ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO ARITMÉTICO ELEMENTAL EN PRIMARIA

Jesús Gallardo Romero
Universidad de Málaga (España)
gallardoromero@telefonica.net

1. ASPECTOS GENERALES DE LOS PROCESOS ALGORÍTMICOS

1.1 La noción de algoritmo

El término algoritmo procede del nombre del matemático persa Al-Khuwarizmi (783-850), quien con su obra *Libro de la adición y sustracción según el cálculo de los indios* dio a conocer en Europa occidental el sistema de numeración decimal posicional y los métodos de cálculo de origen hindú. La palabra algoritmo debería, por tanto, hacer referencia solamente a esas técnicas calculistas, o también a otras, pero siempre sin perder de vista el campo aritmético. Sin embargo, los límites de la aritmética se han traspasado y hoy en día definiciones como la siguiente son las que se encuentran para *algoritmo*:

"Un algoritmo es una sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a la resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase" (Ifrah, 1998)

Por ejemplo, la construcción clásica con regla y compás de un pentágono regular se ajusta perfectamente a la definición anterior, pero sin duda, es un algoritmo distinto al de la división. Así pues, el concepto asociado a la palabra algoritmo abarca más de lo que en principio se puede suponer. No tiene en cuenta la naturaleza particular de los elementos que intervienen (números, puntos y rectas,...), el tipo de reglas elementales (colocar las cifras en columnas, trazar una perpendicular,...) ni la clase de operaciones ejecutables (realizar una división, construir un pentágono,...). El que haya un número finito de reglas, el orden determinado con el que hay que aplicarlas o el resolver problemas de un mismo tipo, son características vinculadas más a las acciones y al procedimiento en sí que al contenido, y hacen que bajo el término algoritmo se aglutinen muchas más situaciones que las anteriormente mencionadas.

En el ámbito de la Educación Matemática, Usiskin (1998) reconoce la dificultad que supone proponer una caracterización para la noción de algoritmo susceptible de ser aceptada ampliamente por la comunidad de educadores matemáticos. Por un lado, existen procedimientos inmediatos (p.e., la multiplicación de fracciones o los hechos numéricos básicos) tan simples que no queda claro si deberían alcanzar la categoría de algoritmo de lápiz y papel. Por otro lado, en ciertas demostraciones se emplean procesos tan complejos (p.e., demostraciones de sumas por inducción o de congruencias de triángulos) que resulta difícil determinar si los estudiantes, al responder, están aplicando un método ya aprendido o en realidad están resolviendo un problema novedoso.

En cualquier caso, este autor considera a la mayoría de los procedimientos que se presentan en el aula de matemáticas como algoritmos pertenecientes a alguna de las tres categorías siguientes:

(a) Algoritmos aritméticos: como los de columnas para sumar, restar, multiplicar y dividir números de varios dígitos o los métodos para calcular raices cuadradas y cúbicas, para operar con fracciones, para determinar la media aritmética, etc.

(b) Algoritmos de álgebra y cálculo: como los procedimientos para resolver ecuaciones lineales e inecuaciones, manipular fracciones algebraicas, calcular integrales definidas, simplificar radicales, evaluar fórmulas, etc.

(c) Algoritmos de dibujo: como los empleados para hacer gráficos de barras o de sectores, representar funciones, realizar construcciones con regla y compás, encontrar la transformada de imágenes de figuras, etc.

Durante la exposición emplearemos el término algoritmo para referirmos a los métodos de cálculo escritos correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas básicas: adición, sustracción, multiplicación y división. Con las expresiones *algoritmo tradicional*, *algoritmo clásico* o *algoritmo canónico* denotaremos a los métodos estándar de columnas asociados a estas operaciones.

1.2 Procesos algorítmicos y heurísticos

Con la intención de profundizar un poco más en la naturaleza de los procesos algorítmicos en general, exponemos a continuación algunas diferencias con los llamados procedimientos heurísticos:

(a) El uso adecuado de un procedimiento algorítmico garantiza siempre la obtención de una respuesta correcta. Esta garantía es sólo teórica porque aunque se considere al algoritmo como una sucesión finita de reglas, en la práctica el número de pasos a efectuar puede incrementarse en exceso y hacer inviable o, al menos, muy costosa esta tarea. En tal sentido, Maurer (1998) advierte que a veces la garantía de respuesta concluyente se suele pasar por alto para poder considerar también con carácter algorítmico procedimientos de interés que teóricamente podrían permanecer funcionando sin dar una respuesta o que contienen una regla que no puede ser especificada con precisión (p.e., la generación de un número aleatorio).

Por su parte, los métodos heurísticos no aseguran la solución de un problema porque no especifican con exactitud el proceso que permite alcanzarla. El dominio de algunas estrategias heurísticas particulares puede mejorar nuestra habilidad para resolver problemas pero no consigue que tengamos la certeza absoluta de poder llegar a la solución, tal como pasa con los procedimientos algorítmicos. Podemos decir, por tanto, que los algoritmos llevan implícito un determinismo mucho mayor que los métodos heurísticos y esto es lo que facilita la llegada a la solución de un problema.

(b) Este determinismo hace que cada procedimiento algorítmico lleve asociado una colección de problemas de una misma clase que pueden ser resueltos a través de él. Es decir, los procesos algorítmicos sirven para clasificar problemas, diferenciando los que pueden ser resueltos por un algoritmo particular de los que no. Normalmente estos problemas son catalogados como ejercicios ya que el único requerimiento cognitivo para resolverlos consiste en saber cómo funciona el mecanismo del algoritmo (hemos visto en (a) que la puesta en práctica de éste garantiza la solución). Volveremos sobre esta cuestión en el apartado (d).

Sin embargo, estrategias heurísticas como *buscar un problema semejante* o *hacer un diagrama* no están restringidas a ninguna clase particular de problemas. Esto es precisamente lo que da potencialidad al método heurístico: aunque no garantiza la solución, las pautas de actuación que propone pueden ser útiles para resolver la mayoría de los problemas matemáticos que se planteen. En la figura 1 representamos de manera gráfica todas estas ideas:

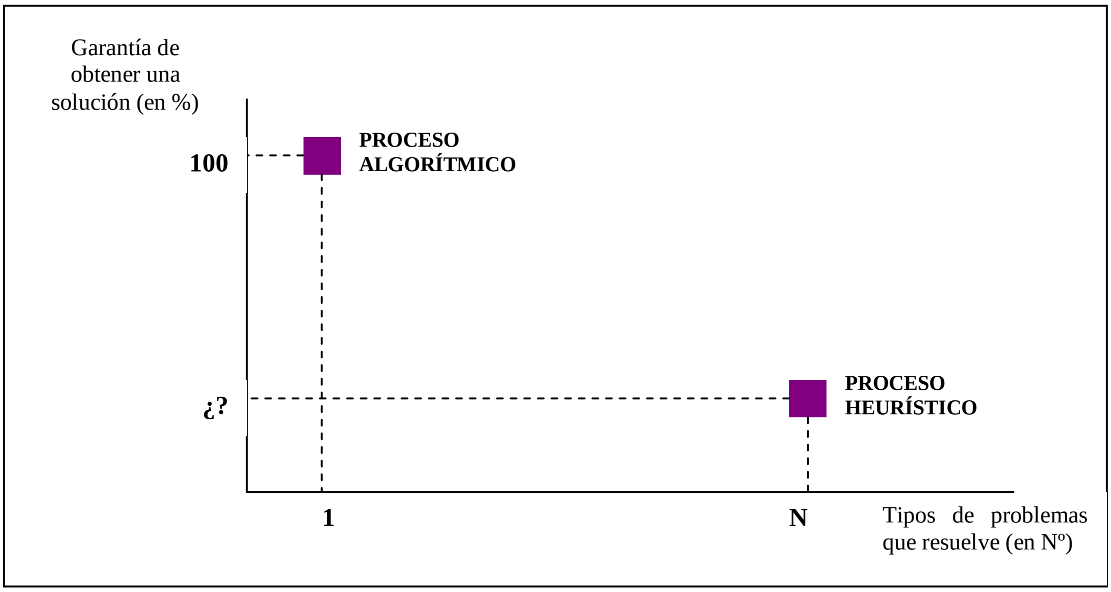


Figura 1.- Situación relativa de los procesos algorítmicos y heurísticos.

(c) En numerosas ocasiones, dentro del procedimiento heurístico seguido para resolver un problema hay una parte que es de naturaleza algorítmica. Generalmente corresponde a una fase de *ejecución del plan* de acuerdo con el modelo de resolución de problemas propuesto por Polya (1965). En cambio, el determinismo en los procesos algorítmicos hace imposible lo contrario, aunque el sujeto que domina un algoritmo cualquiera puede ser capaz, en un momento dado, de reducir algunos pasos en él mediante estrategias de tipo heurístico. Es lo que ocurre con el algoritmo semiautomático de la división (Gómez, 1988), donde es normal utilizar la estimación para elegir las cifras más adecuadas en el cociente.

(d) La diferente naturaleza de los procesos algorítmicos y heurísticos queda aún más patente al considerar el tipo de conocimiento involucrado en ellos. Apoyándonos en la clasificación de Farnham-Diggory (1994) sobre los tipos de conocimiento existentes podemos identificar al conocimiento declarativo y al procedimental como los únicos necesarios para dominar los procesos algorítmicos, mientras que los métodos heurísticos utilizados al resolver un problema requieren de toda clase de conocimiento: declarativo, procedimental, conceptual, analógico y lógico.

Incluso en los alumnos de nivel más bajo en resolución de problemas, donde sus estrategias se reducen básicamente a la representación externa con objetos físicos, Carpenter (1986) señala que estos procedimientos no están automatizados en secuencias fijas de pasos sino que dependen de la naturaleza semántica de cada problema. Por eso afirma que el conocimiento utilizado por el niño en estos casos es más conceptual que procedimental, a pesar de que en un principio la falta de flexibilidad en los métodos haga pensar lo contrario.

