

SIMETRÍAS EN LAS FORMAS REALES DE $\mathfrak{e}_6$

$\mathfrak{e}_6$ Y SUS FORMAS

$\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$ única álgebra de Lie excepcional compleja de dimensión 78

Modelo unificado de las álgebras de Lie excepcionales: construcción de Tits- compleja:

Si C, C' dos álgebras de Hurwitz y $J = \mathcal{H}_3(C')$, entonces
 $\mathcal{T}(C, J) = \text{Der}(C) \oplus (C_0 \otimes J_0) \oplus \text{Der}(J)$

$\mathcal{T}(C, J)$	$\mathcal{H}_3(\mathbb{C})$	$\mathcal{H}_3(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$	$\mathcal{H}_3(\text{Mat}_2(\mathbb{C}))$	$\mathcal{H}_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$
$\mathbb{C}$	A_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\text{Mat}_2(\mathbb{C})$	C_3	A_5	D_6	E_7
$\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$	F_4	E_6	E_7	E_8

Una $\mathbb{R}$ -álgebra de Lie L es una **forma real** de $\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$ si $L^{\mathbb{C}} = L \oplus iL$ es isomorfo a $\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$.
En tal caso, $\sigma: \mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}, \sigma(x + iy) = x - iy$, es una **conjugación** (antihomomorfismo involutivo) con $\text{Fix } \sigma = L$.

Hay **5 formas reales** no isomorfas de $\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$, caracterizadas por la signatura de su forma Killing
 $k: L \times L \rightarrow \mathbb{R}, k(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y)$ (escribimos **sign** L):

$\mathfrak{e}_{6,6}$ (split), $\mathfrak{e}_{6,2}$, $\mathfrak{e}_{6,-14}$, $\mathfrak{e}_{6,-26}$, $\mathfrak{e}_{6,-78}$ (compacta)

GRADUACIONES

Una G -graduación Γ de un álgebra L es una descomposición $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ tal que $[L_g, L_h] \subset L_{g+h}$.
Los subespacios L_g son las **componentes homogéneas**.

La graduación es de **tipo** $(h_1, h_2, \dots)$ si hay h_j componentes de dimensión j .

Si $\Gamma: L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ y $\Gamma': L = \bigoplus_{h \in H} L'_h$ son graduaciones sobre G y H , se dice que Γ es un **refinamiento** de Γ' si cada L_g está contenido en algún L'_h .

Una graduación **fin**a es aquella sin refinamientos propios.

Objetivo: hallar graduaciones finas en las formas reales de $\mathfrak{e}_6$

Aquellas con complexificada fina, que aún no se sabe si son todas
(Obviamente si $\Gamma: L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ G -graduación, también lo será $\Gamma^{\mathbb{C}}: L^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{g \in G} L_g^{\mathbb{C}}$)

TÉCNICAS
CASO
COMPLEJO

MAD-grupo de Aut L
(maximal abeliano diagonalizable)

Graduación fina de L

Q

$\mapsto$

Γ_Q es la diagonalización simultánea
es una graduación fina con
grupo $\mathcal{X}(Q) = \text{Hom}(Q, \mathbb{C}^*)$.

Usando construcción de Tits:

$\mathcal{T}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathcal{T}$	$\mathbb{O}$	$\mathbb{O}_s$
$\mathcal{J}_c$	-78	-26	$\mathcal{M}_3$	-78	2
$\mathcal{J}_n$	-14	-26	$\mathcal{M}_2$	-14	2
$\mathcal{J}_s$	2	6	$\mathcal{M}_1$	-26	6

Usando construcción simétrica de Elduque:

$\mathfrak{g}_{(1,1,1)}$	$p\mathbb{C}$	$p(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})$	$\mathfrak{g}_{(1,-1,1)}$	$p\mathbb{C}$	$p(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})$
$p\mathbb{O}$	$\mathfrak{e}_{6,-78}$	$\mathfrak{e}_{6,-26}$	$p\mathbb{O}$	$\mathfrak{e}_{6,-14}$	$\mathfrak{e}_{6,-26}$
$p\mathbb{O}_s$	$\mathfrak{e}_{6,2}$	$\mathfrak{e}_{6,6}$	$p\mathbb{O}_s$	$\mathfrak{e}_{6,2}$	$\mathfrak{e}_{6,6}$

