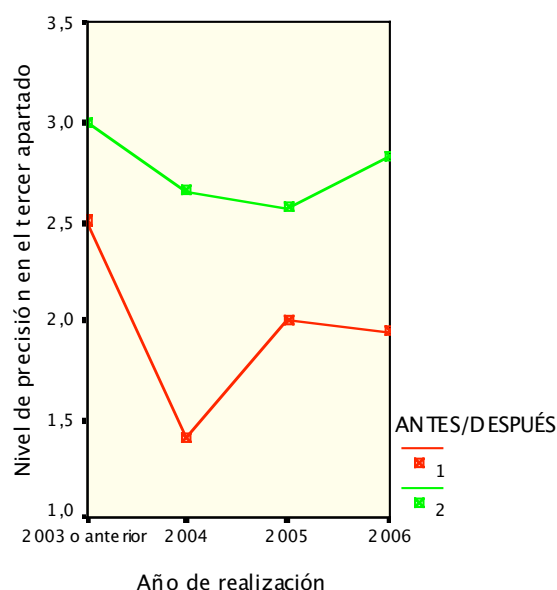


**Figura 511: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Los alumnos que son más precisos a la hora de plantear actividades a los niños, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y los que son menos precisos son: antes del citado estudio, los que respondieron las encuestas en 2003/2004, y después, los que las respondieron en 2004/2005.

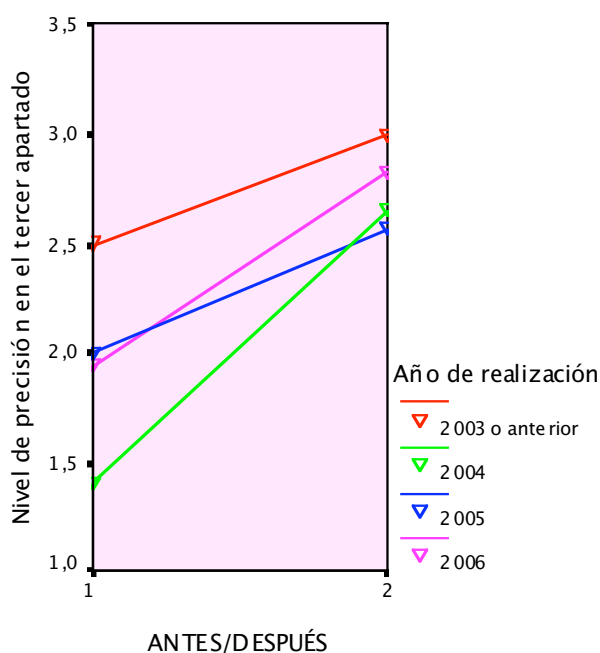


**Figura 512: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que precede deja claro que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan en todos los alumnos, cualesquiera que sean los cursos en que hayan respondido las encuestas, la precisión a la hora de plantear actividades para los niños de Educación Infantil.

## Curso

Cogemos como variable inter-sujeto “el curso” para estudiar si de él depende “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.004<0.05$  cuando se considera la influencia del “curso” en “la precisión” al proponer las actividades, dentro del mismo curso, y  $p=0.006<0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados, luego parece ser que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos antes y después del mencionado estudio, tanto si se trata del mismo curso como si se refiere a cursos distintos.



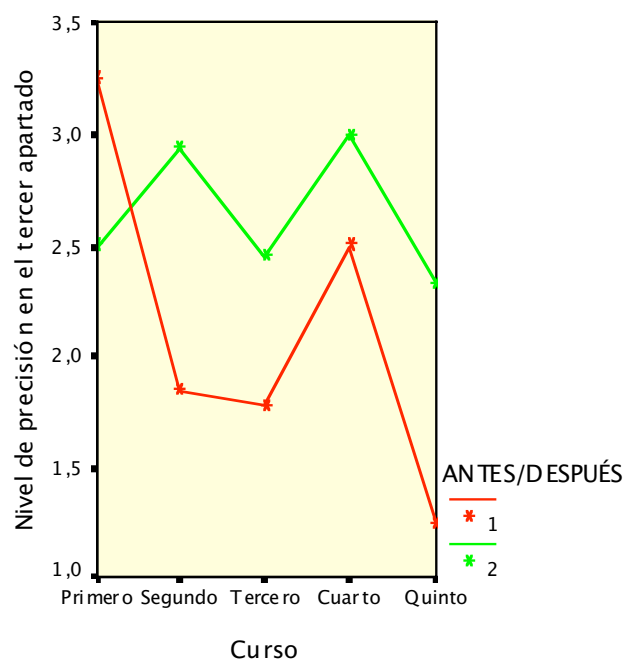


**Figura 513: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.**

La figura que acompaña señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más precisos, cuando plantean actividades para los niños, son los que cursaban primero, y los menos precisos son los de quinto. Después de dicho estudio los más precisos son ahora los de cuarto; y se mantienen los alumnos que son menos precisos.

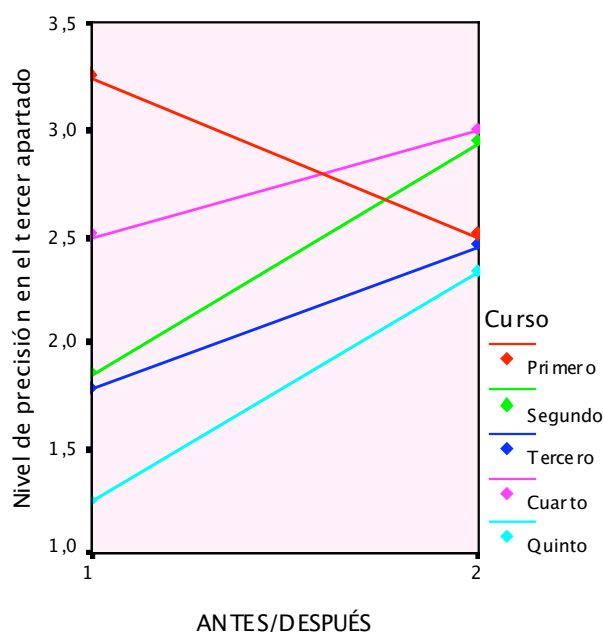


**Figura 514: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura dice que, después del estudio del tema y de las técnicas, para la mayoría de los alumnos aumenta la precisión para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, excepto para los que estaban matriculados en primero, que disminuye.

Se elige como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar cómo influye en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de “la edad” en “la precisión” al proponer las actividades en el tercer apartado, cuando se toma la misma edad, y  $p=0.823>0.05$  cuando se consideran edades distintas, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman valores análogos, luego se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” de los alumnos antes y después del citado estudio cuando se trata de la misma edad, y no existen diferencias significativas cuando se toman edades distintas.

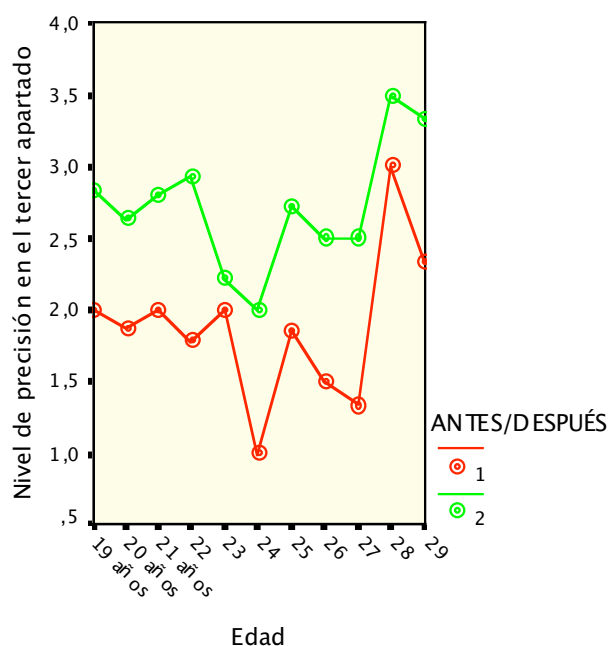


**Figura 515: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.**

Esta figura y la siguiente indican que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más precisos cuando plantean actividades a los niños de Educación Infantil son los que tenían 28 años, y los menos precisos, los de 24 años.

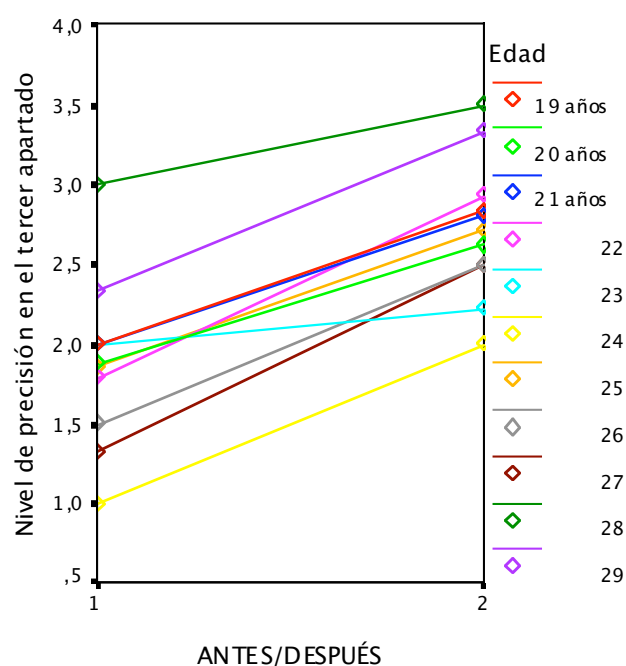


**Figura 516: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “edad”.**

Aquí se observa que cualquiera que sea la edad de los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la precisión cuando proponen actividades a los niños de Educación Infantil.

## Especialidad

Se toma como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños en el tercer apartado, antes y después del estudio del tema, depende de “la especialidad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de “la especialidad” en la precisión al proponer las actividades en el tercer apartado, cuando se toma la misma especialidad, y  $p=0.417>0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F toman también los mismos valores. Por todo ello se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata de la misma especialidad, y no existen diferencias significativas cuando se toman especialidades distintas.

Para comparar las distintas especialidades se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones post hoc con objeto de ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F, y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias. En este caso se ve que sólo entre los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas los niveles críticos dan  $p=0.023<0.05$ , luego sólo entre estas dos especialidades hay diferencias significativas.

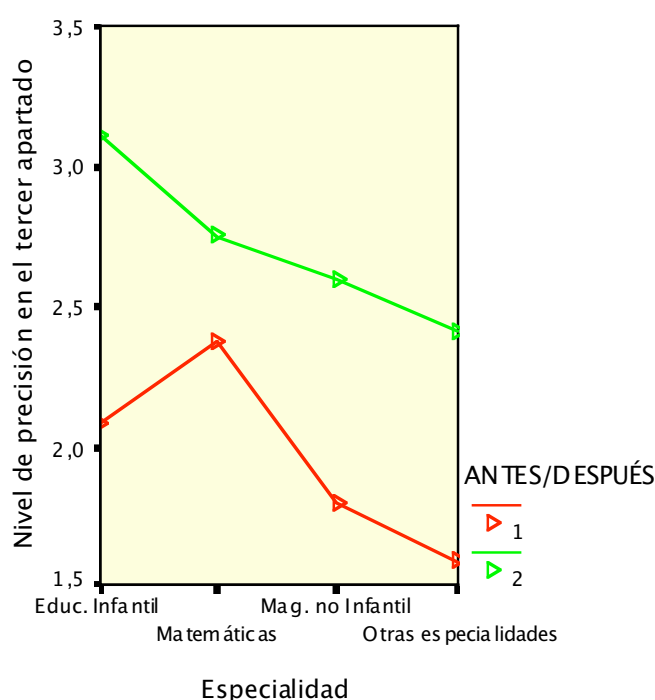


**Figura 517: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.**

En esta figura se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más precisos son los de Matemáticas, y los menos precisos, los de otras especialidades. Después del estudio del tema y de las técnicas los más precisos pasan a ser los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y se mantienen los de otras especialidades como los menos precisos.

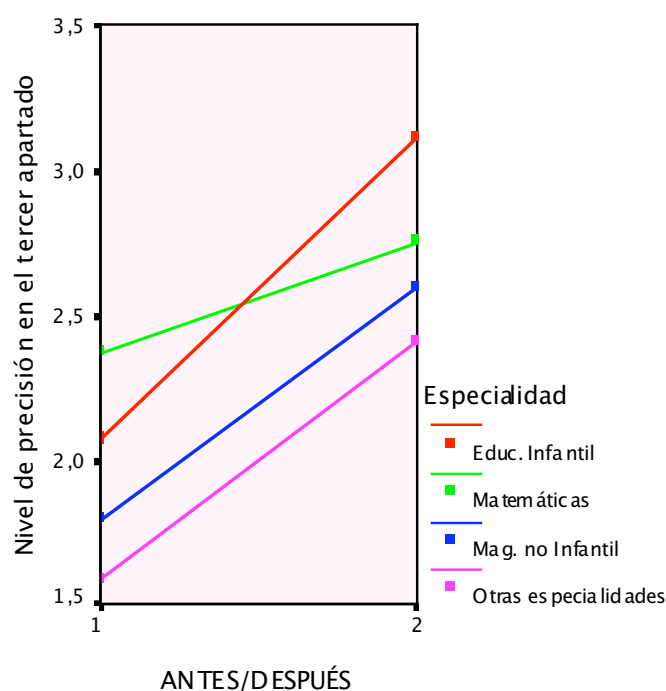


**Figura 518: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “especialidad”.**

La figura que acompaña indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la precisión de los alumnos a la hora de proponer actividades para los niños de Educación Infantil, cualquiera que sea la especialidad.

## Bachillerato

Se elige como variable inter-sujeto “el bachillerato” para estudiar si de él depende “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.032 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “bachillerato” en “la precisión” al proponer las actividades a los niños, dentro del mismo bachillerato, y  $p=0.842 > 0.05$  cuando se considera entre los distintos bachilleratos. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan con valores análogos. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata del mismo bachillerato, y no existen diferencias significativas cuando se toman bachilleratos distintos.

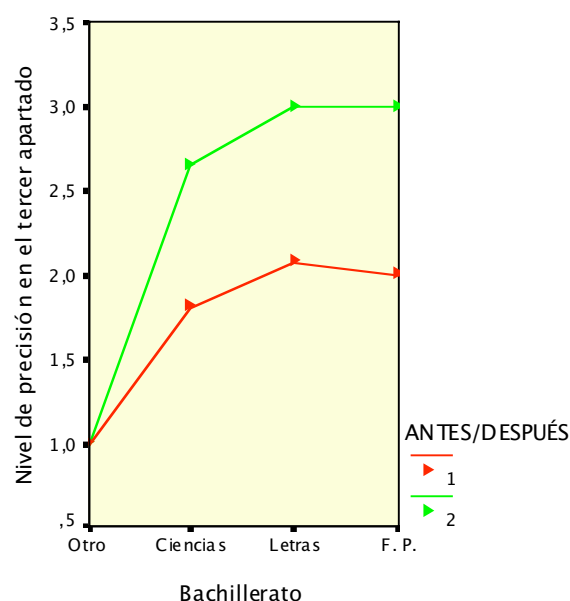


**Figura 519: Estimación de “la precisión en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Como se puede ver en esta figura, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más precisos a la hora de proponer actividades para los niños de Educación Infantil son los que cursaron el bachillerato de Letras; a éstos les igualan en precisión, después, los de Formación Profesional. Los menos precisos, en ambos casos, son los que llamamos Otros (alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años).

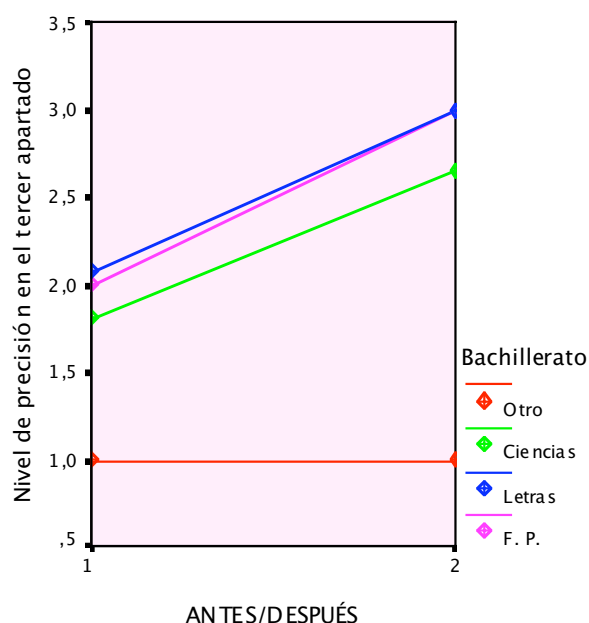


**Figura 520: Ampliación de la comparación: “precisión en el tercer apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura vemos que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta para todos los alumnos la precisión a la hora de proponer actividades para los niños de Educación Infantil, excepto para los que llamamos Otros, que se mantiene.

En la tabla siguiente se tienen los niveles de significación de las afirmaciones “precisión en el tercer apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                | Momento                         | Interacción                                      | Figura |
|------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>PRECISIÓN<br/>en el tercer<br/>apartado</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                  | 505    |
|                                                | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.384$       | 506    |
|                                                | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.184$          | 507-8  |
|                                                | Antes / después: $p=0.004^{**}$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.006^{**}$   | 509-10 |
|                                                | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.823$         | 511-2  |
|                                                | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.417$ | 513-4  |
|                                                | Antes / después: $p=0.032^{*}$  | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.842$ | 515-6  |

**Tabla 90: “Precisión en el tercer apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

#### 5.3.5.4. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado

Se sigue recogiendo, de forma análoga a como se ha hecho en los apartados anteriores, la variación experimentada, después del estudio del tema y de las técnicas, por cada una de las variables inter-sujeto, en las distintas variables intra-sujeto que hemos analizado anteriormente. Además, compararemos cómo quedan cada una de las submuestras consideradas según las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, teniendo en cuenta ambos momentos.

#### Variables intra-sujeto

En la tabla siguiente se va a ir indicando si se mantiene, aumenta o disminuye cada una de las variables intra-sujeto que se han considerado en este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas. Como las tres variables intra-sujeto conllevan una mayor facilidad para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, no hay necesidad de utilizar más de un color para que quede claro el estudio que se hace.

| Variable intra-sujeto       | Variación experimentada |
|-----------------------------|-------------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta                 |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta                 |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta                 |

**Tabla 91: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del tercer apartado.**

Está claro que el estudio del tema y de las técnicas les ha servido bastante a los alumnos ya que, después de dicho estudio aumentan todas las variables intra-sujeto que figuran en este apartado, y por tanto son más creativos, se les ocurren más magnitudes y son más precisos.

## Género

Se recogen en las tablas que vienen a continuación las variaciones experimentadas por las distintas variables intra-sujeto en las dos submuestras que determina la variable inter-sujeto “género”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En la tabla siguiente se indica cuál es la variación experimentada por los dos valores de la variable género en cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta              | Aumenta              |

**Tabla 92: Variación experimentada por la variable “género” en el tercer apartado, antes/después.**

Está claro que aumentan todas las variables intra-sujeto de este apartado en las dos submuestras que determina la variable “género”.

## Máximos

Se destaca en la siguiente tabla qué grupo de alumnos de los dos con que cuenta la variable “género” alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.



| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Mujeres        | Mujeres          |
| <b>Número de magnitudes</b> | Mujeres        | Mujeres          |
| <b>Precisión</b>            | Mujeres        | Mujeres          |

Tabla 93: Máximos de la variable “género” en el tercer apartado, antes/después.

En la tabla que precede se observa que son las mujeres las que acaparan todos los máximos en las distintas variables intra-sujeto de este apartado, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Como en esta variable sólo se tienen dos submuestras, si una es el máximo, la otra será el mínimo, luego todos los mínimos son de los hombres.

### Año de realización

Se continúan viendo las variaciones que hay en cada una de las submuestras de la variable inter-sujeto “año de realización”, los máximos y los mínimos de las distintas variables intra-sujeto de este apartado.

### Variaciones

En la tabla siguiente se toman la variación experimentada por las distintas variables intra-sujeto, en las submuestras determinadas por la variable “año de realización” después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Variación en 2003 ó anteriores | Variación en 2004 | Variación en 2005 | Variación en 2006 |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta                        | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Número de magnitudes</b> | Disminuye                      | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta                        | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |

Tabla 94: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el tercer apartado.

Para la gran mayoría de los alumnos encuestados, después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan todas las afirmaciones de este apartado: son más creativos, se les ocurren mayor número de magnitudes —salvo a los de 2003 ó anteriores— y son más precisos en todo lo que dicen cuando plantean las actividades a los niños de Educación Infantil sobre “las Magnitudes y su Medida”.

## Máximos

En la tabla siguiente se pueden observar los grupo de alumnos, de la variable “año de realización”, que alcanzan el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor    | Después es mayor  |
|-----------------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores |
| <b>Número de magnitudes</b> | 2005              | 2006              |
| <b>Precisión</b>            | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores |

**Tabla 95: Máximos de la variable “año de realización” en el tercer apartado, antes/después.**

Es evidente que los alumnos que respondieron las encuestas en 2003 ó anteriores son los que obtienen la mayoría de los máximos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

## Mínimos

La variable “año de realización” da lugar a más de dos submuestras, por lo que tiene sentido construir la tabla que viene a continuación para recopilar qué grupo de alumnos alcanza el menor valor en cada una de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor    | Después es menor  |
|-----------------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 2005              | 2004              |
| <b>Número de magnitudes</b> | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores |
| <b>Precisión</b>            | 2004              | 2005              |

**Tabla 96: Mínimos de la variable “año de realización” en el tercer apartado, antes/después.**

En la tabla que precede se observa que los mínimos se los reparten entre los alumnos que respondieron las encuestas en los años 2003 ó anteriores, 2004 y 2005, con el mismo número todos ellos.

## Curso

Se considera ahora la variable inter-sujeto “curso” para recoger en las tablas siguientes, como venimos haciendo, las variaciones, los máximos y los mínimos de las distintas variables intra-sujeto.

## Variaciones

En la tabla siguiente se concentran la variación experimentada por las distintas variables intra-sujeto en cada una de las submuestras de la

variable inter-sujeto “curso”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Variación en primero | Variación en segundo | Variación en tercero | Variación en cuarto | Variación en quinto |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta             |
| <b>Número de magnitudes</b> | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye           | Aumenta             |
| <b>Precisión</b>            | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta             |

Tabla 97: Variación experimentada por la variable “curso”, en el tercer apartado.

Continúan aumentando la mayoría de las variables intra-sujeto en las distintas submuestras que determina la variable “curso”. La variable que cuenta con mayor número de disminuciones es “el número de magnitudes”, y por cursos es primero el que disminuye en más variables.

## Máximos

Se pasa a condensar en la tabla siguiente las submuestras de alumnos que alcanzan los máximos de las variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, teniendo en cuenta la variable “curso”.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Cuarto         | Primero y cuarto |
| <b>Número de magnitudes</b> | Cuarto         | Segundo          |
| <b>Precisión</b>            | Primero        | Cuarto           |

Tabla 98: Máximos de la variable “curso” en el tercer apartado, antes/después.

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, el mayor número de máximos lo consiguen los alumnos de cuarto.

## Mínimos

En la tabla siguiente se tienen los grupos de alumnos que se quedan con los mínimos de las distintas variables intra-sujeto considerada en este apartado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Quinto         | Quinto           |
| <b>Número de magnitudes</b> | Quinto         | Cuarto           |
| <b>Precisión</b>            | Quinto         | Quinto           |

Tabla 99: Mínimos de la variable “curso” en el tercer apartado, antes/después.

Son los alumnos de quinto los que acaparan casi todos los mínimos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

## Edad

Para tener recogidas las variaciones de las variables intra-sujeto de este apartado, los máximos y los mínimos, según la variable inter-sujeto “edad” , se construyen las tablas que vienen a continuación.

## Variaciones

| Variable intra-sujeto       | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 23 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|-----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>Creatividad</b>          | A       | A       | A       | A       | D       | A       | A       | A       | A       | SM      | A       |
| <b>Número de magnitudes</b> | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | SM      | A       |
| <b>Precisión</b>            | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       |

Tabla 100: Variación experimentada por la variable “edad” , en el tercer apartado.

Casi todos los alumnos consiguen aumentos en casi todas las variables intra-sujeto en las distintas edades, después del estudio del tema y de las técnicas. Los alumnos que no experimentan estos aumentos y tienen menor número de aumentos son los de 28 años, seguidos por los de 23.

## Máximos

Se plasma en la tabla siguiente quiénes son los alumnos que consiguen los máximos de las distintas variables intra-sujeto con que se cuenta en este apartado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 28 años        | 28 años          |
| <b>Número de magnitudes</b> | 29 años        | 26 y 29 años     |
| <b>Precisión</b>            | 28 años        | 28 años          |

Tabla 101: Máximos de la variable “edad” en el tercer apartado, antes/después.

El mayor número de máximos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, lo consiguen los alumnos de 28 años que eran, precisamente, los que antes se vio que tenían el menor número de aumentos en las distintas variables intra-sujeto.

## Mínimos

Se agrupan, en la tabla que viene a continuación, los mínimos en la variable “edad” de las variables intra-sujeto de este apartado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 27 años        | 23 y 27 años     |
| <b>Número de magnitudes</b> | 26 años        | 27 años          |
| <b>Precisión</b>            | 24 años        | 24 años          |

**Tabla 102: Mínimos de la variable “edad” en el tercer apartado, antes/después.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, como se puede ver en la tabla, los mínimos los obtienen los alumnos de 24, 26 y 27 años; después, los alumnos que cuentan con mayor número de mínimos son los de 27 años.

## Especialidad

Se considera ahora la variable inter-sujeto “especialidad” para recoger, en las tablas que vienen a continuación, las variaciones de las distintas variables intra-sujeto después del estudio del tema y de las técnicas, los máximos y los mínimos.

## Variaciones

En esta tabla se tienen las variaciones experimentadas por las distintas especialidades en las variables intra-sujeto con que se cuentan en este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|-----------------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta            | Aumenta     | Aumenta                | Aumenta              |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta            | Se mantiene | Aumenta                | Aumenta              |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta            | Aumenta     | Aumenta                | Aumenta              |

**Tabla 103: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el tercer apartado.**

Es grato observar que en las distintas variables intra-sujeto no hay ninguna disminución en ninguna especialidad, sólo hay un se mantiene en “el número de magnitudes”; todo lo demás son aumentos.

## Máximos

Se considera ahora quienes son los alumnos, por especialidades, que alcanzan los máximos en las distintas variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor     | Después es mayor   |
|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Educación Infantil | Educación Infantil |
| <b>Número de magnitudes</b> | Educación Infantil | Educación Infantil |
| <b>Precisión</b>            | Matemáticas        | Educación Infantil |

**Tabla 104: Máximos de la variable “especialidad” en el tercer apartado, antes/después.**

Los alumnos que alcanzan el mayor número de máximos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas son los de Educación Infantil; sólo los de Matemáticas los superan en precisión antes de dicho estudio, lo que era de esperar.

## Mínimos

Se destacan, en la tabla siguiente, los alumnos que tienen los mínimos, por especialidades, en las distintas variables intra-sujeto que figuran en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor         | Después es menor       |
|-----------------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Otras especialidades   | Otras especialidades   |
| <b>Número de magnitudes</b> | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| <b>Precisión</b>            | Otras especialidades   | Otras especialidades   |

**Tabla 105: Mínimos de la variable “especialidad” en el tercer apartado, antes/después.**

Son los alumnos de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas los que tienen el mayor número de mínimos en este apartado, en ambos momentos.

## Bachillerato

Finalmente se pasa a comparar, mediante las tablas que vienen a continuación, las variaciones que experimentan las submuestras originadas por la variable inter-sujeto “bachillerato”, después del estudio del tema y de las técnicas, los máximos y los mínimos en las distintas variables intra-sujeto que aparecen en este apartado.

## Variaciones

En la tabla siguiente aparecen las variaciones que experimentan las distintas submuestras de alumnos a que da lugar la variable “bachillerato” en cada una de las variables intra-sujeto que se tienen en este apartado.

| Variable intra-sujeto       | Otro        | Ciencias | Letras  | FP          |
|-----------------------------|-------------|----------|---------|-------------|
| <b>Creatividad</b>          | Se mantiene | Aumenta  | Aumenta | Se mantiene |
| <b>Número de magnitudes</b> | Disminuye   | Aumenta  | Aumenta | Aumenta     |
| <b>Precisión</b>            | Se mantiene | Aumenta  | Aumenta | Aumenta     |

**Tabla 106: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el tercer apartado.**

Aparecen, en esta tabla, una mayoría de aumentos en las distintas variables inter-sujeto de este apartado. Los alumnos de Ciencias y los de Letras consiguen sólo aumentos, y los que tienen menor número de aumentos son los que llamamos Otros —alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años.

## Máximos

En la siguiente tabla aparecen las submuestras de alumnos, por bachillerato cursado, que logran alcanzar los máximos en las distintas variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | FP             | FP y Letras      |
| <b>Número de magnitudes</b> | Letras         | Ciencias         |
| <b>Precisión</b>            | Letras         | Letras           |

**Tabla 107: Máximos de la variable “bachillerato” en el tercer apartado, antes/después.**

Los alumnos que consiguen mayor número de máximos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de Letras, destacándose en la precisión con que proponen las actividades a los niños de Educación Infantil.

## Mínimos

La tabla siguiente acumula los mínimos de las distintas variables intra-sujeto de este apartado, según el bachillerato cursado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Creatividad           | Otro           | Otro             |
| Número de magnitudes  | Otro y FP      | Otro             |
| Precisión             | Otro           | Otro             |

Tabla 108: Mínimos de la variable “bachillerato” en el tercer apartado, antes/después.

El grupo de alumnos que llamamos Otro —procedente de acceso a la Universidad para mayores de 25 años— son los que obtienen todos los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

### 5.3.6. Estudio Estadístico del Cuarto Apartado de las Encuestas

Se sigue trabajando con los resultados obtenidos como consecuencia de las respuestas que han dado los alumnos al cuarto apartado de las dos encuestas.

#### 5.3.6.1. El cariño

Se empieza con la primera cuestión planteada que dice: señala las opciones que consideres oportunas.

El cariño:

- ☐ Es una magnitud medible.
- ☐ Es una magnitud no medible.
- ☐ Es medible pero no es magnitud.
- ☐ No es medible y no magnitud.
- ☐ Si se pudiera medir sería una magnitud.
- ☐ No es magnitud ni aunque se pudiera medir.

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, cada uno de los aspectos que hemos considerado en las respuestas a este apartado, comenzamos analizando las respuestas que han dado los alumnos a las cuatro primeras opciones planteadas; las otras dos los veremos después. En este caso se toman las variables *el cariño*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema sobre “el cariño”, según cada una de estas variables.



Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=1.000>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=1.000>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre las opiniones de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $1.000>0.05$ , luego se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: mayoritariamente dieron con la respuesta acertada: no es medible y no es magnitud (65% antes y 64% después).

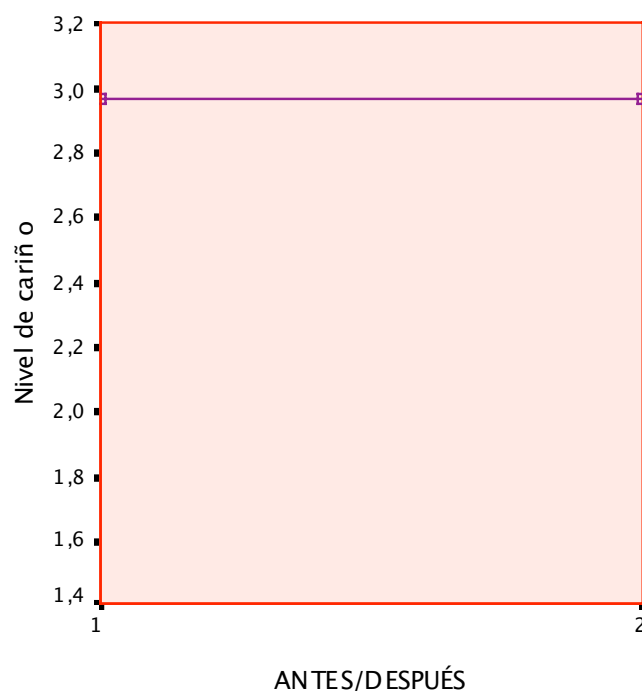


**Figura 521: Estimación del “cariño” antes/después.**

Observando esta figura y teniendo en cuenta los valores asignados al cariño que son: 1=“es una magnitud medible”, 2=“es una magnitud no medible”, 3=“es medible pero no es magnitud” y 4=“no es medible y no es magnitud”, se puede afirmar que la mayoría de los alumnos piensan que el cariño es medible pero no es magnitud.

Según lo que hemos visto en el estudio de las frecuencias, esto no tiene sentido debido a que, como hemos comentado al principio del estudio mediante el modelo lineal general de los distintos apartados de

las encuestas, aquí se considera el diseño más simple de medidas repetidas, consistente en medir dos variables en una misma muestra de sujetos. Los datos de este diseño se analizan con la prueba T para muestras relacionadas, que permite contrastar hipótesis referidas a la diferencia entre dos medias relacionadas y en este caso no tiene sentido el cálculo de la media, pues no se puede decir qué significa la media de los valores: es una magnitud medible, es una magnitud no medible, es medible pero no es magnitud, y no es medible y no es magnitud. Por esta razón pensamos que no tiene sentido continuar este estudio.

### 5.3.7. Estudio Estadístico del Quinto Apartado de las Encuestas

En este apartado se encuentra una única pregunta que dice: ¿qué es una magnitud?; dicha pregunta se plantea en el quinto apartado de la Evaluación Inicial y en el sexto de la Final, para valorarla se usa la exactitud de la respuesta, siendo los valores asignados a la variable “exactitud en la definición de magnitud” los siguientes: 0=“no responde nada”, 1=“no dice casi nada”, 2=“responde algo con fallos”, 3=“definición casi bien” y 4=“definición perfecta”, por tanto, se sabe que al aumentar el valor, aumenta la exactitud en la definición de magnitud y recíprocamente.

#### 5.3.7.1. Exactitud en la definición de magnitud

Se trabaja con los resultados obtenidos como consecuencia de las respuestas que han dado los alumnos, al quinto apartado de las dos encuestas. Se analiza la exactitud en las respuestas, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las variables *exactitud en la definición de magnitud*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema sobre “la exactitud en la definición de magnitud”, según cada una de ellas.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.000<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la exactitud” de los alumnos, antes y después del estudio del tema. El

contraste de los efectos intra-sujetos es también  $p=0.000<0.05$ , por tanto, se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias: después del estudio del tema y de las técnicas, ha aumentando considerablemente el porcentaje de los que han dado una respuesta acertada con respecto al de los que la habían dado antes.

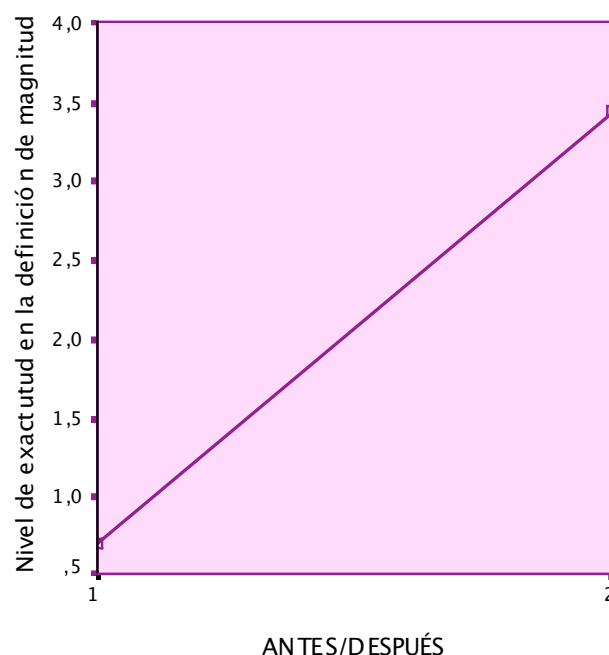


**Figura 522: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después.**

Esta figura confirma lo que se decía antes: después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la exactitud en la definición de magnitud”.

## Género

Se empieza ahora a tomar variables inter-sujeto, comenzando por “el género” para estudiar si “la exactitud en la definición de magnitud”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “género”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos que proporciona el modelo dan  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en “la exactitud en la definición de magnitud”, dentro del mismo género, y  $p=0.347>0.05$  cuando se considera entre los géneros. Por tanto, se tiene que afirmar que existen diferencias muy

significativas en “la exactitud” a la hora de dar la definición de magnitud, antes y después del citado estudio, dentro del mismo género, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

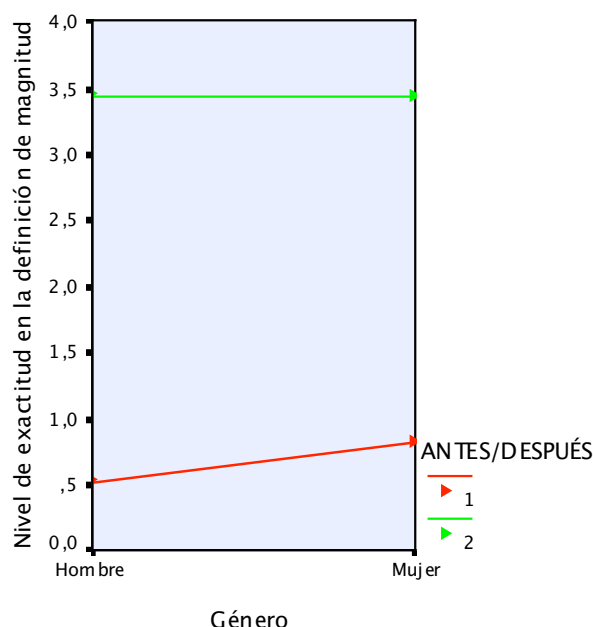


**Figura 523: Estimación de la exactitud en la definición de magnitud antes/después, por “género”.**

En esta figura se ve que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los hombres son un poco menos exactos que las mujeres a la hora de dar la definición de magnitud; después se equilibran las exactitudes con que dan las definiciones ambos. Después de dicho estudio, tanto en los hombres como en las mujeres aumenta considerablemente la exactitud con que dan la definición de magnitud.

### Año de realización

Se pasa a tomar como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar cómo influye “la exactitud en la definición de magnitud”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a los estadísticos que proporciona el modelo:  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de “la exactitud en la definición de magnitud” dentro del mismo año de realización, y  $p=0.143>0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización. Como consecuencia de estos resultados se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en “la exactitud” con que dan los alumnos la definición de magnitud, antes y después del

mencionado estudio, durante el mismo año de realización, pero no existen diferencias significativas entre los distintos años de realización.

Para comparar la exactitud en la definición de magnitud dada por los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, durante los distintos años de realización se elige Post hoc. Se va a utilizar el método de comparación *Scheffé*, para ver qué media en concreto difiere de qué otra. En este caso se ve que entre los alumnos que respondieron las encuestas en 2003/2004 y los que lo hicieron en 2005/2006 los niveles críticos dan  $p=0.001<0.05$ , y también entre los que las respondieron en 2004/2005 y los que lo hicieron en 2005/2006 se obtienen los niveles críticos  $p=0.032<0.05$ , entre los demás  $p>0.05$ , luego sólo entre estos dos pares hay diferencias significativas.

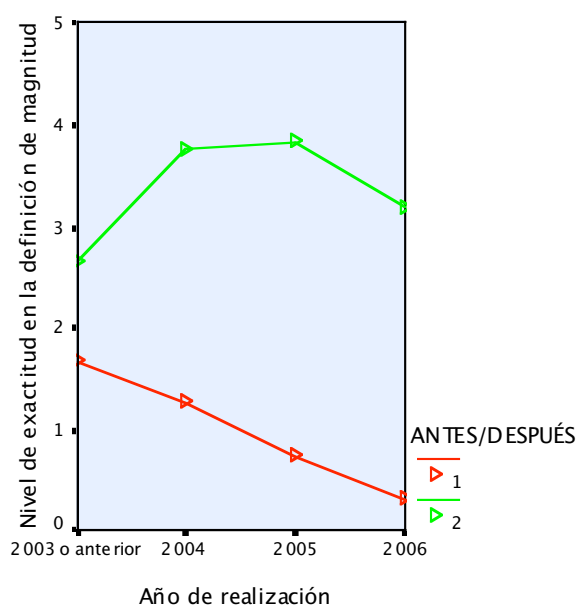


**Figura 524: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que precede señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más exactos son los que respondieron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores, y los menos exactos son los que las respondieron en 2005/2006. Después de dicho estudio los más exactos parece que son los que respondieron las encuestas en 2004/2005. Como aquí no se ve demasiado claro, para confirmarlo se incluye la figura que viene a continuación. Los alumnos menos exactos son los que respondieron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores.

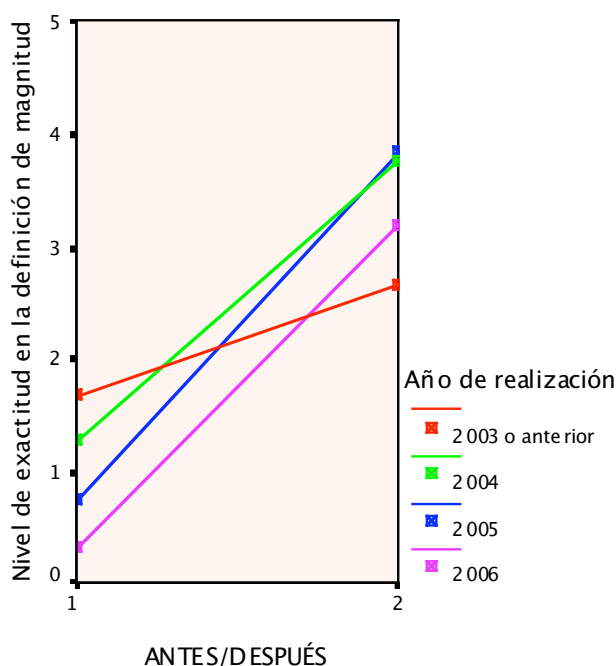


**Figura 525: Ampliación de la comparación: exactitud en la definición de magnitud antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura confirma que los alumnos que dan la definición de magnitud con más exactitud, después del estudio del tema y de las técnicas, son los que respondieron las encuestas en 2004/2005. Después del citado estudio, en todos los alumnos aumenta la exactitud con que dan la definición de magnitud.

## Curso

Se elige como variable inter-sujeto “el curso” para estudiar si “la exactitud en la definición de magnitud”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “curso”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos:  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de “la exactitud en la definición de magnitud” dentro del mismo curso, y  $p=0.064>0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos. Por todo ello se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en “la exactitud” con que dan los alumnos la definición de magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, durante el mismo curso, pero no existen diferencias significativas entre los distintos cursos.

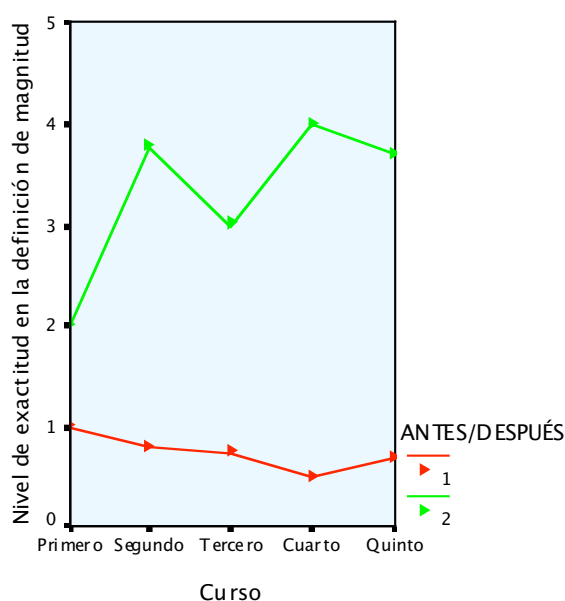


**Figura 526: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “curso”.**

La figura que precede dice que, antes del estudio del tema y de las técnicas, hay poca variación en la exactitud con que dan los alumnos la definición de magnitud, siendo más exactos los que cursaban primero, y menos exactos los de cuarto. Después de dicho estudio aumenta la exactitud de la definición de magnitud y hay más diferencias entre las distintas submuestras de alumnos, siendo más exactos los alumnos que estaban matriculados en cuarto y menos los que cursaban primero.

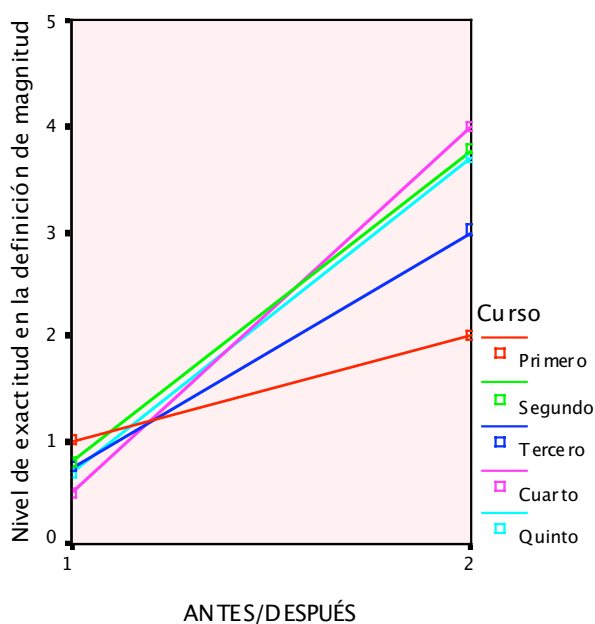


**Figura 527: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “curso”.**

Como en la figura anterior el nivel de exactitud de los alumnos de segundo, después del estudio del tema y de las técnicas, quedaba muy próximo al de los de cuarto, en esta figura vemos que, efectivamente, los resultados son los que comentábamos antes. Aquí además se ve claramente que, después del citado estudio, los alumnos que dan de forma más exacta la definición de magnitud son los de cuarto.

## Edad

Se coge como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar si depende de ella “la exactitud en la definición de magnitud”, antes y después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos que se obtienen son  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de la exactitud en la definición de magnitud entre los alumnos de la misma edad, y  $p=0.388>0.05$  cuando se considera entre alumnos de edades distintas. Por tanto, se tiene que afirmar que existen diferencias significativas en la exactitud con que dan los alumnos con la misma edad la definición de magnitud, antes y después del estudio del tema, pero no existen diferencias significativas entre los de distintas edades.

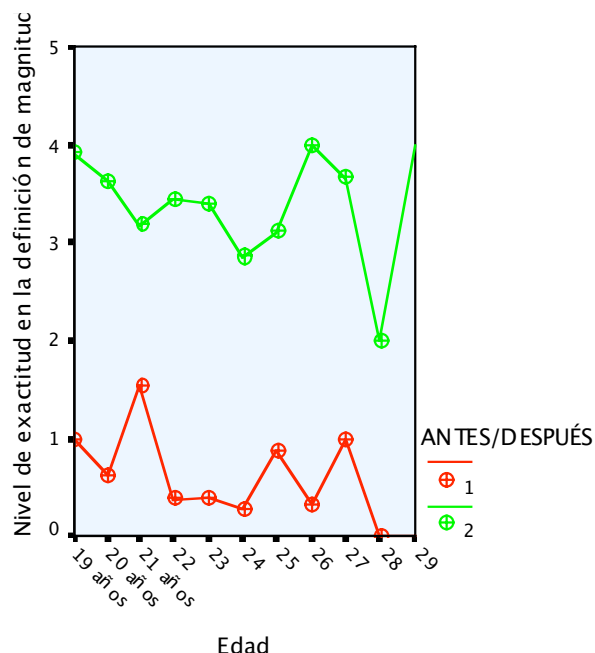


**Figura 528: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “edad”.**

Se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dan de forma más exacta la definición de magnitud son los que tenían 21 años, y los que la expresan de forma menos exacta son



los que tenían 28 ó 29 años. Después del mencionado estudio los alumnos que dan la definición de magnitud de forma menos exacta son los que tenían 28 años.

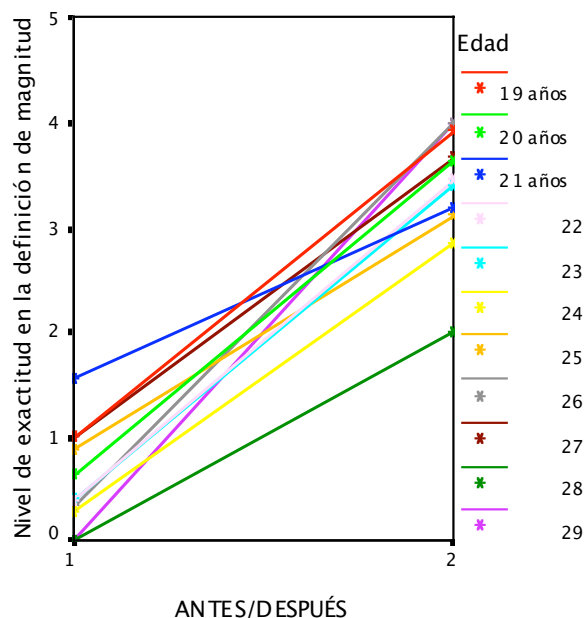


**Figura 525: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “edad”.**

En la figura anterior no se ve muy claro cuáles son los alumnos que dan la definición de magnitud de forma más exacta, para que quede más claro se elige esta figura. Los alumnos que, después del estudio del tema y de las técnicas, dan la definición de forma más exacta son los que tenían 26 años cuando respondieron las encuestas.

## Especialidad

Se toma como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar cómo influye la exactitud en la definición de magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados al modelo son  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de la exactitud en la definición de magnitud entre los alumnos de la misma especialidad, y  $p=0.154>0.05$  cuando se considera entre especialidades distintas. Por todo esto se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en la exactitud con que dan los alumnos de la misma especialidad la definición de magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, pero no existe diferencia significativas entre los de especialidades distintas.

Para comparar “la exactitud” con que dan las distintas especialidades en la definición de magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se elige Post hoc. Con objeto de ver qué media en concreto difiere de qué otra, se va a utilizar el método de comparación *Scheffé*. En este caso, entre los alumnos de la licenciatura de Matemáticas y los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas los niveles críticos son  $p=0.004<0.05$ , entre los demás  $p>0.05$ , luego sólo entre estas dos especialidades hay diferencias significativas.

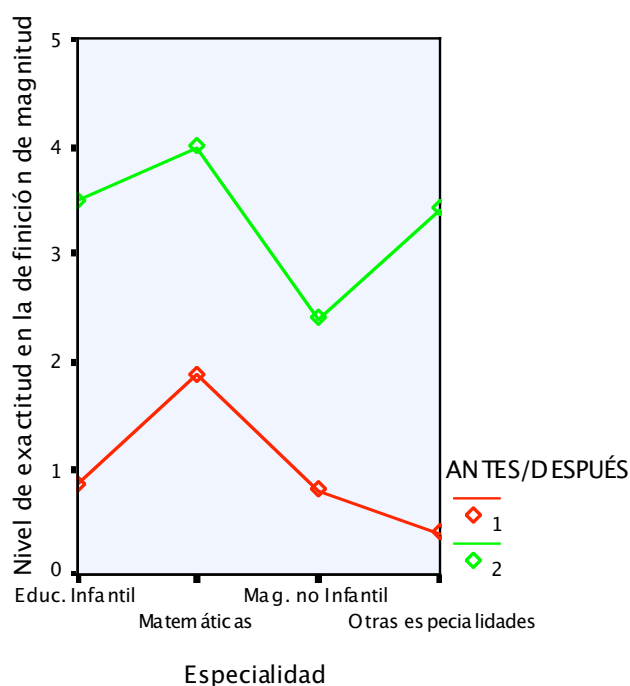


**Figura 530: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “especialidad”.**

En esta figura se apunta que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dan la definición de magnitud de forma más exacta son los de Matemáticas, y los que la dan menos exacta son los de otras especialidades. Después del estudio del tema y de las técnicas aumenta considerablemente la exactitud con que dan la definición de magnitud, siendo también los alumnos matriculados en la licenciatura de Matemáticas los que dan dicha definición con mayor exactitud, y los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil los que la dan con menor exactitud.

## Bachillerato

Se elige la variable inter-sujeto “bachillerato” para estudiar cómo influye en “la exactitud en la definición de magnitud”, antes y después

del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a los estadísticos que proporciona el modelo que son:  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de la exactitud en la definición de magnitud entre los alumnos del mismo bachillerato, y  $p=0.720>0.05$  cuando se considera entre los alumnos de los distintos bachilleratos. Por tanto, se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en “la exactitud” con que dan los alumnos del mismo bachillerato la definición de magnitud, antes y después de dicho estudio, pero no existe diferencia significativas entre los alumnos de los distintos bachilleratos.

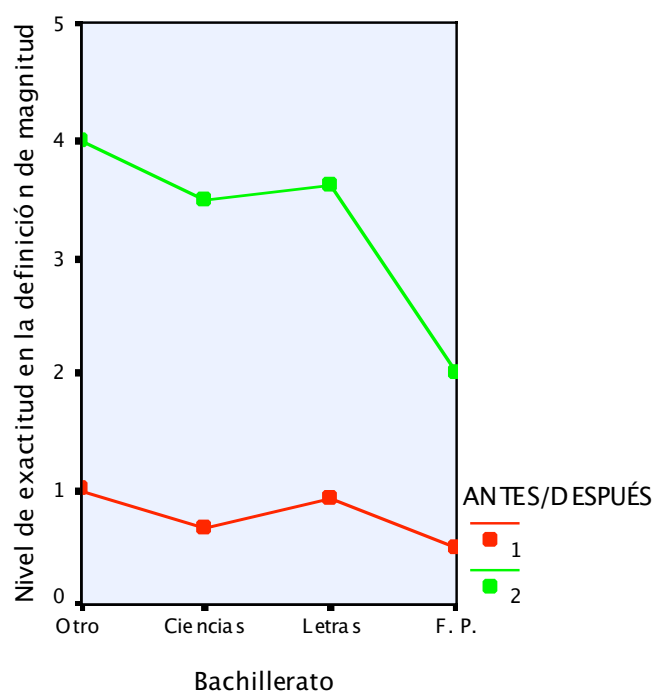


**Figura 531: Estimación de “la exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “bachillerato”.**

En la figura que precede no queda claro, antes del estudio del tema y de las técnicas, quienes son los alumnos que dan la definición más exacta ni menos exacta. Después del estudio del tema y de las técnicas, se ve que aumenta la exactitud en la definición de magnitud, siendo los alumnos que dan la definición de magnitud con más exactitud los que llamamos Otros (alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años), y los que la dan con menos exactitud los cursaron Formación Profesional.

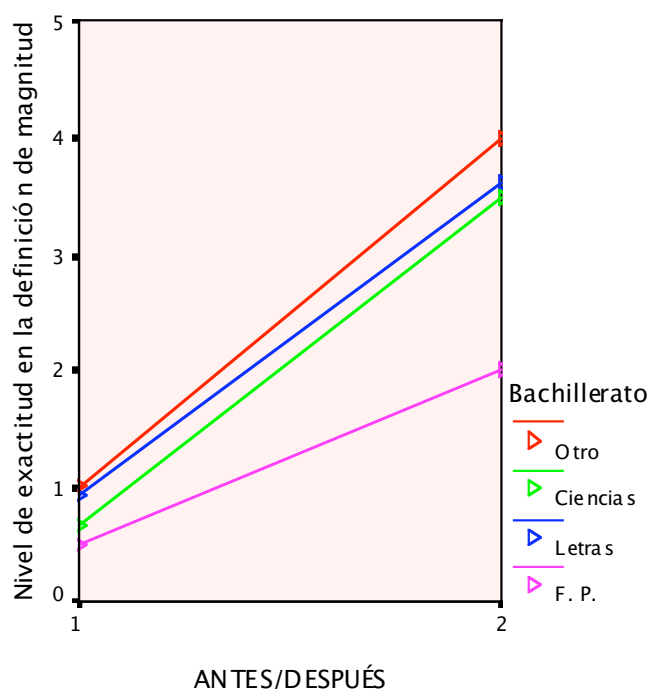


**Figura 532: Ampliación de la comparación: exactitud en la definición de magnitud antes/después, por "bachillerato".**

En esta figura queda claro que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dan la definición más exacta son los que llamamos Otros, y los que la dan menos exacta son los de Formación Profesional.

En la tabla que viene a continuación se recogen todos los niveles críticos obtenidos considerando las variables "exactitud en la definición de magnitud", antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                               | Momento                         | Interacción                                      | Figura |
|-----------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>EXACTITUD en la definición de magnitud</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                  | 518    |
|                                               | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.347$       | 519    |
|                                               | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.143$          | 520-1  |
|                                               | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.064$        | 522-3  |
|                                               | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.388$         | 524-5  |
|                                               | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.154$ | 526    |
|                                               | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.720$ | 527-8  |

**Tabla 109: "Exactitud en la definición de magnitud".**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

No tiene sentido, en este caso, indicar cuáles son las conclusiones de los aspectos considerados en este apartado, ya que sólo tenemos una variable intra-sujeto y lo que se viene haciendo es comparar los

resultados de las distintas variables intra-sujeto, siempre más de una. Como en el apartado sexto se tiene también una única variable intra-sujeto que está muy relacionada con ésta, se compararán ambos resultados al final de éste apartado.

### 5.3.8. Estudio Estadístico del Sexto Apartado de las Encuestas

En este apartado se trabaja una única pregunta, que dice: ¿a qué llamamos medida de una magnitud?; dicha pregunta se plantea en el sexto apartado de la Evaluación Inicial y en el séptimo de la Final. Para valorarla se usa “la exactitud” de la respuesta, siendo los valores asignados a la variable “exactitud en la definición de medida de una magnitud” los mismos que para la quinta, por tanto, igual que antes, al aumentar el valor, aumenta “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” y recíprocamente.

#### 5.3.8.1. Exactitud en la definición de medida de una magnitud

Se analiza la exactitud de las respuestas que han dado los alumnos al sexto apartado de la Evaluación Inicial y al séptimo de la Evaluación Final que dice: ¿a qué llamamos medida de una magnitud?, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las variables *exactitud en la definición de medida de una magnitud*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujeto. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema sobre “la exactitud en la definición de medida de una magnitud”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.000<0.05$ , se tienen que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la exactitud” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos es también  $p=0.000<0.05$ , por tanto se rechaza esta hipótesis y se concluye que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: antes del estudio y de las técnicas, el 80% de los alumnos no aporta nada o casi nada con la respuesta que da. Por el contrario, después de estudiarse el tema y las técnicas el 60% de los alumnos da una respuesta que está bien o casi bien.

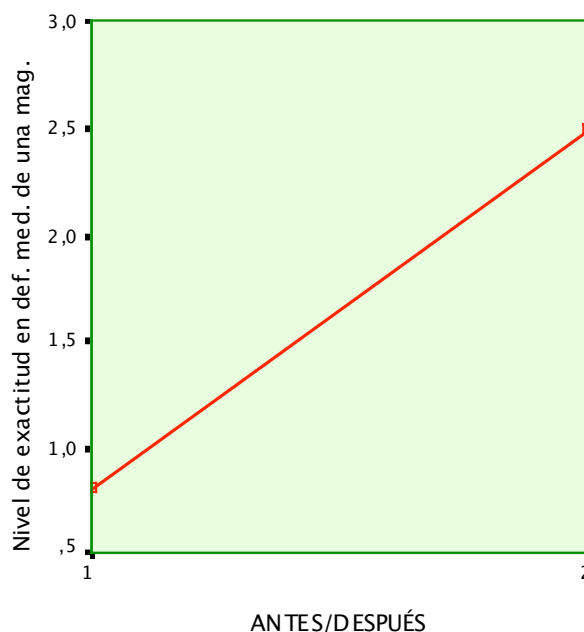


**Figura 533: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después.**

La figura que precede dice que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la exactitud” con que dan los alumnos la definición de medida de una magnitud.

## Género

Se comienza ahora a tomar variables inter-sujeto, empezando por “el género” para estudiar, con el modelo lineal general de medidas repetidas, si “la exactitud” en la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “género”. Los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en la exactitud a la hora de dar la definición de medida de una magnitud, dentro del mismo género, y  $p=0.913>0.05$  cuando se considera entre los géneros, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.000<0.05$ , cuando se considera si hay diferencia dentro del mismo género, y  $p=0.913>0.05$  cuando se considera si hay diferencias entre los géneros, luego se puede

afirmar que existen diferencias significativas en la exactitud con que dan los alumnos las definiciones de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro del mismo género, pero no existen diferencias entre los géneros.

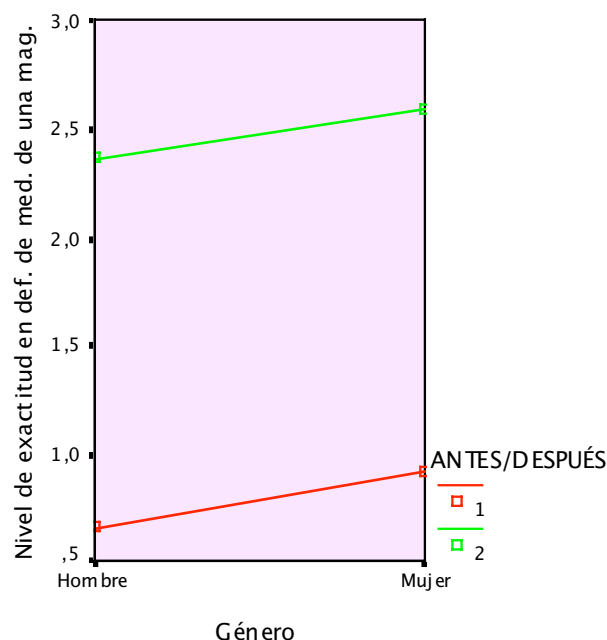


**Figura 534: Estimación de la exactitud en la definición de medida de una magnitud antes/después, por “género”.**

En esta figura se muestra que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres dan la definición de medida de una magnitud de forma más exacta que los hombres. Además, como pasaba en el apartado anterior, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la exactitud con que ambos dan dicha definición.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar cómo repercute en “la exactitud” con que dan los alumnos la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados:  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de la exactitud en la definición de medida de una magnitud dentro del mismo año de realización, y  $p=0.007<0.05$  cuando se considera entre los distintos años, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.000<0.05$ , cuando se considera si hay diferencia dentro del mismo año de realización, y  $p=0.007<0.05$  cuando se considera si hay diferencias entre distintos

años de realización. Como consecuencia de todo esto se puede afirmar existen diferencias significativas en “la exactitud” con que dan los alumnos la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema, durante el mismo año de realización y entre distintos años de realización de las encuestas.

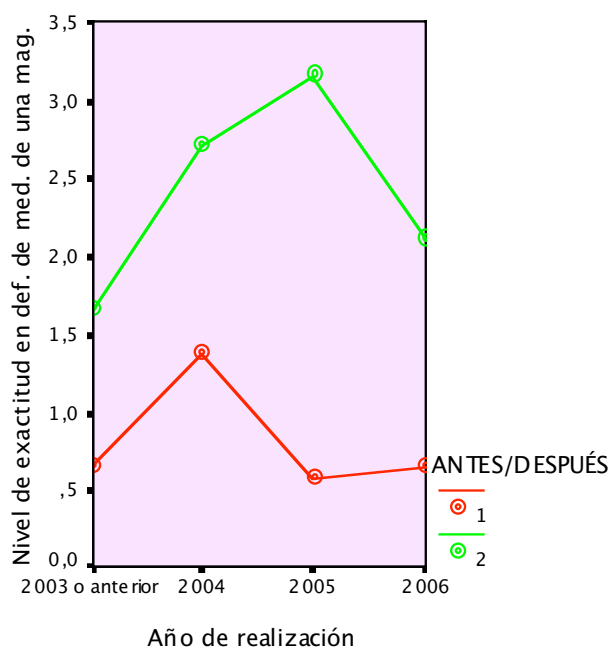


**Figura 535: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “año de realización”.**

Se observa en esta figura que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que son más exactos a la hora de dar la definición de medida de una magnitud son los que respondieron las encuestas en 2003/2004, y los menos exactos son los que las respondieron en 2004/2005. Después del estudio del tema y de las técnicas, para todos los alumnos aumenta “la exactitud” con que dan la definición de medida de una magnitud, siendo los alumnos que respondieron las encuestas en 2004/2005 los que la dan con mayor exactitud, y los que respondieron en 2002/2003 ó anteriores los que la dan con menor exactitud.

## Curso

Se elige como variable inter-sujeto “el curso” para estudiar si “la exactitud” con que definen medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema, depende del “curso”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los siguientes niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados:  $p=0.000 < 0.05$  cuando se considera la influencia de la exactitud en la definición de medida de una magnitud en el mismo curso, y



$p=0.128>0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser:  $p=0.000<0.05$ , cuando se considera si hay diferencia dentro del mismo curso, y  $p=0.128>0.05$  cuando se considera si hay diferencias entre los distintos cursos. Por tanto, se tiene que afirmar que existen diferencias significativas en “la exactitud” con que dan los alumnos la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, durante el mismo curso, pero no existen diferencias significativas entre los distintos cursos.

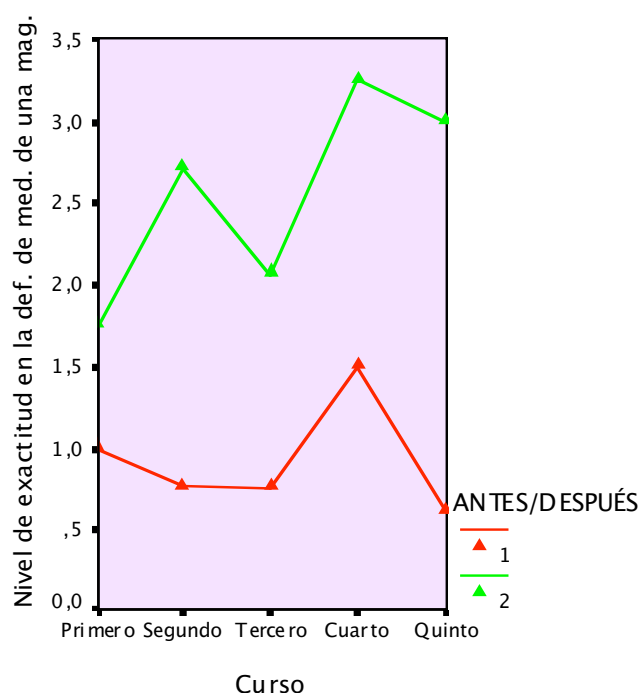


**Figura 536: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “curso”.**

En esta figura se señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dan la definición de medida de una magnitud de forma más exacta son los de cuarto, sin embargo, no queda muy claro quienes son los alumnos que dan dicha definición de manera menos exacta, para verlo mejor se tiene la figura que viene a continuación.

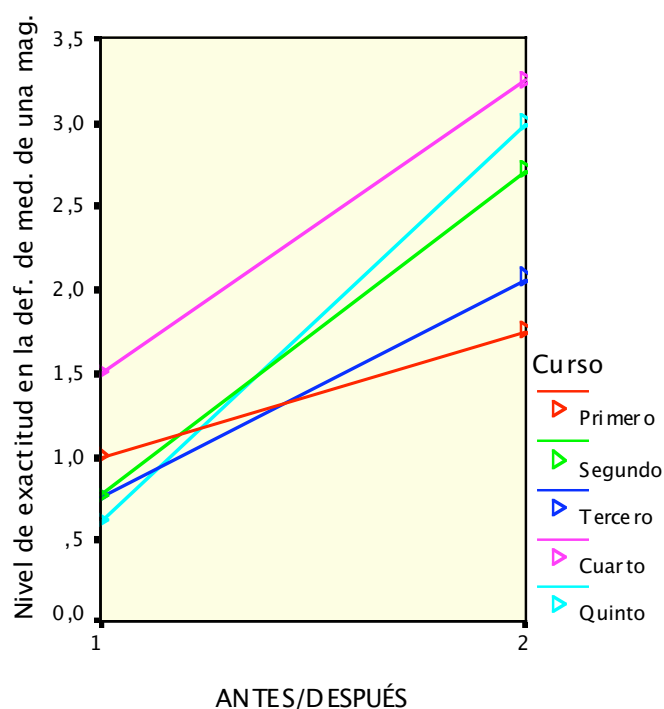


**Figura 537: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “curso”.**

Aquí sí queda claro que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que son menos exactos cuando dan la definición de medida de una magnitud son los de quinto. De las dos figuras que preceden se puede deducir también que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dan de forma más exacta la definición de medida de una magnitud son los que estudiaban cuarto y los que la dan menos exacta son los de primero. Se observa también que cualquiera que sea el curso en el que estén matriculados los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la exactitud con que dan la definición de medida de una magnitud.

## Edad

Se escoge como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar si influye en “la exactitud” con que dan los alumnos la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de la exactitud en la definición de medida de una magnitud entre los alumnos de la misma edad, y  $p=0.502>0.05$  cuando se considera entre los alumnos de edades distintas. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser

$p=0.000<0.05$ , cuando se considera si hay diferencia dentro de los alumnos de la misma edad, y  $p=0.502>0.05$  cuando se considera si hay diferencias entre los de edades distintas. Como consecuencia se puede afirmar que existen diferencias significativas en la exactitud con que dan los alumnos de la misma edad la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, pero no existen diferencias significativas entre los alumnos con edades distintas.

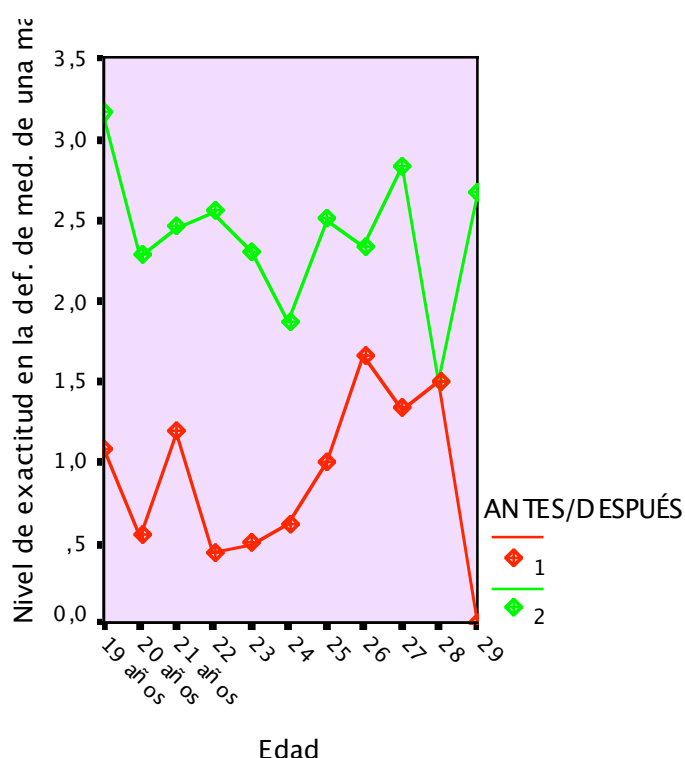


**Figura 538: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “edad”.**

En esta figura se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, casi todos los alumnos aumentan “la exactitud” con que dan la definición de medida de una magnitud, excepto los que tenían 28 años, que se mantiene igual que la que tenían antes de dicho estudio. Se ve también que, antes de dicho estudio, los alumnos que dan la definición de forma más exacta son los que tenían 26 años, y los que la dan de forma menos exacta son los que tenían 29 años. Después del citado estudio, los alumnos que son más exactos cuando dan esta definición son los que tenían 19 años, y los que son menos exactos son los que tenían 28 años.

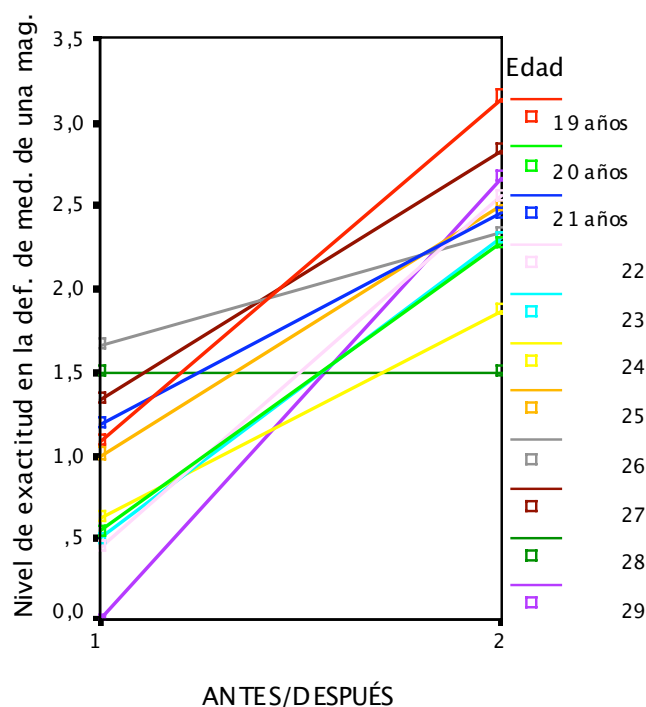


**Figura 539: Ampliación de la comparación: “exactitud en la definición de magnitud” antes/después, por “edad”.**

Debido a que son muchas las submuestras consideradas al analizar la influencia de “la edad” sobre “la exactitud” empleada para dar la definición de medida de una magnitud, consideramos conveniente corroborar lo afirmado antes utilizando esta figura.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar la repercusión que puede tener en “la exactitud” a la hora de dar la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados:  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia de “la exactitud” en la definición de magnitud entre alumnos de la misma especialidad, y  $p=0.282>0.05$  cuando se considera entre alumnos de distintas especialidades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman los mismos valores. Se tiene que afirmar que existen diferencias significativas en la exactitud con que dan los alumnos de la misma especialidad la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas y de las técnicas, pero no existen diferencias significativas entre los alumnos de especialidades distintas.

Para comparar “la exactitud” con que dan los alumnos de distintas especialidades la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se elige Post hoc. Se utiliza el método de comparación *Scheffé*, para ver qué media en concreto difiere de qué otra. En este caso se observa que entre los alumnos de la licenciatura de Matemáticas y los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemática los niveles críticos dan  $p=0.006<0.05$ , para los demás  $p>0.05$ , luego sólo entre este par de submuestras hay diferencias significativas.

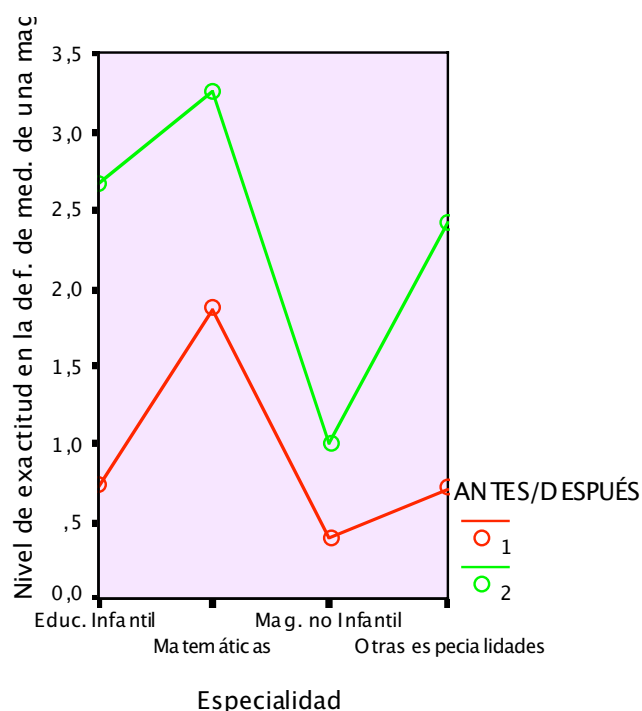


**Figura 540: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “especialidad”.**

En esta figura se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la exactitud con que dan todos los alumnos la definición de medida de una magnitud, cualquiera que sea la especialidad en la que estén matriculados. Consiguiendo el valores máximo, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de la licenciatura de Matemáticas, y el mínimo los alumnos de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para estudiar si “la exactitud en la definición de medida de una magnitud”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “bachillerato”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas

repetidas y se obtienen los siguientes niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados:  $p=0.030<0.05$  cuando se considera la influencia de la exactitud en la definición de medida de una magnitud en los alumnos que cursaron el mismo bachillerato, y  $p=0.078>0.05$  cuando se considera en los alumnos de bachilleratos distintos. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman los mismos valores. Por ello, se tiene que afirmar que existen diferencias significativas en “la exactitud” con que los alumnos que proceden del mismo bachillerato dan la definición de medida de una magnitud, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, pero no existen diferencias significativas entre los alumnos que cursaron bachilleratos distintos.

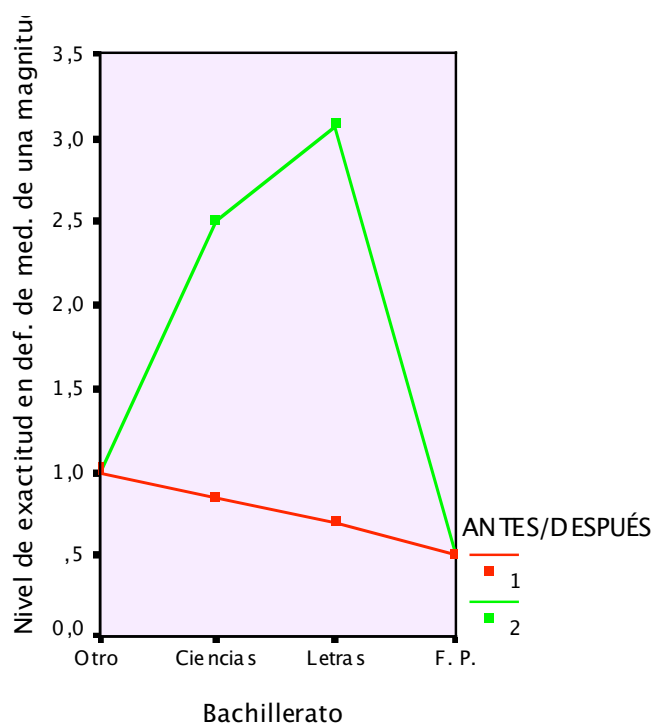


**Figura 541: Estimación de “la exactitud en la definición de medida de una magnitud” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura aporta la información de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta considerablemente la exactitud con que la mayoría de los alumnos dan la definición de medida de una magnitud, salvo los alumnos que proceden de Formación Profesional y los que llamamos Otros (alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años) que se mantienen. La exactitud máxima la alcanzan: antes de dicho estudio, los alumnos que llamamos Otros, y después, los alumnos de Letras. El valor mínimo, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, es los alumnos de Formación Profesional.

En la tabla siguiente se recogen todos los niveles críticos asociados a las variables “exactitud en la definición de medida de una magnitud”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                                             | Momento                         | Interacción                                       | Figura |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>EXACTITUD<br/>en la<br/>definición de<br/>medida de<br/>una magnitud</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                   | 529    |
|                                                                             | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.913$       | 530    |
|                                                                             | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.007^{**}$     | 531    |
|                                                                             | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.128$        | 532-3  |
|                                                                             | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.502$         | 534-5  |
|                                                                             | Antes / después: $p=0.030^{*}$  | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.078$ | 536    |
|                                                                             | Antes / después: $p=0.030^{*}$  | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.078$ | 537    |

**Tabla 110: “Exactitud en la definición de medida de una magnitud”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**

### 5.3.8.2. Conclusiones de todos los aspectos considerados en los apartados quinto y sexto

Se recogen ahora las variaciones experimentadas, después del estudio del tema y de las técnicas, por cada uno de las variables inter-sujeto, en las dos variables intra-sujeto: la que se analizó en el apartado anterior y en la que se ha analizado en éste. Además, se indica quienes son los alumnos que obtienen los máximos y los mínimos de las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

### Variables intra-sujeto

En la tabla siguiente se indica si se mantiene, aumenta o disminuye el nivel de acuerdo de los alumnos sobre cada una de las variables intra-sujeto de este apartado y del anterior, después del estudio del tema y de las técnicas. Como las dos variables intra-sujeto que se han considerado tratan de la exactitud en la definición de magnitud y en la de medida de una magnitud, no hay necesidad de utilizar más de un color para que quede claro el estudio que se hace.

| Variable intra-sujeto                                | Variación experimentada |
|------------------------------------------------------|-------------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Aumenta                 |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Aumenta                 |

**Tabla 111: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del tercer apartado.**

Evidentemente, después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan ambas variables.

## Género

Se indica en las tablas que vienen a continuación las variaciones experimentadas por las dos variables intra-sujeto en las dos submuestras que determina la variable inter-sujeto “género” y las submuestras que obtienen los máximos en ambas variables intra-sujeto.

## Variaciones

En la tabla siguiente se tienen las variaciones experimentadas por las dos variables intra-sujeto de los apartados quinto y sexto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Aumenta              | Aumenta              |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Aumenta              | Aumenta              |

**Tabla 112: Variación experimentada por la variable “género” en los apartados quinto y sexto.**

Las dos variables aumentan tanto en los hombres como en las mujeres, todos los alumnos dan con mayor exactitud las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud, después del estudio del tema y de las técnicas.

## Máximos

Se toman, en la tabla que viene a continuación, los máximos de las dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es mayor | Después es mayor  |
|------------------------------------------------------|----------------|-------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Mujeres        | Hombres y mujeres |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Mujeres        | Mujeres           |

**Tabla 113: Máximos de la variable “género” en los apartados quinto y sexto, antes/después.**



Los máximos son acaparados por las mujeres, en ambos momentos, esto quiere decir que las mujeres expresan con mayor exactitud las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud.

## Año de realización

En las tablas siguientes se considera la variación que experimentan las variables intra-sujeto de este apartado y del anterior, y las submuestras determinadas por la variable inter-sujeto “año de realización” que consiguen los máximos y los mínimos, en ambos momentos.

## Variaciones

En la tabla siguiente se recoge la variación experimentada por las dos variables intra-sujeto, en las submuestras que origina la variable “año de realización”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Variación en 2003 ó anteriores | Variaciones en 2004 | Variaciones en 2005 | Variaciones en 2006 |
|------------------------------------------------------|--------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Aumenta                        | Aumenta             | Aumenta             | Aumenta             |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Aumenta                        | Aumenta             | Aumenta             | Aumenta             |

**Tabla 114:** Variación experimentada por la variable “año de realización” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Las dos variables intra-sujeto aumentan en todas las submuestras que tenemos con la variable inter-sujeto “año de realización”, después del estudio del tema y de las técnicas.

## Máximos

En la tabla que sigue se tienen los máximos de las dos variables intra-sujeto de los apartados quinto y sexto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es mayor    | Después es mayor |
|------------------------------------------------------|-------------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | 2003 ó anteriores | 2004             |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | 2004              | 2005             |

**Figura 115:** Máximos de la variable “año de realización” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004 son los que consiguen el mayor número de máximos que se tienen en esa tabla.

## Mínimos

Se tienen en la tabla adjunta las submuestras de la variable “año de realización” que toman los mínimos en las dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es menor | Después es menor  |
|------------------------------------------------------|----------------|-------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | 2006           | 2003 ó anteriores |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | 2005           | 2003 ó anteriores |

**Tabla 116: Mínimos de la variable “año de realización” en los apartados quinto y sexto, antes/después.**

Se destaca en esta tabla que todos los mínimos, después del estudio del tema y de las técnicas, son de los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Se pasa a condensar, en las tablas que vienen a continuación, las variaciones que sufren las dos variables intra-sujeto de los apartados quinto y sexto en las distintas submuestras que ocasiona la variable “curso”, después del estudio del tema y de las técnicas, los máximos y los mínimos, en ambos momentos.

## Variaciones

Se empieza viendo la variación experimentada por las dos variables intra-sujeto, en las submuestras de la variable “año de realización”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Variaciones en primero | Variaciones en segundo | Variaciones en tercero | Variaciones en cuarto | Variaciones en quinto |
|------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Aumenta                | Aumenta                | Aumenta                | Aumenta               | Aumenta               |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Aumenta                | Aumenta                | Aumenta                | Aumenta               | Aumenta               |

**Tabla117: Variación experimentada por la variable “curso” en los apartados quinto y sexto, antes/después.**

Sólo hay aumentos en toda la tabla, esto quiere decir que después del estudio del tema y de las técnicas todos saben expresar con mayor

exactitud lo que es una magnitud y a qué se llama medida de una magnitud.

## Máximos

En la tabla adjunta se destacan los cursos que alcanzan los máximos en las dos variables intra-sujeto que tenemos en los apartados quinto y sexto.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Primero        | Cuarto           |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Cuarto         | Cuarto           |

Tabla 118: Máximos de la variable “curso” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Los máximos son conseguidos mayoritariamente por los alumnos de cuarto, sobre todo después del estudio del tema y de las técnicas.

## Mínimos

En esta tabla figuran los cursos que tienen los mínimos en las dos variables intra-sujeto que estamos considerando.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es menor | Después es menor |
|------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Cuarto         | Primero          |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Quinto         | Primero          |

Tabla 119: Mínimos de la variable “curso” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Se pone de relieve en esta tabla que todos los mínimos, después del estudio del tema y de las técnicas, son para los alumnos de primero.

## Edad

Como se viene haciendo en los apartados anteriores, en éste también se verán las variaciones de las dos variables intra-sujeto en cada una de las submuestras que determina la variable “edad”, los máximos y los mínimos en ambos momentos.

