Dinámica lógica de la información y la comunicación: un programa de investigación interdisciplinar

Angel Nepomuceno Fernández
Grupo de Lógica, Lenguaje e Información.
Universidad de Sevilla

Programa de Doctorado Estudios Avanzados en Humanidades
Universidad de Málaga
10/12/2014

Indice

Esquema de Historia de la Lógica

Un esquema para resumir la historia de la lógica:

1. **Lógica tradicional**, desde Aristóteles hasta el XVIII
   1. Asitóteles,
   2. Lógica medieval
   3. Lógica de *Port Royal*
2. **Transición**: Leibniz
3. **Matematización de la lógica**, desde el siglo XIX hasta el presente
   1. Tradición algebraica
   2. Fundamentistas
   3. Giro dinámico

Algunas contribuciones

Se pueden señalar múltiples contribuciones en las distintas etapas

1. **Lógica tradicional**: la silogística.
2. **Lógica medieval**:
    1. distinción entre términos categoremáticos y términos sincategoremáticos,
    2. la teoría de la suposición (*suppositio*, sobre todo en Ockham y Pedro Hispano)
    3. la teoría de la consecuencia
3. **Leibniz**: desarrolló un cálculo simbólico (interpretable de diversas maneras)

Punto de inflexión: Leibniz

Cálulo de Leibniz (interpretable en sentido proposicional o como cálculo de clases):

- $A = B$ (identidad);
- $A = B$ **syss** $B = A$ (conmutatividad de $=$);
- **Si** $A = B$ **y** $B = C$**, entonces** $A = C$ (transitividad de $=$);
- Operación: $B \oplus N = L$ (expresa que B y N constituyen L);
- **Axiomas**:
  1. $B \oplus N = N \oplus B$ (conmutatividad de $\oplus$);
  2. $A \oplus A = A$ (idempotencia de $\oplus$).

Tradición algebraica I

Boole presenta la lógica como un **álgebra general**. Algunas reglas simbólicas:

1. $x(y+z) = xy + xz$
2. $xy = yx$
3. $x^n = x$
4. $x(1-x) = 0$ **[Los x que son no-x: la clase nula]**
5. $(1-x) + x = 1$ **[Los x junto con los no-x: el universo]**

Tradición algebraica II

Representación de las formas canónicas de la proposición categórica:

1. $x(1-y)=0$ o bien $x=vy$ **Todo X es Y [A]**
2. $xy=0$ o bien $x=v(1-y)$ **Ningún X es Y [E]**
3. $v=xy$ o bien $vx=vy$ **Algún X es Y [I]**
4. $v=x(1-y)$ o bien $vx=v(1-y)$ **Algún X no es Y [O]**

Bolzano

1. Las proposiciones se pueden descomponer en **constituyentes generales**. Distinción de vocabularios fijo y variable
2. Reconocimiento de diversas formas de **deducibilidad** (general, estricta, estadística, etc.). Para un vocabulario variable A, φ **es deducible** desde (las premisas) Γ, en símbolos $\Gamma \Rightarrow_A \varphi$ si
   1. Γ es consistente
   2. cada instancia de sustitución de A para la que (cada premisa de) Γ es verdadera, φ es verdadera
3. $\Rightarrow_A$ verifica:

si $\varphi_1, ..., \varphi_k, ...\varphi_n \Rightarrow_A \psi$, **entonces** $\varphi_k, ...\varphi_n \Rightarrow_A \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_{k-1} \rightarrow \psi$

Inicios de un nuevo paradigma

Paul Gochet:

> *The invention of game-theoretic semantics by J. Hintikka in the seventies (Hintikka 1973, Saarinen 1979) can be described as the emergence of a new paradigm not only for semantics but also for logic and the philosophy of mathematics*
>
> *(The Dynamic Turn in Twentieth Century Logic Synthese 130: 175-184, 2002)*

Lógicas no clásicas

El giro dinámico propicia el desarrollo de las lógicas no clásicas.