Usando construcción basada en $\mathfrak{e}_4$:

$\forall L$ forma real de $\mathfrak{e}_4^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(8, \mathbb{C})$, $\exists!$ L -módulo V_L tal que $V_L^{\mathbb{C}} \simeq V(\lambda_4)$.
Hay 2 formas de dotar a $L \oplus V_L$ como forma real de $\mathfrak{e}_6$:

L	$\mathfrak{sp}_8(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}_{2,2}(\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}_{3,1}(\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}_4(\mathbb{H})$
$L \oplus V_L$	2, 6	-14, 6	-26, 2	-78, 6

Usando conjugaciones:

$\mathcal{J}_c = \mathcal{H}_3(\mathbb{O}) \cong \mathbb{A}$
 $L = \text{Der } \mathbb{A} \oplus \mathbb{A}_0 = \mathcal{T}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathbb{A}) \cong \mathfrak{e}_{6,-26} \rightarrow L = \text{Fix } \sigma$
 $t_A \in \text{Aut } \mathbb{A}$ dado por id en $\mathcal{H}_3(\mathbb{H})$ y -id en $\sum_i \iota_i(\mathbb{H}^{\perp}) \rightarrow$ extensión a $S = L^{\mathbb{C}}$
 $t_B \in \text{Aut } \mathbb{A}$ dado por id en $\langle E_1, E_2, E_3 \rangle \oplus \iota_1(\mathbb{O})$ y -id en $\iota_2(\mathbb{O}) \oplus \iota_3(\mathbb{O})$
 $\omega \in \text{Aut } S$ dado por id en $(\text{Der } \mathbb{A})^{\mathbb{C}}$ y -id en $(\mathbb{A}_0)^{\mathbb{C}}$

Fix	σ	$\tau = \sigma\omega$	τt_A	τt_B	σt_A	σt_B
sign	-26	-78	2	-14	6	-26

TÉCNICAS CASO REAL

Sea L forma real de S álgebra simple fin-dim compleja.

1 - LEMA DE LOS NOES

Si $\Gamma: L = \sum_{g \in G} L_g$ graduación fina, entonces $|\text{sign } L - \dim S_e| \leq \sum_{\substack{g \in G \\ 2g=e}} \dim S_g$

2 - GRADUACIONES EN COMPACTAS

Sea L álgebra de Lie real G -graduada compacta (k definida). Entonces $G \cong \mathbb{Z}_2^r$

3 - Z-GRADUACIONES

L está $\mathbb{Z}$ -graduada $\Leftrightarrow L$ es no compacta

L tiene una $\mathbb{Z}$ -graduación con $\dim(\text{extremo})=1$

$\Leftrightarrow$ el diagrama de Satake tiene una bola blanca de multiplicidad 1

4 - LA BASE HOMOGÉNEA

Si $\Gamma^1: S = \sum_{g \in G} S_g$ graduación tal que $\exists B \subset \cup S_g$ base de L ,

$\Rightarrow$ existe Γ graduación de L tal que $\Gamma^{\mathbb{C}} = \Gamma^1$

5 - SOBRE $\mathbb{Z}_2$ -GRADUACIONES

Si $L = L_0 \oplus L_1$ es una $\mathbb{Z}_2$ -graduación,

$\Rightarrow \tilde{L} = (L, [,])$ con producto $[x_0 + x_1, y_0 + y_1] = [x_0, y_0] + [x_0, y_1] + [x_1, y_0] - [x_1, y_1]$
es otra forma real de S con $\text{sign } \tilde{L} = 2 \text{sign } L_0 - \text{sign } L$

Las G -graduaciones de L compatibles con dicha $\mathbb{Z}_2$ serán G -graduaciones de $\tilde{L}$.

6 - USANDO CONJUGACIONES

Sea Γ^1 graduación de S producida por un MAD-grupo Q .

Sea $\mathcal{C}_Q = \{\sigma: S \rightarrow S \text{ conjugación} \mid \text{Fix}(\sigma) \text{ tiene } \Gamma\text{-grad con } \Gamma^{\mathbb{C}} = \Gamma^1\}$.

Si $\sigma \in \mathcal{C}_Q \Rightarrow \mathcal{C}_Q = \{\sigma q \mid q \in Q, (\sigma q)^2 = \text{id}\}$.