Usando terminología propia de la Inteligencia Artificial podemos decir que los procedimientos heurísticos están más cercanos a una conducta inteligente del individuo que los procesos algorítmicos y la complejidad de los primeros frente a los segundos se pone de manifiesto al hablar, no ya de ejercicios, sino de verdaderos problemas.

(e) El empirismo lógico intenta identificar racionalidad con computabilidad algorítmica. Asimismo, Popper considera el descubrimiento y la creatividad como actos de naturaleza irracional, o más exactamente, <<arracional>> (Brown, 1994), haciendo referencia a que no hay ninguna justificación racional para el "insight", propio del método heurístico en resolución de problemas. De acuerdo con esto, el proceso algorítmico sería racional y el heurístico irracional.

Estas ideas son contrarias a las defendidas por Brown (1994). Para este autor, la racionalidad requiere de juicios fundados en la razón humana. "*En tanto que se puedan llevar a cabo las decisiones por medio de algoritmos, la intervención humana deja de ser necesaria* [irracionalidad]*; precisamente cuando no disponemos de ningún procedimiento efectivo que nos guíe debemos apelar a un juicio humano racional e informado* [racionalidad]" (p. 195). Desde este punto de vista, los procesos algorítmicos deben ser entendidos como irracionales mientras que los heurísticos se ajustan más a un comportamiento racional del individuo. Precisamente, la intervención del juicio humano en el procedimiento heurístico hace que éste sea falible, lo que contrasta con la infalibilidad del algoritmo (esto justifica, en parte, el argumento expuesto en el apartado (a)). De todas formas, independientemente de la concepción que podamos tener de *racionalidad*, lo que nos interesa es que ésta puede utilizarse como factor discriminante de los procesos algorítmicos y heurísticos.

1.3 Nociones vinculadas al algoritmo

Antes de concluir este apartado conviene aclarar los significados asociados a algunas de las expresiones relacionadas con el concepto de algoritmo que suelen emplearse en educación matemática.

Maurer (1998) utiliza el término "algorithmics" para referirse al sentido contemporáneo dado a la expresión *matemáticas algorítmicas*. Según él, esta expresión adopta dos significados: uno tradicional que pone de relieve la simple realización o ejecución de algoritmos, y otro, que es el que quiere destacar, que hace referencia al desarrollo y modificación de algoritmos, a su comprensión y a la elección inteligente entre algoritmos diferentes para una misma tarea. Se trata, en definitiva, de pensar sobre los algoritmos y no como ellos.

Por su parte, Mingus y Grassl (1998) determinan el significado de las expresiones *pensamiento algorítmico* y *pensamiento recursivo*, estableciendo la diferencia entre ellos:

" *El pensamiento algorítmico es un método de pensamiento y guía de los procesos de reflexión que utiliza procedimientos paso a paso, precisa entradas y produce salidas de datos, requiere decisiones sobre la calidad y adecuación de la información que llega y de la información que sale, y controla los procesos de reflexión como medio para vigilar y dirigir el proceso de pensamiento. En esencia, el pensamiento algorítmico es simultaneamente un método de pensamiento y un medio para pensar sobre el pensamiento de uno*" (p. 34).

Para estos autores, el modelo más familiar de pensamiento algorítmico lo constituye el modelo de cuatro etapas para la resolución de problemas elaborado por Polya. En cuanto al pensamiento recursivo, afirman:

“[...] es un método de pensamiento paso a paso, interminable, en el que cada paso depende del paso o los pasos que viene inmediatamente antes que él. El pensamiento recursivo es iterativo y autoreferencial” (p. 34).

Precisamente la naturaleza iterativa y autoreferencial del pensamiento recursivo es la característica que lo distingue del algorítmico, a pesar de que ambos proceden paso a paso. Para destacar de forma más clara esta diferencia, en la figura 2 recogemos dos ejemplos de problemas que requieren para su resolución un pensamiento algorítmico y recursivo.

(A) Un vendedor está haciendo un viaje de negocios y debe visitar 4 de las siguientes 6 ciudades: Barcelona, Madrid, Málaga, Sevilla, Valencia y Oviedo. Selecciona cuatro ciudades y determina la ruta más corta para el viajero. (A los estudiantes se les proporciona un mapa con las distancias entre las capitales).

(B) Supongamos que posees baldosas 1x1 y 1x2 para construir caminos de longitud 1xn. ¿Cuántos caminos diferentes puedes crear? [Una baldosa 1x1 seguida de otra 1x2 constituye un camino 1x3 diferente al formato por una baldosa 1x2 seguida de otra 1x1].

Figura 2.- Problemas que requieren para su resolución un pensamiento algorítmico (A) y recursivo (B) (Adaptado de Mingus y Grassl, 1998)

2. UNA POLÉMICA TODAVÍA VIGENTE

Han pasado cinco siglos desde la feroz polémica que tuvo lugar en Europa entre los llamados *abaquistas* (o *abacistas*), partidarios del cálculo con fichas sobre el ábaco y de numeraciones arcaicas como la griega o la romana, y *algoristas*, defensores del cálculo escrito con números de origen hindú. Hubo que esperar a la época de la Revolución Francesa para dejar zanjada la cuestión: las antiguas técnicas de los primeros desaparecieron a favor del cálculo moderno de los segundos, gracias sobre todo a la simplicidad de los métodos desarrollados por los algoristas que permitió su uso a la mayoría de la gente.

En los últimos años la polémica se ha trasladado al ámbito educativo, pero esta vez se juzga el cómo y porqué de la enseñanza de esos algoritmos de lápiz y papel que tan útiles fueron entonces. De hecho, Ramírez y Usón (1996) destacan el paralelismo tan significativo existente entre la disputa surgida siglos atrás y la controversia actual establecida en torno a la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas. Incluso llegan a considerar que la resistencia mostrada en la actualidad por algunas instituciones, entre ellas la escolar, a la hora de abandonar la enseñanza de estos algoritmos es comparable a la posición conservadora adoptada en su día por los abacistas, reacios a olvidar sus métodos de cálculo tradicionales.

En Gómez (1999a) encontramos la justificación histórica de la inclusión de los algoritmos canónicos en los programas de matemáticas oficiales. Tal como señala, la enseñanza del cálculo aritmético según la conocemos hoy en día, con la presencia de las denominadas “cuatro reglas de cálculo”, comenzó a configurarse a principios del siglo XIX.

Hasta esta época, por no haber un currículum obligatorio, estuvieron conviviendo en las escuelas varios métodos de cálculo para una misma operación, siendo el profesor de aula el que debía seleccionar para su enseñanza unos u otros procedimientos de acuerdo a su criterio. Sin embargo, *"[...] al establecerse el sistema general y público de enseñanza, se hizo necesario un programa común para los estudiantes de un mismo nivel educativo, un programa de mínimos que todos debía aprender, y en consecuencia un solo método para cada operación; todos el mismo, el mejor por más general; desde entonces estos algoritmos serán conocidos como << las cuatro reglas>>..."* (p. 22).

Básicamente existen dos posiciones distintas enfrentadas entre sí, una a favor y otra en contra, acerca de la enseñanza actual de estos métodos de cálculo y que también pueden hacerse extensibles a cualquier algoritmo matemático:

(a) Si la matemática tiene como objetivo prioritario resolver problemas y encontrar soluciones a cuestiones cada vez más difíciles, parece que la necesidad de algoritmos está totalmente justificada. Son varias las razones que respaldan esta afirmación. En primer lugar, *"en la matemática se considera resuelta una serie de problemas de un determinado tipo cuando se elabora el algoritmo para su resolución"* (Trajtenbrot, 1977, p.14). En segundo lugar, el progreso en matemáticas exige la automatización de los procesos elementales para concentrar la atención en las nuevas ideas que están aprendiendo, las cuales, a su vez, necesitarán transformarse en automáticas para poder abordar otras más complejas y así sucesivamente (Skemp, 1993). La consecuencia más natural que se extrae de estos argumentos para la aritmética escolar es la de enseñar a los alumnos unos algoritmos que resuelvan las operaciones aritméticas elementales de forma sencilla y automática.

Usiskin (1998) enumera hasta nueve razones diferentes por las que es útil poseer o enseñar algoritmos matemáticos: son eficaces, fiables, precisos, rápidos, proporcionan un registro escrito, establecen una imagen mental, son instructivos (p.e, la construcción con regla y compás del triángulo equilátero exhibe elegantemente propiedades características de lo "equilátero"), pueden ser utilizados en otros algoritmos y pueden ser objetos de estudio (comparación de eficacia, características matemáticas, análisis de velocidad,...).

Entre las ventajas de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas, Hedrén (1998) destaca las siguientes:

- son métodos de cálculo muy efectivos, fruto del proceso de refinamiento que han experimentado durante siglos.
- son procedimientos que pueden ser utilizados siempre del mismo modo por muy complejos que sean los números involucrados en el cálculo.
- constituyen un tesoro cultural que forma parte de la historia de la matemática y que, por tanto, debemos cuidar.