- Bajo este rótulo se incluyen, entre otras,
  - **Lógica Modal**. Más bien, familia de *lógicas modales*. En principio, aparecen como extensiones de lógica clásica
  - **Lógica Epistémica**. De la familia de las lógicas modales, entendiendo los operadores modales con carácter epistémico (también cabe hablar de *lógica doxástica*)
  - **Lógicas Intuicionista** y **Paraconsistente**
  - **Lógica Dinámica**. Estudia razonamientos sobre hechos y acciones

Producto/proceso 1/2

Origen de los computadores modernos: diseño de máquinas de deducción lógica.

- Se estudiaban proposiciones e inferencia: lenguajes y modelos semánticos (que representan información)
- **Inferencia = proceso** de generación de información.
- Otros mecanismos:
  - plantear cuestiones
  - dar respuestas
  - comunicación en general

Para trabajar con todo este espectro: interacción de estructuras estáticas y dinámicas

Producto/proceso 2/2

¿Es lo mismo afirmar *llegué cansado, leí el periódico, cené y me acosté* que *llegué cansado, cené, me acosté y leí el periódico*? **¿**$l \wedge p \wedge c \wedge a = l \wedge c \wedge a \wedge p$**?**. Los procesos no pueden ser estudiados sin representaciones y el diseño de una buena representación depende de su uso:

- La representación de la información **no** se puede separar de los procesos que usan y transforman esta información.
- A medida que se afianza el **giro dinámico**, la lógica moderna pone como escenario central de sus actividades
  - argumentación (general)
  - inferencia (científica)
  - evaluación
  - revisión de creencias

Problema del camarero 1/3

- **Problema del camarero**: tres amigos piden en un bar vino (A), cerveza (B) y gin tonic (C). El camarero sólo anota A, B, y C. Cuando trae el pedido, para servir a cada uno puede preguntar quién ordenó A, luego quién ordenó B, pero no necesita preguntar quién ordenó C. Sirve correctamente a cada cual lo que había pedido.
  - Esta acción es representable por el secuente

$$A \vee B \vee C, \neg A, \neg B \Rightarrow C$$

  - Pero si se subraya solamente la **deducción**, no estamos representando el resto del proceso, en el que también ha habido **comunicación** y **observación**. Cuando el camarero tiene suficientes datos, entonces obtiene la solución explícita ¿Corresponde a la Lógica dar cuenta de todo el proceso?

Problema del camarero 2/3

Analicemos el proceso:

- Sean: 1=vino, 2=cerveza, 3=gin tonic y los amigos a, b, c. Las distribuciones posibles (estados) son:

$s_1 = \boxed{(a,1),(b,2),(c,3)}$

$s_2 = \boxed{(a,1),(b,3),(c,2)}$

$s_3 = \boxed{(a,2),(b,1),(c,3)}$

$s_4 = \boxed{(a,2),(b,3),(c,1)}$

$s_5 = \boxed{(a,3),(b,1),(c,2)}$

$s_6 = \boxed{(a,3),(b,2),(c,1)}$

Problema del camarero 3/3

- Supongamos que s_1 es la distribución exacta. Las letras proposicionales del secuente representan:
  - $A = \{s_3, s_4, s_5, s_6\}$
  - $B = \{s_2, s_3, s_4\}$
  - $C = \{s_1\}$
- Tras la respuesta a la primera pregunta, descarta A ($\neg A$ es la segunda premisa), queda:

  $s_1 = \boxed{\text{(a,1),(b,2),(c,3)}}$ y $s_2 = \boxed{\text{(a,1),(b,3),(c,2)}}$

- Después ($\neg B$ tercera premisa): $s_1 = \boxed{\text{(a,1),(b,2),(c,3)}}$
- No hace falta una tercera pregunta: la respuesta resultaría equivalente a la conclusión C (el estado de información actualizado con las premisas ya no cambia)

La reunión consistente

–Si asiste el decano o el vicerrector, asiste el director del departamento: $d \vee v \rightarrow t$;
–si no asiste el decano, entonces asiste el vicerrector: $\neg d \rightarrow v$;
–si asiste el vicerrector, no asiste el director: $v \rightarrow \neg t$.
Estado de información inicial (8 opciones):

$$\{dvt, dv\neg t, d\neg vt, \neg dvt, d\neg v\neg t, \neg dv\neg t, \neg d\neg vt, \neg d\neg v\neg t\}$$

Actualizaciones desde el estado inicial:

1. $d \vee v \rightarrow t$ Nuevo estado $\{dvt, d\neg vt, \neg dvt, \neg d\neg vt, \neg d\neg v\neg t\}$
2. $\neg d \rightarrow v$ Nuevo estado $\{dvt, d\neg vt, \neg dvt\}$
3. $v \rightarrow \neg t$ Nuevo estado $\{d\neg vt\}$

A partir de los datos, lo consistente es que asistan el decano y el director del departamento, pero no el vicerrector

Interacción de información

- 1, 2, 3 son de un jurado que debe elegir entre A y B. Escriben una nota con su voto y el secretario (ninguno de ellos) las ve y dice **"no hay consenso"**. Entonces 2 muestra a 1 su voto y dice que no conoce el resultado, pero 3 ¡si lo sabe!: puesto que el voto de 3 coincide con uno de los otros dos.
- Si 1 conoce la clave de la cuenta de 2, pero sabe que 2 conoce que 1 conoce la clave de la cuenta de 2, entonces (si no quiere tener problemas) no hará uso de ella:
  $sabe(1, clave_2)$;
  $sabe(2, sabe(1, clave_2))$;
  $sabe(1, sabe(2, sabe(1, clave_2)))$

Escenario $s - m$

s representa "llueve en Sevilla"; m "llueve en Málaga", y que no lo hace $\neg s$ y $\neg m$, respectivamente. Para este escenario y los agentes 1 y 2, de Sevilla y Málaga, se puede definir el modelo:

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft sm & \leftarrow 1 \rightarrow & s\neg m \circlearrowleft \\ 2 \updownarrow & & 2 \updownarrow \\ \circlearrowleft \neg sm & \leftarrow 1 \rightarrow & \neg s\neg m \circlearrowleft \end{array}$$

Se señalan los estados posibles para 1 y para 2 (cada estado es accesible desde sí mismo): nótese que si no llueve en Sevilla (donde está 1), $sabe(1, \neg s)$ es verdadero y $sabe(1, \neg m)$ falso. Más información reduce los estados posibles.

Juegos lógicos

Surgen varias propuestas para entender las tareas lógicas en forma de juegos, con lo que las nociones lógicas básicas emergen uniformemente como estrategias ganadoras en diversos escenarios

1. **Hintikka** (GTS): evaluación de juegos entre **Verificador** y **Falsificador** teniendo en cuenta un modelo
2. **Ehrenfeucht-Fraïssé**: juegos entre **Duplicador** y **Estropeador** (*spoiler*) que comparan modelos
3. **Lorenz-Lorenzen**: juegos de diálogos de argumentación entre un **Proponente** y un **Oponente**

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	
	¿Cuantas mitades recorre?

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	
	¿Cuantas mitades recorre?
Infinitas mitades	

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	
	¿Cuantas mitades recorre?
Infinitas mitades	
	Su suma ¿Es cantidad finita?

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	
	¿Cuantas mitades recorre?
Infinitas mitades	
	Su suma ¿Es cantidad finita?
No puede serlo	

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	
	¿Cuantas mitades recorre?
Infinitas mitades	
	Su suma ¿Es cantidad finita?
No puede serlo	
	Recorre distancia finita e infinita

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	
	¿Cuantas mitades recorre?
Infinitas mitades	
	Su suma ¿Es cantidad finita?
No puede serlo	
	Recorre distancia finita e infinita
Es contradictorio	

Argumento de Zenón de Elea

Heráclito	*Zenón*
Existe el movimiento	No lo hay. Pero lo acepto como supuesto
	Un móvil ¿Recorre una distancia?
Si	
	Antes ¿Recorrerá la mitad?
Así ha de ser	
	Y antes ¿La mitad de la mitad?
En efecto	
	¿Cuantas mitades recorre?
Infinitas mitades	
	Su suma ¿Es cantidad finita?
No puede serlo	
	Recorre distancia finita e infinita
Es contradictorio	
	Supuesto falso. No hay movimiento

Propuesta de una lógica dialógica

Se puede decir que existe una relación entre los diálogos y las reglas de razonamiento correcto (dialéctica, obligationes, etc.). A Mediados del XX, P. Lorenzen puso en relación diálogos y fundamentos constructivos de la lógica.