DISTINGUIRLAS: $\text{sign Fix } \sigma = 78 - 2 \dim \text{fix}(\sigma\tau)$ para τ cualquier conjugación compacta ($\exists$) que commute con σ

GRADUACIONES EN ÁLGEBRAS AUXILIARES

Álgebras de Hurwitz

C álgebra de **composición** real ($\exists n: C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $n(xy) = n(x)n(y)$) con 1
Hay 7: $\mathbb{R}, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{O}$ y $\mathbb{O}_s (= \mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ con $l^2 = 1$.

Álgebras de Jordan

$\mathcal{H}_3(C, *) = \{x \in \text{Mat}_{3 \times 3}(C) \mid x^* = x\}^+$

$\mathcal{M}_3 = \mathcal{H}_3(\mathbb{C}, *)$
 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{H}_3(\mathbb{C}, \diamond)$
 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{H}_3(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, *)$

$\rightarrow \mathbb{Z}_3^2$
 $\rightarrow \mathbb{Z}^2$

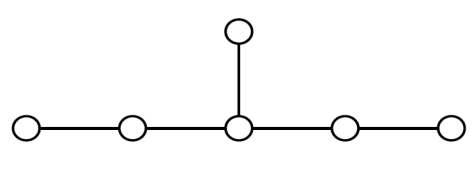
$x^* = (\bar{x}_{ji})$
 $x^{\diamond} = px^*p^{-1}, p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $x^{\diamond} = qx^*q^{-1}, q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z}_3^2$ en $\mathcal{M}_3: (1, 0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (0, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
la $\mathbb{Z}^2$ en $\mathcal{M}_1 \hookrightarrow$ la descomposición en raíces de $\text{Der } \mathcal{M}_1 \cong \mathfrak{af}_3$

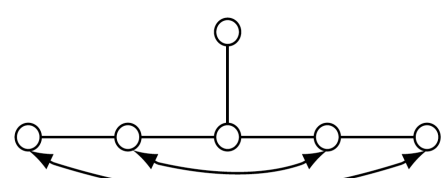
$\mathbb{Z}_2^3$ -graduaciones: mezclando las $\mathbb{Z}_2^2$ naturales en $\mathbb{O}$ y $\mathbb{O}_s$
con la $\mathbb{Z}_2^2$ natural en $\mathcal{H}_3(C) \hookrightarrow (0, 0)$ la diagonal y $\iota_i(C)$ componente hom

$\mathcal{J}_c = \mathcal{H}_3(\mathbb{O}, *) \rightarrow \mathbb{Z}_2^5$
 $\mathcal{J}_n = \mathcal{H}_3(\mathbb{O}, \heartsuit) \rightarrow \mathbb{Z}_2^5, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3$
 $\mathcal{J}_s = \mathcal{H}_3(\mathbb{O}_s, *) \rightarrow \mathbb{Z}_2^5, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}^4$
la $\mathbb{Z}^4$ en $\mathcal{J}_s \hookrightarrow$ la descomposición en raíces de $\text{Der } \mathcal{J}_s \cong \mathfrak{f}_4$

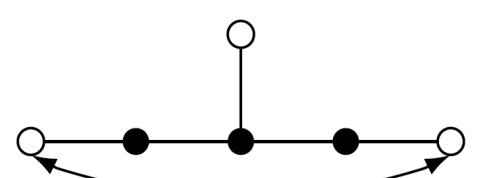
Graduaciones finas



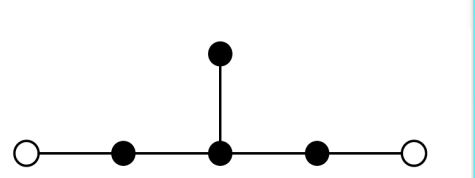
$\mathfrak{e}_{6,6}$



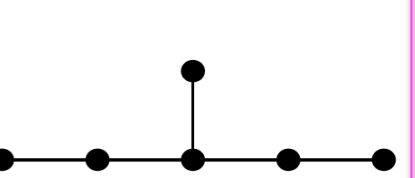
$\mathfrak{e}_{6,2}$



$\mathfrak{e}_{6,-14}$



$\mathfrak{e}_{6,-26}$



$\mathfrak{e}_{6,-78}$

$\mathbb{Z}^6$

SPLIT:
existe desc. Cartan

No split

No split

No split

Compacta

$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2^3$

$\pi(\mathbb{O}_s, \mathcal{M}_1)$

Subálgebra correspondiente a componentes homogéneas con torsión es de tipo $\mathfrak{d}_4$ +centro de dim 2. Esto acota posibles signaturas.