(b) Por otra parte, a pesar e los supuestos beneficios que proporciona la enseñanza de unos algoritmos como los estándar para sumar, restar, multiplicar y dividir, algunos autores (Gómez, 1988; Maza, 1991) afirman que éstos han encontrado en la calculadora, para operaciones con números grandes, y en el cálculo mental, para operaciones con números pequeños, duros adversarios que han terminado por desplazar su posición central en el currículum. En realidad, se viene cuestionando cada vez más la importancia y necesidad real de instruir a los estudiantes en unos procedimientos de cálculo sofisticados, de difícil comprensión y de dudosa utilidad práctica para la vida cotidiana. Si la función principal de estos algoritmos canónicos es la de reducir el esfuerzo mental, existen otros métodos de lápiz y papel más simples de utilizar (p.e., los de rejilla para el producto) aunque ninguno de ellos es comparable a la sencillez, rapidez y eficacia de la calculadora. Si lo que se busca es un aprendizaje comprensivo, existen estudios que muestran la deficiente comprensión que poseen ciertos alumnos de los algoritmos tradicionales así como la elevada capacidad de estos mismos sujetos para inventar y desarrollar procedimientos de cálculo significativos, tanto escritos como mentales.

Por limitaciones como éstas, esta posición defiende que la presencia en el curriculum de los algoritmos de columnas para las cuatro operaciones aritméticas básicas debería limitarse drásticamente hasta, quien sabe, desaparecer por completo.

A decir verdad, la problemática establecida en torno a la enseñanza del cálculo aritmético elemental no se reduce únicamente a una simple discusión entre partidarios y detractores de los algoritmos estándar, sino que constituye una cuestión más compleja donde intervienen todas las manifestaciones del cálculo y las posibles relaciones entre ellas (figura 3). Por ejemplo, Carroll y Porter (1998) se preocupan por distinguir los algoritmos estándar de los de lápiz y papel, dando a entender que los primeros son sólo un subconjunto muy particular de los segundos. De hecho, la diferencia entre ambos queda patente en lo que a su enseñanza se refiere. Así, estos autores hacen algunas observaciones sobre la utilidad que pueden tener los algoritmos escritos en el aula de matemáticas:

(a) Algunos cálculos no son fáciles de realizar mentalmente.

(b) Frente a la calculadora o la estimación mental, los algoritmos escritos constituyen el método más razonable para calcular con números de tamaño medio.

(c) Hay alumnos que tienen dificultades para inventar algoritmos por sí mismos. En estos casos, el aprendizaje de ciertos métodos escritos presentados por el profesor puede ser la alternativa adecuada.

(d) Existen condicionantes institucionales y sociales que hacen que los estudiantes necesiten conocer algunos métodos escritos para cada operación.

Sin embargo, estas justificaciones favorables hacia los métodos de cálculo escritos difieren notablemente de la idea que poseen respecto a la enseñanza de los algoritmos escritos <u>estándar</u>. En concreto, afirman lo siguiente: *"Aunque sea ventajoso para todos los estudiantes conocer al menos un procedimiento escrito para cada una de las operaciones, los algoritmos estándar enseñados en la escuela no son a menudo los más apropiados o comprensibles. Aunque son eficientes, el significado de estos algoritmos estándar... a menudo es confuso para los alumnos que los aprenden sin comprensión"* (p. 107).

Como veremos, los distintos enfoques en la enseñanza del cálculo actual se diferencian precisamente por destacar alguna de sus manifestaciones en detrimento de otras (p.e., el cálculo mental sobre el escrito y la calculadora) y por el modo de abordarlas y relacionarlas entre sí.

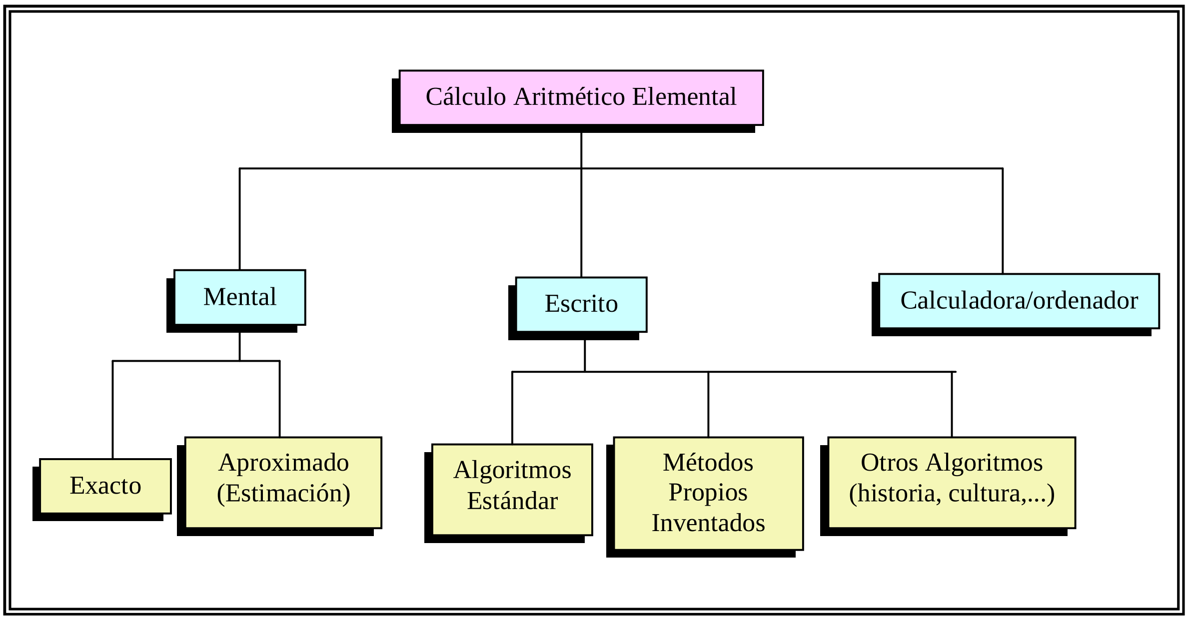


Figura 3.- Cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones

3. ERRORES EN CÁLCULO ARITMÉTICO ELEMENTAL

En general el tiempo que se dedica en las aulas de matemáticas de Primaria a enseñar algoritmos de cálculo es bastante extenso. No obstante, suelen aparecer estudiantes en este nivel e incluso en Secundaria que a pesar de la instrucción recibida continúan cometiendo errores cada vez que utilizan estos métodos (Dickson, Brown y Gibson, 1991; Kamii, 1995). Esta circunstancia ha llevado a algunos investigadores a analizar los tipos de errores producidos, a establecer diferentes clasificaciones para ellos e incluso a proponer teorías explicativas de los procesos de razonamiento que siguen los alumnos cuando inventan procedimientos de cálculo incorrectos. En Gómez (1999b) podemos encontrar una extensa recopilación de referencias bibliográficas que hacen mención a estos trabajos.

Henessy (1993) considera que la situación la situación en el aula todavía no ha cambiado significativamente para la mayoría de los estudiantes a pesar del creciente interés de los investigadores y educadores matemáticos por el aprendizaje significativo y por buscar aproximaciones más efectivas para enseñar aritmética con comprensión. Se cometen muchos errores en el cálculo aritmético provocados por el uso de algoritmos "buggy" (versiones erróneas de algoritmos correctos utilizadas de forma sistemática). Aunque esta autora reconoce que la "repair theory" y otros modelos basados en el procesamiento de la información han proporcionado gran cantidad de conocimiento acerca de los procesos involucrados en la adquisición de algoritmos aritméticos, también señala que aún quedan muchas cuestiones por resolver. Para ella, las explicaciones dadas tradicionalmente sobre cómo cambian en los alumnos las estrategias de resolución de problemas no son adecuadas y las investigaciones empíricas referentes a la estabilidad de los "bugs" han sido mínimas y mal ejecutadas.

Para estudiar la permanencia de estos "bugs" en los estudiantes, Hennessy realiza una experiencia con 30 alumnos de 4º grado (10-11 años) y 37 de 3º (9-10 años) en la que tienen que resolver con lápiz y papel 13 restas de diferente dificultad. A los dos meses se les vuelve a pasar una nueva prueba similar a la anterior y al siguiente mes una tercera con las mismas características. Las conclusiones más relevantes obtenidas con este estudio son las siguientes:

(a) En general, el impasse que se produce en el alumno al no poder continuar con el procedimiento correcto de cálculo permanece estable a lo largo del tiempo. Por el contrario, los alumnos no aplican reglas "buggy" de modo sistemático, siendo la estabilidad de los errores numéricos y los "bugs" individuales limitada.
(b) Los estudiantes pueden alternar procedimientos correctos e incorrectos a la hora de resolver problemas con idéntica estructura matemática y diferentes números. Factores como el contexto en el que las reglas defectuosas son aprendidas o el nivel de motivación para usar el procedimiento correcto hacen que esto sea posible.

(c) Aparecen "bugs" a dos niveles. Unos son superficiales, sintácticos e inestables y otros profundos, semánticos y estables. Estos últimos, aunque sean escasos, son los que deben preocupar a profesores y educadores matemáticos.

En esta misma línea se encuentra el trabajo de Hatano, Amaiwa e Inagaki (1996) con el que pretenden aclarar los motivos por los que determinados alumnos tienen necesidad de crear y utilizar algoritmos "buggy" en problemas de restar con números de varias cifras. La justificación clásica de la "regla desconocida que se repara" contrasta con la que proponen estos investigadores. Ellos adoptan el denominado *enfoque de la variante atractiva* y afirman:

1. Los chicos que muestran errores sistemáticos en la sustracción con números de varias cifras a menudo conocen el algoritmo correcto (supuesto del "procedimiento correcto"). Esto provoca que sea poco sostenible el punto de vista de la regla desconocida.

2. Los alumnos confían en los algoritmos "buggy" porque los consideran variantes correctas que ahorran esfuerzo mental en el cálculo (supuesto de la "economía de esfuerzo").