## Variaciones

Para comparar la situación en que se encuentran las dos variables intra-sujeto se empieza viendo la variación de estas variables en las submuestras que origina la variable inter-sujeto “edad”.

| Variable intra-sujeto                                | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | SM      | A       |

**Figura 120: Variación experimentada por la variable “edad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.**

La mayoría de los alumnos experimentan aumentos después del estudio del tema y de las técnicas, sólo los alumnos de 28 años se mantienen en la definición de medida de una magnitud, esto quiere decir que, después del citado estudio, los alumnos saben expresar mejor las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud.

## Máximos

Se compara quienes son los alumnos que alcanzan los máximos en las dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | 21 años        | 26 años          |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | 26 años        | 19 años          |

**Tabla 121: Máximos de la variable “edad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.**

Los alumnos de 26 años consiguen el mayor número de máximos de las variables intra-sujeto de este apartado y del anterior.

## Mínimos

Se recogen los grupos de alumnos por edades que ocupan los mínimos en estas dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es menor | Después es menor |
|------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | 28 años        | 28 y 29 años     |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | 29 años        | 28 años          |

**Tabla 122: Mínimos de la variable “edad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.**

Los mínimos se los reparten entre los alumnos de 28 y 29 años, aunque son los de 28 años los que toman el mayor número de mínimos.

## Especialidad

Se recoge en las tablas que vienen a continuación, como se viene haciendo hasta ahora, la variación que experimentan las dos variables intra-sujeto en cada una de las submuestras que determina la variable inter-sujeto “especialidad”, los máximos y los mínimos en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto                                | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|------------------------------------------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Aumenta            | Aumenta     | Aumenta                | Aumenta              |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Aumenta            | Aumenta     | Aumenta                | Aumenta              |

**Tabla 123:** Variación experimentada por la variable “especialidad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Solamente hay aumentos en las dos variables intra-sujeto y en todas las submuestras de alumnos según las distintas especialidades que hemos considerado.

## Máximos

Se destaca en esta tabla qué grupos de alumnos consiguen los máximos en las variables intra-sujeto de los apartados quinto y sexto.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Matemáticas    | Matemáticas      |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Matemáticas    | Matemáticas      |

**Tabla 124:** Máximos de la variable “especialidad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Los alumnos de Matemáticas son los que consiguen los valores máximos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. Era lógico esperar este resultado pues pensamos que los alumnos de la licenciatura de Matemáticas deben ser los que estén mejor preparados en esta materia, y por tanto los que, al haber profundizado en otros aspectos de esta materia, hayan entendido y, por tanto, sean capaces de expresar con mayor exactitud las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud.

## Mínimos

Se trata de recoger en una sola tabla los mínimos de las dos variables intra-sujeto ya comentadas, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es menor         | Después es menor       |
|------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Magisterio no Infantil | Otras especialidades   |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |

Tabla 125: Mínimos de la variable “especialidad” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Se observa en esta tabla que los alumnos que son menos exactos al dar las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Trabajamos con la última variable inter-sujeto, “el bachillerato”, para analizar las variaciones que sufren las dos variables intra-sujeto de este apartado y del anterior sobre cada una de las submuestras que da lugar “el bachillerato”.

## Variaciones

En la tabla siguiente se observa la variación experimentada por las distintas variables intra-sujeto, en las submuestras de la variable “bachillerato”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Otro        | Ciencias | Letras  | F P         |
|------------------------------------------------------|-------------|----------|---------|-------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Aumenta     | Aumenta  | Aumenta | Aumenta     |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Se mantiene | Aumenta  | Aumenta | Se mantiene |

Tabla 126: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Hay una mayoría de aumentos en las dos variables intra-sujeto consideradas, siendo los alumnos de Ciencias y Letras los que sólo consiguen aumentos.

## Máximos

Se toman ahora los máximos de las dos variables intra-sujeto con las que venimos trabajando, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | Otro           | Otro             |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | Otro           | Letras           |

Tabla 127: Máximos de la variable “bachillerato” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Los alumnos que llamamos Otros —procedentes de acceso a la Universidad para mayores de 25 años— son los que, en total, consiguen mayor número de máximos en estas dos variables.

## Mínimos

Se pasa a considerar los alumnos que toman los valores mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto                                | Antes es menor | Después es menor |
|------------------------------------------------------|----------------|------------------|
| Exactitud en la definición de magnitud               | FP             | FP               |
| Exactitud en la definición de medida de una magnitud | FP             | FP               |

Tabla 128: Mínimos de la variable “bachillerato” en los apartados quinto y sexto, antes/después.

Los alumnos procedentes de FP son los que tienen todos los mínimos, es decir, son los que dan con menor exactitud las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud.

## 5.3.9. Estudio Estadístico del Séptimo Apartado de las Encuestas

Se hará un estudio estadístico para analizar si influye el estudio del tema y de las técnicas en las respuestas que dan los alumnos sobre las cuestiones planteadas en el séptimo apartado de la Evaluación Inicial y en el octavo de Evaluación Final que decía: “Da ejemplos de magnitudes medibles y no medibles”. “De las medibles, indica cómo se miden y con qué unidades, y de las no medibles explica la razón”. Para valorar todos los contenidos de este apartado, como ya hemos comentado al hacer el estudio de frecuencias, se han tenido en cuenta: el número de magnitudes que dicen los alumnos, la precisión al indicar cómo se miden esas magnitudes, las unidades de medida que utilizan y las magnitudes no medibles que dan.

### 5.3.9.1. Número de magnitudes

Se sigue utilizando el modelo lineal general y en él también se eligen medidas repetidas del menú Analizar. Ahora se marcan las variables *número de magnitudes en el séptimo apartado*, antes del estudio del tema y de las técnicas, y en el octavo después —aunque le llamamos *número de magnitudes en el séptimo apartado*—, como variables intra-sujetos. En principio no se eligen ninguna variable inter-

sujeto, después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el citado estudio en “el número de magnitudes” comentadas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados es  $p=1.000>0.05$ , y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=1.000>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes” que dan los alumnos antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $p=1.000>0.05$ , con lo que se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Esto viene a corroborar lo que se obtenía en el diagrama de frecuencias: antes del estudio del tema y de las técnicas, la mayoría de los alumnos dan 2 ó 3 magnitudes, y después dan 3 ó 4.

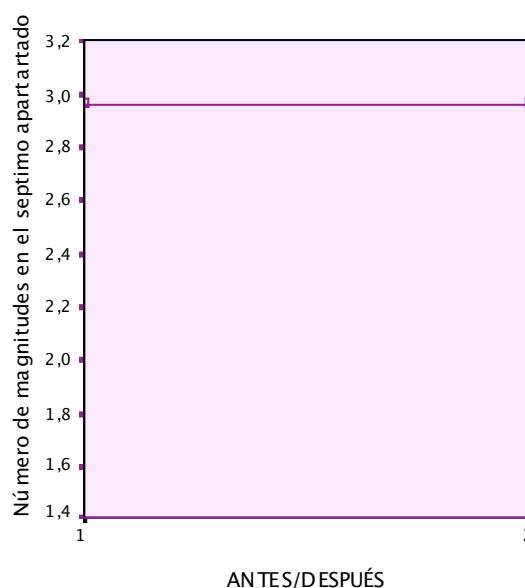


**Figura 542: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después.**

Como los valores asignados a la variable “número de magnitudes en el séptimo apartado son: 1=“una magnitud”, 2=“dos magnitudes”, 3=“magnitudes”..., esta figura señala que, después del estudio del tema, se mantiene el número de magnitudes que se indican en los ejemplos.



Para analizar mejor lo que ocurre en este caso, se utilizan las pruebas para muestras relacionadas, ya que éstas permiten analizar datos provenientes de diseños con medidas repetidas. Para ello, en pruebas no paramétricas, se eligen los pares “número de magnitudes en el séptimo apartado”, antes y después del estudio del tema; como tipo de prueba se toma Wilcoxon. Se obtienen niveles críticos mayores que 0.05, luego la diferencia de valores no es significativa: el estudio del tema y de las técnicas no influye en el número de magnitudes que dan los alumnos en el séptimo apartado. Esto era lo que decíamos antes. Creemos que, por los problemas que tiene el modelo lineal general y que ya hemos comentado, tenemos que quedarnos con lo que decía el estudio de frecuencias. Además, hay otras razones que nos llevan a decidirnos por el estudio de frecuencias, como puede ser el grado de abandono por parte de los alumnos a la hora de responder la encuesta después del estudio del tema.

## Género

Se analiza, tomando como variable inter-sujeto “el género”, si varía “el número de magnitudes” que dan los alumnos después de estudiarse el tema y las técnicas, respecto de las que daban antes. Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados resultan ser mayores que 0.05, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también, se tiene que rechazar que existan diferencias significativa entre “el número de magnitudes” que dan los alumnos antes y después del mencionado estudio, dentro de cada uno de los géneros, ni entre los géneros.

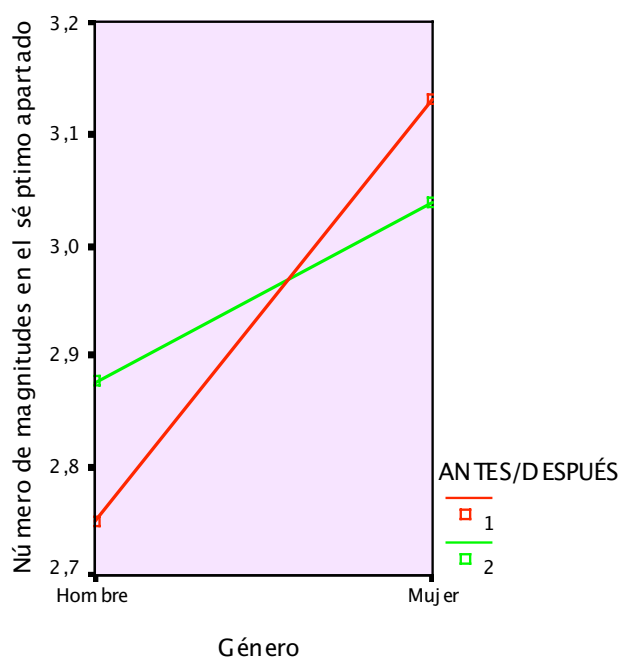


**Figura 543: Estimación del “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “género”.**

Esta figura señala que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres dan mayor número de magnitudes que los hombres. Después de dicho estudio, aumenta el número de magnitudes que dan los hombres, y disminuye el que dan las mujeres.

### Año de realización

Se pasa a tomar como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar si “el número de magnitudes” que dan los alumnos depende del “año de realización”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son mayores que 0.05, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser mayores que 0.05. Por tanto, se puede confirmar que no existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes” que dan los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro del mismo año de realización de la encuesta, ni entre los distintos años de realización.

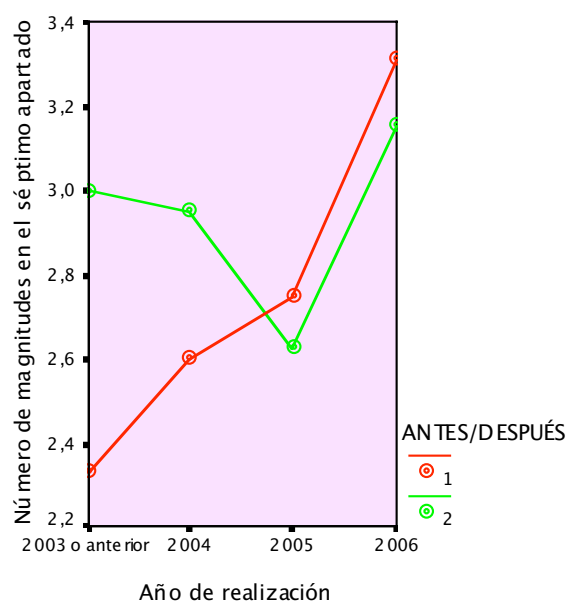


**Figura 544: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

La figura adjunta y la que sigue dicen que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dan mayor número de ejemplos de magnitudes son los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006. Los alumnos que dan menor número de magnitudes son: antes del citado estudio, los que respondieron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores, y después, los del curso 2004/2005.

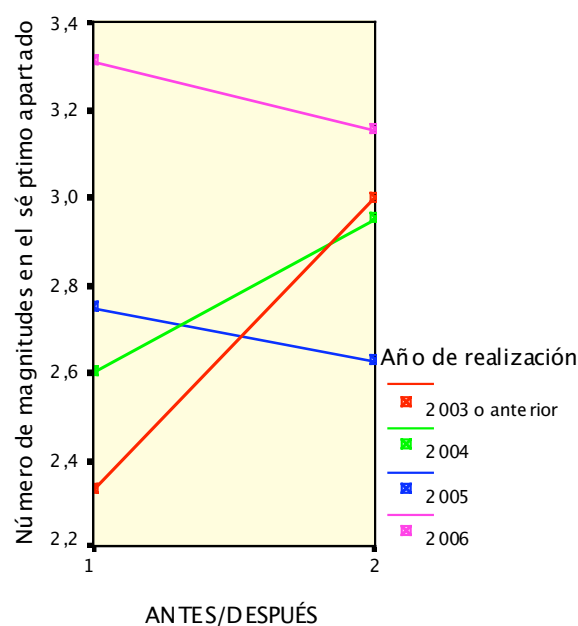


**Figura 545: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura ayuda a confirmar lo anterior, y además, indica que después del estudio del tema y de las técnicas aumenta el número de magnitudes que dan los alumnos que respondieron las encuestas en los cursos 2002/2003 ó anteriores y 2003/2004; en los demás disminuye.

### Curso

Se pasa a analizar si, teniendo en cuenta “el curso” en que están matriculados los alumnos, son o no significativas las diferencias en cuanto al “número de magnitudes” que dan, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Como en ninguno de los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas, los niveles críticos asociados dan mayores que 0.05, se tiene que concluir que no hay diferencias significativas en “el número de magnitudes” dadas por los alumnos, antes y después del citado estudio, según “el curso”. Por tanto, el número de magnitudes citadas no depende del “curso” en que estén matriculados los alumnos.

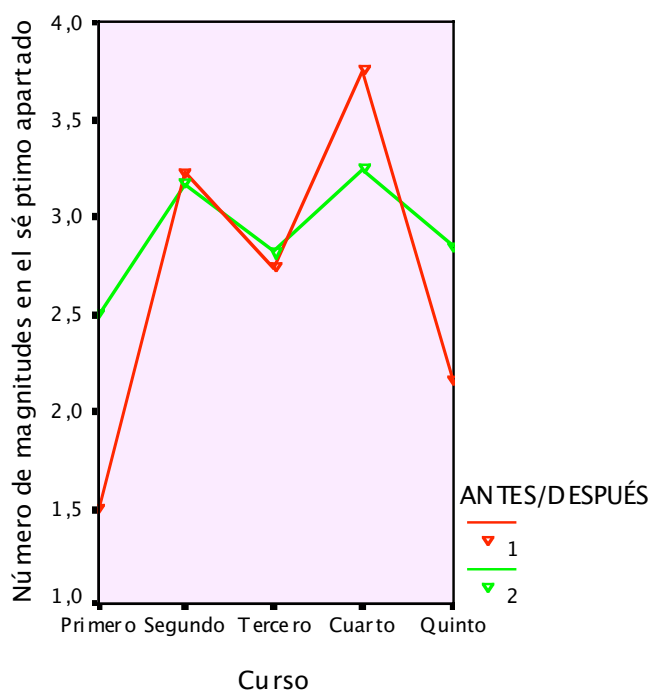


**Figura 546: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura, junto con la que viene a continuación, informan de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dicen mayor número de magnitudes son los de cuarto, y los que dicen menor número los de primero.

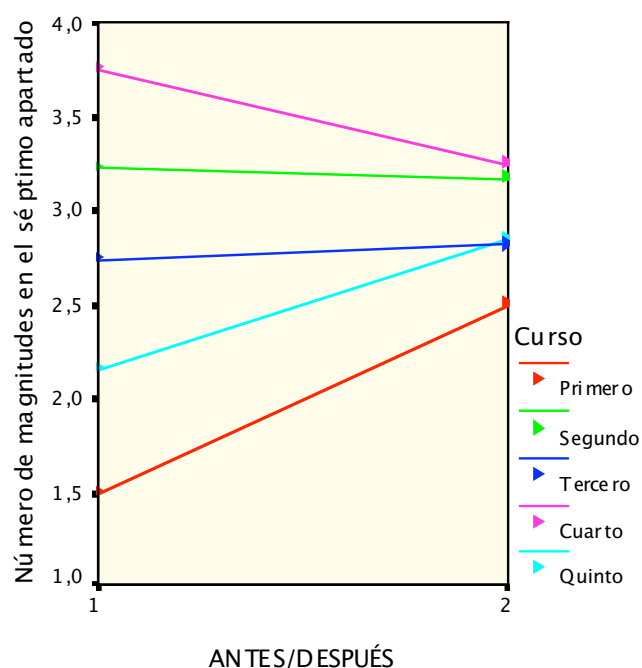


**Figura 547: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “curso”.**

Además de lo ya comentado, en esta figura y en la anterior se observa que aumenta el número de magnitudes utilizadas para dar los ejemplos en los alumnos de primero tercero y quinto y disminuye en los demás.

## Edad

Analizamos por edades “el número de magnitudes” que dan los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Observamos, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos son mayores que 0.05, luego “el número de magnitudes” que dan los alumnos no depende de “la edad” que tengan. Pasamos a analizar los gráficos que obtenemos en el citado estudio.

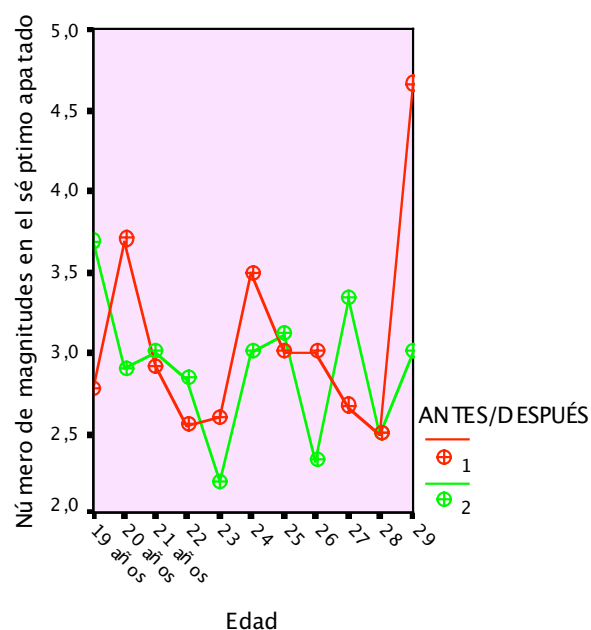


**Figura 548: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “edad”.**

Son muchas las submuestras obtenidas al considerar “la edad”, por lo que es bueno ver también la figura que viene a continuación. Observando las dos figuras podemos decir que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan mayor número de magnitudes son los que tenían 29 años y los que utilizan menos son los que tenían 28 años. Después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos que tenían 19 años pasan a ser los que utilizan mayor número de magnitudes, y los que emplean menor número son los que tenían 23.

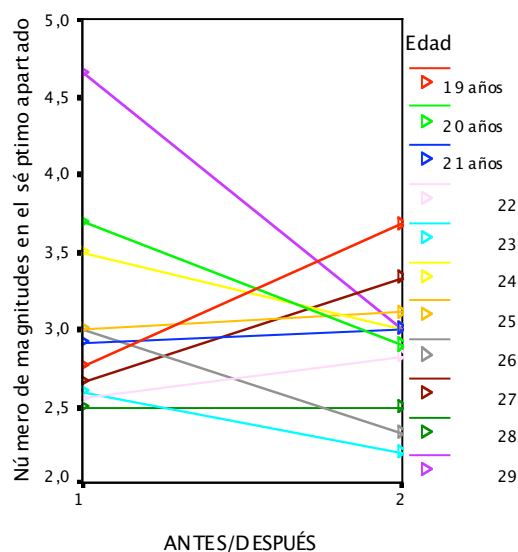


**Figura 549: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “edad”.**

Observando las dos figuras se puede decir que, después del estudio del tema y de las técnicas, al dar los ejemplos, usan más magnitudes los alumnos que tenían 19, 21, 22, 25 ó 27 años, siguen usando el mismo número de magnitudes los que tenían 28 años y los demás usan menor número de magnitudes.

## Especialidad

Se pasa a ver si “el número de magnitudes” que dan los alumnos en los ejemplos antes y después del estudio del tema depende significativamente de “la especialidad” en que estén matriculados. Se observa, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos son mayores que 0.05, luego “el número de magnitudes” que dan no depende de “la especialidad”.

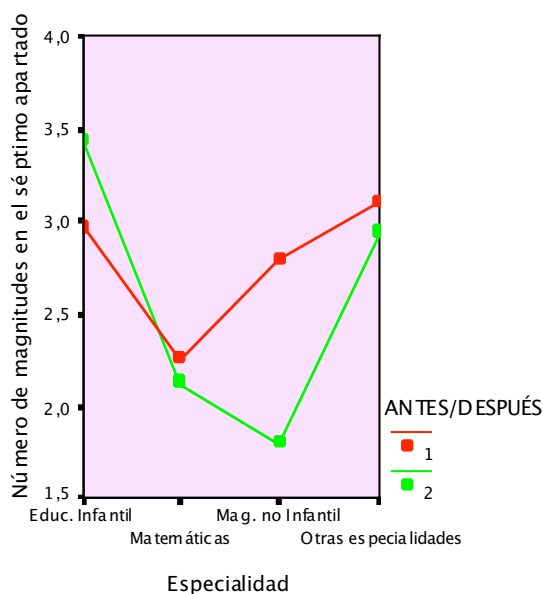


**Figura 550: Estimación de “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan mayor número de magnitudes son los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas, y los que dan menor número de magnitudes son los de la licenciatura de Matemáticas. Después de dicho estudio la situación cambia radicalmente, pasando a ser los alumnos de Magisterio de Educación Infantil los que dan mayor número de magnitudes, y los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil los que dan el menor número.

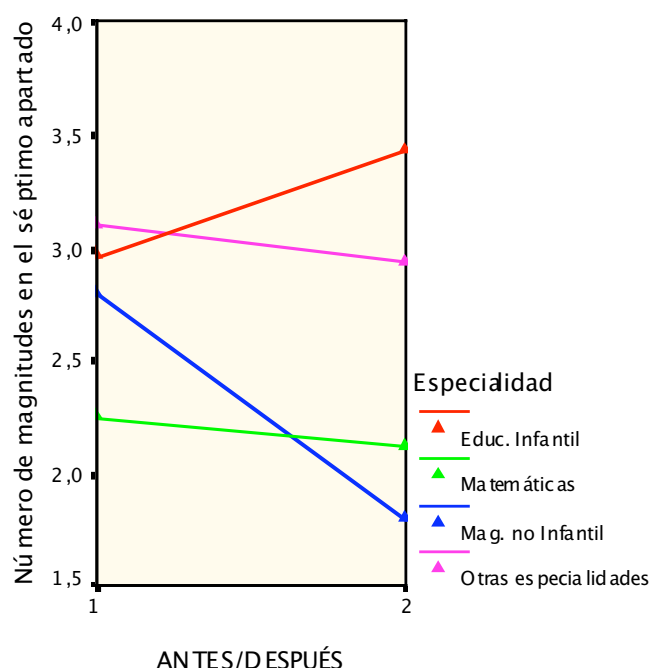


**Figura 531: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el séptimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**

La figura adjunta, además de ayudar a dar la información anterior, apunta que, después del estudio del tema y de las técnicas, para los alumnos de Magisterio de Educación Infantil aumenta el número de magnitudes, y para los demás, disminuye.

## Bachillerato

Se considera ahora la variable “bachillerato” para analizar si “el número de magnitudes” que dan los alumnos en los ejemplos que proponen, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “bachillerato” que hubieran cursado. Se observa, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos son mayores que 0.05, luego “el número de magnitudes” que dan no depende del “bachillerato” que hubieran cursado.



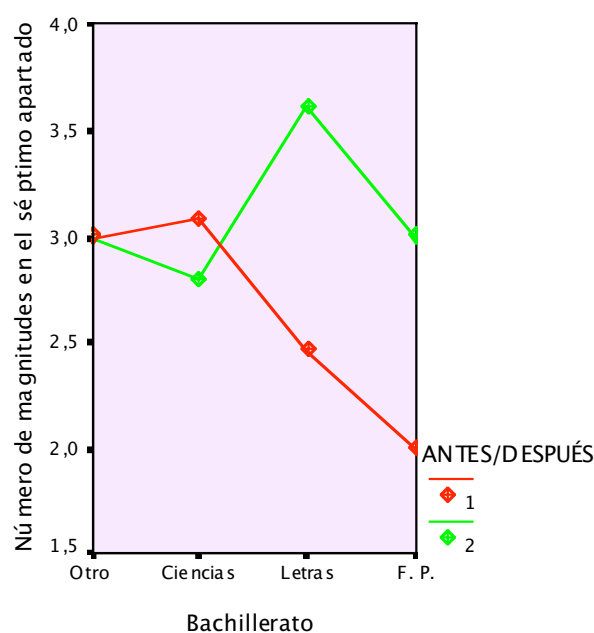


**Figura 552: Estimación de "número de magnitudes en el séptimo apartado" antes/después, por "bachillerato".**

La figura adjunta indica que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan mayor número de magnitudes son los que cursaron el bachiller de Ciencias, y los que usan menor número de magnitudes son los de Formación Profesional. Después de dicho estudio, los alumnos de Letras y los de Formación Profesional utilizan mayor número de magnitudes, y usan el mismo número los que llamamos Otros (alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años).

En la tabla siguiente se indican cuáles son los niveles crítico asociados a las variables "número de magnitudes en el séptimo apartado", antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                    | Momento                    | Interacción                                      | Figura |
|----------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>NÚMERO DE MAGNITUDES en el séptimo apartado</b> | Antes / después: $p=1.000$ |                                                  | 538    |
|                                                    | Antes / después: $p=0.939$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.582$       | 539    |
|                                                    | Antes / después: $p=0.566$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.6999$         | 540-1  |
|                                                    | Antes / después: $p=0.408$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.551$        | 542-3  |
|                                                    | Antes / después: $p=0.464$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.468$         | 544-5  |
|                                                    | Antes / después: $p=0.481$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.308$ | 546-7  |
|                                                    | Antes / después: $p=0.412$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.061$ | 548    |

**Tabla 129: "Número de magnitudes en el séptimo apartado".**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.9.2. ¿Cómo se miden?

Se sigue utilizando el modelo lineal general y en él también se eligen medidas repetidas del menú Analizar. Ahora se marcan las variables intra-sujeto *¿cómo se miden?*, antes y después del estudio del tema. En principio no se eligen ninguna variable inter-sujeto; después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la respuesta que dan los alumnos a “cómo se miden” las magnitudes que han dicho, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.000<0.05$ , y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también valen  $p=0.000<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre las respuestas de los alumnos antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.000<0.05$ , con lo que se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Esto viene a corroborar lo que se obtenía en el diagrama de frecuencias: la mayoría no acierta a decir lo que hacen cuando miden. Antes del estudio del tema y de las técnicas tienen más problema aún para decir cómo se miden las magnitudes que han dado, disminuyendo en un 5% después.

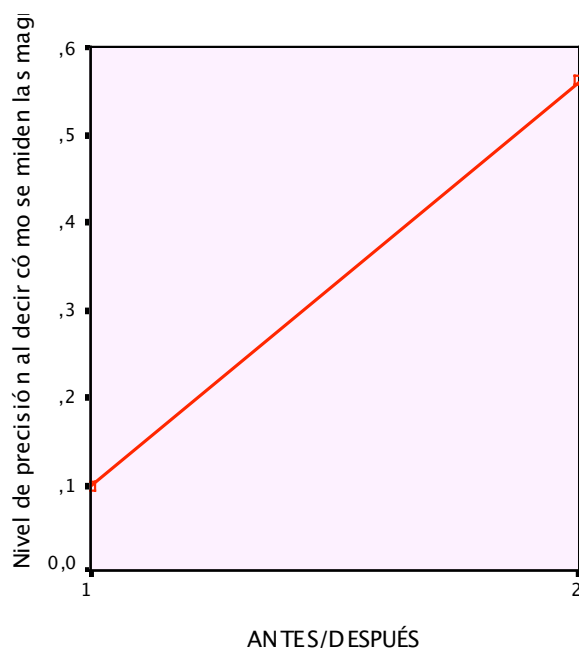


**Figura 553: Estimación de “cómo se miden” antes/después.**

Para valorar la respuesta a ¿cómo se mide?, hemos considerado cuatro niveles: no dice nada, dice algo pero mal, lo dice regular y responde correctamente, a estos niveles se le asignan los números del 1 al 4, luego al aumentar el valor, aumenta el acierto en la respuesta, y recíprocamente. Por todo lo dicho se puede deducir que después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el acierto en la respuesta que era lo que se decía antes.

## Género

Se elige como factor inter-sujeto “el género” y se estudia si hay diferencias significativas dentro de cada género y entre los géneros en las respuestas que dan a “¿cómo se miden?”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En este caso se observa que en todos los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada género, y  $p=0.273>0.05$  cuando se analizan entre los géneros. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Se puede afirmar, por tanto, que existen diferencias muy significativas en cada uno de los géneros para responder a la pregunta “¿cómo se miden?”, entre la respuesta que dan antes y la que dan después del citado estudio, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

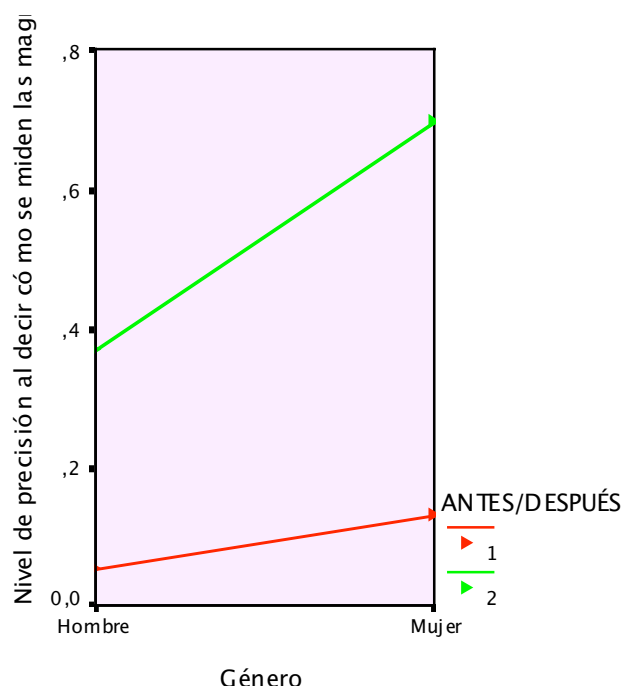


**Figura 554: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “género”.**

Esta figura señala que las mujeres dicen de forma más precisa “cómo se miden” las magnitudes consideradas. Después del estudio del tema aumenta la calidad de las respuestas para todos.

### Año de realización

Se analiza, tomando como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas, si la opinión de los alumnos sobre “¿cómo se miden?” varía después de estudiarse el tema y las técnicas, respecto de la que dieron antes. Los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados resultan ser  $0.000 < 0.05$  cuando se consideran los resultados en el mismo año de realización, y  $0.002 < 0.05$  cuando se considera entre años de realización distintos, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F salen también  $0.000 < 0.05$  cuando se considera en el mismo año de realización, y  $0.002 < 0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización. Por tanto, se puede aceptar que existan diferencias muy significativas entre las respuestas de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro de cada uno de los años de realización y también entre los distintos años de realización.

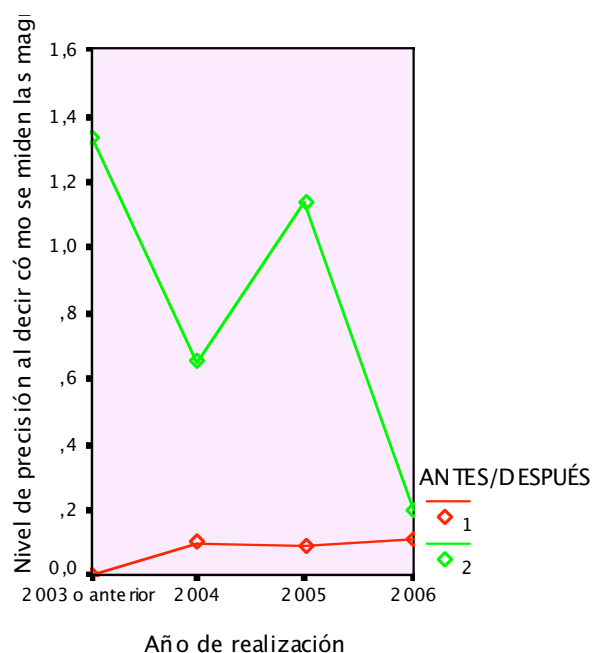


Figura 555: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “año de realización”.

El gráfico adjunto y el que viene a continuación señalan que, antes del estudio del tema son muy pocos los que aciertan con la respuesta a “cómo se miden” las magnitudes que han dado; después dicen algo más y mejor.

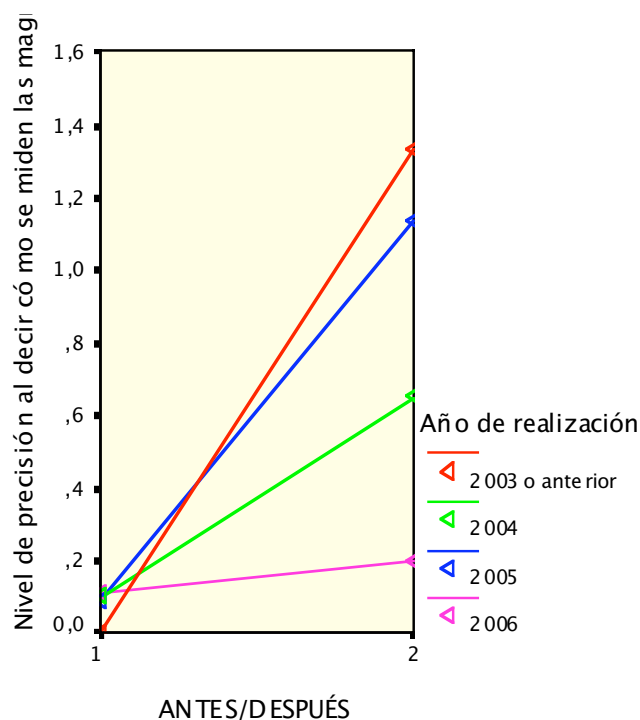


Figura 556: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “año de realización”.

Los alumnos que son más precisos al decir cómo se miden las magnitudes que han puesto como ejemplo son: antes del estudio del tema y de las técnicas, los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006, existiendo muy poca diferencia con los demás; y después, los que respondieron en el curso 2002/2003 ó anteriores. Los alumnos que cometen más errores son: antes del estudio del tema y de las técnicas, los que respondieron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores, y después, los que las respondieron en el curso 2005/2006.

## Curso

Se estudia ahora si depende del “curso” el grado de precisión con que responden los alumnos a la pregunta “¿cómo se miden? —las magnitudes que has dado—. En el resultado obtenido, con el modelo lineal general de medidas repetidas, los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos multivariados son  $p=0.009<0.05$  cuando se consideran los resultados dentro del mismo curso, pero  $p=0.159>0.05$  entre los distintos cursos, y a los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también les ocurre lo mismo. Por todo esto se puede concluir que existen diferencias significativas en la precisión con que responden, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro del mismo curso, pero no entre cursos distintos.

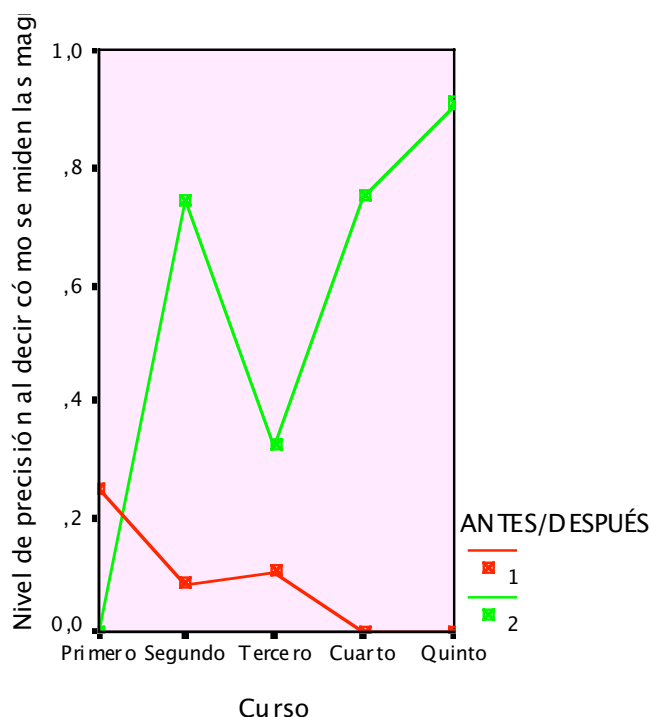


Figura 557: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “curso”.

La figura dice que, antes del estudio del tema y de las técnicas, las respuestas a la cuestión “cómo se miden” las magnitudes que han dado es muy poco precisa; después, aumenta considerablemente para la mayoría, excepto para los que cursaban primero, que disminuye.

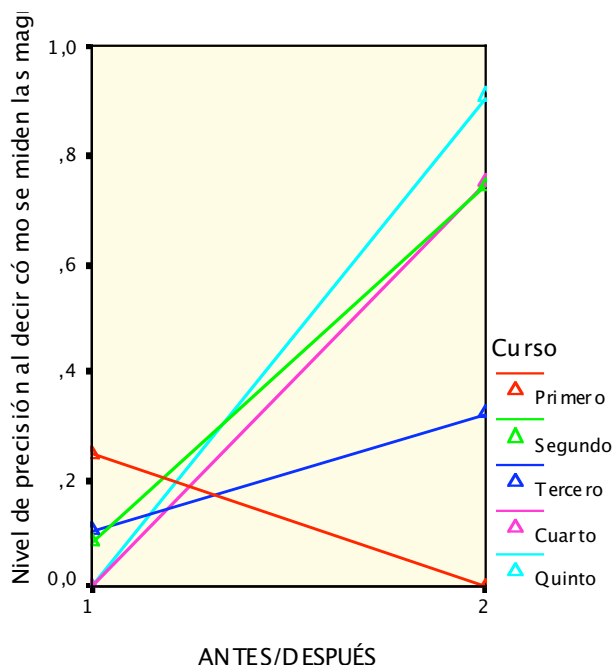


**Figura 558: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “curso”.**

Con esta figura se ve más claro dónde se encuentran cada una de las submuestras que tenemos en este caso. Los alumnos que expresan con más precisión cómo se miden las magnitudes son: antes del estudio del tema y de las técnicas, los de primero, y después, los de quinto. Los alumnos que dicen de forma menos clara cómo se miden aquellas magnitudes que ellos han dado como ejemplos son: antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de cuarto y los de quinto, y después, los de primero.

## Edad

Se estudia ahora si el grado de precisión en la pregunta “¿cómo se miden?”, depende de “la edad”. En el resultado obtenido, con el modelo lineal general de medidas repetidas, los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.009 < 0.05$  cuando se consideran los resultados dentro de la misma edad, pero  $p=0.950 > 0.05$  entre las distintas edades, y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también toman los mismos valores. Se puede concluir, por tanto, que existen diferencias significativas entre la precisión con

que responden los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro de la misma edad, pero no entre distintas edades.

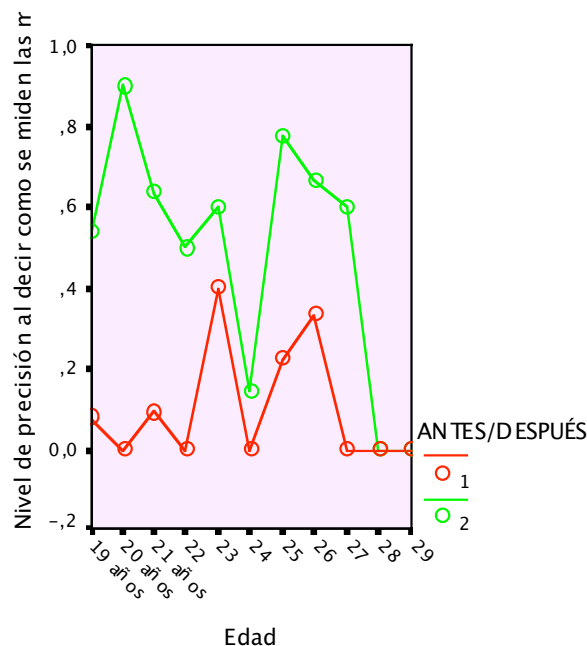


Figura 559: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “edad”.

En esta figura es palpable el incremento que experimenta la precisión de los alumnos al decir cómo se miden las magnitudes que ellos mismos han dado como ejemplo, después del estudio del tema y de las técnicas. Sólo se mantiene para los alumnos que tenían 28 ó 29 años; para todos los demás aumenta. Para ver mejor el orden en que están cada una de las submuestras de edades, cogemos la figura siguiente.

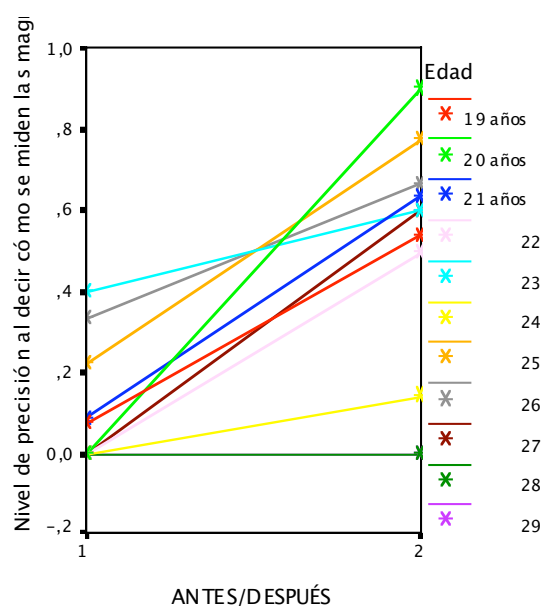


Figura 560: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “edad”.



La figura que tenemos delante y la anterior nos dicen que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que expresan con mayor precisión cómo se miden las magnitudes son los que tenían 23 años, y los que tienen mayor dificultad para decir cómo se miden son los que tenían 20, 22, 24, 27, 28 ó 29 años. La línea que representa a los alumnos de 29 años no se ve en esta figura por quedar debajo de los de 28. Después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que aciertan más a la hora de responder a cómo se miden las magnitudes dadas como ejemplo por ellos mismos son los que tenían 20 años, y los que fallan más son los que tenían 28 ó 29 años.

## Especialidad

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “la especialidad” explica la precisión con que responden a la pregunta ¿cómo se miden? Se obtienen los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo  $p=0.004 < 0.05$  cuando se considera la significación dentro de la misma especialidad, luego se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre las precisiones de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro de la misma especialidad; entre especialidades distintas se obtiene  $p=0.057 > 0.05$ , luego no hay diferencia significativa en la precisión a la pregunta ¿cómo se miden? entre distintas especialidades. Estudiamos el gráfico que proporciona dicho modelo.

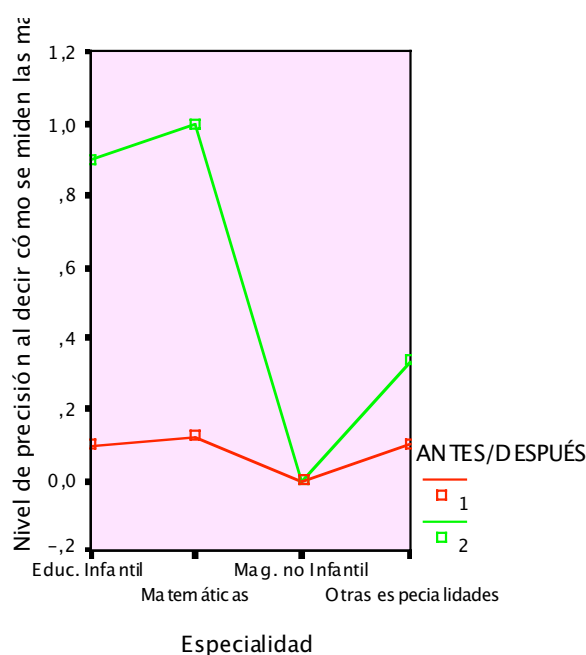


Figura 561: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “especialidad”.

En esta figura se observa el incremento que experimentan, después del estudio del tema y de las técnicas, en el grado de precisión a la pregunta ¿cómo se miden?, relativa a las magnitudes que los mismos alumnos han dado como ejemplo. Sólo para los alumnos de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil se mantiene el mismo grado de precisión; para todos los demás aumenta.

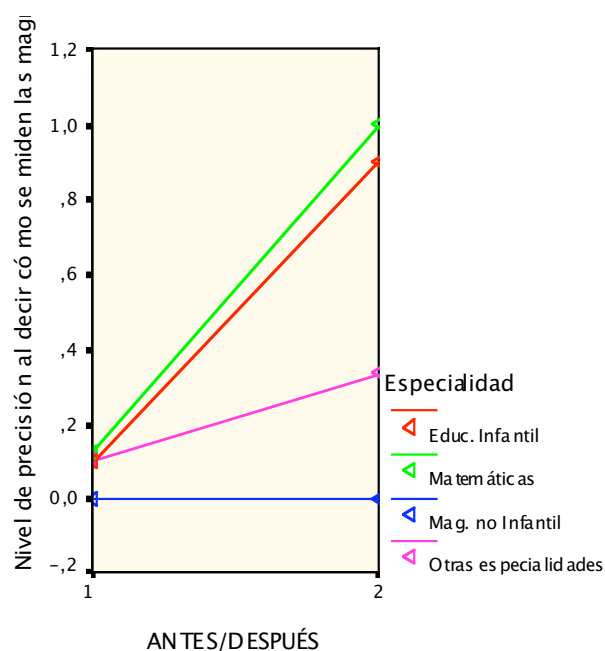


**Figura 562: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “especialidad”.**

La figura que precede y la anterior expresan que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que responden mejor a la pregunta ¿cómo se miden? son los de la licenciatura de Matemáticas, y los que dan una respuesta menos satisfactoria son los de Magisterio de especialidades distintas a Educación Infantil.

## Bachillerato

Según los resultados que se obtienen analizando si la precisión de los alumnos al responder cómo se miden las magnitudes que han dado los alumnos depende del “bachillerato” que cursaron, los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05, luego se puede pensar que el grado de precisión en la respuesta a la pregunta ¿cómo se miden?, no depende del “bachillerato” cursado.

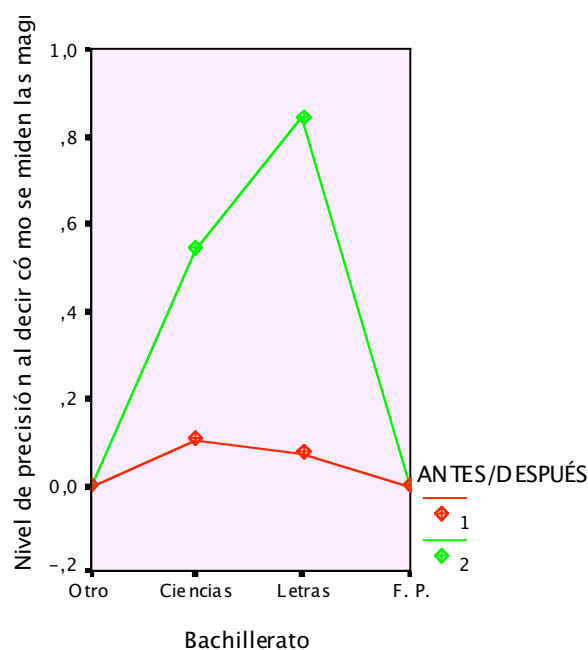


**Figura 563: Estimación de “¿cómo se miden?” antes/después, por “bachillerato”.**

En la figura adjunta se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todos los alumnos aumenta el grado de precisión al decir cómo se miden las magnitudes que cada uno de los alumnos ha dado como ejemplo, salvo para los alumnos que proceden de Formación Profesional y para los que llamamos Otros, que se mantiene.

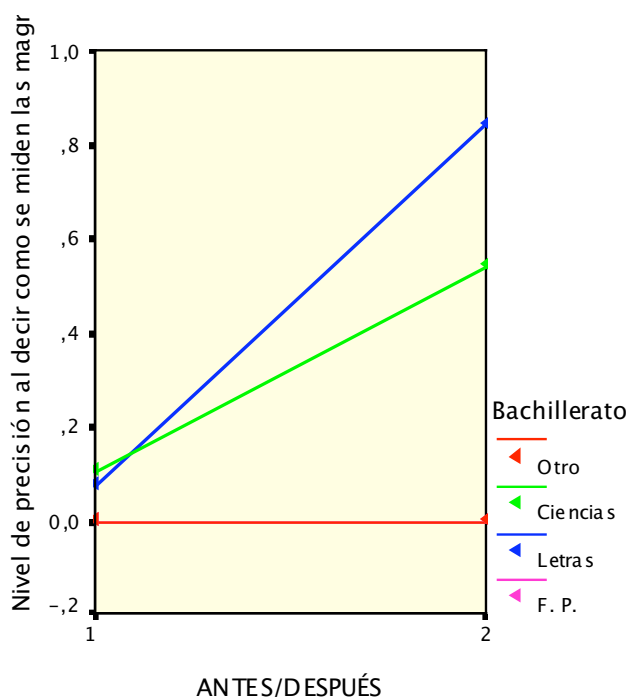


**Figura 564: Ampliación de la comparación: “¿cómo se miden?” antes/después, por “bachillerato”.**

En esta figura se puede apreciar que quedan representados sobre la misma línea los niveles de precisión de los alumnos de Formación Profesional y de los llamados Otros, éstos son los que responden con menor rigor, tanto antes como después del estudio del tema, a la pregunta ¿cómo se miden? Los que responden mejor a la citada pregunta son: antes, los que proceden del bachiller de Ciencias, y después, los de Letras.

La tabla siguiente recoge todos los niveles críticos obtenidos considerando las variables “¿cómo se miden las magnitudes dadas en el séptimo apartado?”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                                                        | Momento                         | Interacción                                      | Figura |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>¿CÓMO SE MIDEN?<br/>las<br/>magnitudes<br/>dadas en el<br/>séptimo<br/>apartado</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                  | 549    |
|                                                                                        | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.273$       | 550    |
|                                                                                        | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.002^{**}$     | 551-2  |
|                                                                                        | Antes / después: $p=0.009^{**}$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.159$        | 553-4  |
|                                                                                        | Antes / después: $p=0.009^{**}$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.950$         | 555-6  |
|                                                                                        | Antes / después: $p=0.004^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.057$ | 557-8  |
|                                                                                        | Antes / después: $p=0.380$      | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.649$ | 559-60 |

**Tabla 130: “¿Cómo se miden?”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.9.3. Número de unidades de medida

Se pasa a estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, “el número de unidades” que dan los alumnos en este apartado. En este caso se toman como variables intra-sujetos *número de unidades en el séptimo*, antes y después del estudio del tema. Se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato” como variable inter-sujeto, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en “el número de unidades” que dan los alumnos, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.701>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan  $p=0.701>0.05$ , se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “el número de unidades” que dan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que

se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la media poblacional vale cero, resulta también  $p=0.701>0.05$ , por lo que se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando este resultado con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo anterior: antes del estudio del tema el 29% ha dicho 5 ó más unidades; después del estudio del tema y de las técnicas los que han dicho 5 ó más unidades suponen el 37%. Esto quiere decir que después del estudio del tema y de las técnicas dicen mayor número de unidades de medida.

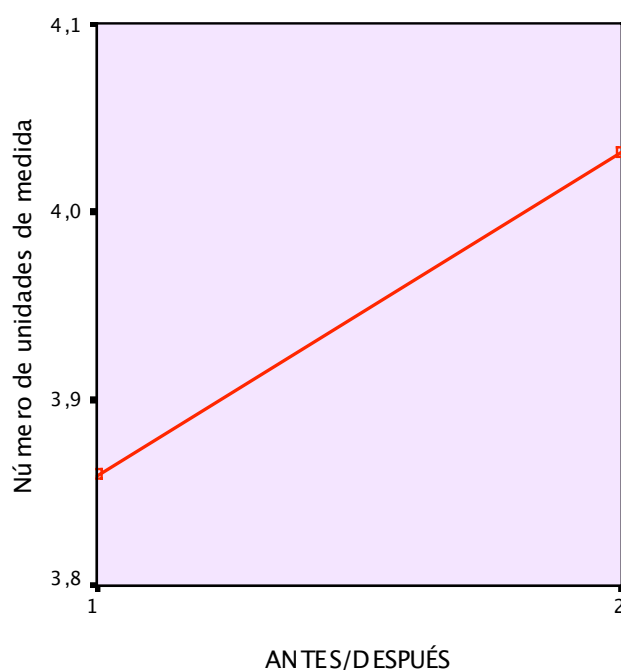


**Figura 565: Estimación del “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después.**

Esta figura confirma lo que se decía antes: después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos comentan mayor “número de unidades de medida”.

## Género

Se pasa a analizar “el número de unidades de medida” que dan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en función del “género”. Los niveles críticos asociados a los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas resultan mayores que 0.05, luego se tiene que afirmar que “el número de unidades de medida” que dicen los alumnos no se explica por “el género”.

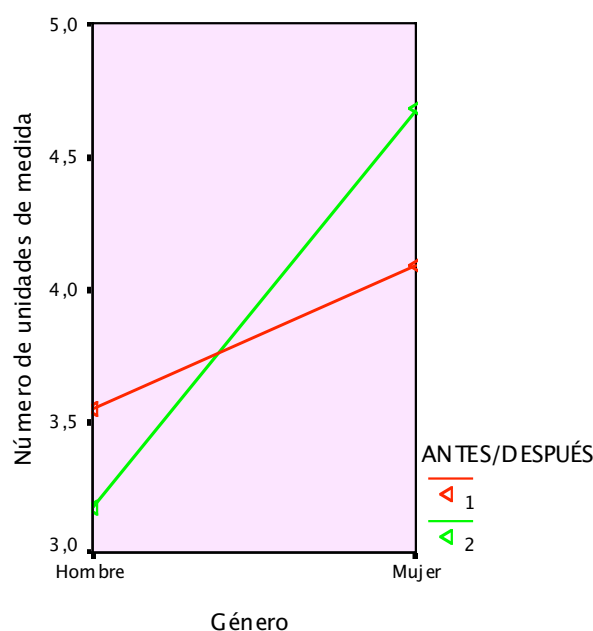


**Figura 566: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “género”.**

Las mujeres dicen mayor número de unidades de medida que los hombres en cualquiera de los momentos. Además, después del estudio del tema y de las técnicas, para las mujeres aumenta el número de unidades, y para los hombres disminuye.

### Año de realización

Se estudia ahora si el número de unidades de medida que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “año de realización” de la encuesta. Se observa que los niveles críticos asociados a los distintos estadísticos, obtenidos mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, son mayores que 0.05. Por esto se rechaza la hipótesis de que el número de unidades de medida que dicen los alumnos, en ambos momentos, dependa del “año de realización” de las encuestas.

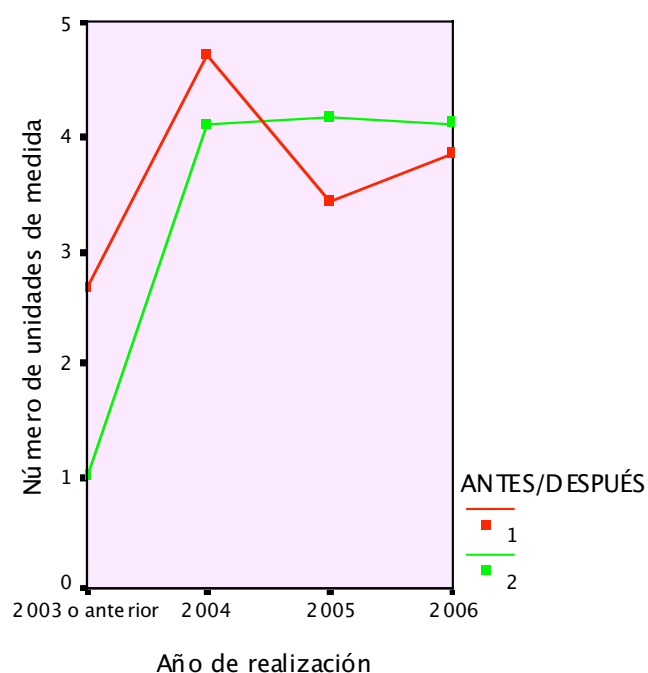


**Figura 567: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que acompaña apunta que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que respondieron las encuestas en los cursos 2004/2005 ó 2005/2006 utilizan más unidades de medida, y los demás usan menos.

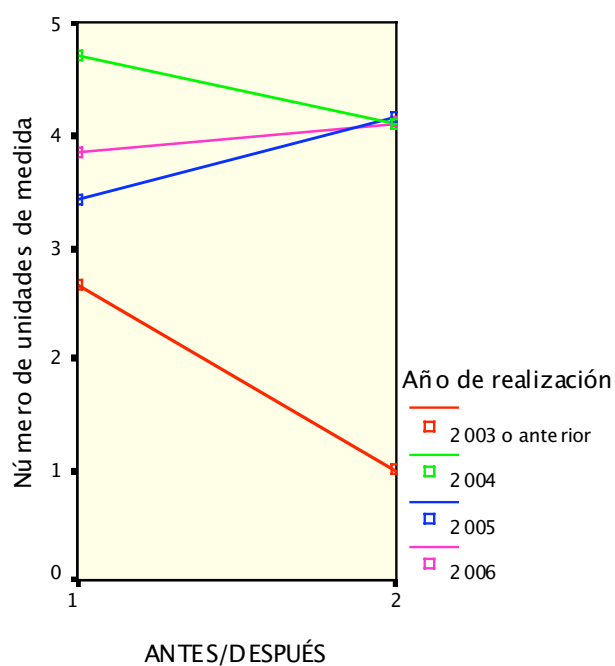


**Figura 568: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “año de realización”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan mayor número de unidades de medida son los que respondieron las encuestas en el año 2003/2004, y los que utilizan, en ambos momentos, menor número de unidades de medida son los que las respondieron en el curso 2002/2003 ó anteriores. Después de dicho estudio, los que usan mayor número de unidades son los que respondieron las encuestas el curso 2004/2005.

## Curso

Se pasa a analizar si son o no significativas las diferencias en cuanto al “número de unidades de medida” que indican los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, y teniendo en cuenta “el curso” en que están matriculados. Vemos que en ninguno de los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas los niveles críticos asociados son menores que 0.05, luego se tiene que concluir que “el número de unidades de medida” que dicen los alumnos no depende significativamente del “curso” en que estén matriculados.

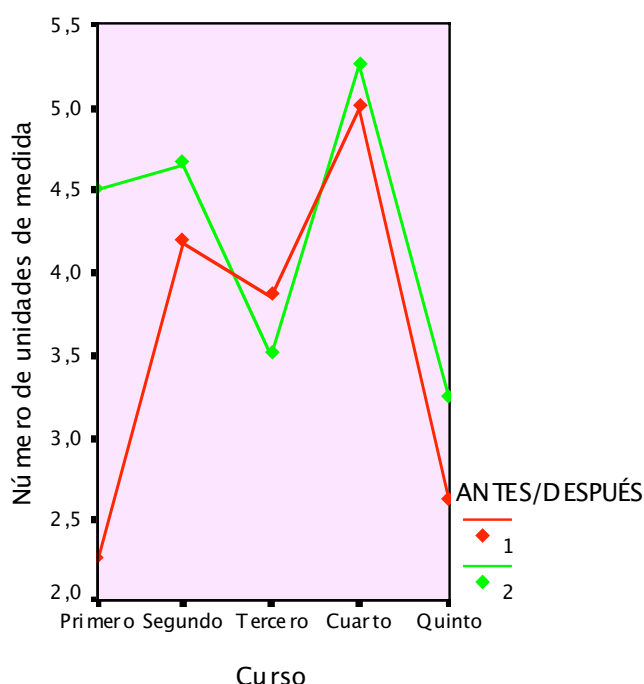


**Figura 569: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “curso”.**

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, sólo los alumnos de tercero dicen menor número de unidades de medida; todos los demás dicen mayor número.



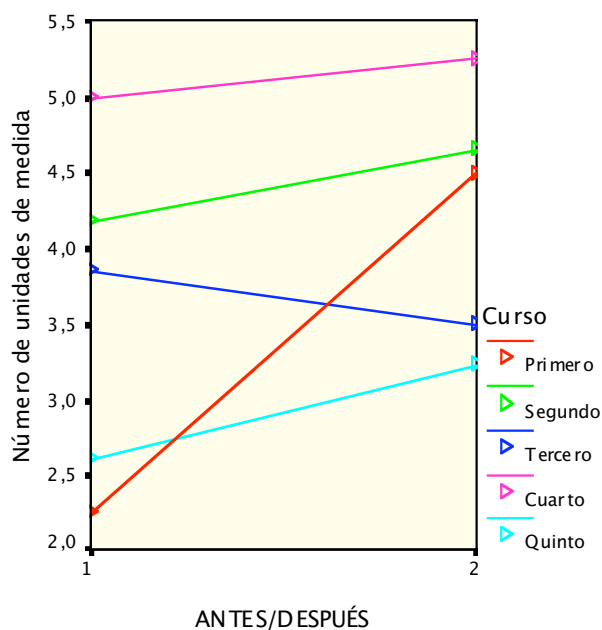


**Figura 570: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “curso”.**

Los alumnos que utilizan mayor número de unidades de medida, en ambos momentos, son los de cuarto, y los que usan menor número, antes del estudio del tema, son los de primero, y después, los de quinto.

## Edad

Analizamos, por edades, “el número de unidades de medida” enunciadas por los alumnos antes y después del estudio del tema. Observamos, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos son mayores que 0.05, luego “el número de unidades de medida” mencionadas no depende de “la edad” que tuvieran los alumnos.

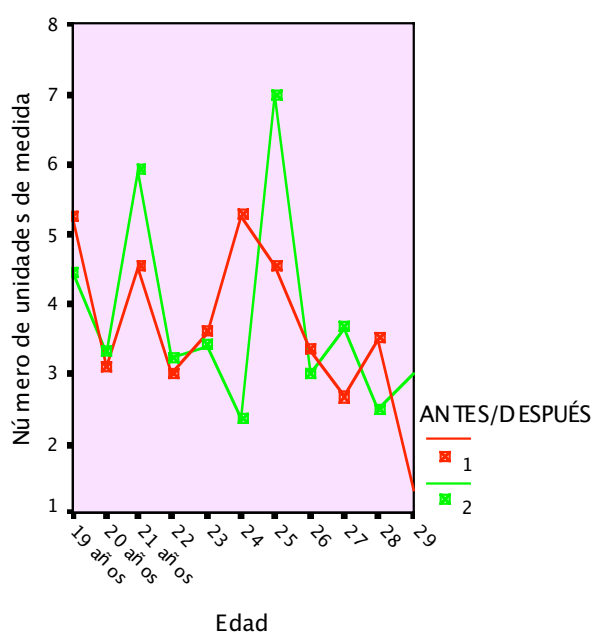


**Figura 571: Estimación de "número de unidades de medida en el séptimo" antes/después, por "edad".**

Esta figura señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que tenían 20, 21, 22, 25, 27 ó 29 años utilizan mayor número de unidades de medida para medir las magnitudes; los demás usan menor número de ellas.

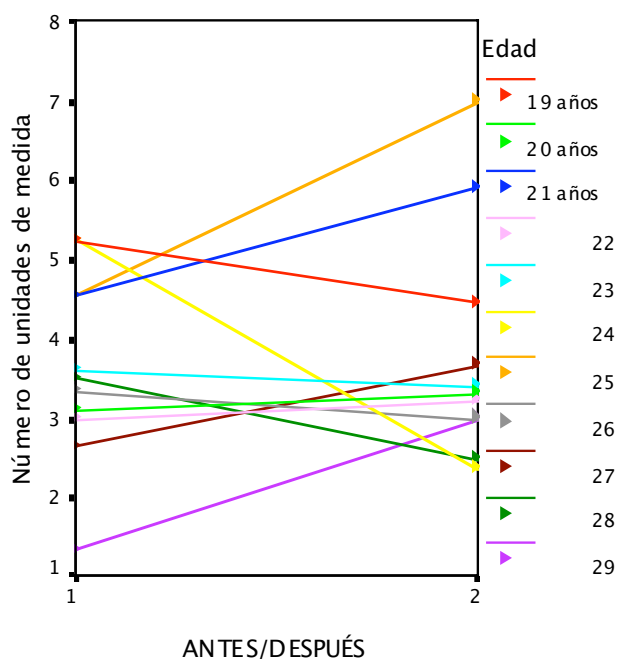


**Figura 572: Ampliación de la comparación: "número de unidades de medida en el séptimo" antes/después, por "edad".**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que usan mayor “número de unidades de medida” son los que tenían 19 ó 24 años, y los que utilizan menor número de unidades de medida son los que tenían 29 años. Después de dicho estudio, los alumnos que dicen mayor “número de unidades de medida” son los de 25 años, y los que dicen menos, los de 24 años.

## Especialidad

Se estudia, con el modelo lineal general de medidas repetidas, si el número de “unidades de medida” que dan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la especialidad” que estuvieran cursado. Se observa que en ninguno de los estadísticos que proporciona dicho modelo los niveles críticos asociados son menores que 0.05, luego “el número de unidades de medida” citados por los alumnos, antes y después de dicho estudio, no depende de “la especialidad”.

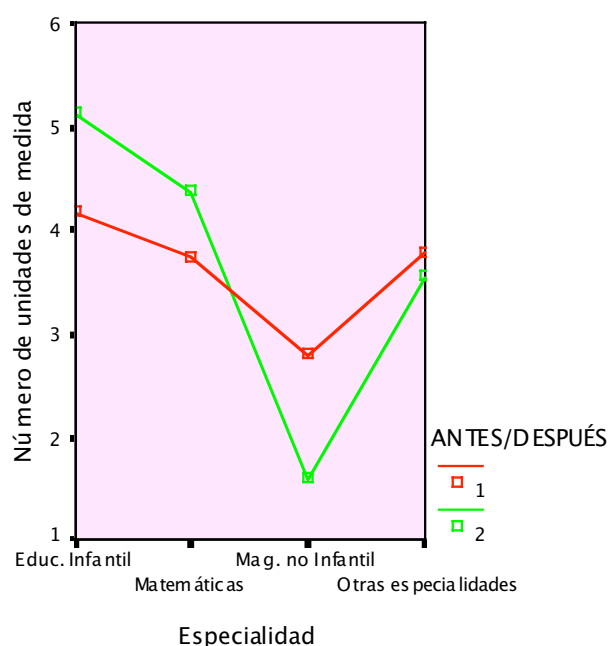


**Figura 573: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos que dicen mayor número de unidades de medida son, en ambos momentos, los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y los que dicen menor número son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil. La mayoría de los alumnos, después de estudiarse el tema y las técnicas, indican mayor número de unidades de medida, excepto los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil que dicen menor número.

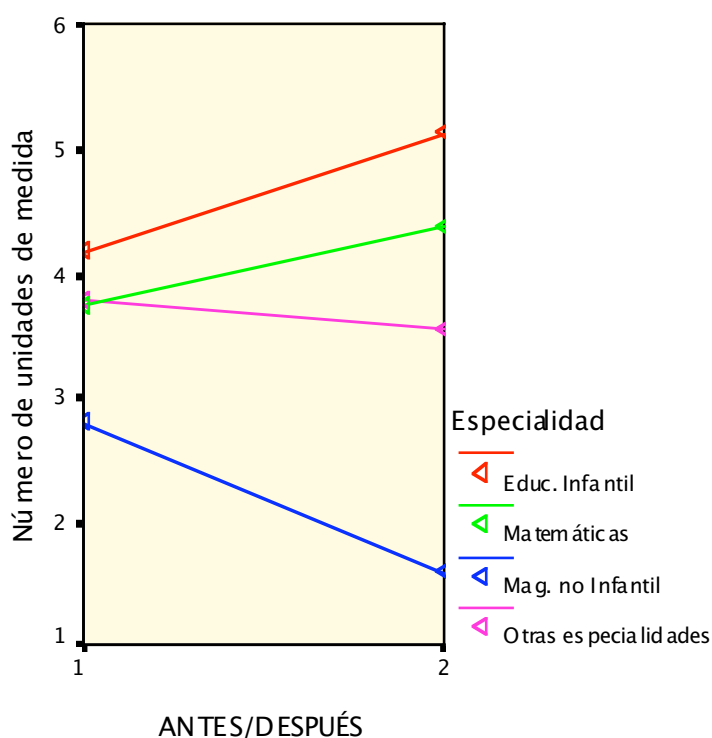


**Figura 574: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “especialidad”.**

Esta figura ayuda a ver claro cuáles son los niveles alcanzados por las distintas submuestras de alumnos y corrobora lo que se ha dicho antes.

## Bachillerato

Se estudia también si “el bachillerato” cursado por los alumnos influye en “el número de unidades de medida” que indican, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se ve que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados, en el modelo lineal general de medidas repetidas, son mayores que 0.05. Esto quiere decir que “el bachillerato” que hubieran cursado los alumnos no parece tener repercusión en el número de unidades indicadas.

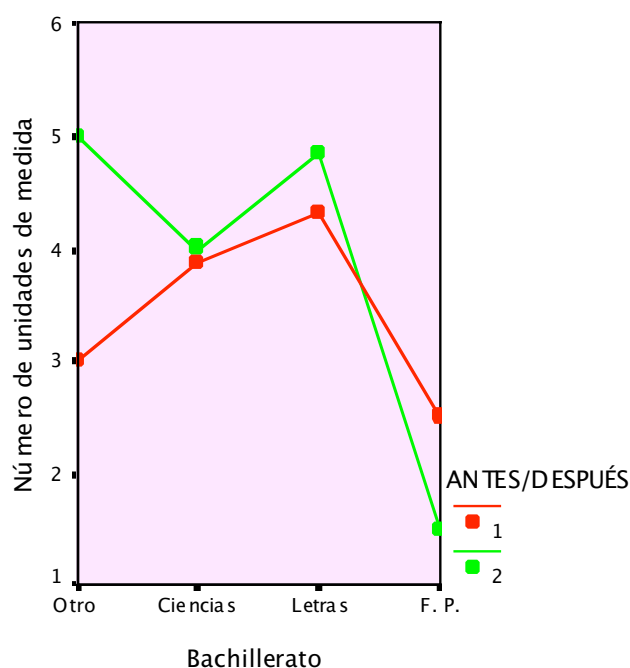


**Figura 575: Estimación de “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “bachillerato”.**

La mayoría de los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, indican mayor número de unidades de medida; excepto los que proceden de Formación Profesional, que ponen menos.

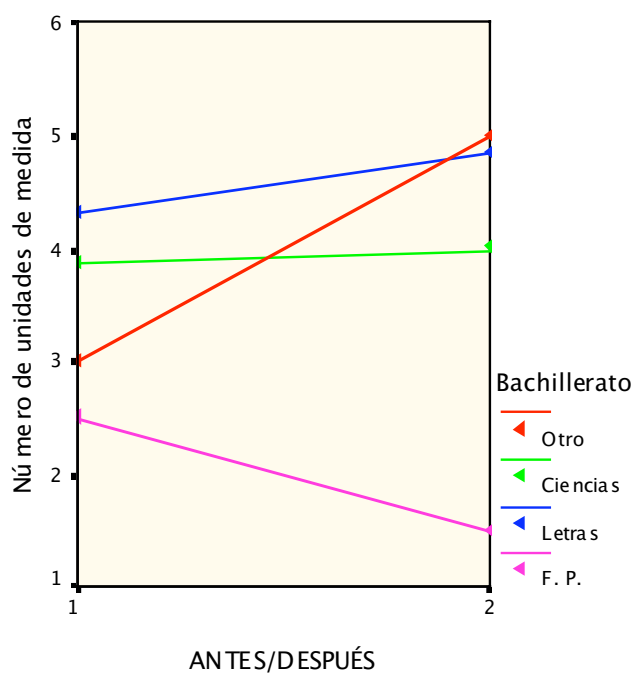


**Figura 576: Ampliación de la comparación: “número de unidades de medida en el séptimo” antes/después, por “bachillerato”.**

Antes del estudio del tema y de la técnicas, los alumnos que enumeran mayor número de unidades de medida son los que cursaron el bachiller de Letras, y los que enumeran menor número, en ambos momentos, son los de Formación Profesional. Después de dicho estudio, los alumnos que indican mayor número de unidades de medida son los que llamamos Otros —alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años.

Para tener presentes todos los niveles críticos obtenidos cuando se consideran las variables “número de unidades en el séptimo apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se puede ver la tabla que viene a continuación.

| NÚMERO<br>DE<br>UNIDADES<br>en el séptimo<br>apartado | Momento                    | Interacción                                      | Figura |
|-------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|--------|
|                                                       | Antes / después: $p=0.701$ |                                                  | 561    |
|                                                       | Antes / después: $p=0.816$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.289$       | 562    |
|                                                       | Antes / después: $p=0.668$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.659$          | 563-4  |
|                                                       | Antes / después: $p=0.365$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.824$        | 565-6  |
|                                                       | Antes / después: $p=0.779$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.563$         | 567-8  |
|                                                       | Antes / después: $p=0.955$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.563$ | 569-70 |
|                                                       | Antes / después: $p=0.765$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.936$ | 571-2  |

**Tabla 131: “Número de unidades en el séptimo apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

#### 5.3.9.4. Magnitudes no medibles

Se pasa a analizar “el número de magnitudes no medibles” que dicen los alumnos y el razonamiento de por qué son ó no medibles, antes y después del estudio del tema, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Se toman las variables *magnitudes no medibles*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema en “el número de magnitudes no medibles” que dicen, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.019<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan también  $p=0.019<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes no medibles” que dan los alumnos antes y después del

estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos resulta ser también  $p=0.019<0.05$ , por tanto, se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Teniendo en cuenta lo obtenido cuando se analizaron los resultados del estudio de frecuencias: antes del estudio del tema y de las técnicas no hay ningún alumno que diga alguna magnitud no medible; después, hay un pequeño porcentaje de estudiantes que dicen una o dos magnitudes no medibles, esto viene a confirmar lo que resultó antes.

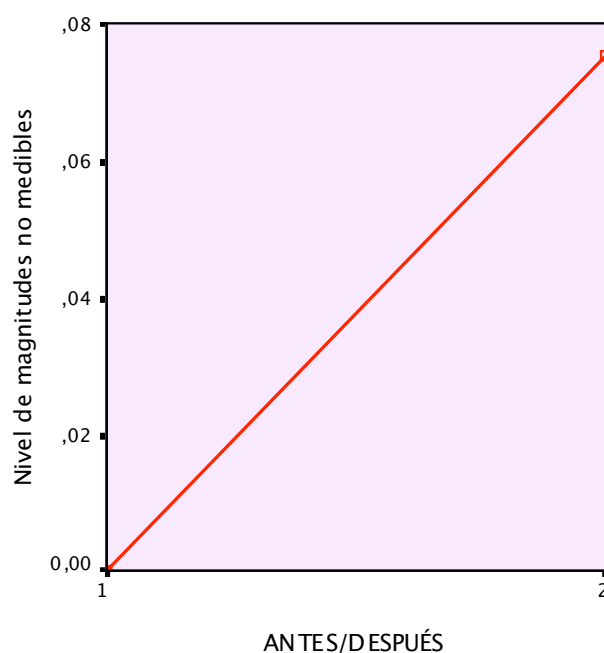


**Figura 577: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después.**

La figura adjunta indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “el número de magnitudes no medibles” que dan los alumnos.

## Género

Se pasa a estudiar si “el género” justifica las magnitudes no medibles que comentan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Los niveles críticos asociados a los estadísticos son  $p=0.026<0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo género. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes no medibles” que dicen los alumnos antes y después de dicho estudio dentro del mismo género. Entre los

dos géneros se obtiene  $p=0.488>0.05$ , luego no hay diferencias significativas entre ellos.

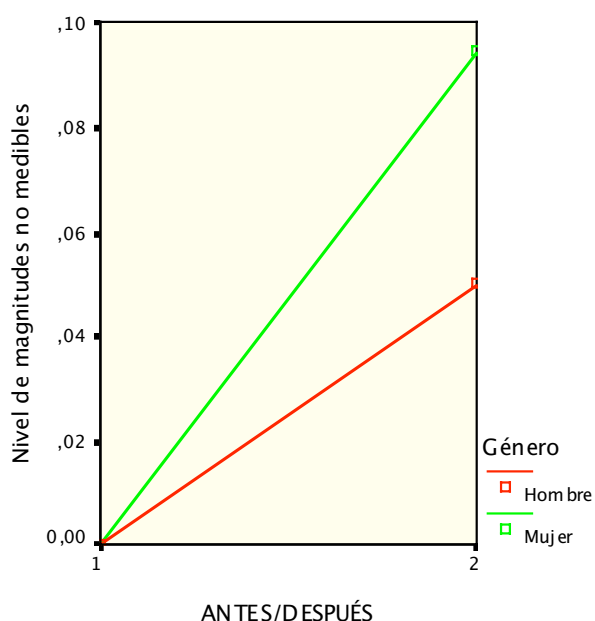


**Figura 578: Ampliación de la comparación: “magnitudes no medibles” antes/después, por “género”.**

Se elige esta figura por quedar más clara la situación que se tiene; en ella se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, ninguno de los géneros dice ninguna magnitud no medible, lo cual es lógico por ser el primer contacto con tales magnitudes. Después del estudio del tema y de las técnicas aumenta para ambos géneros “el número de magnitudes no medibles” que dicen, pero más para las mujeres que para los hombres.

### Año de realización

Se analiza, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el año de realización” explica las magnitudes no medibles que comentan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Los niveles críticos asociados a los estadísticos son:  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo año de realización y entre años de realización distintos se obtiene  $p=0.001<0.05$ . Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “el número de magnitudes no medibles” que dicen los alumnos, antes y después de dicho estudio, dentro del mismo año en que se realizan las encuestas, y también entre distintos años de realización.



Para comparar los distintos años de realización de la encuesta se elige Post hoc (o a posteriori); en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Aquí vemos dónde se encuentran las diferencias detectadas: ¿difieren entre sí las medias?, ¿hay una media que difiere de las demás?, etc. Con este procedimiento se obtienen los niveles críticos:

- a)  $p=0.004 < 0.05$  entre los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores y los de 2003/2004,
- b)  $p=0.003 < 0.05$  entre los alumnos de 2002/2003 ó anteriores y los de 2004/2005, y
- c)  $p=0.017 < 0.05$  entre los alumnos de 2002/2003 ó anteriores y los de 2005/2006,

luego sólo hay diferencias significativas entre los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores y todos los de los demás años de realización.

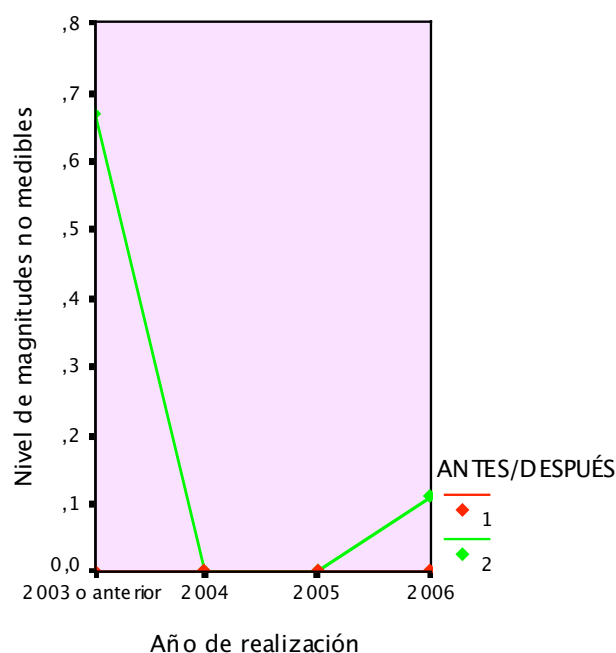


**Figura 579: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que precede parece que no da buena información sobre la situación en que se encuentran distribuidas las respuestas de los alumnos. La razón es que, antes del estudio del tema y de las técnicas, ningún alumno responde nada a esta pregunta, y se encuentran todos los datos representados sobre el eje horizontal. Para verlo un poco más claro se escoge la figura que viene a continuación.

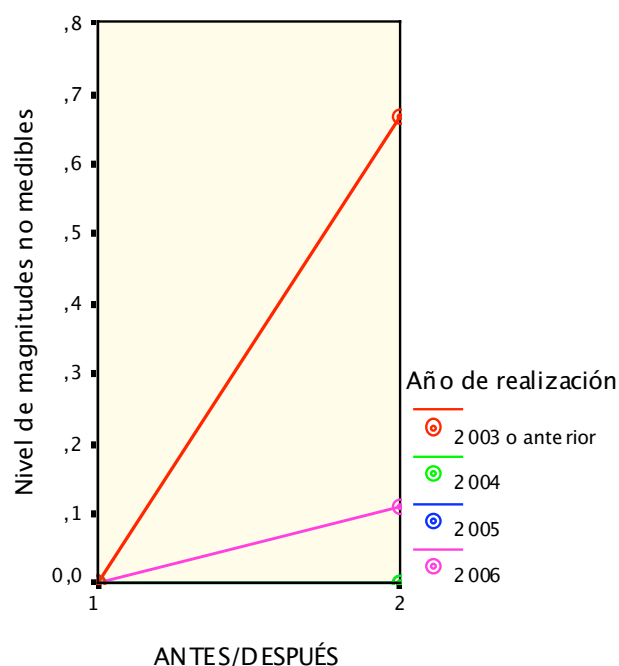


**Figura 580: Ampliación de la comparación: “magnitudes no medibles” antes/después, por “año de realización”.**

De las dos figuras que preceden se puede deducir que, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004 y los que lo hicieron en el 2004/2005 no dicen nada de magnitudes no medibles o lo que dicen está muy mal. Después de dicho estudio, los alumnos que dicen mayor número de magnitudes no medibles son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Se analiza si “el número de magnitudes no medibles” que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “curso” en que estuvieran matriculados. En los resultados del modelo lineal general de medidas repetidas se observa que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados son mayores que 0.05; esto quiere decir que “el curso” no tiene repercusión significativa sobre “el número de magnitudes no medibles” que dicen los alumnos en ambos momentos.

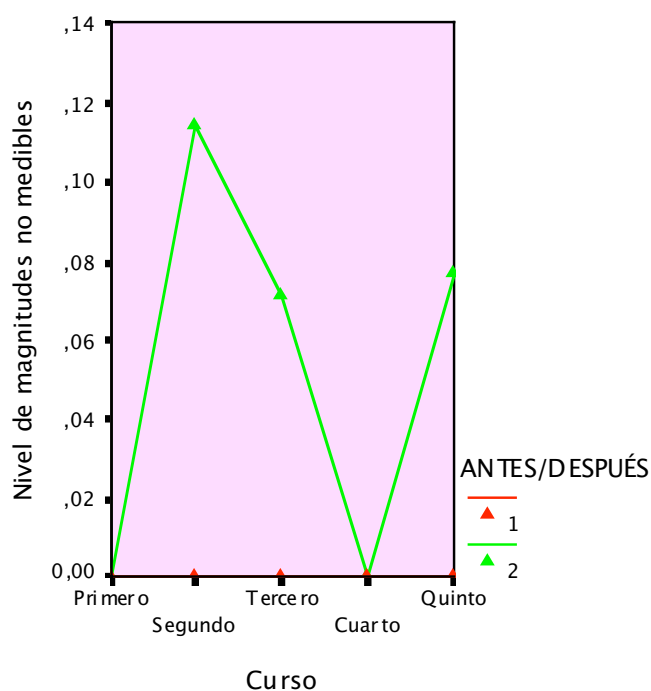


**Figura 581: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “curso”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas ningún alumno dice nada sobre magnitudes no medibles. Después, los alumnos que cursaban primero y cuarto siguen sin decir nada o lo que dicen no merece la pena, y los que ponen mayor número de ejemplos de magnitudes no medibles son los de segundo.

## Edad

Se considera ahora si “el número de magnitudes no medibles” que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la edad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados:  $p=0.025 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “el número de magnitudes no medibles” dentro de la misma edad, y  $p=0.702 > 0.05$  cuando se considera la influencia entre las distintas edades, y los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser análogos. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes no medibles” que dan los alumnos, antes y después del citado estudio, dentro de la misma edad pero no existen diferencias significativas entre las distintas edades.

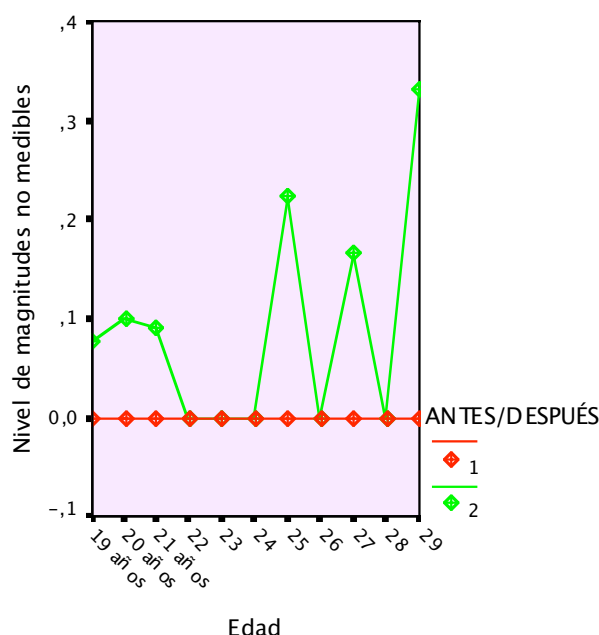


**Figura 582: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “edad”.**

En esta figura se vuelve a destacar la inactividad de los alumnos para dar algún ejemplo de magnitudes no medibles antes del estudio del tema y de las técnicas, cosa lógica, ya que para ellos una magnitud era todo lo que se podía medir. Después del citado estudio hay alumnos que siguen sin decir nada (parece que no les convence que haya magnitudes no medibles) como los que tenían 22, 23, 24, 26 ó 28 años cuando respondieron las encuestas; los demás dicen algo, siendo los que mayor número de magnitudes dan los de 29 años.