$\pi(\mathbb{O}, \mathcal{M}_1)$

1- Lema de los No

$\mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_2^3$

Subálgebra $\Sigma_{\mathbb{Z}_3} \mathcal{J}_s$ es de tipo $\mathfrak{d}_2$. Esto acota posibles signaturas.

$\pi(\mathbb{O}_s, \mathcal{M}_2)$

$\pi(\mathbb{O}, \mathcal{M}_2)$

1- Lema de los No

1- Lema de los No

$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_3^2$

1- Lema de los No

$\pi(\mathbb{O}_s, \mathcal{M}_2)$

$\pi(\mathbb{O}, \mathcal{M}_2)$

1- Lema de los No

1- Lema de los No

$\mathbb{Z}_3^4$

1- Lema de los No

$\pi(\mathbb{O}_s, \mathcal{M}_2)$

$\pi(\mathbb{O}, \mathcal{M}_2)$

1- Lema de los No

1- Lema de los No

$\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2$

$\pi(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_n)$

1- Lema de los No

1- Lema de los No

$\mathbb{Z}_2^6$

$\pi(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_n)$

$\pi(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathcal{J}_n)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_c)$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^4$

$\pi(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_n)$

$\pi(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathcal{J}_n)$

1- Lema de los No

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^3$

1- Lema de los No

$\pi(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_s)$

$\pi(\mathbb{C}, \mathcal{J}_n)$

$\pi(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathcal{J}_n)$

$\mathbb{Z}_2^7$

Base homogénea

6- $\mathcal{C}_Q = \sigma_0 Q$

6- $\mathcal{C}_Q = \sigma_0 Q$

6- Ningún automorfismo externo en $\sigma_0 \tau Q$ fija f_4

6- $\mathcal{C}_Q = \sigma_0 Q$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^5$

4-Base homogénea

$\leftrightarrow$ 5- con la split

3- Satake

2- compacta

$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2^3$

4-Base homogénea

$\leftrightarrow$ 5- con la split

3- Satake

2- compacta

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^4$

4-Base homogénea

$\leftrightarrow$ 5- con la split

Reducción a argumento en $\mathfrak{e}_4$

4,5-Base homogénea en $\mathfrak{sp}_{3,1}(\mathbb{H})$ y extender

2- compacta

$\mathbb{Z}_4^3$

Variantes de "5" para $\mathbb{Z}_4$ -graduaciones

?

?

1- Lema de los No

2- compacta

GRADUACIONES EN ÁLGEBRAS AUXILIARES

Álgebras de Hurwitz

C álgebra de **composición** real ($\exists n: C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $n(xy) = n(x)n(y)$) con 1
Hay 7: $\mathbb{R}, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{O}$ y $\mathbb{O}_s (= \mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ con $l^2 = 1$.

Álgebras de Jordan

$\mathcal{H}_3(C, *) = \{x \in \text{Mat}_{3 \times 3}(C) \mid x^* = x\}^+$

$\mathcal{M}_3 = \mathcal{H}_3(\mathbb{C}, *)$
 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{H}_3(\mathbb{C}, \diamond)$
 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{H}_3(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, *)$

$\rightarrow \mathbb{Z}_3^2$
 $\rightarrow \mathbb{Z}^2$

$x^* = (\bar{x}_{ji})$
 $x^{\diamond} = px^*p^{-1}, p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $x^{\diamond} = qx^*q^{-1}, q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z}_3^2$ en $\mathcal{M}_3: (1, 0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (0, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
la $\mathbb{Z}^2$ en $\mathcal{M}_1 \hookrightarrow$ la descomposición en raíces de $\text{Der } \mathcal{M}_1 \cong \mathfrak{af}_3$

$\mathbb{Z}_2^3$ -graduaciones: mezclando las $\mathbb{Z}_2^2$ naturales en $\mathbb{$