Los dos supuestos son confirmados empíricamente suministrando en un primer experimento y a una muestra de 110 alumnos de 3º grado (9 años) un test con items en los que hay que restar números de varias cifras, comparar números expresados en términos de unidades, decenas y centenas, sumar números de una sola cifra y obtener complementarios de números sobre un total de 10. La experiencia puso de manifiesto que en una misma sesión y en un mismo cuestionario los participantes no respondieron utilizando de forma consistente un conjunto fijo de reglas, sino que alternaron estrategias y procedimientos de cálculo incorrectos con los métodos correctos (la misma conclusión ya la obtuvo Hennessy (1993) aunque en sesiones separadas). Este resultado se confirmó posteriormente en un segundo experimento con 79 alumnos de 3er grado (9 años), 79 de 4º grado (10 años), 62 de 5º (11 años) y 81 de 6º (12 años). Además, quedó ratificado el segundo supuesto al observar que mientras mayor es la habilidad de los estudiantes en el manejo de las destrezas simples implicadas en la sustracción con llevadas y mayor es la comprensión conceptual del principio involucrado en el algoritmo correcto, menor es la tentación de confiar en procedimientos erróneos. Los alumnos no tienen necesidad de ello porque el algoritmo (correcto) que ya utilizan les resulta sencillo. En cambio, aquellos que no manifiestan competencia en estos dominios, buscando una economía de esfuerzo mental inventan métodos alternativos más sencillos, atractivos y potencialmente incorrectos.

Como método para dirigir de forma efectiva la recuperación de aquellos estudiantes a los que se les ha identificado previamente algún error sistemático, Stefanich y Rokusek (1992) intentan poner de manifiesto las potencialidades de la enseñanza diagnóstica (o por diagnóstico). Siguiendo las directrices de este tipo de enseñanza, los autores describen un estudio realizado con estudiantes de 4º de Primaria donde examinan, en una primera fase, los errores cometidos por una muestra de 25 alumnos al completar un pretest en el que debían utilizar el algoritmo estándar escrito para dividir números naturales. Las respuestas incorrectas estuvieron motivadas por tres tipos de errores: aleatorios, en los que no fué posible identificar una regularidad aparente, debidos al descuido y sistemáticos, los que seguían un modelo establecido. Para su análisis, los errores sistemáticos fueron clasificados, a su vez, en 6 categorías: errores provocados por el valor de la posición, por el uso del resto, por el concepto de cero/identidad, por un procedimiento defectuoso, por el reagrupamiento y por los hechos numéricos básicos.

Tras completar el análisis de errores y el proceso de enseñanza posterior, que describiremos en el próximo apartado, se volvió a evaluar a los alumnos con el mismo test del inicio. Los resultados obtenidos antes y después de la intervención pueden verse en la tabla 1. Entre los resultados más destacables del estudio, Stefanich y Rokusek señalan el hecho de que en la mayoría de los casos sólo fue necesario mostrar uno o dos ejemplos de procedimientos incorrectos para hacer que los alumnos corrigieran sus errores.

Tipo de error	*Nº de errores en el Pretest*	*Nº de errores en el Postest*
Por descuido	68	17
Aleatorio	15	0
Sistemático	56	8
Reagrupamiento	14	3
Valor posicional	9	0
Concepto cero/identidad	10	0
Hechos numéricos básicos	0	0
Procedimiento defectuoso o incompleto	17	5
Resto	6	0

Tabla 1.- Clasificación de los errores cometidos en el pretest y postest.

4. TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO ARITMÉTICO ELEMENTAL

En los últimos años se han venido elaborando propuestas alternativas de actuación en el aula para desarrollar una instrucción más efectiva y mejorar la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos de cálculo elementales. La mayor parte de los documentos que hemos revisado sobre enseñanza de algoritmos numéricos provienen de publicaciones que van dirigidas principalmente a profesores de matemáticas y recogen propuestas y sugerencias didácticas acerca de cómo trabajar en el aula con los métodos de cálculo correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas básicas. Estos trabajos aunque son de carácter divulgativo se apoyan en investigaciones previas y dejan entrever diferentes concepciones acerca del aprendizaje y desarrollo cognitivo del niño. Junto a ellos hemos localizado también otros documentos que resumen algunos trabajos de investigación relacionados con la enseñanza de algoritmos en la escuela.

En la revisión llevada a cabo se han detectado diversas líneas de actuación claramente diferenciadas que pasamos a describir a continuación.

4.1 Enseñanza de los algoritmos estándar. Distintas aproximaciones

Para Stanic y McKillip (1989) los métodos de cálculo normalmente se presentan en clase como algoritmos estándar que los alumnos deben dominar, sin existir un periodo de desarrollo previo donde se progrese en etapas sucesivas desde la manipulación significativa con material didáctico (bloques multibase,...) hasta el procedimiento clásico de lápiz y papel que todos conocemos. Ellos consideran, por tanto, que el punto de partida para llegar a comprender un determinado algoritmo se sitúa en el trabajo con materiales manipulativos, siendo fundamental la utilización de algoritmos extendidos o desarrollados para ayudar a los alumnos a establecer conexiones adecuadas entre el manejo de los objetos concretos y el algoritmo estándar. Esencialmente, el proceso consta de dos fases: una, donde los alumnos realizan las acciones de sumar, restar, etc., con el material didáctico específico, a la vez que se presenta el correspondiente algoritmo extendido acompañado con una descripción verbal adecuada; y otra, donde los alumnos comparan el algoritmo extendido y el estándar, que a la postre será el definitivo y el que tendrán que aprender.

Stefanich y Rokusek (1992) también son partidarios de la utilización de materiales didácticos para enseñar algoritmos estándar aunque su inclusión en el aula la complementan con un análisis de los errores cometidos por los alumnos. En efecto, estos autores desarrollaron como segunda fase de su enseñanza por diagnóstico, un programa instructivo de dos días de duración tras pasar el pretest de detección de errores para el algoritmo estándar de la división. En el primer día, los profesores que participaban en la investigación expusieron de nuevo ante sus alumnos el algoritmo escrito de la división con ayuda de bloques multibase (base 10). Posteriormente, para que se familiarizaran con el procedimiento se les pidió a los estudiantes que formaran grupos de cuatro y resolvieran divisiones similares empleando el mismo material didáctico. Al final de la sesión se hizo una puesta en común de cada una de las tareas propuestas.

La táctica empleada en este primer día consistió en fragmentar el algoritmo en sus partes más simples, tratar de dominarlas de forma automática y reconstruir a partir de ellas todo el proceso de cálculo. Es lo que los autores denominan la técnica de "procedimentar", esto es, *"hacer que los estudiantes ejecuten la destreza sin tener que pensar sobre ella"* (p. 202).

En el segundo día, cada profesor recopiló algunos de los errores cometidos por los alumnos durante el día anterior, los expuso ante el grupo y desarrolló una instrucción directa acerca de cómo corregirlos. A continuación, les propuso que identificaran y corrigieran errores similares haciendo uso de lo aprendido.

Una vez concluidas las dos sesiones, los estudiantes pasaron a una unidad de resolución de problemas con calculadora durante 5 semanas. Tal como señalábamos en el apartado anterior, al final de todo el proceso de enseñanza se volvió a evaluar a los alumnos con el mismo test del inicio.

Apoyándose en los datos obtenidos, Stefanich y Rokusek llegan a la conclusión de que la instrucción por diagnóstico desarrollada resultó efectiva. Según ellos, sin una intervención como ésta los errores sistemáticos cometidos hubieran continuado durante un periodo de tiempo considerable. Por este motivo, recomiendan a los profesores de matemáticas que busquen regularidades en los datos erróneos que recopilan de sus alumnos cuando están trabajando con tareas de cálculo. Asimismo, aconsejan no dedicar el tiempo solamente a puntuar y calificar las producciones de los estudiantes. Por el contrario, consideran más importante analizar el trabajo escrito elaborado puesto que de él se obtiene información útil para el diagnóstico y la posterior planificación de un programa de instrucción adecuado con el que se podrá remediar las posibles deficiencias detectadas.

Otra aproximación diferente es la de combinar los materiales manipulativos con explicaciones escritas producidas por los estudiantes. En referencia a esto, Whitin y Whitin (1998) aconsejan el empleo de la escritura como medio para dar sentido a las reglas artificiales asociadas a los algoritmos de cálculo que los alumnos normalmente no logran comprender. Es más, afirman que los profesores pueden utilizar la escritura para valorar la comprensión de los estudiantes, fomentar el sentido numérico y mejorar el contenido de las conversaciones matemáticas.

A modo de ejemplo, la figura 4 recoge la explicación dada por una niña de 4º de Primaria (Danielle) al multiplicar 72 x 25 con ayuda de bloques multibase (base 10). De su explicación puede deducirse con facilidad la comprensión que posee de la propiedad distributiva.

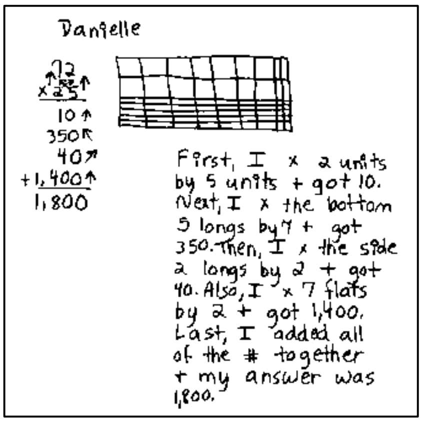


Figura 4.- Explicación de Danielle al multiplicar 72x25 usando bloques multibase (Tomado de Whitin y Whitin, 1998)

Otro uso característico de la escritura para evaluar la comprensión consiste en proponer a los estudiantes que inventen enunciados de problemas cuya solución se obtenga a través de un cálculo dado (p.e., 50-32=18). Asimismo, puede ser útil el empleo en clase de diarios o cuadernos de campo donde se registren todas las producciones y cálculos realizados por los niños al resolver problemas. En opinión de Whitin y Whitin, este material escrito podría ser empleado posteriormente en el aula para reflexionar y discutir en común las justificaciones escritas elaboradas por algunos de los alumnos.