Diálogo

Un diálogo D sobre una proposición (fórmula) A –$D(A)$–, comienza con A afirmada por un jugador, y alcanza una posición final con victoria o derrota después de un **número finito** de movimientos de acuerdo con reglas definidas.

La noción **dialógica** de **demostración** descansa en esta noción de juego

Estructura de un juego dialógico

En el diálogo participan un **proponente (P)** y un **oponente (O)**, que discuten una tesis siguiendo ciertas **reglas**, ejecutando los movimientos de **ataque** o de **defensa**. Las reglas se dividen en

1. **Estructurales**, que determinan el curso general del juego dialógico
2. **De partícula** (de las constantes lógicas), que muestran qué movimientos están autorizados para **atacar** los movimientos del otro jugador o **defender** los propios movimientos

Reglas estructurales I

1. **R. Inicial**: la fórmula es afirmada por **P**. Alternativamente habrá movimientos de **P** y de **O**. Cada movimiento que sigue al inicial es un **ataque** o una **defensa**
2. **R. Situación**: **P** y **O** sólo puede hacer movimientos que cambien la situación
3. **R. Formal**: **P** no puede introducir fórmulas atómicas, salvo que previamente la haya afirmado **O**
4. **R. Ganancia**: **X** gana syss es el turno de **Y** pero éste no puede hacer ningún movimiento

Reglas estructurales II

Inicialmente, los juegos de diálogo de Lorenzen-Lorenz estaban inspirados en lógica intuicionista. Pero se puede optar por una de las siguientes reglas como última regla estructural:

1. **R. Intuicionista**: en cada movimiento, cada jugador puede atacar una fórmula compleja afirmada por el otro o puede defenderse contra el último ataque que no ha sido aún defendido
2. **R. Clásica**: en cualquier movimiento un jugador puede atacar una fórmula compleja afirmada por el otro o puede defenderse contra cualquier ataque (incluyendo aquellos que ya han sido defendidos)

Reglas de partícula

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall x, \exists x$	*Ataque*	*Defensa*
$\neg A$	A	$\otimes$ Sin defensa, sólo contraataque
$A \wedge B$	$?I$ $?D$	A B
$A \vee B$	$?$	A (o B)
$A \rightarrow B$	A	B
$\forall x A$	$?a_n$ (escoge el atacante)	$A(x/a_n)$
$\exists x A$	$?$	$A(x/a_n)$ (escoge el defensor)

Ejemplos 1/8

Fórmula proposiconal $p \vee \neg p$, con regla intuicionista

	O	**P**
0		$p \vee \neg p$
1	?	
2		$\neg p$
3	p	

Aquí gana **O**. Nótese que tras el ataque de **O** en 3, **P** no puede hacer ningún movimiento.

Ejemplos 2/8

Ahora $p \vee \neg p$, con regla clásica

	O	**P**
0		$p \vee \neg p$
1	?	
2		$\neg p$
3	p	
4		p

Aquí gana **P**, quién, de acuerdo con la regla clásica, en 4 vuelve a defender el ataque de **O** en 1, y afirma p, ya que había sido afirmada antes por **O** en 3

Ejemplos 3/8

Fórmula $\neg\neg p \rightarrow p$, con regla intuicionista

	O	**P**
0		$\neg\neg p \rightarrow p$
1	$\neg\neg p$	
2		$\neg p$
3	p	

Aquí gana **O**, pues su último ataque, en 3, no puede ser respondido por **P**, y el anterior ataque (en 1) ya había sido respondido

Ejemplos 4/8

Fórmula $\neg\neg p \rightarrow p$, con regla clásica

	O	**P**
0		$\neg\neg p \rightarrow p$
1	$\neg\neg p$	
2		$\neg p$
3	p	
4		p

Aquí gana **P**, que respondió al ataque de **O** en 1 con el contraataque de 2; y al haber atacado **O** en 3 con p, **P** puede volver a responder al ataque de 1 con p

Ejemplos 5/8

Fórmula $\neg\neg(p \vee \neg p)$, con regla clásica

	O	**P**
0		$\neg\neg(p \vee \neg p)$
1	$\neg(p \vee \neg p)$	
2		$p \vee \neg p$
3	?	
4		$\neg p$
5	p	
6		$p \vee \neg p$
7	?	
8		p