## Especialidad

Se considera ahora como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si “el número de magnitudes no medibles” que dan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende “la especialidad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados:  $p=0.039<0.05$  cuando se considera la influencia de “la especialidad” en “el número de magnitudes no medibles” que dan, dentro de cada especialidad, y  $p=0.283>0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan los mismos valores. Por ello se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes no medibles” que dicen los

alumnos, antes y después del estudio del tema, dentro de la misma especialidad, pero no existe diferencia entre las distintas especialidades.

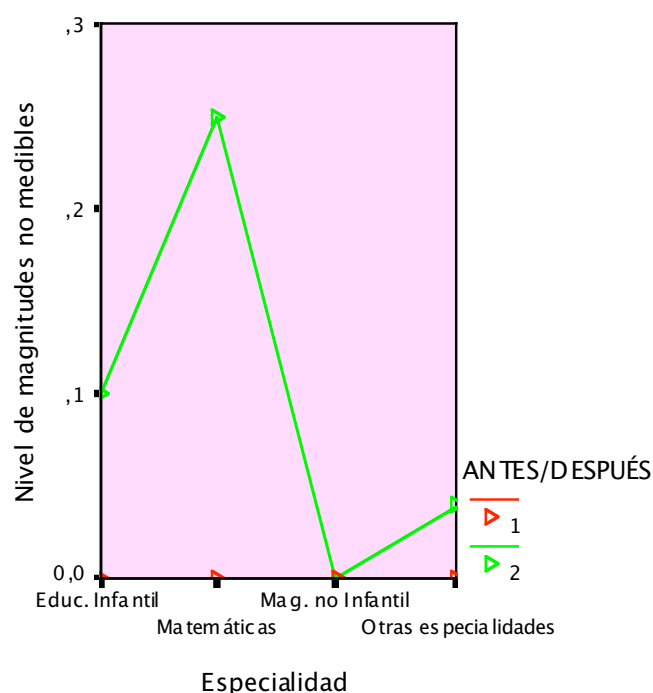


**Figura 583: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “especialidad”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos no dicen nada sobre magnitudes no medibles. Después siguen sin decir nada los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil; todos los demás señalan alguna magnitud no medible, siendo los de la licenciatura de Matemáticas los que comentan mayor número de magnitudes no medibles.

## Bachillerato

Se ve también si “el número de magnitudes no medibles” que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “bachillerato” que cursaron. En los resultados del modelo lineal general de medidas repetidas, se observa que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados son mayores que 0.05; esto quiere decir que “el bachillerato” que cursaron los alumnos no tiene repercusión significativa sobre “el número de magnitudes no medibles” que dicen.

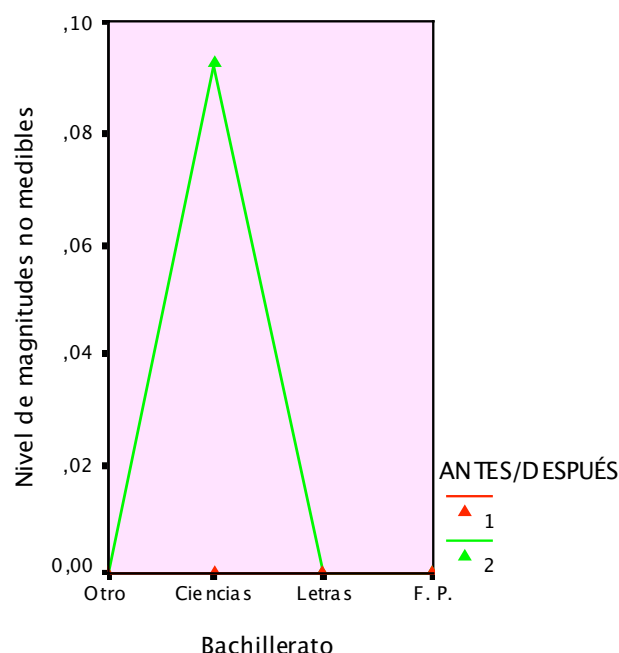


Figura 584: Estimación de “magnitudes no medibles” antes/después, por “bachillerato”.

En este caso, como viene ocurriendo, antes del estudio del tema y de las técnicas, ningún alumno dice nada sobre magnitudes no medibles. Después de dicho estudio siguen sin decir nada o lo que dicen no merece la pena tenerlo en cuenta, los que llamamos Otros —alumnos que provienen de acceso a la Universidad para mayores de 25 años—, los de Letras y los de Formación Profesional. Sólo los de Ciencias comentan algunas magnitudes no medibles.

En la figura siguiente se tienen todos los niveles críticos obtenidos al considerar las variables “número de magnitudes no medibles”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                      | Momento                         | Interacción                            | Figura               |
|------------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------|----------------------|
| <b>MAGNITUDES NO MEDIBLES en el séptimo apartado</b> | Antes / después: $p=0.019^*$    |                                        | 573                  |
|                                                      | Antes / después: $p=0.026^*$    | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.488$ 574        |
|                                                      | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.001^{**}$ 575-6 |
|                                                      | Antes / después: $p=0.315$      | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.925$ 577        |
|                                                      | Antes / después: $p=0.025^*$    | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.702$ 578        |
|                                                      | Antes / después: $p=0.039^*$    | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.283$ 579        |
|                                                      | Antes / después: $p=0.813$      | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.758$ 580        |

Tabla 132: “Magnitudes no medibles”.  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.9.5. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado

Se recogerá en esta parte la variación experimentada, después del estudio del tema y de las técnicas, de los distintos aspectos analizados anteriormente. Además, se compara cómo quedan cada una de las clases consideradas según las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, teniendo en cuenta ambos momentos.

#### Variables intra-sujeto

En la tabla siguiente se indica si, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene, aumenta o disminuye cada una de las variables intra-sujeto que hemos considerado en este apartado.

| Variable intra-sujeto  | Variación experimentada |
|------------------------|-------------------------|
| Número de magnitudes   | Se mantiene             |
| ¿Cómo se mide?         | Aumenta                 |
| Número de unidades     | Aumenta                 |
| Magnitudes no medibles | Aumenta                 |

Tabla 133: Variación experimentada por las variables intra-sujeto, en el séptimo apartado.

Observando esta tabla se puede decir que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la mayoría de las variables, excepto “número de magnitudes”, que se mantiene.

#### Variables inter-sujeto

Se resumen, en distintas tablas, cuál es la variación experimentada por cada una de las submuestras que originan las variables inter-sujeto con las que se ha trabajado, después del estudio del tema y de las técnicas, y cuáles son los máximos y los mínimos en ambos momentos.

#### Género

Se concentran en una sola tabla las variaciones que tienen lugar en cada una de las variables intra-sujeto por las dos submuestras que determina “el género”; en otras tablas se toman las submuestras que alcanzan los máximos y los mínimos.

## Variaciones

En la tabla siguiente se indica cuál es la variación experimentada en cada una de las variables intra-sujeto por las dos submuestras de la variable “género”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|------------------------|----------------------|----------------------|
| Número de magnitudes   | Aumenta              | Disminuye            |
| ¿Cómo se mide?         | Aumenta              | Aumenta              |
| Número de unidades     | Disminuye            | Aumenta              |
| Magnitudes no medibles | Aumenta              | Aumenta              |

Tabla 134: Variación experimentada por la variable “género”, en el séptimo apartado.

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto con que se trabajan en este apartado, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

## Máximos

En la tabla que viene a continuación se destaca qué grupo de alumnos alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos. No tiene sentido construir otra tabla para los valores mínimos, ya que sólo hay dos submuestras, y si una alcanza el valor máximo, la otra tomará el mínimo.

| Variable intra-sujeto  | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes   | Mujeres        | Mujeres          |
| ¿Cómo se mide?         | Mujeres        | Mujeres          |
| Número de unidades     | Mujeres        | Mujeres          |
| Magnitudes no medibles | Hombres        | Mujeres          |

Tabla 135: Máximos de la variable “género”, en el séptimo apartado, antes/después.

Hay una mayoría aplastante de mujeres que consiguen los valores máximos en ambos momentos.

## Año de realización

En las tablas siguientes se concentran las variaciones de las distintas variables intra-sujeto en las submuestras que origina la variable inter-sujeto “año de realización”, después del estudio del tema y de las técnicas; y además se tendrán los máximos y los mínimos de las variables intra-sujeto en ambos momentos.



| Variable intra-sujeto  | Variación en 2003 ó anteriores | Variación en 2004 | Variación en 2005 | Variación en 2006 |
|------------------------|--------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Número de magnitudes   | Aumenta                        | Aumenta           | Disminuye         | Disminuye         |
| ¿Cómo se mide?         | Aumenta                        | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| Número de unidades     | Disminuye                      | Disminuye         | Aumenta           | Aumenta           |
| Magnitudes no medibles | Aumenta                        | Se mantiene       | Se mantiene       | Aumenta           |

Tabla 136: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el séptimo apartado.

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto, siendo los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores y los de 2005/2006 los que salen más favorecidos, es decir, expresan con mayor precisión y claridad, después del estudio del tema y de las técnicas, cómo se miden las magnitudes que ellos mismos han dado como ejemplo. Y la variable que cuenta con mayor número de aumentos es “¿cómo se mide?”.

## Máximos

En esta tabla y en la siguiente se observa que en la variable “magnitudes no medibles”, antes del estudio del tema y de las técnicas, los máximos y los mínimos los ocupan todos los alumnos; esto es debido a que hasta ahora ninguno sabía de la existencia de magnitudes no medibles, como ya se ha visto antes, al analizar la figura que representa estos resultados.

| Variable intra-sujeto  | Antes es mayor | Después es mayor  |
|------------------------|----------------|-------------------|
| Número de magnitudes   | 2006           | 2006              |
| ¿Cómo se mide?         | 2006           | 2003 ó anteriores |
| Número de unidades     | 2004           | 2005              |
| Magnitudes no medibles | Todos          | 2003 ó anteriores |

Tabla 137: Máximos de la variable “año de realización”, en el séptimo apartado, antes/después.

Aunque, antes del estudio del tema y de las técnicas, no hay ninguna submuestra que obtenga la mayoría de los máximos, predominan los alumnos que respondieron la encuesta en 2005/2006, y después, los de 2002/2003 ó anteriores.

## Mínimos

También se van a concentrar, en la tabla que viene a continuación, los mínimos de las variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Antes es menor    | Después es menor  |
|------------------------|-------------------|-------------------|
| Número de magnitudes   | 2003 ó anteriores | 2005              |
| ¿Cómo se mide?         | 2003 ó anteriores | 2006              |
| Número de unidades     | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores |
| Magnitudes no medibles | Todos             | 2004 y 2005       |

Tabla 138: Mínimos de la variable “género”, en el séptimo apartado, antes/después.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, el mayor número de mínimos es de los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores; después, los que cuentan con más mínimos pasan a ser los de 2004/2005.

## Curso

Como viene siendo habitual, se van a acumular en una sola tabla las variaciones que experimentan las distintas submuestras originadas por la variable “curso” en las variables intra-sujeto que aparecen en este apartado. Y en otras dos tablas se van a poner los máximos y los mínimos de estas variables en ambos momentos.

## Variaciones

Se obtendrán las variaciones que sufren, después del estudio del tema y de las técnicas, las submuestras originadas por la variable “curso”, en las variables intra-sujeto que figuran en este apartado.

| Variable intra-sujeto  | Variación en primero | Variación en segundo | Variación en tercero | Variación en cuarto | Variación en quinto |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| Número de magnitudes   | Aumenta              | Disminuye            | Aumenta              | Disminuye           | Aumenta             |
| ¿Cómo se mide?         | Disminuye            | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta             |
| Número de unidades     | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye            | Aumenta             | Aumenta             |
| Magnitudes no medibles | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Aumenta             |

Tabla 139: Variación experimentada por la variable “año de realización”, en el séptimo apartado.

Después del estudio del tema y de las técnicas, hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto que se consideran en este apartado, siendo los alumnos de quinto los que obtienen más aumentos, pues logran aumentos en todas las variables.

## Máximos

En la tabla que viene a continuación se tienen los máximos que consiguen los alumnos en las variables intra-sujeto que se han

considerado en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes   | Cuarto         | Cuarto           |
| ¿Cómo se mide?         | Primero        | Quinto           |
| Número de unidades     | Cuarto         | Cuarto           |
| Magnitudes no medibles | Todos          | Segundo          |

**Tabla 140:** Máximos de la variable “curso”, en el séptimo apartado, antes/después.

Los alumnos que consiguen mayor número de máximos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, son los de cuarto.

## Mínimos

Igual que pasó en la variable “año de realización”, en la tabla anterior y en ésta también aparecen, antes del estudio del tema y de las técnicas, todos los alumnos en los máximos y en los mínimos de la variable “magnitudes no medibles”; la causa ya la hemos comentado antes y no la vamos a repetir.

| Variable intra-sujeto  | Antes es menor | Después es menor |
|------------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes   | Primero        | Primero          |
| ¿Cómo se mide?         | Cuarto         | Quinto           |
| Número de unidades     | Primero        | Quinto           |
| Magnitudes no medibles | Todos          | Primero y cuarto |

**Tabla 141:** Mínimos de la variable “curso”, en el séptimo apartado, antes/después.

Antes del estudio del tema los alumnos que tienen mayor número de máximos son los de primero, y después, los de primero y quinto, al mismo nivel.

## Edad

Se acumulan, en las tablas siguientes, las variaciones experimentadas, después del estudio del tema y de las técnicas, por las variables intra-sujeto de este apartado, en cada una de las submuestras que determina la variable inter-sujeto “edad”, los máximos y los mínimos en ambos momentos.

## Variación

Como va siendo habitual, se va a concentrar en la tabla siguiente las variaciones experimentadas, después del estudio del tema y de las

técnicas, por cada una de las submuestras que origina la variable “edad” en las distintas variables intra-sujeto de este apartado.

| Variable intra-sujeto  | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 23 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Número de magnitudes   | A       | D       | A       | A       | D       | D       | A       | D       | A       | S M     | D       |
| ¿Cómo se mide?         | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | S M     | S M     |
| Número de unidades     | D       | A       | A       | A       | D       | D       | A       | D       | A       | D       | A       |
| Magnitudes no medibles | A       | A       | A       | S M     | S M     | S M     | A       | SM      | A       | SM      | A       |

Tabla 142: Variación experimentada por la variable “edad”, en el séptimo apartado.

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto que venimos considerando, siendo la variable que supera con diferencia a las demás “¿cómo se mide?”, y los alumnos que cuentan sólo con aumentos son los que tenían 22, 25 y 27 años.

## Máximos

Se toman, en la tabla siguiente, las submuestras que alcanzan los valores máximos de las variables intra-sujeto que se trabajan en este apartado en cada momento.

| Variable intra-sujeto  | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes   | 29 años        | 19 años          |
| ¿Cómo se mide?         | 23 años        | 20 años          |
| Número de unidades     | 19 y 24 años   | 25 años          |
| Magnitudes no medibles | Todos          | 29 años          |

Tabla 143: Máximos de la variable “edad”, en el séptimo apartado, antes/después.

No se aprecia ningún subconjunto de alumnos que se repita más que los demás, ni antes ni después del estudio del tema y de las técnicas.

## Mínimos

Se observa qué grupos de alumnos toman los valores mínimos en las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Antes es menor           | Después es menor |
|------------------------|--------------------------|------------------|
| Número de magnitudes   | 28 años                  | 23 años          |
| ¿Cómo se mide?         | 20, 22, 24, 27 y 28 años | 28 años          |
| Número de unidades     | 29 años                  | 24 años          |
| Magnitudes no medibles | Todos                    | 29 años          |

Tabla 144: Mínimos de la variable “edad”, en el séptimo apartado, antes/después.

Igual que viene ocurriendo con las otras variables inter-sujeto, también ocurre con “la edad”: aparecen todos los alumnos en los máximos y en los mínimos de la variable “magnitudes no medibles”, antes del estudio del tema y de las técnicas; la razón es la misma que hemos dado antes y no la vamos a repetir.

## Especialidad

Se continúa con la variable inter-sujeto “especialidad” para destacar en una sola tabla las variaciones de las distintas variables intra-sujeto consideradas en este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas. Además, se construirán las tablas que recojan los valores máximos y mínimos de las distintas variables intra-sujeto en ambos momentos.

## Variaciones

Se pasan a la tabla siguiente las variaciones experimentadas, después del estudio del tema y de las técnicas, por las distintas submuestras que origina la variable inter-sujeto “especialidad”, en cada una de las variables intra-sujeto.

| Variable intra-sujeto  | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|------------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| Número de magnitudes   | Aumenta            | Disminuye   | Disminuye              | Disminuye            |
| ¿Cómo se mide?         | Aumenta            | Aumenta     | Se mantiene            | Aumenta              |
| Número de unidades     | Aumenta            | Aumenta     | Disminuye              | Disminuye            |
| Magnitudes no medibles | Aumenta            | Aumenta     | Se mantiene            | Aumenta              |

Tabla 145: Variación experimentada por la variable “especialidad”, en el séptimo apartado.

En total hay una mayoría de aumentos en las variables que se trabajan en este apartado, siendo los alumnos de Educación Infantil los que cuentan con más aumentos, ya que los tienen en todas las variables, y los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil no tienen ningún aumento.

## Máximos

En la tabla siguiente se tienen los máximos de las variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Antes es mayor       | Después es mayor   |
|------------------------|----------------------|--------------------|
| Número de magnitudes   | Otras especialidades | Educación Infantil |
| ¿Cómo se mide?         | Matemáticas          | Matemáticas        |
| Número de unidades     | Educación Infantil   | Educación Infantil |
| Magnitudes no medibles | Todos                | Matemáticas        |

Tabla 146: Máximos de la variable “especialidad”, en el séptimo apartado, antes/después.

Los alumnos que consiguen mayor número de máximos, en ambos momentos, son los de Educación Infantil y los de Matemáticas, al mismo nivel.

## Mínimos

Recogemos los mínimos de las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema, en la tabla adjunta.

| Variable intra-sujeto  | Antes es menor         | Después es menor       |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| Número de magnitudes   | Matemáticas            | Magisterio no Infantil |
| ¿Cómo se mide?         | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Número de unidades     | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Magnitudes no medibles | Todos                  | Magisterio no Infantil |

Tabla 147: Mínimos de la variable “especialidad”, en el séptimo apartado, antes/después.

Casi la totalidad de los mínimos, en ambos momentos, los ocupan los alumnos de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil. Se repite el hecho de que todos los alumnos toman los valores máximos y mínimos de la variable “magnitudes no medibles”, antes del estudio del tema y de las técnicas; la razón ya la hemos comentado.

## Bachillerato

Terminamos las conclusiones de este apartado recogiendo las variaciones experimentadas, después del estudio del tema y de las técnicas, por las submuestras que determina la variable inter-sujeto “bachillerato” en cada una de las variables intra-sujeto. También se señalan los máximos y mínimos de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

## Variaciones

En la tabla siguiente se tienen las variaciones de las variables intra-sujeto de este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Otro        | Ciencias  | Letras      | F P         |
|------------------------|-------------|-----------|-------------|-------------|
| Número de magnitudes   | Se mantiene | Disminuye | Disminuye   | Aumenta     |
| ¿Cómo se mide?         | Se mantiene | Aumenta   | Aumenta     | Se mantiene |
| Número de unidades     | Aumenta     | Aumenta   | Aumenta     | Disminuye   |
| Magnitudes no medibles | Se mantiene | Aumenta   | Se mantiene | Se mantiene |

Tabla 148: Variación experimentada por la variable “bachillerato”, en el séptimo apartado.

Aunque no hay una mayoría de aumentos en las variables de este apartado, entre las que se mantienen y aumentan sí hay mayoría.

## Máximos

En la tabla que viene a continuación se concentran los máximos de las variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Antes es mayor | Después es mayor |
|------------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes   | Ciencias       | Letras           |
| ¿Cómo se mide?         | Ciencias       | Letras           |
| Número de unidades     | Letras         | Otro             |
| Magnitudes no medibles | Todos          | Ciencias         |

Tabla 149: Máximos de la variable “bachillerato”, en el séptimo apartado, antes/después.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los que alcanzan el mayor número de máximos son los alumnos de Ciencias, pasando a ser los de Letras después de dicho estudio.

## Mínimos

Se completan las conclusiones de los aspectos considerados en este apartado viendo qué submuestras de alumnos tienen los valores mínimos en las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto  | Antes es menor | Después es menor |
|------------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes   | Ciencias       | F P              |
| ¿Cómo se mide?         | Otro           | Otro             |
| Número de unidades     | F P            | F P              |
| Magnitudes no medibles | Todos          | Ciencias         |

Tabla 150: Mínimos de la variable “bachillerato”, en el séptimo apartado, antes/después.

Aunque no hay ningún subconjunto de alumnos que destaque sobre los demás, los que toman mayor número de mínimos son los de Formación Profesional.

### 5.3.10. Estudio Estadístico del Octavo Apartado de las Encuestas

Se continúa con el estudio estadístico de los resultados de las encuestas. Analizamos el octavo apartado de la Evaluación Inicial y el noveno de la Final, con objeto de ver la influencia que tiene el estudio del tema en la respuesta de los alumnos sobre el grado de acuerdo con que “las Magnitudes y su Medida” sea un tema apropiado para Educación Infantil y por qué, antes y después del estudio del tema, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas.

#### 5.3.10.1. ¿“Las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para Educación Infantil?

Se toman las variables *“las Magnitudes y su Medida” es un tema apropiado para Educación Infantil*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato” como variables inter-sujeto, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema en su opinión sobre si “las Magnitudes y su Medida sea un tema apropiado para Educación Infantil”, según cada una de estas variables.

Como los valores considerados para analizar las respuestas han sido: 0=“no apropiado”, 1=“apropiado” y 2=“no sabe”, consideramos que no tiene sentido este estudio ya que, de forma análoga a lo que se comentó en el 4º Apartado, se puede decir que, como ya sabemos, en el estudio mediante el modelo lineal general se considera el diseño más



simple de medidas repetidas consistente en medir dos variables en una misma muestra de sujetos. Los datos de este diseño se analizan con la prueba T para muestras relacionadas, que permite contrastar hipótesis referidas a la diferencia entre dos medias relacionadas y en este caso no tiene sentido el cálculo de la media, pues no se puede decir qué significa la media de los valores: no apropiado, apropiado y no sabe. Por esta razón pensamos que no tiene sentido continuar este estudio.

### 5.3.11. Estudio Estadístico del Noveno Apartado de las Encuestas

Se sigue con el estudio estadístico para analizar si influye el estudio del tema y de las técnicas en la respuesta de los alumnos a las cuestiones planteadas en el noveno apartado de la Evaluación Inicial y en el décimo de Evaluación Final que decía: “¿qué magnitudes se pueden empezar a trabajar en Educación Infantil?; ¿cuándo?; ¿con qué unidades de medida?; ¿por qué?”. Para valorar las respuestas, como ya hemos comentado al hacer el estudio de frecuencias, se consideran: “el número de magnitudes que nos dicen”, “el número de unidades de medida” y “la exactitud en los razonamientos”.

#### 5.3.11.1. Número de magnitudes

Se utiliza el modelo lineal general y en él se eligen *número de magnitudes en el noveno apartado*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en “el número de magnitudes” comentadas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.109>0.05$ , y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también valen  $p=0.109>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes” que dan los alumnos, antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.109>0.05$ , con lo que se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Esto viene a corroborar lo que se obtenía en el diagrama de frecuencias: la diferencia entre los porcentajes de las magnitudes que dicen antes y después del estudio del tema y de las técnicas es: antes, el 43% dice tres o más magnitudes, y después aumenta hasta el 50%.

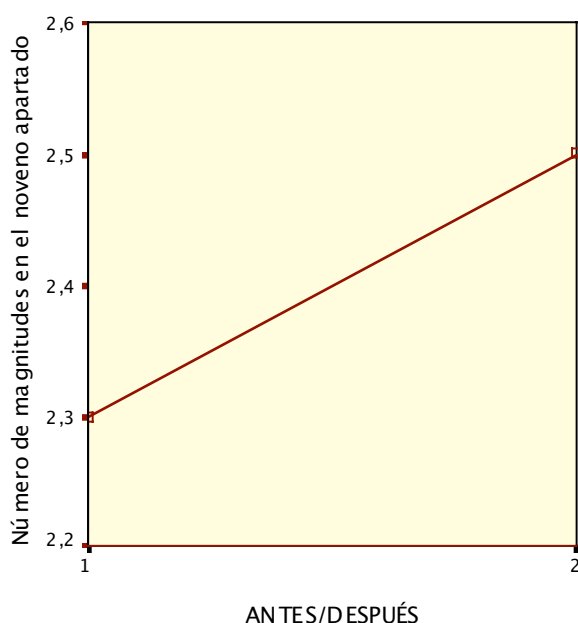


**Figura 585: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después.**

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “el número de magnitudes” que comentan los alumnos que se pueden trabajar en Educación Infantil.

## Género

Se pasa a analizar si son o no significativas las diferencias en cuanto al “número de magnitudes” que dicen los alumnos que se pueden trabajar con Educación Infantil antes y después del estudio del tema, y teniendo en cuenta “el género”. Se observa que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05, luego se tiene que concluir que el número de magnitudes que dan los alumnos, antes y después de dicho estudio, no depende del “género”.

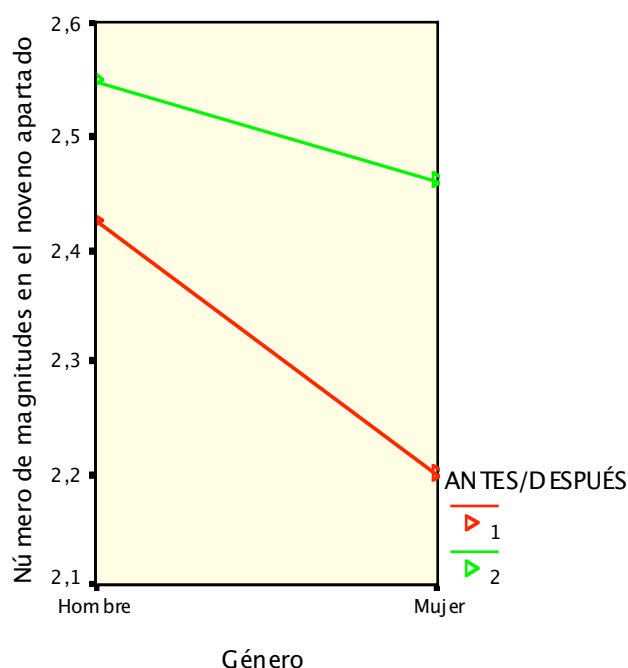


**Figura 586: Estimación del “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “género”.**

La figura que precede informa de que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los hombres dicen mayor número de magnitudes que sirvan para trabajar con niños de Educación Infantil. Ambos géneros dicen mayor número de magnitudes después del estudio del tema y de las técnicas.

### Año de realización

Se estudia si influye “el año de realización” de las encuestas en “el número de magnitudes” que señalan los alumnos para poder utilizar con niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observan los resultados obtenidos en todos los niveles críticos asociados a los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas y se ve que todos ellos son mayores que 0.05, luego se puede concluir que “el año de realización” no explica el número de magnitudes que dan los alumnos, antes y después del citado estudio.

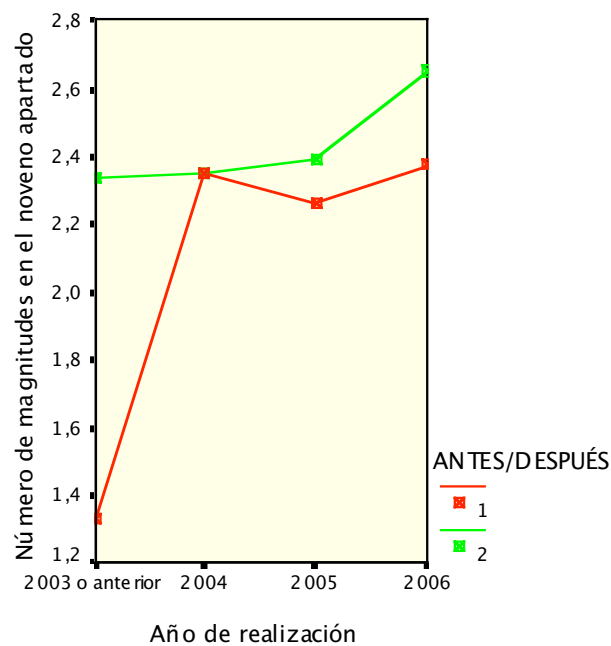


**Figura 587: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.**

La figura adjunta señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, casi todos los alumnos indican mayor número de magnitudes para poder utilizar en Educación Infantil, salvo los que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004, que indican el mismo número.

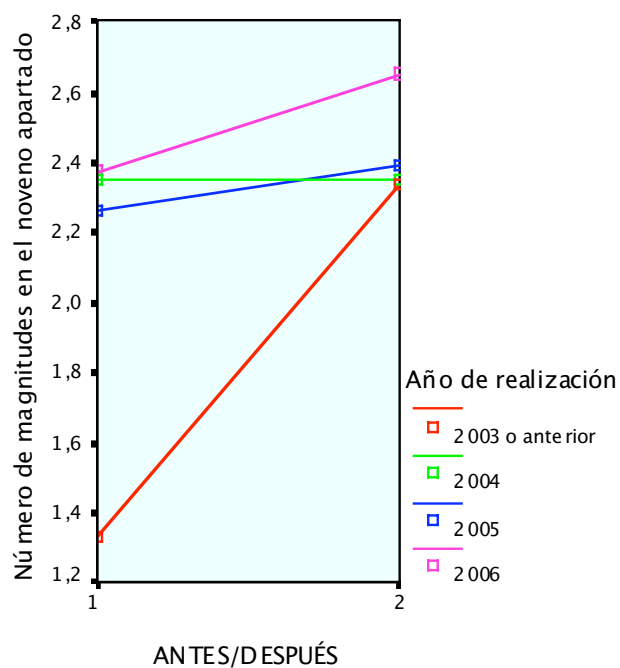


**Figura 588: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que indican mayor número de magnitudes para utilizar con los niños de Educación Infantil son los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006, y los que dicen menor número de magnitudes son los del curso 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Se pasa a analizar si son o no significativas las diferencias en cuanto al “número de magnitudes” indicadas por los alumnos para utilizar con los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, y teniendo en cuenta “el curso” en que están matriculados. En ninguno de los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas los niveles críticos asociados son menores que 0.05, luego se tiene que concluir que el número de magnitudes no depende del “curso” en el que estén matriculados los alumnos.

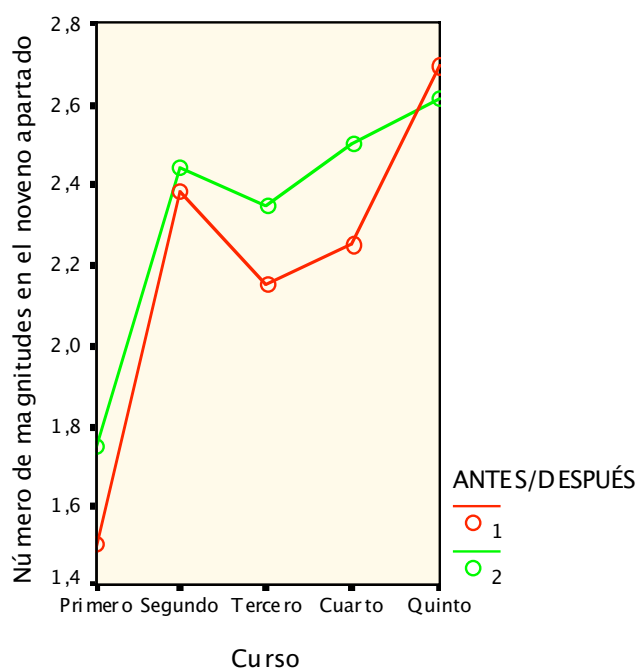


**Figura 589: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura evidencia que, después del estudio del tema y de las técnicas, casi todos los alumnos dicen mayor número de magnitudes para poder trabajar con los niños de Educación Infantil, excepto los que estaban matriculados en quinto. Tanto antes como después de dicho estudio, los alumnos que dicen mayor número de magnitudes son los que

estaban matriculados en quinto, y los que dicen menos son los de primero.

## Edad

Se elige como factor inter-sujeto “la edad” y se estudia si hay diferencias significativas dentro de cada edad y entre las distintas edades con respecto al “número de magnitudes” que dan los entrevistados para trabajar con los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En este caso se observa que en todos los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados da  $p=0.176>0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada edad, y  $p=0.040<0.05$  cuando se analizan entre las distintas edades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Se puede afirmar, por tanto, que no existen diferencias significativas en “el número de magnitudes” que indican, dentro de cada edad, pero sí existen diferencias significativas entre las distintas edades.

Para comparar las distintas edades se elige Post hoc; el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F y permite controlar la tasa de error para el conjunto total de comparaciones que es posible diseñar con las diferentes medias de las edades (una con otra, una con todas las demás, dos con dos, etc.). En este caso se observa que todos los niveles críticos dan mayores que 0.05; esto quiere decir que este estadístico no ha encontrado diferencias significativas entre el número de magnitudes que dan los alumnos de las distintas edades.

Se trabaja con las pruebas no paramétricas para ver si se encuentran diferencias significativas entre las distintas edades. La razón de hacer el estudio mediante las pruebas no paramétricas es porque, como ya hemos comentado, no necesitan establecer supuestos exigentes sobre las poblaciones de donde se extraen las muestras, y consideramos que nos encontramos en esa situación.

Ahora se utilizan las pruebas no paramétricas de Krukal-Wallis para varias muestras independientes. Los niveles críticos que resultan son  $p=0.079>0.05$  para las respuestas que dieron antes del estudio del tema y de las técnicas y  $p=0.951>0.05$  para las respuestas que dieron después, luego se puede decir que no existen diferencias significativas

en el número de magnitudes que dieron antes del citado estudio ni para las que dieron después.

Con objeto de encontrar entre qué submuestras de alumnos hay diferencias significativas se comparan por pares las distintas edades; para ello se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: los alumnos de 19 y los de 20 años, los de 19 y los de 21, etc., hasta agotar todos los pares. En la tabla siguiente se destacan sólo aquellos casos en que hay diferencias significativas:

| Edades | Niveles críticos antes |
|--------|------------------------|
| 19—27  | $p=0.037<0.05$         |
| 20—27  | $p=0.016<0.05$         |
| 21—27  | $p=0.012<0.05$         |
| 22—27  | $p=0.003<0.05$         |
| 23—27  | $p=0.006<0.05$         |

**Tabla 151: Probabilidades de error en la significación de “número de magnitudes”, antes o después, por “edad”. Pruebas no paramétricas.**

Todos los demás niveles de significación son mayores que 0.05, luego sólo hay diferencias significativas entre las parejas que hemos destacado. Se puede destacar que entre los alumnos de 26 y los de 27 años la diferencia está muy próxima a ser significativa, pues  $p=0.054>0.05$ .

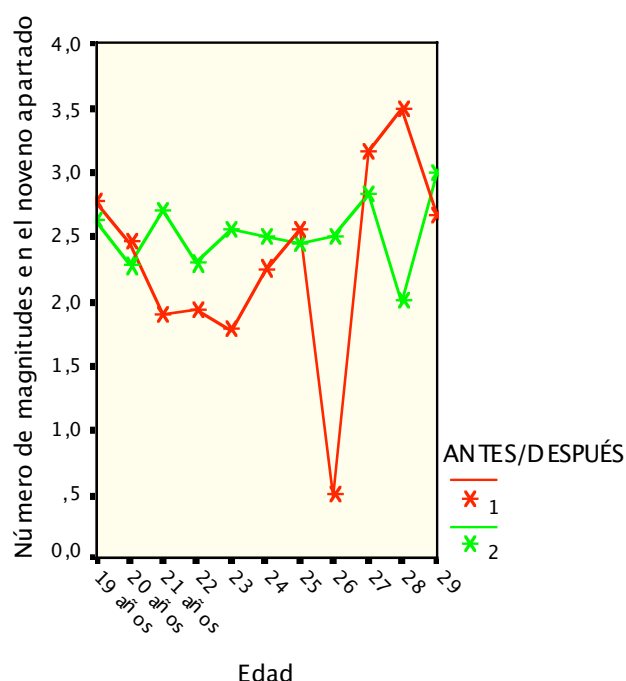


**Figura 590: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.**

En la figura adjunta se observa que los alumnos que tenían 21, 22, 23, 24, 26 ó 29 años en el momento en que se les plantearon estas preguntas, después del estudio del tema y de las técnicas, dicen mayor número de magnitudes para poder trabajar con niños de Educación Infantil; los demás dicen menor número.

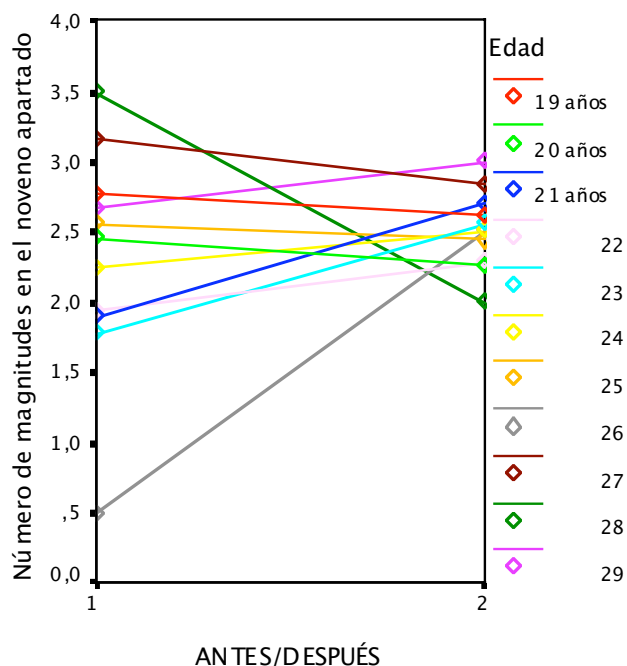


**Figura 591: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.**

Aunque en la figura anterior quedaba claro cuáles eran los valores máximos y mínimos, se toma esta figura para ver cómo quedan las distintas submuestras que origina “la edad”. Los alumnos que dicen más magnitudes, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que tenían 28 años, y después, los de 29 años; y los alumnos que dicen menos magnitudes, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que tenían 26 años, y después los de 28 años.

## Especialidad

Se continúa trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas para estudiar si “la especialidad” influye en “el número de magnitudes” que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema. Se ve en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo que los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se tiene que afirmar que “el número de magnitudes” que dicen los alumnos no depende de “la especialidad” en que estuvieran matriculados.



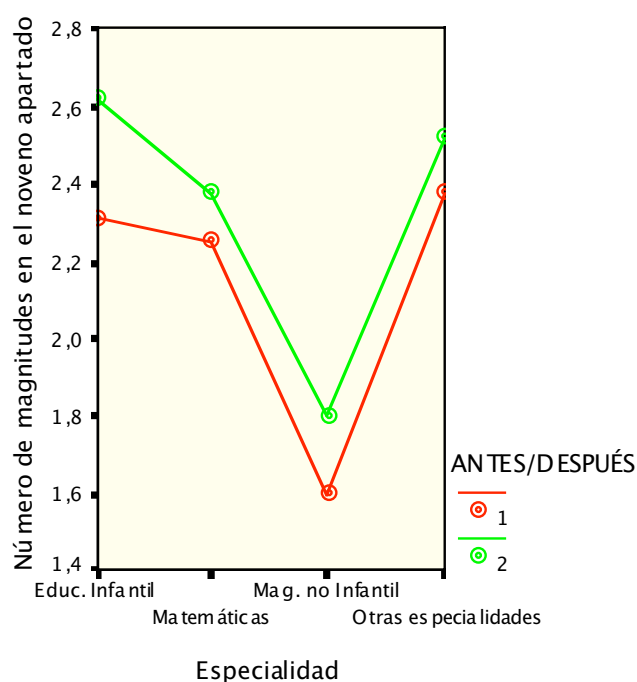


**Figura 592: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Todos los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, dicen mayor número de magnitudes útiles para poder trabajar con niños de Educación Infantil, lo vemos en la figura adjunta.

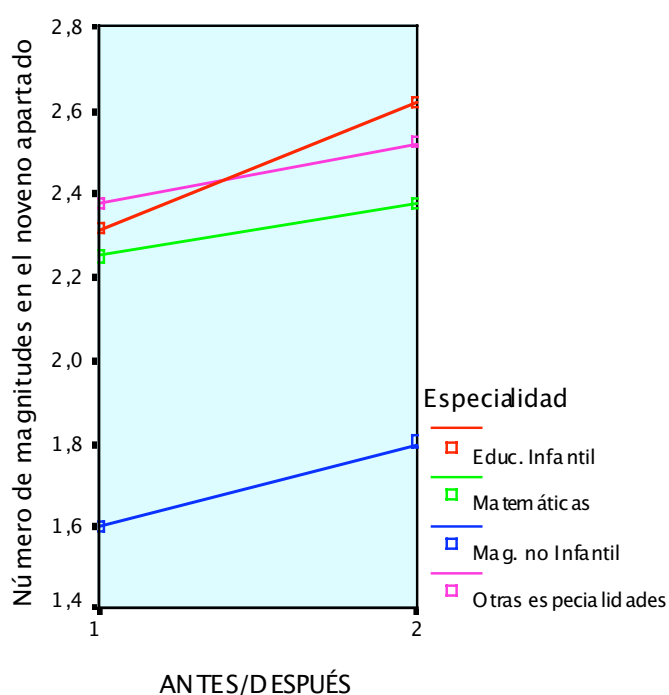


**Figura 593: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dicen más magnitudes son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, y los que dicen menos son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil. Después de dicho estudio, los alumnos que dicen menos magnitudes siguen siendo los mismos, y los que dicen más son los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil.

## Bachillerato

Se pasa a estudiar si influye “el bachillerato” cursado en “el número de magnitudes” que dicen los alumnos que se pueden trabajar con los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los distintos estadísticos que proporciona tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego parece ser que “el número de magnitudes” que dicen los alumnos en ambos momentos no depende del “bachillerato” que hubieran cursado.

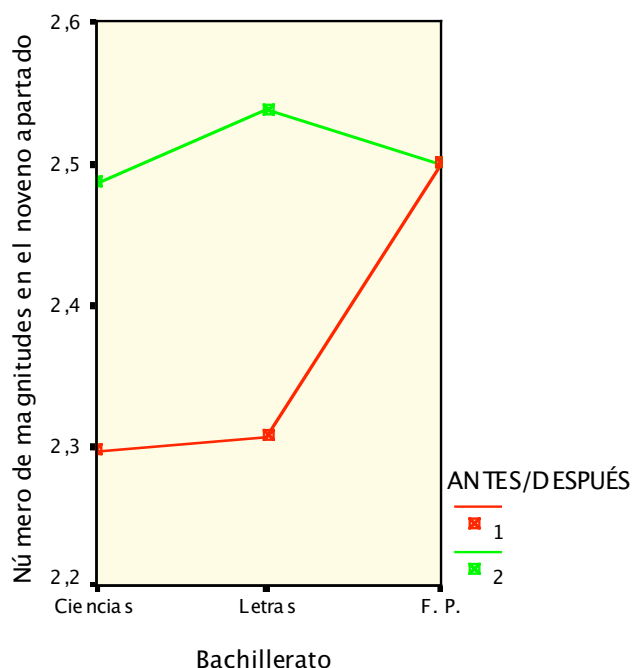


**Figura 594: Estimación de “número de magnitudes en el noveno apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura apunta que, después del estudio del tema y de las técnicas, la mayoría de los alumnos dicen más ejemplos de magnitudes que se pueden trabajar con los niños de Educación Infantil, sólo los que cursaron Formación Profesional dicen el mismo número.

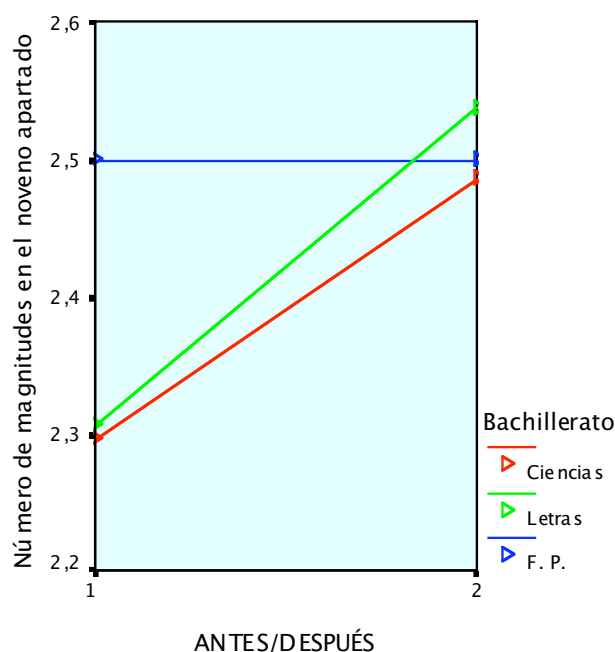


**Figura 595: Ampliación de la comparación: "número de magnitudes en el noveno apartado" antes/después, por "bachillerato".**

Con esta figura se completa y aclara la información que aportaba la anterior. Los alumnos que dicen mayor número de magnitudes, antes del estudio del tema y de las técnicas son los de Formación Profesional, y después los de Letras. Los alumnos que dicen menor número de magnitudes, tanto antes como después del citado estudio son los de Ciencias.

En la tabla que viene a continuación se tienen todos los niveles críticos obtenidos utilizando como variables intra-sujeto "número de magnitudes en el noveno apartado", antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                   | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|---------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>NÚMERO DE MAGNITUDES en el noveno apartado</b> | Antes / después: $p=0.109$ |                                                   | 581    |
|                                                   | Antes / después: $p=0.127$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.590$       | 582    |
|                                                   | Antes / después: $p=0.080$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.533$          | 583-4  |
|                                                   | Antes / después: $p=0.467$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.956$        | 585    |
|                                                   | Antes / después: $p=0.176$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.040^*$       | 586-7  |
|                                                   | Antes / después: $p=0.290$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.944$ | 588-9  |
|                                                   | Antes / después: $p=0.647$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.967$ | 590-1  |

**Tabla 152: "Número de magnitudes en el noveno apartado".**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.11.2. Número de unidades

Se pasa a estudiar “el número de unidades” que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, que se pueden trabajar con los niños de Educación Infantil, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las variables *número de unidades en el noveno apartado*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema en el número de unidades que dicen los alumnos, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.224>0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también resultan ser  $p=0.224>0.05$ , se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “el número de unidades” que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.224>0.05$ , luego se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que se obtuvo antes: a partir de 3 unidades el porcentaje aumenta después del estudio del tema y de las técnicas, lo cual muestra que su influencia se nota a la hora de decir unidades de medida que se puedan trabajar con niños de Educación Infantil.

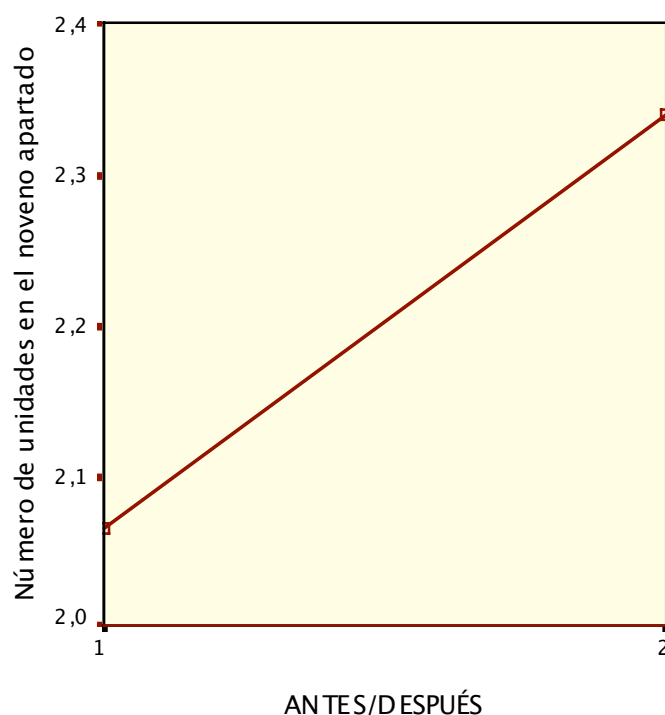


**Figura 596: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después.**

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “el número de unidades” que dicen los alumnos que se pueden trabajar con los niños de Educación Infantil.

## Género

Se pasa a estudiar si “el número de unidades” que dicen los alumnos que se pueden trabajar con los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema, depende del “género”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas, y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F que se obtienen son  $p=0.323 > 0.05$  cuando se considera si hay diferencias dentro del mismo género, y  $p=0.048 < 0.05$  cuando se considera si hay diferencia entre los distintos géneros. Se puede afirmar, por tanto, que existen diferencias significativas entre “el número de unidades” que dicen los alumnos, antes y después del estudio del tema, entre los grupos de alumnos de distinto género, pero no existe diferencia entre los del mismo género.

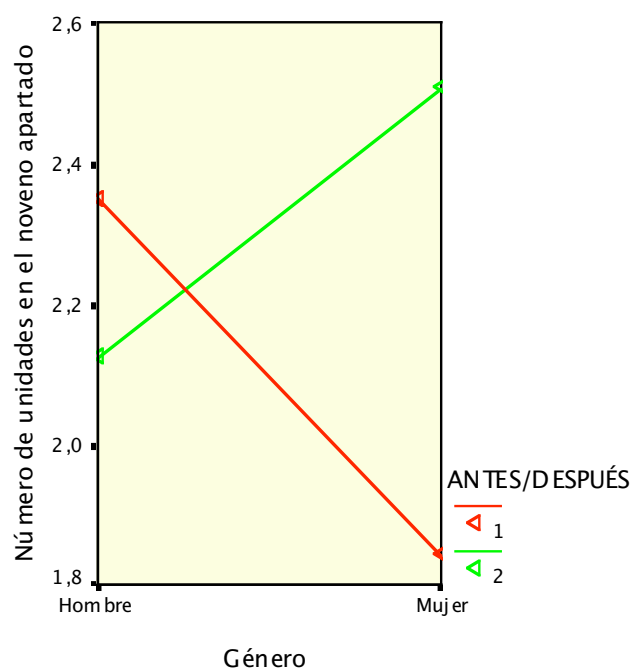


**Figura 597: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “género”.**

En la figura adjunta se puede observar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres dan mayor número de unidades de medida que los hombres, después la situación se invierte. También se ve que después del citado estudio, disminuye el número de unidades que dicen los hombres, sin embargo, aumenta el que dicen las mujeres.

### Año de realización

Se estudia, con el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el número de unidades” que dicen los alumnos que se pueden trabajar con los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende del “año en que realizaron las encuestas”. Se observa que ninguno de los estadísticos que proporciona el modelo dan niveles críticos asociados menores que 0.05, luego “el número de unidades” que dicen los alumnos no depende del “año de realización”.

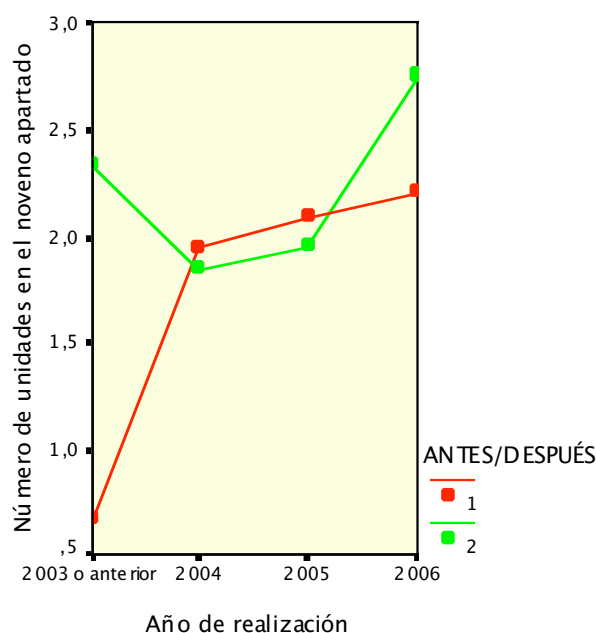


**Figura 598: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas aumenta “el número de unidades” que dicen los alumnos según van pasando los años, luego el valor mínimo es de los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y el máximo de los de 2005/2006. Después del mencionado estudio, los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006 siguen siendo los que dicen mayor número de unidades, y los que dicen menor número son los que las respondieron en 2003/2004. Después del citado estudio, aumenta “el número de unidades” que dicen los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores y en 2005/2006, para los demás disminuye.

## Curso

Al estudiar la repercusión que pueda tener “el curso” en “el número de unidades” que indican los alumnos para poderlas usar con los niños de Educación Infantil, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, se ve que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados en el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05, luego no parece tener repercusión “el curso” en que estén matriculados los alumnos en “el número de unidades” que comentan.

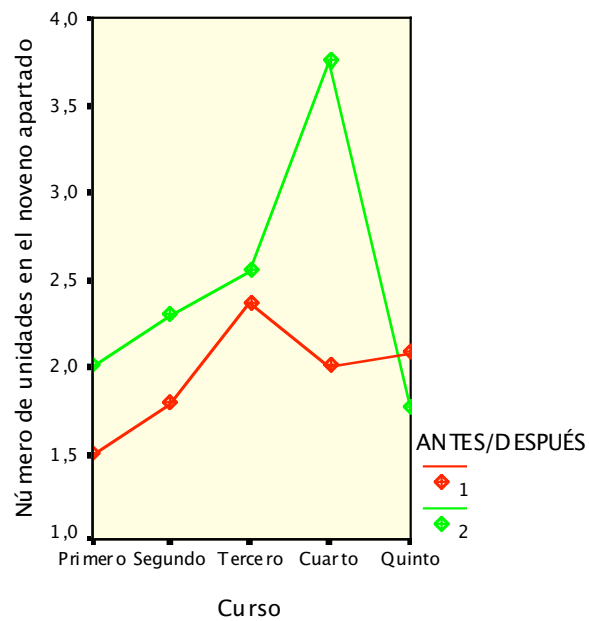


**Figura 599: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, casi todos los alumnos dicen mayor número de unidades, excepto los que cursaban quinto, que dicen menos.

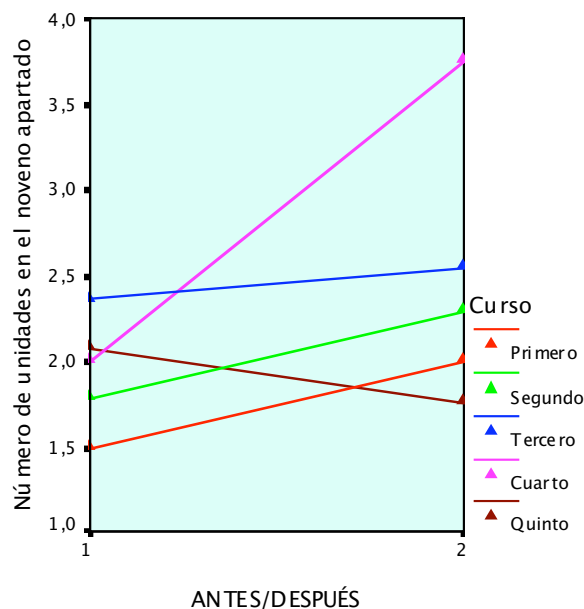


**Figura 600: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “curso”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dicen mayor número de unidades son los de tercero, y los que dicen menor número, los de primero. Después del citado estudio, los alumnos



que dicen más unidades de medida son los de cuarto y los que dicen menos son los de quinto.

## Edad

Se considera si “la edad” tiene alguna repercusión sobre “el número de unidades” de medida que dicen los alumnos que se pueden utilizar en Educación Infantil, antes y después del estudio del tema. Se observa que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos proporcionados por el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05; esto quiere decir que no parece tener ninguna repercusión “la edad” que tengan los alumnos en el número “de unidades” que comentan.

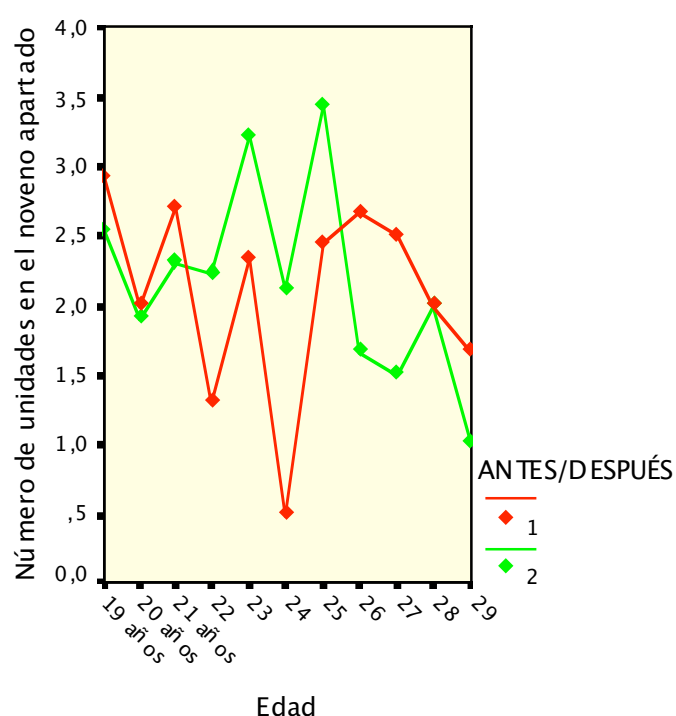


**Figura 601: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.**

Se observa que hay gran variedad en “el número de unidades” que dicen los alumnos que pueden servir para trabajar con los niños de Educación Infantil. Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta dicho número para los alumnos que tenían 22, 23, 24 ó 25 años, se mantiene para los de 20 ó 28 años, y disminuye para el resto.

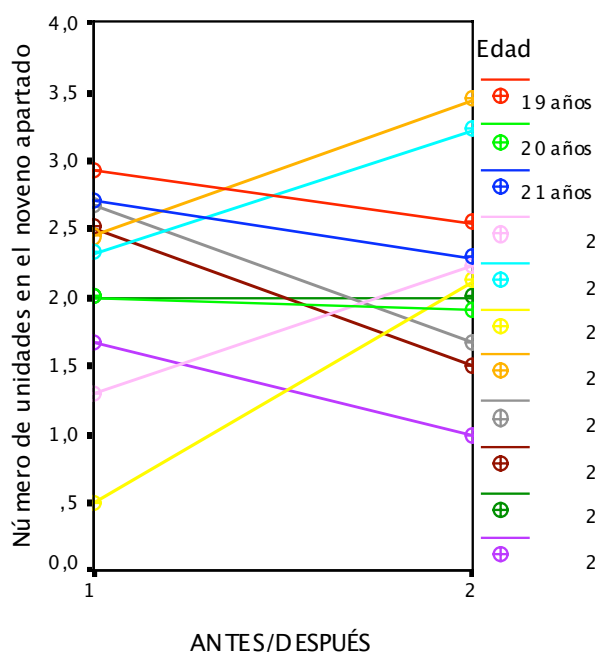


Figura 602: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “edad”.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dicen el mayor número de unidades son los que tenían 19 años, y los que dicen menor número son los que tenían 24 años. Después del citado estudio, pasan a ser los de 25 años los que dicen más unidades, y los de 29 los que dicen menos.

## Especialidad

Se considera ahora si “el número de unidades” de medida que dan los alumnos, para que las puedan utilizar los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende de “la especialidad” que estén cursando. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados que se obtienen son mayores que 0.05, cuando se considera la influencia de “la especialidad”, tanto dentro de la misma especialidad como entre las distintas especialidades, y los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F resultan ser también mayores que 0.05. Por tanto, se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “el número de unidades” de medida que dan los alumnos, antes y después de dicho estudio.

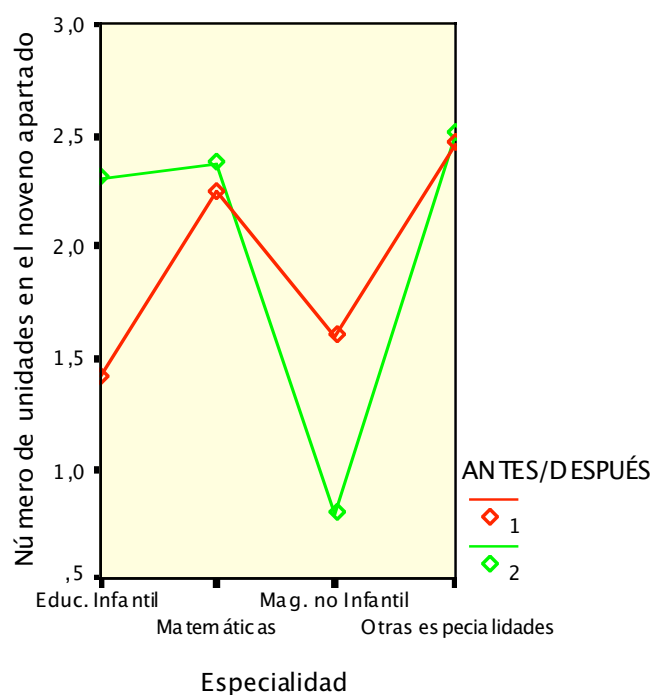


**Figura 603: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Casi todos los alumnos dicen mayor “número de unidades” después del estudio del tema y de las técnicas, salvo los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

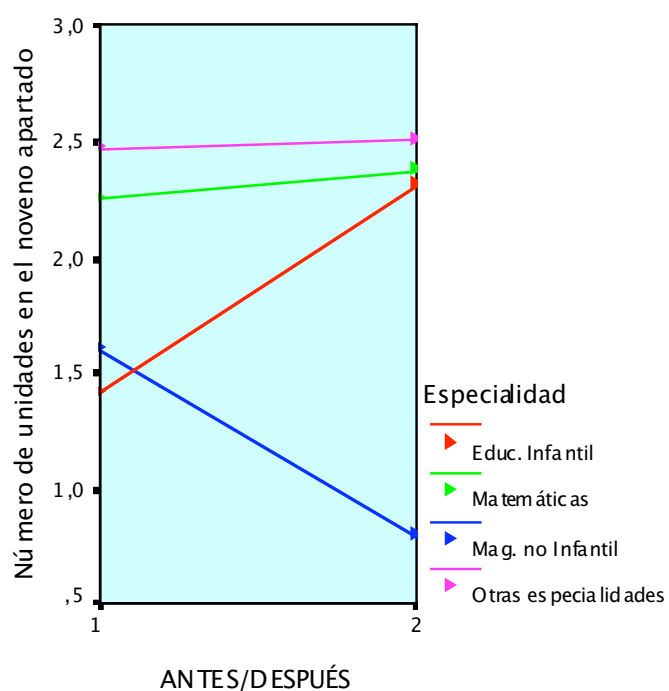


**Figura 604: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que dicen más unidades de medida son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas. Los que dicen menor “número de unidades” son: antes del citado estudio, los de Educación Infantil, y después los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

En el modelo lineal general de medidas repetidas se estudia si influye “el bachillerato”, tomado como variable inter-sujeto, en “el número de unidades” que dicen los alumnos para poder usarlas con los niños de Educación Infantil. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “el número de unidades” que dicen los alumnos no depende del “bachillerato” que hubieran cursado.

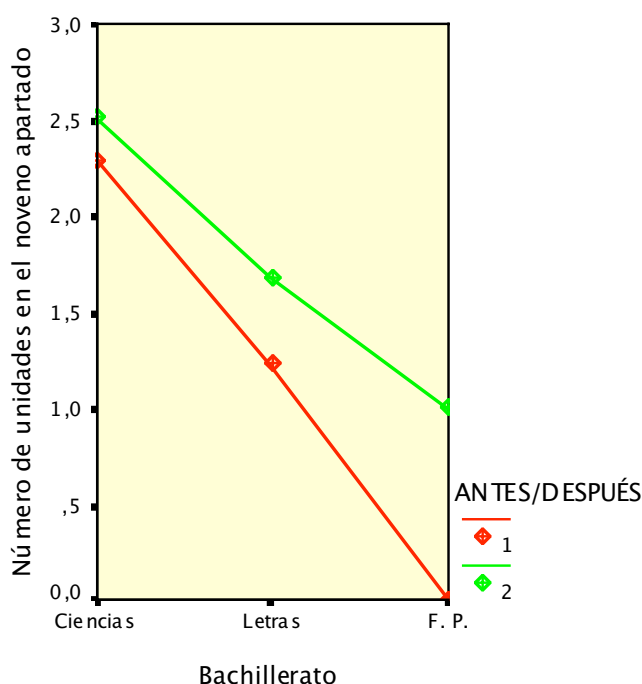


**Figura 605: Estimación de “número de unidades en el noveno apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

En este caso es palpable el lugar que ocupan cada una de las submuestras de alumnos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. También se observa en la figura adjunta que después del citado estudio todos los alumnos dicen mayor número de unidades de medida.

Se recogen, en la tabla siguiente, todos los niveles críticos obtenidos al trabajar las variables “número de unidades en el noveno apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| NÚMERO<br>DE<br>UNIDADES?<br>en el noveno<br>apartado | Momento                    | Interacción                                      | Figura  |
|-------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|---------|
|                                                       | Antes / después: $p=0.224$ |                                                  | 592     |
|                                                       | Antes / después: $p=0.323$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.048^*$     | 593     |
|                                                       | Antes / después: $p=0.172$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.341$          | 594     |
|                                                       | Antes / después: $p=0.136$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.531$        | 595-6   |
|                                                       | Antes / después: $p=0.760$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.221$         | 597-8   |
|                                                       | Antes / después: $p=0.842$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.229$ | 599-600 |
|                                                       | Antes / después: $p=0.314$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.837$ | 601     |

**Tabla 153: “Número de unidades en el noveno apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.11.3. Exactitud en los razonamientos

Se considera ahora “la exactitud” con que han respondido los alumnos a las preguntas planteadas en este apartado. Se estudia dicha exactitud mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, para ello se toman las variables *exactitud en el noveno apartado*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene “la exactitud” en las respuestas de los alumnos, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también son  $p=0.000<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre la exactitud de los razonamientos de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.000<0.05$ , luego no se puede aceptar esta hipótesis y se concluye que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: antes del estudio del tema y de las técnicas, el 80% de los alumnos no dice nada, no dice casi nada o dice algo con algunos fallos. Después, el 57% dice algo que está bien o responde perfectamente. Esto indica que el

conocimiento del tema y de las técnicas ha influido significativamente a la hora de responder a las cuestiones que les planteamos.

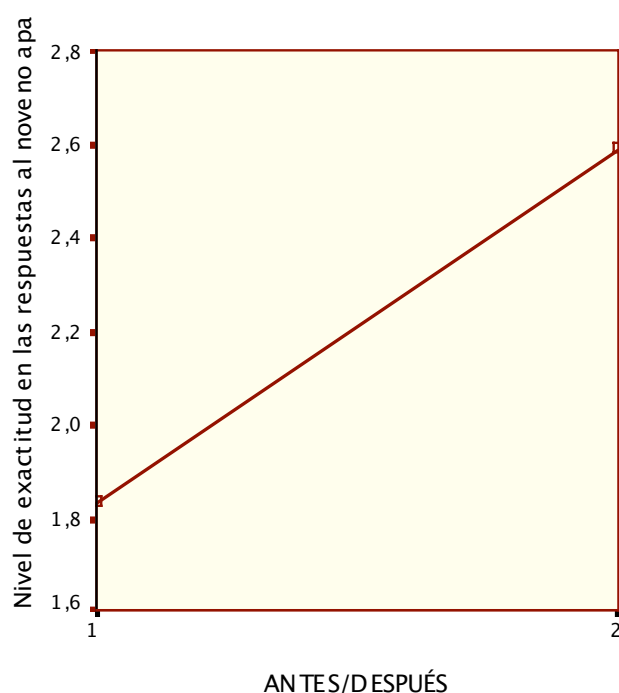


**Figura 606: Estimación de “exactitud en el noveno apartado” antes/después.**

Como ya se ha indicado al hacer el estudio de frecuencias, para valorar la exactitud en los razonamientos consideramos cinco niveles: no dice nada, no dice casi nada, dice algo con fallos, lo que dice está bien y responde perfectamente, valorados del 0 al 4; luego al aumentar el valor, aumenta la exactitud. La figura señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la exactitud con que responden los alumnos a todas las cuestiones que se plantean en este apartado.

## Género

Se considera ahora si “la exactitud” a las respuestas de este apartado, antes y después del estudio del tema, depende del “género”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la influencia del “género” dentro del mismo género, y  $p=0.623>0.05$  cuando se considera la influencia entre los géneros, y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan los mismos resultados. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en “la exactitud” de las respuestas, antes y después del

estudio del tema, dentro del mismo género, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

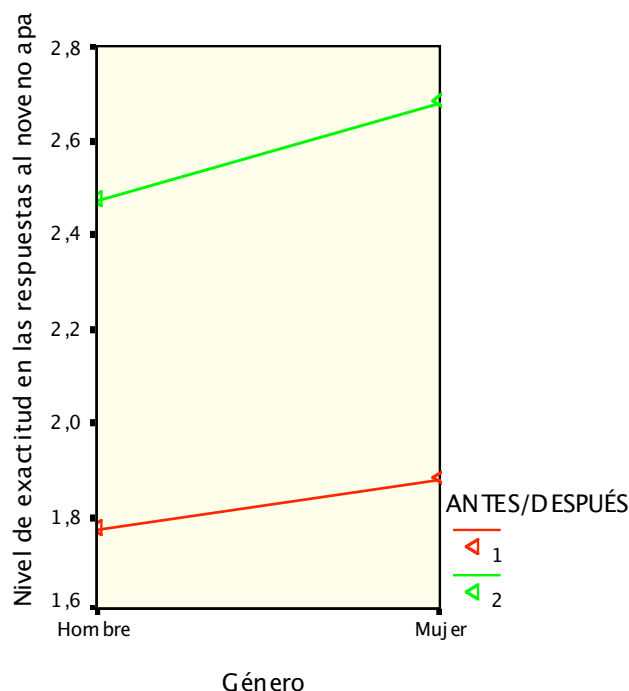


**Figura 607: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “género”.**

Se ve muy bien en la figura que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la exactitud” en las respuestas en ambos géneros y al mismo nivel. Tanto antes como después del citado estudio, las mujeres dan sus respuestas con mayor exactitud que los hombres.

### Año de realización

Se analiza si “el año de realización” explica “la exactitud” con que dan las respuestas los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Los niveles críticos asociados a los estadísticos son  $p=0.000<0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo año de realización. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la exactitud” con que dan las respuestas los alumnos antes y después de dicho estudio dentro del mismo el año de realización. Entre los distintos años de realización de la encuesta se obtiene  $p=0.369>0.05$ , luego no hay diferencia significativa en “la exactitud” de las respuestas, entre los distintos años de realización de las encuestas.

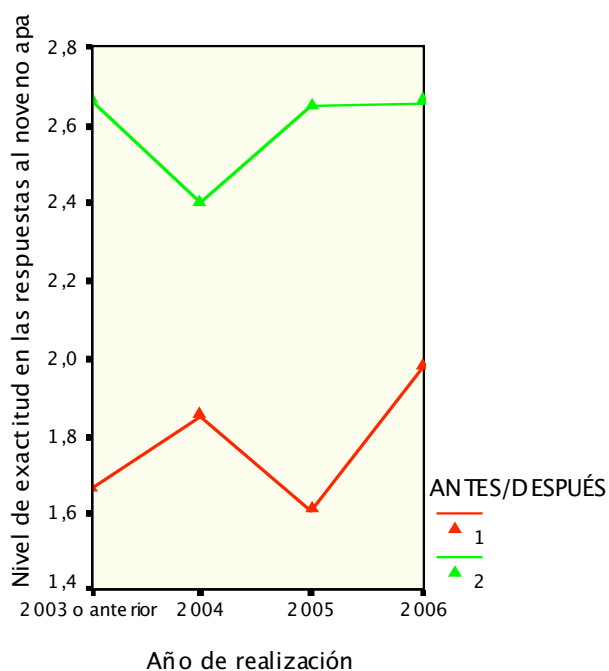


**Figura 608: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Es bastante evidente que, después del estudio del tema y de las técnicas, para todos los alumnos aumenta la exactitud con que dan las respuestas a las preguntas que se les plantean en este apartado.

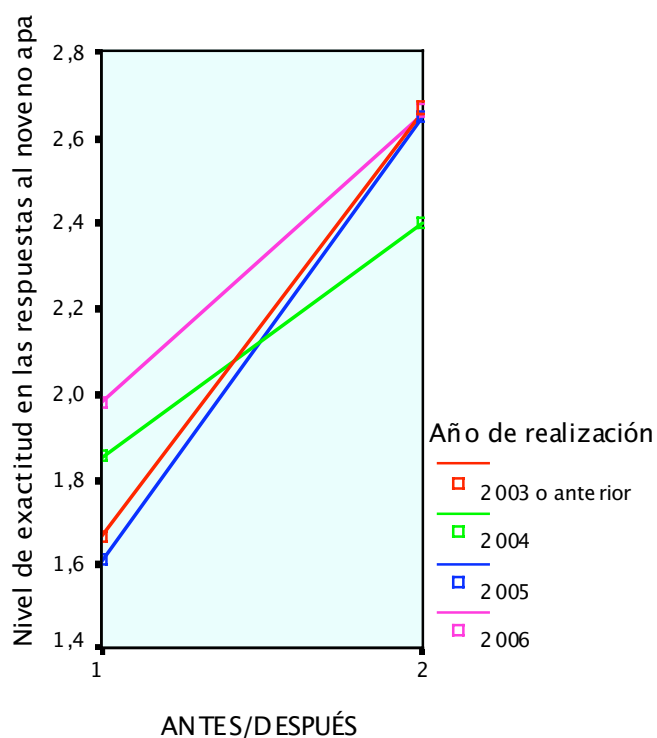


**Figura 609: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “año de realización”.**



Señala esta figura que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que responden con mayor exactitud son los que rellenaron las encuestas en el curso 2005/2006, y los menos exactos son: antes del citado estudio, los que respondieron en 2004/2005, y después, los que lo hicieron en 2003/2004.

## Curso

Se elige como factor inter-sujeto “el curso” en que estuvieran matriculados los alumnos y se estudia si hay deferencias significativas en “la exactitud” con que responden, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro de cada curso y entre los distintos cursos. En este caso se observa que en todos los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados da  $p=0.000<0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada curso, y  $p=0.845>0.05$  cuando se analizan entre los distintos cursos. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Se tiene que afirmar, por tanto, que existen diferencias muy significativas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en “la exactitud” con que responden en este apartado, dentro de cada uno de los cursos, pero no existen diferencias significativas entre los distintos cursos.

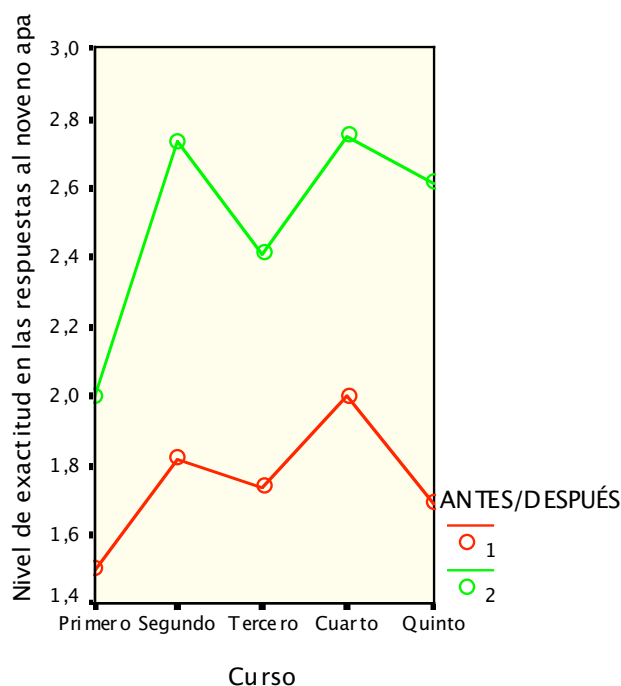


**Figura 610: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la exactitud” con que los alumnos dan las respuestas en este apartado.

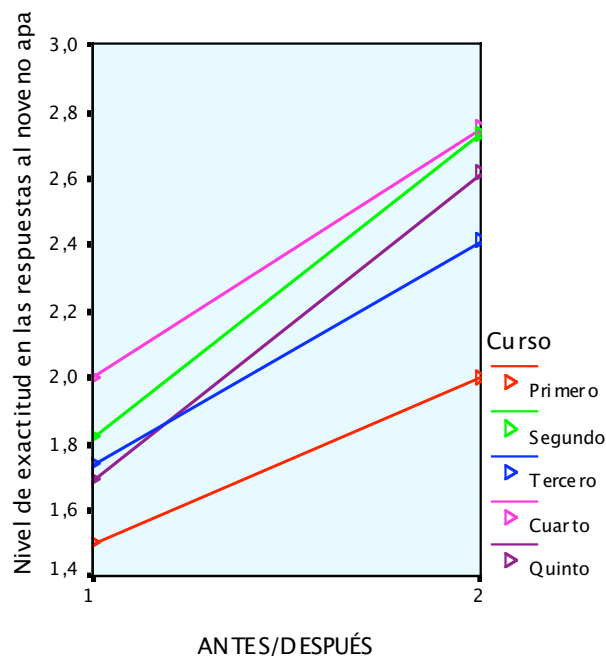


**Figura 611: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “curso”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que responden con mayor exactitud en este apartado son los que estaban estudiando cuarto, a los que, después de dicho estudio, se suman los de segundo, y los que son menos exactos en las respuestas son los de primero.

## Edad

Se estudia ahora si “la exactitud” en las respuestas a las preguntas de este apartado depende de “la edad”. En el resultado obtenido con el modelo lineal general de medidas repetidas vemos que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos multivariados son  $p=0.000<0.05$  dentro de la misma edad, pero  $p=0.162>0.05$  entre las distintas edades, y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también les ocurre lo mismo. Se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la exactitud” con que dan las respuestas los alumnos, antes y después del estudio del tema, dentro de la misma edad, pero no existen diferencias entre distintas edades.

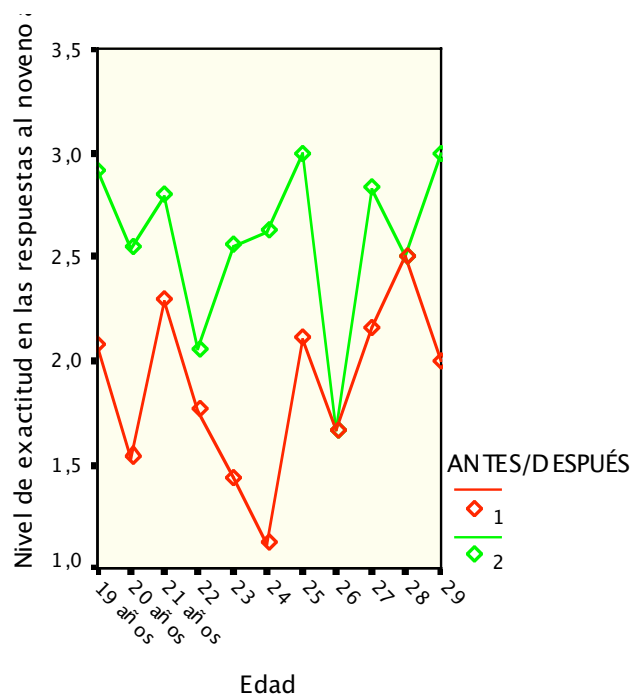


Figura 612: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “edad”.

En casi todas las edades se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la exactitud” con que responden a las preguntas planteadas en este apartado, excepto para los alumnos que tenían 26 ó 28 años que se mantiene dicha exactitud.

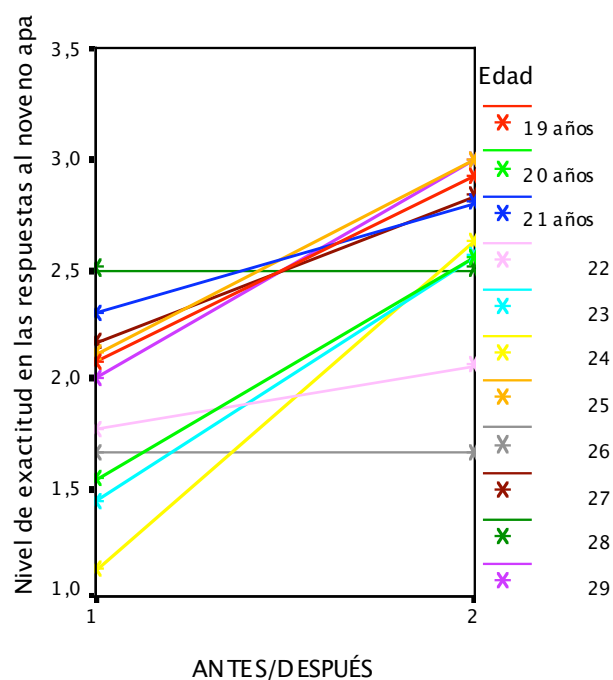


Figura 613: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “edad”.

Esta figura señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que responden con mayor exactitud a las preguntas de este apartado son los que tenían 28 años, y los que responden con menor exactitud son los de 34 años. Después del citado estudio, la máxima exactitud en las respuestas la consiguen los alumnos que tenían 25 ó 29 años, y el mínimo es para los de 26 años.

## Especialidad

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “la especialidad” explica “la exactitud” en las respuestas que dan los alumnos en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se obtienen los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo  $p=0.002<0.05$  cuando se considera la significación dentro de la misma especialidad. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la exactitud” en las respuestas de los alumnos, antes y después de dicho estudio, dentro de la misma especialidad. Y entre especialidades distintas se obtiene  $p=0.053>0.05$ , luego no hay diferencia significativa en “la exactitud” de las respuestas que dan las distintas especialidades.

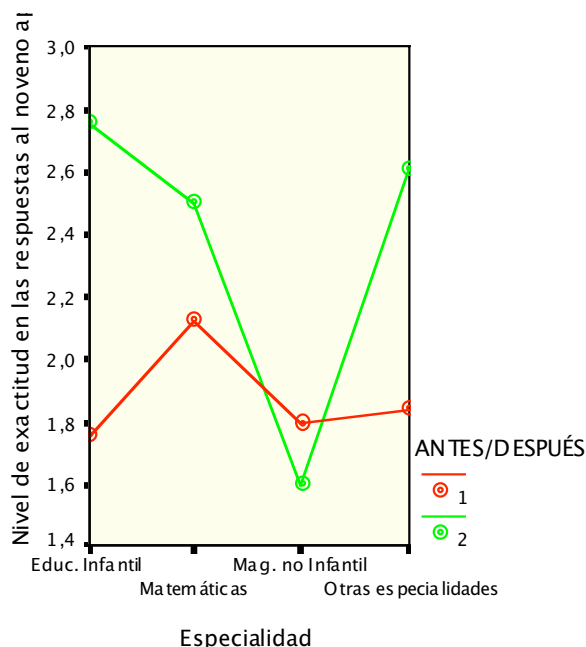


**Figura 614: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Los de Magisterio de especialidades distintas a Educación Infantil representan el primer caso y el único de disminución de “la exactitud” en

las respuestas que se da en este apartado, para todos los demás aumenta dicha exactitud.

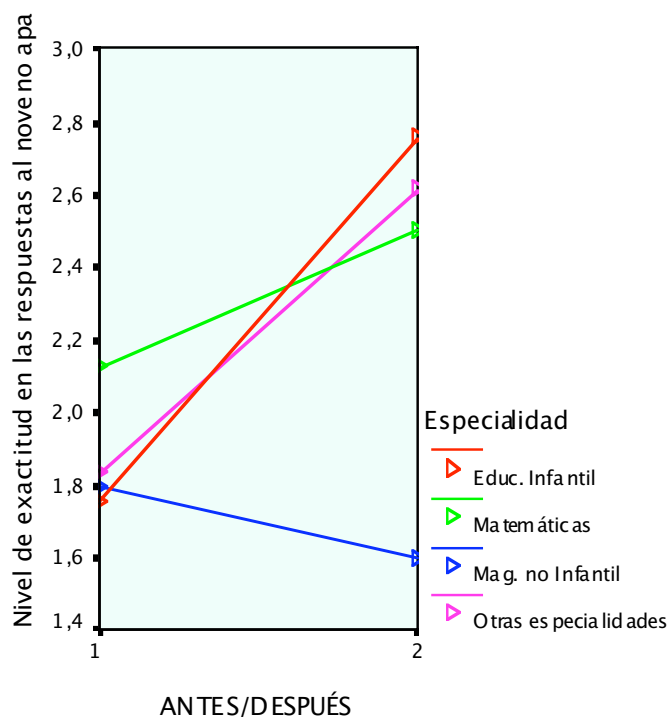


**Figura 615: Ampliación de la comparación: “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Es curioso lo que les ocurre a los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil que, antes del estudio del tema y de las técnicas, eran los que respondían con menor exactitud y después de dicho estudio pasan a ser los que responden con mayor exactitud. Antes del citado estudio los alumnos que responden con mayor exactitud son los de la licenciatura de Matemáticas. Y después de dicho estudio los que responden con menor exactitud son los de Magisterio de especialidades distintas a Educación Infantil.