Por su parte, Schliemann, Dos Santos y Da Costa (1993) advierten sobre el hecho de que los métodos de enseñanza basados en el uso de materiales didácticos para conectar la componente sintáctica y semántica de los algoritmos de cálculo no han alcanzado la eficacia deseada (Resnick (1992) hace un breve análisis de las carencias de estos métodos). Estos autores plantean una aproximación alternativa hacia la comprensión en dos fases:

1º) Fomentar que el alumno construya sus propias reglas y convenios para representar de forma escrita los cálculos mentales que ya es capaz de ejecutar.

2º) Con ayuda del profesor, adaptar gradualmente la representación escrita de los métodos de cálculo que utiliza el chico a los algoritmos clásicos aceptados en la escuela.

Como contribución para demostrar la viabilidad de esta aproximación, Schliemann y sus colaboradores presentan un estudio donde se recoge la progresiva sistematización de un algoritmo escrito inventado para sumar llevada a cabo por un alumno (14 años) con dificultades de aprendizaje en los algoritmos escolares. Aunque el procedimiento inventado no resultó tan refinado como el que tradicionalmente se enseña en la escuela, el estudiante manifestó en su uso una profunda comprensión de las propiedades del sistema de numeración decimal.

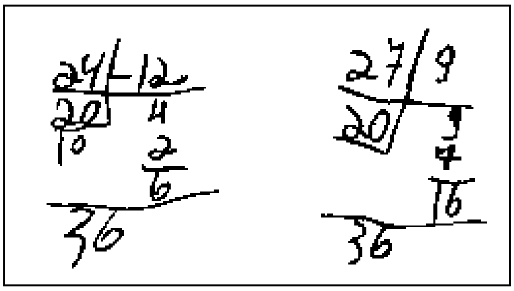


Figura 5.- Adiciones con el algoritmo invertido resultante

Boero, Ferrari y Ferrero (1989) describen los pormenores de una investigación de tipo curricular realizada para elaborar, con relación a los resultados y conclusiones obtenidos, propuestas de enseñanza para aproximar a los alumnos de un modo comprensivo a los algoritmos escritos de las cuatro operaciones aritméticas básicas, con especial interés en la división. Según estos autores, la aproximación a un algoritmo escrito para la división comienza con la elección de los problemas que se presentarán posteriormente a los estudiantes. En esta fase, destacan la importancia de considerar "campos de experiencia" concretos, expresión que emplean para referirse a *"aquellos contextos, identificados por el niño como unitarios y reconocibles en base a sus propias características, en los cuales el profesor propone actividades de modelización matemática, resolución de problemas aritméticos y geométricos, etc."* (p. 18).

Respecto a la administración de las diferentes actividades de resolución de problemas se aconseja que las primeras estén relacionadas con situaciones vivivas directamente por los estudiantes. En una etapa posterior, se podrían proponer problemas en situaciones no experimentadas por los alumnos aunque sí similares a algunas de las ya conocidas con anterioridad o vividas fuera de la escuela. En cualquier caso, las tareas ficticias son excluidas de la secuencia de enseñanza. Además, todas las actividades se plantean a sujetos que todavía no dominan ningún procedimiento de cálculo escrito para la división. Los autores están convencidos de que los alumnos, a través de la creación de métodos de cálculo propios para resolver tareas de este tipo, podrán llegar a comprender la división como un modelo matemático identificativo de un conjunto de situaciones problema. A diferencia de la enseñanza tradicional, la formalización estándar de la operación aritmética quedaría aplazada en esta aproximación hasta que los estudiantes tuvieran conocimiento de los significacos de la operación.

En el camino hacia un algoritmo escrito para la división, el profesor tiene la labor de plantear en el aula las actividades mencionadas, recopilar y mostrar en conjunto las distintas estrategias elaboradas por los alumnos, provocar en ellos la reflexión y el diálogo con la comparación de los métodos surgidos y destacar y fomentar los procedimientos más efectivos.

Para mostrar la adecuación de esta aproximación, Boero et al. desarrollaron durante cinco años una investigación que involucraba a 120 aulas de 1º a 5º de Primaria y en la que emplearon una metodología mixta, con observaciones directas en el aula, análisis de protocolos y test de evaluación.

Las principales estrategias empleadas por alumnos de 8 a 10 años al resolver algunos de los PAEV de división (partición y medida) propuestos durante el proyecto fueron éstas:

1. Estrategias de distribución manipulativa. División basada en el dibujo o realizada con ayuda de materiales concretos.
2. Distintas estrategias de ensayo y error para completar el dividendo.
   2.a) Adición repetitiva
   2.b) Multiplicación:
      - <u>como suma reiterada</u> (este modelo se ajusta más a los problemas de medida). Exite una versión más sofisticada en la que se utilizan relaciones numéricas (doblar,...).
      - <u>como operación inversa de la división</u> (d * ? = D). Este modelo se ajusta más a los problemas de partición.

3. Sustracciones repetitivas hasta “vaciar” el dividendo.
   3.a) Versión simple
   3.b) Versión más sofisticada donde se combina el producto y la sustracción. Este método de cálculo es el que más se acerca al algoritmo estándar escrito para dividir números naturales.

En resumen, tras finalizar el proyecto Boero et al. llegan a la conclusión general de que con el método de enseñanza empleado se obtiene una ligera mejoría en la competencia y comprensión de los estudiantes. Esto es así porque a lo largo del proceso seguido los alumnos tuvieron la oportunidad de acceder a los significados menos evidentes de la división y de descubrir multitud de regularidades numéricas y operativas. Asimismo, llegaron a comprender con relativa facilidad un algoritmo escrito para dividir números naturales (el surgido de la estrategia 3b) igual de eficaz que el estándar pero con la diferencia de que cada uno de los pasos estaba plenamente justificado.

Por último, hemos de destacar las actividades planteadas por Gavilán y Barroso (1996) para trabajar en el aula con diferentes algoritmos aritméticos (multiplicación, raíz cuadrada,...). En el caso del producto, proponen el uso de tareas de resolución de multiplicaciones con cifras desconocidas para poder aprehender las propiedades de la multiplicación y alcanzar una comprensión conceptual del algoritmo, “*que a veces se piensa que sólo conlleva una mera comprensión instrumental*” (p. 193).

Inspirándose en la filosofía del cuasi-empirismo de Lakatos[1], Gavilán y Barroso describen el diálogo entre profesor y alumnos que tiene lugar en una clase de Primer Curso de la Diplomatura de Maestro al intentar resolver la siguiente multiplicación con cifras desconocidas:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \& & \& & 7 & \& \\
 & & \mathrm{x} & \& & 7 & \& \\
\cline{2-6}
 & \& & \& & \& & \& & \& \\
\& & \& & \& & 2 & \& & \\
8 & \& & 5 & \& & & \\
\hline
\& & \& & \& & \& & \& & \&
\end{array}
$$

En el proceso de reconstrucción de esta multiplicación los estudiantes se ven obligados a conversar entre sí para confirmar o refutar sus propias conjeturas y la de los demás, siendo fundamental el papel del profesor como moderador y guía de la sesión.

Con actividades de este tipo, los autores quieren mostrar una enseñanza de la matemática alternativa, lejos de los métodos expositivos tradicionales, en la que los alumnos participan activamente con procedimientos informales, con dudas en el proceso y con conjeturas iniciales que deben probar o rechazar.

4.2 Enseñanza de algoritmos escritos alternativos

Frente a los procedimientos estándar, Carroll y Porter (1998) optan por la presentación en el aula de algoritmos escritos alternativos más comprensibles para cada una de las cuatro operaciones aritméticas básicas. Tal como señalan, estos métodos de cálculo podrían ser útiles para los estudiantes con independencia de la instrucción que reciban. Si ésta es tradicional, basada en la enseñanza de algoritmos estándar, los métodos alternativos expuestos servirían para mostrar a los alumnos que existen otras formas de calcular. Asimismo, les da la oportunidad de tener un procedimiento de cálculo válido a aquellos estudiantes con dificultades para el aprendizaje de los métodos tradicionales. Por el contrario, en caso de que la enseñanza recibida esté centrada en el cálculo mental y en el uso de la calculadora, los algoritmos mencionados proporcionarían un método de lápiz y papel para trabajar con números de tamaño medio, que no son fáciles de manipular mentalmente pero para los que tampoco se hace necesario el empleo de la calculadora.

Por otra parte, Philipp (1996) que es uno de los tantos investigadores estadounidenses en Educación Matemática que apuesta por una reforma en la enseñanza de la aritmética, aprovechando la diversidad cultural y étnica de sus alumnos (futuros profesores de Primaria) propone tareas centradas en la búsqueda de algoritmos de cálculo alternativos a los que tradicionalmente se enseñan en la mayoría de las escuelas norteamericanas. El mensaje que quiere transmitir Philipp con actividades de este tipo no es el de sugerir a los profesores que enseñen una gran cantidad de algoritmos para cada operación, ni tampoco

[1] *"[...] las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones"* (Lakatos, 1994, p. 20).

que eligan el algoritmo más conceptual, y por tanto el más adecuado para su enseñanza, de todos cuantos hay. La intención es que el profesor dé facilidades a los alumnos para que presenten en clase algoritmos alternativos, bien inventados por el propio estudiante o bien aprendidos fuera de la escuela, y crear a partir de ellos discusión sobre cómo y porqué funcionan así.

Esta aproximación evitaría, entre otras cosas, problemas como el detectado por Ron (1998) en aquellos estudiantes de Primaria de origen latino que estudian en colegios estadounidenses. Estos chicos se encuentran en determinados momentos ante dos procedimientos diferentes para restar, uno enseñado por el profesor en la escuela y otro por la familia en casa (figura 6). Por falta de una comprensión adecuada algunos de ellos combinan ambos métodos de cálculo creando unos algoritmos híbridos que son incorrectos.