Gana **P**: el ataque de **O** en 3 tuvo como respuesta 4, y el de 7, dado que **O** afirma p en 5, es respondido en 8 con la misma p

Ejemplos 6/8

Fórmula $\exists x(Px \to \forall y Py)$, con regla clásica

m	**O**	r_O	r_P	**P**	m
				$\exists x(Px \to \forall y Py)$	0
1	?	0	1	$Pa \to \forall y Py$	2
3	Pa	2	3	$\forall y Py$	4
5	$?_b$	4	5	Pb	8
7	Pb	6	1	$Pb \to \forall y Py$	6

m = orden de jugada; r_X= jugada a la que responde **X**;

P gana. Tras la jugada 5 (ataque de **O**, con b, nueva constante), **P** (en la jugada 6) responde por segunda vez al ataque de la juagada 1; después, tras la jugada 7 de **O**, **P** afirma Pb en la jugada 8, respondiendo así al ataque de 5.

Ejemplos 7/8

Fórmula $\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$, con regla clásica

m	**O**	r_O	r_P	**P**	m
				$\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$	0
1	$\exists x \forall y Rxy$	0	1	$\forall y \exists x Rxy$	2
3	$?_a$	2	3	$\exists x Rxa$	4
5	?	4	1	?	6
7	$\forall y Rby$	6	1	?	8
9	$\forall y Ray$	8	9	$?_a$	10
11	Raa	10	5	Raa	12

P gana

Ejemplos 8/8

Otro juego con la misma fórmula inicial (y regla clásica)

m	**O**	r_O	r_P	**P**	m
				$\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$	0
1	$\exists x \forall y Rxy$	0	1	?	2
3	$\forall y Ray$	2	3	$?_a$	4
5	Raa	4	1	$\forall y \exists x Rxy$	6
7	$?_b$	6	7	$\exists x Rxb$	8
9	?	8	3	$?_b$	10
11	Rab	10	9	Rab	12

P gana

El programa de *dinámica lógica* (van Benthem) 1/3

Es un programa de investigación que ha sido sugerido a través de los ejemplos examinados:

Programa de investigación

El programa de investigación de *dinámica lógica* se plantea la identificación de una amplia colección de procesos informacionales y su incorporación explícita en la teoría lógica, no como un conjunto de elementos meramente didácticos acerca de sus conceptos y resultados, sino con carta de ciudadanía de primera clase.

El programa de *dinámica lógica* (van Benthem) 2/3

Así pues, en el intrincado mundo cognitivo, de interés para diversas disciplinas, la Lógica, en resumen, se ocupará de estudiar los invariantes subyacentes en los procesos informacionales, a partir de una noción amplia de **racionalidad**:

1. Ser racional es **razonar** inteligentemente
2. El conocimiento emerge a través de preguntas, observación e inferencias
3. Ser racional es **actuar** inteligentemente
4. Ser racional es **interactuar** inteligentemente

El programa de *dinámica lógica* (van Benthem) 3/3

Fuentes de la dinámica lógica

Se nutre de ideas procedentes, entre otras áreas, de

- la lógica,
- la filosofía,
- la lingüística,
- Ciencias de la Computación
- la teoría de juegos

La lógica misma, tras el giro dinámico, es **interdisciplinar** e incide en ese carácter interdisciplinar de la agenda de la dinámica lógica.

Sistemas lógicos y dinámica lógica 1/5

El giro dinámico en lógica y semántica ha inspirado la **Lógica Epistémica Dinámica** (LED), como parte esencial del mismo:

1. El aparato formal es similar al de la lógica dinámica proposicional (y cuantificada), así como al de la semántica de actualización
2. En Inteligencia Artificial se ha desarrollado una lógica temporal epistémica (para modelar cambio de información en sistemas multiagente)
3. Los desarrollos de LED comienzan con la lógica de anuncios públicos

Sistemas lógicos y dinámica lógica 2/5

En LED, hay **información factual** e información de orden superior (sobre la **información de otros**). Lenguaje básico:

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \chi \mid \varphi \wedge \chi \mid \varphi \rightarrow \chi \mid K_a\varphi \mid [\varphi]\chi;$$

de manera que

1. $p \in \mathcal{P}$, un conjunto de variables proposicionales,
2. $\bot$ es una constante proposicional (contradicción)
3. $K_a\varphi$ representa *el agente a conoce* φ; $a \in G$, el conjunto de todos los agentes
4. $[\varphi]\chi$ indica que *tras cada anuncio de* φ, χ *es el caso*

Sistemas lógicos y dinámica lógica 3/5

Un modelo $M = \langle W, \{\mathfrak{R}_a : a \in G\}, v\rangle$, donde

1. $W \neq \emptyset$ es el conjunto de estados (mundos)
2. $\{\mathfrak{R}_a : a \in G\}$ es un conjunto de relaciones definidas en W para cada individuo $a \in G$
3. $v : \mathcal{P} \mapsto \wp(W)$, asigna a cada variable proposicional el conjunto de estados (mundos) en los que vale la viariable, tal que
    1. $v(\perp) = \emptyset$
    2. $v(p) \in \wp(W)$ –o, lo que es lo mismo, $v(p) \subseteq W$–

Sistemas lógicos y dinámica lógica 4/5

Para modelar los *anuncios*, se prescinde de los estados en que lo anunciado es falso. La semántica para LED con anuncios públicos se completa, dados $M = \langle W, \{\mathfrak{R}_a : a \in G\}, v\rangle$ y $s \in W$:

1. $M, s \models p$ syss $s \in v(p)$
2. $M, s \not\models \bot$
3. $M, s \models \neg\varphi$ syss $M, s \not\models \varphi$ (y lo usual para las demás conectivas)
4. $M, s \models K_a\varphi$ syss $M, w \models \varphi$ para todo $w \in W$ tal que $\langle s, w\rangle \in \mathfrak{R}_a$
5. $M, s \models [\varphi]\chi$ syss $M, s \models \varphi$ implica que $M|\varphi, s \models \chi$

Sistemas lógicos y dinámica lógica 5/5

En general, dado $M = \langle W, \{\mathfrak{R}_a : a \in G\}, v\rangle$, se define

$$M|\varphi = \langle W', \{\mathfrak{R}'_a : a \in G\}, v'\rangle$$

tal que

1. $W' = \{s \in W : M, s \models \varphi\}$
2. $\mathfrak{R}'_a = \mathfrak{R}_a \cap (W' \times W')$, para cada $a \in G$
3. $v'(p) = v(p) \cap W'$, para cada $p \in \mathcal{P}$

Axiomática 1/2

LED es una lógica multimodal –K_a y $[\varphi]$ son operadores modales, cuyos duales son definibles: $\hat{K}_a$ y $\langle\varphi\rangle$–. Algunos axiomes de interés:

1. $K_a(\varphi \to \chi) \to (K_a\varphi \to K_a\chi)$ **Normalidad (axioma $\mathcal{K}$)**
2. $K_a\varphi \to \varphi$ **Verdad (*lo conocido es el caso*)**
3. $K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$ **Intrsopección (+)**
4. $\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$ **Introspeccin (-)**

Reglas:

- *Modus ponens*
- Necesitación:

$$\frac{\vdash \varphi}{\vdash K_a\varphi}$$

Axiomática 2/2

Para anuncios públicos:

1. $[\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$ **Permanencia atómica**
2. $[\varphi]\neg\chi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\varphi]\chi)$ **Anuncio y $\neg$**
3. $[\varphi](\chi \wedge \psi) \leftrightarrow ([\varphi]\chi \wedge [\varphi]\psi)$ **Anuncio y $\wedge$**
4. $[\varphi]K_a\chi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_a[\varphi]\chi)$ **Anuncio y conocimiento**
5. $[\varphi][\chi]\psi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\chi]\psi$ **Composición de anuncios**

Conocimiento de grupos y conocimiento común

Sea un conjunto de agentes $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$, para representar que todos y cada uno de los agentes conocen φ, se define un nuevo operador:

$$K_{a_1}\varphi \wedge ... \wedge K_{a_n}\varphi = \bigwedge_{a_i \in \mathcal{A}} K_{a_i}\varphi = E_{\mathcal{A}}\varphi$$