## Bachillerato

Se analiza, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el bachillerato” cursado por los alumnos explica “la exactitud” en las respuestas a las preguntas de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Los niveles críticos asociados a los estadísticos son  $p=0.033 < 0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo bachillerato. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias significativas entre “la exactitud” de las respuestas dadas por los alumnos, antes y después del citado estudio, dentro del mismo bachillerato. Entre bachilleratos distintos se obtiene  $p=0.473 > 0.05$ ,

luego no hay diferencia significativa entre los distintos bachilleratos en “la exactitud” en las respuestas.

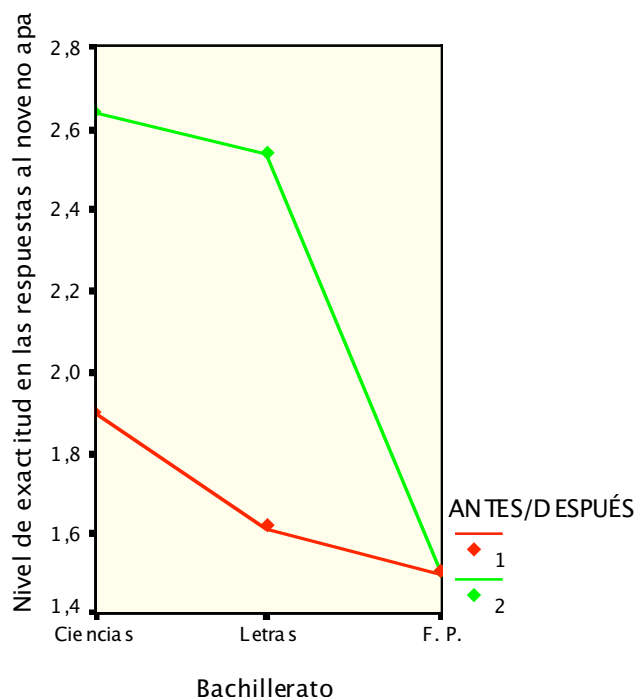


Figura 616: Estimación de “exactitud en las respuestas al noveno apartado” antes/después, por “bachillerato”.

La figura adjunta apunta que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la exactitud” en las respuestas que dan en este apartado los alumnos que proceden del bachillerato de Ciencias y de Letras, los demás son igual de exactos. Tanto antes como después del mencionado estudio los alumnos más exactos en las respuestas son los de Ciencias y los menos exactos los de Formación Profesional.

Para recopilar todos los niveles críticos relativos a las variables “exactitud en las respuestas al noveno apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se tiene la tabla que sigue.

|                                        | Momento                         | Interacción                                      | Figura |
|----------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>EXACTITUD en el noveno apartado</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                  | 602    |
|                                        | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.623$       | 603    |
|                                        | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.369$          | 604-5  |
|                                        | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.845$        | 606-7  |
|                                        | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.162$         | 608-9  |
|                                        | Antes / después: $p=0.002^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.053$ | 610-1  |
|                                        | Antes / después: $p=0.033^{*}$  | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.473$ | 612    |

Tabla 154: “Exactitud en el noveno apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

#### 5.3.11.4. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado

Se continúa recogiendo de forma análoga a como se ha hecho hasta ahora la variación experimentada, después del estudio del tema y de las técnicas, en las distintas variables intra-sujeto que hemos analizado anteriormente, por cada una de las submuestras originadas por las variables inter-sujeto. Además, compararemos cómo quedan cada una de las clases consideradas según las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, teniendo en cuenta ambos momentos.

### Variables intra-sujeto

En la tabla siguiente se va a ir indicando si, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene, aumenta o disminuye cada una de las variables intra-sujeto que se han considerado en este apartado. Como las tres variables intra-sujeto que se tienen conllevan una mayor facilidad para razonar qué magnitudes se pueden empezar a trabajar en Educación Infantil, cuándo, con qué unidades y por qué, no es necesario utilizar más de un color para que quede claro el estudio que se hace.

| Variable intra-sujeto | Variación experimentada |
|-----------------------|-------------------------|
| Número de magnitudes  | Aumenta                 |
| Número de unidades    | Aumenta                 |
| Exactitud             | Aumenta                 |

**Tabla 155: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del noveno apartado.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan todas las variables intra-sujeto que figuran en este apartado, por tanto, se puede pensar que el estudio del tema les ha servido bastante a los alumnos ya que se les ocurren más magnitudes, piensan que se pueden medir con más unidades y son más exactos a la hora de responder a las cuestiones planteadas en este apartado.

### Género

Se recogen en las tablas que vienen a continuación las variaciones experimentadas por las distintas variables intra-sujeto en las dos submuestras que determina la variable inter-sujeto “género”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En la tabla siguiente se indica cuál es la variación experimentada por las dos submuestras de la variable “género” en cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| Número de magnitudes  | Aumenta              | Aumenta              |
| Número de unidades    | Disminuye            | Aumenta              |
| Exactitud             | Aumenta              | Aumenta              |

**Tabla 156: Variación experimentada por la variable “género” en el noveno apartado, antes/después.**

Está claro que aumentan casi todas las variables intra-sujeto de este apartado en las dos submuestras que determina la variable “género”; sólo en los hombres hay una disminución en “el número de unidades”.

## Máximos

En la tabla siguiente se destaca qué grupo de alumnos de los dos con que cuenta la variable “género” alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes  | Hombres        | Hombres          |
| Número de unidades    | Hombres        | Mujeres          |
| Exactitud             | Mujeres        | Mujeres          |

**Tabla 157: Máximos de la variable “género” en el noveno apartado, antes/después.**

Se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los hombres los que tienen mayor número de máximos en las variables intra-sujeto que se tienen en este apartado; después, son las mujeres.

## Año de realización

Se continúa viendo las variaciones en cada una de las submuestras de la variable inter-sujeto “año de realización”, y también los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, de las distintas variables intra-sujeto de este apartado.



## Variaciones

La tabla siguiente acumula las variaciones de las variables intra-sujeto de este apartado, en las submuestras de la variable inter-sujeto “año de realización”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Variación en 2003 ó anteriores | Variación en 2004 | Variación en 2005 | Variación en 2006 |
|-----------------------|--------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Número de magnitudes  | Aumenta                        | Se mantiene       | Aumenta           | Aumenta           |
| Número de unidades    | Aumenta                        | Disminuye         | Disminuye         | Aumenta           |
| Exactitud             | Aumenta                        | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |

**Tabla 158:** Variación experimentada por la variable “año de realización” en el noveno apartado, antes/después.

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto de este apartado; sólo hay dos disminuciones en “el número de unidades”, una en 2003/2004 y otra en 2004/2005.

## Máximos

En la tabla siguiente se destaca qué subconjunto de alumnos de la variable “año de realización” alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor              |
|-----------------------|----------------|-------------------------------|
| Número de magnitudes  | 2006           | 2006                          |
| Número de unidades    | 2006           | 2006                          |
| Exactitud             | 2006           | 2003 ó anteriores, 2005, 2006 |

**Tabla 159:** Máximos de la variable “año de realización” en el noveno apartado, antes/después.

Los máximos de las distintas variables intra-sujeto los consiguen los alumnos que respondieron las encuestas en 2005/2006, en ambos momentos.

## Mínimos

En la tabla siguiente se tiene ahora cuáles son los mínimos de las distintas variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor    | Después es menor         |
|-----------------------|-------------------|--------------------------|
| Número de magnitudes  | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores y 2004 |
| Número de unidades    | 2003 ó anteriores | 2004                     |
| Exactitud             | 2005              | 2004                     |

**Tabla 160:** Mínimos de la variable “año de realización” en el noveno apartado, antes/después.

La mayoría de los mínimos, antes del estudio del tema y de las técnicas, es de los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores; y después, de los del 2003/2004.

## Curso

Se seleccionan los valores que toman las distintas variables intra-sujeto de este apartado para tener en una sola tabla las variaciones que experimentan, después del estudio del tema y de las técnicas, en las submuestras de la variable inter-sujeto “curso”, y en otras dos tablas los máximos y los mínimos, en ambos momentos.

## Variaciones

En la tabla siguiente se tienen las variaciones de las variables intra-sujeto en las submuestras que origina la variable inter-sujeto “curso”, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Variación en primero | Variación en segundo | Variación en tercero | Variación en cuarto | Variación en quinto |
|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| Número de magnitudes  | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Disminuye           |
| Número de unidades    | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Disminuye           |
| Exactitud             | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta             |

**Tabla 161: Variación experimentada por la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.**

En todos los cursos hay aumentos en todas las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas, excepto en quinto. La variable que cuenta con aumentos en todos los cursos es la exactitud.

## Máximos

En la tabla siguiente se tienen los máximos de las distintas variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes  | Quinto         | Quinto           |
| Número de unidades    | Tercero        | Cuarto           |
| Exactitud             | Cuarto         | Segundo y cuarto |

**Tabla 162: Máximos de la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas los alumnos que consiguen los máximos son muy variados; después de dicho estudio el mayor número lo consiguen los alumnos de cuarto.

## Mínimos

En la tabla siguiente se indican las submuestras de alumnos que tienen los mínimos de las distintas variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes  | Primero        | Primero          |
| Número de unidades    | Primero        | Quinto           |
| Exactitud             | Primero        | Primero          |

Tabla 163: Mínimos de la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.

La mayoría de los mínimos de las variables intra-sujeto en ambos momentos, es de los alumnos de primero.

## Edad

En las tablas siguientes se aglutinan los máximos, los mínimos y las variaciones que experimentan las distintas variables intra-sujeto de este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas, en las submuestras de la variable inter-sujeto “edad”.

## Variaciones

La tabla siguiente recoge las variaciones, después del estudio del tema y de las técnicas, de las variables intra-sujeto de este apartado en las submuestras que determina la variable inter-sujeto “edad”.

| Variable intra-sujeto | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 23 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Número de magnitudes  | D       | D       | A       | A       | A       | A       | D       | A       | D       | D       | A       |
| Número de unidades    | D       | D       | D       | A       | A       | A       | A       | D       | D       | SM      | D       |
| Exactitud             | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | SM      | A       | SM      | A       |

Tabla 164: Variación experimentada por la variable “edad” en el noveno apartado, antes/después.

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto de este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas, siendo la variable que cuenta con aumentos en todos los cursos, la exactitud; y

los alumnos que consiguen aumentos en todas las variables, los de 22, 23 y 24 años.

## Máximos

La tabla que viene a continuación contiene los máximos de las distintas variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes  | 28 años        | 29 años          |
| Número de unidades    | 19 años        | 25 años          |
| Exactitud             | 28 años        | 25 y 29 años     |

Tabla 165: Máximos de la variable “edad” en el noveno apartado, antes/después.

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consiguen mayor número de máximos son los de 28 años; después de dicho estudio se los reparten entre los de 25 y los de 29 años.

## Mínimos

Se acumulan en la tabla siguiente los mínimos de las distintas variables intra-sujeto, en la variable inter-sujeto edad, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes  | 26 años        | 28 años          |
| Número de unidades    | 24 años        | 29 años          |
| Exactitud             | 24 años        | 26 años          |

Tabla 166: Mínimos de la variable “curso” en el noveno apartado, antes/después.

La mayoría de los mínimos de las variables intra-sujeto de este apartado, antes del estudio del tema y de las técnicas, es de los alumnos de 24 años; después no hay ningún grupo de alumnos que cuente con una mayoría de mínimos.

## Especialidad

Se pasa a destacar, en las tablas siguientes, las variaciones, después del estudio del tema y de las técnicas, de las variables intra-sujeto de este apartado, en cada una de las submuestras de la variable inter-sujeto “especialidad”, y también los máximos y los mínimos, en ambos momentos.

## Variaciones

La tabla que viene a continuación recoge las variaciones de las variables intra-sujeto de este apartado en las distintas submuestras que determina la variable inter-sujeto “especialidad”.

| Variable intra-sujeto | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|-----------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| Número de magnitudes  | Aumenta            | Aumenta     | Aumenta                | Aumenta              |
| Número de unidades    | Aumenta            | Aumenta     | Disminuye              | Aumenta              |
| Exactitud             | Aumenta            | Aumenta     | Disminuye              | Aumenta              |

Tabla 167: Variación experimentada por la variable “especialidad” en el noveno apartado, antes/después.

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto de este apartado, siendo los alumnos Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil los que cuentan con menor número de aumentos.

## Máximos

En la tabla siguiente se señala qué subconjunto de alumnos alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor       | Después es mayor     |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| Número de magnitudes  | Otras especialidades | Educación Infantil   |
| Número de unidades    | Otras especialidades | Otras especialidades |
| Exactitud             | Matemáticas          | Educación Infantil   |

Tabla 168: Máximos de la variable “especialidad” en el noveno apartado, antes/después.

Los máximos de las variables intra-sujeto los consiguen, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas, y después, los de Educación Infantil.

## Mínimos

En la tabla siguiente se destacan los mínimos de las distintas variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor         | Después es menor       |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| Número de magnitudes  | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Número de unidades    | Educación Infantil     | Magisterio no Infantil |
| Exactitud             | Educación Infantil     | Magisterio no Infantil |

**Tabla 169: Mínimos de la variable “especialidad” en el noveno apartado, antes/después.**

La mayoría de los mínimos, antes del estudio del tema y de las técnicas, es de los alumnos de Educación Infantil; y después los tienen todos ellos los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

En las tablas que vienen a continuación se recogen las variaciones de las variables intra-sujeto de este apartado en cada una de las submuestras originadas por la variable inter-sujeto “bachillerato”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

La tabla siguiente contiene las variaciones, después del estudio del tema y de las técnicas, de las variables intra-sujeto de este apartado, en las distintas submuestras que determina la variable inter-sujeto “bachillerato”.

| Variable intra-sujeto | Ciencias | Letras  | F P         |
|-----------------------|----------|---------|-------------|
| Número de magnitudes  | Aumenta  | Aumenta | Se mantiene |
| Número de unidades    | Aumenta  | Aumenta | Aumenta     |
| Exactitud             | Aumenta  | Aumenta | Se mantiene |

**Tabla 170: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en el noveno apartado, antes/después.**

Se observa una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto de este apartado, siendo los alumnos que cuentan con menor número de ellos los de F P.

## Máximos

En la tabla siguiente se destaca qué subconjunto de alumnos alcanza el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes  | F P            | Letras           |
| Número de unidades    | Ciencias       | Ciencias         |
| Exactitud             | Ciencias       | Ciencias         |

**Tabla 171: Máximos de la variable “bachillerato” en el noveno apartado, antes/después.**

Los máximos de las variables intra-sujeto de este apartado los consiguen los alumnos de Ciencias, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Mínimos

En la tabla siguiente se tienen los mínimos de las variables intra-sujeto de este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Número de magnitudes  | Ciencias       | Ciencias         |
| Número de unidades    | FP             | FP               |
| Exactitud             | FP             | FP               |

**Tabla 172: Mínimos de la variable “bachillerato” en el noveno apartado, antes/después.**

La mayoría de los mínimos de las variables intra-sujeto que estamos considerando en este apartado, en ambos momentos, son de los alumnos de FP.

### 5.3.12. Estudio Estadístico del Décimo Apartado de las Encuestas

Continuamos analizando la influencia del estudio del tema y de las técnicas en las respuestas de los alumnos a las cuestiones planteadas en el décimo apartado de la Evaluación Inicial y en el decimoprimer de la Evaluación Final que decían: “plantea, con cada una de las magnitudes y las medidas señaladas, tres actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Conviene que precises cómo vas a realizar dichas actividades.” Para valorar las respuestas, como ya hemos comentado en el estudio de frecuencias, hemos tenido en cuenta los siguientes aspectos: la creatividad en los planteamientos, el número de magnitudes, el número de unidades de medida, la precisión con que las han planteado y hasta qué punto son adecuadas para este nivel.

### 5.3.12.1 Creatividad

Se estudia “la creatividad” que han usado los alumnos a la hora de proponer las actividades, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Se ha indicado en el tercer apartado que para medir “la creatividad” se han utilizado los indicadores ya señalados en el Capítulo I. En este caso se toman como variables intra-sujetos *la creatividad en el décimo apartado*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas sobre “la creatividad” en el décimo apartado, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.077>0.05$ , y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados, se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “la creatividad” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.077>0.05$ ; por ello, se tiene que aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: para ser creativos en las actividades que proponen los alumnos para los niños de Educación Infantil, han sido bastante importantes el estudio del tema y de las técnicas. Destaquemos que se pasa de un 55% antes (bastante o mucha creatividad) a un 78% después.



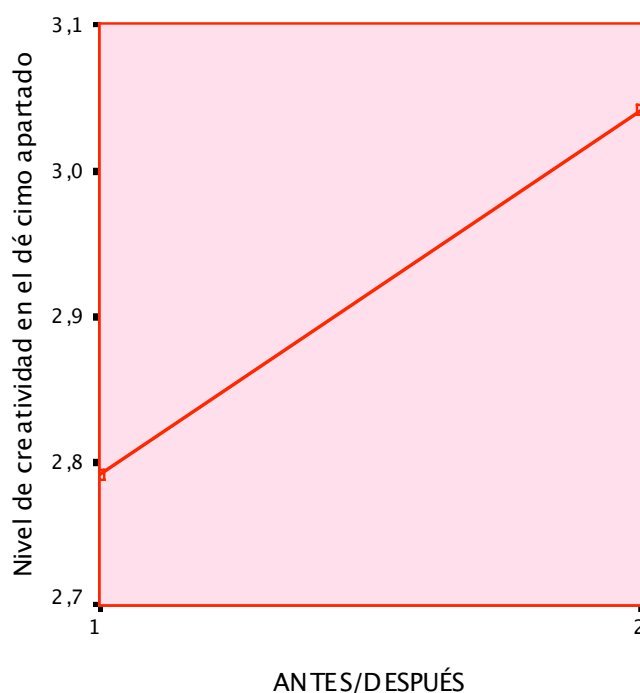


**Figura 617: Estimación de “la creatividad en el 10º apartado” antes/después.**

Los valores asignados a la variable “creatividad en el décimo apartado” son los mismos que los que se asignaron en el tercer apartado y no los vamos a repetir, sólo recordar que al aumentar el valor, aumenta la creatividad, y viceversa. La figura anterior informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la creatividad” de los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.

## Género

Se empieza eligiendo como factor inter-sujeto “el género”, y se estudia si hay diferencias significativas dentro de cada género y entre los géneros con respecto a “la creatividad” usada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En este caso los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados valen  $p=0.045 < 0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada género, y  $p=0.257 > 0.05$  cuando se analizan entre los géneros. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Se tiene que afirmar, por tanto, que existen diferencias significativas en “la creatividad” usada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del citado estudio, dentro de cada género, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

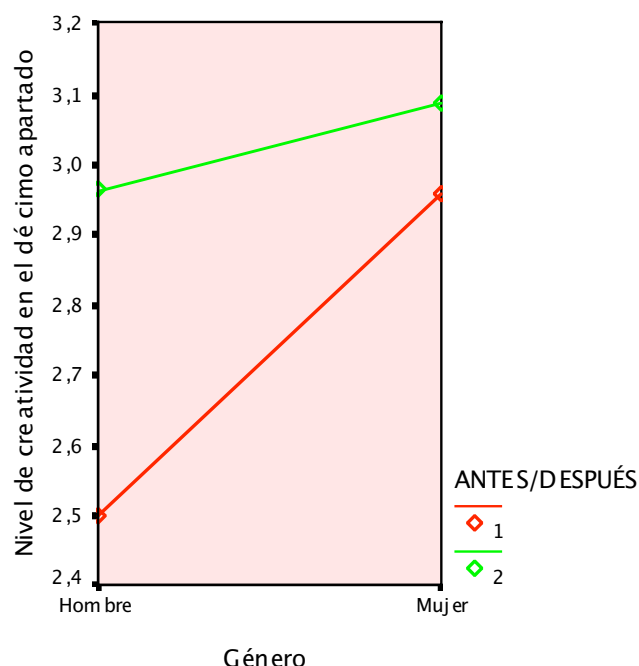


**Figura 618: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “género”.**

La figura adjunta señala que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres son más creativas que los hombres cuando proponen actividades a los niños de Educación Infantil. Después de dicho estudio aumenta la creatividad para los dos géneros.

### Año de realización

Se elige como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver cómo influye en “la creatividad” de los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños de Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” para proponer actividades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, no depende del “año de realización”.

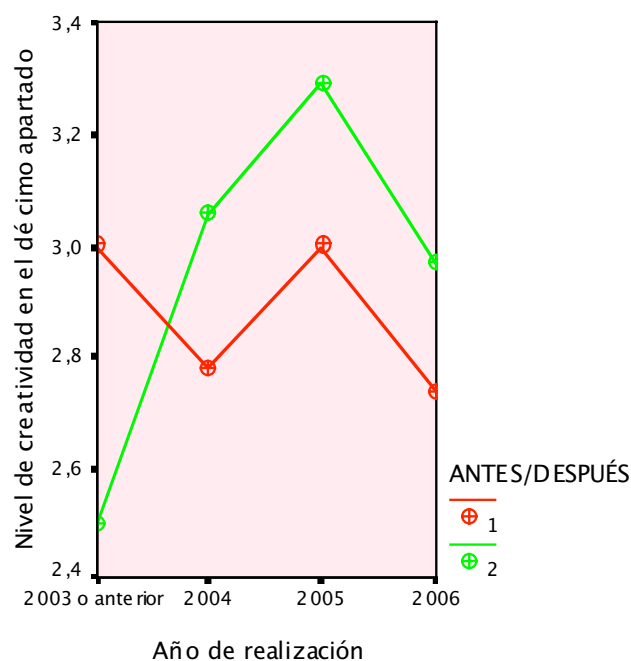


**Figura 619: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la creatividad” para la mayoría de los alumnos, excepto para los que respondieron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores que disminuye.

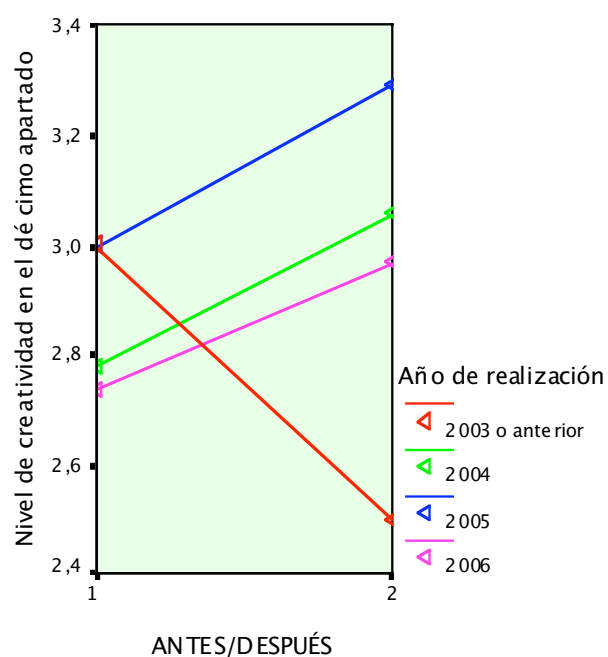


**Figura 620: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

La figura que precede señala que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más creativos son los que respondieron las encuestas en el curso 2004/2005 y los del 2002/2003 ó anteriores; después del citado estudio continúan siendo los del 2004/2005. Los alumnos menos creativos, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006, y después de dicho estudio los que las respondieron en 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso” para ver si influye en “la creatividad” con que los alumnos plantean actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” con que proponen las actividades no depende del “curso”.

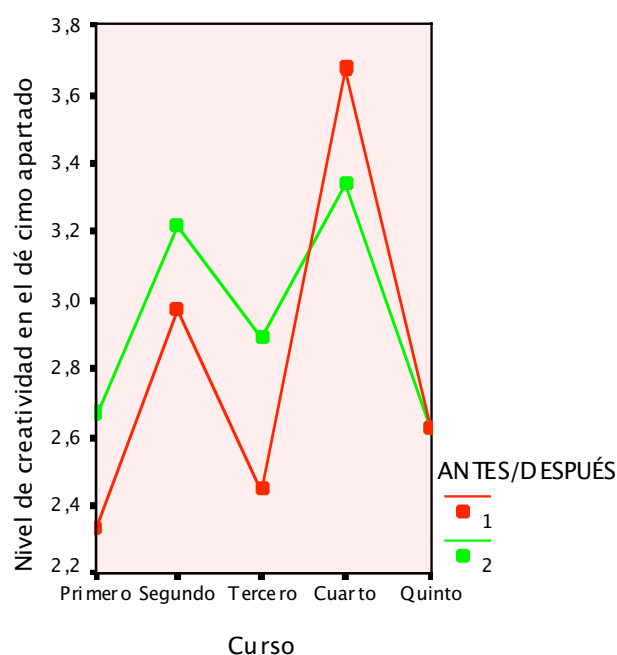


**Figura 621: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

En esta figura parece que los alumnos de los últimos cursos universitarios —cuarto y quinto— se relajan y son menos creativos cuando proponen actividades para los niños de Educación Infantil; los demás son más creativos después del estudio del tema y de las técnicas.

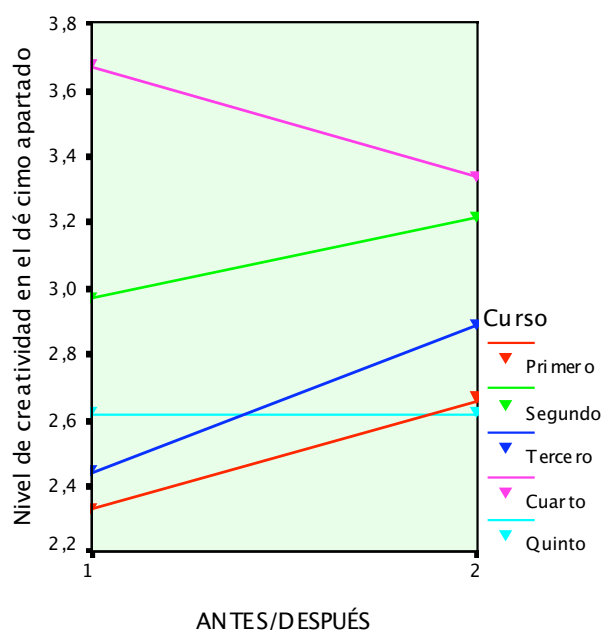


**Figura 622: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

Los alumnos más creativos a la hora de proponer actividades para los niños de Educación Infantil, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de cuarto. Los menos creativos, antes del citado estudio, son los de primero, y después, los de quinto.

## Edad

Cogemos como variable inter-sujeto “la edad” de los alumnos para ver cómo influye en “la creatividad” para proponer actividades a los niños de Educación Infantil. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la edad” no influye significativamente en “la creatividad” con que proponen las actividades.

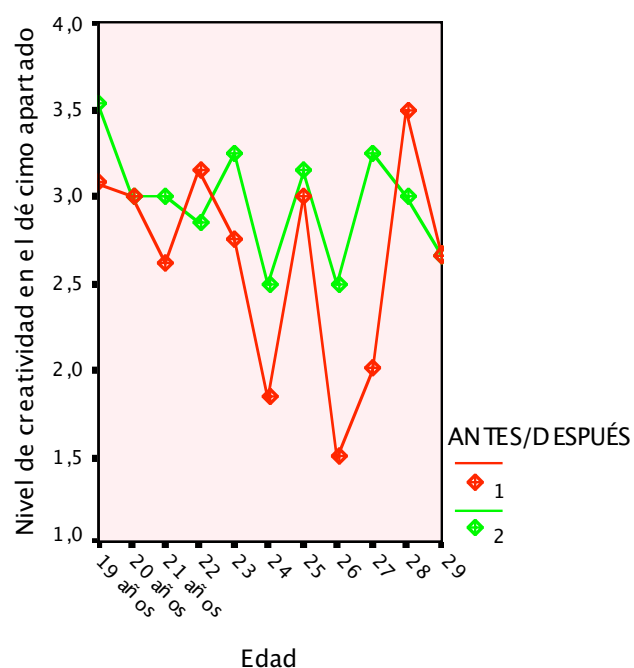


Figura 623: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.

La mayoría de los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, proponen actividades más creativas para los niños de Educación Infantil, sólo disminuye la creatividad de los que tenían 22 y 28 años, y se mantiene la de los de 20 y 29 años.

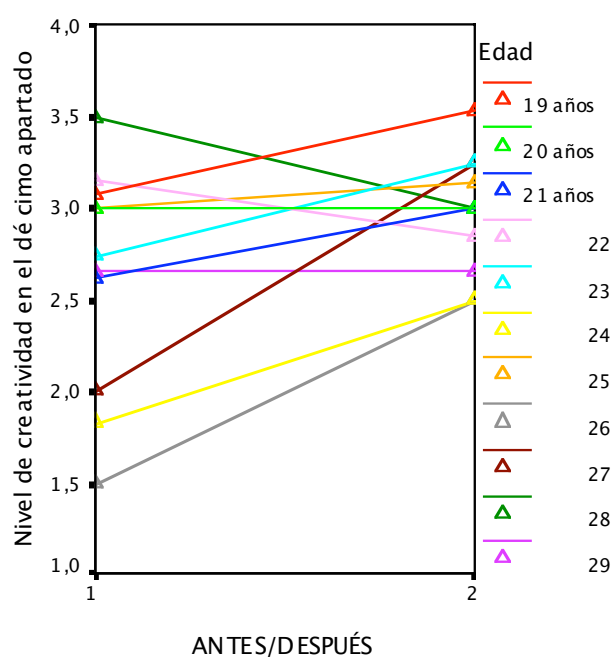


Figura 624: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.

Antes del estudio del tema y de las técnicas los alumnos más creativos son los que tenían 28 años, y los menos creativos son los que tenían 26 años. Después del citado estudio los alumnos más creativos son los más jóvenes —los de 19 años—, y los menos creativos son los mismos que antes, los de 26 años, a los que se suman los de 24 años.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si influye significativamente en “la creatividad” utilizada para proponer actividades a los niños en el décimo apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.354>0.05$  cuando se considera la influencia de “la especialidad” en la creatividad dentro de la misma especialidad, y  $p=0.023<0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Por tanto, se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas en la creatividad de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata de la misma especialidad, pero sí existen diferencias significativas entre las distintas especialidades.

Para comparar las distintas especialidades se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso se observa que todos los niveles críticos son mayores que 0.05, luego este estadístico no ha encontrado diferencias significativas.

Para analizar lo que ocurre en este caso se trabaja con las pruebas no paramétricas, se elige “k muestras independientes”, se toman “creatividad en el décimo apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en la lista de variables, en el grupo de variables se elige “especialidad”, y se marca el estadístico Kruskal-Wallis, se definen los rangos de modo que recojan todas las especialidades. En este caso los niveles críticos antes del citado estudio son  $p=0.522>0.05$ , y después  $p=0.028<0.05$ . Por tanto, antes del estudio del tema y de las técnicas no hay diferencias significativas en “la creatividad” de los alumnos por especialidades, pero después del estudio del tema y de las técnicas sí hay diferencias significativas.

Para confirmar que hay diferencias significativas se comparan por pares las distintas especialidades. Se elige el apartado “dos muestras independientes”, y se toman en lista de variables “creatividad en el décimo apartado”, en ambos momentos; como variable de agrupación se elige “la especialidad”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: el de los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y los de Matemáticas, los alumnos de Magisterio de Educación Infantil y los de Magisterio que no son de Educación Infantil, etc., hasta agotar todos los pares. Destacamos sólo aquellos casos en que hay diferencia significativa:

Entre los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil, después del estudio del tema, da  $p=0.007<0.05$ , dentro de cada especialidad, y  $p=0.008<0.05$  entre las distintas especialidades.

Entre los alumnos de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil y los de Otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, después del estudio del tema y de las técnicas, da  $p=0,038<0.05$ , dentro de la misma especialidad.

Por tanto, sólo entre estos dos pares de submuestras de alumnos hay diferencias significativas.

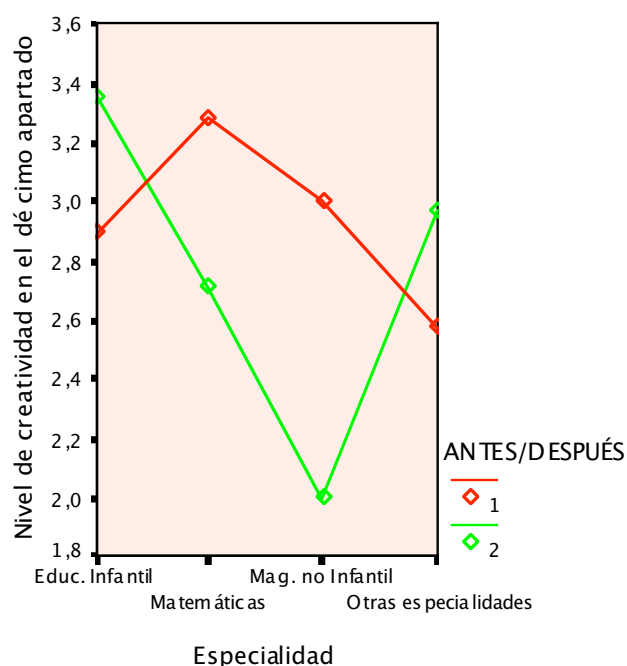


**Figura 625: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**



Los alumnos más creativos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de la licenciatura de Matemáticas, y los menos creativos son los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas. Después del citado estudio, los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil son los más creativos, y los menos creativos, los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil. Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la creatividad para los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y para los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, y disminuye para los demás.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en “la creatividad” de los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” para proponer actividades no depende del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

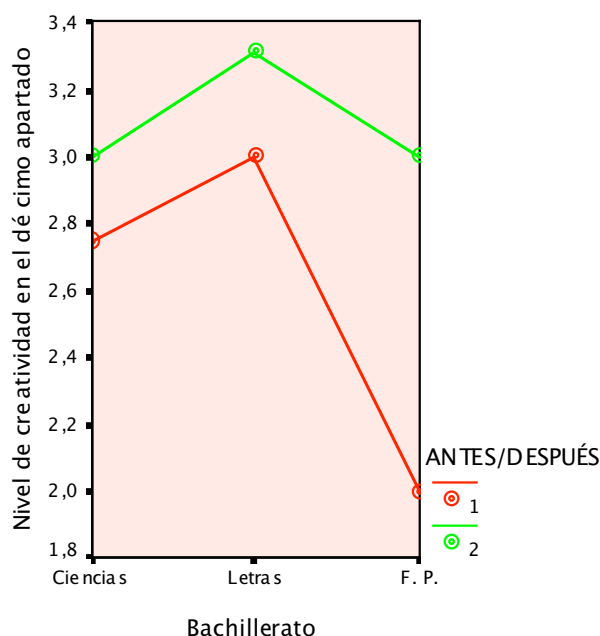


**Figura 626: Estimación de “la creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Observando la figura, no queda lugar a dudas de que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la creatividad” de todos los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.

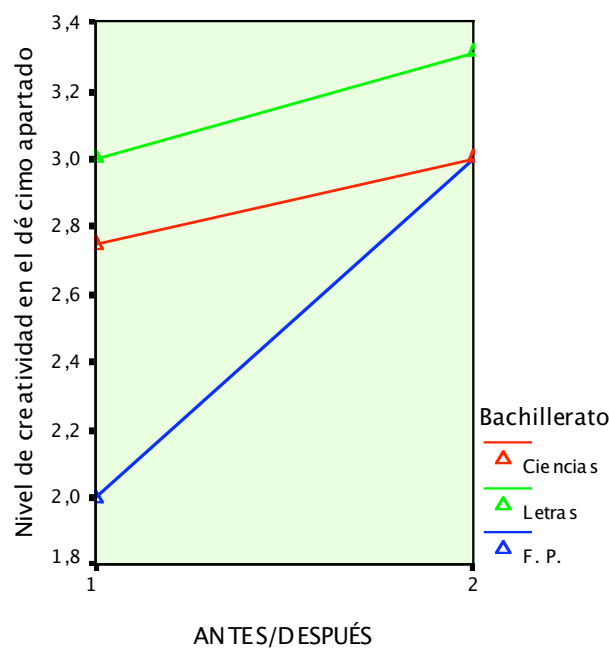


Figura 627: Ampliación de la comparación: “creatividad en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.

Los alumnos más creativos en el planteamiento de las actividades a los niños de Educación Infantil, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los que cursaron el bachillerato de Letras, y los menos creativos son los que proceden de Formación Profesional; a estos se suman, después del citado estudio, los de Ciencias.

Con objeto de poder disponer de todos los niveles críticos relativos a las variables “creatividad en el décimo apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, tenemos la tabla siguiente.

|                                         | Momento                   | Interacción                              | Figura |
|-----------------------------------------|---------------------------|------------------------------------------|--------|
| CREATIVIDAD<br>en el décimo<br>apartado | Antes / después: p=0.077  |                                          | 613    |
|                                         | Antes / después: p=0.045* | Antes / después y Género: p=0.257        | 614    |
|                                         | Antes / después: p=0.752  | Antes / después y Año: p=0.849           | 615-6  |
|                                         | Antes / después: p=0.542  | Antes / después y Curso: p=0.816         | 617-8  |
|                                         | Antes / después: p=0.062  | Antes / después y Edad: p=0.511          | 619-20 |
|                                         | Antes / después: p=0.354  | Antes / después y Especialidad: p=0.023* | 621    |
|                                         | Antes / después: p=0.089  | Antes / después y Bachillerato: p=0.672  | 622-3  |

Tabla 173: “Creatividad en el décimo apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.12.2 Número de magnitudes

Se pasa a estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, la repercusión que puede tener el estudio del tema y de las técnicas en “el número de magnitudes” que usan los alumnos al proponer actividades a los niños de Educación Infantil. Se eligen como variables intra-sujetos *número de magnitudes en el décimo apartado*, antes y después. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en “el número de magnitudes” comentadas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados son  $p=0.641>0.05$ , y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también valen lo mismo, se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes” que dan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.641>0.05$ , con lo que se puede aceptar esta hipótesis y concluir que la media total vale cero.

Esto viene a corroborar lo que se obtenía en el diagrama de frecuencias: el porcentaje de los alumnos que utilizan 3 ó más magnitudes es mayor después del estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa que antes; y para los que proponen 0, 1, 2 ó 3 magnitudes la situación se invierte. Esto quiere decir que después del estudio del tema y de las técnicas, son capaces de utilizar mayor número de magnitudes a la hora de proponer actividades para niños de Educación Infantil.

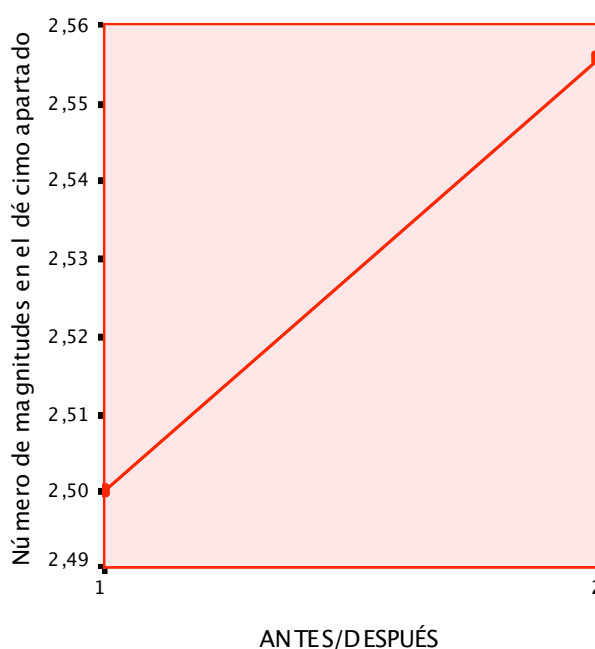


**Figura 628: Estimación del “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después.**

La situación que se observa en esta figura es la que se ha comentado antes: después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de magnitudes que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.

## Género

Se toma ahora como variable inter-sujeto “el género” para analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si influye significativamente en “el número de magnitudes” que emplean los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Como todos los estadísticos que proporciona dicho modelo dan niveles críticos mayores que 0.05, se puede decir que no hay diferencias significativas, según “el género”, del “número de magnitudes” que dan los alumnos antes y después de dicho estudio. Por tanto, “el número de magnitudes” no depende significativamente del “género”.

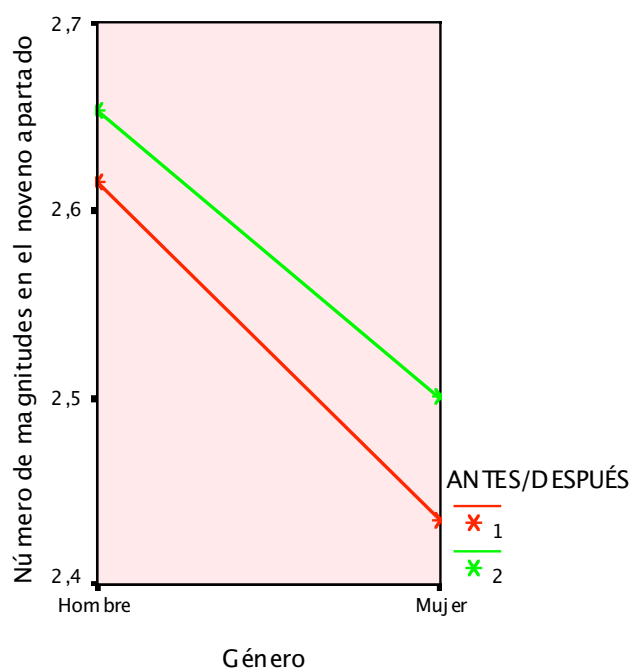


**Figura 629: Estimación del “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “género”.**

Esta figura señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el “número de magnitudes” que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil. Los hombres, en ambos momentos, usan mayor número de magnitudes que las mujeres.

### Año de realización

Se pasa a estudiar si influye “el año de realización” de las encuestas en “el número de magnitudes” que utilizan para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que todos los niveles críticos asociados a los estadísticos que proporciona el modelo lineal de medidas repetidas son mayores que 0.05, luego se puede concluir que “el año de realización” no explica “el número de magnitudes” que usan los alumnos en ambos momentos.

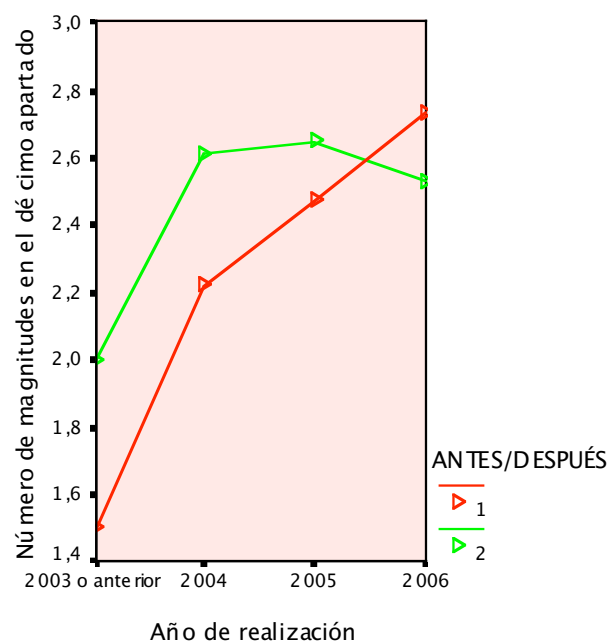


**Figura 630: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

La figura adjunta indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, para casi todos los alumnos aumenta “el número de magnitudes” que utilizan para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, salvo los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006.

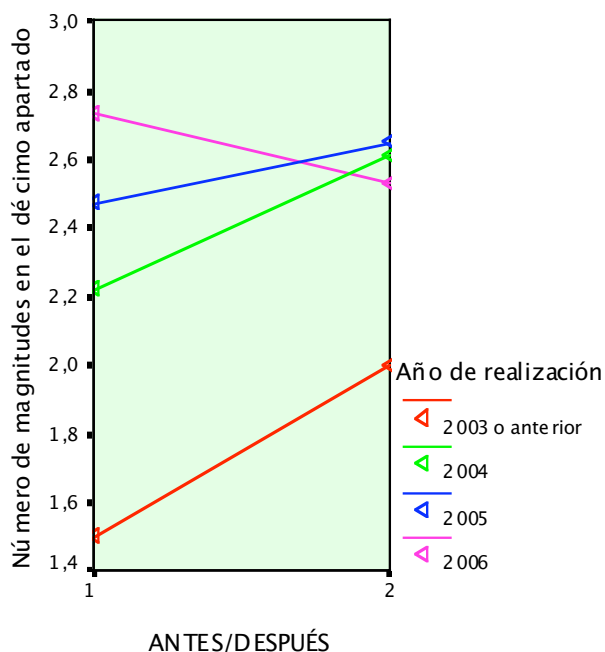


**Figura 631: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Los alumnos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, utilizan mayor “número de magnitudes” para proponer las actividades a los niños de Educación Infantil son los que respondieron las encuestas en el curso 2005/2006, y los alumnos que usan menor número de magnitudes, tanto antes como después del citado estudio, son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores. Después de dicho estudio, los alumnos que usan más magnitudes son los que las respondieron en 2004/2005.

## Curso

Se considera ahora “el curso” en que están matriculados los alumnos para estudiar si son o no significativas las diferencias en cuanto al “número de magnitudes” indicadas para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Vemos que en todos los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas dan niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se tiene que concluir que no hay diferencias significativas del “número de magnitudes” que usan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, según “el curso”. Por tanto, el número de magnitudes no depende significativamente del “curso” en que estén matriculados los alumnos.

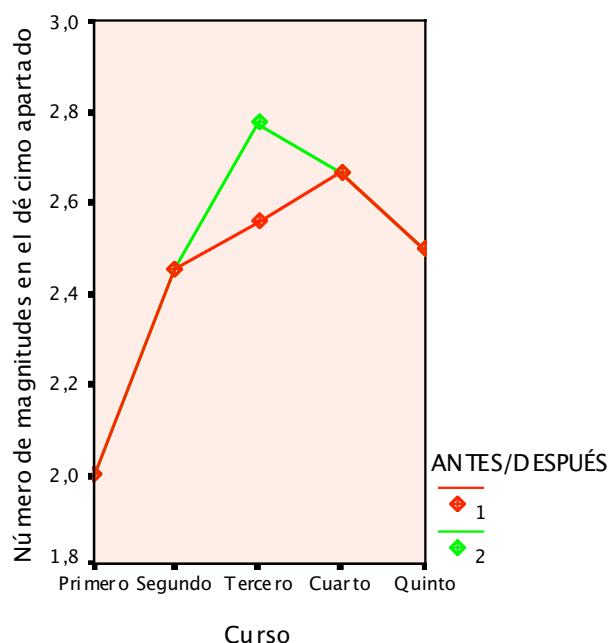


**Figura 632: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

En el gráfico adjunto se observa que prácticamente coinciden “el número de magnitudes” que usan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, para proponer actividades a los niños de Educación Infantil; sólo varían los alumnos de tercero que, después del citado estudio, utilizan mayor número de magnitudes. Los alumnos que emplean mayor número de magnitudes, antes de dicho estudio, son los de cuarto, y después los de tercero. Los que utilizan menor número de magnitudes, en ambos momentos, son los de primero.

## Edad

Se toma como factor inter-sujeto “la edad” para estudiar si hay diferencias significativas con el “número de magnitudes” que usan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En este caso se observa que en todos los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F son mayores que 0.05. Se tiene que afirmar, por tanto, que no existen diferencias significativas entre “el número de magnitudes” que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil y las edades de dichos alumnos.

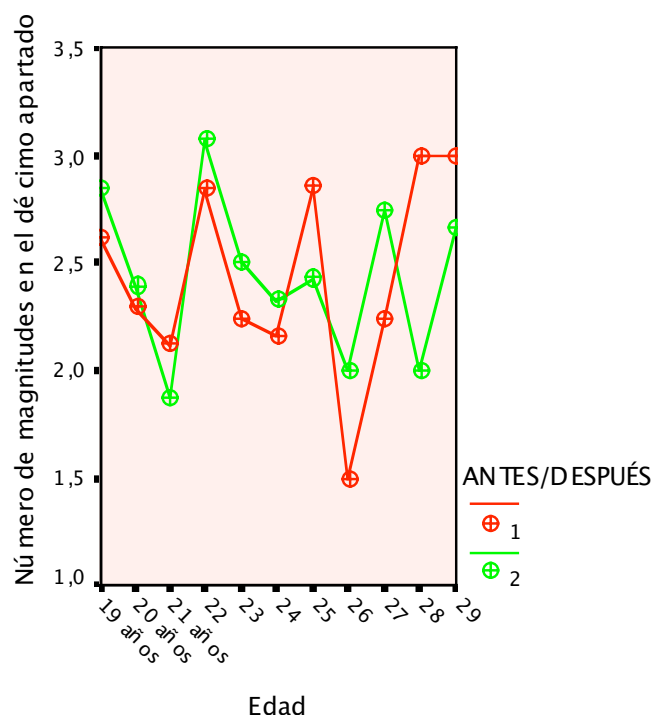


Figura 633: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.



Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de magnitudes que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil para los que tenían 19, 20, 22, 23, 24, 26 ó 27 años; para los demás disminuye.

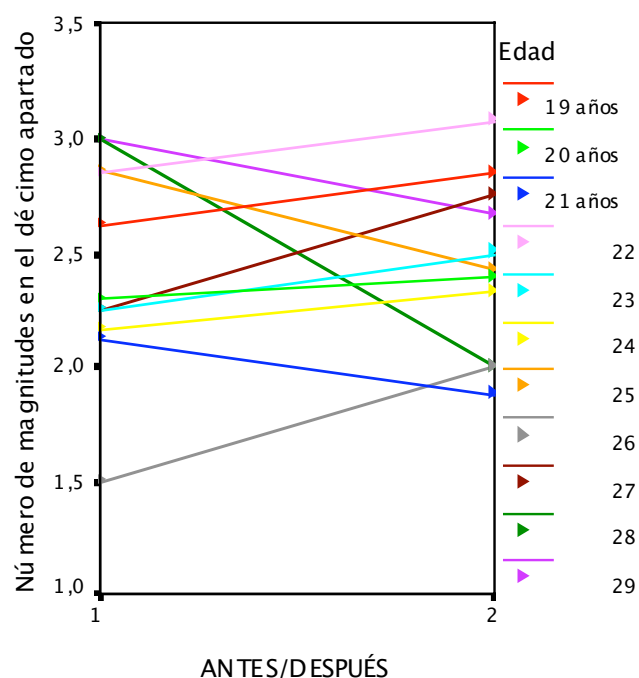


**Figura 634: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.**

Aunque son muchas las líneas que aparecen en esta figura, se puede observar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que usan el mayor número de magnitudes son los que tenían 28 y 29 años, y los que utilizan menos son los que tenían 26 años en el momento en que respondieron las encuestas. Después del estudio del tema, los alumnos con 22 años son los que emplean más magnitudes, y los de 21 los que usan menos.

## Especialidad

Se estudia ahora si “la especialidad” influye en “el número de magnitudes” que usan los alumnos para proponer las actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas; se sigue trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas. Se ve en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo que los niveles críticos asociados son mayores que 0.05, luego se tiene que afirmar que “el número de magnitudes” que utilizan los alumnos no depende de “la especialidad” en qué estuvieran matriculados.

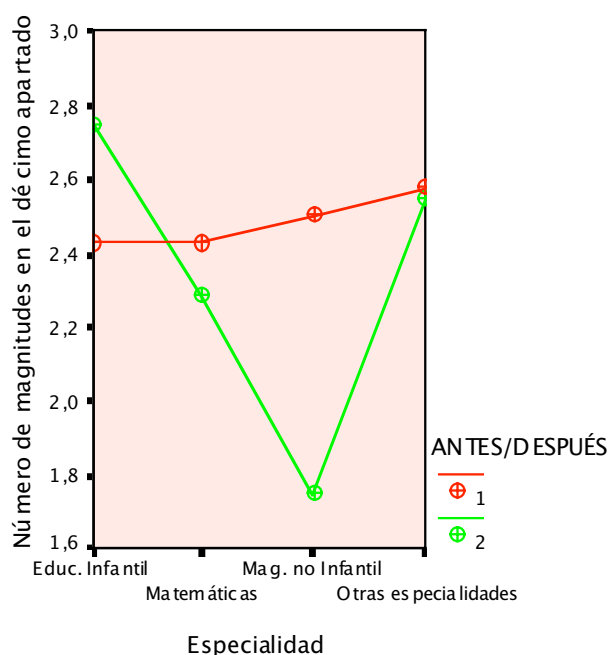


**Figura 635: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**

La figura que precede señala que para los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de magnitudes que utilizan para proponer actividades a los niños de Educación Infantil; para los demás disminuye.

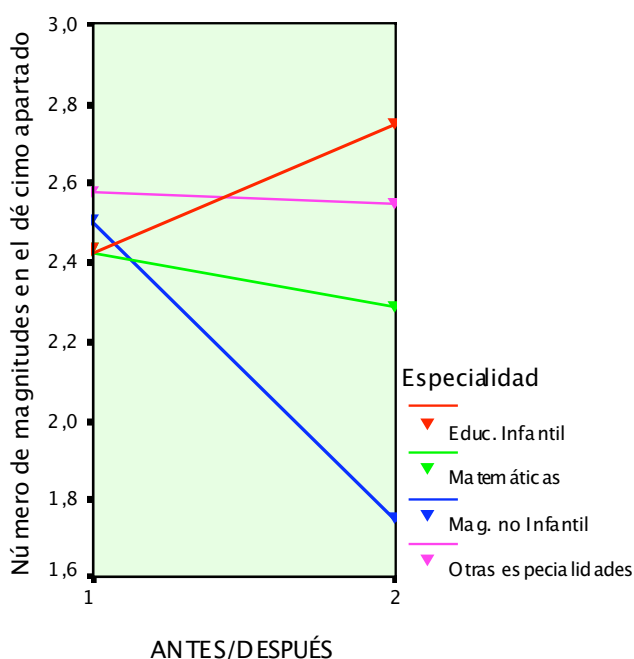


**Figura 636: Ampliación de la comparación: “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que utilizan mayor “número de magnitudes” en las actividades para los niños son los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas, y los que usan menor número son los de Matemáticas y los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil. Después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos que emplean mayor “número de magnitudes” son los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y los que usan menor “número de magnitudes” son los de Magisterio de otras especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Se considera finalmente el “bachillerato” cursado para ver si influye en “el número de magnitudes” que usan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los distintos estadísticos que proporciona tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego parece ser que “el número de magnitudes” que dicen los alumnos en ambos momentos no depende del “bachillerato” que hubieran cursado.

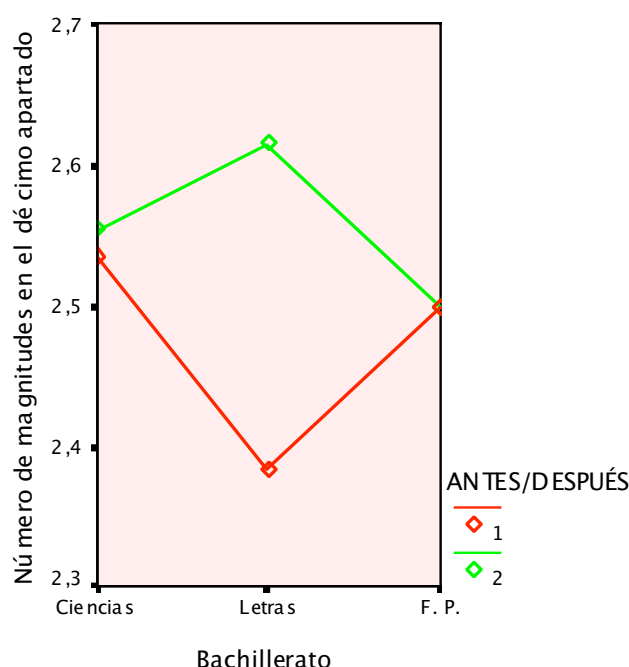


**Figura 637: Estimación de “número de magnitudes en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Sólo los alumnos que proceden de Formación Profesional, después del estudio del tema y de las técnicas, mantienen el número de

magnitudes que usaron para proponer actividades a los niños de Educación Infantil; para todos los demás aumenta. Los alumnos que utilizan mayor “número de magnitudes”, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de Ciencias, y los que usan menor número de magnitudes son los de Letras. Después del citado estudio son los alumnos de Letras los que emplean más magnitudes, y los de Formación Profesional los que usan menos.

Se recogen todos los niveles críticos obtenidos al trabajar con las variables “número de magnitudes en el décimo apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en la tabla siguiente.

|                                                        | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|--------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>NÚMERO DE MAGNITUDES?<br/>en el décimo apartado</b> | Antes / después: $p=0.641$ |                                                   | 624    |
|                                                        | Antes / después: $p=0.678$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.915$       | 625    |
|                                                        | Antes / después: $p=0.287$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.184$          | 626-7  |
|                                                        | Antes / después: $p=0.823$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.965$        | 628    |
|                                                        | Antes / después: $p=0.984$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.729$         | 629-30 |
|                                                        | Antes / después: $p=0.373$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.169$ | 631-2  |
|                                                        | Antes / después: $p=0.754$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.794$ | 633    |

**Tabla 174: “Número de magnitudes en el décimo apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.12.3. Número de unidades

Se considera ahora “el número de unidades” que usan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en las actividades que proponen a los niños de Educación Infantil, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman las variables *número de unidades en el décimo apartado*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. Después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en “el número de unidades” que dicen los alumnos, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.026<0.05$ , se tiene que afirmar que existen diferencias significativas entre “el número de unidades” que usan los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.026<0.05$ , luego se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: el porcentaje de alumnos que no usan ninguna unidad es mayor antes del estudio del tema y de las técnicas (34%) que después (98%); por el contrario, los porcentajes de los que usan una unidad o más es abrumadoramente mayor después del estudio del tema y de las técnicas (91%) que antes (66%).

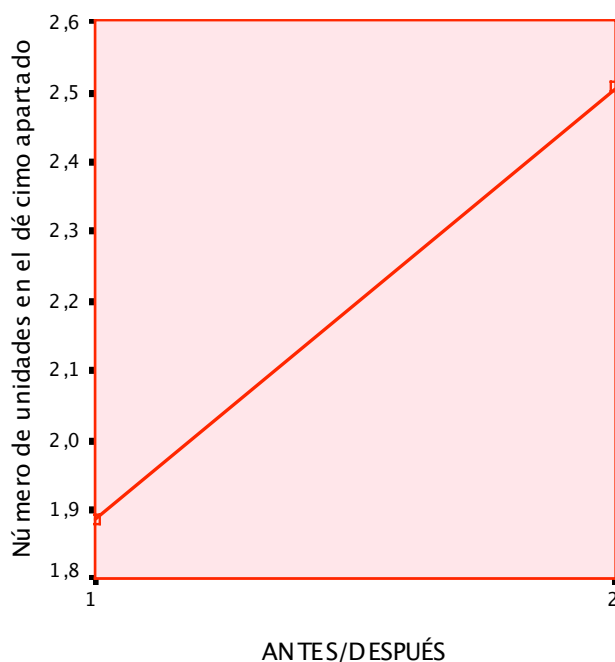


**Figura 638: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después.**

Evidentemente, como hemos comentado antes, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “el número de unidades” que usan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.

## Género

Se considera la variable inter-sujeto “género” para estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si influye significativamente en “el número de unidades” que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se obtienen niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y asociados a las cuatro versiones del estadístico F iguales a  $p=0.035 < 0.05$  cuando se considera si hay diferencias dentro del mismo

género, y cuando se considera si hay diferencia entre los distintos géneros dan  $p=0.906>0.05$ . Se puede afirmar que existen diferencias significativas entre el número de unidades que dicen los alumnos, antes y después del citado estudio, dentro del mismo género, pero no existe diferencia entre los géneros.

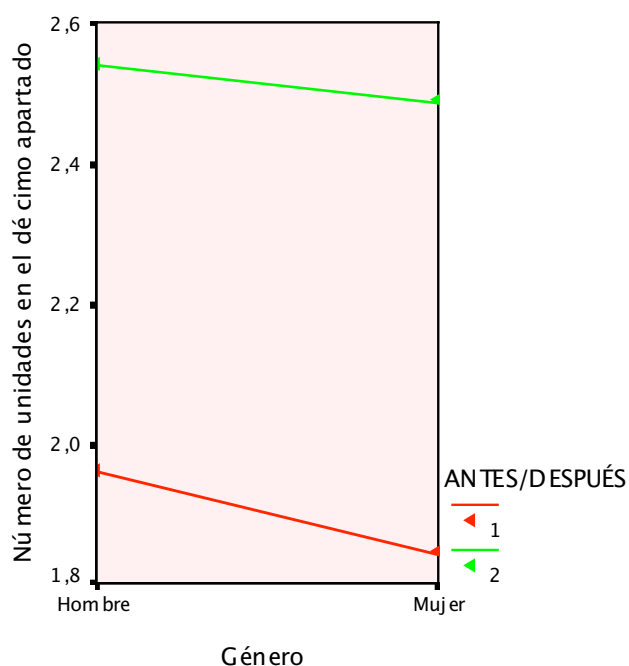


**Figura 639: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “género”.**

Se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta para ambos géneros el número de unidades que usan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil. Los hombres, en ambos momentos, utilizan más unidades que las mujeres.

### Año de realización

Se considera “el año de realización” de las encuestas para estudiar, con el modelo lineal general de medidas repetidas, si influye significativamente en “el número de unidades” que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que en ninguno de los estadísticos que se usan para este estudio los niveles críticos asociados son menores que 0.05, luego “el número de unidades” que dicen los alumnos no depende del “año de realización”.

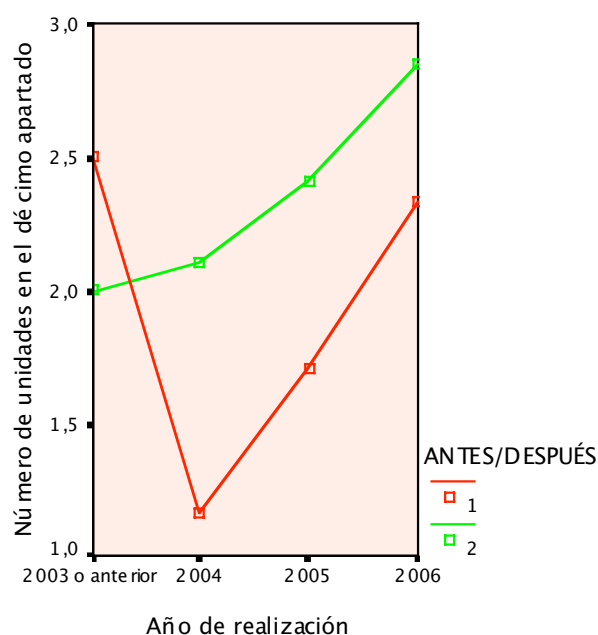


**Figura 640: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta mayoritariamente “el número de unidades” que usan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, salvo para los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores.

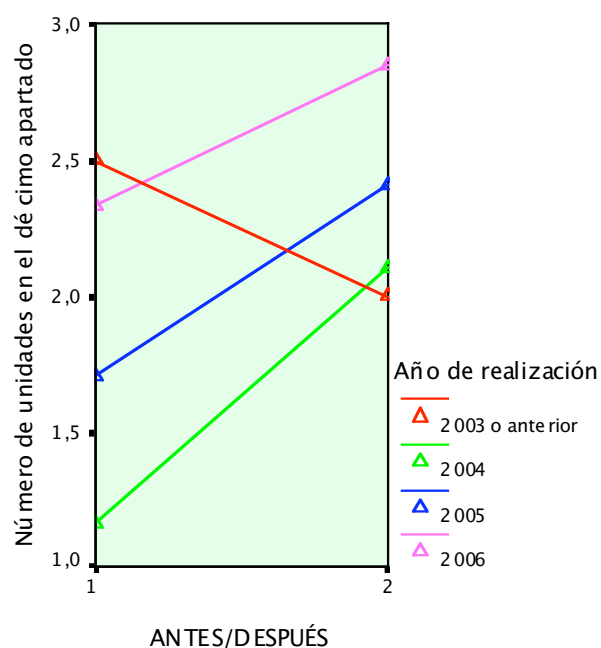


**Figura 641: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Los alumnos que, antes del estudio del tema y de las técnicas, utilizan mayor “número de unidades” son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y los que usan menor número son los que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004. Después del citado estudio los alumnos que emplean más unidades en las actividades para los niños son los que respondieron las encuestas en 2005/2006, y los que usan menos unidades son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Se toma ahora “el curso” para ver si tiene repercusión significativa en “el número de unidades” de medida que usan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F que son iguales a  $p=0.008<0.05$  cuando se considera la influencia del “curso”, dentro del mismo curso, y  $p=0.577>0.05$  cuando se trata de cursos distintos. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “el número de unidades” de medida que usan en las actividades los alumnos, antes y después del estudio del tema, pero no existen diferencias significativas cuando se trata de cursos distintos.

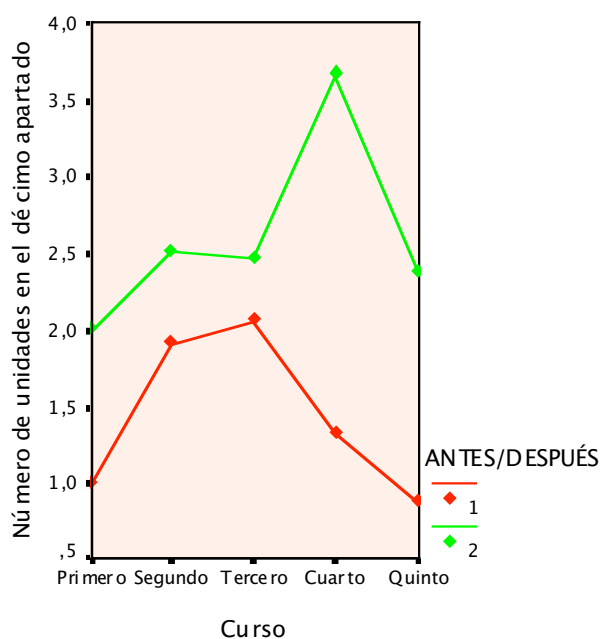


**Figura 642: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**



Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el número de unidades que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil.

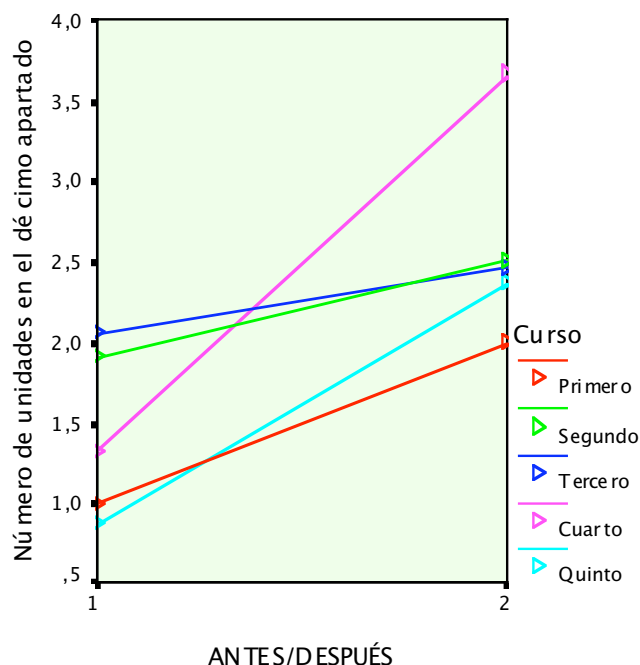


**Figura 643: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

Los alumnos de tercero son los que usan más unidades en las actividades, antes del estudio del tema y de las técnicas, y los de quinto, los que utilizan menos. Después del citado estudio, los alumnos de cuarto son los que usan mayor número de unidades, y los de primero, los que usan menos.

## Edad

Se analiza ahora si “la edad” influye significativamente en “el número de unidades de medida” que utilizan los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observan todos los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos considerados en el modelo lineal general de medidas repetidas y se ve que son mayores que 0.05; esto quiere decir que no parece tener ninguna repercusión “la edad” que tengan los alumnos en “el número de unidades” que usan.

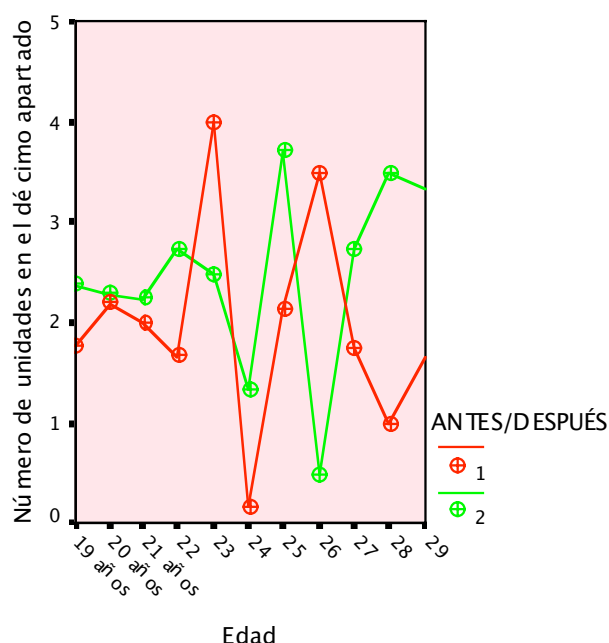


**Figura 644: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “el número de unidades” que utilizan los alumnos en las actividades que proponen a los niños de Educación Infantil para los que tenían 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28 ó 29 años, prácticamente se mantiene para los que tenían 20 años, y desciende para los demás.

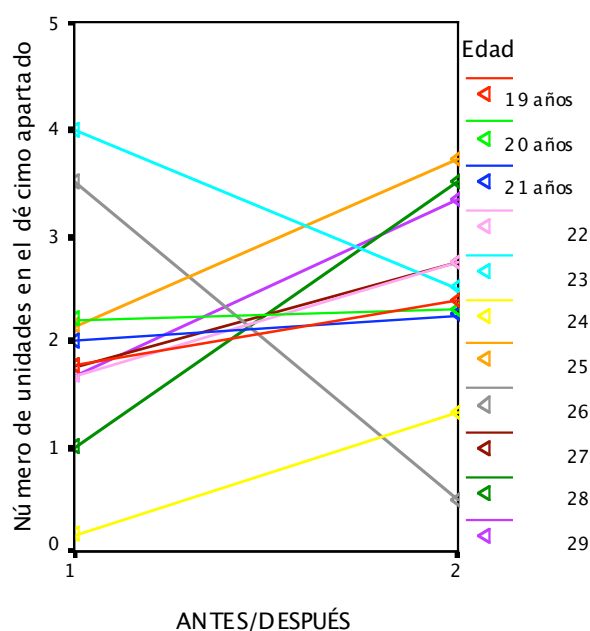


**Figura 645: Ampliación de la comparación: “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.**

Aunque en esta figura hay mucha variedad de líneas, se observa que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que usan más unidades son los que tenían 23 años, y los que emplean menos, los que tenían 24 años. Después del citado estudio, pasan a ser los de 25 años los que utilizan mayor número de unidades, y los de 26, los que usan menos.

## Especialidad

Se estudia, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el número de unidades de medida” que utilizan los alumnos para proponer actividades para los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema, depende significativamente de “la especialidad”. Se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos que proporciona el modelo mayores que 0.05. Por tanto, se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “la especialidad” y “el número de unidades de medida” que usan los alumnos, antes y después del estudio del tema.

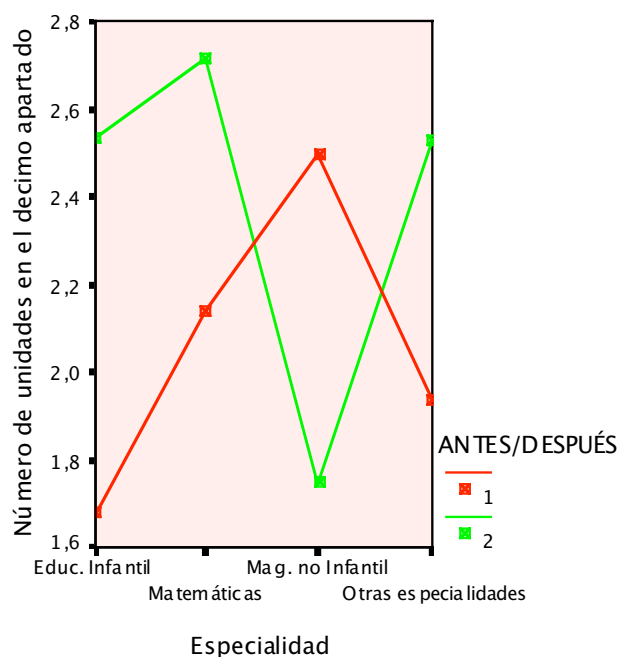


**Figura 646: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**

La figura adjunta informa de que, después del estudio del tema y de las técnicas, casi todos los alumnos utilizan mayor número de unidades de medida para proponer las actividades, salvo los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil. Los alumnos que utilizan mayor número de unidades, antes de dicho estudio, son los

de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil, y los que usan menos unidades son los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil. Después del citado estudio, son los alumnos de la licenciatura de Matemáticas los que usan más unidades de medida, y los que emplean menos son los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas.

## Bachillerato

Se estudia, con el modelo lineal general de medidas repetidas, si influye significativamente “el bachillerato” cursado por los alumnos, en “el número de unidades” que usan en las actividades que proponen a los niños de Educación Infantil. Se observa que en los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo se tienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que el número de unidades que emplean los alumnos no depende significativamente del “bachillerato” que hubieran cursado.

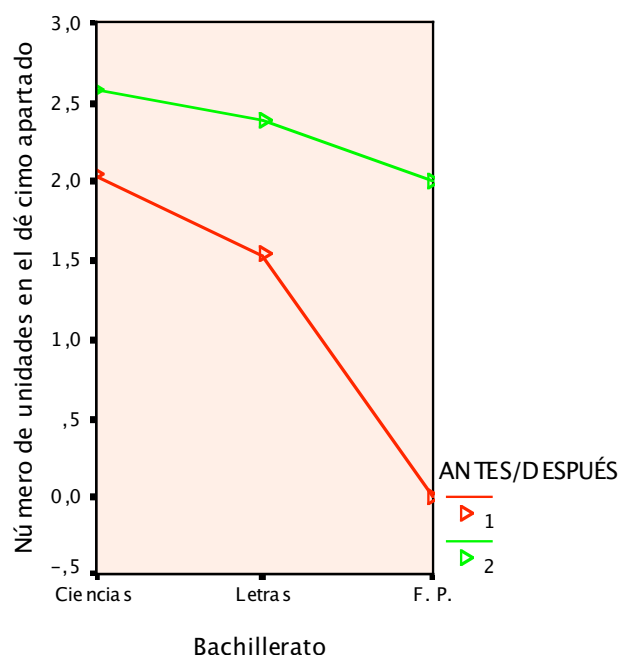


**Figura 647: Estimación de “número de unidades en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Para todas las submuestras de alumnos que se tienen en este caso, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “el número de unidades” que utilizan en las actividades que proponen a los niños de Educación Infantil. Los alumnos que usan mayor “número de unidades de medida”, en ambos momentos, son los de Ciencias, y los que emplean menos son los de Formación Profesional.

En la tabla siguiente se dispone de todos los niveles críticos relacionados con las variables “número de unidades en el décimo apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                 | Momento                         | Interacción                            | Figura          |
|-------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------|-----------------|
| <b>NÚMERO DE UNIDADES en el décimo apartado</b> | Antes / después: $p=0.026^*$    |                                        | 634             |
|                                                 | Antes / después: $p=0.035^*$    | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.906$ 635   |
|                                                 | Antes / después: $p=0.378$      | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.828$ 636-7 |
|                                                 | Antes / después: $p=0.008^{**}$ | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.577$ 638-9 |
|                                                 | Antes / después: $p=0.130$      | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.204$ 640-1 |
|                                                 | Antes / después: $p=0.421$      | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.639$ 642   |
|                                                 | Antes / después: $p=0.063$      | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.646$ 643   |

**Tabla 175: “Número de unidades en el décimo apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.12.4. Precisión

Se considera ahora “la precisión” con que los alumnos proponen las actividades a los niños de Educación infantil para estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si el estudio del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa influye significativamente en ella. Se toman como variables intra-sujetos *precisión en el décimo apartado*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En principio no se toma ninguna variable inter-sujeto; después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas sobre “la precisión” en las actividades propuestas a los niños de Educación Infantil, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.000<0.05$ , se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.000<0.05$ , luego se tiene que rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó en aquel

momento: antes del estudio del tema y de las técnicas el porcentaje de alumnos que tienen bastante o mucha precisión es menor antes del estudio del tema y de las técnicas (41%) que después (73%); se invierte la situación para los que no tienen ninguna precisión, tienen poca o tienen alguna (se pasa del 59% antes al 28% después). Por tanto, después del estudio del tema y de las técnicas los alumnos son más precisos cuando proponen las actividades para niños de Educación Infantil, lo cual es bastante interesante.

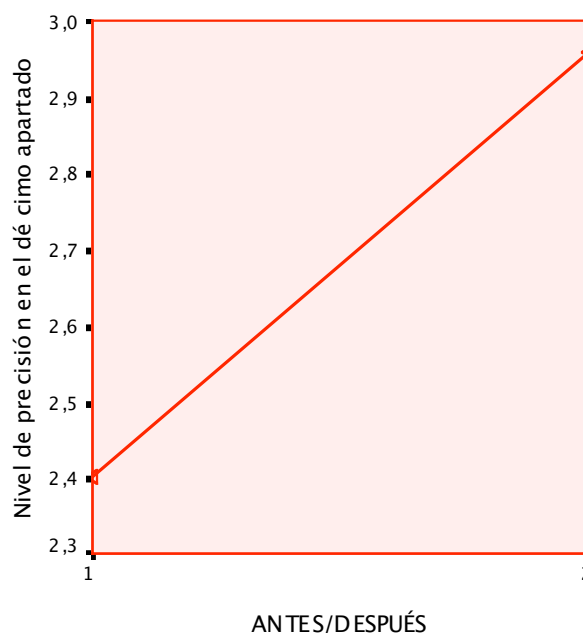


**Figura 648: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después.**

Es evidente que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la precisión de los alumnos cuando proponen actividades a los niños de Educación Infantil.

## Género

Se toman las distintas variables inter-sujeto empezando por “el género” para estudiar cómo influye en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños en el décimo apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en “la precisión” en las actividades propuestas, dentro del mismo género, y  $p=0.903 > 0.05$  cuando se considera la influencia entre los géneros. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados.

Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” con que los alumnos proponen las actividades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata del mismo género, y no existen diferencias significativas entre los géneros.

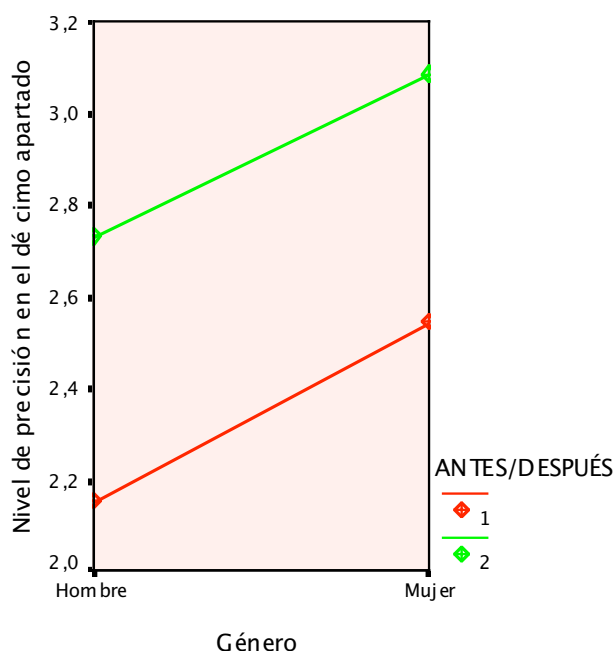


**Figura 649: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “género”.**

Se observa en esta figura que, después del estudio del tema y de las técnicas aumenta “la precisión” con que proponen las actividades a los niños de Educación Infantil. Las mujeres son más precisas que los hombres en ambos momentos.

### Año de realización

Se considera como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para analizar si influye en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “el año de realización” de las encuestas no influye significativamente en “la precisión” con que proponen las actividades los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

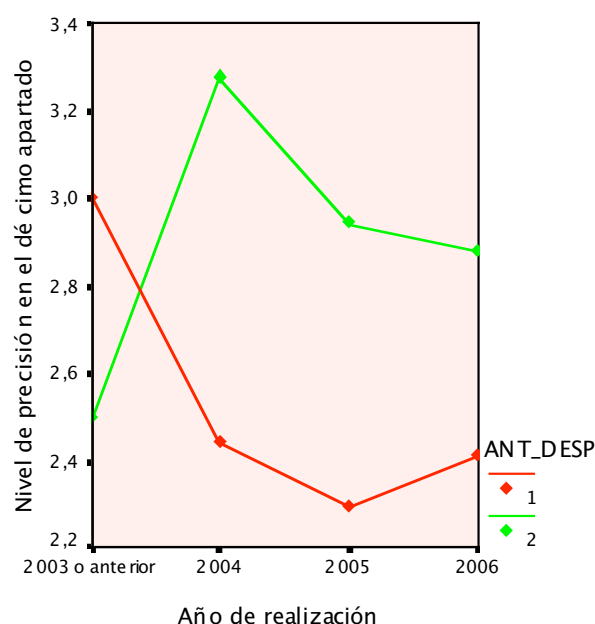


**Figura 650: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta para la mayoría de los alumnos “la precisión” con que plantean las actividades a los niños de Educación Infantil, únicamente disminuye para los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores. El valor máximo en precisión, antes del comentado estudio, lo consiguen los alumnos que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y el mínimo, los que las respondieron en 2004/2005. Después del citado estudio, la máxima precisión la alcanzan los alumnos del 2003/2004, y la mínima, los del 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Se toma como variable inter-sujeto “el curso” para estudiar si de él depende “la precisión” utilizada para plantear las actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.006 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “curso” en “la precisión” al plantear las actividades, dentro del mismo curso, y  $p=0.588 > 0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos. Por tanto, se puede decir que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después del citado estudio cuando se trata del mismo curso, y



no existen diferencias significativas cuando se refiere a los distintos cursos.

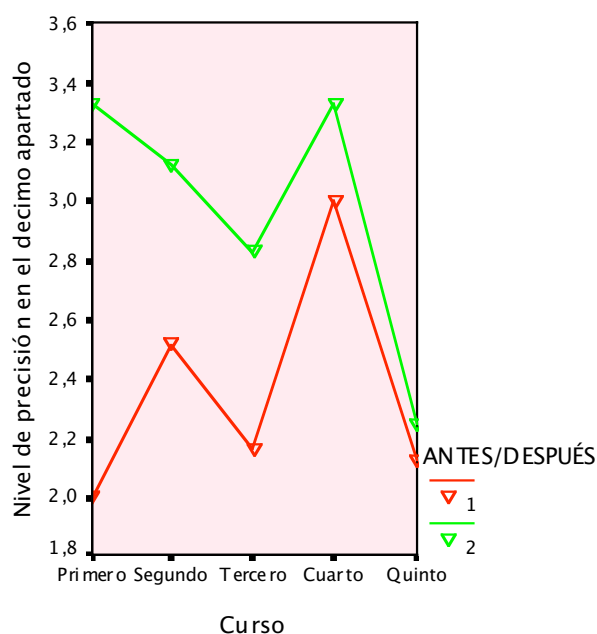


**Figura 651: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

En todas las submuestras que se obtienen considerando la variable inter-sujeto “curso” aumenta, después del estudio del tema y de las técnicas, “la precisión” con que plantean las actividades.

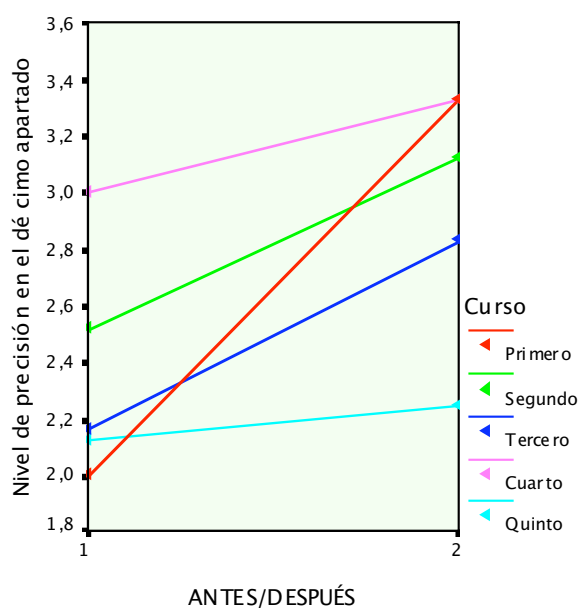


**Figura 652: Ampliación de la comparación: “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

Tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más precisos en el planteamiento de las actividades para los niños de Educación Infantil son los de cuarto, a los que después igualan los de primero. Los alumnos menos precisos antes del citado estudio son los de primero, a los que después de dicho estudio rempazan los de quinto.

## Edad

Se considera como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar cómo influye en “la precisión” utilizada para plantear actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.008<0.05$  cuando se considera la influencia de “la edad” en “la precisión” al plantear las actividades, cuando se toma la misma edad, y  $p=0.938>0.05$  cuando se considera la influencia entre las distintas edades, luego se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata de la misma edad, y no existen diferencias significativas cuando se consideran las distintas edades.