Ante esta situación, Ron defiende la enseñanza en el aula del algoritmo US frente al europeo por considerar que los alumnos llegan a comprenderlo con menor dificultad. Por este motivo, presupone que en un futuro próximo este algoritmo terminará por implantarse en las escuelas europeas y latinoamericanas.

Los algoritmos escritos alternativos no surgen únicamente por factores culturales sino también de la historia de la matemática. Mason (1998) acude a ella y aconseja emplear en clase algoritmos propios de épocas pasadas puesto que a través de la comparación de los métodos de cálculo antiguos con los actuales se puede mostrar claramente a los alumnos que el conocimiento matemático no es estático ni definitivo sino que evoluciona a lo largo del tiempo.

$$\begin{array}{r} {}^{4}\ {}^{13} \\ -\ \cancel{5}\ 3 \\ 2\ 8 \\ \hline 2\ 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {}^{13} \\ -\ 5\ \cancel{3} \\ {}^{3}\cancel{2}\ 8 \\ \hline 2\ 5 \end{array}$$

Figura 6.- Algoritmo para la sustracción empleado en US (izquierda) y en Europa y Latinoamérica (derecha)

Como ejemplo de algoritmo histórico alternativo, reseñamos el algoritmo denominado "cálculo sobre líneas", un procedimiento empleado en el siglo XV por los comerciantes europeos para sumar y restar. Las reglas para representar las cifras y realizar los cálculos se resumen en los siguientes puntos (fig. 7):

1. Las líneas representan las unidades, decenas, centenas, etc. Los espacios entre líneas (comenzando desde abajo) representan respectivamente 5, 50, 500,...

2. No se permiten más de cuatro fichas en una línea ni más de una en un espacio.

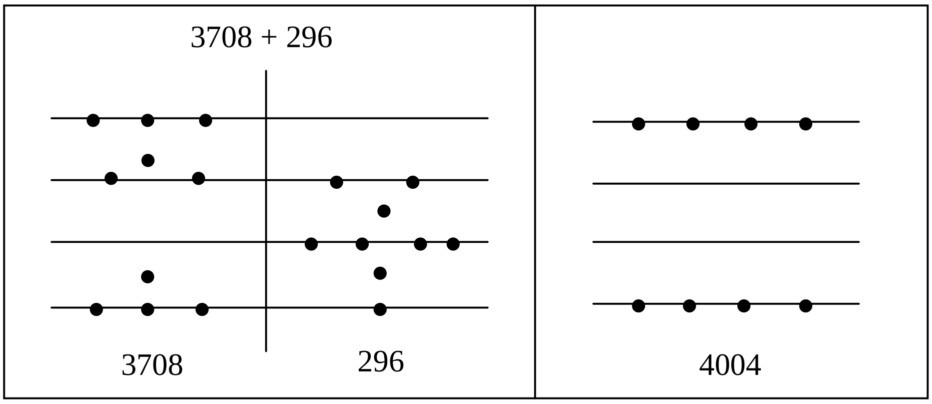


Figura 7.- Un ejemplo de suma con el algoritmo de “cálculo sobre líneas”

Entre las ventajas de este método, Mason menciona el hecho de que la adición se puede realizar sin necesidad de conocer las tablas de sumar. Además, la manipulación de las fichas refuerza los conceptos de valor posicional y de reagrupamiento, y permite dar un sentido al mecanismo de “llevadas”. En cuanto a la extensión, la autora considera que no resulta difícil mostrar a los alumnos el procedimiento para restar una vez que se han familiarizado con el de la suma.

4.3 Invención y desarrollo de algoritmos propios

Motivado por el dilema existente entre la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas y la enseñanza centrada en el desarrollo de métodos de cálculo alternativos elaborados por los propios alumnos de Primaria, Hedrén (1998) estudia la evolución de una clase desde 2º hasta 5º de Primaria perteneciente a un colegio normal de Suecia, donde a los estudiantes no se les enseña ningún algoritmo estándar sino que se trabaja con ellos para que inventen y desarrollen sus propios procedimientos de cálculo escrito, bajo la óptica del constructivismo social. En el aula experimental se fomentó el uso de: (a) distintos métodos de lápiz y papel, (b) el cálculo mental y la estimación, y (c) la calculadora. En definitiva, se contempló el cálculo aritmético elemental en todas sus manifestaciones con excepción de los algoritmos estándar escritos.

De las distintas observaciones realizadas al trabajo de los estudiantes, Hedrén extrajo algunas conclusiones interesantes, entre las cuales destacamos las siguientes:

(a) Los alumnos mostraron una elevada comprensión del valor posicional por hacer los cálculos en numerosas ocasiones separando las centenas, decenas y unidades de las cifras.
(b) Se puso de manifiesto el dominio de las propiedades de las cuatro operaciones aritméticas. En concreto, para simplificar los cálculos algunos estudiantes emplearon un tipo de compensación en la adición y la sustracción así como la propiedad distributiva del producto y la división respecto de la suma.
(c) Los métodos escritos inventados por los alumnos fueron muy similares a los utilizados cuando calculaban mentalmente. En cierto sentido, se podría decir que son la representación escrita de los procedimientos de cálculo mental.

En consecuencia, Hedrén duda de la necesidad real de enseñar algoritmos como los estándar para las cuatro operaciones aritméticas básicas. En su opinión, si los profesores y padres de alumnos insisten demasiado en su enseñanza, ésta al menos debería aplazarse hasta 6º de Primaria o 1^{ero} de Secundaria, cuando ya los chicos han tenido suficientes oportunidades para desarrollar un buen sentido numérico y están en condiciones de comprender esos métodos hasta ahora incomprensibles.

En Kamii, Lewis y Livingston (1993), Burns (1994) y Kamii y Dominick (1997) se adopta una posición más crítica sobre la conveniencia de enseñar algoritmos preestablecidos en los primeros años de escolaridad. Apoyándose en el constructivismo piagetiano, estas autoras defienden una enseñanza de la aritmética que se preocupe por ofrecer a los alumnos oportunidades para que inventen sus propios métodos de cálculo. Kamii et al. (1993) dan tres razones para validar esta postura:

1. Los estudiantes no tienen que renunciar a su propio pensamiento.

2. A diferencia de lo que ocurre con los algoritmos, su comprensión del valor de la posición se refuerza y no se debilita.

3. Los alumnos desarrollan un mejor sentido numérico que se demuestra tratando a los números globalmente, como un todo y no como cifras cercanas unas de otras pero independientes.

Según Burns (1994) lo ideal es considerar la aritmética como parte de un currículum de matemáticas centrado en la resolución de problemas, donde las situaciones y el contexto son las que determinan la elección de los procedimientos adecuados.

Por otro lado, Kamii y Dominick (1997) ponen de manifiesto el carácter nocivo de los algoritmos a través de unas entrevistas individuales realizadas en la Hall-Kent School de Birmingham (Alabama) a estudiantes que habían sido instruidos en procedimientos de cálculo ("con algoritmos") y a estudiantes que no lo habían sido ("sin algoritmos"). A todos se les pidió que realizaran las mismas operaciones aritméticas por el método que creyeran más oportuno, y a la vez, explicaran el proceso seguido en la consecución de la solución. En los datos obtenidos Kamii y Dominick observan los siguientes hechos:

(a) Los alumnos de las clases "sin algoritmos" obtuvieron un porcentaje de respuestas correctas muy superior al conseguido por los estudiantes de las clases "con algoritmos".

(b) La diferencia más importante estriba en las respuestas incorrectas dadas por los niños. Los alumnos de las clases "con algoritmos" dieron unas respuestas incorrectas irrazonablemente grandes y pequeñas. Por el contrario, las producidas por los estudiantes de las clases "sin algoritmos" fueron más razonables.

(c) Las explicaciones que proporcionaron los alumnos muestran la profunda comprensión de unos ("sin algoritmos") y no de otros ("con algoritmos") en relación con los principios que rigen los cálculos aritméticos.

Haciendo uso de la clasificación propuesta por Piaget de los tipos de conocimiento existentes: físico, lógico-matemático y social-convencional (Kamii, 1995), estas investigadoras destacan que los algoritmos enseñados hoy en día en la escuela pertenecen al conocimiento social-convencional determinado por la sociedad y el tiempo en que vivimos. En cambio, en los procedimientos de cálculo que construyen los alumnos interviene un conocimiento lógico-matemático. *"Esta diferencia explica porqué los algoritmos no ayudan al desarrollo del razonamiento matemático de los niños"* (Kamii y Dominick, 1997, p. 58).

En España también aparecen defensores de esta tendencia en la enseñanza del cálculo aritmético elemental. Entre ellos están Ramírez y Usón (1996) por afirmar que *"[...] el sitio de los algoritmos de lápiz y papel está junto a la máquina de Pascal o al ábaco en el museo de viejos instrumentos de cálculo para deleite de curiosos, estudiosos y coleccionistas"* (p. 64). Entre las razones expuestas para justificar esta afirmación se encuentra la siguiente: *"[...] nuestros algoritmos que son los más refinados y sintéticos que hayamos podido conseguir están, por esa misma razón, lejos de ser didácticamente los más adecuados al estar alejados del sentido último de la operación que efectúan y de las propiedades de los números implicados en ellas..."* (p. 64). Estos autores exponen para cada operación aritmética una variedad de procedimientos de cálculo alternativos que se acercan más a los significados de las distintas operaciones; algunos de ellos fueron inventados y empleados de forma natural por alumnos pertenecientes a un aula ocupacional de La Rioja.