Se puede iterar este operador: $E_{\mathcal{A}}\varphi$, $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{A}}\varphi = E^2_{\mathcal{A}}\varphi$, etc. Entonces el **conocimiento común** se define como

$$C_{\mathcal{A}}\varphi = \bigwedge_{n=0}^{\infty} E^n_{\mathcal{A}}\varphi$$

Conocimiento distribuido

Dos agentes *a* y *b* conocen respectivamente φ y $\varphi \rightarrow \chi$, aunque explícitamente no lo saben, implícitamente, entre los dos, conocen χ. Para su formalización se utiliza un nuevo operador

$$\text{Si}\ \ K_a\varphi \wedge K_b(\varphi \rightarrow \chi),\ \text{entonces}\ \ D_{\{a,b\}}\chi$$

En general, dado que $\varphi, \chi \vdash \psi$,

$$\text{Si}\ \ K_a\varphi \wedge K_b\chi,\ \ \text{entonces}\ \ D_{\{a,b\}}\psi$$

Semántica de los nuevos operadores

A partir de las relaciones de accesibilidad $R_a, a \in G$:

$$R_{E_G} = \bigcup_{a \in G} R_a; \; R_{D_G} = \bigcap_{a \in G} R_a$$

$R^*_{E_G}$ es la **clausura reflexiva transitiva** de R_{E_G}. Entonces, para $M = \langle W, \{R_a : a \in G\}, v \rangle$:

1. $M, s \models E_G\varphi$ syss para todo $w \in W$ tal que $\langle s, w \rangle \in R_{E_G}$, $M, w \models \varphi$
2. $M, s \models D_G\varphi$ syss para todo $w \in W$ tal que $\langle s, w \rangle \in R_{D_G}$, $M, w \models \varphi$
3. $M, s \models C_G\varphi$ syss para todo $w \in W$ tal que $\langle s, w \rangle \in R^*_{E_G}$, $M, w \models \varphi$

Extensiones de LED

LED ha sido extendida en varios sentidos:

1. Como variantes, se han introducido operadores para **cambio factual** y de **pasado** para lógica temporal
2. Se han estudiado **modelos de eventos**
3. LED se ha combinado con **probabilidad**,
4. Se ha estudiado la relación de LED con la **revisión de creencias** (en particular con el modelo AGM)
5. LED se ha usado para el estudio de puzzles y paradojas tanto en matemáticas (creativas) como en filosofía

LED y la revisión de creencias 1/4

Dada una creencia, se puede cambiar y llegar a creer lo opuesto (tal vez lo inicial no se creía firmemente): ¿Se puede pasar, entonces, de $K_a p$ a $K_a \neg p$? Para creencia es mejor usar un nuevo operador: $B_a \varphi$: *el agente a cree que* φ. La revisión de creencias se ha estudiado:

1. Desde la perspectiva de las **propiedades estructurales** del razonamiento sobre creencias
2. Desde la perspectiva de cambiar, aumentar o reducir las bases de conocimiento

LED y revisión de creencias 2/4

1. Desde LED se desarrolla una *lógica doxástica dinámica* (con operador de creencia).
2. En el modelo AGM, para el lenguaje L, a partir de una base de conocimientos Θ (cerrada bajo consecuencia) y una fórmula φ, hay tres operaciones epistémicas:
   1. **Expansión**: $\Theta + \varphi = \{\chi \in L : \Theta, \varphi \vdash \chi\}$
   2. **Contracción**: $\Theta' = \Theta \setminus \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, tal que $\Theta' \nvdash \varphi$
   3. **Revisión**: $\Theta * \varphi = (\Theta \setminus \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}) + \varphi$, para $\Theta \setminus \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \nvdash \neg\varphi$.