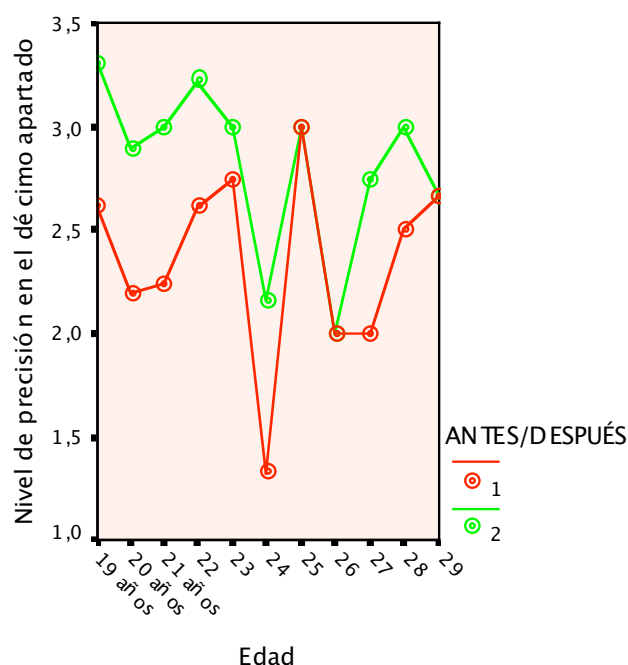


Figura 653: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.

En las submuestras que se consideran ahora, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene “la precisión” en el planteamiento de las actividades para los que tenían 25, 26 ó 29 años; para todos los demás aumenta.

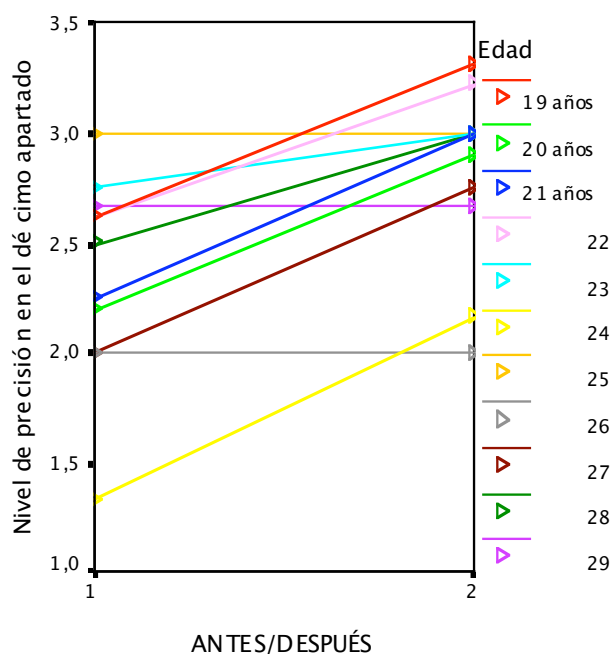


**Figura 654: Ampliación de la comparación: “precisión en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.**

La figura que precede informa de que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que son más precisos al plantear las actividades a los niños de Educación Infantil son los que tenían 25 años y los menos precisos son los de 24 años. Después del citado estudio los alumnos más precisos son los que tenían 19 años y los menos precisos los de 26 años.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si influye significativamente en “la precisión” utilizada para plantear actividades a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F son mayores que 0.05. Por todo ello se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas en “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, ni dentro de la misma especialidad ni entre especialidades distintas.

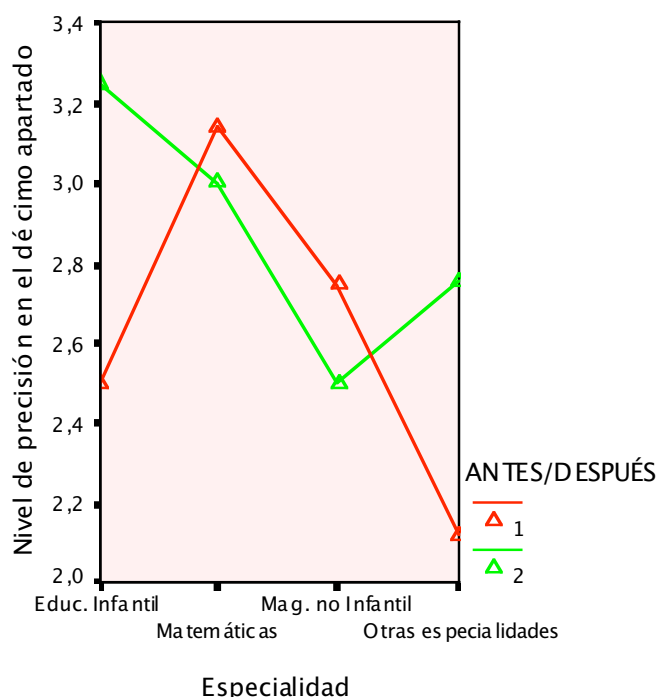


**Figura 655: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos más precisos en el planteamiento de actividades para los niños de Educación Infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de la licenciatura de Matemáticas, y los menos precisos son los de otras especialidades distintas de Matemáticas y Magisterio. Después del citado estudio, los alumnos más precisos son los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y los menos precisos son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil. Después de dicho estudio aumenta “la precisión” para los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y para los de otras especialidades distintas de Matemáticas y Magisterio; para los demás disminuye.

## Bachillerato

Finalmente se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para estudiar si influye significativamente en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.002 < 0.05$  cuando se considera la influencia del “bachillerato” en “la precisión” al proponer las actividades a los niños, dentro del mismo bachillerato, y  $p=0.433 > 0.05$  cuando se

considera entre los distintos bachilleratos. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” con que plantean las actividades los alumnos, antes y después de dicho estudio, cuando se trata del mismo bachillerato, y no existen diferencias significativas cuando se toman los distintos bachilleratos.

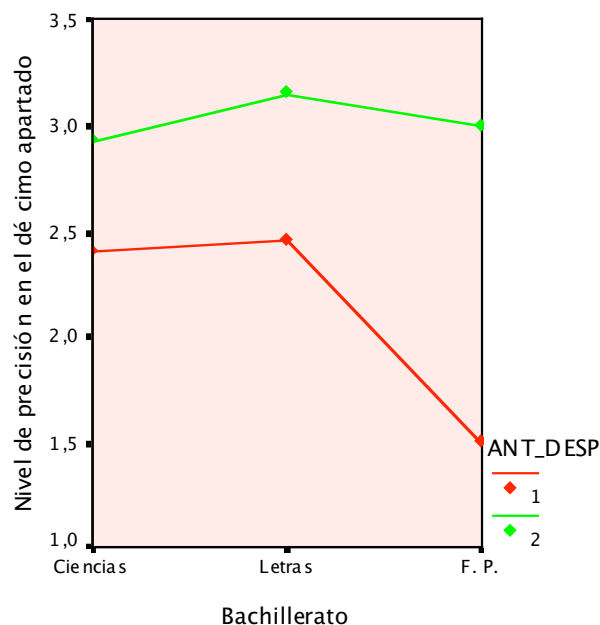


**Figura 656: Estimación de “la precisión en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

En todos los casos, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta la precisión con que los alumnos plantean las actividades a los niños de Educación Infantil.

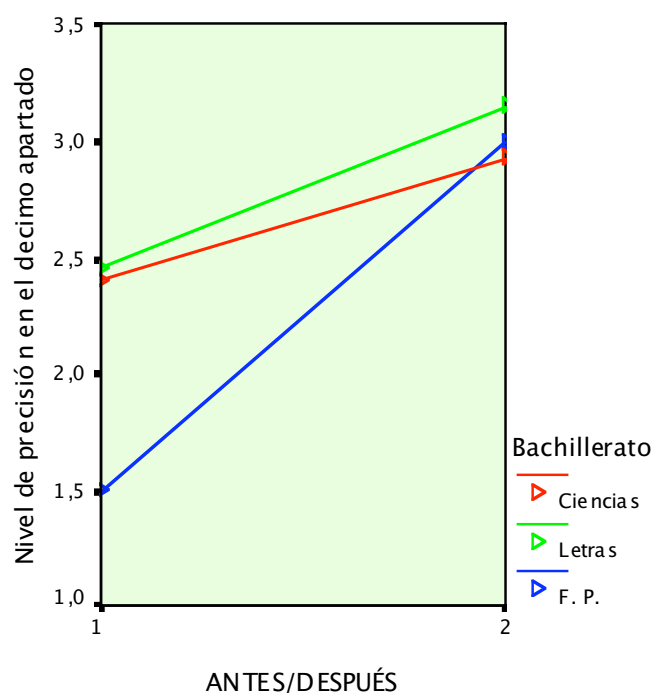


**Figura 657: Ampliación de la comparación: "precisión en el décimo apartado" antes/después, por "bachillerato".**

Se puede ver en la figura adjunta que, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que son más precisos en las actividades que plantean son los de Letras, y los menos precisos son, antes del citado estudio, los de Formación Profesional, y después los de Ciencias. Creemos que los alumnos de Ciencias se relajan bastante cuando plantean sus actividades, al considerar que es poca cosa lo que se les pide, de aquí que no consigan los mejores puestos.

Para poder ver juntos todos los niveles críticos relacionados con la variable "precisión en el décimo apartado", antes y después del estudio del tema y de las técnicas, se incluye la tabla siguiente.

|                                        | Momento                         | Interacción                                       | Figura |
|----------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>PRECISIÓN en el décimo apartado</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                   | 644    |
|                                        | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.903$       | 645    |
|                                        | Antes / después: $p=0.105$      | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.359$          | 646    |
|                                        | Antes / después: $p=0.006^{**}$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.588$        | 647-8  |
|                                        | Antes / después: $p=0.008^{**}$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.938$         | 649-50 |
|                                        | Antes / después: $p=0.182$      | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.115$ | 651    |
|                                        | Antes / después: $p=0.002^{**}$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.433$ | 652-3  |

**Tabla 176: "Precisión en el décimo apartado".**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.12.5. Adecuadas

Se finaliza este apartado utilizando el modelo lineal general y en él también se eligen medidas repetidas del menú Analizar. Ahora se marcan las variables *adecuada en el décimo apartado*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, como variables intra-sujetos. En principio no se eligen ninguna variable inter-sujeto, después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en la adecuación de las actividades planteadas para los niños de Educación Infantil, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F son  $p=0.820>0.05$ , se tiene que afirmar que no existen diferencias significativas entre la adecuación a Educación Infantil de actividades que proponen los alumnos antes y después del estudio del tema. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.820>0.05$ , por lo que se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Esto viene a corroborar lo que se obtenía en el diagrama de frecuencias: las actividades son, mayoritariamente, bastante o muy adecuadas tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas. El porcentaje de las muy adecuadas es mayor después del estudio del tema y de las técnicas (pasa del 69% al 89%, produciéndose un aumento muy significativo). También en este caso el estudio del tema y de las técnicas les ayuda a plantear las actividades más adecuadas para los niños de Educación Infantil.

Para valorar si son adecuadas las actividades que proponen consideramos cinco niveles: nada, algo, poco, bastante y muy adecuadas, valoradas de 0 a 4.

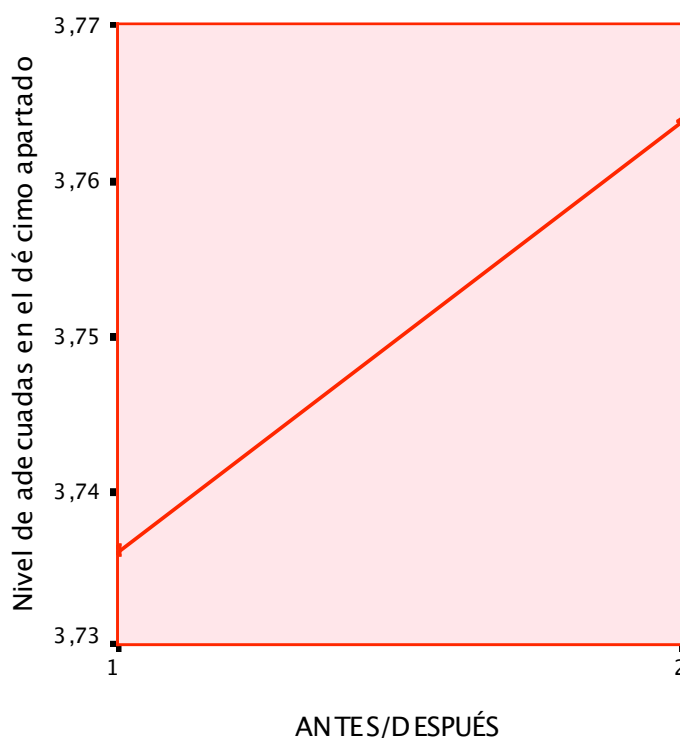


**Figura 658: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después.**

Como ya decíamos en el estudio de frecuencias, en este caso también se ve claro que, después del estudio del tema y de las técnicas, las actividades que plantean los alumnos son más “adecuadas” para trabajar con los niños de Educación Infantil.

## Género

Se empieza tomando como variable inter-sujeto “el género”, para estudiar si las actividades que plantean los alumnos son más o menos “adecuadas” después de estudiarse el tema y las técnicas, respecto a lo que lo eran antes. Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F resultan ser mayores que 0.05, se tiene que rechazar que existan diferencias significativas entre la adecuación de las actividades que plantean los alumnos, antes y después del estudio del tema. Por tanto, se tiene que concluir que no existen diferencias significativas entre los niveles de adecuación de las actividades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro de cada uno de los géneros, ni entre los géneros.



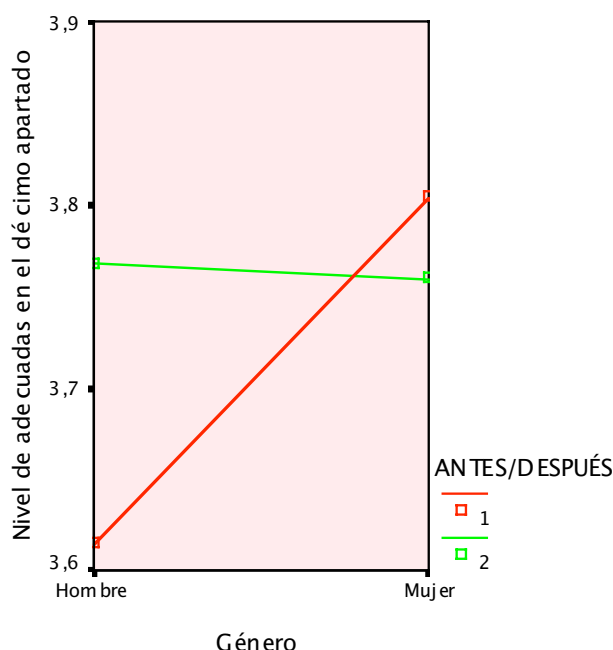


**Figura 659: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “género”.**

La figura que precede apunta que, después del estudio del tema y de las técnicas, para los hombres aumenta la adecuación de las actividades que proponen a los niños de Educación Infantil, sin embargo para las mujeres disminuye. Antes del citado estudio las mujeres proponen actividades más “adecuadas” que los hombres; después de dicho estudio son los hombres los que proponen actividades un poco más “adecuadas” que las mujeres.

### Año de realización

Al comparar cómo son de “adecuadas” las actividades que proponen los alumnos, se obtienen resultados análogos dentro del mismo año y en los distintos “años de realización” de las encuestas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas: los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos son mayores que 0.05, luego “el año de realización” de la prueba no tiene una repercusión significativa en la adecuación de las actividades propuestas por los alumnos.

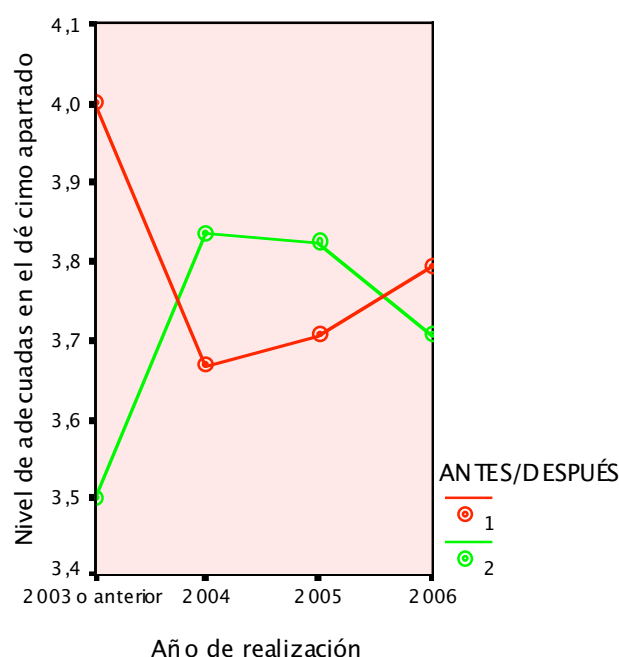


**Figura 660: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, las actividades que proponen los alumnos son más adecuadas para los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004 ó en el 2004/2005; para los que respondieron en el resto de los cursos son menos adecuadas. Antes del mencionado estudio, los alumnos que proponen las actividades más adecuadas son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores, y las menos adecuadas las proponen los que respondieron en 2003/2004. Después del citado estudio la situación se invierte, y los alumnos que respondieron en 2003/2004 propusieron las actividades más adecuadas, y las menos adecuadas son de los que las hicieron en 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

Al estudiar si el que las actividades que proponen los alumnos son “adecuadas” para los niños de Educación Infantil depende del “curso” en que estén matriculados, antes y después del estudio del tema, se consiguen los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos antes indicados mayores que 0.05, luego se puede rechazar la hipótesis de que el que las actividades que proponen los alumnos sean “adecuadas” al nivel de Educación Infantil dependa del “curso”.

Para comparar los distintos cursos se elige la prueba Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados sean iguales. Los niveles críticos que resultan son mayores que 0.05, salvo para los cursos segundo y quinto que da  $p=0.028<0.05$ , luego sólo hay diferencias significativas entre los cursos segundo y quinto. Esta comparación la hacemos siempre pero sólo la comentamos cuando resulta significativa.

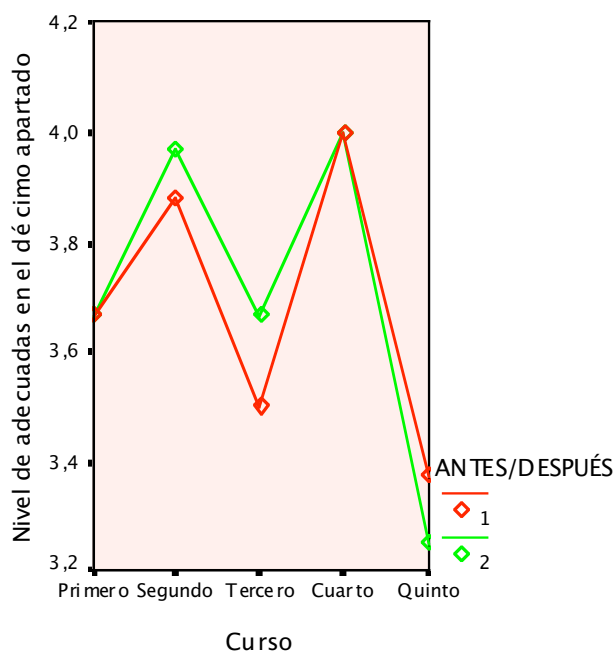


**Figura 661: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, las actividades que proponen los alumnos de segundo y tercero son más adecuadas a los niños de Educación Infantil, son igual de adecuadas las que proponen los de primero y cuarto, y sólo las que proponen los de quinto son menos adecuadas. Otra vez pensamos que puede ser debido a la relajación de los que están en el último curso de carrera.

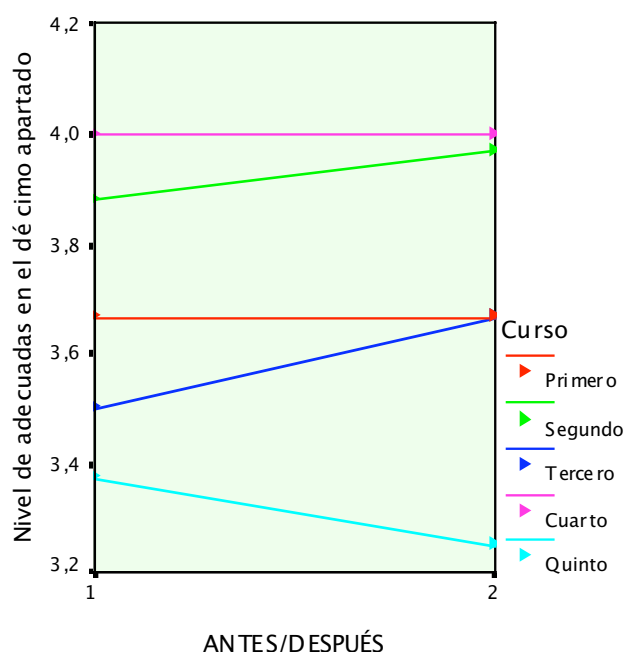


**Figura 662: Ampliación de la comparación: “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “curso”.**

Los alumnos que proponen las actividades más “adecuadas” a los niños de Educación Infantil, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de cuarto, y los que proponen las menos “adecuadas” son los de quinto.

## Edad

Se trabaja ahora con la variable “edad” para ver si depende de ella el que las actividades que propongan los alumnos sean “adecuadas” para los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema. Se consiguen los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos que proporciona el modelo lineal general mayores que 0.05, luego se puede rechazar la hipótesis de que dependa de “la edad” el que las actividades que propongan los alumnos sean “adecuadas” al nivel de Educación Infantil.

Para comparar las distintas edades se elige la prueba Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Los niveles críticos que resultan son mayores que 0.05, luego este estadístico no encuentra diferencias significativas entre los alumnos de las distintas edades.

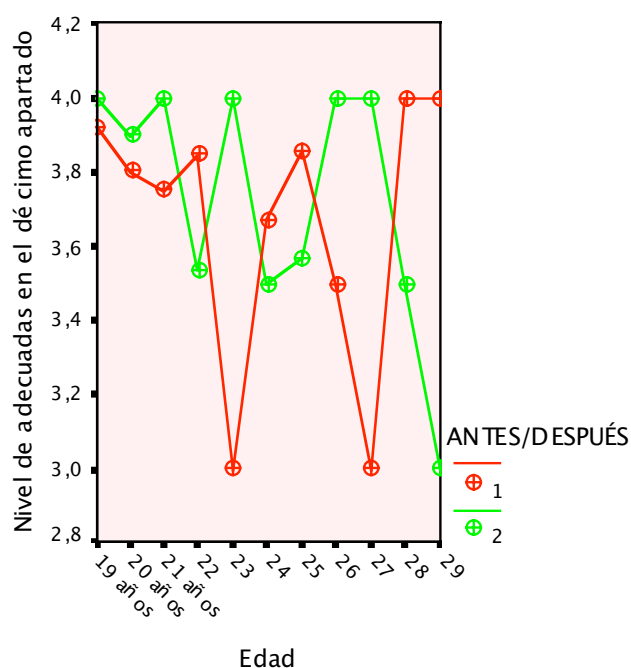


Figura 663: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.

Casi todos los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, proponen unas actividades más “adecuadas” a los niños de Educación Infantil, salvo los que tenían 22, 24, 25, 28 ó 29 años.

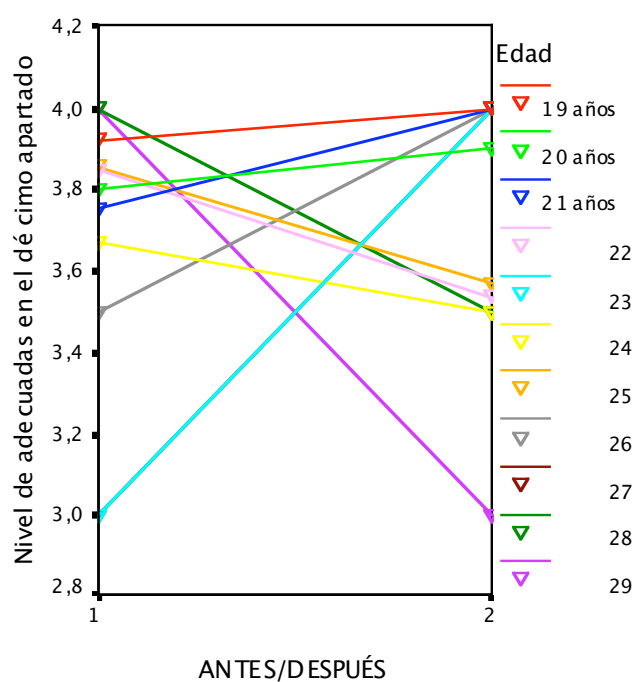


Figura 664: Ampliación de la comparación: “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “edad”.

Los alumnos que proponen las actividades más “adecuadas” para los niños de Educación Infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los que tenían 28 ó 29 años, y las menos “adecuadas”, las proponen los de 23 años. Después del citado estudio, los alumnos que proponen las actividades más “adecuadas” son los que tenían 19, 21, 23 ó 26 años, y las menos adecuadas las proponen los de 29 años.

## Especialidad

Analizando si “la especialidad” influye significativamente en que las actividades que propongan sean más o menos “adecuadas”, se ve que ninguno de los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo lineal general de medidas repetidas es menor que 0.05, luego se puede concluir que el nivel de adecuación de las actividades no depende de “la especialidad”.

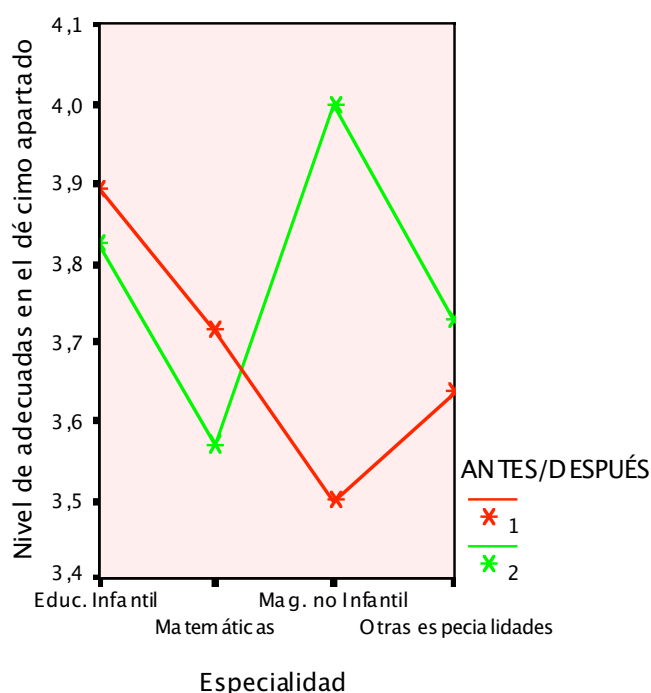


**Figura 665: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “especialidad”.**

La figura adjunta indica que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que proponen las actividades más “adecuadas” son los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y las menos “adecuadas” las proponen los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil. Después del citado estudio, estos últimos —los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil— son los que

proponen las actividades más “adecuadas”, y las menos “adecuadas” las proponen los de Matemáticas. Los alumnos que proponen actividades más “adecuadas”, después del estudio del tema y de las técnicas, son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil y los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas.

## Bachillerato

Se analiza si el hecho de que sean “adecuadas” las actividades que proponen los alumnos a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, depende significativamente del “bachillerato” que cursaran. Como los niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05, se puede pensar que el que las actividades sean más o menos “adecuadas” no depende del “bachillerato” cursado

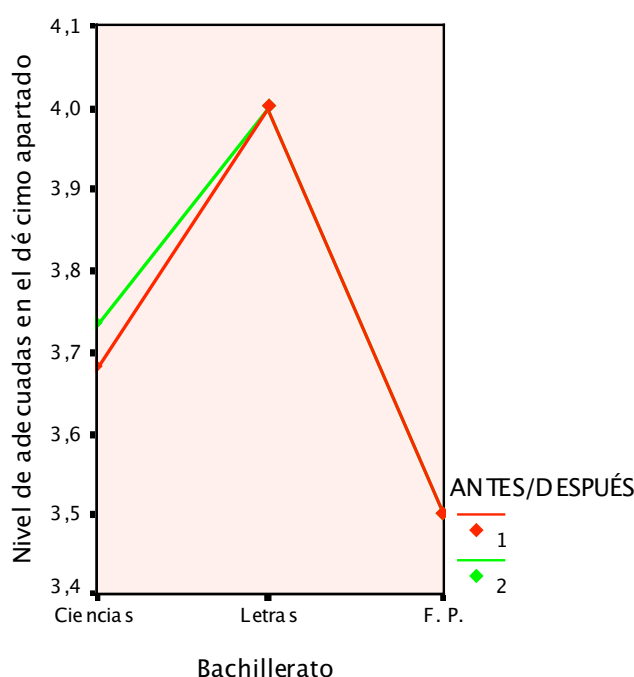


**Figura 666: Estimación de “adecuadas en el décimo apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, hay pocas diferencias en que las actividades que propongan los alumnos sean más o menos “adecuadas” a los niños de Educación Infantil; las actividades que proponen los alumnos de Ciencias son más “adecuadas” y las de los demás son igual de “adecuadas”. Los alumnos que proponen las actividades más “adecuadas”, en ambos momentos, son los de letras, y los que proponen las menos “adecuadas” son los de Formación Profesional.

En la tabla siguiente tenemos todos los niveles críticos relativos a las variables “adecuada en el décimo apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                               | Momento                    | Interacción                                       | Figura |
|-----------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>ADECUADA<br/>en el décimo<br/>apartado</b> | Antes / después: $p=0.820$ |                                                   | 654    |
|                                               | Antes / después: $p=0.666$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.441$       | 655    |
|                                               | Antes / después: $p=0.719$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.717$          | 656    |
|                                               | Antes / después: $p=0.893$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.976$        | 657-8  |
|                                               | Antes / después: $p=0.677$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.180$         | 659-60 |
|                                               | Antes / después: $p=0.597$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.713$ | 661    |
|                                               | Antes / después: $p=0.947$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.985$ | 662    |

**Tabla 177: “Adecuada en el décimo apartado”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.12.6. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado

Se siguen recogiendo, de forma análoga a como se ha hecho en los apartados anteriores, las variaciones experimentadas por cada una de las submuestras de las variables inter-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas, en las distintas variables intra-sujeto que se han analizado anteriormente. Además, se compara cómo quedan cada una de las clases consideradas según las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, teniendo en cuenta ambos momentos.

### Variables intra-sujeto

En la tabla siguiente se va a ir indicando si, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene, aumenta o disminuye cada una de las variables intra-sujeto que se han considerado en este apartado. Como las variables intra-sujeto que se tienen conllevan una mayor facilidad para razonar qué magnitudes se pueden empezar a trabajar en Educación Infantil, cuándo, con qué unidades y por qué, no es necesario utilizar más de un color para que quede claro el estudio que se hace.



| Variable intra-sujeto       | Variación experimentada |
|-----------------------------|-------------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta                 |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta                 |
| <b>Número de unidades</b>   | Aumenta                 |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta                 |
| <b>Adecuadas</b>            | Aumenta                 |

**Tabla 178: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del décimo apartado.**

En la tabla adjunta se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan todas las variables intra-sujeto que figuran en este apartado, por tanto, se puede pensar que el estudio del tema y de las técnicas les ha servido a los alumnos para ser más creativos, para que se les ocurran más magnitudes, para que piensen que se pueden medir con más unidades, para que sean más precisos al redactar las actividades y que tanto las magnitudes como las unidades con que se midan sean más adecuadas para trabajarlas con Educación Infantil.

## Género

En las tablas que vienen a continuación se recogen las variaciones experimentadas por las distintas variables intra-sujeto en las dos submuestras que determina la variable intra-sujeto “género”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En la tabla siguiente se indica cuál es la variación experimentada por las dos submuestras de la variable “género” en cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Número de unidades</b>   | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta              | Aumenta              |
| <b>Adecuadas</b>            | Aumenta              | Disminuye            |

**Tabla 179: Variación experimentada por la variable “género” en el décimo apartado, antes/después.**

Después del estudio del tema y de las técnicas aumenta la mayoría de las variables intra-sujeto de este apartado; en las dos submuestras que determina la variable “género”, sólo hay una disminución en adecuadas en las mujeres.

## Máximos

La tabla siguiente sirve para destacar los grupos de alumnos que alcanzan el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Mujeres        | Mujeres          |
| <b>Número de magnitudes</b> | Hombres        | Hombres          |
| <b>Número de unidades</b>   | Hombres        | Hombres          |
| <b>Precisión</b>            | Mujeres        | Mujeres          |
| <b>Adecuadas</b>            | Mujeres        | Hombres          |

**Tabla 180: Máximos de la variable “género” en el décimo apartado, antes/después.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres consiguen el mayor número de máximos de las variables intra-sujeto de este apartado; después son los hombres.

## Año de realización

Ahora se concentrarán en una tabla las variaciones que experimentan las variables intra-sujeto de este apartado en las submuestras que determinan la variable inter-sujeto “año de realización”, después del estudio del tema y de las técnicas. En otras dos tablas se recogerán los máximos y los mínimos de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

## Variaciones

| Variable intra-sujeto       | Variación en 2003 ó anteriores | Variación en 2004 | Variación en 2005 | Variación en 2006 |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Disminuye                      | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta                        | Aumenta           | Aumenta           | Disminuye         |
| <b>Número de unidades</b>   | Disminuye                      | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Precisión</b>            | Disminuye                      | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           |
| <b>Adecuadas</b>            | Disminuye                      | Aumenta           | Aumenta           | Disminuye         |

**Tabla 181: Variación experimentada por la variable “año de realización” en el décimo apartado, antes/después.**

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto de este apartado; después del estudio del tema y de las técnicas, son los alumnos que respondieron las encuestas en los cursos 2003/2004 y en 2004/2005 los que consiguen mayor número de aumentos, ya que obtienen aumentos en todas las variables.

## Máximos

En la tabla adjunta se acumulan los máximos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, de las variables intra-sujeto de este apartado.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor           | Después es mayor |
|-----------------------------|--------------------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 2003 ó anteriores y 2005 | 2005             |
| <b>Número de magnitudes</b> | 2006                     | 2005             |
| <b>Número de unidades</b>   | 2003 ó anteriores        | 2006             |
| <b>Precisión</b>            | 2003 ó anteriores        | 2004             |
| <b>Adecuadas</b>            | 2003 ó anteriores        | 2004             |

**Tabla 182: Máximos de la variable “año de realización” en el décimo apartado, antes/después.**

Los alumnos que consiguen la mayoría de los máximos, antes del estudio del tema y de las técnicas son los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores; después, los que consiguen mayor número de máximos son los que respondieron las encuestas en 2003/2004 ó en 2004/2005, ambos empatados en número.

## Mínimos

Se destacan en la tabla siguiente las submuestras que tienen los mínimos de las distintas variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor    | Después es menor  |
|-----------------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 2006              | 2003 ó anteriores |
| <b>Número de magnitudes</b> | 2003 ó anteriores | 2003 ó anteriores |
| <b>Número de unidades</b>   | 2004              | 2003 ó anteriores |
| <b>Precisión</b>            | 2005              | 2003 ó anteriores |
| <b>Adecuadas</b>            | 2004              | 2003 ó anteriores |

**Tabla 183: Mínimos de la variable “año de realización” en el décimo apartado, antes/después.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas los alumnos que tienen mayor número de mínimos son los que respondieron las encuestas en 2003/2004; después del citado estudio, todos los mínimos son para los que respondieron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores.

## Curso

En las tablas que vienen a continuación se concentran las variaciones de las variables intra-sujeto en las distintas submuestras que determina la variable inter-sujeto “curso”, los máximos y los mínimos antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

La tabla que acompaña marca las variaciones de las submuestras originadas por la variable “curso” en cada una de las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Variación en primero | Variación en segundo | Variación en tercero | Variación en cuarto | Variaciones en quinto |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|-----------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Disminuye           | Se mantiene           |
| <b>Número de magnitudes</b> | Se mantiene          | Se mantiene          | Aumenta              | Se mantiene         | Se mantiene           |
| <b>Número de unidades</b>   | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta               |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta              | Aumenta             | Aumenta               |
| <b>Adecuadas</b>            | Se mantiene          | Aumenta              | Aumenta              | Se mantiene         | Disminuye             |

**Tabla 184: Variación experimentada por la variable “curso” en el décimo apartado, antes/después.**

Hay una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto de este apartado, después del estudio del tema y de las técnicas. Los alumnos de tercero consiguen aumentos en todas las variables, después van los de segundo, que tienen sólo un “se mantiene” y lo demás son aumentos.

## Máximos

La tabla siguiente destaca los máximos de las variables intra-sujeto de este apartado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Cuarto         | Cuarto           |
| <b>Número de magnitudes</b> | Cuarto         | Tercero          |
| <b>Número de unidades</b>   | Tercero        | Cuarto           |
| <b>Precisión</b>            | Cuarto         | Primero y cuarto |
| <b>Adecuadas</b>            | Cuarto         | Cuarto           |

**Tabla 185: Máximos de la variable “curso” en el décimo apartado, antes/después.**

Los alumnos que alcanzan la mayoría de los máximos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de cuarto.

## Mínimos

En la tabla siguiente se tienen los mínimos de las distintas variables intra-sujeto con que se cuenta en este apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Primero        | Quinto           |
| <b>Número de magnitudes</b> | Primero        | Primero          |
| <b>Número de unidades</b>   | Quinto         | Primero          |
| <b>Precisión</b>            | Primero        | Quinto           |
| <b>Adecuadas</b>            | Quinto         | Quinto           |

**Tabla 186: Mínimos de la variable “curso” en el décimo apartado, antes/después.**

Los mínimos se los reparten los alumnos de primero y quinto, siendo los de primero los que tienen la mayoría antes del estudio del tema y de las técnicas; y después, los de quinto.

## Edad

Se acumulan en las tablas siguientes las variaciones de las variables intra-sujeto en las distintas submuestras que determina la variable inter-sujeto “edad”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En la tabla adjunta se concentran las variaciones, después del estudio del tema y de las técnicas, de las variables intra-sujeto consideradas en este apartado.

| Variable intra-sujeto       | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 23 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|-----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>Creatividad</b>          | A       | SM      | A       | D       | A       | A       | A       | A       | A       | D       | SM      |
| <b>Número de magnitudes</b> | A       | A       | D       | A       | A       | A       | D       | A       | A       | D       | D       |
| <b>Número de unidades</b>   | A       | SM      | A       | A       | D       | A       | A       | D       | A       | A       | A       |
| <b>Precisión</b>            | A       | A       | A       | A       | A       | A       | SM      | SM      | D       | D       | SM      |
| <b>Adecuadas</b>            | A       | A       | A       | D       | A       | D       | D       | A       | A       | D       | D       |

**Tabla 187: Variación experimentada por la variable “edad” en el décimo apartado, antes/después.**

Después del estudio del tema y de las técnicas se obtiene una mayoría de aumentos en las variables intra-sujeto de este apartado. Los alumnos de 19 años consiguen aumentos en todas las variables; después les siguen los de 23, 24 y 27 años; todos ellos sólo tienen una disminución, y lo demás son aumentos.

## Máximos

En la tabla que viene a continuación se destacan las submuestras de alumnos que consiguen los niveles máximos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor     |
|-----------------------------|----------------|----------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 28 años        | 19 años              |
| <b>Número de magnitudes</b> | 28 y 29 años   | 22 años              |
| <b>Número de unidades</b>   | 23 años        | 25 años              |
| <b>Precisión</b>            | 25 años        | 19 años              |
| <b>Adecuadas</b>            | 28 y 29 años   | 19, 21, 23 y 26 años |

**Tabla 188: Máximos de la variable “edad” en el décimo apartado, antes/después.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas los alumnos que alcanzan la mayoría de los máximos son los de 28 años; después, los de 19 años.

## Mínimos

Se señalan en la tabla siguiente las submuestras de alumnos que tienen el menor nivel en las variables intra-sujeto de este apartado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | 26 años        | 24 y 26 años     |
| <b>Número de magnitudes</b> | 26 años        | 21 años          |
| <b>Número de unidades</b>   | 24 años        | 26 años          |
| <b>Precisión</b>            | 24 años        | 26 años          |
| <b>Adecuadas</b>            | 23 años        | 29 años          |

**Tabla 189: Mínimos de la variable “edad” en el décimo apartado, antes/después.**

Los alumnos de 24 y 26 años tienen el mayor número de mínimos antes del estudio del tema y de las técnicas; después de dicho estudio siguen los de 26 años con la mayoría de los mínimos.

## Especialidad

Se siguen acumulando en las tablas que vienen a continuación las variaciones de las variables intra-sujeto en cada una de las submuestras que determina la variable inter-sujeto “especialidad”, después del estudio del tema y de las técnicas; también se señalan los máximos y los mínimos en ambos momentos.

## Variaciones

En esta tabla se indican las variaciones que, después del estudio del tema y de las técnicas, experimentan las submuestras de la variable “especialidad”, en cada una de las variables intra-sujeto de este apartado.

| Variable intra-sujeto       | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|-----------------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Disminuye          | Aumenta     | Aumenta                | Disminuye            |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta            | Disminuye   | Disminuye              | Se mantiene          |
| <b>Número de unidades</b>   | Aumenta            | Aumenta     | Disminuye              | Aumenta              |
| <b>Precisión</b>            | Disminuye          | Aumenta     | Aumenta                | Disminuye            |
| <b>Adecuadas</b>            | Disminuye          | Disminuye   | Aumenta                | Aumenta              |

**Tabla 190: Variación experimentada por la variable “especialidad” en el décimo apartado, antes/después.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, hay igual número de aumentos que de se mantiene y disminuye, en las variables intra-sujeto de este apartado; siendo los alumnos de Matemáticas y los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil los que alcanzan mayor número de ellos —aumentos.

## Máximos

Se concentran en la tabla siguiente todas las submuestras de la variable “especialidad” que consiguen los máximos en las variables intra-sujeto que estamos considerando en este apartado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor         | Después es mayor       |
|-----------------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Matemáticas            | Educación Infantil     |
| <b>Número de magnitudes</b> | Otras especialidades   | Educación Infantil     |
| <b>Número de unidades</b>   | Magisterio no Infantil | Matemáticas            |
| <b>Precisión</b>            | Matemáticas            | Educación Infantil     |
| <b>Adecuadas</b>            | Educación Infantil     | Magisterio no Infantil |

**Tabla 191: Máximos de la variable “especialidad” en el décimo apartado, antes/después.**

Los alumnos que alcanzan mayor número de máximos, antes del estudio del tema y de las técnicas, son los de Matemáticas; después pasan a ser los de Educación Infantil.

## Mínimos

En la tabla adjunta se señalan las submuestras que tienen los mínimos en las variables intra-sujeto de este apartado, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor                   | Después es menor       |
|-----------------------------|----------------------------------|------------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Otras especialidades             | Magisterio no Infantil |
| <b>Número de magnitudes</b> | Educación Infantil y Matemáticas | Magisterio no Infantil |
| <b>Número de unidades</b>   | Educación Infantil               | Magisterio no Infantil |
| <b>Precisión</b>            | Otras especialidades             | Magisterio no Infantil |
| <b>Adecuadas</b>            | Magisterio no Infantil           | Matemáticas            |

**Tabla 192: Mínimos de la variable “especialidad” en el décimo apartado, antes/después.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas los alumnos que tienen mayor número de mínimos son los de Educación Infantil y los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas, ambos con el mismo número; después de dicho estudio, la mayoría de los mínimos son para los magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Se condensan en las tablas que vienen a continuación las variaciones de las variables intra-sujeto en cada una de las submuestras a que da lugar la variable inter-sujeto “bachillerato”, después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En la tabla adjunta se indican las variaciones que experimentan, después del estudio del tema y de las técnicas, las submuestras de la variable inter-sujeto “bachillerato” en todas las variables intra-sujeto.

| Variable intra-sujeto       | Ciencias | Letras      | F P         |
|-----------------------------|----------|-------------|-------------|
| <b>Creatividad</b>          | Aumenta  | Aumenta     | Aumenta     |
| <b>Número de magnitudes</b> | Aumenta  | Aumenta     | Se mantiene |
| <b>Número de unidades</b>   | Aumenta  | Aumenta     | Aumenta     |
| <b>Precisión</b>            | Aumenta  | Aumenta     | Aumenta     |
| <b>Adecuadas</b>            | Aumenta  | Se mantiene | Se mantiene |

**Tabla 193: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en el décimo apartado, antes/después.**

En esta tabla se puede observar que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos consiguen una mayoría de aumentos en las



variables intra-sujeto de este apartado, siendo los alumnos Ciencias los que consiguen aumentos en todas las variables.

## Máximos

Se destacan en la tabla que viene a continuación las submuestras que consiguen los máximos en las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| <b>Creatividad</b>          | Letras         | Letras           |
| <b>Número de magnitudes</b> | Ciencias       | Letras           |
| <b>Número de unidades</b>   | Ciencias       | Ciencias         |
| <b>Precisión</b>            | Letras         | Letras           |
| <b>Adecuadas</b>            | Letras         | Letras           |

**Tabla 194: Máximos de la variable “bachillerato” en el décimo apartado, antes/después.**

En esta tabla se puede observar que todos los máximos los logran entre los alumnos de Ciencias y Letras, aunque los que consiguen mayor número de máximos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, son los de Letras.

## Mínimos

Finalmente se presentan en la tabla siguiente los grupos de alumnos que toman los valores mínimos en las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto       | Antes es menor         | Después es menor       |
|-----------------------------|------------------------|------------------------|
| <b>Creatividad</b>          | FP                     | Ciencias y FP          |
| <b>Número de magnitudes</b> | Letras                 | FP                     |
| <b>Número de unidades</b>   | FP                     | FP                     |
| <b>Precisión</b>            | Otras especialidades   | Magisterio no Infantil |
| <b>Adecuadas</b>            | Magisterio no Infantil | Matemáticas            |

**Tabla 195: Mínimos de la variable “bachillerato” en el décimo apartado, antes/después.**

Los alumnos que tienen mayor número de mínimos, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de FP.

### 5.3.13. Estudio Estadístico comparativo de algunos aspectos de los Apartados Tercero y Décimo

Se van a comparar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, “la creatividad” y “la precisión” con que los alumnos proponen las actividades a los niños de Educación Infantil, en el tercero y en el décimo apartado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

La razón es que la pregunta que se hacía en el tercer apartado, en la Evaluación Inicial, decía: plantea tres actividades que podrías realizar con niños de Educación Infantil, de 0 a 6 años, sobre "las Magnitudes y su Medida", sin consultar ningún material ni preguntarle a nadie; y en la Evaluación Final se cambio por: plantea tres actividades que podrías realizar con niños de Educación Infantil, de 0 a 6 años, sobre “las Magnitudes y su Medida”, sin consultar ningún material ni preguntarle a nadie, tan sólo puedes usar los conocimientos que hayas aprendido cuando te explicamos el tema.

Sin embargo, el décimo apartado de la Evaluación Inicial y el decimoprimer de Evaluación Final decían: plantea, con cada una de las magnitudes y las medidas señaladas, tres actividades que se puedan llevar a cabo en Educación Infantil. Conviene que precises cómo vas a realizar dichas actividades.

Para valorar las respuestas, como ya hemos comentado antes, hemos tenido en cuenta, tanto en el tercer apartado como en el décimo, “la creatividad” y “la precisión” con que han planteado las actividades. Debido a que en el tercer apartado no se les permite usar otro material más que los conocimientos que tengan o hayan adquirido después de estudiarse el tema y las técnicas, y en el décimo pueden utilizar lo que consideren oportuno, además de que con las preguntas planteadas en los apartados que van del tercero al décimo han tenido la posibilidad de recordar otras cosas que pueden ayudarles a plantear las actividades, nos ha parecido conveniente estudiar si esto repercute en “la creatividad” y en “la precisión” con que plantean dichas actividades.

#### 5.3.13.1. Creatividad

Se considera “la creatividad” con que los alumnos proponen las actividades a los niños de Educación infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas, para analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si influye significativamente en que dichas actividades

sean las del tercer apartado o las del décimo. Se toman como variables intra-sujetos *creatividad en el tercer apartado* y *creatividad en el décimo apartado*. En principio, no se toma ninguna variable inter-sujeto; después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene en que las actividades sean del tercer apartado o del décimo sobre “la creatividad”, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.001<0.05$ , se puede afirmar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, existen diferencias muy significativas en “la creatividad” de los alumnos, entre los apartados tercero y décimo. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.001<0.05$ , por ello, se tiene que rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

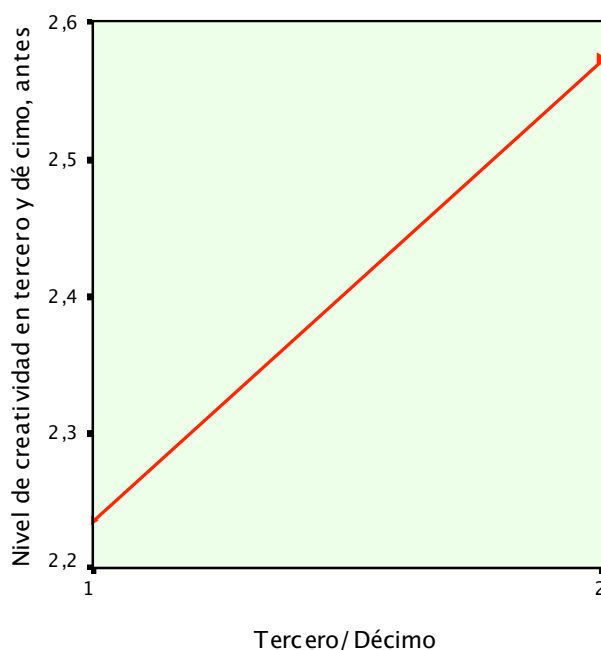


**Figura 667: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes.**

En el décimo apartado los alumnos son más creativos en las actividades que proponen a los niños de Educación Infantil que en el tercero, esto quiere decir que cuando utilizan más materiales para preparar sus actividades, éstas son más originales.

También se analizan los resultados de “la creatividad” después del estudio del tema y de las técnicas, y los niveles críticos asociados a

cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.029<0.05$ , los mismos resultados se obtienen para niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F. Por tanto, se puede afirmar que, después del estudio del tema y de las técnicas, existen diferencias significativas en “la creatividad” de los alumnos, entre los apartados tercero y décimo. El contraste de los efectos intra-sujetos da también  $0.029<0.05$ , esto quiere decir que la media total es distinta de cero.

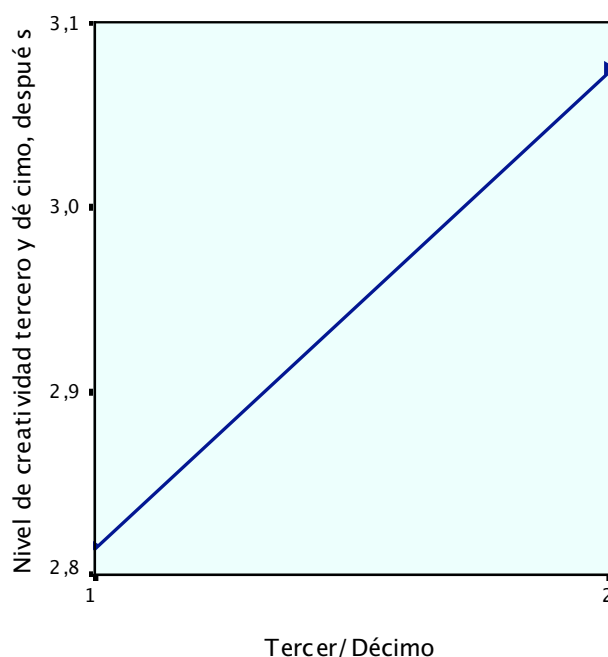


**Figura 668: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después.**

En esta figura se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, “la creatividad” con que proponen las actividades los alumnos aumenta en el décimo apartado respecto de la que tenían en el tercero. Se puede decir, por tanto, que, también en este caso, “la creatividad” es mayor cuando se utilizan varios materiales.

## Género

Se elige como factor inter-sujeto “el género”, y para estudiar si hay deferencias significativas dentro de cada género y entre los géneros con respecto a “la creatividad” usada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. En este caso los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados valen  $p=0.002<0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada género, y  $p=0.961>0.05$  cuando se analizan entre los géneros. Los niveles críticos

asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados.

Se puede destacar, por tanto, que existen diferencias significativas en “la creatividad” usada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil entre los apartados tercero y décimo, antes del citado estudio, dentro de cada género, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

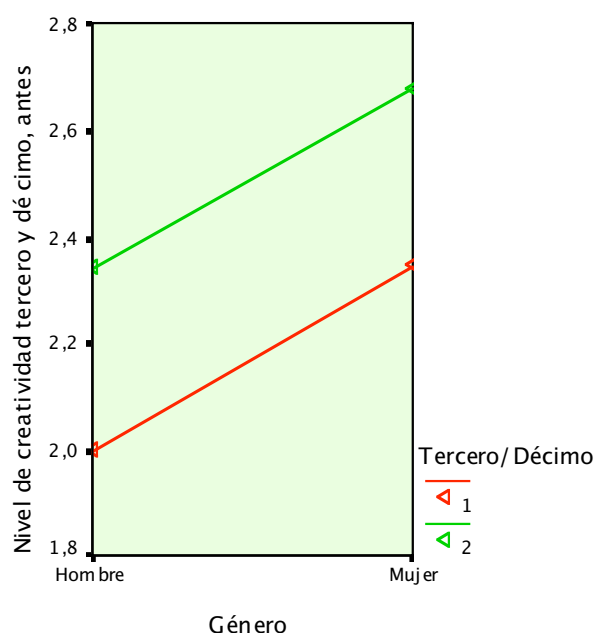


**Figura 669: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “género”.**

Esta figura nos indica que en el décimo apartado “la creatividad” con que los alumnos proponen las actividades a los niños es mayor que en el tercero. Las mujeres son más creativas que los hombres en las actividades propuestas, en ambos apartados.

De forma análoga a como hemos hecho antes, se elige como factor inter-sujeto “el género” y se estudia si hay diferencias significativas dentro de cada género y entre los géneros con respecto a “la creatividad” usada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, después del estudio del tema y de las técnicas. En este caso los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados valen  $p=0.002<0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada género, y  $p=0.340>0.05$  cuando se analizan entre los géneros. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Como puede observarse los resultados son bastante

parecidos a los anteriores, se puede decir, por tanto, que existen diferencias significativas en “la creatividad” usada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil entre los apartados tercero y décimo, antes del citado estudio, dentro de cada género, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

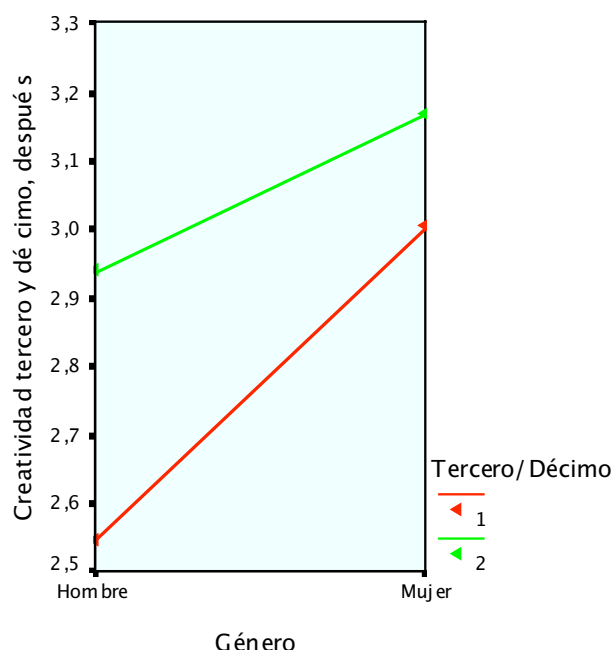


**Figura 670: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “género”.**

La figura anterior y ésta son bastante parecidas, y por tanto, los comentarios que se hicieron entonces pueden servir ahora. Sólo destacar que los niveles alcanzados, tanto en “la creatividad” con que responden al apartado tercero como al décimo, es mayor en ambos casos.

### Año de realización

Se elige como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver cómo influye la utilización o no de otros materiales en “la creatividad” de los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños de Educación Infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” para proponer actividades, en los apartados tercero y décimo, no depende del “año de realización”.

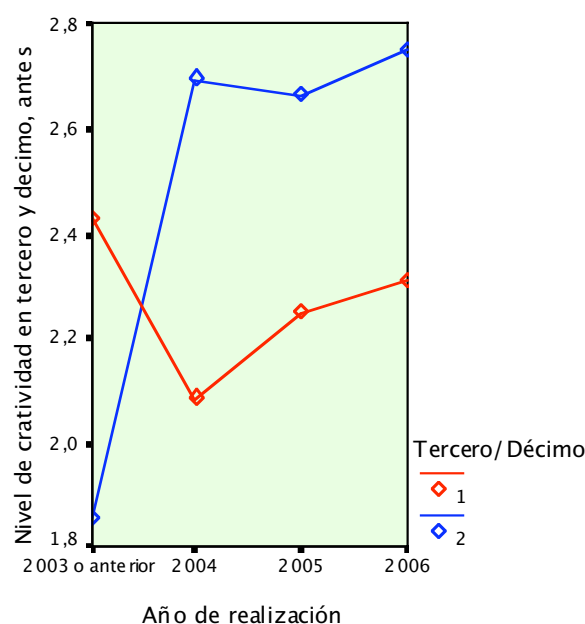


**Figura 671: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “año de realización”.**

Observando la figura precedente, se puede afirmar que, en términos generales, los alumnos son más creativos cuando plantean las actividades a los niños en el décimo apartado que en el tercero; sólo los alumnos que respondieron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores son menos creativos.

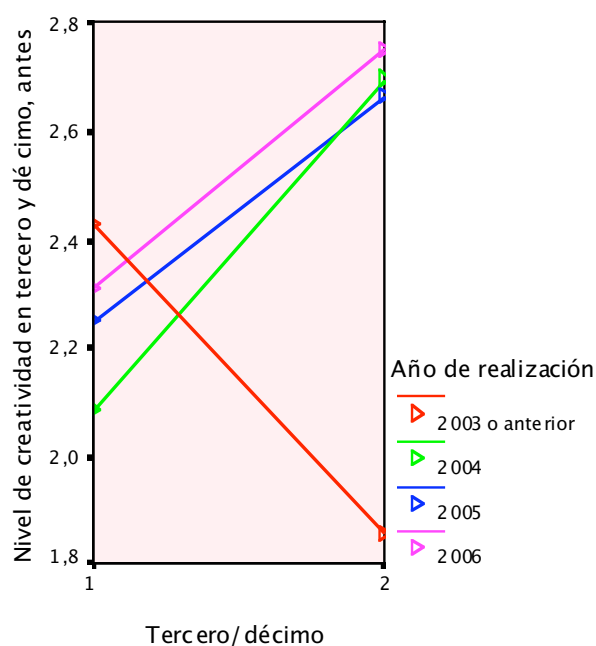


**Figura 672: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “año de realización”.**

Esta figura la hemos elegido porque los niveles de algunos parámetros quedaban muy próximos en la anterior. Aquí se ve que en algunos años de realización de las encuestas ha aumentado más “la creatividad” que en otros.

Después del estudio del tema y de las técnicas, el modelo lineal general de medidas repetidas, en los distintos estadísticos que proporciona, marca niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego, tampoco en este caso, se puede afirmar que “la creatividad” para proponer actividades, en los apartados tercero y décimo, después del estudio del tema y de las técnicas, dependa del “año de realización”.

Como los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados valen  $p=0.059>0.05$ , pero muy próximo a 0.05, cuando se analizan entre los géneros entre los años de realización, para comparar los distintos años de realización se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso se observa que todos los niveles críticos entre Infantil y otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas son  $p=0.028<0.05$ , en los demás casos son mayores que 0.05, sólo se han encontrado diferencias significativas entre estas dos especialidades.

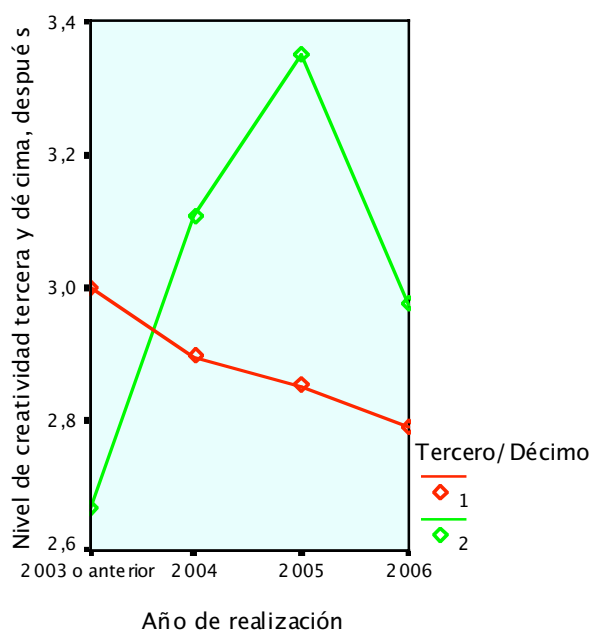


**Figura 673: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “año de realización”.**



Si se compara esta figura con la anterior, se observa que son bastante parecidas, por tanto los comentarios son los mismos y no los vamos a repetir. Sólo indicar que los niveles en esta figura son mayores que en la anterior en ambos casos.

## Curso

Se estudia si la variable inter-sujeto “el curso” influye en “la creatividad” con que los alumnos plantean actividades a los niños de Educación Infantil, antes del estudio del tema, en los apartados tercero y décimo. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” con que los alumnos proponen las actividades a los niños, en los apartados tercero y décimo, no depende del “curso”.

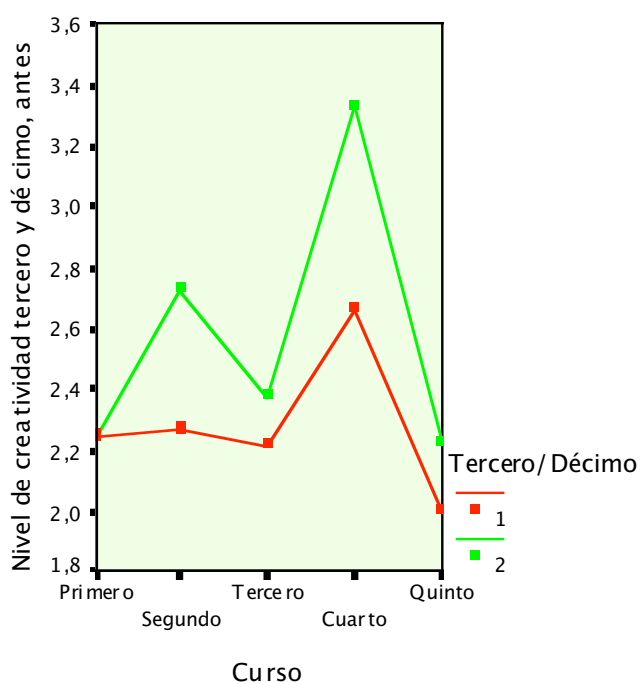


**Figura 674: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “curso”.**

“La creatividad” es mayor para casi todos los alumnos en el décimo apartado que en el tercero, sólo los alumnos que estaban matriculados en primer curso tienen la misma creatividad al plantear las actividades en ambos apartados.

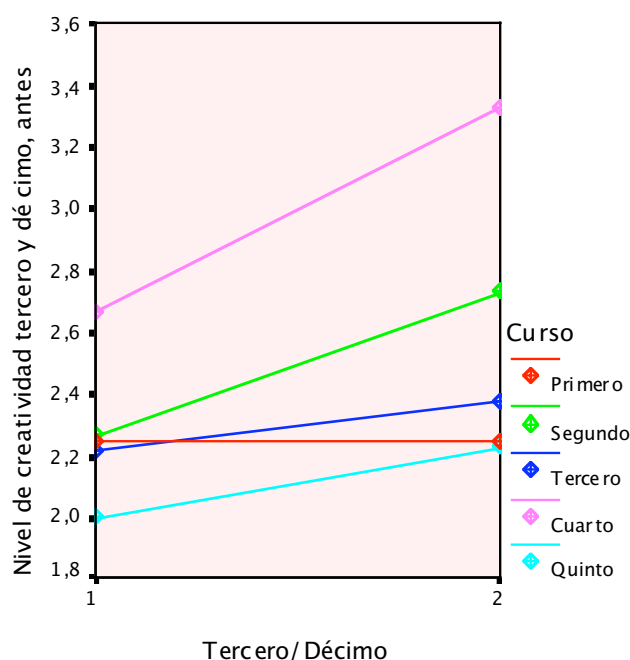


**Figura 675: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “curso”.**

Elegimos esta figura para que queden más claros los niveles de cada una de las submuestras de alumnos; aquí, entre otras cosas, se ve claro que los alumnos de primero y quinto tienen la misma creatividad en el apartado décimo, y son los que tienen la menor creatividad.

Después del estudio del tema y de las técnicas, se sigue trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas para razonar si la variable inter-sujeto “el curso” influye en “la creatividad” con que los alumnos plantean actividades a los niños de Educación Infantil en los apartados tercero y décimo. En los distintos estadísticos que proporciona dicho modelo, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” con que los alumnos proponen las actividades a los niños, en los apartados tercero y décimo, después del estudio del tema y de las técnicas, no depende del “curso”.

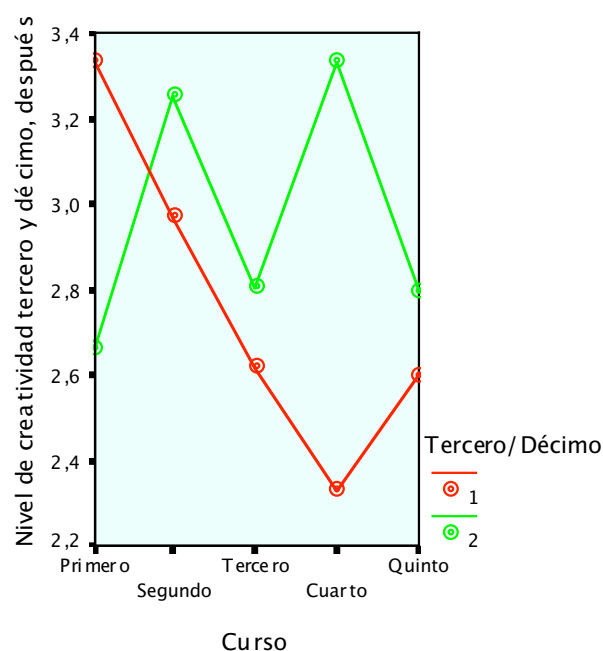


**Figura 676: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “curso”.**

En este caso los resultados son bastante parecidos a los que se tenían antes del estudio del tema y de las técnicas: en el décimo apartado “la creatividad” es mayor para casi todos los alumnos, excepto para los que estaban matriculados en primero, que en este caso tienen menor creatividad en el décimo que en el tercero.

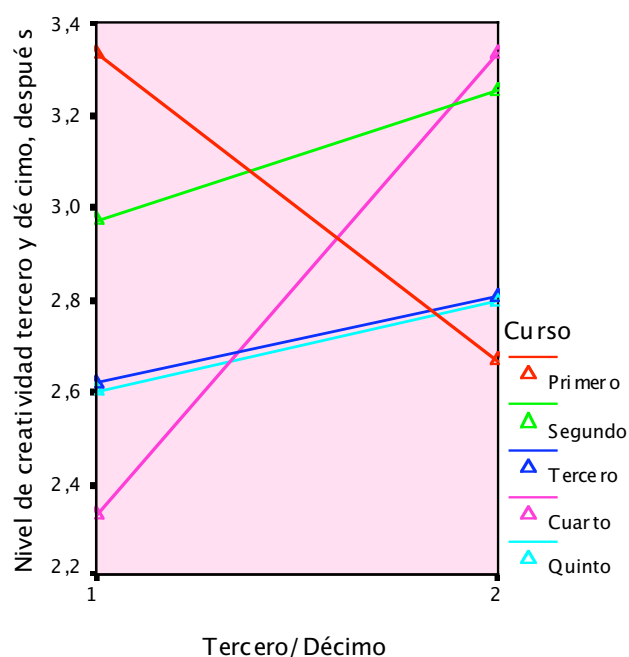


**Figura 677: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “curso”.**

Se selecciona esta figura porque en la anterior no quedan muy claros los niveles que alcanzan algunas submuestras de alumnos, aquí, por ejemplo se ve que los alumnos de tercero y quinto consiguen prácticamente los mismos niveles.

## Edad

Se coge como variable inter-sujeto “la edad” de los alumnos para ver cómo influye en “la creatividad” para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas, en los apartados tercero y décimo. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la edad” no influye significativamente en “la creatividad” con que proponen las actividades, antes de dicho estudio, en ambos apartados

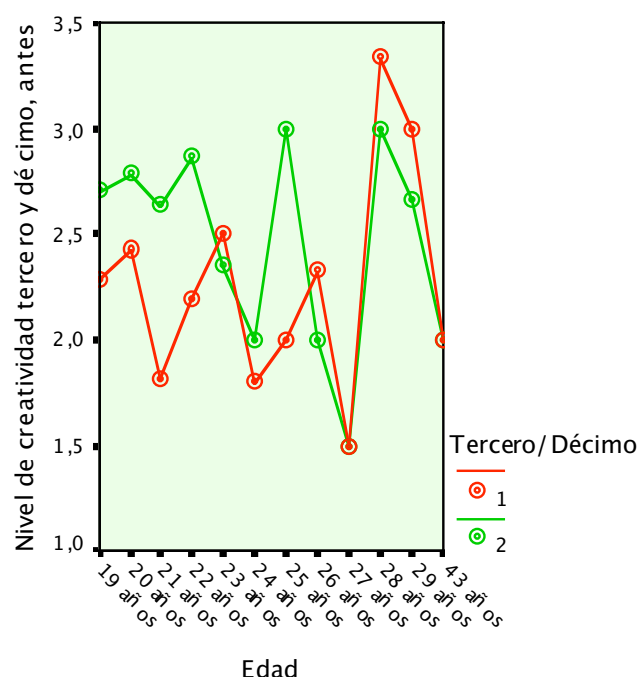


**Figura 678: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “edad”.**

La mayoría de los alumnos plantean actividades a los niños de Educación Infantil más creativas en el apartado décimo que en el tercero, sólo los alumnos de 23, 26, 28 y 29 años plantean actividades más creativas en el tercero que en el décimo, y los de 27 y 43 años las actividades que plantean son igual de creativas en ambos apartados.

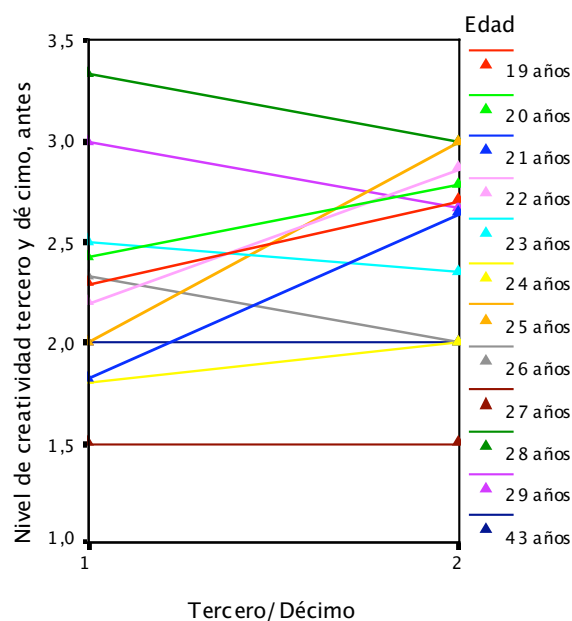


**Figura 679: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “edad”.**

Como son muchas las submuestra que se obtienen con la variable inter-sujeto “edad”, se elige esta figura para confirmar los que se observa en la anterior.

Después del estudio del tema y de las técnicas, se vuelve a considerar si “la edad” influye en “la creatividad” con que los alumnos proponen actividades para los niños en los apartados tercero y décimo. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas, y se obtienen, en los distintos estadísticos, niveles críticos asociados mayores que 0.05. Por tanto, se puede afirmar que “la edad” no influye significativamente en “la creatividad” con que plantean las actividades en los apartados tercero y décimo.

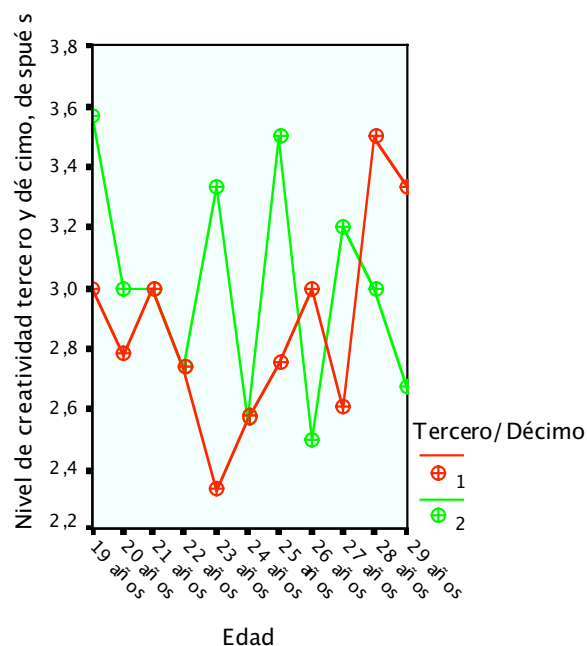


**Figura 680: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “edad”.**

Casi todos los alumnos son más creativos cuando se les permite utilizar cualquier material, que cuando sólo pueden usar los conocimientos que tienen, excepto los alumnos con 26, 28 y 29 años que son menos creativos, y los de 21, 22 y 24 años que son igual de creativos (también puede ser que todos estos no se molestaran en buscase ningún material adicional).

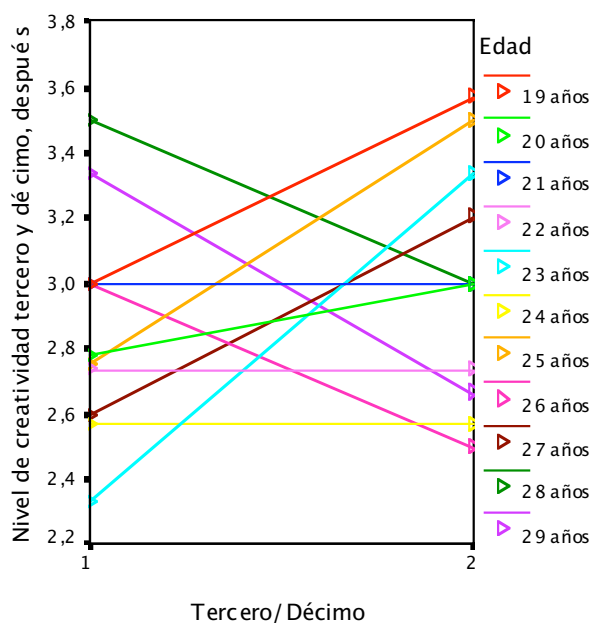


**Figura 681: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “edad”.**

Como son muchas las submuestras que origina la variable inter-sujeto “edad” se toma la figura adjunta para que ayude a entender mejor la anterior.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si influye significativamente en “la creatividad” utilizada para proponer actividades a los niños en el tercero y en el décimo apartado, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.001<0.05$  cuando se considera la influencia de “la especialidad” en la creatividad dentro de la misma especialidad, y  $p=0.427>0.05$  cuando se considera entre las distintas especialidades. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en la creatividad con que los alumnos proponen las actividades a los niños, en el tercer apartado y en el décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata de la misma especialidad, pero no existen diferencias significativas entre las distintas especialidades.

Para comparar las distintas especialidades se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso se observa que todos los niveles críticos son mayores que 0.05, luego este estadístico no ha encontrado diferencias significativas como era de esperar.

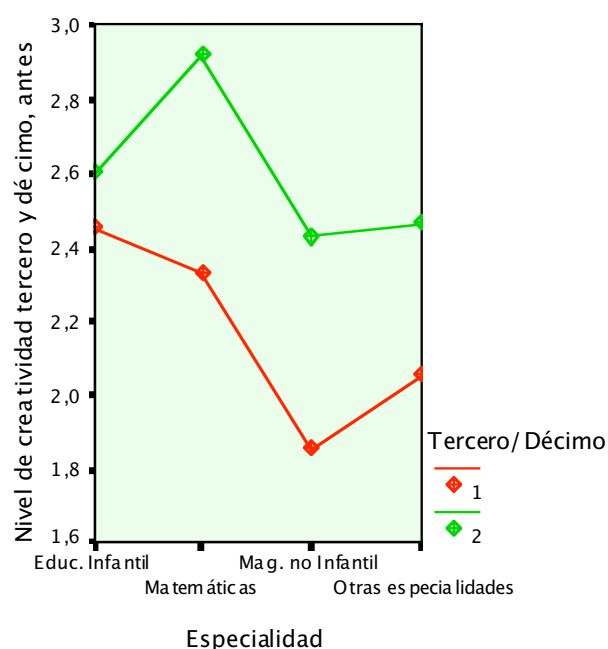


**Figura 682: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “especialidad”.**

Todos los alumnos son más creativos en las actividades que plantean, antes del estudio del tema y de las técnicas, en el apartado décimo que en el tercero; esto quiere decir que el uso de otros materiales y los razonamientos que han realizado entre estos dos apartados han enriquecido la creatividad.

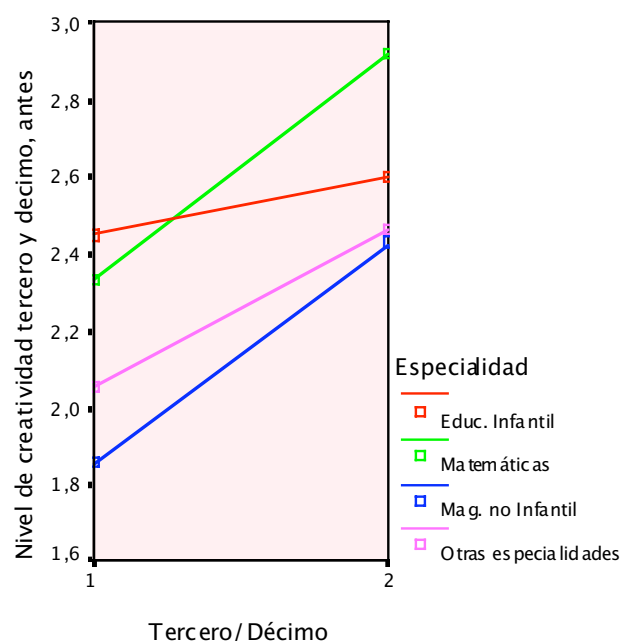


**Figura 683: Ampliación de la comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “especialidad”.**



Se elige esta figura para completar los razonamientos que queramos hacer en la anterior, ya que entonces los niveles de algunas submuestras quedaban muy próximos.

Se continúa trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas para estudiar si “la especialidad” de los alumnos influye en “la creatividad” con que proponen las actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la especialidad” no influye significativamente en “la creatividad” con que proponen las actividades a los niños de Educación Infantil, en ambos apartados, después de dicho estudio.

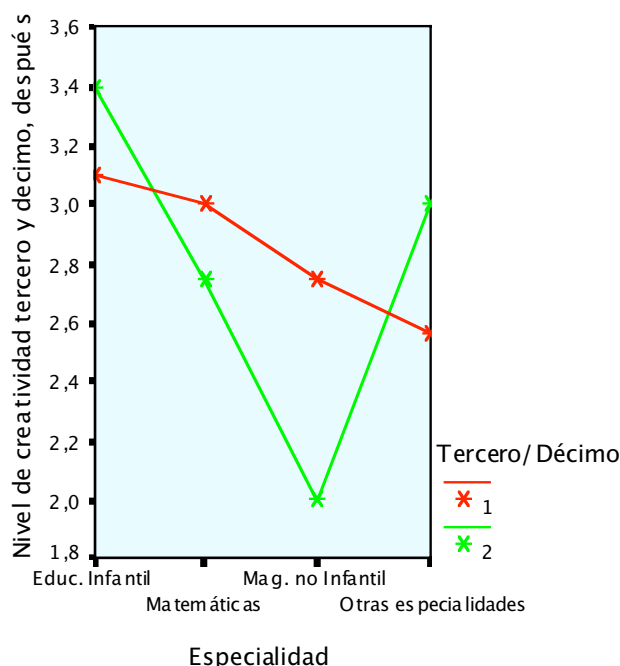


**Figura 684: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “especialidad”.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas son más creativos en las actividades que plantean en el décimo apartado que en las del tercero, los demás son menos creativos. Pensamos que puede ser porque se conforman con las actividades que plantearon en el tercer apartado y cuando llegan al décimo piensan que ya las han planteado antes y a penas si se esfuerzan en rellenarlas.

## Bachillerato

Se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para ver cómo influye en “la creatividad” de los alumnos a la hora de plantear actividades a los niños, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se observa que, en los distintos estadísticos que proporciona, se obtienen niveles críticos asociados mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la creatividad” para proponer actividades no depende significativamente del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

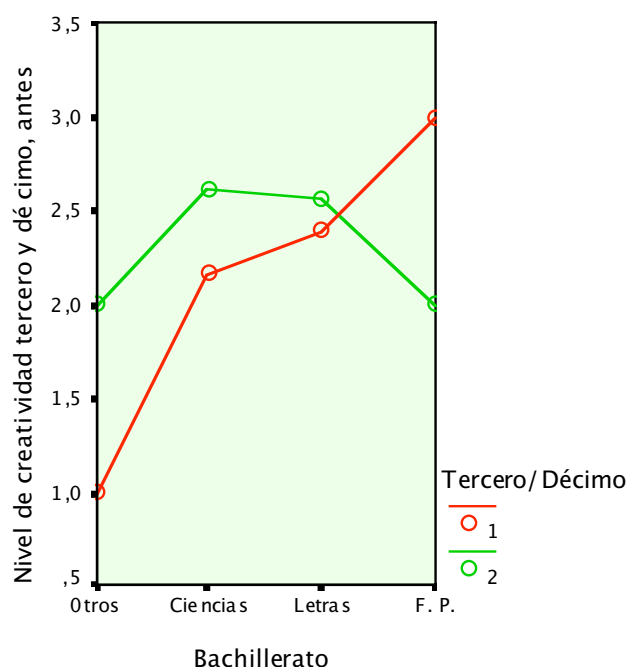


**Figura 685: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, antes, “bachillerato”.**

Casi todos los alumnos son más creativos en las actividades que plantean en el apartado décimo que en las del tercero, salvo los alumnos que proceden de Formación Profesional que son menos creativos. Puede ser que estos alumnos se conformaran con las actividades que plantearon antes y no se esforzaran en plantear buenas actividades después.

Después del estudio del tema y de las técnicas la situación es bastante parecida a la que había antes: niveles críticos asociados a los distintos estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “la

creatividad” para proponer actividades, en los apartados tercero y décimo, no depende significativamente del “bachillerato” que hubieran cursado los alumnos.

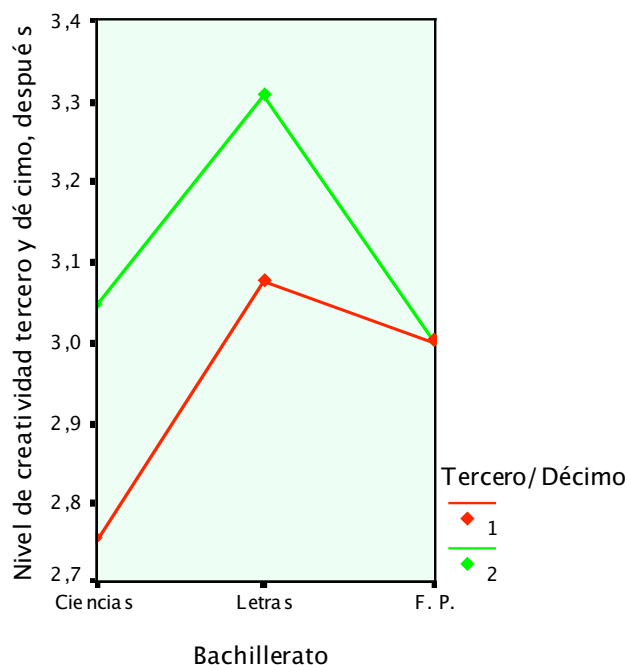


Figura 686: Comparación de “la creatividad entre tercero y décimo”, después, “bachillerato”.

En esta figura no aparece la submuestra de alumnos que llamamos otros —alumnos que proceden de acceso a la Universidad para mayores de 25 años—, la razón es que estos alumnos no respondieron a este apartado.

En las tablas que vienen a continuación se recogen todos los niveles críticos asociados a “la creatividad” en los apartados tercero y décimo, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                          | Momento                        | Interacción                            | Figura          |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------|-----------------|
| CREATIVIDAD<br>en el tercero y<br>en el décimo,<br>antes | Tercero/décimo: $p=0.001^{**}$ |                                        | 663             |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.002^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.961$ 665   |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.082$      | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.532$ 667-8 |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.079$      | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.641$ 670-1 |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.158$      | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.148$ 674-5 |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.001^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.427$ 678-9 |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.589$      | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.058$ 681   |

Tabla 196: “Creatividad en 3º y 10, antes”.  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

|                                                          | Momento                   | Interacción                            | Figura          |
|----------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------|-----------------|
| <b>CREATIVIDAD en el tercero y en el décimo, después</b> | Tercero/décimo: $p=0.029$ |                                        | 664             |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.020$ | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.340$ 666   |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.436$ | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.059$ 669   |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.308$ | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.442$ 672-3 |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.346$ | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.219$ 676-7 |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.695$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.077$ 680   |
|                                                          | Tercero/décimo: $p=0.521$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.916$ 682   |

**Tabla 197: “Creatividad en 3º y 10, después”.**  
**Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**

### 5.3.13.2. Precisión

Se toma ahora “la precisión” con que los alumnos proponen las actividades a los niños de Educación infantil, antes del estudio del tema y de las técnicas, para estudiar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si influye significativamente en “la precisión” que dichas actividades sean las del tercer apartado o las del décimo. Se toman como variables intra-sujetos *precisión en el tercer apartado* y *precisión en el décimo apartado*. En principio no se toma ninguna variable inter-sujeto, después se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene que las actividades sean del tercer apartado o del décimo sobre “la precisión” en las actividades propuestas a los niños de Educación Infantil, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.002<0.05$ , se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” de los alumnos, en los apartados tercero y décimo. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.002<0.05$ , luego se tiene que rechazar esta hipótesis y concluir que la media total no vale cero.