4.3.1 Algunas observaciones en torno a esta aproximación

Aquellos que defienden una enseñanza de los algoritmos aritméticos basada en la invención por parte de alumnos de sus propios métodos de cálculo deben tener presente que no conviene aceptar cualquier algoritmo por el simple hecho de haber sido inventado por un estudiante. Son necesarios unos criterios de valoración para determinar si deben o no ser aceptados como procedimientos adecuados. Por ejemplo, Cambell, Rowan y Suarez (1998) enumeran tres criterios:

(a) Los métodos inventados deben ser eficientes (rápidos, cómodos, sin excesivo registro escrito,...).
(b) Deben ser matemáticamente válidos.
(c) Deben ser generalizables.

Se aconseja que los alumnos participen a la hora de decidir la validez, eficiencia y generalidad de sus propios algoritmos así como los de sus compañeros. A modo de ejercicio, adjuntamos al final del documento algunos algoritmos inventados sobre los que hay que decidir si son suficiéntemente válidos, eficaces y generalizables (ver anexo).

Por otra parte, conociendo la propuesta de enseñanza de Kamii y colaboradoras, Carroll (1996) analiza en su trabajo el nivel de competencia aritmético que realmente puede alcanzar un alumno medio cuando está inmerso en un currículum de matemáticas basado en la resolución de problemas y sin instrucción directa del profesor. Asimismo, estudia los algoritmos que son capaces de desarrollar estos estudiantes y las estrategias implicadas en su uso.

El autor selecciona tres colegios de diferente clase socio-económica para realizar unas entrevistas a 33 alumnos de 2º grado (11 de cada colegio) en las que se les piden resolver tres problemas aritméticos de enunciado verbal, característicos del currículum reformado, y tres problemas descontextualizados de puro cálculo, típicos del currículum tradicional.

De los resultados obtenidos, Carroll destaca la escasa diferencia en el éxito de los alumnos al resolver los dos tipos de problemas, algo que es contrario a otros resultados que aseguran que los estudiantes a menudo encuentran los problemas de enunciado verbal más difíciles que los de mero cálculo. Otro resultado señala que aunque se le ha dado poco peso a la instrucción en el nuevo currículum, los estudiantes han calculado tan bien o incluso mejor que aquellos que han recibido una instrucción tradicional. Sin embargo, a pesar de que investigadores como Burns (1994) o Kamii y Dominick (1997) sugieren eliminar la enseñanza de algoritmos tradicionales en la escuela, no hay evidencias claras sobre la capacidad real que tienen los estudiantes para inventar y usar procedimientos aritméticos significativos sin instrucción directa alguna. Por eso, la conclusión más relevante a la que llega Carroll con este estudio se centra en aclarar cuál es el nivel de competencia aritmética que debe alcanzar un alumno medio en su paso por la escuela. Según el autor, son necesarias investigaciones dedicadas a estudiar las ventajas y desventajas del uso de algoritmos alternativos (mentales y escritos), las relaciones entre el conocimiento de los hechos numéricos y los algoritmos alternativos, y el papel que juega el conocimiento y las creencias del profesor en la instrucción.

Precisamente, Steinbring (1989) examina cómo las creencias y limitaciones del profesor influyen notablemente en la enseñanza de la matemática. En opinión de muchos profesores, el desarrollo del conocimiento matemático descansa sobre operaciones y procedimientos algorítmicos bien definidos y definiciones precisas de los conceptos comunicadas por el profesor. Así, en la enseñanza de las matemáticas escolares generalmente se viene produciendo un fenómeno de *algoritmización del conocimiento* que consiste en reducir los procesos de aprendizaje a la simple transmisión directa por parte del profesor de procedimientos, reglas y técnicas operacionales. Según Steinbring, esto es debido en parte a una serie de restricciones de carácter social y epistemológico que afectan de manera directa al docente. La expectación de que el profesor "entregará" conocimiento matemático de forma apropiada a sus alumnos, junto con la concepción de la matemática escolar como "materia de contenido", conduce a la idea equivocada de que el conocimiento matemático sólo puede ser comunicado directamente si se han hecho las suficientes simplificaciones metodológicas y didácticas.

Para Steinbring el profesor debería darse cuenta de sus limitaciones, que dependen de la naturaleza teórica de propio conocimiento matemático y de las restricciones específicas que impone el entorno social. Teniendo en consideración estas limitaciones, debería proporcionar oportunidades de aprendizaje para que sus estudiantes reconstruyan de forma activa relaciones matemáticas. El profesor no debe erigirse como el centro que domina y determina con todo detalle el proceso de aprendizaje.

4.4 Aproximaciones integradoras

Curcio y Schwartz (1998) intentan consensuar la variedad de métodos de enseñanza propuestos para los algoritmos aconsejando encontrar una aproximación que equilibre y conecte el desarrollo del pensamiento algorítmico involucrado en la invención del niño con los algoritmos más tradicionales del currículum. Según ellos, esto es lo más adecuado ya que es imposible que los alumnos construyan por sí mismos todos los algoritmos matemáticos necesarios para progresar con garantía en los cursos superiores. Aunque no la haga explícita, esta idea también se desprende de Carroll (1996).

Ahora bien, al igual que Steinbring (1989), los autores dejan claro su desacuerdo con los métodos expositivos tradicionales que utilizan la mayoría de los profesores en clase. Se apuesta por un modelo de enseñanza basado en la observación de los alumnos y en la posterior toma de decisiones instruccionales. Esto es, bajo el supuesto de que los alumnos son capaces de inventar reglas y descubrir relaciones, la labor del profesor consiste en escuchar y plantear preguntas precisas al estudiante para identificar su nivel de comprensión, y a partir de aquí, tomar decisiones sobre la instrucción basadas en el conocimiento que el profesor obtiene del niño. Se podría pensar que estas pautas de actuación son características de lo que se ha denominado *diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas* (Stefanich y Rokusek, 1992; Bell, 1993).

A pesar de todas estas indicaciones, Curcio y Schwartz también llaman la atención sobre la dificultad de decidir cuándo y cómo formalizar un algoritmo ante el alumno. Para ellos, en esta decisión influyen factores que tiene que ver con el tiempo dedicado a profundizar en las relaciones matemáticas, la frecuencia de uso de algoritmos inventados y la cantidad de algoritmos útiles que el niño ya posee.

En la misma línea, Kouba y Franklin (1995) recomiendan que el profesor actúe en el aula, en parte, como si fuera un investigador obligado a solucionar problemas concretos en situaciones específicas. De las ideas de estas autoras se desprende que son partidarias de la *investigación-acción* como método más adecuado de investigación educativa.

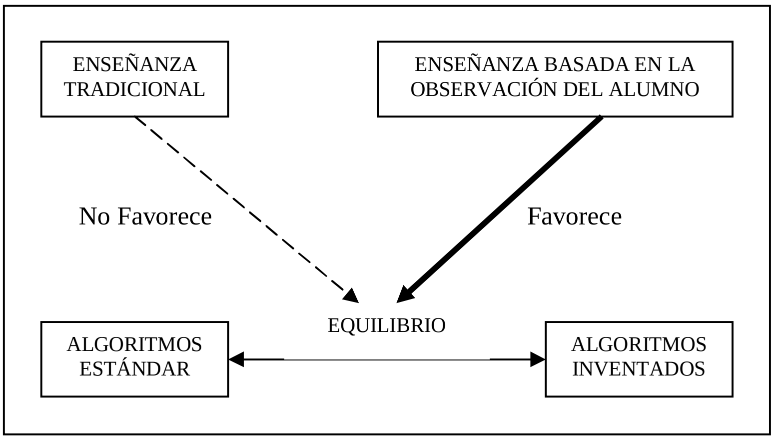


Figura 8.- Cuadro resumen de las ideas de Curcio y Schwartz (1998)

En otro orden de reflexión, Kraemer (1999) es de la opinión de que los problemas del cálculo no tienen su origen en la falta de dominio de los algoritmos aprendidos sino en la poca capacidad de los alumnos para flexibilizar los cálculos (conocimiento limitado de las relaciones numéricas). En consecuencia, considera inadecuado reducir toda la problemática del cálculo a cuestiones relacionadas con la enseñanza de los algoritmos estándar escritos, a cuestiones del tipo: ¿Existe alguna razón para que los alumnos deban aprender los algoritmos usuales de columnas? ¿Qué método de cálculo sería el más adecuado para cada operación? Si la estrategia consiste en reconstruir los algoritmos estándar de lápiz y papel, ¿qué grado de formalización debería garantizarse? ¿Qué tipo de comprensión de los algoritmos estándar se le debe exigir a los estudiantes? En relación con los procedimientos de cálculo, ¿qué secuencias didácticas tienen en cuenta las limitaciones de los alumnos con menos capacidades y al mismo tiempo desarrollan las potencialidades de los más aventajados?

No se trata *“de revisar los algoritmos usuales, ni su aprendizaje, sino desarrollar las condiciones efectivas para el aprendizaje de un cálculo flexible <<mental>> (con papel y lápiz para anotar las respuestas u operaciones intermedias) y de <<estimación>>”* (p. 38).

La idea de abordar el cálculo desde una perspectiva integradora también es compartida por Carroll y Porter (1998). Para estos autores, los algoritmos alternativos escritos que tanto fomentan *“deberían ser parte de un esquema instruccional que incluya estimación, aritmética mental, calculadoras, métodos inventados por los estudiantes, y discusiones de las diferentes estrategias usadas”* (p. 108).

5. CONCLUSIONES

De los trabajos mencionados en los apartados anteriores hemos extraído algunas conclusiones de interés para el profesor de matemáticas. En primer lugar, los estudios revisados que contienen una parte empírica donde se analizan las competencias de los alumnos utilizan básicamente dos tipos de tareas como instrumento de diagnóstico y evaluación del conocimiento aritmético: problemas de enunciado verbal que simulan situaciones reales y actividades tradicionales que aparecen normalmente en los libros de texto. Para desarrollar y evaluar la comprensión que tienen los estudiantes de los algoritmos numéricos consideramos necesario utilizar otras tareas alternativas a las mencionadas, como pueden ser, en el caso del producto, las multiplicaciones con cifras desconocidas.