Identidad de Levi: $\Theta * \varphi = (\Theta - \neg\varphi) + \varphi$

LED y revisión de creencias 3/4

Mediante LED, se pueden introducir nuevos operadores modales para las operaciones epistémicas, a partir de Θ consistente (no necesariamente cerrado bajo consecuencia):

1. $[+\varphi]\chi$: tras cada **expansión** con φ, χ es el caso
2. $[-\varphi]\chi$: tras cada **contracción** con φ, χ es el caso

Para la revisión se puede emplear la Identidad de Levi:

$$[*\varphi]\chi = [-\neg\varphi][+\varphi]\chi$$

Como operadores modales, son definibles sus duales, para $\# \in \{-, +, *\}$

$$\langle\#\varphi\rangle\chi = \neg[\#\varphi]\neg\chi$$

LED y revisisión de creencias 4/4

Semánticamente, sea un conjunto consistente de fórmulas Θ, para un modelo M tal que $M \models \Theta$,

1. $M, s \models [+\varphi]\chi$ syss $M, s \models \varphi$ implica que $M|\varphi, s \models \chi$ ($M|\varphi$ es el modelo restringido a φ)
2. $M, s \models [-\varphi]\chi$ syss $M, s \models \varphi$ implica que $M|\varphi, s \models \chi$
3. $M, s \models [*\varphi]\chi$ syss $M, s \models \varphi$ implica que $M|\varphi, s \models \chi$

Proposición de Moore

Es una proposición del tipo $p \wedge \neg Kp$

1. Modelo de 2 mundos: mundo-p (donde p es verdadera) y un mundo-$\neg p$ (con p falsa) indistingubles para el agente
2. Se anuncia $p \wedge \neg Kp$. Queda el mundo en que este es verdadero: el mundo-p (en el mundo-$\neg p$, el anuncio es falso).
3. Al quedar el mundo-p (como p es verdadera), también es verdadero Kp, luego también $\neg p \vee Kp$ lo es.
4. $\neg p \vee Kp \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg Kp)$, así que el anuncio de $p \wedge \neg Kp$ hace que la fórmula sea falsa

¡No puede ser sinceramente afirmada!

Paradoja de Fitch

1. **Hay verdades desconocidas**: $\exists p(p \wedge \neg Kp)$;
2. **Toda verdad es cognoscible**: $\forall p(p \rightarrow \Diamond Kp)$, —$\Diamond$ formaliza la **existencia de un proceso tras el cual se conoce *p***—.
3. De acuerdo con estos principios, tomando la fórmula de Moore como instancia:

$$(p \wedge \neg Kp) \rightarrow \Diamond K(p \wedge \neg Kp)$$

4. Por *mudus ponens* $\Diamond K(p \wedge \neg Kp)$. Pero $K(p \wedge \neg Kp)$ es inconsistente.

Problemas para seguir trabajando 1/2

Algunas líneas (van Benthem):

1. Elaboración de cálculos que incluyan **evidencias** y **razones**
2. Desarrollo de **semántica topológica** para LED (más libertad de expresiones epistémicas, separar diferentes intuiciones sobre conocimiento común, etc.)
3. Desarrollar alguna versión de LED de grupos con canales de comunicación como entidades primitivas
4. Qué lenguaje tendrá el máximo poder expresivo para LED

Problemas para seguir trabajando 1/2

5. Qué meta-teoremas (antiguos o nuevos) de lógica (clásica) de primer orden son más relevantes para un uso comunicativo más que inferencial.
6. Estudio (metateórico) de la información con nuevos operadores modales
7. LED y el método científico (representación de formas de razonamiento científico, inducción, abducción y preducción; contextos, etc.)
8. LED y estudios del lenguaje. Las condiciones de éxito, para hablante S y oyente H, como: S tiene evidencia de la verdad de p; no es evidente que ambos S y H sepan que p; S cree que p.

Bibliografía básica

1. J. van Benthem (2011): *Logical Dynamics of Information and Interaction*. Cambridge University Press.
2. H. van Ditmarsch et al. (2008): *Dynamic Epistemic Logic*, Springer, Synthese Librery, vol. 337.
3. M. Fontaine, J. Redmond (2008): *Logique Dialogique: une introduction*, Volume 1: Méthode de Dialogique: Règles et Exercices, Cahiers de logique et d'Epistémologie Nº3, College Publications.
4. P. Gochet (2002): "The Dynamic Turn in Twentieth Century Logic". *Synthese* 130: 175-184.
5. O. J. Olsson et al. (2011): *Belief Revision meets Philosophy of Science*. Springer, Logic, Epistemology and the Unity of Science, vol. 21