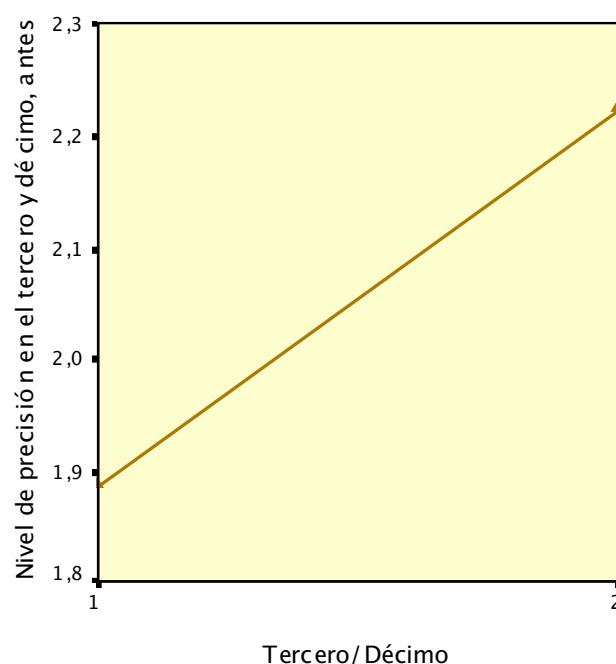


**Figura 687: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes.**

Esta figura indica que las actividades que plantean los alumnos en el décimo apartado son más precisas que las que plantean en el primero. Esto quiere decir que la utilización de otros materiales y los razonamientos que han realizado para completar los apartados intermedios les lleva a que, antes del estudio del tema y de las técnicas, sean más precisos.

Después del estudio del tema y de las técnicas los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados valen  $p=0.006>0.05$ , y los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también valen lo mismo. Por tanto, se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “la precisión” con que plantean los alumnos las actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartado tercero y décimo. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.006>0.05$ , con lo que se puede concluir que la media total vale cero.

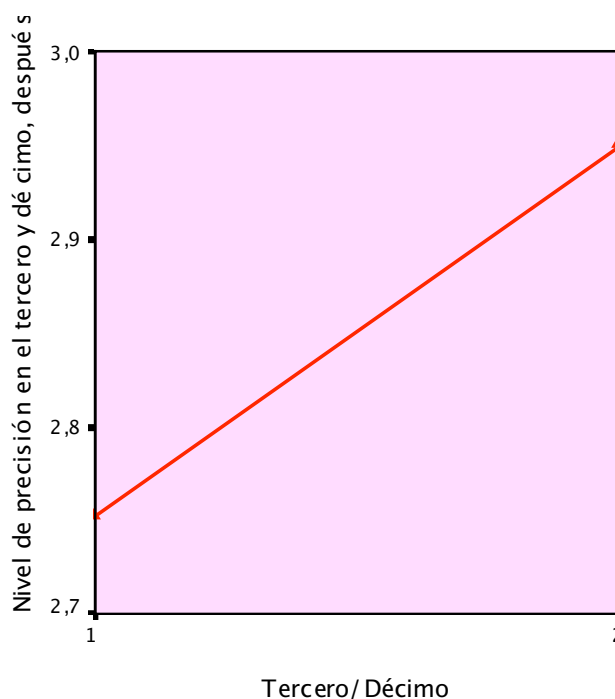


**Figura 688: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después.**

Esta figura indica que en el décimo apartado “la precisión” con que plantean las actividades es mayor que en el tercero. Se observa que han aumentado los niveles de precisión que se consiguen ahora con respecto a los que tenían antes.

## Género

Se toman las distintas variables inter-sujeto empezando por “el género” para estudiar cómo influye en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.008<0.05$  cuando se considera la influencia del “género” en “la precisión” en las actividades propuestas, dentro del mismo género, y  $p=0.443>0.05$  cuando se considera la influencia entre los géneros. Los niveles críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas en “la precisión” con que los alumnos proponen las actividades, en los apartados tercero y décimo, cuando se trata del mismo género, y no existen diferencias significativas entre los géneros.

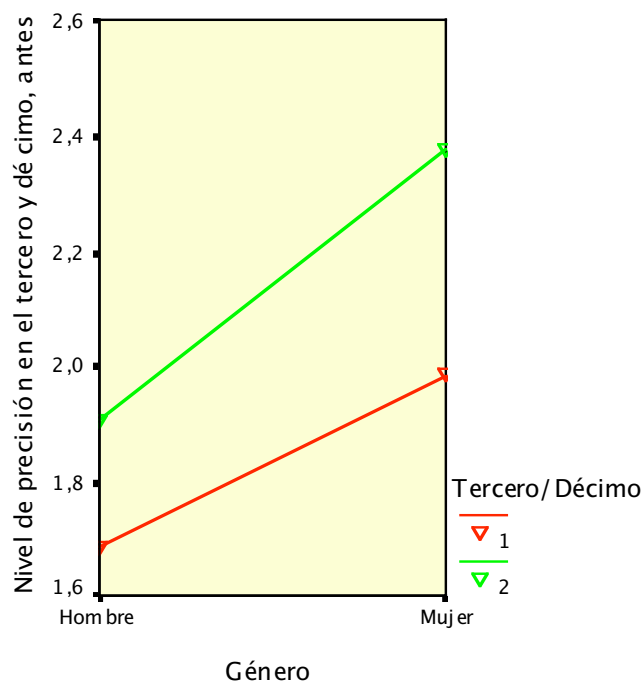


**Figura 689: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “género”.**

En esta figura se observa que aumenta “la precisión”, tanto de los hombre como de las mujeres, a la hora de redactar las actividades que plantean los alumnos en el décimo apartado respecto de la que tenían en el tercero.

Se analizar si “el género” influye en “la precisión” utilizada para proponer las actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, después del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “el género” no influye significativamente en “la precisión” con que proponen las actividades los alumnos, en los apartados tercero y décimo.

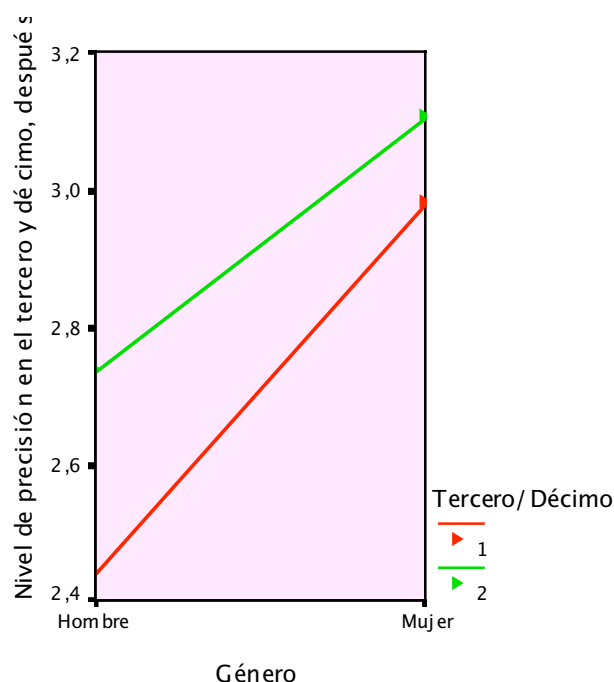


**Figura 690: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “género”.**

En el décimo apartado ambos géneros son más precisos cuando plantean las actividades a los niños de Educación Infantil que en el tercero.

### Año de realización

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para estudiar si de él depende “la precisión” utilizada para plantear las actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.1091>0.05$  cuando se considera la influencia del “curso” en “la precisión” al plantear las actividades, dentro del mismo año de realización, y  $p=0.003<0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos. Por tanto, se puede decir que no existen diferencias significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después del citado estudio cuando se trata del mismo curso, pero sí existen diferencias muy significativas cuando se refiere a los distintos cursos.

Para comparar los distintos “años de realización” se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de



que los promedios comparados son iguales. Para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso se observa que todos los niveles críticos son mayores que 0.05, luego este estadístico no ha encontrado diferencias significativas.

Para analizar lo que ocurre en este caso se trabaja con las pruebas no paramétricas, se elige k muestras independientes, se toman “precisión en el tercer apartado” y “precisión en el décimo apartado”, antes del estudio del tema y de las técnicas, en la lista de variables, en el grupo de variables se elige “año de realización”, y se marca el estadístico Kruskal-Wallis, se definen los rangos de modo que recoja todos los años de realización de las encuestas. En este caso los niveles críticos del citado estudio en el tercer apartado son  $p=0.021<0.05$ , y en el décimo  $p=0.359>0.05$ . Por tanto, existen diferencias significativas en “la precisión” con que proponen las actividades los alumnos en el tercer apartado, por “año de realización”, pero no hay diferencias significativas en “la precisión” con que las proponen en el décimo.

Para confirmar entre qué submuestras hay diferencias significativas, se comparan por pares los distintos años de realización que hemos considerado en este estudio para ver si hay diferencias significativas entre algunas de ellas. Se elige el apartado dos muestras independientes, y se toman en lista de variables “precisión en el tercer apartado” y “precisión en el décimo apartado”, como variable de agrupación se elige “el año de realización”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: el de los alumnos que realizaron las encuestas en 2002/2003 ó anteriores y los que lo hicieron en 2003/2004, los alumnos de 2002/2003 ó anteriores y los 2004/2005, etc., hasta agotar todos los pares. Destacamos sólo aquellos casos entre los que hay diferencias significativas:

| Año de realización | Niveles críticos tercer Apartado |
|--------------------|----------------------------------|
| 2003—2004          | $p=0.013<0.05$ .                 |
| 2004—2005          | $p=0.034<0.05$ .                 |
| 2004—2006          | $p=0.005<0.05$ .                 |

**Tabla 198: Probabilidades de error en la significación de “la precisión” en 3º y en 10º, antes, por “año de realización”. Pruebas no paramétricas.**

Todos los demás niveles de significación son mayores que 0.05, luego sólo entre las parejas que hemos destacado hay diferencias significativas.

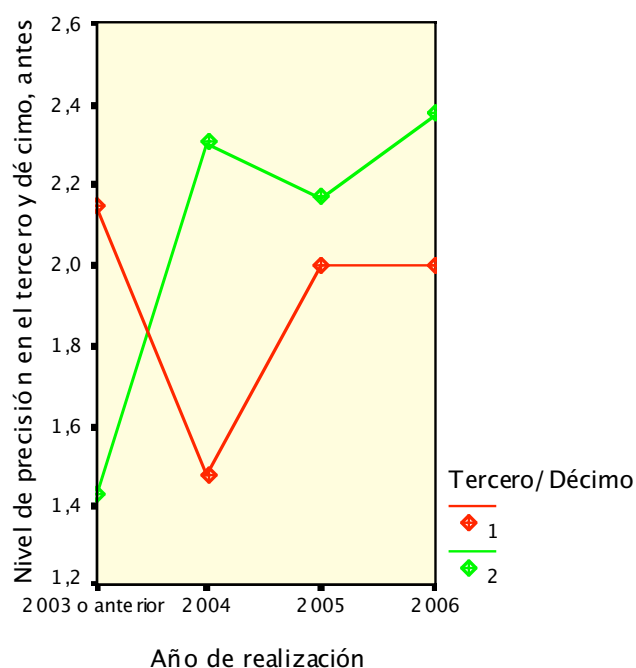


**Figura 691: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “año de realización”.**

Aumenta “la precisión” de casi todos los alumnos en el décimo apartado respecto de la que tenían en el tercero, excepto para los alumnos que completaron las encuestas en el curso 2002/2003 ó anteriores, que disminuye.

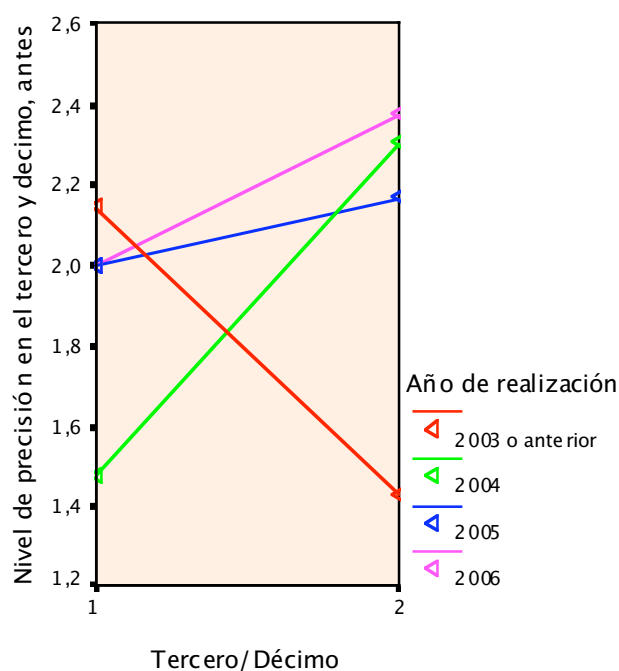


**Figura 692: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “año de realización”.**

Esta figura colabora a que las diferencias entre los niveles alcanzados por las distintas submuestras queden más claros.

Se toma como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas para ver si influye en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, después del estudio del tema. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y a las cuatro versiones del estadístico F son mayores que 0.05, luego se puede afirmar que “el año de realización” de las encuestas no influye significativamente en “la precisión” con que proponen las actividades los alumnos, en los apartados tercero y décimo.

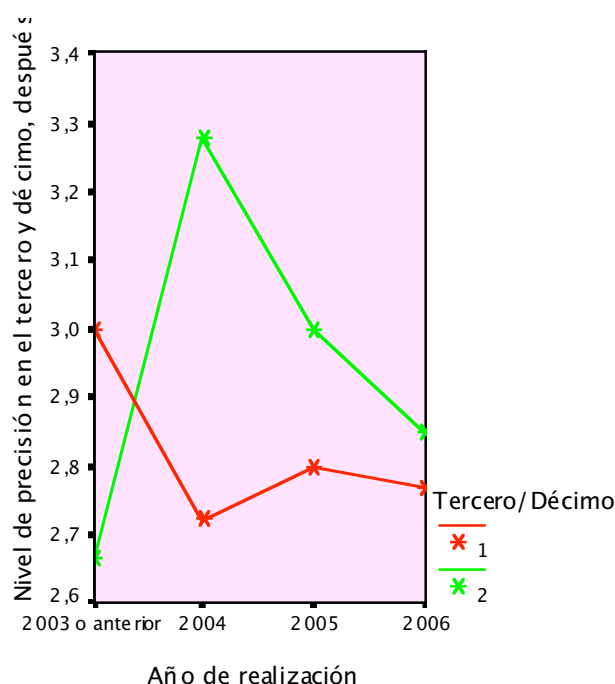


**Figura 693: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “año de realización”.**

De esta figura se puede decir lo mismo que se decía de la anterior, y para no hacernos pesados, no lo vamos a repetir.

## Curso

Se elige como variable inter-sujeto “el curso” para estudiar si de él depende “la precisión” utilizada para plantear las actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal

general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a los cuatro estadísticos multivariados y a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.563>0.05$  cuando se considera la influencia del “curso” en “la precisión” al plantear las actividades, dentro del mismo curso, y  $p=0.003<0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos. Por tanto, se puede decir que no existen diferencias significativas entre “la precisión” con que los alumnos plantean las actividades en los apartados tercero y décimo, antes del citado estudio, cuando se trata del mismo curso, pero existen diferencias muy significativas cuando se refiere cursos distintos.

Para comparar los distintos “cursos” se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso se observa que todos los niveles críticos son mayores que 0.05, luego este estadístico no ha encontrado diferencias significativas.

Para analizar lo que ocurre en este caso se trabaja con las pruebas no paramétricas, se eligen k muestras independientes, se toman “creatividad en el tercer apartado” y “creatividad en el décimo apartado”, antes del estudio del tema y de las técnicas, en la lista de variables, en el grupo de variables se elige “curso”, y se marca el estadístico Kruskal-Wallis, se definen los rangos de modo que recoja todos los cursos. En este caso los niveles críticos antes del citado estudio son  $p=0.0122<0.05$ , y después  $p=0.163>0.05$ . Por tanto, no existen diferencias significativas en “la precisión” con que proponen las actividades los alumnos en el tercer apartado, antes del estudio del tema y de las técnicas por “curso”, pero no hay diferencias significativas en “la precisión” con que las proponen en el décimo.

Para confirmar entre que submuestras de alumnos hay diferencias significativas se comparan por pares los distintos cursos que hemos considerado en este estudio para ver si hay diferencias significativas entre algunos de ellos. Se elige el apartado dos muestras independientes, y se toman en lista de variables “precisión en el tercer apartado” y “precisión en el décimo apartado”, como variable de agrupación se elige “el curso”, se selecciona Mann-Whitney y se van definiendo los distintos grupos: el de los alumnos de primero y los de segundo, los alumnos de primero y los tercero, etc., hasta agotar todos los pares. Destacamos sólo aquellos casos entre los que hay diferencias significativas:

| Curso           | Niveles críticos tercer Apartado |
|-----------------|----------------------------------|
| Primero—Segundo | $p=0.007<0.05$ .                 |
| Primero—Tercero | $p=0.006<0.05$ .                 |
| Primero—Quinto  | $p=0.016<0.05$ .                 |
| Cuarto—Quinto   | $p=0.049<0.05$ .                 |

**Tabla 199: Probabilidades de error en la significación de “la precisión” en 3° y en 10°, antes, por “curso”. Pruebas no paramétricas.**

Todos los demás niveles de significación son mayores que 0.05, luego sólo entre las parejas que hemos destacado hay diferencias significativas.

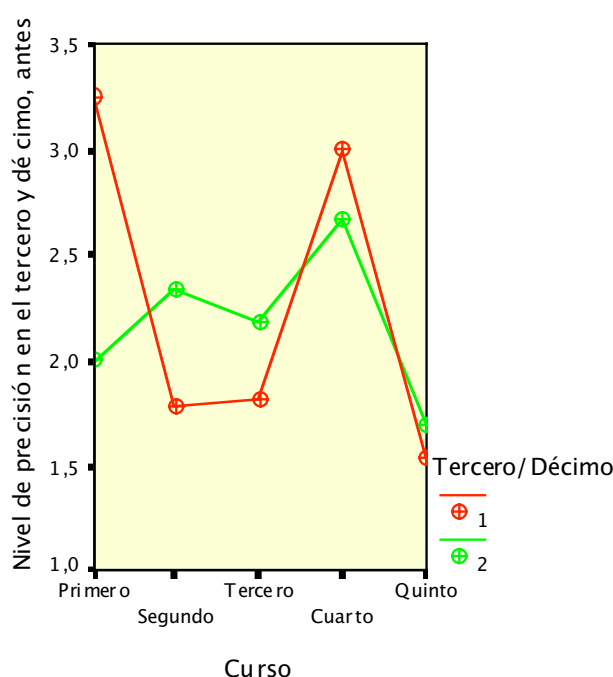


**Figura 694: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “curso”.**

“La precisión” con que plantean las actividades en el décimo apartado es mayor que la que tienen en el tercero para los alumnos que cursan segundo, tercero y quinto, para los demás es menor.

Después del estudio del tema y de las técnicas también se toma como variable inter-sujeto “el curso” para estudiar si de él depende “la precisión” utilizada para plantear las actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados los distintos estadísticos son mayores que 0.05. Por tanto, se puede concluir que no existen diferencias significativas entre “el curso” y “la

precisión” de los alumnos para responder a los apartados tercero y décimo.

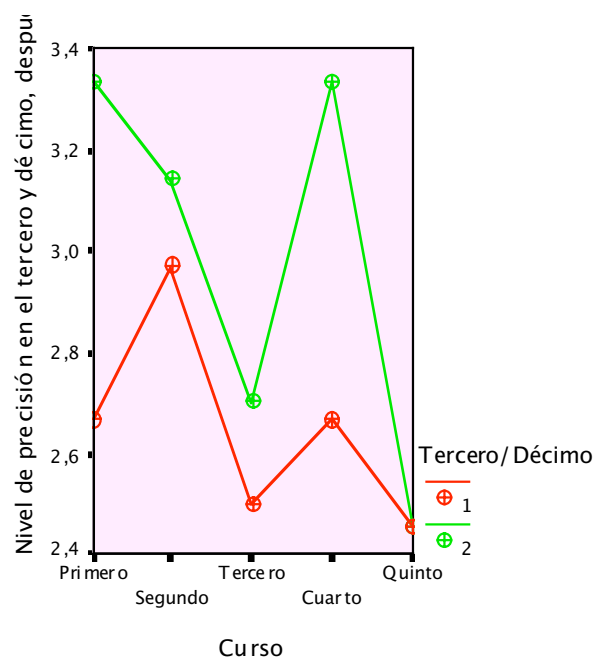


**Figura 695: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “curso”.**

Sólo para los alumnos de quinto, en el décimo apartado, se mantiene “la precisión” con que plantean las actividades a los niños de Educación Infantil, respecto de la que tenían en el tercero, para los demás, aumenta.

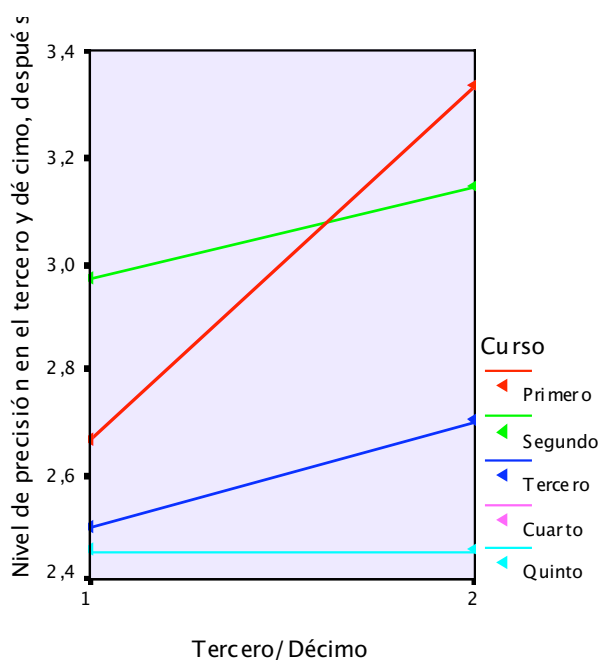


**Figura 696: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “curso”.**

Esta figura contribuye a que se puedan observar con mayor claridad como quedan los niveles de precisión de cada una de las submuestras.

## Edad

Se considera como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar si influye en “la precisión” utilizada para plantear las actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a los estadísticos que proporciona el modelo son mayores que 0.05. Por tanto, se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “la edad” y “la precisión” con que los alumnos plantean las actividades a los niños, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas.

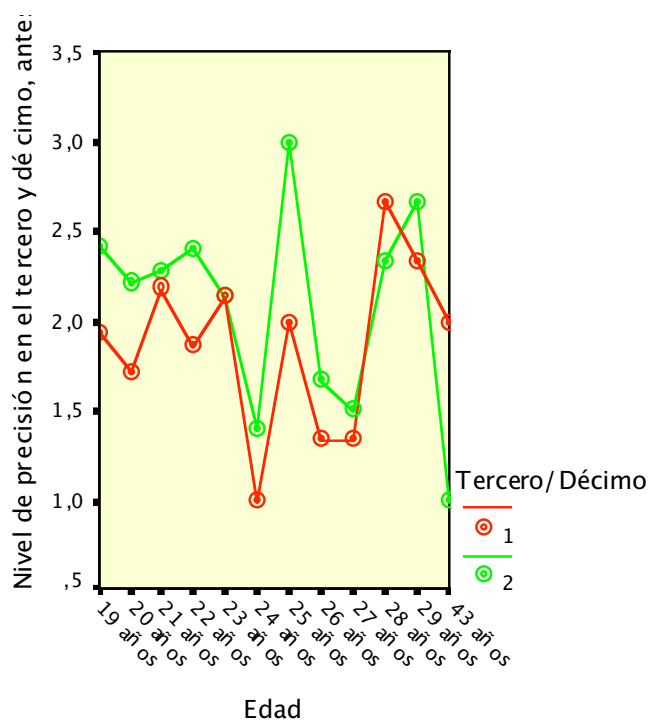


Figura 697: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “edad”.

La mayoría de los alumnos plantea actividades más precisas en el apartado décimo que en el tercero, excepto los que tenían 28 y 43 años que son menos precisas, y los de 23 años que son igual de precisas.

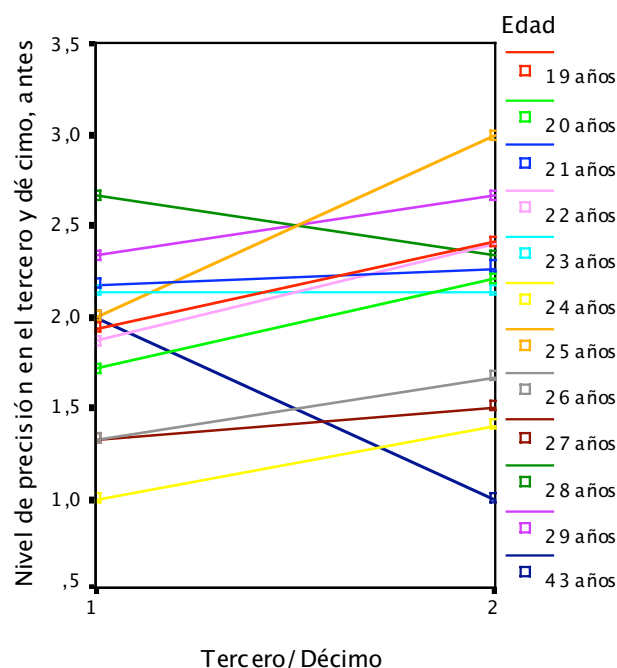


**Figura 698: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “edad”.**

Como son muchas las submuestras que origina la variable “edad”, lo que dificultaba poder ver con claridad como quedaban los niveles en la figura anterior, para completar la información se elige ésta.

Después del estudio del tema se vuelve a tomar como variable inter-sujeto “la edad” para estudiar cómo influye en “la precisión” utilizada para plantear actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y todos los niveles críticos que proporciona el modelo son mayores que 0.05. Esto permite afirmar que no existen diferencias significativas en “la precisión” de los alumnos al proponer actividades a los niños, en los apartados tercero y décimo, después del estudio del tema y de las técnicas.



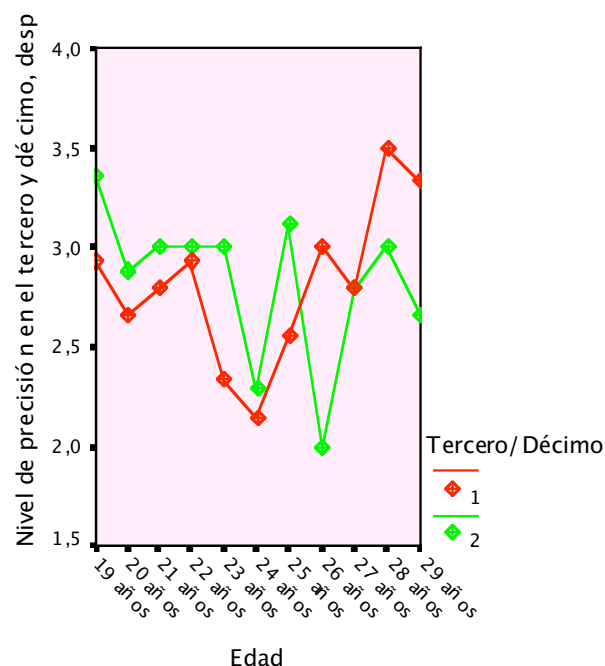


Figura 699: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “edad”.

En el apartado décimo aumenta la precisión para casi todos los alumnos para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, respecto de la que tenían en el tercero, excepto para los de 26 años que disminuye, y para los de 27 que se mantiene.

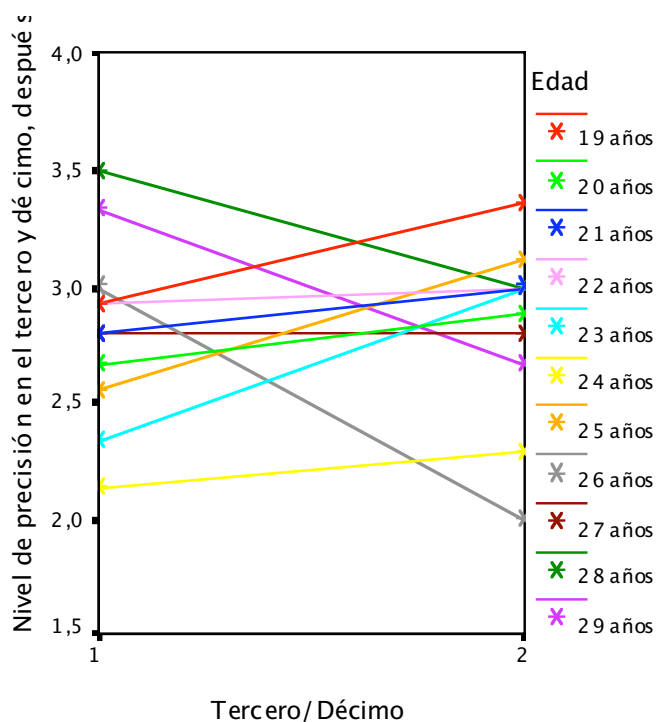


Figura 700: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “edad”.

Con esta figura se completa la información que aportaba la figura anterior y se pueden observar con mayor claridad cuáles son los niveles máximos y mínimos en ambos apartados.

## Especialidad

Se elige como variable inter-sujeto “la especialidad” para estudiar si influye en “la precisión” utilizada para plantear actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F dan  $p=0.001<0.05$  cuando se considera la influencia de “la especialidad” en “la precisión” al plantear las actividades, cuando se toma dentro de la misma especialidad, y  $p=0.427>0.05$  cuando se considera la influencia entre las distintas especialidades. Se tiene que concluir, por tanto, que existen diferencias muy significativas en “la precisión” de los alumnos en las actividades planteadas en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas, cuando se trata de la misma especialidad, y no existen diferencias significativas cuando se consideran las distintas especialidades.

Para comparar las distintas especialidades se elige la prueba Post hoc, en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados sean iguales. Los niveles críticos que resultan son mayores que 0.05, salvo para los alumnos de Matemáticas y los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas que da  $p=0.020<0.05$ , luego sólo hay diferencias significativa entre estas especialidades.

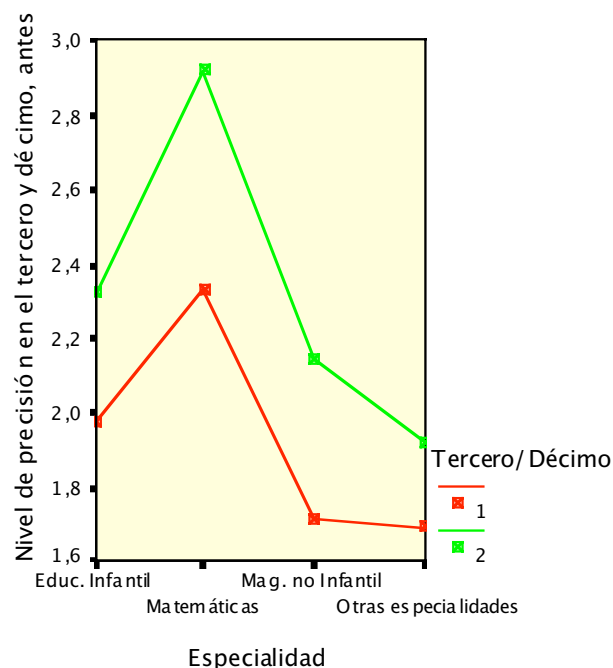


**Figura 701: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “especialidad”.**

En todos los alumnos “la precisión” con que plantean las actividades a los niños de Educación Infantil en el décimo apartado es mayor que en el tercero, esto quiere decir que el uso de otros materiales les ha hecho que sean más precisos.

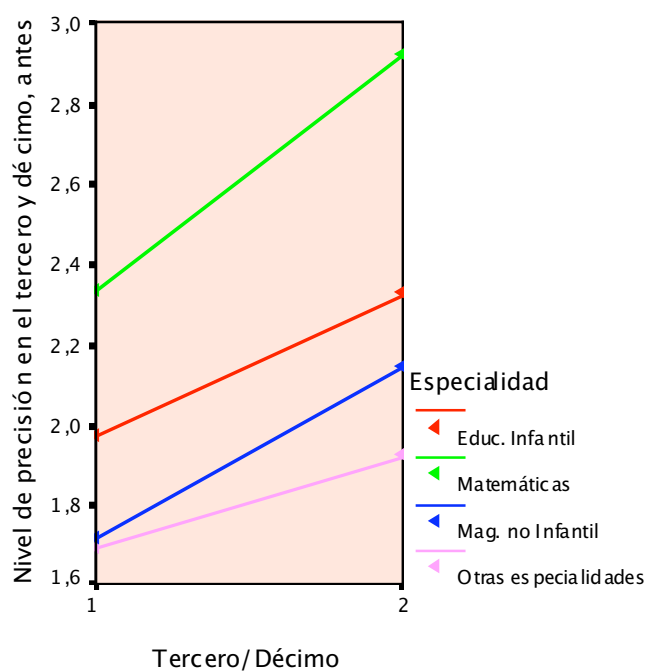


**Figura 702: Ampliación de la comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “especialidad”.**

Analizando si “la especialidad” influye significativamente en que las actividades que los alumnos propongan a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, sean más o menos “precisas”, se ve que ninguno de los niveles críticos asociados a los estadísticos que proporciona el modelo lineal general de medidas repetidas es menor que 0.05, luego se puede concluir que “la precisión” de las actividades no depende significativamente de “la especialidad”.

Para comparar las distintas especialidades se elige Post hoc; en este caso el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para ver qué media en concreto difiere de qué otra se utiliza el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso se observa que entre Educación Infantil y otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas da  $p=0.016<0.05$ , todos los demás niveles críticos son mayores que 0.05, luego sólo hay diferencias significativas entre estas dos especialidades.

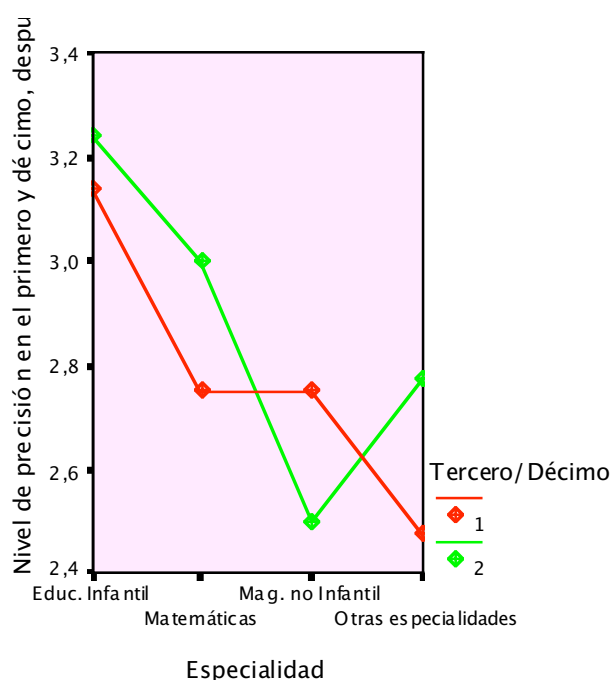


**Figura 703: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “especialidad”.**

Solo los alumnos de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil plantean actividades menos precisas en el apartado décimo que en el tercero, las de los demás son más precisas.

## Bachillerato

Se considera como variable inter-sujeto “el bachillerato” para analizar si influye significativamente en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y décimo, antes del estudio del tema y de las técnicas. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a los distintos estadísticos que proporciona son mayores que 0.05. Por tanto, se puede concluir que no existen diferencias significativas entre “la precisión” con que plantean las actividades los alumnos, y “el bachillerato” que hubieran cursado.

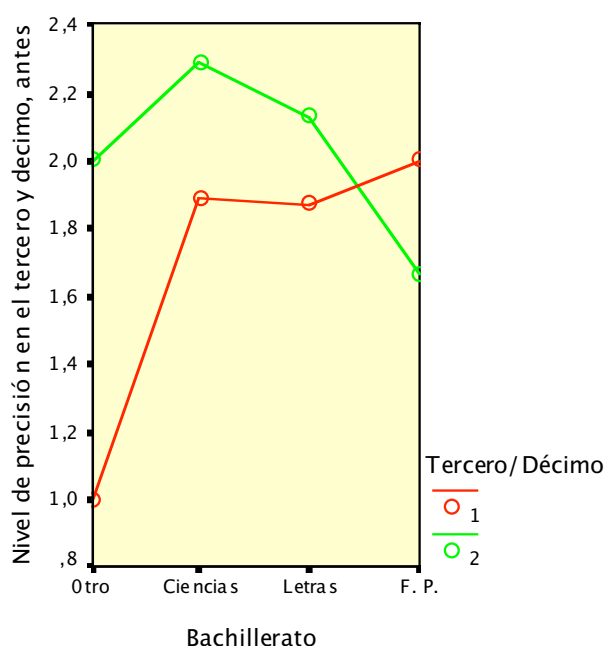


**Figura 704: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, antes, “bachillerato”.**

En el décimo apartado la mayoría de los alumnos son más precisos cuando plantean actividades a los niños de Educación Infantil que en el tercero, salvo los que proceden de Formación Profesional que son menos precisos.

Finalmente se toma como variable inter-sujeto “el bachillerato” para estudiar si influye significativamente en “la precisión” utilizada para proponer actividades a los niños de Educación Infantil, en los apartados tercero y el décimo, después del estudio del tema y de las técnicas. Se sigue trabajando con el modelo lineal general de medidas repetidas y los niveles críticos asociados a todos los estadísticos que proporciona el modelo son mayores que 0.05. Por tanto, se puede concluir que no

existen diferencias significativas entre “la edad” y “la precisión” con que plantean las actividades los alumnos a los niños de Educación Infantil, después de dicho estudio.

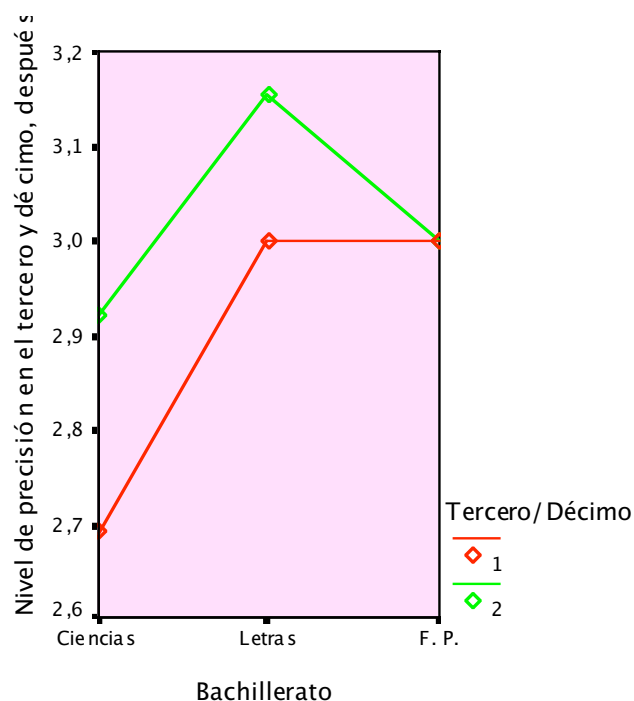


Figura 705: Comparación de “la precisión entre tercero y décimo”, después, “bachillerato”.

Para casi todos los alumnos “la precisión” es mayor en el décimo apartado que en el tercero, excepto para los que proceden de Formación Profesional que se mantiene. Es esta figura no aparecen los alumnos que llamamos otros ya que no completaron este apartado.

En las tablas siguientes se acumulan los niveles críticos que proceden del estudio de “la precisión”, en los apartados tercero y décimo, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                                        | Momento                   | Interacción                                      | Figura |
|--------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| PRECISIÓN<br>en el tercero<br>y en el<br>décimo, antes | Tercero/décimo: $p=0.002$ |                                                  | 683    |
|                                                        | Tercero/décimo: $p=0.008$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.443$       | 685    |
|                                                        | Tercero/décimo: $p=0.191$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.003$          | 687-8  |
|                                                        | Tercero/décimo: $p=0.563$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.011$        | 690    |
|                                                        | Tercero/décimo: $p=0.174$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.685$         | 693-4  |
|                                                        | Tercero/décimo: $p=0.006$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.780$ | 697-8  |
|                                                        | Tercero/décimo: $p=0.290$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.584$ | 700    |

Tabla 200: “Precisión en 3º y 10, antes”.  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

|                                                                        | Momento                   | Interacción                            | Figura          |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------|-----------------|
| <b>PRECISIÓN<br/>en el tercero<br/>y en el<br/>décimo,<br/>después</b> | Tercero/décimo: $p=0.066$ |                                        | 684             |
|                                                                        | Tercero/décimo: $p=0.054$ | Antes / después y <b>Género:</b>       | $p=0.442$ 686   |
|                                                                        | Tercero/décimo: $p=0.445$ | Antes / después y <b>Año:</b>          | $p=0.260$ 689   |
|                                                                        | Tercero/décimo: $p=0.056$ | Antes / después y <b>Curso:</b>        | $p=0.748$ 691-2 |
|                                                                        | Tercero/décimo: $p=0.934$ | Antes / después y <b>Edad:</b>         | $p=0.388$ 695-6 |
|                                                                        | Tercero/décimo: $p=0.527$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> | $p=0.657$ 699   |
|                                                                        | Tercero/décimo: $p=0.605$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> | $p=0.919$ 701   |

**Tabla 201: “Precisión en 3° y 10, después”.**  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.14. Estudio estadístico del undécimo apartado de las encuestas

Seguimos con el estudio estadístico de los resultados de las encuestas. Analizamos el apartado decimoprimer de la Evaluación Inicial y el decimosegundo de la Final, con objeto de ver la influencia que tiene el estudio del tema y de las técnicas en la idea que tienen los alumnos sobre para qué le sirven al niño cada una de las actividades que les han planteado, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Para valorar las respuestas consideramos: “la utilidad” que hayan dicho y “la precisión” con que hayan respondido.

#### 5.3.14.1. Utilidad

Se toman las variables *utilidad en el 11º apartado*, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en “la utilidad” de las actividades planteadas, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$ , y los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados, se puede afirmar que no existen diferencias significativas entre “la utilidad” que consideran los alumnos que tienen las actividades planteadas a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que

es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la medida total poblacional vale cero, da también  $0.000 < 0.05$ , por ello se tiene que rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Comparando con lo obtenido cuando se analizaron los resultados de las frecuencias, esto viene a confirmar lo que resultó antes: los porcentajes de los alumnos que creen que las actividades no tienen ninguna utilidad, poca o alguna es mayor antes que después del estudio del tema y de las técnicas; la situación se invierte cuando se ve, en lo que comentan, que tiene bastante o mucha utilidad. Esto quiere decir que saben ver, comentar y encontrar mayor utilidad a las actividades propuestas después del estudio del tema y de las técnicas. No en vano el porcentaje ha pasado del 42% al 92%.

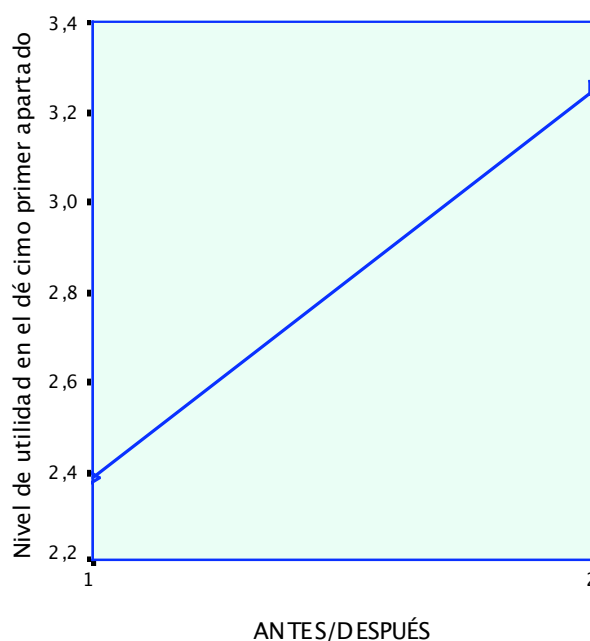


**Figura 706: Estimación de “la utilidad en el 11º apartado” antes/después.**

Como los valores considerados para valorar “la utilidad” de las respuestas han sido: 0=“nada útil”, 1=“poco útil”, 2=“algo útil”, 3=“bastante útil” y 4=“muy útil”, podemos afirmar que al aumentar el valor, aumenta “la utilidad” que consideran los alumnos que tienen las actividades que han planteado. Por todo ello se puede afirmar que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la utilidad” que consideran los alumnos que tienen las actividades.



## Género

Se empieza tomando un factor inter-sujeto, se elige “el género” y se estudia si hay diferencias significativas con “la utilidad” que consideran los alumnos que tienen las actividades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. En este caso se observa en los resultados obtenidos que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada género, y  $p=0.635>0.05$  cuando se analizan entre los géneros. Los niveles asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Por todo ello se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas en cada uno de los géneros para “la utilidad” que consideran que tienen las actividades, antes y después del estudio del tema, pero no existen diferencias significativas entre los géneros.

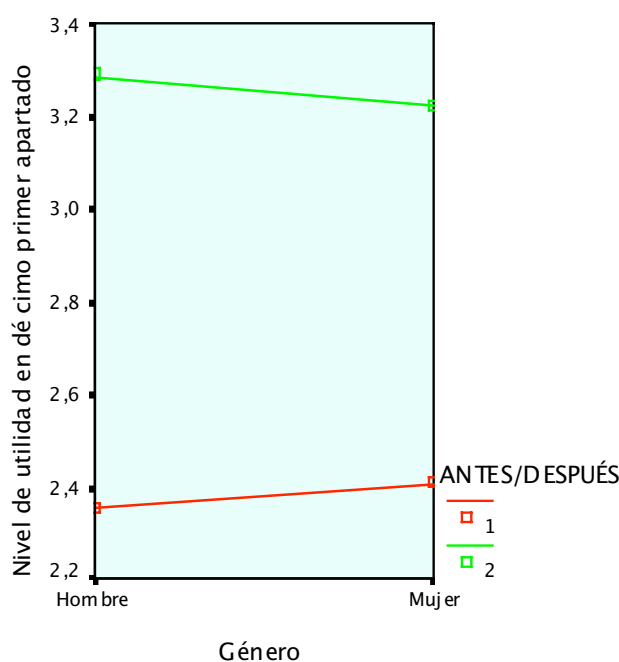


**Figura 707: Estimación de “la utilidad en el 11º apartado” antes/después, por “género”.**

La figura adjunta señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos ven mayor “utilidad” en las actividades que les proponen a los niños de Educación Infantil. Antes del citado estudio, los hombres consideran que sus actividades tienen un poco menos de “utilidad” que las mujeres; después de dicho estudio la situación se invierte.

## Año de realización

Se sigue estudiando, tomando como variable inter-sujeto “el año de realización” de las encuestas, si “la utilidad” que consideran los alumnos que tienen las actividades varía después de estudiarse el tema y las técnicas, respecto de la opinión que tenían antes. Los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados resultan ser  $0.000 < 0.05$  cuando se considera en el mismo año de realización, y  $0.759 > 0.05$  cuando se considera entre los distintos años de realización, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F toman también los mismos valores. Por tanto, se puede aceptar que existan diferencias muy significativas entre “la utilidad” que consideran los alumnos que tienen las actividades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro de cada uno de los años de realización de las encuestas, pero no que existan diferencias significativas entre los distintos años de realización.

Para comparar los distintos años de realización se elige la prueba Post hoc; en este caso, el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Se obtienen los niveles críticos entre los que respondieron las encuestas en el curso 2003/2004 y los que las respondieron en el 2004/2005 con valor  $p=0.022 < 0.05$ , y los demás son mayores que 0.05, luego se confirma que sólo hay diferencias significativas entre los cursos 2003/2004 y 2004/2005.

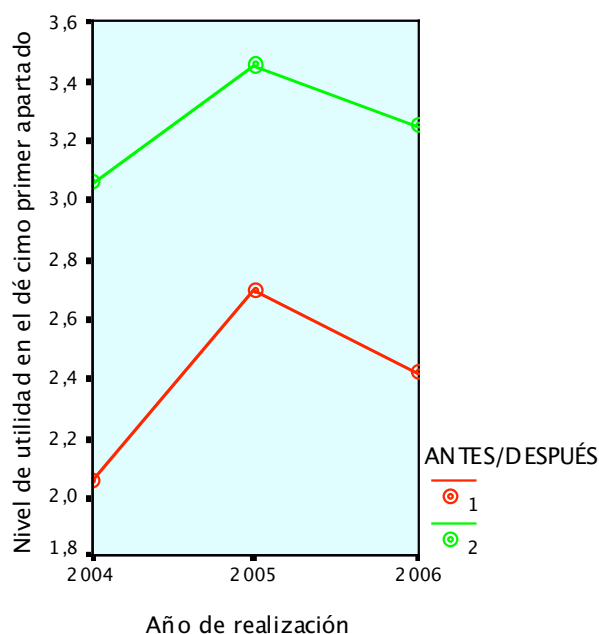


**Figura 708: Estimación de “la utilidad en el 11º apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Esta figura indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta para todos los alumnos, prácticamente al mismo nivel, “la utilidad” que consideran que tienen las actividades que ellos mismos plantearon. Por si hubiera en este gráfico alguna duda sobre qué submuestra tiene el valor mínimo en ambos momentos, se trabaja con la figura siguiente.

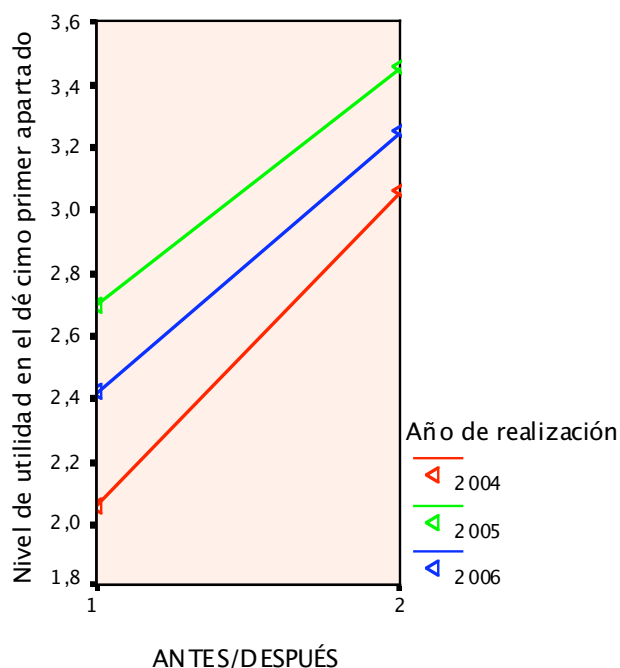


**Figura 709: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11º apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Está claro que, en ambos momentos del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que respondieron las encuestas en 2004/2005 son los que encuentran mayor utilidad a las actividades que plantean. Los que ven menor utilidad en las actividades son los que respondieron las encuestas en 2003/2004.

## Curso

Se elige como factor inter-sujeto “el curso” y se estudia si hay diferencias significativas dentro de cada curso y entre los distintos cursos sobre “la utilidad” que encuentran los alumnos en las actividades que proponen, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se observa, en los resultados obtenidos, que todos los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados valen  $p=0.000 < 0.05$  cuando se analizan los resultados dentro de cada curso, y  $p=0.906 > 0.05$  cuando se analizan entre los distintos cursos. Los niveles

críticos asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan los mismos resultados. Se tiene, por tanto, que afirmar que existen diferencias muy significativas dentro de cada uno de los cursos sobre “la utilidad” que reconocen los alumnos que tienen las actividades, antes y después del estudio del tema, pero no existen diferencias significativas entre los cursos.

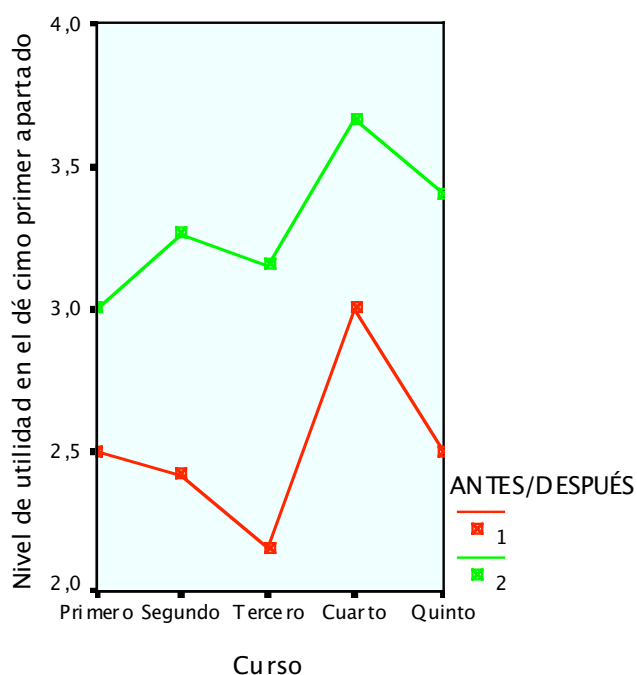


**Figura 710: Estimación de “la utilidad en el 11º apartado” antes/después, por “curso”.**

Esta figura señala que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta el grado de utilidad que los alumnos consideran que tienen las actividades que plantearon a los niños de Educación Infantil. Tanto antes como después del citado estudio, los alumnos que ven mayor utilidad en sus actividades son los de cuarto, y los que ven menor utilidad son: antes de dicho estudio, los de tercero; y después, los de primero.

## Edad

Se estudia ahora si “la utilidad” que los alumnos consideran que tienen las actividades que plantearon a los niños de Educación Infantil depende de “la edad”. En el resultado obtenido, con el modelo lineal general de medidas repetidas, vemos que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos multivariados son  $p=0.000 < 0.05$  dentro de la misma edad, pero  $p=0.500 > 0.05$  entre las distintas edades, y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también valen lo

mismo. Se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la utilidad” que consideran los alumnos que tienen las actividades que plantearon, antes y después del estudio del tema, dentro de la misma edad, pero no existen diferencias entre las distintas edades.

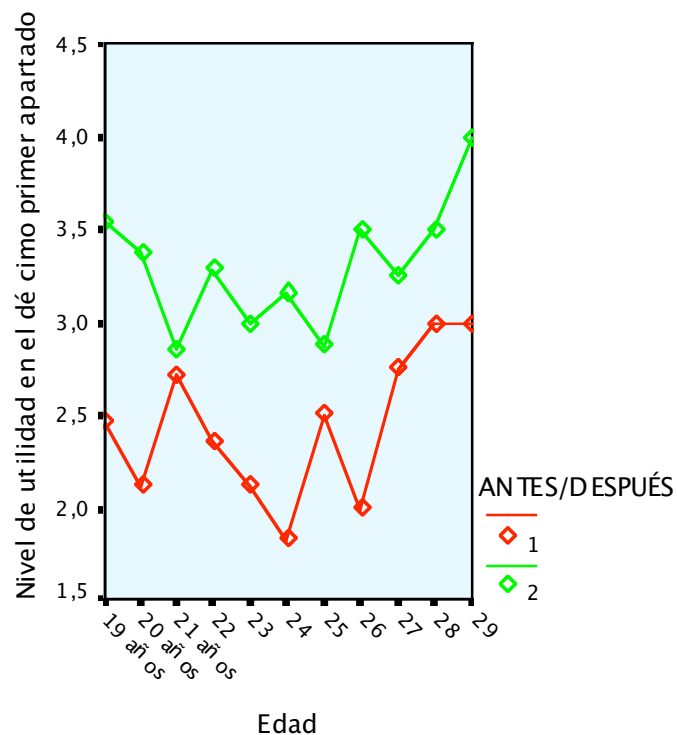


Figura 711: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.

Aunque es muy variada la situación en que se encuentran las distintas submuestras que se tienen en este caso, se observa en la figura adjunta que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la utilidad” que reconocen los alumnos que tienen las actividades que les plantean a los niños de Educación Infantil.

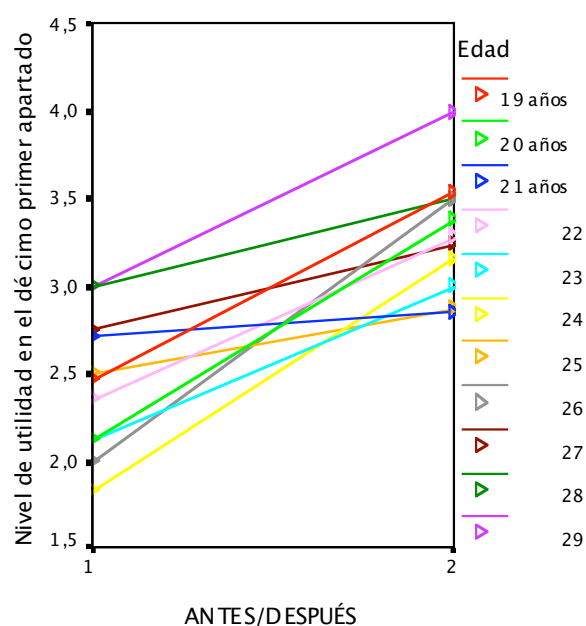


**Figura 712: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que consideran que las actividades que plantean a los niños de Educación Infantil tienen mayor utilidad son los que tenían 28 y 29 años, y los que ven menor utilidad son los que tenían 24 años. Después del citado estudio, los alumnos que reconocen mayor utilidad son los que tenían 29 años, y los que ven menor utilidad son los de 21 y los de 25 años.

### Especialidad

Analizando si “la especialidad” influye en “la utilidad” que reconocen los alumnos en las actividades que plantean a los niños de Educación Infantil, se ve que los niveles críticos asociados a cada uno de los estadísticos multivariados son  $p=0.000<0.05$  dentro de la misma especialidad, pero dan  $p=0.552>0.05$  entre las distintas especialidades, y a los valores asociados a las cuatro versiones del estadístico F también les ocurre lo mismo. Por tanto, se puede concluir que existen diferencias muy significativas entre “la utilidad” que reconocen los alumnos en las actividades que plantearon, antes y después del estudio del tema, dentro de la misma especialidad, pero no existen diferencias entre las distintas especialidades.

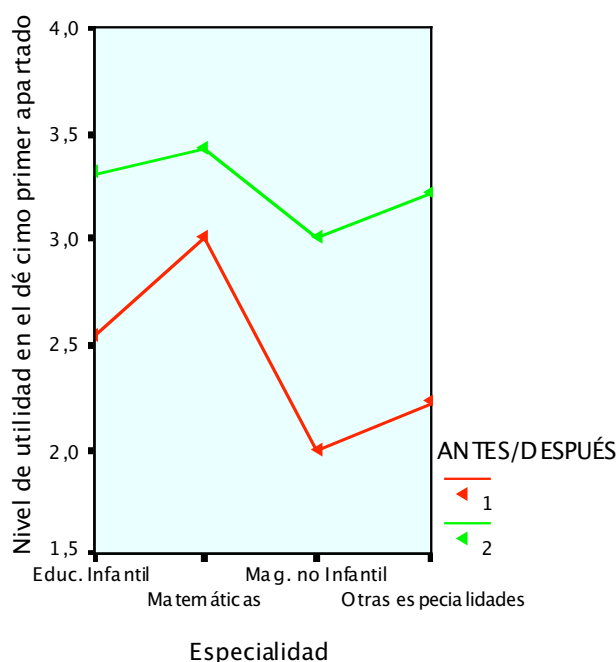


**Figura 713: Estimación de “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Todos los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, reconocen mayor utilidad en las actividades que plantean a los niños de Educación Infantil. Los alumnos que, en ambos momentos, ven mayor utilidad en las actividades son los de la licenciatura de Matemáticas, y los que ven menor utilidad son los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Se concluye “la utilidad” analizando, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el bachillerato” explica “la utilidad” que dicen que tienen las actividades que plantean a los niños de Educación Infantil, antes y después del estudio del tema. Se obtienen niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo  $p=0.002<0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo bachillerato; por ello se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la utilidad” que reconocen en las actividades, antes y después del estudio del tema, dentro del mismo bachillerato. Entre los dos bachilleratos se obtiene  $p=0.360>0.05$ , luego no hay diferencia significativa entre los bachilleratos acerca de “la utilidad” que ven en las actividades.

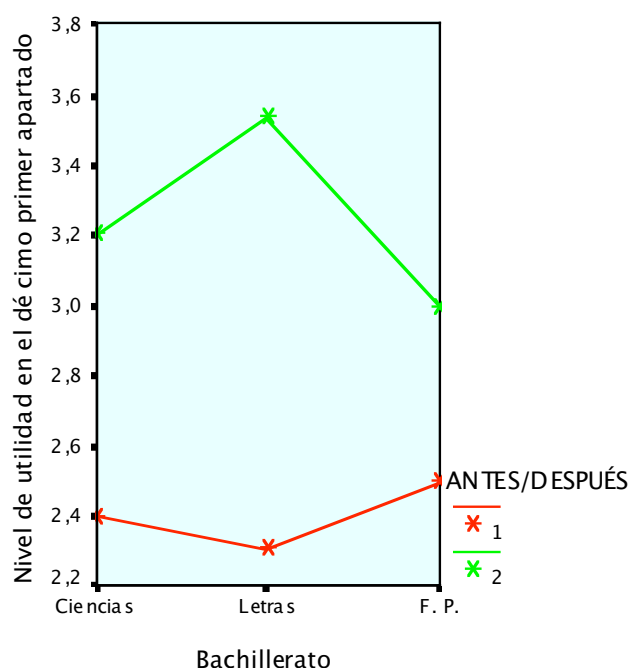


**Figura 714: Estimación de “la utilidad en el 11º apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

La figura que precede indica que, después del estudio del tema y de las técnicas, todos los alumnos reconocen más utilidad en las actividades que plantean a los niños de Educación Infantil. Antes del citado estudio, los alumnos de Formación Profesional son los que ven más utilidad en las actividades que plantean, y los que ven menos utilidad son los de Letras. Después de dicho estudio la situación varía totalmente, pasando a ser los alumnos de Letras los que reconocen más utilidad en las actividades, y menos, los de Formación Profesional.

Anotamos todos los niveles críticos de las variables “utilidad en el décimo primer apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, en la tabla siguiente.

|                                    | Momento                         | Interacción                                       | Figura |
|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|--------|
| <b>UTILIDAD en el 11º apartado</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                   | 702    |
|                                    | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género</b> : $p=0.759$       | 703    |
|                                    | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año</b> : $p=0.759$          | 704-5  |
|                                    | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Curso</b> : $p=0.906$        | 706    |
|                                    | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Edad</b> : $p=0.500$         | 707-8  |
|                                    | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad</b> : $p=0.552$ | 709    |
|                                    | Antes / después: $p=0.002^{**}$ | Antes / después y <b>Bachillerato</b> : $p=0.360$ | 710    |

**Tabla 202: “Utilidad en el 11º apartado”. Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.**



### 5.3.14.2. Precisión

Se pasa a estudiar “la precisión” con que han respondido al 11° apartado de la Evaluación Inicial y al 12° de la Final, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. En este caso se toman como variables intra-sujetos *precisión en el 11° apartado*, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se irán eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato” como variable inter-sujeto, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema y de las técnicas en “la precisión” con que responden los alumnos en este apartado, según cada una de estas variables.

Como los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados dan  $p=0.000<0.05$ , y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F también dan  $p=0.000<0.05$ , se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas. El contraste de los efectos intra-sujetos, que es el que se refiere a la media total y permite contrastar la hipótesis de que la media poblacional vale cero, es también  $p=0.000<0.05$ , por lo que se puede rechazar esta hipótesis y concluir que la media total es distinta de cero.

Comparando este resultado con lo obtenido cuando se analizó el estudio de las frecuencias, esto viene a confirmar lo anterior: antes del estudio del tema y de las técnicas, el porcentaje de las respuestas que son nada precisas, poco o algo precisas es mayor antes (74%) que después (28%); pero cuando “la precisión” es bastante o mucha los porcentajes se invierten, siendo mayor después: pasa del 26% al 71%. Esto quiere decir que el estudio del tema les ha sido bastante útil a la hora de razonar para qué sirven las actividades planteadas.

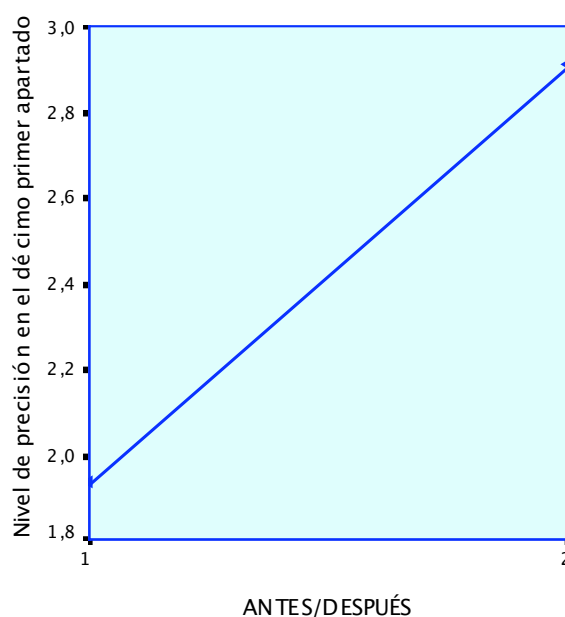


**Figura 715: Estimación de “la precisión en el 11º apartado” antes/después.**

Para valorar “la precisión” con que comentan para qué les sirven las actividades planteadas, consideramos cinco niveles: ninguna, poca, alguna, bastante y mucha precisión, a los que les asociamos los números del 0 al 4, respectivamente. Podemos afirmar que al aumentar el número asignado, aumenta “la precisión” de las respuestas, y recíprocamente. Por todo ello, a la vista de la figura adjunta, podemos decir que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la precisión” con que responden a la utilidad de las actividades.

## Género

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el género” explica “la precisión” con que razonan para qué les sirven las actividades. Se obtienen niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo  $p=0.000 < 0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo género; por ello se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos antes y después del estudio del tema y de las técnicas dentro del mismo género. Entre los dos géneros se obtiene  $p=0.203 > 0.05$ , luego no hay diferencia significativa entre los géneros acerca de “la precisión” con que responden en este apartado.

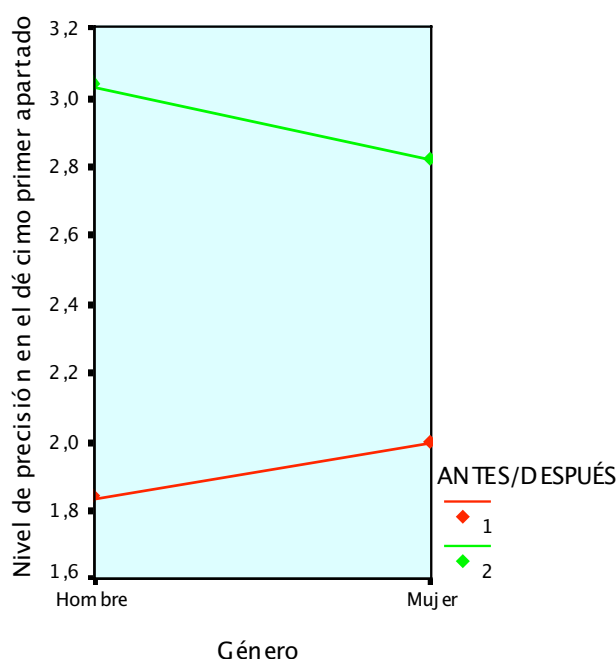


**Figura 716: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “género”.**

Se puede ver en esta figura que, después del estudio del tema y de las técnicas, todos los alumnos dicen de forma más precisa para qué les sirven las actividades que ellos mismos plantearon. Antes de dicho estudio los hombres son menos precisos que las mujeres, pero después son los hombres más precisos que las mujeres.

### Año de realización

Se analiza si “el año de realización” influye significativamente sobre “la precisión” de los razonamientos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas. Los niveles críticos asociados a los distintos estadísticos son  $p=0.000 < 0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo año de realización. Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema, dentro del mismo año de realización. Entre años de realización de la encuesta distintos se obtiene  $p=0.206 > 0.05$ , luego no hay diferencia significativa entre los distintos años de realización de las encuestas en “la precisión” con que razonan los alumnos para qué les sirven al niño las actividades.

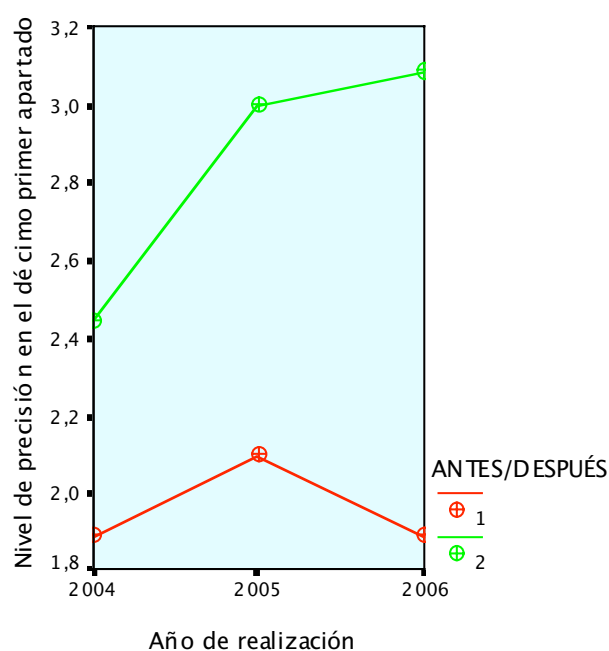


**Figura 717: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Se observa en la figura que precede que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos son más precisos al decir para qué le sirven al niño las actividades que les plantearon. Para ver con mayor claridad los máximos y mínimos elegimos la figura siguiente.

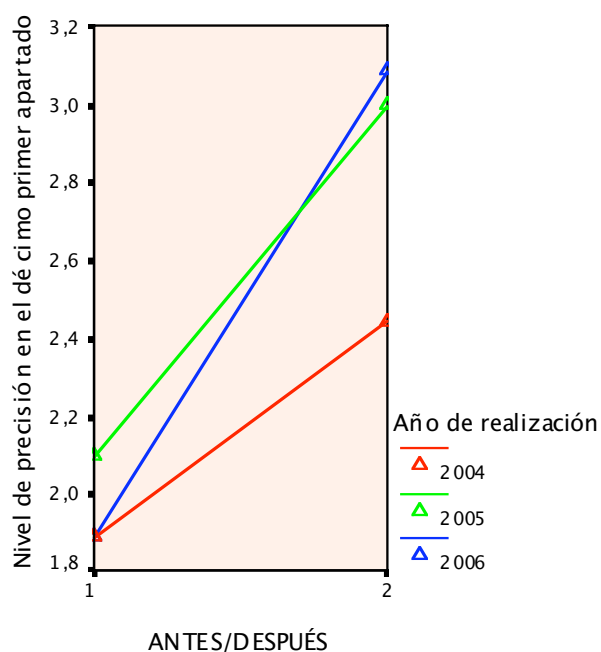


**Figura 718: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “año de realización”.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos más precisos para decir para qué les sirven a los niños las actividades planteadas son los que respondieron las encuestas en el curso 2004/2005, y los demás son los menos precisos, con el mismo nivel. Después del citado estudio los alumnos más precisos son los que respondieron las encuestas en 2005/2006, y los menos precisos, los del curso 2003/2004.

## Curso

Queremos saber, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el curso” en qué estén matriculados los alumnos encuestados influye significativamente en “la precisión” con que expresan para qué le sirven al niño las actividades que les plantearon. Los niveles críticos asociados a los estadísticos son  $p=0.000<0.05$ , cuando se considera la significación dentro del mismo curso, y  $p=0.936>0.05$  cuando se considera entre los distintos cursos. Por todo ello, podemos afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema, dentro del mismo curso, pero no existen diferencias significativas entre los distintos cursos.

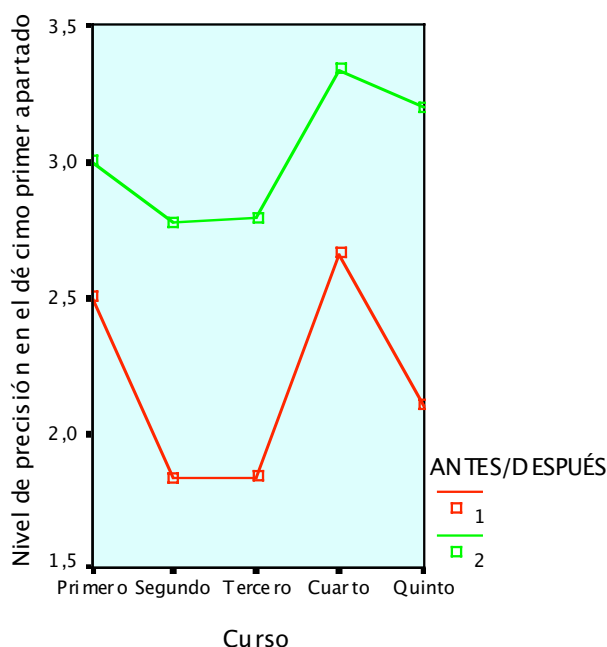


**Figura 719: Estimación de “la precisión en el 11º apartado” antes/después, por “curso”.**

Se observa en esta figura que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la precisión” con que explican los alumnos para

qué le sirven al niño las actividades que les plantean. Para ver qué grupo de alumnos ocupa el nivel máximo y mínimo tomamos la figura siguiente

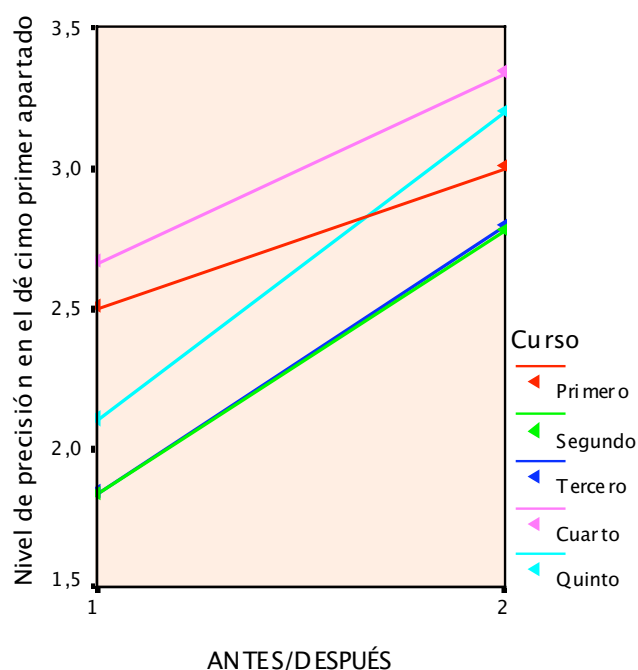


**Figura 720: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11º apartado” antes/después, por “curso”.**

Los alumnos que dicen con mayor precisión para qué le sirven al niño las actividades que le plantearon, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de cuarto. Y los que lo expresan con menor precisión son: antes, los de segundo y tercero al mismo nivel, y después, los de segundo seguidos, con muy poca diferencia, por los de tercero.

## Edad

Se analiza, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “la edad” tiene alguna repercusión sobre “la precisión” con que expresan la utilidad que tienen para los niños las actividades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Los niveles críticos asociados a los distintos estadísticos son  $p=0.000 < 0.05$ , cuando se considera la significación dentro de la misma edad; entre dos edades distintas se obtiene  $p=0.056 > 0.05$ . Por tanto, se puede afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después de dicho estudio, dentro de la misma edad y no hay diferencias significativas entre las distintas edades.

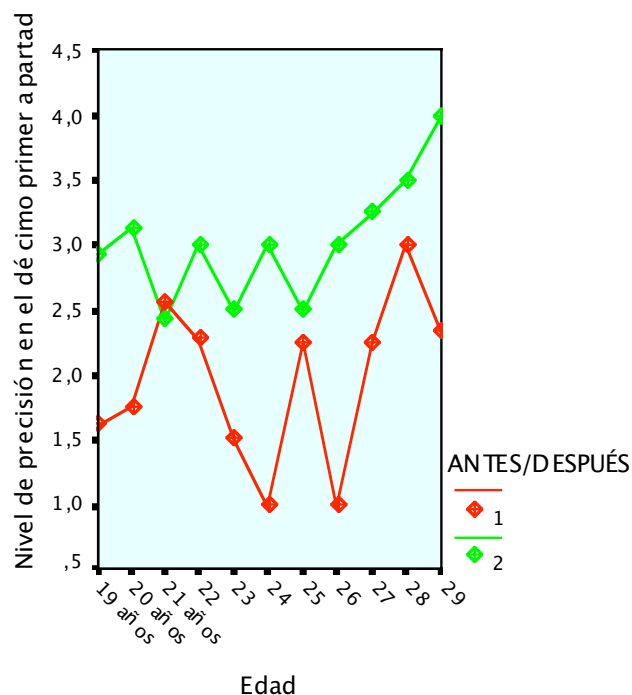


**Figura 721: Estimación de “la precisión en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.**

Para la mayoría de los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta “la precisión” con que razonan para qué le sirven al niño las actividades planteadas, excepto para los que tenían 21 años, que disminuye levemente.

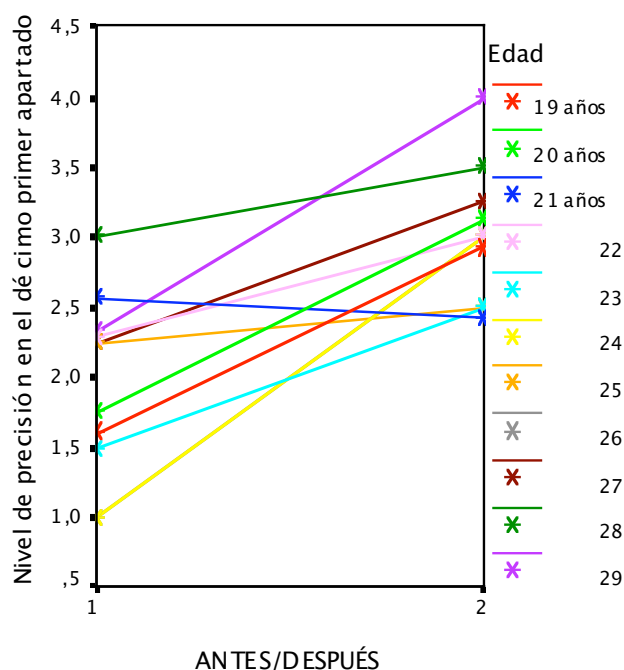


**Figura 722: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, por “edad”.**

Observando esta figura se ve que los segmentos que representan a los alumnos con 26 años no aparecen, pero si analizamos la anterior podemos deducir que quedan debajo de los que tenían 24 años. Teniendo en cuenta todo esto, podemos afirmar que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos con 28 años son los que expresan con mayor precisión para qué le sirven al niño las actividades planteadas; los que son menos precisos son los de 24 ó 26 años. Después del citado estudio, son los 29 años los más precisos, y los de 21 años los menos precisos.

## Especialidad

Vamos a estudiar si “la precisión” con que responden a la utilidad de las actividades, antes y después del estudio del tema y de las técnicas depende de “la especialidad”. Se trabaja con el modelo lineal general de medidas repetidas y se obtienen los niveles críticos asociados a cada uno de los cuatro estadísticos multivariados y los asociados a las cuatro versiones del estadístico F que son  $p=0.001<0.05$  cuando se considera si hay diferencias dentro de la misma especialidad, y dan  $p=0.072>0.05$  cuando se considera si hay diferencia entre las distintas especialidades. Se puede afirmar, por tanto, que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” de los alumnos, antes y después del estudio del tema, entre los grupos de alumnos de la misma especialidad, pero no existe diferencia entre los que pertenecen a distintas especialidades.

Para comparar las diferencias entre las distintas especialidades se elige Post hoc; en este caso, el estadístico F permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Para efectuar comparaciones Post hoc vamos a utilizar el método de comparación *Scheffé*, que se basa en la distribución F. En este caso los niveles críticos entre los alumnos de la licenciatura de Matemáticas y los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil dan  $p=0.035<0.05$ , y entre los de la licenciatura de Matemáticas y los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas dan  $p=0.030<0.05$ ; para todos los demás, los niveles críticos son mayores que 0.05, luego esto quiere decir que sólo hay diferencias significativas entre los alumnos de la licenciatura de Matemáticas y los de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil, y entre los alumnos de la licenciatura de Matemáticas y los de otras especialidades distintas de Magisterio y Matemáticas en “la precisión” de los alumnos de las distintas especialidades.



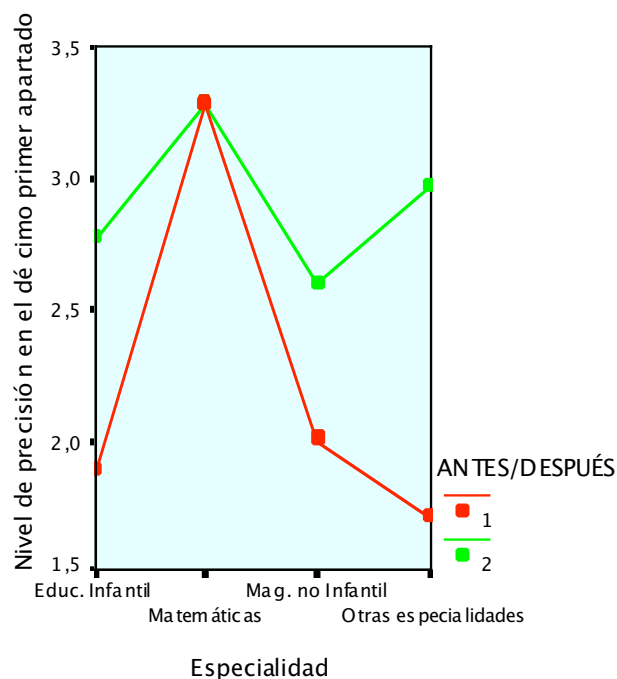


**Figura 723: Estimación de “la precisión en el 11º apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Los alumnos más precisos a la hora de expresar para qué le sirven al niño las actividades planteadas, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas, son los de la licenciatura de Matemáticas, como era de esperar por la formación previa con que cuentan.

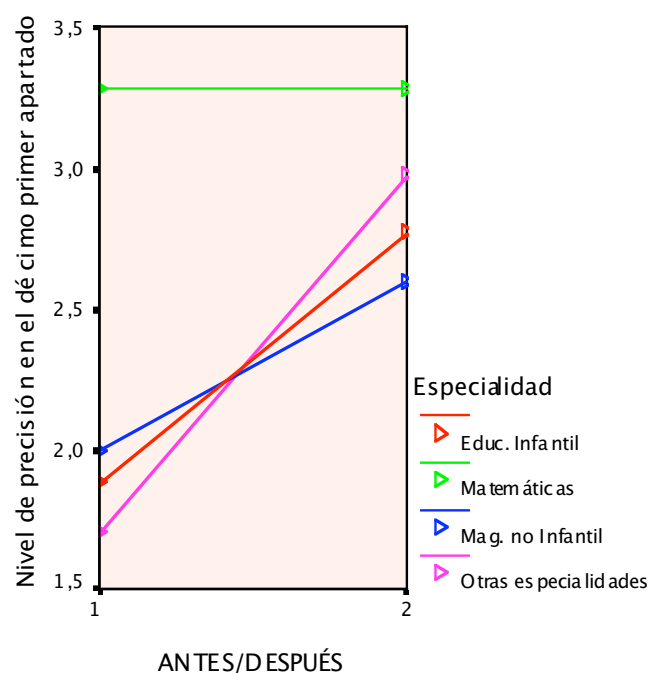


**Figura 724: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11º apartado” antes/después, por “especialidad”.**

Sólo para los alumnos de la licenciatura de Matemáticas se mantiene “la precisión” después del estudio del tema y de las técnicas, para todos los demás aumenta. Los alumnos menos precisos son: antes del citado estudio, los de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas, y después, los de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil.

## Bachillerato

Se pasa a analizar, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, si “el bachillerato” explica “la precisión” en el comentario sobre para qué le sirven al niño las actividades planteadas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas. Se obtienen niveles críticos asociados a los estadísticos que da el modelo que son  $p=0.008<0.05$  cuando se considera la significación dentro del mismo bachillerato; y entre los distintos bachilleratos se obtiene  $p=0.645>0.05$ . Por ello se tiene que afirmar que existen diferencias muy significativas entre “la precisión” en el comentario de los alumnos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, dentro del mismo bachillerato y no hay diferencia significativa entre los distintos bachilleratos.