En segundo lugar, las distintas líneas de actuación propuestas para enseñar algoritmos, si bien coinciden en algunos planteamientos, también presentan diferencias importantes debidas a las diversas concepciones en las que se basan sobre el aprendizaje y desarrollo cognitivo del alumno. A pesar de que los estudios relacionados con la enseñanza de los algoritmos persiguen el objetivo común de conseguir la comprensión de los estudiantes, los que hemos revisado sólo ofrecen prescripciones e ideas de carácter general y no absoluto.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 5-34.

Boero, P., Ferrari, P. L. y Ferrero, E. (1989). Division Problems: Meanings and Procedures in the Transition to a Written Algorithm. *For the Learning of Mathematics*, 9, 3, 17-25.

Brown, H. I. (1994). *La nueva filosofía de la ciencia*. Tercera Edición. Madrid: Tecnos.

Burns, M. (1994). Arithmetic: The Last Holdout. *Phi, Delta, Kappan*, febrero, 471-476.

Cambell, P. F., Rowan, T. E. y Suarez, A. (1998). What Criteria for Student-Invented Algorithms? En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 49-55). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual Knowledge as a Foundation for Procedural Knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1987). Written and Oral Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 2, 83-97.

Carroll, W. M. (1996). Use of Invented Algorithms by Second Graders in a Reform Mathematics Curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 137-150.

Carroll, W. M. y Porter, D. (1998). Alternative Algorithms for Whole-Number Operations. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 106-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Curcio, F. R. y Schwartz S. L. (1998). There are no algorithms for teaching algorithms. *Teaching Children Mathematics*, septiembre, 26-30.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991*)*. *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor.

Farnham-Diggory, S. (1994). Paradigms of Knowledge and Instruction. *Review of Educational Research*, 64, 463-477.

Gavilán J. Mª y Barroso, R. (1996). Didáctica de los algoritmos a través de reconstrucciones. *Epsilon*, 35, 193-202.

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1999a). El futuro del cálculo. *Uno*, 22, 20-27.

Gómez, B. (1999b). *Juntando partes en Pensamiento Numérico y Algebraico*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia (paper).

Hatano, G., Amaiwa, S. y Inagaki, K. (1996). "Buggy Algorithms" as Attractive Variants. *Journal of mathematical Behavior*, 15, 285-302.

Hedrén, R. (1998). The teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils' own methods. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 233-244).Osnabrück, Germany.

Hennessy, S. (1993). The stability of children's mathematical behavior: when is a bug really a bug? *Learning and Instruction*, 3, 315-338.

Ifrah, G. (1998). *Historia Universal de las Cifras*. Madrid: Espasa Calpe.

Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III*. Madrid: Visor.

Kamii, C. y Dominick, A. (1997). To Teach or Not to Teach Algorithms. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 1, 51-61.

Kamii, C., Lewis, B. A. y Livingston, S. L. (1993). Primary Arithmetic: Children Inventing their own Procedures. *Arithmetic Teacher*, 41, diciembre, 200-203.

Kouba, V. L. y Franklin, K. (1995). Multiplication and Division: Sense Making and Meaning. *Teaching Children Mathematics*, mayo, 574-577.

Kraemer, J. M. (1999). Dividir construyendo los números (mentalmente) ¿Una alternativa frente al algoritmo usual de la división? *Uno*, 22, 29-43

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Universidad.

Mason, D. E. (1998). Capsule Lessons in Alternative Algorithms for the Classroom. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 91-98). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Maurer, S. B. (1998). What Is an Algorithm? What Is an Answer? En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 21-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Maza, C. (1991). *Multiplicar y dividir*. Madrid: Visor.

Mingus, T.T.Y. y Grassl, R. M. (1998). Algorithmic and Recursive Thinking Current Beliefs and Their Implications for the Future. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 32-43). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Philipp, R. A. (1996). Multicultural Mathematics and alternative algorithms. *Teaching Children Mathematics*, 3, noviembre, 128-133.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Ramírez. A. y Usón, C. (1996). ...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones. *Suma*, 21, 63-71.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putham y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Ron, P. (1998). My Family Taught Me This Way. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp.115-119). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schliemann, A.D., Dos Santos, C. M., Da Costa, S. C. (1993). Constructing Written Algorithms: A Case Study. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 155-172.

Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Stanic, G.M.A y McKillip, W. D. (1989). Developmental Algorithms Have a Place in Elementary School Mathematics Instruction. *Arithmetic Teacher*, 37, enero, 14-16.

Stefanich, G. P. y Rokusek, T. (1992). An Analysis of Computacional Errors in the Use of Division Algorithms by Fourth-Grade Students. *School Science and Mathematics*, 92, 4, 201-205.

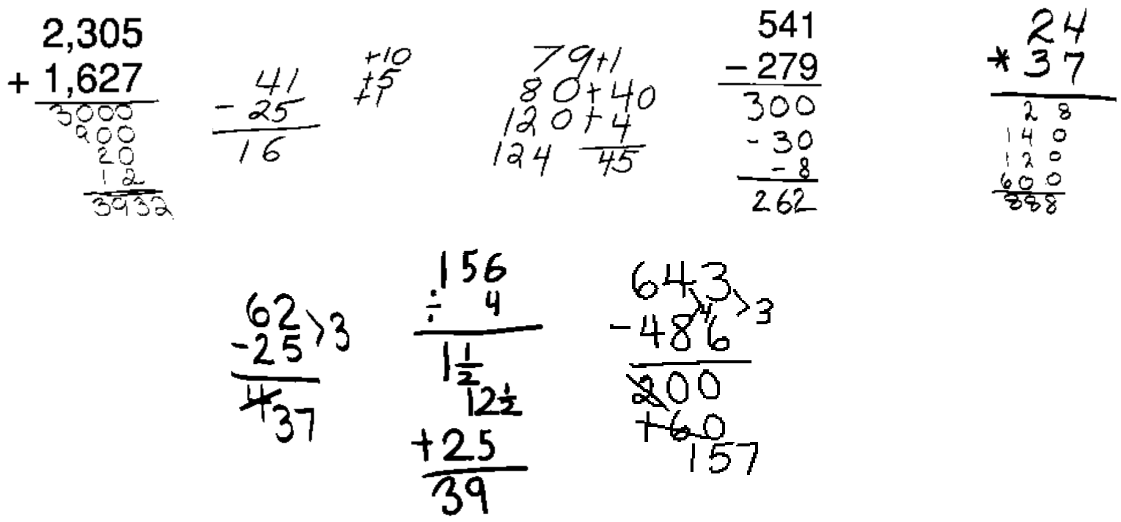
Steinbring, H. (1989). Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics*, 9, 1, 24-33.

Trajtenbrot, B.A. (1977). *Los algoritmos y la resolución automática de problemas.* Moscú: M.I.R.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Whitin, D. J. y Whitin, P. E. (1998). The “Write” Way to Mathematical Understanding. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 161-169). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

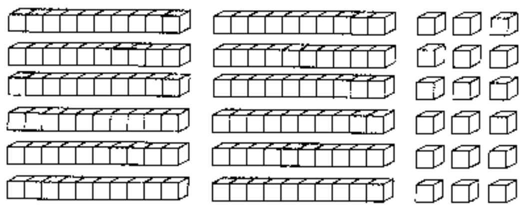
<u>ANEXO</u>: Algoritmos de cálculo construidos por alumnos de Primaria



Problema: *"Si hay 6 clases con 23 niños en cada clase, ¿cuántos niños hay en total?"*

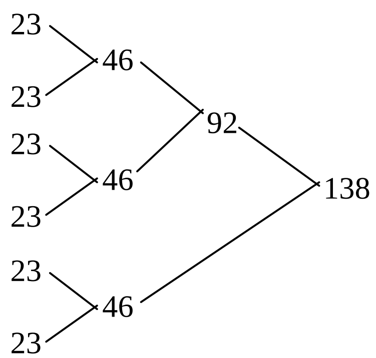
Distintas Soluciones

/ /
/ /
/ /
/ /
/ /
/ /



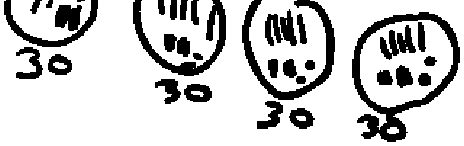
$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 23 \\ \hline 46 \\ +\ 23 \\ \hline 69 \\ +\ 23 \\ \hline 92 \\ +\ 23 \\ \hline 115 \\ +\ 23 \\ \hline 138 \end{array}$$

Adición repetida



Duplicación

Problema: *"Cuatro niños tienen 3 bolsas de caramelos M&M. Abren todas las bolsas y se reparten los caramelos equitativamente. Si en cada bolsa había 52 caramelos, ¿cuántos caramelos recibió cada niño?"* (PAEV de dos etapas).



50 12 1 38 12 1 26 12 1 14 12 1 2	12 12 12 + 12 48	12 ⎤ 12 ⎦ 24 12 ⎤ 12 ⎦ 24 4	1 → 12 2 → 24 3 → 36 4 → 48	12 / 50 \ sol: 4 36 3x 14 12 1x 2 12x5=60 60 - 12 48 *Sol:* 4 y sobran
Sustracción repetitiva	Adición repetitiva	**Cálculo "proporcional" por desdoblamiento**		**Destrucción y Construcción del dividendo**
Procedimientos de cálculo contextualizado				

Algoritmos elaborados para realizar la división 50:12 (Adaptado de Kraemer, 1999)