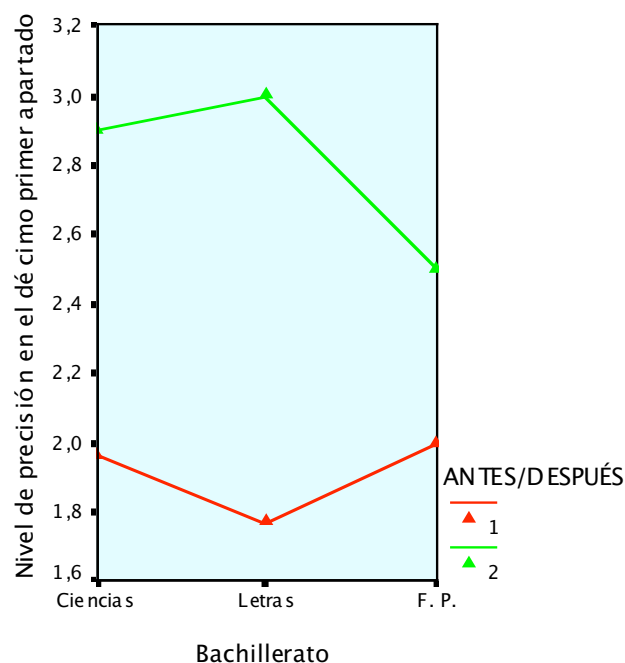


**Figura 725: Estimación de “la precisión en el 11º apartado” antes/después, por “bachillerato”.**

Evidentemente, después del estudio del tema y de las técnicas, aumenta, para todas las submuestras consideradas, “la precisión” con

que comentan para qué le sirven al niño cada una de las actividades planteadas.

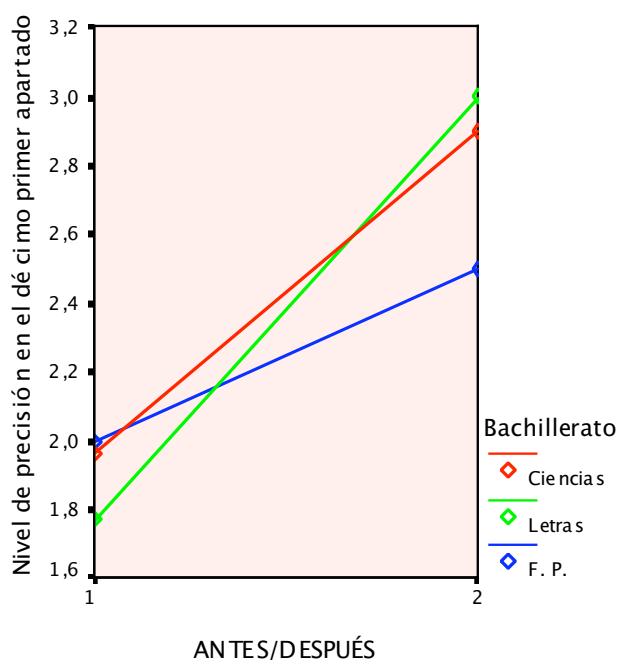


Figura 726: Ampliación de la comparación: “la utilidad en el 11° apartado” antes/después, “bachillerato”.

En esta figura se ve mejor que en la anterior que, antes del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos que comentan con más precisión para qué le sirven al niño las actividades planteadas son los de Formación Profesional, y los que lo comentan con menor precisión son los de Letras. Después del citado estudio, los alumnos de Letras son los más precisos, y los de Formación Profesional los menos precisos.

En la tabla siguiente se tienen todos los niveles críticos relativos a las variables “precisión en el décimo primer apartado”, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

|                                     | Momento                         | Interacción                                      | Figura |
|-------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|--------|
| <b>PRECISIÓN en el 11° apartado</b> | Antes / después: $p=0.000^{**}$ |                                                  | 711    |
|                                     | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Género:</b> $p=0.203$       | 712    |
|                                     | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Año:</b> $p=0.206$          | 713-4  |
|                                     | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Curso:</b> $p=0.936$        | 715-6  |
|                                     | Antes / después: $p=0.000^{**}$ | Antes / después y <b>Edad:</b> $p=0.056$         | 717-8  |
|                                     | Antes / después: $p=0.001^{**}$ | Antes / después y <b>Especialidad:</b> $p=0.072$ | 719-20 |
|                                     | Antes / después: $p=0.008^{**}$ | Antes / después y <b>Bachillerato:</b> $p=0.645$ | 721-2  |

Tabla 203: “Precisión en el 11° apartado”.  
Probabilidades de error en la significación. MLG de medidas repetidas.

### 5.3.14.3. Conclusiones de todos los aspectos considerados en este apartado

Se acumulan en distintas tablas, como ya se viene haciendo en los apartados anteriores, la variación experimentada por cada uno de las variables intra-sujeto de este apartado, en las distintas submuestras de las variables inter-sujeto que se han utilizado anteriormente, después del estudio del tema y de las técnicas. Además, compararemos cómo quedan cada una de las submuestras consideradas según las distintas variables inter-sujeto: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato”, teniendo en cuenta ambos momentos.

### Variables intra-sujeto

En la tabla siguiente se va a ir indicando si, después del estudio del tema y de las técnicas, se mantiene, aumenta o disminuye cada una de las variables intra-sujeto que se han considerado en este apartado. Como las dos variables intra-sujeto que se tienen conllevan una mayor facilidad al razonar para qué le sirven al niño cada una de las actividades planteadas, no es necesario utilizar más de un color para que quede claro el estudio que se hace.

| Variable intra-sujeto | Variación experimentada |
|-----------------------|-------------------------|
| Utilidad              | Aumenta                 |
| Precisión             | Aumenta                 |

**Tabla 204: Variación experimentada por las variables intra-sujeto del undécimo apartado.**

Se observa que, después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan las dos variables intra-sujeto; por tanto, se puede pensar que el estudio del tema y de las técnicas le ha servido a los alumnos para saber sacarle más utilidad a las actividades que plantearon y para expresarse con mayor precisión.

### Género

En las tablas que vienen a continuación se recogen las variaciones experimentadas por las distintas variables intra-sujeto en las dos submuestras que determina la variable inter-sujeto “género”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En la tabla siguiente se indica cuál es la variación experimentada por las dos submuestras de la variable “género” en cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Variación en hombres | Variación en mujeres |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| Utilidad              | Aumenta              | Aumenta              |
| Precisión             | Aumenta              | Aumenta              |

**Tabla 205: Variación experimentada por la variable “género” en el undécimo apartado, antes/después.**

Después del estudio del tema y de las técnicas aumentan las variables intra-sujeto de este apartado en las dos submuestras que determina la variable “género”.

## Máximos

La tabla siguiente sirve para destacar los grupos de alumnos que alcanzan el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | Mujeres        | Hombres          |
| Precisión             | Mujeres        | Hombres          |

**Tabla 206: Máximos de la variable “género” en el undécimo apartado, antes/después.**

Antes del estudio del tema y de las técnicas, las mujeres consiguen la mayoría de los máximos de las variables intra-sujeto de este apartado; después son los hombres los que los logran.

## Año de realización

Se condensan ahora, en las tablas siguientes, los cambios que tienen lugar en las variables intra-sujeto de este apartado, en las distintas submuestras originadas por la variable inter-sujeto “año de realización”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

Se indica, en la tabla adjunta, cuál es la variación experimentada, después del estudio del tema y de las técnicas, en cada una de las variables intra-sujeto, en las submuestras de la variable “año de

realización”. En esta tabla no aparece el año 2003 ó anteriores porque la idea de considerar este apartado fue posterior a estos años.

| Variable intra-sujeto | Variación 2004 | Variación 2005 | Variación 2006 |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|
| Utilidad              | Aumenta        | Aumenta        | Aumenta        |
| Precisión             | Aumenta        | Aumenta        | Aumenta        |

**Tabla 207: Variación experimentada por la variable “año de realización” en el undécimo apartado, antes/después.**

Después del estudio del tema y de las técnicas aumentan las variables intra-sujeto de este apartado en todas submuestras que determina la variable “año de realización”.

## Máximos

Se emplea la tabla siguiente para destacar los grupos de alumnos que alcanzan el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | 2005           | 2005             |
| Precisión             | 2005           | 2006             |

**Tabla 208: Máximos de la variable “año de realización” en el undécimo apartado, antes/después.**

La mayoría de los máximos de las dos variables intra-sujeto los consiguen los alumnos que respondieron las encuestas en 2004/2005, sólo; después del estudio del tema y de las técnicas, consiguen mayor precisión los de 2005/2006.

## Mínimos

En la tabla siguiente se marcan los mínimos de las dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | 2004           | 2004             |
| Precisión             | 2004 y 2006    | 2006             |

**Tabla 209: Mínimos de la variable “año de realización” en el undécimo apartado, antes/después.**

Todos los mínimos se los reparten entre los alumnos que respondieron las encuestas en 2003/2004 y en 2005/2006, consiguiendo mayor número de mínimos los de 2003/2004.

## Curso

Se considera ahora la variable inter-sujeto “curso” y se van a acumular en las tablas siguientes las variaciones que experimentan las variables intra-sujeto de este apartado en las distintas submuestras, originadas por “el curso”; los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En la tabla siguiente se va a tener la variación, después del estudio del tema y de las técnicas, originada por cada una de las variables intra-sujeto, en las submuestras de la variable “curso”.

| Variable intra-sujeto | Variación primero | Variación segundo | Variación tercero | Variación cuarto | Variación quinto |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| Utilidad              | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta          | Aumenta          |
| Precisión             | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta           | Aumenta          | Aumenta          |

**Tabla 210: Variación experimentada por la variable “curso” en el undécimo apartado, antes/después.**

Después del estudio del tema y de las técnicas, aumentan las variables intra-sujeto de este apartado en todas submuestras que determina la variable “curso”.

## Máximos

Se indican en la tabla siguiente los grupos de alumnos que consiguen el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | Cuarto         | Cuarto           |
| Precisión             | Cuarto         | Cuarto           |

**Tabla 211: Máximos de la variable “curso” en el undécimo apartado, antes/después.**

Los alumnos de cuarto son los que encuentran mayor utilidad en las actividades que les plantearon a los niños de Educación Infantil, en ambos momentos, y lo expresan todo esto con mayor precisión.

## Mínimos

Se indican en la tabla siguiente cuáles son los mínimos, por “curso”, de las dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor    | Después es menor  |
|-----------------------|-------------------|-------------------|
| Utilidad              | Tercero           | Primero           |
| Precisión             | Segundo y tercero | Segundo y tercero |

Tabla 212: Mínimos de la variable “curso” en el undécimo apartado, antes/después.

La mayoría de los mínimos de las variables intra-sujeto son de los alumnos tercero.

## Edad

En las tablas que vienen a continuación se van a recoger las variaciones que experimentan las variables intra-sujeto de este apartado en las distintas submuestras, originadas por la variable inter-sujeto “edad”; los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En esta tabla se tiene la variación originada en las submuestras de la variable “curso” por cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | 19 años | 20 años | 21 años | 22 años | 23 años | 24 años | 25 años | 26 años | 27 años | 28 años | 29 años |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Utilidad              | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       |
| Precisión             | A       | A       | D       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       | A       |

Tabla 213: Variación experimentada por la variable “edad” en el undécimo apartado, antes/después.

Después del estudio del tema y de las técnicas aumentan casi todas las variables intra-sujeto de este apartado en casi todas submuestras que determina la variable “curso”, excepto en precisión para los alumnos con 21 años.



## Máximos

Se indican en la tabla siguiente los grupos de alumnos que consiguen el mayor nivel en cada una de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | 28 29 años     | 29 años          |
| Precisión             | 28 años        | 29 años          |

Tabla 214: Máximos de la variable “edad” en el undécimo apartado, antes/después.

Todos los máximos se los reparten entre los alumnos de 28 años y los de 29 años, dominando los de 28 años, antes del estudio del tema y de las técnicas, y después, los de 29.

## Mínimos

En la tabla siguiente se destacan las submuestras de la variable “edad” que obtienen los mínimos en las dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | 24 años        | 21 y 25 años     |
| Precisión             | 24 años        | 21 años          |

Tabla 215: Mínimos de la variable “edad” en el undécimo apartado, antes/después.

Todos los mínimos de las dos variables intra-sujeto, antes del estudio del tema y de las técnicas son de los alumnos de 24 años, y después, de los de 21 años.

## Especialidad

En las tablas siguientes se concentran los cambios, de las variables intra-sujeto de este apartado, que tienen lugar en las distintas submuestras originadas por la variable inter-sujeto “especialidad”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

En esta tabla se destaca cuál es la variación experimentada por las submuestras de la variable inter-sujeto “especialidad” en cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Educación Infantil | Matemáticas | Magisterio no Infantil | Otras especialidades |
|-----------------------|--------------------|-------------|------------------------|----------------------|
| Utilidad              | Aumenta            | Aumenta     | Aumenta                | Aumenta              |
| Precisión             | Aumenta            | Se mantiene | Aumenta                | Aumenta              |

**Tabla 216: Variación experimentada por la variable “especialidad” en el undécimo apartado, antes/después.**

Aumentan casi todas las variables intra-sujeto de este apartado en todas las submuestras que determina la variable “especialidad”, después del estudio del tema y de las técnicas.

## Máximos

La tabla que viene a continuación se reserva para destacar los grupos de alumnos que alcanzan el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto, en ambos momentos.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | Matemáticas    | Matemáticas      |
| Precisión             | Matemáticas    | Matemáticas      |

**Tabla 217: Máximos de la variable “especialidad” en el undécimo apartado, antes/después.**

Todos los máximos de las dos variables intra-sujeto los logran los alumnos de la licenciatura de Matemáticas, tanto antes como después del estudio del tema y de las técnicas.

## Mínimos

Se señalan en la tabla siguiente los grupos de alumnos que obtienen los mínimos de las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor         | Después es menor       |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| Utilidad              | Magisterio no Infantil | Magisterio no Infantil |
| Precisión             | Otras especialidades   | Magisterio no Infantil |

**Tabla 218: Mínimos de la variable “especialidad” en el undécimo apartado, antes/después.**

Casi todos los mínimos son de los alumnos de Magisterio de especialidades distintas de Educación Infantil, excepto el de precisión, antes del estudio del tema y de las técnicas, que es de otras especialidades distintas de Magisterio y de Matemáticas.

## Bachillerato

En las tablas que siguen se acumulan los cambios de las variables intra-sujeto de este apartado, que tienen lugar, después del estudio del tema y de las técnicas, en las distintas submuestras originadas por la variable inter-sujeto “bachillerato”, los máximos y los mínimos, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

## Variaciones

Se destaca, en la tabla adjunta, la variación experimentada por las submuestras de la variable “bachillerato” en cada una de las variables intra-sujeto, después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Ciencias | Letras  | F P     |
|-----------------------|----------|---------|---------|
| Utilidad              | Aumenta  | Aumenta | Aumenta |
| Precisión             | Aumenta  | Aumenta | Aumenta |

**Tabla 219: Variación experimentada por la variable “bachillerato” en el undécimo apartado, antes/después.**

Aumentan, después del estudio del tema y de las técnicas, todas las variables intra-sujeto en las submuestras que determina la variable “bachillerato”.

## Máximos

En la siguiente tabla se señalan los grupos de alumnos que consiguen el mayor valor en cada una de las variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es mayor | Después es mayor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | F P            | Letras           |
| Precisión             | F P            | Letras           |

**Tabla 220: Máximos de la variable “bachillerato” en el undécimo apartado, antes/después.**

Los máximos de las dos variables intra-sujeto se los reparten, por igual, los alumnos de Letras y los de F P, siendo los de F P los que consiguen todos los máximos antes del estudio del tema y de las técnicas, y después, los de Letras.

## Mínimos

Se termina este apartado con la tabla siguiente, en donde se indican los mínimos de las dos variables intra-sujeto, antes y después del estudio del tema y de las técnicas.

| Variable intra-sujeto | Antes es menor | Después es menor |
|-----------------------|----------------|------------------|
| Utilidad              | Letras         | F P              |
| Precisión             | Letras         | F P              |

Tabla 221: Mínimos de la variable “bachillerato” en el undécimo apartado, antes/después.

Igual que antes, todos los mínimos se los reparten entre los alumnos de Letras y F P, aunque invirtiendo los lugares respecto de los que ocupaban antes.

### 5.3.15. Estudio estadístico del decimosegundo apartado de las encuestas

Se continúa con el estudio estadístico de los resultados de las encuestas. Analizamos, mediante el modelo lineal general de medidas repetidas, el decimosegundo apartado de la Evaluación Inicial y el decimotercero de la Final, con objeto de ver la influencia que tiene el estudio del tema en la opinión de los alumnos sobre si consideran que necesitan saber mejor el tema "las Magnitudes y su Medida" para poder proponer actividades que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro, antes y después del estudio del tema.

#### 5.3.15.1. ¿Crees que necesitas saber mejor el tema "las Magnitudes y su Medida"?

Se toman las variables “¿crees que necesitas saber mejor el tema "las Magnitudes y su Medida" para poder proponer actividades que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro?”, antes y después del estudio del tema, como variables intra-sujetos. En principio no se elige ninguna variable inter-sujeto; después se van eligiendo sucesivamente las variables: “género”, “año de realización”, “curso”, “edad”, “especialidad” y “bachillerato” como variables inter-sujeto, para estudiar qué influencia tiene el estudio del tema en su opinión sobre si “creen que necesitan saber mejor el tema "las Magnitudes y su Medida" para poder proponer actividades que tengan mayor repercusión para el niño en el futuro”, según cada una de estas variables.

Como los valores considerados para valorar las respuestas han sido: 0=“sí”, 1=“no” y 2=“otros”, consideramos que no tiene sentido este estudio ya que, de forma análoga a lo que se comentó en el apartado 4º y en el 8º, se puede decir que, como hemos dicho al principio del estudio de los distintos apartados de las encuestas mediante el modelo lineal general, en este estudio se considera el diseño más simple de medidas repetidas consistente en medir dos variables en una misma muestra de sujetos. Los datos de este diseño se analizan con la prueba T para muestras relacionadas, que permite contrastar hipótesis referidas a la diferencia entre dos medias relacionadas y en este caso no tiene sentido el cálculo de la media, pues no se puede decir qué significa la media de los valores: sí, no y otros. Por esta razón pensamos que no tiene sentido continuar este estudio.

Razones análogas podríamos esgrimir respecto de los dos últimos apartados, ya que en el apartado decimotercero de la Evaluación Inicial y en el decimocuarto de la Final se plantea: *“¿Necesitas comprender las técnicas de Metodología Creativa para que las actividades que propongas sean más originales?”*, valoradas: 1=“sí”, 2=“no” y 3=“otros”, para los que no tiene sentido el cálculo de la media. En el decimocuarto apartado de la Evaluación Inicial y el decimoquinto de la Final se plantea: *“¿Te gustaría que te explicásemos el tema y las técnicas de Metodología Creativa para volver a plantearte cuestiones análogas?”*, siendo en este caso los valores asignados los mismos que en los apartados anteriores, luego por las mismas razones no tiene sentido seguir estudiando estos apartados.

## IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES



## Discusión

En este Capítulo se va a hacer un análisis comparativo de las hipótesis y de los objetivos planteados en la Introducción General y en la Evaluación Inicial con los resultados obtenidos en el estudio de frecuencias y en el estudio estadístico de las encuestas, para ver si confirman o no los planteamientos iniciales.

La **discusión de los resultados** pretende establecer un eslabón claro desde los análisis realizados como resultado de la investigación empírica, con los planteamientos establecidos previamente en el marco teórico del presente trabajo.

Así, relacionamos los hallazgos de la investigación empírica descritos en el capítulo anterior, con

- a) las hipótesis y
- b) los objetivos.

Respecto a los objetivos cabe recordar que han sido planteados en dos momentos:

- ❖ Objetivos Generales de toda la investigación que fueron planteados en la Introducción General y
- ❖ Objetivos de la Evaluación que quedaron expresados en la Evaluación Inicial.

Primero empezamos recordando cada una de las hipótesis y responderemos, en la medida de lo posible, a los argumentos que contienen.

La **Hipótesis 1** se refería a que los alumnos objeto de nuestra investigación no tienen ideas teóricas claras de lo que es una magnitud ni de lo que es la medida de una magnitud. En concreto, pensábamos que no tenían claro si son magnitudes: la temperatura, el cariño, el dolor, la bondad, la amistad, etc. La importancia de que el educador tenga claro todos estos aspectos se debe a que dichos conceptos son utilizados por el niño en su lenguaje habitual, e incluso en Educación Infantil puede iniciarse en la medida de la temperatura.



Fue únicamente la intuición y la experiencia docente la que nos llevó a afirmar que los alumnos objeto de estudio no tendrían ideas teóricas claras de lo que es una magnitud. Comprobamos con el estudio de frecuencias que cuando se les dice, en el apartado quinto de la Evaluación Inicial y en el sexto de la Final, que definan lo que entienden por magnitud, el 88% no dice nada o casi nada, antes del estudio del tema. Sin embargo, después del citado estudio, el 83% da la definición de magnitud bien o casi bien, lo que confirma nuestra intuición.

Como ya se ha dicho en el estudio estadístico del quinto apartado, los alumnos que definen con mayor exactitud este concepto, antes y después del estudio del tema, son los de Matemáticas. Esta idea, aunque no estaba explícita en nuestro planteamiento, sí era lo que imaginábamos.

Con la definición de medida de una magnitud ocurre algo parecido. El estudio de frecuencias en el apartado sexto, informa de que, en este caso, el 80% de los alumnos no dice nada o casi nada antes del estudio del tema, pasando a dar la definición bien o casi bien el 60%, después del citado estudio. El estudio estadístico en el apartado sexto, recoge que siguen siendo los estudiantes de Matemáticas los que definen con mayor exactitud el concepto de medida de una magnitud, tanto antes como después del estudio del tema. Suponíamos que los alumnos mejor preparados matemáticamente —los estudiantes de Matemáticas— darían las definiciones de magnitud y de medida de una magnitud de forma más exacta.

Para comprobar si los alumnos tienen claro si son magnitudes ciertos conceptos parecidos a otros que sí lo son (que el niño emplea en su lenguaje habitual e incluso puede medir, como es la temperatura) y otros de los que aún hoy no se ha encontrado ningún instrumento apropiado para realizar su medición (como puede ser el cariño, el dolor, la bondad, la amistad, etc.), sólo podemos utilizar el estudio de frecuencias.

En el apartado cuarto comprobamos que hay una mayoría de alumnos que, tanto antes como después del estudio del tema, dicen que el cariño, la alegría, el dolor, la fama y el interés no son magnitudes ni son medibles, lo que sabemos es correcto. Este acierto puede atribuirse únicamente a la idea que tienen los alumnos de magnitud como algo que se puede medir, y no a que sepan con rigor por qué esos conceptos no son magnitudes ni lo serán en el futuro.

Sin embargo, antes del estudio del tema y de las técnicas, el 84% de los alumnos dicen que la temperatura es una magnitud medible, pasando después del estudio del tema, a ser el 30% los que siguen con esa idea. El 55%, mejor informados del concepto de magnitud y de medida, dicen que es medible y no es magnitud. Pensamos que la razón de su respuesta es la misma de antes: la temperatura se puede medir, luego para los estudiantes es una magnitud. En este caso su idea de magnitud no ha servido a los alumnos para justificar la respuesta dada, pues como vemos les ha llevado al error.

En la **Hipótesis 2** decíamos que al iniciar el periodo escolar, el niño de Educación Infantil no tiene adquiridas las nociones de conservación, transitividad y unidad de medida. Consideramos que es en esta etapa donde el niño empieza a asimilar estas nociones, y la práctica de la medida puede facilitar su adquisición.

Aunque no hemos demostrado experimentalmente si el niño de Educación Infantil tiene adquiridas las nociones de conservación, transitividad y unidad de medida, si lo hemos comprobado a través de las actividades que hemos realizado con ellos. Un estudio más profundo podría realizarse en un trabajo posterior. También hemos observado que la práctica de la medida contribuye a facilitar su adquisición, ya que después de ejercitarse en medir la longitud, el peso, la capacidad, etc., de algunos objetos, después lo hacen con mayor facilidad y poco a poco van adquiriendo la conservación, la transitividad y la unidad de medida. Con posterioridad se podría llevar a cabo un estudio más serio sobre todo esto.

La **Hipótesis 3** constituye el fundamento de nuestra investigación; afirma que la creatividad, la claridad y la precisión con que el alumno-profesor propone actividades a los niños de Educación Infantil, aumenta cuando el educando posee un conocimiento profundo sobre "las Magnitudes y su Medida".

Aunque imaginábamos que un conocimiento profundo sobre "las Magnitudes y su Medida" hace que las actividades que proponen los docentes entrevistados a los niños de Educación Infantil sean más creativas y puedan ser expresadas con mayor claridad y precisión, esto lo hemos corroborado con el estudio de frecuencias y el estudio estadístico de los apartados tercero de la Evaluación Inicial y Final, del décimo de la Inicial y del decimoprimer de la Final.

Hemos visto que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos proponen actividades a los niños de Educación Infantil más creativas, más precisas (la claridad la hemos incluido en la precisión), utilizan mayor número de magnitudes y de unidades de medida y son más adecuadas al nivel de los niños.

En la **Hipótesis 4** contábamos con que si los alumnos conocen en profundidad los contenidos matemáticos y las técnicas de Metodología Creativa, proponen unas actividades más creativas.

Esta suposición se ha comentado anteriormente pues sólo hemos realizado dos encuestas, la primera sin que los alumnos hubieran hecho ningún estudio previo, y la segunda después de haberse estudiado el tema y las técnicas.

Una vez analizadas las hipótesis pasamos a estudiar el grado de consecución de los **objetivos de la Introducción**.

El **Objetivo 1** de la Introducción decía que queremos confirmar la idea de que para que el maestro sepa qué es lo que tiene que explicar a los niños, por qué plantea unas actividades o ejercicios y no otros..., debe tener un conocimiento del tema a un nivel superior al que intente transmitir.

Aunque el nivel que se le ha dado al tema “las Magnitudes y su Medida” hemos procurado que sea el apropiado para que lo comprendan la mayoría de los alumnos que respondieron las encuestas, por haber resultado demasiado amplio no hemos conseguido que éstos se estudien el tema tal y como viene en el Capítulo II, lo que entendemos. Sin embargo, si se han visto buena parte de él y han llegado, casi todos, a comprender la mayoría de los detalles que hemos considerado fundamentales como: la definición de magnitud, los diferentes tipos de magnitudes, a que se llama medida de una magnitud, la proporcionalidad de magnitudes... Esto supone que los alumnos tienen un conocimiento del tema a un nivel superior al que en un futuro intentarán transmitir a los niños de Educación Infantil.

Con todos estos conocimientos el docente, después del estudio del tema, debe saber lo que es una magnitud y a qué se llama medida de una magnitud, aunque, como hemos comprobado en el estudio de frecuencias y en el estudio estadístico del apartado séptimo, son muy pocos los que, antes del estudio del tema y de las técnicas, saben decir

cómo se miden las magnitudes que ellos mismos han dicho. Después del citado estudio aumenta el número.

También se ha visto, en el estudio de frecuencias y en el estudio estadístico del apartado decimoprimer, que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos sacan mayor utilidad a las actividades que ellos mismos plantearon y son capaces de expresar con mayor precisión para qué les sirven dichas actividades.

En el **Objetivo 2** de la Introducción se planteó que para que el maestro pueda saber si el niño está capacitado o no para entender lo que le intenta transmitir, y para poder ponderar si es el momento de trabajar una determinada parte del tema, debe conocer la psicología del niño.

En el Capítulo III, antes de plantear las actividades que consideramos apropiadas para el niño de Educación Infantil, se ha estudiado la génesis del concepto de medida: transitividad, unidad de medida y los estadios de desarrollo de la comprensión de la medida. También se han visto algunas actividades que se podrían llevar a cabo en los distintos subestadios del estadio inicial, ya que parte de él es el objeto de nuestro estudio, pues, como ya hemos comentado, las actividades que proponemos van dirigidas a los niños de 3 a 6 años. Con todo esto pensamos que aportamos el material necesario para cubrir este objetivo.

Aunque los alumnos que cursaban segundo o tercero de Magisterio ya tenían estos conocimientos, a los demás no nos ha sido posible transmitírselos, debido a que estos temas no forman parte del programa de ninguna de las asignaturas: “Introducción al Álgebra” y “Elementos de Álgebra y Geometría en Educación Infantil”, y no hemos encontrado ni tiempo ni disposición de los alumnos para hacer este estudio complementario. Sólo pudimos decirles que observaran a los niños de estas edades, y con esta información plantearan las actividades.

A pesar de todo, las actividades que propusieron fueron bastante adecuadas, esto lo confirma el estudio estadístico llevado a cabo en el apartado décimo, en él se observa que el nivel general al principio es mayor que 3.73 (recordemos que la adecuación de las actividades estaba valorada de 0 a 4). No podemos obviar que el estudio del tema y de las técnicas les ha ayudado a adquirir mayor información del tipo de actividades que pueden plantearles a los niños, lo que observamos en el aumento que ha experimentado el nivel después del citado estudio.

Se han analizado los distintos estadios de desarrollo de la comprensión de la medida por parte del niño, aunque no correspondan a Educación Infantil, para poder entender con mayor claridad como se va progresando en la adquisición de este concepto.

Con el **Objetivo 3** de la Introducción recogemos la inquietud de que para motivar a los niños y conseguir entusiasmarlos con objeto de lograr que trabajen, que traten de descubrir cosas nuevas, el maestro debe conocer alguna metodología que fomente la creatividad.

Como los alumnos han estudiado el concepto de creatividad y todas las técnicas de Metodología Creativa recogidas en el Capítulo I, con ello tiene material suficiente para poder plantear actividades originales. Hemos comprobado, en el estudio que hemos realizado de los apartados tercero de ambas Evaluaciones, del décimo de la Evaluación Inicial y del decimoprimer de la Final, que después del estudio del tema y de las técnicas aumenta la creatividad de los alumnos.

Pensamos, en el **Objetivo 4** de la Introducción, que el maestro debe utilizar una metodología adecuada, buscando actividades apropiadas al tema en cuestión y al nivel de los alumnos. Para ello, sería importante que conociera algunas actividades que hayan planteado otros profesionales que hubiesen trabajado el tema con anterioridad.

En el tercer apartado hemos hecho una propuesta de las actividades que se pueden llevar a cabo en los subestadios del estadio inicial, nos hemos extendido fundamentalmente en el último de los subestadios, por ser aquí dónde se ha centrado el estudio que hemos llevado a cabo. Para este subestadio hemos propuesto distintas actividades que pueden realizarse sobre las magnitudes que consideramos que puede trabajar el niño: longitud, área, peso, volumen y capacidad, tiempo y dinero. Hemos propuesto actividades sobre medida de la temperatura, aunque no sea magnitud.

Utilizando cada una de las técnicas de Metodología Creativa se propone una o varias actividades que sirven para ver con mayor claridad las técnicas, y que pueden servir como modelo de su utilización.

Al final del Capítulo III trabajamos 10 actividades o ejercicios, muchos de ellos planteados por distintos especialistas con anterioridad, utilizando todas las técnicas de Metodología Creativa, comentadas en el Capítulo I, en cada una de ellas.

En el **Objetivo 5** se comenta la importancia de analizar los conceptos que se parecen en algo al de magnitud —para ver si se pueden considerar como tales según el modelo teórico— y otros de los que aún no se ha encontrado ningún instrumento de medida, por ejemplo, el cariño.

Este objetivo ha quedado respondido con la primera hipótesis.

A través del **Objetivo 6** nos planteamos analizar quién es más apto para proponer actividades creativas sobre "las Magnitudes y su Medida" en Educación Infantil: una persona preparada pedagógicamente y psicológicamente o una preparada matemáticamente.

Todo esto lo hemos venido observando con las actividades que han propuesto los alumnos en los apartados tercero de las dos Evaluaciones, en el décimo de la Inicial y en el decimoprimer de la Final, ya que allí se comparan los alumnos de Magisterio de la especialidad de Educación Infantil y de otras especialidades con los de Matemáticas y con los de otras especialidades.

También hemos hecho un estudio comparativo de los apartados tercero y décimo para analizar si las actividades que proponen los alumnos cuando no utilizan ningún material adicional son más o menos creativas que cuando lo usan. Se ha visto que la balanza se ha inclinado a favor de las segundas.

Queríamos analizar en el **Objetivo 7** en qué medida el conocimiento por parte del educador de los contenidos matemáticos y de las técnicas de Metodología Creativa, puede ayudar al docente a proponer actividades originales y con una terminología precisa para facilitar al niño de Educación Infantil el redescubrimiento de "las Magnitudes y su Medida".

En la hipótesis tercera ya se hizo el comentario correspondiente y consideramos que no es necesario repetirlo.

Finalmente en el **Objetivo 8** pensamos proponer un modelo de Formación de Educadores en este Área.

En las Conclusiones hacemos una propuesta para un modelo de Formación de Educadores en Matemáticas, entendemos que el profesor que imparta esta materia debe tener una buena preparación en Pedagogía, en Psicología y, por supuesto, en Matemáticas. Consideramos

que además, estas asignaturas se deben trabajar de forma multidisciplinar, o mejor transdisciplinar. Además, sería deseable que hubiese una especialidad en Magisterio que se llamara Maestro en Educación Matemática.

Tal y como hemos indicado, el **grado de consecución de los objetivos de la Evaluación** es el siguiente:

En el **Objetivo 1** de la Evaluación Inicial queríamos comprobar si los alumnos de Magisterio, los de Matemáticas y los de otras Facultades tienen una idea clara de lo que es una magnitud, de lo que es la medida de una magnitud y si saben poner ejemplos de ellas.

Se ha visto, en el estudio de frecuencias y en el estudio estadístico de los apartados quinto y sexto, que aunque, antes de estudiarse el tema y las técnicas, los alumnos no saben lo que es una magnitud ni tampoco saben a qué se llama medida de una magnitud, sin embargo, sí saben poner ejemplos de magnitudes, aunque, en el apartado séptimo, se ha visto que son muy pocos los que, antes del estudio del tema y de las técnicas, saben decir cómo se miden las magnitudes que ellos mismos han comentado.

Después del citado estudio, la mayoría de los alumnos definen correctamente los conceptos de magnitud y de medida de una magnitud, usan mayor número de magnitudes y de unidades para poner los ejemplos, hay más alumnos que saben decir cómo se miden las magnitudes usadas en los ejemplos.

Pretendemos, en el **Objetivo 2**, fomentar distintas situaciones, de modo experimental, para comprobar quién es mas apto para proponer actividades creativas sobre “las Magnitudes y su Medida” en Educación Infantil: una persona con conocimientos pedagógicos y psicológicos o una con conocimientos matemáticos.

Este objetivo ya lo hemos comentado anteriormente, con el objetivo sexto de la introducción, y no lo vamos a repetir.

Finalmente, con el **Objetivo 3** veíamos la necesidad de analizar en qué medida el conocimiento por parte del educador de:

- a) los contenidos matemáticos
- b) las técnicas de metodología creativa



puede ayudar a proponer actividades interesantes, originales y con una terminología precisa para facilitar al alumno de Educación Infantil el redescubrimiento de las Magnitudes y su Medida.

En la hipótesis tercera ya se hizo el comentario correspondiente y consideramos que no es necesario insistir en ello.

Aunque la idea inicial era observar cómo influía la preparación de los alumnos en la creatividad y en la precisión con que proponían las actividades para los niños de Educación Infantil, hemos querido que en los apartados tercero de las dos Evaluaciones la única preparación con que contaran fuera el estudio del tema y de las técnicas. Se dejó el apartado décimo de la Evaluaciones Inicial y el undécimo de la Final, para que, como cualquier profesional, los alumnos que respondieron a las dos encuestas pudieran preparar sus actividades consultando cualquier material adicional.

Se ha analizado las diferencias que existen entre la creatividad y la precisión con que dan las respuestas, antes y después del estudio del tema y de las técnicas, y se ha observado que generalmente aumentan ambos cuándo utilizan más materiales.

Al entender por **validez interna** medir lo que se dice medir, se puede afirmar que hemos medido, tanto con el estudio de frecuencias como con el estudio estadístico, que han sido fundamentales los estudios del tema “las Magnitudes y su Medida” y de las técnicas de Metodología Creativa para poder proponer actividades a los alumnos de Educación Infantil más precisas y más creativas.

Consideramos que pueden ser de gran utilidad, tanto para la enseñanza universitaria como para Educación Infantil, como para cualquier nivel en dónde el educador tenga que comentar algún aspecto relacionado con “las Magnitudes y su Medida”, los tres primeros Capítulos de que consta la tesis.

El primero y el tercero entendemos que son fundamentales para los Maestros de Educación Infantil, ya que en el primero puede encontrar las distintas definiciones de creatividad y las técnicas de Metodología Creativa, y en el tercero puede ver distintos modelos de actividades que podría llevar a cabo con las técnicas antes vistas. El Capítulo II lo consideramos imprescindible para completar la preparación matemática del educador en el tema “las Magnitudes y su Medida”.



Pensamos que el Capítulo II deberían conocerlo no sólo el que tenga que dar clase de Matemáticas sino también el que tenga que hablar de algo relacionado con magnitudes o con medida de una magnitud, como puede ser el profesor de Física, ya que puede darse cuenta de los errores que se cometen al definir estos conceptos. Quizá con ello, si no le gustan las definiciones que aparecen por estar dadas bajo el punto de vista del matemático, podría buscar otras con objeto de no incurrir en usar lo que aún no ha definido en la definición.

Finalmente, queremos destacar que se han diseñado diversos instrumentos para hacer un estudio descriptivo y comparativo. No hemos hecho un estudio exhaustivo de la **validez externa** de los instrumentos empleados, si bien es cierto que han sido planteados teniendo en cuenta cómo se comportaba esta muestra de sujetos. Tal cometido, podría ser pensado para otro estudio posterior.

# Conclusiones, propuestas y futuras líneas de investigación

## 1. Conclusiones

Dado que, para la elaboración de la tesis que presentamos, trabajar en equipo ha sido una experiencia sumamente enriquecedora y fructífera, teniendo en cuenta el apoyo encontrado cuando las dificultades para la elaboración del trabajo se han hecho presentes, y los logros conseguidos gracias a la colaboración de otras personas, queremos comenzar las conclusiones destacando el gran **valor del trabajo en equipo**.

Entendemos por equipo de trabajo el conjunto formado por un número pequeño de personas, con habilidades complementarias, comprometidas con un propósito u objetivo común, con tareas concretas para cada una de ellas, con una meta común de la que se consideran responsables y que utilizan el consenso para la toma de decisiones.

Los integrantes del equipo deben estar especializados en una parcela concreta relacionada con el tema de investigación y deben estar actualizándose permanentemente. Hoy en día se piensa que, por muy extenso que sea el conocimiento individual, es necesaria la co-especialización para que el aporte de los individuos sea lo más productivo posible. La co-especialización es un entrenamiento vinculado con la disposición a poner lo de uno —aptitudes, conocimientos y experiencias— a disposición de los otros, y estar abierto a enriquecerse con todo lo que los otros nos puedan aportar.

Del trabajar en equipo se espera que los resultados sean factibles, medibles, desafiantes e innovadores. Sin embargo, el factor constitutivo del equipo no ha de ser sólo la persecución de ciertos resultados, sino el proceso de búsqueda permanente de mejora, por lo que en un equipo se pone a prueba el desafío a la creatividad y la innovación.

Héctor Fainstein en la dirección:

<http://www.hfainstein.ar/articul/creatividad.html>

cuenta una historia breve, muy ilustrativa, acerca de lo que significa trabajar en equipo. Por su originalidad, y por lo que nos ha aportado —y puede aportar a otros—, nos ha parecido oportuno mencionarla aquí.

*Cuentan que en una carpintería hubo una extraña asamblea. Fue una reunión de herramientas para arreglar diferencias.*

*El martillo ejerció la presidencia, pero la asamblea le notificó que tenía que renunciar, ya que se pasaba todo el tiempo haciendo ruidos.*

*El martillo aceptó la culpa, pero pidió que fuera expulsado el tornillo, argumentando que había que darle demasiadas vueltas para que sirviera.*

*El tornillo aceptó el ataque, pero exigió la expulsión de la lija. Señaló que era áspera en su trato y tenía fricciones con los demás.*

*Y la lija estuvo de acuerdo, pero exigió que fuera expulsado el metro que siempre se lo pasaba midiendo a los demás como si él fuera perfecto.*

*En eso entró el carpintero, se puso el delantal e inició la tarea. Utilizó el martillo, la lija, el metro y el tornillo. Finalmente, la tosca madera se convirtió en un hermoso mueble.*

*Cuando la carpintería quedó nuevamente sola, la asamblea reanudó la deliberación.*

*Fue entonces cuando el serrucho dijo:*

*Señores, ha quedado demostrado que tenemos defectos, pero el carpintero trabaja con nuestras cualidades. Eso nos hace valiosos. Así que no pensemos en nuestros fallos y concentrémonos en la utilidad de nuestros méritos.*

*La asamblea pudo ver entonces que el martillo es fuerte, el tornillo une, la lija pule asperezas y el metro es preciso. Se vieron como un equipo capaz de producir muebles de calidad.*

*Esta nueva mirada los hizo sentir orgullosos de sus fortalezas y de trabajar juntos. No fue necesario echar a nadie.*

Concretamos a continuación cuáles han sido nuestros logros con respecto a los **indicadores de creatividad conseguidos**.

En el Capítulo I considerábamos unos indicadores que servían para medir la Creatividad; ahora destacamos la necesidad de analizar en qué medida hemos cubierto dichos indicadores. A continuación recordamos cada uno de ellos y destacamos cuál ha sido nuestra aportación en cada caso.

**i) Fluidez:** *Es la capacidad para producir abundantes ideas, palabras, pensamientos, figuras, etc., en el menor tiempo posible.*

Consideramos que, en el trabajo que presentamos, tenemos abundantes ideas, palabras, pensamientos, figuras, etc., pues hemos aportado algunas definiciones nuevas de creatividad; para que consten dichas definiciones hemos construido un gráfico, utilizando la ideogramación; hemos visto la forma de aplicarle la creatividad y las técnicas de Metodología Creativa a “las Magnitudes y su Medida”, y hemos aportado una nueva técnica: “el entorno”.

Queremos destacar la abundancia de gráficos, sobre todo, cuando realizamos el estudio de frecuencias de los resultados de las encuestas o cuando hacemos el estudio estadístico de los distintos apartados.

La gran cantidad de tiempo dedicada a esta memoria no podemos reflejarla en el trabajo que presentamos, si bien podemos decir que ha sido tan motivador que, aún exprimiendo cada idea al máximo, no hemos tenido sensación de hartazgo. Pensamos que cuando se le toma el gusto a un tema y se disfruta trabajando en él, el tiempo no importa, no se da uno cuenta de cómo se va pasando, y, a veces, ni es capaz de calcularlo.

**ii) Originalidad e innovación:** *Es la facilidad para emitir palabras, ideas, pensamientos, figuras, etc. que se salgan de lo común. Es la capacidad que tiene una persona para hacer cosas distintas, lo que genera mayor valor. Es la creatividad de las ideas.*

Nuestra aportación fundamental en el tema “las Magnitudes y su Medida” ha sido dar la definición de magnitud utilizando el menor número de axiomas y obtener la clasificación de las mismas atendiendo exclusivamente a propiedades algebraicas.

Creemos que hay varias cosas en esta tesis que se salen de lo común, como la idea de que hay magnitudes finitas, que hay magnitudes no medibles y que hay algunas cosas que son medibles y que no son magnitudes.

Hemos elegido una definición de magnitud utilizando para ello el menor número posible de axiomas. A partir de ahí, la clasificación de las magnitudes se ha ido haciendo atendiendo a propiedades meramente algebraicas, pasando después, mediante razonamientos lógicos, a las definiciones más comunes.

Hay algunas demostraciones que podemos considerar originales; tal es el caso de que en una magnitud escalar los únicos elementos que pueden ser idempotentes son el neutro y el máximo. También pensamos que es original la forma de definir magnitudes discretas como  $\mathbb{N}$ -semimódulos (o  $\mathbb{Z}$ -semimódulos), cíclicos.

Damos algunas definiciones nuevas de creatividad y aportamos una nueva técnica de Metodología Creativa, ya comentada: “el entorno”. Usamos todas las técnicas para proponer actividades para los niños de Educación Infantil.

También creemos que son originales las dos encuestas que planteamos a los alumnos y la forma de analizar los resultados.

**iii) Flexibilidad:** *Es la capacidad para producir ideas diferentes, para pasar de una idea a otra, de una categoría a otra, para producir soluciones dispares y adaptar la mente a dichas soluciones.*

En este aspecto aportamos, por ejemplo, que contrariamente al sentir general de magnitud hay magnitudes no medibles y también magnitudes finitas. También en las magnitudes vectoriales, como no vimos la posibilidad de encontrar una medida, nos inventamos, a través de la métrica, una forma de medirlas.

A lo largo de toda la tesis vamos pasando de una idea a otra, de un tema a otro: empezamos por trabajar la creatividad; cuando estamos centrados en ella, pasamos a trabajar las técnicas de Metodología Creativa; continuamos elaborando el tema “las Magnitudes y su Medida”, volvemos a las técnicas de Metodología Creativa para utilizarlas en la preparación de actividades para los niños de Educación Infantil, y finalmente elaboramos las dos encuestas y realizamos el estudio estadístico de los resultados obtenidos con las respuestas de los alumnos.

**iv) Elaboración:** *Es la capacidad para reelaborar ideas. Es la riqueza de detalles que matizan la intuición original a través de una presentación bien estructurada.*

Quizá aquí lo que aportemos sea la forma de trabajar el tema “las Magnitudes y su Medida”, teniendo en cuenta otros conceptos similares que se conocen mejor en Matemáticas.

También, después de ver las técnicas de Metodología Creativa y “las Magnitudes y su Medida”, trabajamos en Educación Infantil una misma actividad con las distintas técnicas de Metodología Creativa, teniendo en cuenta los conocimientos ya adquiridos.

Pensamos que tenemos bastantes gráficos, obtenidos con los resultados de las encuestas, que completan la intuición que teníamos antes de hacer este estudio.

Creemos que hemos hecho un trabajo minucioso tanto en los aspectos creativos como en los matemáticos, procurando no dejar ningún aspecto importante sin analizar al máximo. Podríamos decir que hemos hecho una verdadera labor de relojería. Pensamos en el análisis que se hace, tanto con las magnitudes finitas como con las infinitas, con las absolutas y con las relativas. Antes de llegar a las magnitudes escalares, se demuestra, entre otras cosas, la proposición que dice: una magnitud relativa finita que tenga más de un elemento no puede estar totalmente ordenada. Después de dar la definición de magnitud escalar se demuestra, por ejemplo, la proposición: en una magnitud escalar finita los únicos elementos que pueden ser idempotentes son el neutro y el

máximo —si existen. A continuación nos planteamos si tendrían que coincidir, y vemos que no tienen por qué.

**v) Apertura:** *Es la capacidad para aceptar o incluir en el razonamiento nuevas ideas, aunque sean ideas de otros, y enjuiciar la realidad desde diversos puntos de vista, algunos de los cuales no se nos habían ocurrido con anterioridad.*

Para analizar dónde llevamos a cabo la apertura, consideramos que, hasta donde nosotros sabemos, nadie hasta ahora se había planteado la existencia de magnitudes finitas, ni tampoco si son o no magnitudes la alegría, la lealtad, la sinceridad...

Hemos recogido las distintas técnicas de Metodología Creativa que encontramos y las hemos incorporado a nuestros conocimientos. Esto y su uso es lo que ha permitido la elaboración del presente trabajo. Pensamos que, aunque la creatividad es muy valorada y utilizada en otras disciplinas, hasta ahora a nadie se le había ocurrido trabajar ningún tema de Matemáticas con las citadas técnicas.

Después de conocer los programas estadísticos necesarios para el estudio estadístico de los resultados de las encuestas, los hemos incluido en nuestros razonamientos.

Era impensable que una persona —como es la que lee la tesis— que llevaba años impartiendo docencia en la Facultad de Ciencias de la Educación, que había explicado la asignatura de Didáctica de la Matemática en algunos cursos y que en la actualidad no podía dar esta asignatura por estar adscrita —la profesora— al Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, de la Facultad de Ciencias, encontrara a otra persona, la Profesora Doctora D<sup>a</sup> Mercedes Siles Molina, del mismo Departamento, que toda su vida profesional la había dedicado a la docencia e investigación en este Área, que se decidiera a colaborar con la primera, codirigiendo esta tesis, para hacer algo que tuviera que ver, en parte, con la enseñanza y que entendiera tan bien todo ese sentir pedagógico.

Tampoco en ningún momento se podría pensar que la doctoranda, por mucho que echara de menos impartir docencia y trabajar algunos aspectos de Didáctica de las Matemáticas, después de estar imbuida en temas de Álgebra, volviera a sus raíces. Todo esto se lo debe a su gran amiga y compañera la Profesora Doctora D<sup>a</sup> M<sup>a</sup> Ángeles Gervilla Castillo, que fue la que le descubrió, en los curso de doctorado, este panorama tan atractivo y sugerente que ofrecen las técnicas de Metodología Creativa.

Otra responsable de que este trabajo haya salido adelante ha sido la Profesora Doctora D<sup>a</sup> Emelina López González, insustituible para la elaboración y estudio estadístico de la Muestra. A ella agradezco su esfuerzo y tesón para codirigir una tesis relacionada con las Matemáticas. Enamorada de esta asignatura (aunque en principio estaba un poco lejos de los conocimientos algebraicos, debido a que en la actualidad imparte docencia en el Departamento de Métodos de Investigación) ha sabido reencontrarse con sus raíces matemáticas y disfrutar con ellas. D<sup>a</sup> Emelina ha sido la que, con el estudio estadístico realizado, nos ha impulsado a hacer una cosa que no habíamos hecho antes, y que nos ha llevado a conseguir la tremenda cantidad de gráficos que hemos visto; todos ellos, pensamos que se salen de lo común.

De todo esto se puede deducir que todas las personas que han podido hacer que este trabajo se haya llevado a cabo han tenido una gran apertura.

**vi) Comunicación:** *Es la facilidad para dar forma y comunicar a los demás lo creado.*

Parte de los temas “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa (no todo, porque el trabajo realizado ha resultado demasiado extenso) se la hemos contado a los alumnos que se matricularon en las asignaturas “Introducción al Álgebra” y “Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil” durante los cursos 2002/2003, 2003/2004, 2004/2005 y 2005/2006, y no hay que tener la menor duda de que se han interesado por la creatividad en “las Magnitudes y su Medida” y, por lo menos, el tema y la mayoría de las técnicas les han impactado.

Incluso los padres de algunos de estos alumnos, al comentarles sus hijos algunos aspectos del tema, como que había magnitudes no medibles, se han tomado la molestia de leerse todo el tema y de dar su aprobación. Concretamente, uno de los alumnos —cuyo padre es Físico— nos comentó que al hablar del asunto con su padre y decirle que había magnitudes no medibles, éste se interesó por el tema y se lo leyó detenidamente considerando que estaba bastante bien y que la ciencia había variado grandemente.

También hemos contado algunas de las técnicas a los profesores que se matricularon en el último Congreso de Educación Infantil y Formación de Educadores, celebrado en Torremolinos en 2003, y todos ellos se interesaron por el tema y se sorprendieron gratamente.

Les hemos comunicado parte del tema “las Magnitudes y su Medida” y las técnicas de Metodología Creativa a un grupo de maestras



de Educación Infantil y éstas, después de quedar gratamente sorprendidas, han trabajado las actividades que planteamos con sus alumnos, los cuales han disfrutado con ellas y estaban deseando que llegáramos de nuevo.

Nos consta que nuestra compañera D<sup>a</sup> M<sup>a</sup> Ángeles Gervilla Castillo está comentando por doquier el trabajo que estamos llevando a cabo, y que son muchos los que quedan impactados al pensar que la creatividad se pueda trabajar con las Matemáticas de manera real.

Otra comunicación la estamos haciendo en este momento, cuando presentamos todos los estudios realizados.

Consideramos que, por la originalidad que conlleva este trabajo, no podrá ser silenciado en el futuro, sino que serán muchos los educadores que estudiarán las técnicas de Metodología Creativa e intentarán llevar a cabo las actividades que proponemos.

Pensamos que serán muchos los profesores, tanto de Matemáticas como de Física, que tendrán más cuidado cuando definan magnitud y sus diferentes tipos, así como cantidad, medida de una magnitud y unidad de medida.

**vii) Sensibilidad y receptibilidad:** *Es la capacidad para captar los pequeños detalles y reaccionar ante ellos.*

Durante todo el tiempo que hemos dedicado a elaborar esta tesis nos hemos encontrado con múltiples situaciones que nos han hecho descubrir pequeños detalles y que, por supuesto, nos han llevado a reaccionar. Por ejemplo, al saber que en Matemáticas hay subgrupos, pensamos que en magnitudes debería haber submagnitudes. Si bien, el hallazgo mayor fue descubrir en los Cursos de Doctorado la existencia de las diferentes técnicas de Metodología Creativa. Ello nos ha llevado a buscar la manera de expresarlas y utilizarlas en “las Magnitudes y su Medida”, esto es, de trasladarlas a nuestros alumnos.

También los maestros que han llevado a cabo las actividades que planteamos, con las técnicas de Metodología Creativa, han descubierto múltiples aspectos que les han sorprendido, como que podían trabajar con sus niños otras magnitudes distintas de las que ellos venían trabajando, y de otro modo.

Al conocer los estadísticos que podrían servirnos para analizar los resultados de las dos encuestas, nos metimos a fondo en ellos, y la prueba de nuestra reacción es la ingente cantidad de figuras que hemos obtenido.



**ix) Imaginación:** *Es la capacidad para “ver” lo que a simple vista no se destaca por no estar presente en la realidad. El valor de la imaginación está en que puede ir más allá de los límites de lo entendible, lo razonable, lo verdadero o lo lógico.*

Consideramos básica la creación de una característica común a todas las magnitudes; en realidad, descubrimos que la estructura de semimódulo era ese ambiente unificador.

La utilización de este indicador para medir la creatividad es usual en Matemáticas por el grado de abstracción que conlleva. En este sentido, no hemos encontrado en ningún sitio que una magnitud discreta sea un semimódulo cíclico y, sin embargo, es fundamental para que tenga sentido esta clasificación de las magnitudes escalares.

Tampoco se pueden encontrar en ningún lugar magnitudes no medibles y, sin embargo, es razonable que las haya.

Ni que decir tiene que hemos usado la imaginación en las diversas proposiciones nuevas, tanto para su enunciado como para su demostración. Destacamos entre ellas la que dice: un semigrupo unitario y conmutativo finito, con la ordenación natural del semigrupo, no puede ser una magnitud escalar, salvo que sea la trivial o sea una magnitud absoluta que verifique que haya un elemento “absorbente” que operado con cualquier otro nos dé ese elemento, y que para cualquier elemento no nulo podamos encontrar un número natural que multiplicado por él nos dé el elemento anteriormente encontrado.

También se pone de manifiesto la imaginación cuando aportamos nuestra propuesta en la técnica “solución de problemas”, después de hacer un análisis comparativo de las propuestas de Polya y Gervilla.

La imaginación está presente cuando, después de obtener los gráficos de los resultados de las encuestas mediante los distintos estadísticos, analizamos lo que quiere decir cada uno de ellos.

**x) Intuición:** *Es la capacidad para anticiparse a la comprensión de una cosa, idea o verdad, sin utilizar el razonamiento. Es “ese cosquilleo” que atrae hacia el descubrimiento de algo que ni siquiera sabes aún qué es.*

La intuición la usamos cuando conocimos el concepto de creatividad y pensamos que podría ser aplicado en las Matemáticas y en su enseñanza.

Se usa en todos los puntos señalados en la imaginación. En concreto: intuíamos que debía ser importante distinguir entre semimódulo —o módulo— por la izquierda y semimódulo —o módulo— por la derecha, cuando el anillo no fuese conmutativo, y llegamos a razonar por qué.

Al ver que todo grupo conmutativo es un  $\mathbb{Z}$ -módulo, intuíamos que esto no debería pasar si el grupo no era conmutativo, y logramos encontrar un buen contraejemplo en las isometrías del triángulo equilátero, llegando a demostrar después que todo grupo que sea  $\mathbb{Z}$ -módulo es necesariamente abeliano.

Al definir el concepto de magnitud escalar pensamos que debería haber magnitudes escalares finitas y al pensar en algunas de ellas intuimos, y después demostramos, que los únicos elementos idempotentes deberían ser el neutro y el máximo.

Al ver las magnitudes que se trabajaban en Educación Infantil pensamos que se podrían trabajar muchas más, y de hecho se estaban trabajando, aunque nadie se hubiera planteado que era así.

Otra cosa que intuíamos era que después del conocimiento del tema y de las técnicas los alumnos serían capaces de proponer actividades a los niños de Educación Infantil más formativas y originales que antes de dicho estudio. Esto lo estudiamos mediante las preguntas que realizamos en los apartados tercero de las dos encuestas, décimo de la Evaluación Inicial y decimoprimer de la Final.

La comprobación de que la intuición y la imaginación han funcionado adecuadamente se produjo, por ejemplo, con los distintos estadísticos que hemos utilizado para analizar los resultados de las respuestas al tercer apartado, que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos encuestados proponen actividades más creativas, en las que usan mayor número de magnitudes y que son más precisas. Con los análisis de los resultados al décimo apartado de la Evaluación Inicial y al decimoprimer de la Final comprobamos que, después del estudio del tema y de las técnicas, los alumnos encuestados proponen actividades más creativas, en las que usan mayor número de magnitudes y de unidades de medida, que son más precisas y que son más adecuadas para utilizarlas en Educación Infantil.

**xi) Impacto:** *Es la capacidad de asombrar de manera intensa al mayor número posible de personas. Una idea muy común, comunicada de una manera especial, puede tener más impacto que una idea brillante mal comunicada.*

Creemos que en los alumnos que cursaron alguna de las dos asignaturas antes mencionadas produjo un gran impacto el saber que había magnitudes que no eran medibles, ya que para ellos una magnitud era algo que se podía medir. También les asombró comprobar, de manera práctica, que se podía utilizar la creatividad en las Matemáticas.

También produjo gran impacto a los alumnos comprobar que, después del estudio del tema y de las técnicas, proponían actividades más creativas, más precisas, más adaptadas al nivel de los niños de Educación Infantil, además sabían sacarle más utilidad y expresaban con mayor precisión esa utilidad.

**xii) Redefinición del problema:** *Es la capacidad para, cambiar algunos (o todos) los datos, cambiar el problema, enunciarlo de forma distinta. También es hacer una pausa y preguntarse: ¿qué es lo que en realidad se está pidiendo?, ¿qué es lo que en realidad hay que lograr? Es trabajar creativamente sobre el enunciado del problema en lugar de comenzar a trabajar directamente sobre sus respuestas.*

Este aspecto ha sido el que con más frecuencia se ha empleado pues las preguntas: ¿qué es lo que en realidad se está pidiendo?, ¿qué es lo que en realidad hay que lograr? son continuamente formuladas en Matemáticas y, por supuesto, en “las Magnitudes y su Medida”. Algunas veces creíamos que teníamos enunciado y demostrado totalmente un teorema; cuando lo analizábamos en profundidad nos dábamos cuenta de que no resolvía de manera plenamente satisfactoria el problema inicialmente planteado, por lo que procedíamos a enunciarlo de forma diferente, en ocasiones alterando las hipótesis o las conclusiones. A veces variábamos la demostración. Todo ello nos parecía que contribuía a enriquecer la teoría.

Varias veces quisimos demostrar una proposición o resolver un ejercicio, sin recurrir al ejemplo previo, y tuvimos que, utilizando “la sinéctica” en su aspecto “convertir lo extraño en familiar”, echar marcha atrás y buscar un buen ejemplo que sirviera para que los alumnos entendieran, de una forma más fácil, lo que pretendíamos demostrar.

En todas las preguntas planteadas a los alumnos en la Evaluación Final usamos este indicador, ya que volvemos a repetir las mismas que había en la Inicial, después de haber estudiado el tema y las técnicas.

Con las preguntas planteadas en los apartados tercero de las dos encuestas, décimo de la Evaluación Inicial y decimoprimer de la Final, que ya hemos comentado, utilizamos también el indicador redefinición del problema, pues en el tercero le pedimos a los alumnos que

propongan actividades sin conocer ningún material ni preguntarle a nadie, y en los otros dos pueden usar cualquier material.

La posibilidad de combinar pruebas de medida de la creatividad, indudablemente potenciaría nuestro estudio, ya que se podrían considerar aspectos aptitudinales y creativos generales del docente, con los específicos tratados aquí sobre el nivel de conocimiento de los conceptos de magnitud y de medida de una magnitud con/sin entrenamiento en creatividad.

## 2. Propuestas

En toda nuestra labor docente ha sido objetivo fundamental procurar que Pedagogía y Matemáticas se interrelacionen. Aunque sabemos que la Didáctica de la Matemática se ocupa de ello, nosotros hemos hallado un nuevo punto de encuentro en el uso de las técnicas de Metodología Creativa para estudiar el tema “las Magnitudes y su Medida”. Comenzamos trabajando ambos aspectos de forma interdisciplinar —es decir, relacionando ambas disciplinas— y multidisciplinar —al intentar llevar ambas materias a la Educación Infantil— para después pasar a tener una visión de conjunto, que englobara múltiples aspectos de ambos temas y que superara lo que habíamos encontrado, es decir, pasamos a trabajar de modo transdisciplinar (para la definición de transdisciplinariedad puede consultarse, por ejemplo, Marín y de la Torre (1991: 275)). Todo ello ha podido ser llevado a cabo gracias al trabajo conjunto de matemáticos y pedagogos, contando además con la colaboración de maestros de Educación Infantil. Hemos procurado: primero ir creando puntos de encuentro para trabajar conjuntamente y después, en cada paso, revisar todo el proceso seguido.

Sería interesante seguir profundizando en la interrelación Pedagogía-Matemáticas y aportar nuestros resultados a la Didáctica de la Matemática. Con ello se contribuiría a penetrar en las causas reales del fracaso en Matemáticas, ya que si por un lado trabaja el matemático, aficionado a la Pedagogía, y por otro el pedagogo, enamorado de las Matemáticas, pero cualquiera de ellos sin un conocimiento profundo de la otra disciplina, sólo se parchea, aunque se parchee lo mejor que se pueda.

Analizando algunos aspectos de la intersección entre Matemáticas y Pedagogía nos planteamos: ¿por qué es el matemático el que se especializa en Didáctica de la Matemática y no es el pedagogo el que lo hace? Para nosotros la respuesta está muy clara: sin un conocimiento profundo de las Matemáticas no se puede ver la forma de enseñarlas, por

muy fáciles que les resulten a cualquier persona y por muy preparado que se esté en Pedagogía. Además, según Pelegrina y Salvador (1999: 34 y 35): *las Matemáticas permiten una definición exacta de los términos y un lenguaje universal, libre de las ambigüedades o inexactitudes del lenguaje natural. (...) el rigor científico de una materia se suele basar en la posibilidad de presentar sus contenidos mediante modelos matemáticos...* Y si esto es lo que ocurre, y así lo reconocen los psicólogos, se intuye que debe ser más fácil siendo matemático prepararse pedagógicamente que siendo pedagogo prepararse matemáticamente, ya que, en términos generales, la adquisición de conocimientos matemáticos requiere mayor esfuerzo que la de conocimientos pedagógicos. Téngase en cuenta que el grado de abstracción, intrínseco a las Matemáticas, es mayor que el que conlleva la Pedagogía.

Por todo esto aconsejamos al pedagogo que cuando tenga que llevar algún ejemplo de Matemáticas a sus trabajos de Pedagogía, lo consulte con algún matemático pues, de lo contrario, es fácil que incurra en errores o imprecisiones, o bien caiga en comentar ejemplos matemáticos que, aunque a él le parezcan los mejores, es posible que los pueda mejorar y que sean más originales. También sería bueno que el matemático consultara con el pedagogo acerca de cómo mejorar su labor docente, porque un buen profesor no sólo es el que sabe mucho sino el que, además, se preocupa de la forma en que ha de exponer sus conocimientos a los alumnos para que éstos resulten atractivos, y para que su aprendizaje entrañe el menor esfuerzo posible.

Si el que quiere enseñar algo de Matemáticas no conoce dichos contenidos, ¿qué podría enseñar a sus alumnos? Como mucho les leería el libro de texto o les contaría lo que recuerde de su infancia o adolescencia. Pero ¿esto es suficiente si pretende que sus alumnos sean creativos también en Matemáticas? Si no sabe Pedagogía, aunque sepa muchas Matemáticas, ¿cómo se las va a enseñar a sus alumnos?, ¿haciendo uso únicamente de la intuición? Y si no sabe Psicología, aunque sepa muchas Matemáticas y Pedagogía, ¿cuándo se las va a enseñar a sus alumnos?, ¿cuando considere oportuno, sin saber si están o no capacitados para entenderlas?

Es por lo que sugerimos que debe haber al menos una asignatura obligatoria de contenidos matemáticos para todos aquellos alumnos-profesores que vayan a dedicarse a la docencia de Matemáticas a cualquier nivel. Hablamos de docencia de Matemáticas porque es el área en la que realizamos nuestro trabajo, pero esta misma sugerencia puede aplicarse a otras disciplinas. Para dicha docencia sería imprescindible una buena preparación en las siguientes disciplinas: Matemáticas, Pedagogía y Psicología; la primera les diría qué enseñar, la segunda cómo enseñar y

la tercera cuándo enseñar. Si el profesor que imparte docencia de Matemáticas no tuviera los conocimientos suficientes en alguna de estas disciplinas, el resultado de su docencia no sería tan satisfactorio como en caso contrario. Además sería positivo contar con otras asignaturas que se interrelacionaran todas ellas, fomentando la transdisciplinariedad entre las Matemáticas y las otras, que podrían ser: Didáctica de las Matemáticas y Psicología de la Educación Matemática, o Psicopedagogía de la Matemática.

Para nosotros, la situación ideal sería la de tener otra diplomatura que se llamase Maestro en Educación Matemática, cuyo objetivo sería preparar a los alumnos para estudiar las formas y modos de enseñar Matemáticas en Infantil y en Primaria, y con contenidos suficientes en Matemáticas, Pedagogía y Psicología que le permitieran desempeñar perfectamente su labor docente. Aunque parezca que lo que decimos es una utopía, esto es lo que ya se está llevando a cabo en otras disciplinas, al existir diplomaturas como Maestro en Educación Física o Maestro en Educación Musical o Maestro en Lengua Extranjera.

### 3. Futuras líneas de investigación

Como hemos dicho en la Discusión de los resultados, nuestro estudio no ha pretendido ser exhaustivo, y con validez externa. Ahora bien, consideramos que sería interesante, en otro trabajo, la elaboración de instrumentos precisos (con el análisis, la validez y la fiabilidad), ya que la realidad justifica esta necesidad. No ha sido nuestro cometido, pero sí, pensamos, sería necesario. Ello supone, claro está, poder trabajar con estudios piloto que reúnan un número suficiente de sujetos y garanticen la representatividad de las muestras.

Por otro lado, pensamos que hay un desconocimiento generalizado sobre la investigación en Matemáticas. Si comentamos en la calle el trabajo que estamos llevando a cabo, seguro que nos dicen: ¿pero qué se va a investigar?, ¿no está todo hecho en Matemáticas? De hecho, esto nos ha ocurrido a nosotros cuando le comentamos a los amigos lo que estábamos haciendo. La gente ve las Matemáticas tan perfectas que no cree que tenga cabida ninguna cosa nueva. A nosotros nos toca descubrirles que investigar es crear, como hemos comentado antes, y hay muchos investigadores en las distintas parcelas de esta ciencia.

Son muchos los campos que quedan aún por explorar y que, de alguna forma, están relacionados con nuestra investigación; a modo de ejemplo ponemos algunos que consideramos que pueden ser interesantes; damos sólo los títulos genéricos que luego se podrían concretar.



**El número y la medida:** Se podría continuar con los estudios realizados por Carpenter (1976) y que recoge la controversia entre las dos escuelas: la de Piaget y la de la Unión Soviética, sobre si el papel dominante en los procesos de medida debe corresponder o no a los conceptos numéricos. Se tendría como base la investigación rusa sobre el desarrollo de los conceptos de medida en los niños (Galperin y Georgiev: 1969). Sería interesante utilizar las técnicas de Metodología Creativa en todo ello.

**Periodo en que se inicia el niño en la idea de medida:** Podemos basarnos en los estudios realizados por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960) y Lovell (1977) sobre el proceso de desarrollo de la noción de medida en el niño, para razonar si es cierto que, en la actualidad, al iniciar el periodo escolar, el niño de Educación Infantil no tiene adquiridas las nociones de conservación, transitividad y unidad de medida. También se puede estudiar si es en este periodo cuando el niño empieza a asimilar estas nociones, y si la práctica de la medida contribuye a facilitar su adquisición.

**El valor del Trabajo en Equipo en Matemáticas (o en la enseñanza de las Matemáticas) con técnicas de Metodología Creativa:** Aquí se podría ver la importancia que tiene el Trabajo en Equipo en la investigación en Matemáticas —o en la enseñanza de las Matemáticas— con una Metodología Creativa. Este Trabajo en Equipo podría ser llevado a cabo por los profesores, por los alumnos, o por ambos.

**La Creatividad en Matemáticas —o en la enseñanza de las Matemáticas— a través de Internet:** En este caso se podrían trabajar a fondo todos los aspectos de Matemáticas —o de la enseñanza de las Matemáticas— que se pueden elaborar con creatividad a través de la red.

**La transdisciplinariedad entre Matemáticas, Pedagogía y Psicología:** Con este trabajo se podría profundizar en la interconexión que sin duda existe entre estas tres disciplinas, y se trata de analizar si con ello se pueden evitar los fracasos que hoy se producen en la enseñanza de las Matemáticas, y a varios niveles (véase el informe Pisa 2006).

**La investigación en la clase de Matemáticas:** Hay un precedente que podría servir de base y es el que comenta el Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales que se encuentra en la página web <http://www.clacso.edu.ar>, en donde, en términos generales, se ve la necesidad de que el maestro utilice su clase para realizar investigaciones

que le sirvan para mejorar su práctica docente. Aquí se podría concretar en la clase de Matemáticas y a un nivel determinado, ya que una de las asignaturas en la que hay un fracaso mayor es en Matemáticas.

**La creatividad en alguna parcela de las Matemáticas y en un nivel concreto:** Como en Matemáticas hay muchos campos por investigar, se podrían hacer trabajos análogos al nuestro cambiando “las Magnitudes y su Medida” por otra parcela de las Matemáticas, como por ejemplo: “la Lógica Matemática”, “la Geometría” —o alguna parte de ella—, “la Aritmética”, etc., y concretando en el nivel en que quisiera hacerse la investigación, como puede ser Educación Infantil, Primaria o Magisterio en cualquier especialidad.

**La creatividad en Matemáticas a lo largo de la Historia:** Parece ser que la idea más común es que los matemáticos están excluidos del proceso creativo, considerándose la creatividad como un patrimonio exclusivo de los pintores, escultores, poetas, músicos... Pensamos que esto es un error, ya que son muchos y muy importantes los descubrimientos que se han llevado a cabo en Matemáticas a lo largo de la Historia y también en su enseñanza. Creemos que con este tema aportaríamos también algo a la enseñanza de dicha disciplina.



# Índice de términos

- Abscisa, 87.
- Actividades, 361.
  - creativas, 361.
  - escolares, 361.
  - no escolares, 361.
- A-módulo por la derecha, 148.
- A-módulo por la izquierda, 148.
- Amplitud, 178.
- Análisis no paramétrico, 648.
- Ángulo, 177.
  - general, 178.
- Anillo, 137.
  - conmutativo, 138.
  - unitario, 138.
- Anulador(es), 185.
  - de un elemento de un semianillo, 187.
    - por la derecha, 186.
    - por la izquierda, 186.
  - de un elemento de un semimódulo, 185.
- Apertura, 13 y 15.
- Aplicación(es), 108.
  - bilineal, 303.
  - biyectiva, 118.
  - característica, 110.
  - constante, 110.
  - exhaustiva, 115.
  - identidad, 110.
  - inyectiva, 112.
  - lineal(es) entre semimódulos, 258.
    - ordenados, 259.
  - multilineal, 305.
  - sobreyectiva, 115.
  - suprayectiva, 115.
- Asociativa, 124.
- Automorfismo, 253 y 259.
- $\mathbb{C}$  es el conjunto de los números complejos, 230.
- Cambio de unidad de medida, 285.
- Cancelativa, 128.
  - por la derecha, 128.
  - por la izquierda, 128.
- Cantidad(es), 164.
  - conmensurable, 273.
  - divisible por un número, 195.
  - inconmensurable, 273.
- Cantidades de la magnitud, 164.
- Clases de correspondencias, 103.
- Clase de equivalencia, 156.
- Clases de magnitudes escalares, 242.
- Codominio de una función, 105.
- Componentes de un segmento orientado, 161.
- Comunicación, 13 y 15.
- Conexa, 214.
- Conjunto cociente, 156.
- Conjunto de elementos negativos, 207.
- Conjunto de elementos positivos, 205.
- Conjunto de los segmentos generales del plano, 173.
- Conjunto de los segmentos libres del plano, 173.
- Conjunto de llegada, 98.
- Conjunto de operadores sobre la magnitud, 172.
- Conjunto de salida, 98.
- Conjunto final, 98.
- Conjunto inicial, 98.

- Conjunto medible, 280.
- Conjunto soporte de la magnitud, 165.
- Conmutativa, 125.
- Cono negativo, 207.
- Cono positivo, 207.
- Contradominio, 102.
- Contrastes no paramétricos, 648.
- Contrastes paramétricos, 648.
- Conservación, 324.
- Correspondencia(s), 96.
  - biunívoca, 106.
  - entre tres conjuntos, 97.
  - unívoca, 104.
  - ternaria, 97.
- Creatividad, desde 4 hasta 21.
- Cuerpo(s), 139.
  - primos, 142.
- Diagrama de árbol, 91.
- Diagrama cartesiano, 89.
- Diagrama de flechas, 90.
- Diagrama de Hasse, 199.
- Diagrama sagital, 90.
- Dirección de la recta, 160.
- Dirección del vector, 182.
- Distancia, 311.
- Distributiva, 136.
  - por la derecha, 136.
  - izquierda, 135.
- Dominio de una relación binaria, 101.
- Dominio de una función, 105.
- Elaboración, 12, 13, 14, 15 y 25
- Elemento idempotente, 235.
- Elemento neutro, 126 y 144.
  - por la derecha, 126.
  - por la izquierda, 126.
- Endomorfismo, 253 y 259.
- Epimorfismo, 253 y 259.
- Escalares, 153.
- Espacio métrico, 310.
  - de los números complejos con la distancia del módulo, 313.
  - de los números reales con la distancia del módulo, 313.
  - discreto, 312.
  - usual, 313.
- Espacio vectorial, 152.
- Estadios de desarrollo de la comprensión de la medida, 329.
  - Inicial, 330.
  - en el que el niño se inicia en la conservación y en la transitividad, 359.
  - en el que el niño capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto a medir, 360.
  - del pensamiento operacional formal, 360.
- Existencia de elemento neutro, 126.
  - a la derecha, 126.
  - a la izquierda, 126.
- Existencia de la medida, 279.
- Extremo, 87.
  - de un segmento orientado, 165.
- Factor completamente aleatorizado, 645.
- Factor con medidas repetidas, 647.
- Factor(es) inter-sujeto(s), 543.
- Factor(es) intra-sujeto(s), 643.
- Flexibilidad, 12, 13, 14 y 15.
- Fluidez, 12, 13 y 14.
- Fracción, 158.
- Fracciones, equivalentes, 157.
- Función, 104.
- Generador(es) de la magnitud, 244.
- Generador del semimódulo, 243.
- Génesis del concepto de medida, 322.
- Grafo, 97.
  - de una función, 105.
- Grupo, 129 y 132.
  - abeliano, 132.
  - conmutativo, 132.
  - ordenado, 222.
  - totalmente ordenado, 222.

- Homomorfismo(s), 252 y 257.
  - de semimódulos, 253 y 267.
  - ordenados, 259.
  - entre grupo(s), 253.
  - entre semigrupo(s), 252.
- I-ésima componente, 95.
- I-ésima proyección, 95.
- Igualdad de correspondencias, 100.
- Igualdad de pares, 86.
- Imagen, 102.
  - de un elemento por una función, 104.
  - de un conjunto por una función, 105.
  - de una correspondencia, 101.
  - de un elemento por una correspondencia, 98.
  - de una función, 105.
  - de un subconjunto por una función, 105.
- Imaginación, 14 y 15.
- Impacto, 14 y 15.
- Indicadores para medir la creatividad, 13.
- Innovación, 14 y 15.
- Intuición, 15.
- Inverso, 130.
- Isomorfismo, 253 y 259.
- Juego como técnica, 62.
- K-espacio vectorial, 152.
- Lados de la región angular, 177.
- Ley de composición externa, 142.
  - por la izquierda, 143.
  - por la derecha, 143.
- Ley de composición interna, 122.
- Longitud, 173.
- Magnitud(es), 154, 163 y 164.
  - absoluta(s), 179 y 182.
  - arquimediana, 229.
  - escalar(es), 179 y 231.
  - ordenada, 221.
  - totalmente ordenada, 221.
- cíclica, 244.
- continua(s), 179 y 248.
- constituida por materiales separables, 197.
- discreta(s), 179 y 245.
- divisible(es), 179, 184 y 194.
- escalar(es), 179, 197 y 230.
  - medible, 271 y 280.
  - no medible, 280.
- finita(s), 179 y 180.
- indivisible(s), 179, 184 y 196.
- infinita(s), 179 y 180.
- proporcionales, 294 y 303.
- relativa(s), 179 y 181.
  - arquimediana, 230.
  - escalar, 231.
  - ordenada, 222.
  - totalmente ordenada, 222.
- vectorial(es), 179, 187 y 233.
- Máximo, 200.
- Medida de una cantidad de una magnitud, 271.
- Medida de una cantidad con una distancia, 314.
- Medida de magnitud(es), 251, 270 y 314.
  - con la distancia, 314.
  - escalar(es), 270.
    - discreta(s), 288.
    - divisible(es), 290.
  - vectorial(es), 310 y 314.
- Medida indirecta de magnitudes escalares, 307.
- Metódica, 23.
- Método, desde 21 hasta 23.
- Método de comparación de Scheffé, 647.
- Metodología, 23 y 24.
  - Creativa, 21 y 24.
- Mínimo, 200.

Modelo lineal general de medidas repetidas, 643.

Módulo, 147.

de un vector, 182.

ordenado, 227.

por la derecha, 148.

por la izquierda, 148.

totalmente ordenado, 227.

trivial, 151.

Monoide, 127.

conmutativo, 127.

Monomorfismo, 253 y 259.

Muestras relacionadas, 643.

$\mathbb{N}$  es el conjunto de los números naturales, 157.

$\mathbb{N}_n$ , 158.

Número de aplicaciones biyectivas entre dos conjuntos, 120.

Número de aplicaciones entre dos conjuntos, 109.

Número de aplicaciones inyectivas, 114.

Número de aplicaciones sobreyectivas, 116.

Número racional, 158.

N-upla, 95.

Operación, 122.

Operadores sobre la magnitud, 172.

Opuesto, 130.

Orden inducido en el grupo, 205.

Ordenación natural del semigrupo, 201.

Ordenada, 87.

Origen, 87.

de la semirrecta, 160.

del segmento orientado, 161.

Original, 87 y 101.

de un elemento por una correspondencia, 98.

de un subconjunto por una función, 105.

de una correspondencia, 101.

de una función, 105.

Originalidad, 12, 13, 14 y 15.

Par(es), 85.

ordenado, 85.

transpuestos, 86.

Pareja, 85.

Permutación, 119.

Primera componente, 87.

Primera proyección, 87.

Problema, 5.

Producto cartesiano, 87, 92 y 95.

de dos conjuntos, 87.

de  $n$  conjuntos, 95.

de tres conjuntos, 92.

Producto de un número natural por un elemento de una magnitud, 171.

Propiedades de la medida, 283.

Propiedades de las magnitudes, 171.

Propiedades de los homomorfismos de semigrupos, 255.

Propiedades de los homomorfismos de semimódulos, 260.

Proporcionalidad de magnitudes escalares, 293 y 302.

compuesta, 302 y 305.

simple, 294.

Prueba de Wilcoxon, 649.

Prueba H de Kruskal-Wallis, 653.

Prueba U de Mann-Whitney, 651.

Pruebas para dos muestras independientes, 650.

Pruebas para dos muestras relacionadas, 649.

Pruebas para varias muestras independientes, 652.

Pseudoasociativa, 144.

Pseudodistributiva, 144.

Punto, 160.

$\mathbb{Q}$  es el conjunto de los números racionales, 157.

Radián, 308.

- Rango, 102.
- Razón de proporcionalidad, 308.
- Razón entre dos cantidades, 299.
- Receptibilidad, 13 y 15.
- Recíproca de una correspondencia, 102.
- Recorrido, 102.
- Recta, 160.
- Redefinición del problema, 14 y 15.
- Región angular, 177.
  - cóncava, 177.
  - convexa, 177.
- Regular, 128.
  - por la derecha, 128.
  - por la izquierda, 128.
- Relación(es) binaria(s), 96 y 155.
  - de congruencia, 161.
  - de coordinabilidad, 157.
  - de equipolencia, 182.
  - de equivalencia, 154 y 156.
  - de orden, 198.
    - arquimediana, 228.
    - compatible con una ley de composición interna, 220.
      - por la derecha, 219.
      - por la izquierda, 219.
    - lexicográfico, 199.
    - parcial, 215.
    - total, 214.
  - en un conjunto, 155.
  - entre dos conjuntos, 96.
  - ternaria, 97.
  - trivial(es), 98 y 155.
- Representación gráfica del producto cartesiano de dos conjuntos, 89.
- Representación gráfica del producto cartesiano de tres conjuntos, 93.
- Respuesta elaborada, 14.
- Segmento(s), 161.
  - congruentes, 161.
  - generales del plano, 173.
  - libre orientado, 162.
  - libre del plano, 173.
  - orientado(s), 161.
    - congruentes, 161.
- Segunda componente, 87.
- Segunda proyección, 87.
- Semianillo, 135.
  - conmutativo, 136.
  - unitario, 136.
- Semicuerpo, 141.
- Semigrupo, 124.
  - cancelativo, 128.
  - conmutativo, 125.
    - y unitario, 127.
  - ordenado, 221.
  - regular, 128.
  - simplificable, 128.
  - totalmente ordenado, 221.
  - unitario, 127.
- Semimódulo(s), 84 y 143.
  - cíclico, 242.
  - divisibles, 188.
  - indivisibles, 189.
  - ordenado, 226.
    - por la derecha, 145.
    - por la izquierda, 144.
  - totalmente ordenado, 226.
- Semirrecta(s), 160.
- Sensibilidad, 13 y 15.
- Sentido de un vector, 182.
- Sentido de una semirrecta, 161.
- Pseudoasociativa, 144.
- Pseudodistributiva, 144.
- Simétrico, 130.
  - por la derecha, 130.
  - por la izquierda, 130.
- Simplificable, 128.
  - por la derecha, 128.
  - por la izquierda, 128.
- Subanillo, 139.
- Subcuerpo, 141.
- Subespacio vectorial, 153.
- Subgrupo, 135.
- Submagnitud(es), 171.
- Submódulo, 151.
- Subsemianillo, 137.

- Subsemigrupo, 125.
- Subsemimódulo, 147.
- Sustitución, 119.
- Tabla cartesiana de doble entrada, 90.
- Técnica(s), 24 y 25.
  - Creativas, 24 y 25.
  - de escenarios, 60.
  - de Metodología Creativa, 24.
    - Crear durmiendo 57.
    - El brainstorming, 29.
    - El arte de preguntar, 27.
    - El arte de relacionar, 38.
    - El circept, 56.
    - El entorno, 49.
    - El método Delfos, 31.
    - El torbellino de ideas, 29.
    - La biónica, 52.
    - La ideogramación, 55.
    - La serendipity, 53.
    - La sinapsis, 53.
    - La sinéctica, 33.
    - La síntesis creativa, 61.
  - Los métodos combinatorios, 36.
    - La lista de atributos, 36.
    - El análisis funcional, 38.
    - El análisis morfológico, 37.
  - Relax imaginativo, 59.
  - Sleep-writting, 57.
  - Solución de problemas, 39.
- Terna, 92.
  - ordenada, 92.
- Tipos de aplicaciones, 111.
- Tipos de magnitudes, 179.
- Transformación, 119.
- Transitividad, 324.
- Unidad de medida, 271 y 325.
- Valor de una función en un punto, 104.
- Vector(es), 153 y 162.
  - del plano, 182.
  - fijo(s), 161.
    - congruentes, 161.
  - libre, 162 y 182.
- Vértice de la región angular, 177.
- X-semimódulo, 145.
  - por la derecha, 145.
  - por la izquierda, 144.
- $\mathbb{Z}$  es el conjunto de los números enteros, 157.

## Bibliografía General

Abellanas, P. (1963): *Matemáticas para físicos e ingenieros*. Madrid: Romo.

Abellanas, P. (1967): Magnitudes de la Matemática del Bachillerato. *Gaceta Matemática. Tomo XIX, 7 y 8*. Madrid: Real Sociedad Matemática Española.

Abellanas, P. (1974): *Álgebra Lineal y Geometría*. Madrid: UNED.

Acredolo, L. (2001): *Cómo potenciar la inteligencia del bebé*. Barcelona: Gestión 2000.

Aiken, L. R. (1973): Ability and Creativity in Mathematics. *Review of Educational Research*, v. 43, nº 4, p. 405-32, F.

Aizpún, A. (1969): *Teoría y didáctica de la Matemática actual*. Vicens-Vives: Barcelona.

Aizpún, A. y otros (1976): *Estructura de módulo*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Alberca, P. y Martín, D. (2001): *Métodos matemáticos Álgebra Lineal y Geometría*. Archidona (Málaga): Aljibe.

Allsina, C. y otros (1996): *Enseñar Matemáticas*. Barcelona: Graó.

Arregui, J. (1969): Concepto de magnitud escalar. *Cursillos sobre Didáctica de la Matemática II*. Madrid: Instituto Jorge Juan.

Arnau, J. (1978): *Métodos de investigación en las Ciencias Humanas*. Barcelona: Omega.

Atiyah, M. F. y Macdonald, I. G. (1978): *Introducción al Álgebra conmutativa*. Barcelona: Reverté.

Aznar, G. (1974): *La creatividad en la empresa*. Barcelona: Oikos-Tau.

Baños, M. (2001): *Creatividad y publicidad*. Madrid: Laberinto.

Barabashev, A. G. (1988): On the impact of the world outlook on mathematical creativity. (2) *Philosophia Mathematica. An International Journal for the Philosophy of Modern Mathematics*. Second-Series, v. 3, nº 1, pp. 1-20.

Barbeau, E. (1985): Creativity in Mathematics. *Interchange*, v. 16, nº 1, p. 62-69, Spr.

Barcia, M. y Rodríguez, M. (2002): Lo que necesitaba la Educación Infantil y nunca se atrevió a reconocerlo: el juego como medio para conseguirlo en la Educación Infantil. Gervilla, A. y otros: *Necesidades educativas de la infancia ante el nuevo milenio*, 233-239. Málaga: Cedma.

Barcia, M. (2005): El desarrollo de la creatividad en la Educación Infantil. Barreales, M. y otros: *Ética, Estética y Estrategias Didácticas en Educación Infantil*, Tomo I, 1ª parte, 485-494. Málaga: Gáficas San Pancrancio S. L.

Baroody, A. J. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor Libros y M.E.C.

Beetlestone, F. (2000): *Niños creativos, enseñanza imaginativa*. Madrid: La Muralla.

Berberian, S. K. (1977): *Introducción al espacio de Hilbert*. Barcelona: Teide.

Berenguer, M. I. y Pérez, R. (1996): Sobre la magnitud tiempo. Uno. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 10, págs. 79-87.

Bertran Russell (1948): *The principles of Mathematics*. Londres: George Allen & Unwin.

Bertran Russell (1982): *Los principios de la Matemática*. Madrid: Espasa Calpe.

Betancourt, J. (1996): *Psicología y creatividad*. Universidad de Guadalajara.

Betancourt, J. (1997): *Atmósferas creativas*. Universidad de Guadalajara.

Blumenthal, L. (1965): *Geometría Axiomática*. Madrid: Aguilar.

Boden, M. (1994): *La mente creativa*. Barcelona: Gedisa.



B.O.E. 4 de enero de 2007.

B.O.J.A. 20 de junio de 1992.

Boole, F. (1995): *Manipular, organizar, representar. Iniciación a las Matemáticas*. Madrid: Narcea.

Borenson, H. (1981): Promoting Mathematical Creativity in the Classroom. *Educational Forum*, v. 45, nº 4, p. 471-76, May.

Borgman, J. (2000): Respecting the Creativity in Our Children. *Montessori Life*, v. 12, nº 1, p, 42-43, Win.

Bradley, N. C. (1948): The Growth of the Knowledge of Time in Children of School Age. *British Journal of Psychology*, 38, págs. 67-78.

Bransford, J. y Stein, B. (1987): *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*. Barcelona: Labor.

Briales, F. J. y Jiménez, M. (1988): *Matemática viva. Biblioteca de recursos didácticos*. Madrid: Alhambra.

Bronstein, V. Y Vargas, R. (2001): *Niños creativos*. Barcelona: BRA Libros.

Bruosseau, G. (1988): *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Zaragoza.

Bujanda Jauregui, M<sup>a</sup> P. (1981): *Tendencias actuales en la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: S. M.

Bujanda Jáuregui, M<sup>a</sup> P. (1991): *Debate sobre la enseñanza de las matemáticas*. Centro Madrileño de Investigaciones Pedagógicas.

Burgos, A. (1972): *Iniciación a la Matemática moderna*. Madrid: Selecciones científicas.

Buzan, T. (1996): *El libro de los Mapas Mentales*. Barcelona: Ediciones Urano.

Cabello, T. y Cela, P. (1980): *Sentido de la Matemática en Preescolar y ciclo preparatorio*. Madrid: Narcea, Col. Proyecto 5/8.

Calabria, M. (1990): *Juegos matemáticos*. Madrid: Akal.

Callejo, M. L. (1994): *Un club matemático para la diversidad*. Ed. Narcea, Madrid.

Camina Arrontes, R. (1994): La creatividad Infantil. *Ideación*, Septiembre, nº 2, 25-27. Barcelona.

Canals, M. A. (1981): *La matemática en el parvulario*. Madrid: Nuestra Cultura.

Canals, M. A. (2001): *Vivir las Matemáticas*. Barcelona: Octaedro.

Cardinet, J. y Tourneur, Y. (1985): *Assurer la mesure*. Berne: Peter Lang S. A.

Carpenter, T. P. (1976): Analysis and Synthesis of Existing Research on Measurement. *Number and Measurement: Papers for a Research Workshop*. Ohio State University Lesh: R. A. Ohio: Eric/SMEAC Center.

Casas Carbajo, J. (2000): *La Creatividad en la Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Madrid: Eos.

Consejería de Educación y Cultura de Castilla y León (1994): *Formación y adquisición de los conceptos y estructuras lógico-matemáticas (Matemáticas para alumnos de primaria con dificultades de aprendizaje; T. II)*. Valladolid.

Castillo, F. (1980): *Análisis Matemático II*. Madrid: Alhambra.

Chamoso, J. M., Durán, J. y otros (2004): Análisis y experimentación de juegos como instrumento para enseñar matemáticas. *Suma: Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, págs.47-58. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Chamorro M<sup>a</sup> C. y Belmonte J. M. (1988): *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.

Chamorro, M<sup>a</sup> C. (1992): *El aprendizaje significativo en el área de matemáticas*. Madrid: Alhambra Longman, S.A.

Chamorro M<sup>a</sup> C. y Belmonte J. M. (1996): *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar*. Madrid: Alhambra Longman.

Chamorro, M<sup>a</sup> C. (1997): *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la Escuela Elemental*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Educación a distancia.

Chamorro, M<sup>a</sup> C. y otros (2005): *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Chateau, J. (1973): *Psicología de los juegos infantiles*. Madrid: Kapelusz.

Clark, J., Dickson, A. y Edwards, R. (1995): *Matemáticas Akal Cambridge, nivel 1 : Educación Infantil. Libro del profesor*. Torrejón de Ardoz: Ediciones Akal, S.A.

Cockcroft, W. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C.

Cohn, P. M. (1974.): *Algebra, Volumen I*. Londres: John Wiley & Sons.

Coll, C. (1983): *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid: Siglo XXI.

Condamine, M. (1971): *Algèbre*. París: Delagrave.

Condamine, M. (1971): *Géométrie*. París: Delagrave.

Corbalan, F. (1991): *Prensa, matemáticas y enseñanza*. Zaragoza: Mira Editores, S. A.

Coxford, A. F. (1996): *Geometría desde múltiples perspectivas: estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Crawford, R. P. (1954): *Techniques of creative thinking*. Nueva York: Hawthorn Books Inc.

Curran, S. y Curnow, R. (1984): *El estudiante y el ordenador*. Barcelona: Gustavo Gili, S. A.

De la Torre, S. (1982): *Educación en la creatividad*. Ed. Nancea, Madrid.

De Lorenzo, J. (1972): *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos*. Madrid: Tecnos.

Delgado, A. R. y Prieto, G. (1997): *Introducción a los Métodos de Investigación de la Psicología*. Madrid: Pirámide.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991): *El aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Labor.

Dienes, Z. P. y Golding, E. W. (1968): *Exploración del espacio y práctica de la medida*. Barcelona: Teide.

Dienes, Z. P. (1967): *La Geometría a través de las transformaciones*. Barcelona: Teide.

Dienes, Z. P. (1976): *La construcción de las Matemáticas*. Barcelona: Teide.

Dienes, Z. P. (1981): *Las seis etapas del aprendizaje en Matemáticas*. Barcelona: Teide.

Dienes, Z. P. (1981): *Los primeros pasos en Matemática 3: exploración del espacio y practica de la medida*. Barcelona: Teide.

Dirección General de Renovación Pedagógica, Orientación Educativa y Psicopedagógica (1996): Resolución de 13 de mayo.

Djordjevic, R. and Hadamard, J. (1992): On Hadamard's ideas about the nature of the creative process in mathematics. Biography: Hadamard, J. Collection: *Serbian contributions to the mathematical sciences*, pp. 168-174, Istor. Belgrade: Mat. Inst. Mekh. Nauka, 6.

Dubreil, P. (1975): *Teoría de grupos*. Barcelona: Reverté.

Dubreil P. y Dubreil Jacotin M. L.. (1971): *Lecciones de Álgebra moderna*. Barcelona: Reverté.

Duhalde, M<sup>a</sup> E. y González Cuberes, M<sup>a</sup> T. (1996): La medida, convenciones necesarias para entendernos. *Encuentros cercanos con la matemática*. Buenos Aires: Aique.

Dummit y Foote (1991): *Abstract Algebra*. Canadá: Prentice-Hall.

Dunn, J. A. (1975): Tests of Creativity in Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 6, n° 3, p. 327-332, Aug.

Dunn, J. A. (1976): Discovery, Creativity and School Mathematics: A Review of Research. *Educational Review*, v. 28, n° 2, p. 102-17, Feb.

Eiciones Akal S. A. (1991): *Libros del profesor: Matemáticas, Educación Infantil, 2 ciclo, nivel 1*. Torrejón de Ardoz.

Ediciones Akal S. A. (1991): *Libros del profesor: Matemáticas, Educación Infantil, 2 ciclo, nivel 2*. Torrejón de Ardoz.

Ehrlich, P. and Hahn, H. (1995): *Hahn's Über die nichtarchimedischen Grossensysteme and the development of the modern theory of magnitudes and numbers to measure them*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Elffers, J. (1986): *El Tangram*. Barcelona: Labor.

Emmer, M. (2001): Artistic and mathematical creativity. Dedicated to the memory of Francesco Speranza. *Rivista di Matematica della Università di Parma*. Serie 6, 3\*, pp. 43-50.

Enciclopedia Universal Ilustrada Europea Aamericana. Tomos 11, 32 y 34 (1981). Madrid: Espasa-Calpe, S. A.

Etayo, J. J. (1972): *Conceptos y métodos de la Matemática Moderna*. Barcelona: Vicens- Vives.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (2005): Informe de la FESPM sobre la nueva reforma del Ministerio de Educación y Ciencia. En SUMA, *Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, Febrero. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Fernández Baroja (1991): *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación*. Madrid: Santillana, S. A.

Fernández Biarge, J. (1970): Medida de Magnitudes Geométricas. *Cursillos sobre Didáctica de la Matemática III*. Madrid: Instituto Jorge Juan.

Fernández Bravo, J. A. (1997): La labor creativa en la resolución de problemas matemáticos. *Revista Comunidad Educativa*, nº 246.

Fernández Bravo, J. A. (2000): *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil*. Madrid: Ediciones Pedagógicas.

Ferrero, L. (1991): *El Juego y la Matemática*. Madrid: Muralla.

Flavell, J. H. (1979): *La Psicología evolutiva de Jean Piaget*. Barcelona: Paidós.

Fraleigh, J. B. (1987): *Álgebra abstracta*. México: Addison-Wesley iberoamericana.

Fregoso, A. (1977): *Los elementos del lenguaje de la Matemática*. México: Trillas.

Freudenthal, H.: (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Furth, H. G. y Wachs, H. (1978): *La teoría de Piaget en la práctica*. Buenos Aires: Kapalusz.

Fustier, M. (1975): *Pedagogía de la creatividad*. Madrid: Index.

Gadner, H. (1995): *Mentes creativas*. Barcelona: Paidós.

Gallego, F. (2002): *Aprender a generar ideas: Innovar mediante la creatividad*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Galperin, P. Y. y Georgiev L. S. (1969): The Formation of Elementary Mathematics Notions. *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, vol.1: The Learning of Mathematical Concepts*. Stanford University: Kilpatrick, J. E.; Wirsup, I., School Mathematics Group.

García González, P. (1997): Los videojuegos: primera ventana abierta hacia el futuro. Gervilla, A.: *Educación Infantil*. Málaga: Universidades de Andalucía.

García Pradillo, J. (1971): *Matemática de siempre y didáctica de hoy*. Madrid: García Pradillo.

Garrote, M., Hidalgo, M<sup>a</sup> J. y Blanco, L. J. (2004): Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma: Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, Junio. Madrid: Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas.

Gattegno, C. (1963): *Aritmética con Números en Color*. Libro VII. El sistema métrico y unidades físicas. Madrid: Cuisenaire de España

Gervilla, A. (1981): *Creatividad, Práctica Escolar y Política Educativa*. Universidad Complutense de Madrid.

Gervilla, A. (1986): *La creatividad en el aula: actividades para un currículum creativo*. Málaga: Innovare.

Gervilla, A. (1987): *Creatividad, inteligencia y rendimiento*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Málaga.

Gervilla, A. (1992): *Dinamizar y Educar*. Madrid: Dykinson.

Gervilla, A. (1997): *Educación Infantil: metodología lúdica*. Málaga: Universidades de Andalucía.

Gervilla, A. (2003): Creatividad y proceso creador. Gervilla, A.: *Creatividad aplicada una apuesta de futuro* págs. 71-102. Málaga: Dykinson.

Gervilla, A. y Prados, R. (2003): Modelos y Técnicas para el desarrollo de la Creatividad. Gervilla, A.: *Creatividad aplicada una apuesta de futuro*, págs. 377-418. Málaga: Dykinson.

Gesell, A. y Amatruda, C. (1981): *Diagnóstico del desarrollo normal y anormal del niño*. Barcelona: Paidós.

Gete, J. C. (1988): *Medida y realidad*. Madrid: Alhambra.

Gibson, O. E. (1981): *A Study of the Ability of Children with Spina Bifida to Handle Money*. Tesis doctoral, Universidad de Londres.

Glas, E. (2002): Klein's Model of Mathematical Creativity. *Science and Education*, v. 11, nº 1, p. 95-104, Jan.

Golan, J. S. (1992): *The theory of semirings with applicatons in mathematics and theoretical computer science*. New York: John Wiley & Sons.

Gordon, W. J. J. (1961): *Synectics the development of creative capacity*. Nueva York: Harper and Row.

Gordon, W. J. J. (1975): *The metaphorical way of learnig and knowingapplying synectics to sensitivity and learning situations*. Cambridge: Synectics E.S..

Goujon, P. (1975): *Mathématiques de base pour les linguistes*. París: Hernann.

Gran Enciclopedia Larousse. Tomos 3, 6 y 7 (1977). Barcelona: Planeta.

Grupo Anaya, S. A. (1992): *Rompeolas: matemáticas, educación infantil, 5 años*. Madrid.

Grupo Anaya, S. A. (1992): *Rompeolas: matemáticas, educación infantil, 5 años, 1 trimestre*. Madrid.



Grupo Anaya, S. A. (1992): *Rompeolas: matemáticas, educación infantil, 5 años, 2 trimestre*. Madrid.

Grupo Anaya, S. A. (1992): *Rompeolas : matemáticas, educación infantil, 5 años, 3 trimestre*. Madrid.

Gutton, P. (1982): *El juego de los niños*. Barcelona: Nova Terra.

Guzmán, M. (1984): *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Labor.

Guzmán, M. (1986): *Aventuras matemáticas*. Barcelona: Labor.

Guzman, M. (2005): Textos de Miguel de Guzmán. Madrid: Suma *Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, Febrero.

Halmos, P. R. (1967): *Teoría intuitiva de los conjuntos*. Barcelona: C.E.C.S.A.

Han, K. S. and Marvin, C. (2002): Multiple Creativities? Investigating Domain-Specificity of Creativity in Young Children. *Gifted Child Quarterly*, v. 46, nº 2, p. 98-109, Spr.

Han, K. S. (2003): Domain-Specificity of Creativity in Young Children: How Quantitative and Qualitative Data Support It. *Journal of Creative Behavior*, v. 37 nº 2, p. 117-42, 2nd Qtr.

Hannoun, H. (1977): *El niño conquista el medio*. Buenos Aires: Kapeluz,.

Hawkins, B. (2000): *Cómo generar grandes ideas*. Barcelona: Gedisa.

Haylock, D. W. (1987): Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Journal of Creative Behavior*, v. 21, nº 1, pp. 48-59.

Herrán, A., Paredes, J. y otros (2008): *Didáctica General: La práctica de la enseñanza en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Madrid: Mc Graw-Hill.

Herstein, I. N. (1980): *Álgebra moderna*. México: Trillas.

Hiam, A. (2001): *Cómo medir la creatividad*. Madrid: Centro de estudios Ramón Areces.

Hilton, P. y Wu, Y. C. (1977): *Curso de Álgebra Moderna*. Barcelona: Reverté.



Hirst, K. E. (1971): Creativity in the Classroom--A Discussion of the Place of Original Work in a Mathematical Education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 2, nº 1, p. 21-29, Jan/Mar.

Holloway, G. E. T. (1982): *Concepción del espacio en el niño según Piaget*. Barcelona: Paidós.

Holloway, G. E. T. (1969): *Concepción de la Geometría en el niño según Piaget*. Barcelona: Paidós.

Jacobson, N. (1985): *Basic Algebra I*. New York: Freeman.

Janovskaja, S. A. and Descartes, R. (1970): On the role of mathematical rigor in the history of the creative development of mathematics and especially on the Geometry of Descartes. Collection: *Studies in systems of logic* (dedicated to the memory of S. A. Janovskaja) (Russian), pp. 13-50. Moscow.

Jensen, L. R. (1973): *The Relationships Among Mathematical Creativity, Numerical Aptitude and Mathematical Achievement*. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus, OH.

Jensen, L. R. (1976): Using Creativity in Elementary School Mathematics. *Arithmetic Teacher*, v. 23, nº 3, p. 210-215, Mar.

Joyal, L. H. and-others (1977): *What's Your MQ? Encouraging Creativity in Elementary Mathematics*. Revised Edition. Wisconsin Univ.: Eau Claire.

Kamii, C. y Devries, R. (1983): *La teoría de Piaget y la educación preescolar*. Madrid: Visor.

Kamii, C. y Devries, R. (1989): *El conocimiento físico en la educación preescolar: implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Siglo XXI.

Korolyuk, V. S., Yadrenko, M. Y., Kartashov, M. V., Moskaltsova, N. V. and Shurenkov, V. M. (1996): On the creative mathematical activity of Valentin Mikhailovich Shurenkov. *Theory-of-Probability-and-Mathematical-Statistics*, nº 52, p. 1-8.

Kothe, S. (1978): *¿Cómo utilizar los bloques lógicos?*. Barcelona: Teide.

Kula, W. (1980): *Las medidas y los hombres*. Madrid: Siglo XXI.

Lahora, M. C. (1992): *Actividades matemáticas con niños de 0 a 6 años*. Madrid: Narcea.

Lam, T. Y. (1998): *Lectures on Modules and Rings*. San Francisco, USA: Springer.

Lang, S. (1973): *Algebra*. Madrid: Aguilar.

Laplaza, M. L. (1966): El concepto de Magnitud. *Gaceta Matemática*. Tomo XVIII págs. 7 y 8, Madrid. Madrid: Instituto Jorge Juan.

Laplaza, M. L. (1967): Proporcionalidad en Aritmética. *Gaceta Matemática*. Tomo XIX págs. 1 y 2. Madrid: Instituto Jorge Juan.

Lelong-Ferrand, J. y Arnaudies, J. M. (1974): *Cours de Mathématiques, tome 1: Algèbre*. París: Dunod.

Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre de Calidad en la Educación.

Lichtenberg, B. K. and Troutman, A. P. (1974): *Fostering Creativity Through Mathematics*. Florida: Council of Teachers of Mathematics.

Lipschutz, S. (1993): *Álgebra Lineal*. Madrid: Mac Graw-Hill.

López Álvarez, F. (1992): *Evaluación del aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Autor-Editor.

Lovell, K. (1977): *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Morata.

Mac Lane, S. y Birkoff F, G. (1983): *Algèbre*. París: Gauthier-Villars.

Mann, E. L. (2006): Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, v. 30, nº 2, pp. 236-260.

Marín Ibáñez, R. (1975): *Técnicas del pensamiento creativo*. Valencia: Universidad Politécnica. Instituto de Ciencias de la Educación.

Marín Ibáñez, R. (1984): *La creatividad*. Barcelona: Ceac.

Marín Ibáñez, R. (1995): *La creatividad: Diagnostico e investigación*. Madrid: UNED.

Marín, R. y de la Torre, S. (1991): *Manual de la creatividad. Aplicaciones educativas*. Barcelona: Vicens Vives.

Marina, J. A. (1993): *Teoría de la inteligencia creadora*. Barcelona: Anagrama,.

Martínez, J., Bujanda M. P. y Velloso, J. M. (1982): *Matemáticas-1*. Madrid: SM.

Martínez Montero, J. (1991): *El Curriculum matemático en la Educación Infantil*. Madrid: Escuela Española, S. A.

Martínez Recio, A. (1989): Metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor y M.E.C..

Mateo, Díez y Merchén (1983): *Cómo fomentar la creatividad*. Madrid: Marsiega.

McGannon, T. (1972): Creativity and Mathematics Education. *School Science and Mathematics*, v. 72, nº 1, p. 7-12, Jan.

Megnin, J. K. (1995): Combining Memory and Creativity in Teaching Math. *Teaching PreK-8*, v. 25, nº 6, p. 48-49, Mar.

Mialaret, G. (1979): *Las Matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Pablo del Río.

Michalko, M. (2000): *Los secretos de los genios de la creatividad (Craking Creativity)*. Barcelona: Gestión 2000.

Ministerio de Educación y Ciencia (1984): *Diseño Curricular Base. Educación Infantil*. Ministerio de Educación y Ciencia.

Ministerio de Educación y Ciencia (1990): *La Orientación Educativa y la Intervención Psicopedagógica*. Madrid: Dirección General de Renovación Pedagógica.

Monreal, C. (2001): *Qué es la creatividad*. Madrid: Biblioteca nueva.

Montaner, P. (1994): *La lógica del inventor*. Barcelona: Laertes.

Moreno, R. (1988): Sobre el estatus de la metodología como disciplina científica. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 42, 1, págs. 103-108.

Musick, J. (1978): The Role of Motor Activity in Young Children's Understanding of Spatial Concepts. Lesh, R.: *Recent Research Concerning the Developement of Spatial and Geometric Conceps*, The

Ohio State University. Eric Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education.

Mutafian, C. (1979): *Álgebra: I generalidades y grupos*. Barcelona: C.E.C.S.A.

National Council of Teachers of Mathematics (1995): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Negro, A. y Zorio, V. (1986): *Cerca de la Matemática*. Madrid: Alhambra.

Nemesszeghy, E. Z. and Nemesszeghy, E. A. (1977): On strongly creative definitions: a reply: On creative definitions in the Principia mathematica, nº 69-70, 175-182. *Logique-et-Anal.* (N.S.) 20, nº 77-78, pp. 111-115.

Ortega, R. (1990): *Jugar y aprender*. Sevilla: Diada.

Orton, A. y Frobisher, L. (1996): *Insights into teaching mathematics*. Londres: Cassell.

Osborne, A. R. (1969): Mathematical Limitations on Scientific Creativity: A Historical Perspectiva. *Sch Sci Math*, v. 69, nº 7, p. 599-604, Oct.

Osborn, A. F. (1993): *Applied Imagination, Creative Education Fundation Press*. Londres: Bufalo.

Otte, M. (1999): Mathematical creativity and the character of mathematical objects. *Logique-et-Anal.* (N.S.) [Logique-et-Analyse.-Nouvelle-Serie], v. 42, no. 167-168, pp. 387-410.

Parnes, S. J. (1972): *Creativity: Unlocking Human Potential*. Londres: Bufalo: D. O. K.

Passman, D. S. (1985): *The Algebraic structure of Group Rings*. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company Malabar.

Pastor J. y Gutiérrez Rodríguez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Pelegrina, M. y Salvador, F. (1999): *Investigación experimental en Psicología*. Málaga: Aljibe.

Piaget, J. y Taponier, S. (1955): *Recherches sur le développement des perceptions. XXXII. Les estimations des longueurs de deux droites horizontales et parallèles à extrémités décalées*. Génova: Arch. Psychol.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960): *The Child's Conception of Geometry*. Londres: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1973): *La Géométrie spontanée de l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1972): *La conception de l'espace chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1974): *The Child's Construction of Quantities: Conservation and Atomism*. Londres: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. (1978): *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. México: Fondo de cultura económica.

Piaget, J. (1978): *Introducción a la epistemología genética: El pensamiento matemático*. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. (1985): *La construcción de lo real en el niño*. Madrid: Crítica.

Piémont, I. (1993): *Mathématiques. Proposés Didactiques*. Barcelona: Eumo.

Pim, D. (1990): *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata y M.E.C.

Pinilla, J. L. (1971): *Lecciones de Álgebra Lineal*. Madrid: Varicop.

Pisot C. y Zamansky M. (1966): *Matemáticas Generales*. Barcelona: Montaner y Simons.

Poincaré, H. (1952): *Science and method* (F. Matland, Trans). New York: Dover.

Polya, G. (1979): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Prada, M<sup>a</sup> D. y otros (1976): *La Matemática ¿un nuevo modo de pensar?* Madrid: Narcea.

Prada, M<sup>a</sup> D. y otros (1979): *El juego y el material didáctico en el aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Narcea.

Prado, D. (1982): *El Torbellino de ideas*. Madrid: Cincel.

Prado, D. (1988): *Técnicas creativas y lenguaje total*. Madrid: Narcea.

Prado Suárez, R. C. (2005): Creatividad y Juego en la Educación Infantil. Barreales, M. y otros: *Ética, Estética y Estrategias Didácticas en Educación Infantil*, Tomo I, 1ª Parte, 517-527. Málaga: Gáficas San Pancraccio S. L.

Presmeg, N. (2003): Creativity, Mathematizing, and Didactizing: Leen Streefland's Work Continues. *Educational Studies in Mathematics*, v. 54, nº 1, pp. 127-137, Nov.

Puig Adam, P. (1980): *Curso de Geometría Métrica*. Madrid: Herederos de Puig Adam.

Pulaski, N. A. (1975): *Para comprender a Piaget*. Barcelona: Península.

Queysanne, M. (1974): *Álgebra Básica*. Barcelona: Vicens-Vives.

Queysanne-Revuz (1974): *Mathematique tome 1*. París: Fernand Nathan.

Remi Ziglon (1975): *En busca de las estructuras*. Barcelona: Teide.

Resnick, Lauren B. y Ford, Wendy W. (1991): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A.

Rey Pastor J. (1966): *Análisis algebraico*. Madrid: Herederos de Julio Rey Pastor.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1959): *Análisis algebraico*. Buenos Aires: Capelusz.

Reynold, B. (2000): *Cómo desarrollar la creatividad en los niños*. Madrid: Debate.

Rickey, V. F. (1975): On creative definitions in the Principia mathematica. *Logique-et-Analyse* (N.S.) v. 18 nº 69-70, pp. 175-182.

Río Sánchez, J. del (1991): *Aprendizaje de las Matemáticas por descubrimiento*. Madrid: M.E.C.

Roanes, E. (1972): *Didáctica de las Matemáticas I*. Madrid: Anaya.

Roanes, E. (1972): *Didáctica de las Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

Roanes, E. (1973): *Matemáticas para Profesores de E.G.B.* Madrid: Anaya.

Roanes, E. (1979): *Introducción a la Geometría.* Madrid: Anaya.

Rodríguez Estrada, M. (1992): *Creatividad en los juegos y juguetes.* Ed. Pax, México.

Romo, M. (1997): *Psicología de la creatividad.* Barcelona: Paidós.

Root, R. y Bernstein, M. (2002): *El secreto de la creatividad.* Barcelona: Kairos.

Rubenstein, D. J. (2000): Stimulating Children's Creativity and Curiosity: Does Content and Medium Matter?. *Journal of Creative Behavior.* v. 34 nº 1, p. 1-17, 1st Qtr.

Rubio, B. (1969): *Iniciación a la Matemática superior.* Madrid: Alambra.

Ruiz Higuera, L. y Rodríguez Fernández, J. L. (1992): *Matemáticas en Educación Infantil y Primaria: tareas curriculares.* Jaén: Autor-Editor.

Russell, B. (1983): *Los principios de la Matemática.* Madrid: Espasa-Calpe.

Saá Rojo, M<sup>a</sup> D. (2002): *Las Matemáticas de los cuentos y las canciones.* Madrid: Eos.

Sánchez Segura, M<sup>a</sup> D. y Fernández Escalona, C. (1997): Estudio del cardinal y del ordinal para su enseñanza-aprendizaje en Educación Infantil. Gervilla, A. y otros: *Un mundo para el niño*, págs. 239-246. Málaga: Centro de Educación de la Diputación Provincial.

Sánchez Segura, M<sup>a</sup> D. (1998): El Espacio, la Geometría y la Medida en Educación Infantil. Gervilla, A. y otros: *Educación Infantil desarrollo del niño de 0 a 6 años*, págs. 375-414. Málaga: Universidades de Andalucía.

Sánchez Segura, M<sup>a</sup> D. (2003): Creatividad: las Magnitudes y su Medida. Gervilla: *Creatividad aplicada una apuesta de futuro*, págs. 723-751. Málaga: Dykinson.

Sánchez Segura, M<sup>a</sup> D. y Fernández Escalona, C. (2003): Creatividad en Matemáticas. *IV Congreso Mundial de Educación Infantil y Formación de Educadores*, pág. 53. Ed. Málaga: Universidades de Andalucía.



Sánchez Segura, M<sup>a</sup> D. (2005): Creatividad en Educación Infantil aplicada a las Magnitudes y su Medida. Barreales, M. y otros: *Ética, Estética y Estrategias Didácticas en Educación Infantil*, Tomo I, 2<sup>a</sup> parte, págs. 645-658. Málaga: Gráficas San Pancracio.

Sánchez Segura, M<sup>a</sup> D. (2005): La creatividad, la enseñanza y el dominio de los contenidos científicos. Barreales, M. y otros: *Ética, Estética y Estrategias Didácticas en Educación Infantil*, Tomo I, 2<sup>a</sup> parte, págs. 659-661. Málaga: Gráficas San Pancracio.

Sanmarti, T. (1993): *Jugamos a las matemáticas 1: Educación Infantil, 4-5 años*. Barcelona: Vicens-Vives, S.A.

Sanmarti, T. (1993): *Jugamos a las matemáticas 2: Educación Infantil, 5-6 años*. Barcelona: Vicens-Vives, S.A.

Saracho, O. N. (2002): Young Children's Creativity and Pretend Play. *Early Child Development and Care*, v. 172, n<sup>o</sup> 5, p. 431-38, Oct.

Saussois, N. D. (1987): *Actividades en talleres para guarderías y preeescolar*. Madrid: Cincel.

Sauvy et Simonne (1980): *El niño ante el espacio: iniciación a la topología intuitiva -de la rayuela a los laberintos-*. Madrid: Pablo del Río.

Sharma, M. C. (1979): Children at Risk for Disabilities in Mathematics, *Focus-On Learning Problems in Mathematics* (Framingham, Massachusetts), 1(2).

Shayer, M., Küchemann, D. y Wylam, H. (1976): The distribution of Piagetian Stages of Thinking in British Middle and Secondary Shool Children. *British Journal of Educational Psychology*, 46, 164-173.

Seymour Lipschutz (1993): *Algebra Lineal*. Madrid: Mac Graw-Hill.

Sigler, L. E. (1981): *Álgebra*. Barcelona: Reverté.

Sikora, J. (1979): *Manual de métodos creativos*. Buenos Aires: Kapelusz.

Skemp, R. (1993): La pedagogía hoy. T. 15: *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Morata.

Sriraman,B. (2005): Are Giftedness and Creativity Synonyms in Mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, v. 17, n<sup>o</sup> 1, pp. 20-36, Fall.



Stenhouse, L. (1981): *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata.

Stenhouse, L. (1987): *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid: Morata.

Tao, L. (1992): Mathematical creativity and nonlogical thinking. *Dongbei-Shida-Xuebao Journal of Northeast Normal University. Natural Science Edition*, nº 4, pp. 31-37.

Tavernier, R. (1987): *La escuela antes de los 6 años*. Barcelona: Martínez Roca.

Throop, S. (1980): *Actividades preescolares matemáticas*. Barcelona: C.E.A.C.

Torres, P. (2001): *El manual del inventor*. Barcelona: Planeta.

Torre, S. de la (1987): *Educación en la creatividad*. Madrid: Narcea.

Torre, S. de la (1993): *Creatividad plural*. Barcelona: PPU.

Torre, S. de la (1998): *Cómo innovar en los centros educativos*. Madrid: Escuela Española.

Torre, S. de la y Barrios, O. (2000): *Estrategias didácticas innovadoras. Recursos para la formación y el cambio*. Barcelona: Octaedro.

Trevlas, E., Matsouka, O. and Zachopoulou, E. (2003): Relationship between Playfulness and Motor Creativity in Preschool Children. *Early Child Development and Care*. v. 173, nº 5, p. 535-543, Oct.

Van-Hook, C. W. and Tegano, D. W. (2002): The Relationship between Creativity and Conformity among Preschool Children. *Journal of Creative Behavior*, v. 36, nº 1, p. 1-16, 1st Qtr.

Vigotski, L. S. (1979): *El papel del juego en el desarrollo del niño. En el desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Whitcombe, A. (1988): Mathematics: Creativity, Imagination, Beauty. *Mathematics in School*, v. 17, nº 2, p. 13-15, Mar.

Winebrenner, S. (2001): It's Hard To Keep Creativity Alive in Many Children. *Understanding Our Gifted*, v. 13, nº 3, p. 31-32, Spr.

Witold Kula (1980): *Las medidas y los hombres*. Madrid: Siglo XXI.

Yela, M. (1996): El Problema del Método Científico en Psicología. *Psicothema*. Vol. 8, Supl., pp. 353-361.

Yela, M. (1990): Psicología y Matemáticas. Reflexiones sobre la formación matemática del psicólogo. *Estadística Matemática*, vol. 31, nº 122.

Zamansky, M. (1970): *Introducción al Álgebra y Análisis moderno*. Barcelona: Montaner y Simón.

Zeddies, M. L. (1981): Creativity in General Mathematics. *Mathematics Teacher*, v. 74, nº 3, p. 187-89, Mar.

Ziglon, R. (1975): *En busca de las estructuras*. Barcelona: Teide.

Ziglon, R. (1976): *Las estructuras*. Barcelona: Teide.

Zimmerman, D. W., Richard, H. (1982): The relative error magnitude in three measures of change. *Psychometrika* (A Journal Devoted to the Development of Psychology as a Quantitative Rational Science), v. 47 nº 2, 141-147.

Zulma, E. (1986): *El arte y la creatividad en la Escuela primaria*. Buenos Aires: Plus Ultra.

Zwicky, F. (1969): *Morphology of propulsive power*. California: Pasadena.

# Otras fuente documentales

## 1. Bases de datos consultadas

El marco teórico ha sido elaborado utilizando los conocimientos que teníamos sobre los temas, antes de comenzar esta investigación, y las deducciones que hemos podido hacer. Además, nos hemos apoyado sobre las bases de las fuentes bibliográficas halladas en la búsqueda en bases de datos. Hemos consultado en concreto las siguientes:

Revistas Electrónicas: Springer, Blackwell, Kluwer, Wiley EbscoHost y ScienceDirect.

Bases de Datos Multidisciplinares: Web of Knowledge.

Catálogos de Bibliotecas Universitarias y Científicas españolas: Jábega (Catálogo de la Universidad de Málaga).

Bibliografías Nacionales: Española, Francesa y Británica.

Información Bibliográfica en Internet (se detalla a continuación).

## 2. Páginas web consultadas

Ayuntamiento de la Coruña: <http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/fisicalInteractiva/medidas/medidasíndice.html>magnitud.

Blesa, J. A.: [http://www.edulat.com/3eraetapa/fisica/temas\\_consulta/6.htm](http://www.edulat.com/3eraetapa/fisica/temas_consulta/6.htm).

Colegio Oficial de Farmacéuticos de Asturias: <http://www.fonendo.com/noticias/45/2001/08/3.shtml>.

Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales: <http://www.clacso.edu.ar>.

© Innovaforum.com: <http://www.innovaforum.com/tecnica/braine.html>.

© Vernet, inc: [http://salonhogar.com/ciencias/física/cienciasfísicasy medida/magcant\\_unidad.htm](http://salonhogar.com/ciencias/física/cienciasfísicasy medida/magcant_unidad.htm).

Díez Sánchez, D. Director de La fundación Neuronilla (antes llamada fundación Opera Prima): <http://www.neuronilla.com/pags/tecnicas/default.asp>.

Faintein, H.: <http://www.hfainstein.com.ar/articul/creatividad.html>.

Fundación Epson: <http://www.colciencias.gov.co/redcom/CREATIVIDAD.html>.

González, P.: [http://www.biopsychology.org/tesis\\_pilar05.html](http://www.biopsychology.org/tesis_pilar05.html).

Herrán Gascon, A.: [http://www.ieh.com/imprimir/doc20020714030\\_1.html](http://www.ieh.com/imprimir/doc20020714030_1.html).

[http://web.jet.es/amozarraín/Que\\_es\\_creatividad.html#persona](http://web.jet.es/amozarraín/Que_es_creatividad.html#persona).

Instituto Nacional de Calidad de la Enseñanza (INCIE): <http://www.ince.mec.es/tim.ss/global.htm>.

La Prensa: [http://mensual.prensa.com/mensual/contenido/2002/08/02/hoy/opini3n//6531.html](http://mensual.prensa.com/mensual/contenido/2002/08/02/hoy/opinion//6531.html).

Martínez, I.: [http://imartínez.etsin.upm.es/ot1/Units\\_es.htm](http://imartínez.etsin.upm.es/ot1/Units_es.htm).

Martínez Recio, A.: [http://www.uco.es/-ma1marea/profesor/primaria/medidas/matemati/ indice.htm](http://www.uco.es/-ma1marea/profesor/primaria/medidas/matemati/indice.htm).

Orozco Carmona: <http://www.lafacu.com/apuntes/física/medidas/default.htm>.

Rodríguez de la Rivera, J.: [http://www2.uah.es/estudios\\_de\\_organizacion/epistemologia/metodo\\_concepto\\_problemas.htm#\\_Clasificaci3n\\_de\\_los](http://www2.uah.es/estudios_de_organizacion/epistemologia/metodo_concepto_problemas.htm#_Clasificaci3n_de_los).

Soto Prados, C.: <http://roble.pntic.mec.es/csoto/medida.htm>.

Trillo, A.: <http://www.terra.es/personal/asstib/mes/creativ.htm>

UNESCO: <http://www.unesco.org/culture/creativity/htmlsp/indexsp.shtml>

Venturini, J.: <http://juventurini.com/Creatividad.html>.

ANEXOS



## Anexo I

# Análisis comparativo de los Planes de Estudio

Teniendo en cuenta que uno de los fundamentos de esta tesis es la sospecha de que se han reducido drásticamente los conocimientos matemáticos con que terminan en la actualidad sus estudios los Diplomados en Magisterio, para confirmarlo o desmentirlo vamos a hacer un estudio comparativo de la proporción de Matemáticas y Didáctica de la Matemática que han venido cursando los Maestros desde 1945 hasta la actualidad. Para ello vamos a trabajar con las horas y créditos con que figuran ambas materias en los diferentes Planes de Estudio publicados en los Boletines Oficiales, lo que esquematizamos mediante la siguiente tabla:

| Plan | B.O.E.  | Bachiller | Especialidad | Matemáticas                                                                                                                                                            | Didáctica Matemática                          |
|------|---------|-----------|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1945 | 18-7-45 | Elemental | No tiene     | Matemáticas con contenidos equivalentes a los de Enseñanza Media, sin especificar curso.                                                                               | No consta.                                    |
| 1950 | 7-8-50  | Elemental | No tiene     | Matemáticas:<br>Aritmética y su Metodología; Álgebra, 1º, 3h. semanales.<br><br>Matemáticas:<br>Geometría, ampliación y Metodología, Trigonometría, 2º, 2h. semanales. | Las Metodologías que aparecen en Matemáticas. |



|      |         |          |                                |                                                                                           |                                                                                                                               |
|------|---------|----------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1967 | 8-6-67  | Superior | No tiene                       | No consta.                                                                                | Didáctica de las Matemáticas, 1º, 3h. semanales.<br><br>Didáctica de las Matemáticas, 2º, 3h semanales en el 1º cuatrimestre. |
| 1977 | 25-6-77 | Superior | Filología                      | Matemáticas I, anual.                                                                     | Didáctica de la Matemática 1ª etapa de E.G.B., cuatrimestral.                                                                 |
|      |         |          | Ciencias Humanas               | Matemáticas I, anual.                                                                     | Didáctica Matemática 1ª etapa de E.G.B., cuatrimestral.                                                                       |
|      |         |          | Ciencias                       | Matemáticas I, anual.<br>Matemáticas II, anual.                                           | Didáctica Matemática, cuatrimestral.                                                                                          |
|      |         |          | Preescolar                     | Matemáticas I, anual.                                                                     | Didáctica Matemática 1ª etapa de E.G.B., cuatrimestral.                                                                       |
|      |         |          | Educ. Especial                 | Matemáticas I, anual.                                                                     | Didáctica Matemática 1ª etapa de E.G.B., cuatrimestral.                                                                       |
| 1994 | 6-10-94 | Superior | Maestro en Audición y Lenguaje | Álgebra, optativa, 4 créditos.<br><br>Elementos de Geometría, optativa, 4 créditos.       | Laboratorio de Matemáticas, optativa, 4 créditos.                                                                             |
|      |         |          | Maestro en Educación Especial  | Álgebra, optativa, 4 créditos.<br><br>Elementos de Geometría, optativa, 4 créditos.       | Dificultades en el aprendizaje matemático, optativa, 4 créditos<br><br>Laboratorio de Matemáticas, optativa, 4 créditos.      |
|      |         |          | Maestro en Educación Física    | Álgebra, optativa, 4 créditos, 1º curso.<br><br>Elementos de Geometría, optativa, 4 créd. | Matemáticas y su Didáctica, troncal, 1º curso, 4 créditos.<br><br>Laboratorio de Matemáticas, optativa, 4 créditos.           |

|      |        |          |                                |                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                    |
|------|--------|----------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1999 | 6-5-99 | Superior | Maestro en Educación Infantil  | <p>Álgebra, optativa, 4 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa, 4 créditos.</p>                                                      | <p>Didáctica de las Matemáticas en la Educación Infantil, troncal, 2º curso, 7 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa, 4 créditos.</p> <p>Pensamiento lógico matemático hasta los 6 años, optativa, 4 créditos.</p> |
|      |        |          | Maestro en Educación Musical   | <p>Álgebra, optativa, 4 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa, 4 créditos.</p>                                                      | <p>Matemáticas y su Didáctica, troncal, 2º curso, 4 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa, 4 créditos.</p>                                                                                                         |
|      |        |          | Maestro en Educación Primaria  | <p>Matemáticas, troncal, 1º curso, 3,5 créditos.</p> <p>Álgebra, optativa, 4 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa, 4 créditos.</p> | <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa, 4 créditos.</p>                                                                                                                                                                           |
|      |        |          | Maestro en Lengua Extranjera   | <p>Álgebra, optativa, 4 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa, 4 créditos.</p>                                                      | <p>Didáctica de las Matemáticas, troncal, 2º curso, 4 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa, 4 créditos.</p>                                                                                                       |
|      |        | Superior | Maestro en Audición y Lenguaje | <p>Introducción al Álgebra, optativa común, 6 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa común, 6 créditos.</p>                          | <p>La enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para niños con problemas de audición y lenguaje, optativa de especialidad, 6 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa común, 6 créditos.</p>                      |
|      |        |          | Maestro en Educación Especial  | <p>Introducción al Álgebra, optativa común, 6 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa, 6 créditos.</p>                                | <p>Dificultades del aprendizaje matemático, optativa de especialidad, 6 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa común, 6 créditos.</p>                                                                               |

|  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  | <p>Maestro en Educación Física</p> <p>Introducción al Álgebra, optativa, 6 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa, 6 créditos.</p>                                                                                                                   | <p>Matemáticas y su Didáctica, troncal, 3° curso, 4,5 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa, 6 créditos.</p>                                                                                                                                                                                                  |
|  |  |  | <p>Maestro en Educación Infantil</p> <p>Elementos de Álgebra y Geometría en la Educación Infantil, optativa de especial., 6 créditos.</p> <p>Introducción al Álgebra, optativa común, 6 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa común, 6 créditos</p> | <p>Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica, troncal, 3° curso, 7 créditos.</p> <p>Pensamiento lógico matemático hasta los 6 años, optativa de especialidad, 6 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa común, 6 créditos.</p>                                                                       |
|  |  |  | <p>Maestro en Educación Musical</p> <p>Introducción al Álgebra, optativa común, 6 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa común, 6 créditos.</p>                                                                                                      | <p>Matemáticas y su Didáctica, troncal, 2° curso, 4,5 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa común, 6 créditos.</p>                                                                                                                                                                                            |
|  |  |  | <p>Maestro en Educación Primaria</p> <p>Matemáticas, optativa de especialidad, 6 créditos.</p> <p>Introd. al Álgebra, optativa común, 6 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa común, 6 créditos.</p>                                                | <p>Matemáticas y su Didáctica, troncal, 2° curso, 12 créditos.</p> <p>Resolución de problemas matemáticos, optativa de especialidad, 6 créditos.</p> <p>Taller de enseñanza y aprendizaje de la Geometría elemental, optativa de especialidad, 6 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa común, 6 créditos.</p> |
|  |  |  | <p>Maestro de Lengua Extranjera</p> <p>Introducción al Álgebra, optativa, común 6 créditos.</p> <p>Elementos de Geometría, optativa común, 6 créditos.</p>                                                                                                      | <p>Matemáticas y su Didáctica, troncal, 3° curso, 4,5 créditos.</p> <p>Laboratorio de Matemáticas, optativa común, 6 créditos.</p>                                                                                                                                                                                            |

Como puede observarse en los planes de estudios de 1945 y 1950 las Matemáticas figuran como asignatura integrante del currículum del Maestro. En el plan de 1945 no consta el número de horas que

tuvieron que dedicarles. En el plan de 1950 sí figuran específicamente dos asignaturas con 3 y 2 horas semanales respectivamente.

En el plan de estudios de 1967, aunque no aparecen las Matemáticas como integrantes del currículum sino la Didáctica de la Matemática, todos los libros de texto de aquella época, (véanse por ejemplo los de Roanes), tienen mayoritariamente contenido matemático y unos comentarios sobre la Didáctica de dichos contenidos.

Hubo también un plan experimental en 1971, que estuvo en vigor 6 años, sin que se promulgara ningún texto legal, ya que lo único que se publicó de forma extraoficial fueron unas advertencias generales, que fueron remitidas a todos los directores de las escuelas universitarias. En las advertencias de referencia se mencionaban, entre otros, los siguientes artículos de la ley general de Educación de 4 de agosto de 1970: Artículos 36-2, 39-1 y 102-3, en conexión con el 110-2. En dicho plan era necesario el Bachiller Superior. Tenía las mismas especialidades que el plan de 1978 y los mismos contenidos matemáticos y de Didáctica de las Matemáticas que éste.

Desde 1971 hasta 1994 todos los alumnos de Magisterio tenían que cursar una asignatura de Matemáticas anual, cuyo objetivo era profundizar un poco más en aquellos contenidos matemáticos que tuvieran alguna repercusión en la enseñanza que posteriormente iban a impartir, y otra asignatura de Didáctica de las Matemáticas cuatrimestral. El estudio de los contenidos matemáticos les venía muy bien a los alumnos que estudiaban Magisterio para hacerles profundizar y recapacitar en estos temas que, por otro lado, no eran los que mejor se les daban, y que necesitaban a la hora de plantearse cómo enseñarlos (en el nivel correspondiente) en Didáctica de la Matemática.

Cuando empezaron a decrecer las horas que tenían que dedicar a las Matemáticas y a la Didáctica de las Matemáticas con carácter obligatorio fue a partir de 1994 y hasta 1999 durante dicho periodo sólo las siguientes especialidades tenían alguna asignatura troncal de tales materias:

- a) Maestro en Educación Física tenía la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", 1<sup>er</sup> curso, 4 créditos;
- b) Maestro en Educación Infantil tenía la asignatura "Didáctica de las Matemáticas en la Educación Infantil", 2º curso, 7 créditos;
- c) Maestro en Educación Musical tenía la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", 2º curso, 4 créditos;

d) Maestro en Educación Primaria tenía la asignatura "Matemáticas", troncal, 1<sup>er</sup> curso, 3,5 créditos y

e) Maestro en Lengua extranjera que tenía la asignatura "Didáctica de las Matemáticas", 2<sup>o</sup> curso, 4 créditos.

Por un lado podemos destacar el escaso número de créditos que tienen cada una de las asignaturas troncales que aparecen, salvo para la especialidad de Educación Infantil que, aunque sería suficiente con los 7 créditos para una Didáctica de la Matemática, carece de una asignatura de contenidos matemáticos, imprescindible para cimentar dicha Didáctica de la Matemática.

Las especialidades de Maestro en Educación Física y Maestro en Educación Musical con 4 créditos (40 horas) para una asignatura de "Matemáticas y su Didáctica" no tienen tiempo material para dar algo de Matemáticas y algo de Didáctica de la Matemática para poder fundamentar la segunda en la primera.

La especialidades restantes: Maestro en Educación Primaria y Maestro en Lengua extranjera también quedan a medias, por tener la primera sólo "Matemáticas" sin la Didáctica de las Matemáticas en la que poder plantearse cuáles de los conocimientos adquiridos y de qué forma pueden repercutir en el futuro profesional de los alumnos; y la segunda "Didáctica de las Matemáticas" sin las Matemáticas necesarias para adquirir los conocimientos imprescindibles para tener seguridad a la hora de plantearse transmitirlos.

Por otro lado, lo más grave es la falta de alguna asignatura troncal de Matemáticas y de Didáctica de la Matemática en las especialidades de Maestro en Audición y Lenguaje y Maestro en Educación Especial; estas especialidades se quedan sin tener que cursar ninguna asignatura de estas dos materias, ya que sólo tienen asignaturas optativas con contenido matemático y didáctico-matemático, que no siempre eligen los alumnos de Magisterio, especialmente si no se les dan bien las Matemáticas. Todo esto supone un gran "bache" en su formación y en la de los alumnos que después "caigan en sus manos", pues estos Maestros eludirán tratar, en sus explicaciones, temas relacionados con las Matemáticas, y todos sabemos que aunque se lo propongan va a ser imposible que no se les presente esta situación, ya que las Matemáticas les aparecerán en cualquier parcela que trabajen.

Desde 1999 hasta hoy se mantienen las mismas especialidades que había en 1994 variando un poco las asignaturas troncales que había entonces, quedando como sigue:

- a) Maestro en Educación Física que tiene la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", 3<sup>er</sup> curso, 4,5 créditos;
- b) Maestro en Educación Infantil que tiene la asignatura "Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica", 3<sup>er</sup> curso, 7 créditos.
- c) Maestro en Educación Musical que tiene la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", 2º curso, 4,5 créditos.
- d) Maestro en Educación Primaria que tiene la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", 2º curso, 12 créditos.
- e) Maestro en Lengua Extranjera que tiene la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", 3<sup>er</sup> curso, 4,5 créditos.

Aunque se ha conseguido para estas especialidades una asignatura troncal con contenido matemático y con Didáctica de la Matemática, todavía quedan las especialidades de Maestro en Audición y Lenguaje y Maestro en Educación Especial que no tienen que cursar ninguna Matemática ni Didáctica de la Matemática. Nos preguntamos ¿los maestros que hagan estas dos especialidades no tendrán en ningún momento que comentarle a los niños algún concepto relativo a las Matemáticas? Como todos sabemos que esto es imposible, volvemos a preguntarnos ¿cómo podrán enfocar estos conceptos? ¿Serán capaces de darles una respuesta acertada, como de Maestro, pues eso son.

De todos modos siguen siendo pocos los créditos que se dedican a la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", 4,5 créditos (45 horas) para ver algo de las Matemáticas que después no podrán eludir en su actividad profesional y la Didáctica de la Matemática en donde se planteen como podrían transmitir dichos conocimientos a los niños.

La especialidad de Educación Infantil aunque tiene la asignatura "Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica" con 7 créditos, pensamos que estos créditos deberían ser sólo para estudiar el desarrollo del pensamiento matemático y que después hubiese una Didáctica de la Matemática para Educación Infantil.

Partiendo de la base de que nadie da lo que no tiene y que nadie puede explicar lo que no conoce, entendemos que si queremos formar Maestros preparados para impartir docencia en Educación Infantil o en Primaria, cualquiera que sean las especialidades que figuren en el currículum, debería ser obligatorio cursar una asignatura con contenidos matemáticos y concretamente algebraicos y otra con contenidos geométricos, adaptados a las especialidades que hubiese, con al menos 6 créditos, por ser Álgebra y Geometría lo que después tendrán que ver

en su actividad profesional con los niños. Estas asignaturas podrían ser las que ahora figuran como optativas para todas las especialidades. Por supuesto que consideramos que también debería ser obligatorio cursar una Didáctica de la Matemática con al menos 6 créditos, en donde se vea cómo repercuten los conocimientos matemáticos adquiridos en su futuro profesional.

## Anexo II

# Opiniones sobre las Matemáticas antes

Con objeto de tener reflejado en esta tesis toda la información que aportaron los alumnos, se recogen en este Anexo las opiniones que dieron, antes del estudio del tema y de las técnicas, con las respuestas a las preguntas que quedaban abiertas en el Primer Apartado de la Evaluación Inicial: “el calificativo —los calificativos— que mejor le va —les van— a las Matemáticas es —son—” y “para mí las Matemáticas son...”. También incluimos en la tabla siguiente las opiniones de los alumnos, en el Segundo Apartado, sobre lo que consideran que necesita el maestro si quiere realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones matemáticas; esto quedaba, para que ellos dijeran lo que quisieran, al final de este Apartado.

Para respetar la confidencialidad de las respuestas no incluimos el nombre de los alumnos, sino que le asociamos un acrónimo a cada uno.

| Nombre  | Especialidad       | Calificativo                            | Para mi son        | Necesidades para realizar actividades                                                          |
|---------|--------------------|-----------------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| R P A   | Educación Infantil | Imprescindibles.                        | Prácticas.         |                                                                                                |
| M C B R | Educación Infantil | Precisas y muy difíciles de comprender. | Muy complicadas.   |                                                                                                |
| M A D   | Educación Infantil | Difíciles.                              | Imprescindibles.   |                                                                                                |
| E D A   | Educación Infantil | Laboriosas.                             | Incomprensibles.   |                                                                                                |
| A M A R | Educación Infantil | Creativas.                              | Un amor platónico. | Deberíamos motivar y cambiar las Metodologías para que a los niños/as les resulten agradables. |
| A B O R | Educación Infantil |                                         |                    |                                                                                                |



## Anexo II

|         |                                       |                                                       |                                       |                                                                                                                                                                                               |
|---------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| M F P   | Educación Infantil                    | Prácticas y necesarias.                               | Importantes.                          | Se necesita conocer las peculiaridades de cada niño.                                                                                                                                          |
| A A B   | Educación Infantil                    | Difíciles, incomprensibles.                           | Algo incomprensibles.                 |                                                                                                                                                                                               |
| R M C G | Matemáticas                           | La base de la Ciencia.                                | Mi pasado, mi presente y mi futuro.   | Debes buscar el modo más sencillo, rápido y eficaz para que los niños aprendan.                                                                                                               |
| L A C   | Matemáticas                           | Imprescindibles, exactas.                             | Imprescindibles.                      |                                                                                                                                                                                               |
| A C R   | Educación Infantil                    | Prácticas.                                            | Interesantes.                         |                                                                                                                                                                                               |
| M O F   | Matemáticas                           | Entretenidas                                          | Mi futuro.                            | Es necesario conocer cómo actúa el niño para saber la mejor forma para enseñarle las Matemáticas.                                                                                             |
| R P S   | Matemáticas                           | Son imprescindibles para el desarrollo de la ciencia. | Fundamentales para la vida cotidiana. | La mente de los niños es bastante compleja y las Matemáticas para ellos también son bastantes complejas.                                                                                      |
| E F C   | Maestro Educación Especial            | Complicadas.                                          | Muy difíciles.                        |                                                                                                                                                                                               |
| S A M   | Empresariales                         | Necesarias                                            | Interesantes                          |                                                                                                                                                                                               |
| J A H G | Ingeniero técnico de Telecomunicación |                                                       |                                       |                                                                                                                                                                                               |
| M S C G | Empresariales                         | Importante, son muy prácticas.                        | Formativa.                            | Debes tener conocimientos básicos para saber explicarte.                                                                                                                                      |
| C L D   | Audición y Lenguaje                   |                                                       |                                       |                                                                                                                                                                                               |
| G L G   | Educación Infantil                    |                                                       |                                       |                                                                                                                                                                                               |
| M M M   | Educación Infantil                    | Precisas, formativas, difíciles.                      | Difíciles.                            | Pienso que debemos conocer algo de Matemáticas, pero sobre todo de Didáctica de las Matemáticas y Psicología para fomentar, en los niños de Educación Infantil, el gusto por las Matemáticas. |
| O R H P | Ingeniero Químico                     |                                                       |                                       |                                                                                                                                                                                               |
| J P D   | Ingeniero de Telecomunicación         | “Herramienta”.                                        | Muy interesantes.                     |                                                                                                                                                                                               |
| R F T   | Educación Infantil                    | Precisas y prácticas.                                 | Interesantes.                         |                                                                                                                                                                                               |
| A B L   | Matemáticas                           | Abstractas y útiles.                                  | Interesantes.                         |                                                                                                                                                                                               |
| A C G N | Educación Infantil                    | Difíciles (al principio e interesantes.               | Interesantes y reflexivas.            |                                                                                                                                                                                               |
| J M R   | Educación Infantil                    | Entretenidas                                          | Fundamentales                         |                                                                                                                                                                                               |

|         |                                        |                                                      |                                                    |                                                            |
|---------|----------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| M C G M | Educación Infantil                     | Difíciles y complejas.                               | Complicadas.                                       |                                                            |
| L M C   | Educación Infantil                     | Difíciles, interesantes, precisas e imprescindibles. | Interesantes y difíciles.                          |                                                            |
| L F C   | Educación Infantil                     | Imprescindibles.                                     | Necesarias.                                        |                                                            |
| T G R   | Educación Infantil                     | Imprescindibles.                                     | Importantes y ni muy difíciles ni muy fáciles.     |                                                            |
| F H C   | Ingeniero de Telecomunicación          | Imprescindibles                                      | Una herramienta fundamental para la vida cotidiana |                                                            |
| S P G   | Biológicas                             |                                                      | Esenciales.                                        |                                                            |
| O R C   | Educación Infantil                     | Entretenidas.                                        | Una ciencia de la que queda mucho por descubrir.   |                                                            |
| S S E   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Imprescindibles e interesantes.                      | Necesarias.                                        |                                                            |
| B P P   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Útiles.                                              | Imprescindibles.                                   | Acercar las Matemáticas mediante juegos.                   |
| A P G   | Primaria                               | Especiales                                           | Interesantes.                                      |                                                            |
| D I A P | Ingeniero de Telecomunicación          | Imprescindibles y prácticas.                         | Una herramienta.                                   |                                                            |
| J A C   | Lengua Extranjera                      | Exactas.                                             | Interesantes.                                      |                                                            |
| M H B   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Imprescindibles e interesantes.                      | Importantes.                                       |                                                            |
| J C B M | Químicas                               | Exactitud, imprescindibles.                          | Una herramienta.                                   |                                                            |
| A R C   | Químicas                               | Necesarias.                                          | Herramienta.                                       | Creo que lo creativo es más atractivo para el aprendizaje. |
| C V G   | Químicas                               | Útiles.                                              | Abstractas.                                        |                                                            |
| F J P R | Matemáticas.                           | Elegantes, precisas, lógicas, abstractas.            |                                                    |                                                            |
| B C G   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación. | Precisas.                                            | Imprescindibles.                                   |                                                            |
| M C C C | Ingeniero Técnico de Telecomunicación. | Interesantes e imprescindibles.                      | Importantes.                                       |                                                            |
| F J S J | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Necesarias.                                          | Interesantes                                       |                                                            |
| M A M D | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Directas y necesarias.                               | Imprescindibles.                                   |                                                            |
| S P P   | Educación Infantil                     | Entretenidas: dedicación, trabajarlas mucho.         | Necesarias para una maestra.                       |                                                            |
| M J D G | Educación Infantil                     | Difíciles, prácticas, imprescindibles.               | Prácticas.                                         | Las actividades a realizar deben ser motivadoras.          |

## Anexo II

|           |                                        |                                                   |                                                                                |                                                                                                                                                                             |
|-----------|----------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| R M A C   | Educación Infantil                     | Difíciles.                                        | Difíciles.                                                                     |                                                                                                                                                                             |
| I L       | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Difíciles pero importantes.                       | Imprescindibles.                                                               |                                                                                                                                                                             |
| M I F D   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Imprescindibles y necesarias.                     | Interesantes.                                                                  |                                                                                                                                                                             |
| F J M D   | Ingeniero Técnico de Informática.      | Imprescindibles.                                  | Fundamentales.                                                                 |                                                                                                                                                                             |
| J A A T E | Ingeniero de Telecomunicación.         | Importantes.                                      | Mi futuro.                                                                     |                                                                                                                                                                             |
| M M S     | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Prácticas, entretenidas y exactas.                | Prácticas y necesarias.                                                        |                                                                                                                                                                             |
| A A R     | Ingeniero Técnico de Telecomunicación. | Interesantes.                                     | Importantes.                                                                   |                                                                                                                                                                             |
| F M B C   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Imprescindibles.                                  | La fuente del saber.                                                           |                                                                                                                                                                             |
| F J A M   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación  | Precisas y prácticas.                             | Necesarias.                                                                    |                                                                                                                                                                             |
| M E A S   | Ingeniería de Telecomunicación         | Necesarias.                                       | Interesantes.                                                                  |                                                                                                                                                                             |
| I L P     | Ingeniero Técnico de Informática.      | Necesarias.                                       | Lógicas e imprescindibles.                                                     |                                                                                                                                                                             |
| J D C F   | Ingeniería Informática.                | Precisas.                                         | La base de la carrera que estudia.                                             |                                                                                                                                                                             |
| M B T M   | Ingeniero de Telecomunicación.         | Ingeniosas.                                       | Imprescindibles.                                                               |                                                                                                                                                                             |
| J A C D   | Ingeniero de Telecomunicación.         | Imprescindibles.                                  | Curiosas.                                                                      |                                                                                                                                                                             |
| I M A     | Educación Infantil.                    | Entretenidas.                                     | Interesantes.                                                                  |                                                                                                                                                                             |
| C M C     | Educación Infantil.                    | Bonitas.                                          | Algo muy importante en mi vida.                                                |                                                                                                                                                                             |
| M D G N   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación. | Muy útiles e imprescindibles.                     | Imprescindibles.                                                               | Para enseñar Matemáticas en E.I. es necesario un dominio total de las Matemáticas además de saber transmitir esos conocimientos según la edad del niño al que se le enseña. |
| A J P V   | Ingeniero de Telecomunicación.         |                                                   |                                                                                |                                                                                                                                                                             |
| N C V     | Educación Infantil.                    | Entretenidas y aburridas cuando no las entiendes. | Hoy en día difíciles.                                                          |                                                                                                                                                                             |
| C R R B   | Educación Infantil.                    | Complicadas ¿?                                    | Una asignatura. Forman parte de la vida diaria aunque es difícil darse cuenta. |                                                                                                                                                                             |
| E V R M   | Educación Infantil.                    |                                                   | Precisas e interesantes.                                                       |                                                                                                                                                                             |

|         |                                   |                                                     |                                                                               |                                                                                                                                    |
|---------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| G H G   | Ingeniero de Telecomunicación.    | Necesarias.                                         | Imprescindibles.                                                              |                                                                                                                                    |
| F H M R | Ingeniero Industrial.             | Obligatorias                                        | Necesarias.                                                                   |                                                                                                                                    |
| I L P   | Ingeniero Técnico de Informática. | Imprescindibles.                                    | Necesarias.                                                                   |                                                                                                                                    |
| A N M   | Ingeniero Técnico de Informática. | Útiles.                                             | Básicas en la enseñanza.                                                      |                                                                                                                                    |
| V C S   | Ingeniero Técnico de Informática. | Necesarias y nada divertidas.                       | Necesarias.                                                                   |                                                                                                                                    |
| M A T A | Ingeniero Técnico de Informática. | Difíciles e imprescindibles.                        | Un tostón.                                                                    | Debe saber algo de Matemáticas, pero sobre todo debe ser pedagogo y saber cómo tratar a los niños de esas edades.                  |
| M A C M | Ingeniero de Telecomunicación     | Necesarias.                                         | Útiles                                                                        |                                                                                                                                    |
| A I C C | Primaria.                         | Problemas y soluciones.                             | Imprescindibles.                                                              | Cuántos más conocimientos de Matemáticas, Didáctica y Psicología, mejor será el proceso de enseñanza-aprendizaje.                  |
| J M R D | Educación Infantil.               | Pesadas.                                            | Difíciles.                                                                    | Debemos centrarnos en los intereses de los niños.                                                                                  |
| C O     | Ingeniería Informática.           | Madre de todas las Ciencias.                        | Muy importantes.                                                              |                                                                                                                                    |
| M M R   | Ingeniería Industrial.            | Interesantes y perfectas.                           | La llave inglesa de la Física.                                                |                                                                                                                                    |
| A P J   | Ingeniería Industrial.            | Necesarias.                                         | Parte de su vida.                                                             |                                                                                                                                    |
| A J L R | Ingeniería Industrial.            | Precisas.                                           | Imprescindibles.                                                              |                                                                                                                                    |
| G M L   | Ingeniería Informática.           | Necesarias.                                         | La base de muchas cosas.                                                      |                                                                                                                                    |
| J A L G | Ingeniería Técnica Industrial.    | Útiles.                                             | Exigentes.                                                                    |                                                                                                                                    |
| J L R C | Ingeniería Técnica Industrial.    | Necesarias y cuando las conoces te sorprenden.      |                                                                               |                                                                                                                                    |
| A V G R | Educación Infantil.               |                                                     |                                                                               |                                                                                                                                    |
| J B R   | Matemáticas                       | Rigurosas, imaginativas, precisas, simplificadoras. | Aparte de mi vocación son un camino para desarrollar mis capacidades lógicas. | Creo que en vez de libros se debería aprender con niños ya que el libro no te va a solucionar nada de saber comunicarte con ellos. |
| C I T R | Económicas                        | Difíciles de comprender, abstractas.                | Interesantes.                                                                 |                                                                                                                                    |
| A M F Y | Maestro Lengua Extranjera         | Divertidas, Interesantes.                           | Divertidas y son un reto.                                                     |                                                                                                                                    |

## Anexo II

|         |                    |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                      |
|---------|--------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| M C M B | Empresariales      | San bonitas.                                               | Es la mejor asignatura que he tenido.                                                                                                                                                                                                                       | El maestro debe saber cómo tener que explicar a los niños con dibujos, juegos, etc.                                                                                  |
| G M O   | Matemáticas        | Creativas, curiosas, sorprendentes, prácticas, necesarias. | Siempre han sido como un juego y un motivo de superación, más que por el afán de aprender por la curiosidad. Debido a la carrera que ha escogido ahora las mira con más respeto y responsabilidad, intentando no olvidar nunca lo que comentó al principio. | El maestro debe dominar y conocer las Matemáticas, sin que sea necesaria la licenciatura.                                                                            |
| N Q C   | Matemáticas        | interesantes, formativas, prácticas, útiles, necesarias... | Bonitas, interesantes, muy útiles.                                                                                                                                                                                                                          | Se deben tener ciertos conocimientos en Pedagogía y Psicología                                                                                                       |
| G L V   | Matemáticas        |                                                            | El desarrollo máximo de nuestro razonamiento                                                                                                                                                                                                                | Considero necesario tener conocimientos de Psicología de la Educación y de Matemáticas a un nivel bueno, pero no creo que tengan que ser licenciados en Matemáticas. |
| S V N   | Matemáticas.       | Bonitas, entretenidas, muy interesantes.                   | Mi meta.                                                                                                                                                                                                                                                    | Se debe conocer bien la materia para poder explicarla y tener algunos conocimientos de Pedagogía y Psicología para hacérselos llegar a los niños correctamente.      |
| M N F G | Educación Infantil | Científicas, experimentables, probables, repetibles.       | Difíciles, incomprensibles a veces.                                                                                                                                                                                                                         | Es la materia que mayor número de horas debería tener.                                                                                                               |
| M R C M | Educación Infantil | Complicadas.                                               | Una materia que no llama mi atención.                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                      |
| M A M   | Educación Infantil | Difíciles, pero no insalvables.                            | Una asignatura importante.                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                      |

|           |                    |                                |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------|--------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| E M G     | Educación Infantil |                                | Precisas.                                       | El profesor tiene que saber, de manera general pero certera, las Matemáticas que son fundamentales y que todo universitario ha dado durante su trayectoria. Creo que sabiendo bien esa parte, junto a nociones de Psicología es suficiente. Me refiero a esto porque existen maestros de Educación Infantil que no se acuerdan ni de dividir. (Vaya que yo tampoco me acuerdo muy bien.) El alumno de Magisterio necesita las técnicas de Metodología Creativa para poder impartir esa llamada "Enseñanza de calidad". |
| S I M     | Educación Infantil | Abstractas, necesarias.        | Difíciles pero necesarias.                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| V C A     | Educación Infantil | Importantes.                   | Difíciles.                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| S N 1     | Educación Infantil | Útiles, necesarias, prácticas. | Una de las cosas útiles para nuestra formación. | Se deben conocer los intereses del niño y saber llamar su atención para enseñarle nociones matemáticas.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| S N 2     | Educación Infantil | Entretenidas.                  |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| M O R H   | Ingeniería Química | Completas.                     | Necesarias.                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| A S L R   | Educación Infantil | Difíciles.                     | Complicadas.                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| M J R L   | Turismo            | Imprescindibles.               | Imprescindibles.                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| M C L G   | Educación Infantil | Difíciles.                     | Importantes.                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| M B F     | Educación Infantil | Complejas.                     | Necesarias.                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| L P R M   | Educación Infantil | Prácticas, interesantes.       | Imprescindibles para nuestra formación.         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| B J N     | Educación Infantil | Exactas.                       | Útiles y a veces difíciles.                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| G L G     | Educación Infantil | Interesantes, difíciles.       | Difíciles.                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| B S B G S | Educación Infantil | Complicadas.                   | No me gustan.                                   | Pienso que, aunque todos tenemos nuestra parte creativa, emplear una Metodología Creativa sería mejor.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

## Anexo II

|         |                                       |                                                |                                          |                                                    |
|---------|---------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| M C G B | Educación Infantil                    | Concretas, demostrables.                       | Difíciles.                               |                                                    |
| L C J   | Educación Infantil                    | Pesadas.                                       | Incomprensibles.                         |                                                    |
| A V M   | Educación Infantil                    | Difíciles e incomprensibles, en algunos casos. | Algo innecesario.                        |                                                    |
| S N 3   | Primaria                              |                                                | Formativas.                              | Motivación suficiente.                             |
| T G R   | Educación Infantil                    | Importantes.                                   | Divertidas.                              |                                                    |
| L Q G   | Educación Infantil                    | Necesarias y Prácticas.                        | Imprescindibles.                         |                                                    |
| M D L P | Ingeniero Técnico de Telecomunicación | Entretenidas.                                  | Como un juego                            |                                                    |
| E V C V | Educación Infantil.                   |                                                | Prácticas, formativas e imprescindibles. | Cuáles son los conocimientos que el niño ya tiene. |

## Anexo III

# Opiniones sobre las Matemáticas después

Se recogen en este Anexo las opiniones de los alumnos, después del estudio del tema y de las técnicas, sobre las preguntas que quedaban abiertas en el Primer Apartado de la Evaluación Inicial: “el calificativo —los calificativos— que mejor le va —les van— a las Matemáticas es —son—” y “para mi las Matemáticas son...”. También incluimos en la tabla siguiente las opiniones de los alumnos, en el Segundo Apartado, sobre lo que consideran que necesita el maestro si quiere realizar ciertas actividades con niños de Educación Infantil (de 0 a 6 años), para que comprendan algunas nociones Matemáticas; esto quedaba para que ellos dijeran lo que quisieran, al final de este Apartado.

| Nombre                  | Especialidad       | Calificativo                                   | Para mi son                                                 | Necesidades para realizar actividades                                          |
|-------------------------|--------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| R P A                   | Educación Infantil | Imprescindibles.                               | Difíciles.                                                  |                                                                                |
| M C B R                 | Educación Infantil | Interesantes pero muy difíciles de comprender. | Prácticas.                                                  |                                                                                |
| M A D                   | Educación Infantil | Interesantes pero muy difíciles de comprender. | Imprescindibles                                             |                                                                                |
| E D A                   | Educación Infantil | Complicadas                                    | Complicadas                                                 |                                                                                |
| A M A R                 | Educación Infantil | Creativa, interesante y productiva.            | Mi sueño, yo quería estudiar Matemáticas desde muy pequeña. | El maestro debe conocer en profundidad todo lo que quiera o tenga que enseñar. |
| A B O R                 | Educación Infantil | Imprescindibles.                               | Interesantes.                                               |                                                                                |
| M F P                   | Educación Infantil | Prácticas, necesarias.                         | Necesarias.                                                 | Tener en cuenta los conocimientos previos y los ritmos de aprendizaje.         |
| A A B                   | Educación Infantil | Difíciles.                                     | Complicadas.                                                |                                                                                |
| Mónica del Otero Fraile | Matemáticas        | Difíciles pero entretenidas.                   | Interesantes cuando están bien explicadas.                  |                                                                                |



## Anexo III

|           |                     |                                                           |                                                                      |                                                                                                                                                        |
|-----------|---------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| R P S     | Matemáticas         | Muy importantes, divertidas.                              | La base de todas las ciencias, fundamentales para la vida cotidiana. | Para enseñarles las Matemáticas a los niños pequeños debes saber algunas técnicas para enseñar que les diviertan.                                      |
| E F C     | Educación Especial  | Difíciles.                                                | Complicadas.                                                         |                                                                                                                                                        |
| M S A M   | Empresariales       | Imprescindibles y necesarias.                             | Interesantes.                                                        |                                                                                                                                                        |
| J A H G   | Telecomunicación    | Útiles y Exactas.                                         | Imprescindibles.                                                     |                                                                                                                                                        |
| M S C G   | Empresariales       | Entretenidas, un poco complicadas.                        | Primordiales.                                                        | Tener conocimientos básicos para poder realizar actividades con niños de esas edades, pero aún mejor si tienes un mayor conocimiento sobre la materia. |
| C L D     | Audición y Lenguaje | Difíciles y prácticas.                                    |                                                                      |                                                                                                                                                        |
| M O F     | Matemáticas         | Razonadas, pensadas, organizadas.                         | Precisa la intuición y las nociones.                                 | Sigo manteniendo que por muchas ideas que aprendes, es con el niño con quién se ve la validez o no de lo que hayamos estudiado.                        |
| G L G     | Educación Infantil  | Precisas.                                                 | Difíciles.                                                           |                                                                                                                                                        |
| M M M     | Educación Infantil  | Precisas, interesantes.                                   | Formativas, difíciles.                                               |                                                                                                                                                        |
| O R H M P | Ingeniero Químico   | Necesarias e interesantes.                                | Totalmente necesarias.                                               |                                                                                                                                                        |
| J P D     | Telecomunicación    | Precisión.                                                | Una herramienta.                                                     |                                                                                                                                                        |
| S P P     | Educación Infantil  | Trabajosas.                                               | Entretenidas, necesitan mucho estudio.                               |                                                                                                                                                        |
| M J D G   | Educación Infantil  | Imprescindibles, prácticas pero difíciles.                | Prácticas                                                            |                                                                                                                                                        |
| R M A C   | Educación Infantil  | Difíciles.                                                | Complicadas.                                                         |                                                                                                                                                        |
| R M C G   | Matemáticas         | La base de la ciencia.                                    | Mi pasado, mi presente y mi futuro                                   | Debes dominar bastante bien el tema que se quiera explicar a los alumnos.                                                                              |
| L A C     | Matemáticas         | Exactas.                                                  | Imprescindibles.                                                     |                                                                                                                                                        |
| A C R     | Educación Infantil  | Precisas e interesantes.                                  | Interesantes.                                                        |                                                                                                                                                        |
| R F T     | Educación Infantil  | Precisas y prácticas.                                     | Interesantes.                                                        |                                                                                                                                                        |
| A B L     | Matemáticas         | Exactas.                                                  | Imprescindibles.                                                     |                                                                                                                                                        |
| A C G N   | Educación Infantil  | Difíciles (según la persona), precisas e imprescindibles. | Imprescindibles e interesantes.                                      |                                                                                                                                                        |
| J M R     | Educación Infantil  | Duras.                                                    | Difíciles.                                                           |                                                                                                                                                        |
| M C G M   | Educación Infantil  |                                                           | Complicadas y difíciles.                                             |                                                                                                                                                        |
| L M C     | Educación Infantil  | Difíciles y precisas.                                     | Interesantes.                                                        |                                                                                                                                                        |
| L F C     | Educación Infantil  | Imprescindibles.                                          | Necesarias.                                                          |                                                                                                                                                        |
| T G R     | Educación Infantil  | Necesarias.                                               | Importantes.                                                         |                                                                                                                                                        |

|           |                                         |                                                |                                                |                        |
|-----------|-----------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------|
| F H C     | Educación Infantil                      | Imprescindibles.                               | Fundamentales para la formación de la persona. |                        |
| S P G     | Biológicas                              | Exactas y grandes.                             | Útiles para muchos campos de la vida.          |                        |
| O R C     | Educación Infantil                      | Entretenidas.                                  |                                                |                        |
| S S E     | Telecomunicaciones                      | Necesarias.                                    | Entretenidas.                                  |                        |
| B P P     | Telecomunicaciones                      | Necesarias.                                    | Útiles.                                        | Tener mucha paciencia. |
| A P G     | Maestro Primaria                        | Interesantes.                                  | A mi me gustan.                                |                        |
| D I A P   | Ingeniero de Telecomunicaciones         | Precisas.                                      | Una herramienta.                               |                        |
| J A C     | Maestro Lengua Extranjera               |                                                | Interesantes.                                  |                        |
| M H B     | Telecomunicaciones                      |                                                | Imprescindibles.                               |                        |
| J C B M   | Químicas                                | Necesarias y complementarias a otras ciencias. | Herramientas.                                  |                        |
| A R C     | Químicas                                | Imprescindibles.                               | Una herramienta diaria.                        |                        |
| C V G     | Químicas                                | Útiles.                                        | Abstractas.                                    |                        |
| F J P R   | Matemáticas                             | Exactas, elegantes, lógicas y creativas.       | Fundamentales.                                 |                        |
| B C G     | Ingeniero Técnico de Telecomunicaciones | Precisas.                                      | Imprescindibles.                               |                        |
| M A C M   | Ingeniero de Telecomunicaciones.        | Necesarias.                                    |                                                |                        |
| M C C C   | Ingeniero de Telecomunicaciones.        | Interesantes e imprescindibles.                | Importantes.                                   |                        |
| F J S J   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   | Interesantes.                                  | Una herramienta.                               |                        |
| M A M D   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   | Aburridas pero necesarias.                     | Exactas.                                       |                        |
| I L       | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   |                                                | Importantes.                                   |                        |
| M I F D   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   | Imprescindibles.                               | Interesantes.                                  |                        |
| F J M D   | Ingeniero Técnico de Informática        | Precisas.                                      | Necesarias.                                    |                        |
| J A A T E | Ingeniero de Telecomunicación.          | Importantes.                                   | Lo son todo.                                   |                        |
| M M S     | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   | Formativas y prácticas.                        | Prácticas e interesantes.                      |                        |
| A A R     | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   | Interesantes y divertidas.                     | Prácticas.                                     |                        |
| F M B C   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   | Imprescindibles.                               | La pierna que te hace andar.                   |                        |
| F J A M   | Ingeniero Técnico de Telecomunicación   | Necesarias y complejas.                        | Entretenidas.                                  |                        |
| M E A S   | Ingeniero de Telecomunicación.          | Interesantes.                                  | Divertidas.                                    |                        |
| I L P     | Ingeniero Técnico de Informática.       | Complejas e interesantes.                      | Necesarias.                                    |                        |

## Anexo III

|                            |                                   |                                                                  |                                        |                                                                                                                            |
|----------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A N M                      | Ingeniero Técnico de Informática. | Importantes.                                                     |                                        |                                                                                                                            |
| V C S                      | Ingeniero Técnico de Informática. | Necesarias y complejas.                                          |                                        |                                                                                                                            |
| M A T A                    | Ingeniero Técnico de Informática. | Imprescindibles y engorrosas.                                    | Un tostón.                             |                                                                                                                            |
| J D C F                    | Ingeniero Informático.            | Concretas.                                                       | Una parte importante del conocimiento. |                                                                                                                            |
| M B T M                    | Ingeniero de Telecomunicación.    | Enigmas.                                                         | Ingenio.                               |                                                                                                                            |
| J A C D                    | Ingeniero de Telecomunicación.    | Imprescindibles.                                                 | Curiosas.                              |                                                                                                                            |
| I M A                      | Educación Infantil                | Entretenidas, hay que pensar bastante.                           | Aburridas pero muy necesarias.         |                                                                                                                            |
| C M M C                    | Educación Infantil                | Divertidas.                                                      | Algo muy importante.                   |                                                                                                                            |
| M D G N                    | Ingeniero de Telecomunicación.    | Útiles e imprescindibles.                                        | Imprescindibles.                       |                                                                                                                            |
| A J P V                    | Ingeniero de Telecomunicación.    | Precisas y tediosas.                                             | Una ciencia.                           |                                                                                                                            |
| J J J                      | Educación Infantil                | Feas.                                                            | Entretenidas.                          |                                                                                                                            |
| N C V                      | Educación Infantil                | Entretenidas y aburridas a veces.                                | Difíciles.                             |                                                                                                                            |
| C R R B                    | Educación Infantil                | Imprescindibles.                                                 | Parte de la vida diaria.               |                                                                                                                            |
| E V R M                    | Educación Infantil                | Imprescindibles, precisas, formativas y prácticas.               | Interesantes.                          |                                                                                                                            |
| G H G                      | Ingeniero de Telecomunicación.    | Necesarias.                                                      | Imprescindibles.                       |                                                                                                                            |
| F H M R                    | Ingeniería Industrial.            | Imprescindibles.                                                 | Necesarias.                            | Ganas de enseñar.                                                                                                          |
| I L P                      | Ingeniero Técnico Industrial.     | Interesantes.                                                    | Imprescindibles.                       |                                                                                                                            |
| M A T A                    | Ingeniero Técnico de Informática. | Imprescindibles y precisas.                                      | Un tostón.                             |                                                                                                                            |
| M A C M                    | Ingeniero de Telecomunicación.    | Necesarias.                                                      |                                        |                                                                                                                            |
| A I C C                    | Educación Primaria.               | Muy útiles y prácticas.                                          | Divertidas cuando se entienden.        | Hay que conocer la práctica de las Matemáticas.                                                                            |
| José Manuel Rosas Delgado  | Educación Infantil.               | Pesadas cuando no se entienden y divertidas cuando se entienden. | En general difíciles.                  | Se debe conocer el entorno y se han de dar Matemáticas de forma funcional, es decir, que le encuentren uso a lo que hacen. |
| Cheniber Othmane           | Ingeniería Informática.           | La base de todas las ciencias.                                   |                                        |                                                                                                                            |
| Manuel Mayorga Romero      | Ingeniería Industrial.            | Perfectas y exactas.                                             | El apoyo de la Ciencia.                | Cuanto más sepa el profesor, mejor para los alumnos.                                                                       |
| Ángel Pérez Jiménez        | Ingeniería Industrial.            | Necesarias.                                                      | Importantes.                           |                                                                                                                            |
| Antonio J. López Rodríguez | Ingeniería Industrial.            | Precisas.                                                        | Imprescindibles.                       |                                                                                                                            |

|                             |                                 |                                           |                                                                         |                                                                                                                                         |
|-----------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Guadalupe Monje Loro        | Ingeniería Informática.         | Imprescindibles y necesarias.             | Necesarias, ya que aparecen siempre en cualquier momento del día a día. |                                                                                                                                         |
| Javier Guerrero García      | Ingeniería Técnica Informática. | Precisas e interesantes.                  | Precisas.                                                               |                                                                                                                                         |
| Juan Antonio López González | Ingeniería Industrial.          | Útiles.                                   | Exigentes.                                                              |                                                                                                                                         |
| José Luís Rubio Cid         | Ingeniería Técnica Industrial.  |                                           |                                                                         | Sobre todo debes conocer el desarrollo intelectual del niño y sus límites. Ha sido mi mayor problema a la hora de proponer actividades. |
| Ana Vanesa García Ramírez   | Educación Infantil.             | Formativas, imprescindibles y atractivas. | Fundamentales.                                                          |                                                                                                                                         |