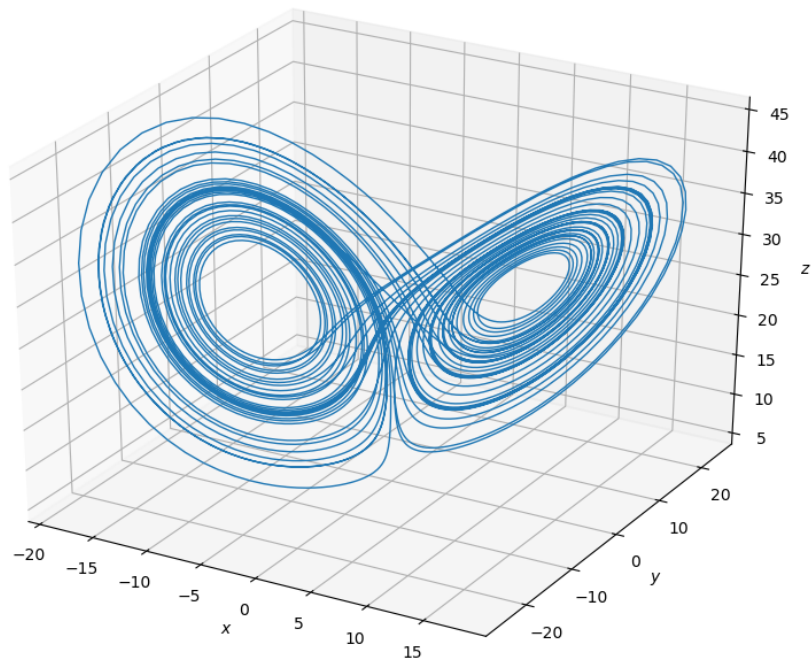


Modelización

José M.^a Gallardo



Modelización by José M. Gallardo is licensed under [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)



*En esencia, todos los modelos
están equivocados,
pero algunos son útiles.*

George Box

ÍNDICE

Prefacio	IX
Introducción	XI
1. Modelos de advección-difusión	1
1.1. Modelo discreto de advección-difusión	2
1.1.1. Modelo discreto de difusión	5
1.1.2. Modelo discreto de advección	5
1.1.3. Modelo discreto de advección-difusión	7
1.1.4. Un caso particular: modelos de población	8
1.1.5. Comentarios sobre el paso de tiempo	10
1.1.6. Redes bidimensionales de compartimentos	12
1.2. Modelo continuo de advección-difusión	17
1.2.1. Modelo continuo de difusión	21
1.2.2. Modelo continuo de advección	22
1.2.3. Modelo continuo de advección-difusión	23
1.3. Modelos bidimensionales y tridimensionales	24
1.4. Modelo continuo de advección-difusión: soluciones	25
1.4.1. Soluciones del modelo continuo de advección	25
1.4.2. Soluciones del modelo continuo de difusión	28
1.5. Discretización del modelo de advección-difusión	39
1.5.1. Construcción del esquema numérico	39
1.5.2. Consistencia, estabilidad y convergencia	43
2. Introducción a la teoría de sistemas dinámicos	47

3. Sistemas dinámicos discretos de una variable	55
3.1. Introducción	55
3.2. Modelos de población discretos	57
3.2.1. Modelo de Malthus	57
3.2.2. Modelo logístico	58
3.3. Algunos resultados sobre estabilidad	62
3.4. Órbitas periódicas	67
3.4.1. Órbitas periódicas estables y atractoras	69
3.4.2. Órbitas p -periódicas	71
3.5. Algunas consideraciones finales	75
4. Sistemas dinámicos continuos de una variable	83
4.1. Introducción	83
4.2. Modelos de población continuos	86
4.2.1. Modelo de Malthus	86
4.2.2. Modelo logístico	87
4.3. Criterios de estabilidad para equilibrios	92
4.4. Modelos logísticos con tasa de captura	94
4.4.1. Modelo logístico con tasa de captura constante	94
4.4.2. Modelo logístico con tasa de captura proporcional a la población	98
4.5. Diagramas de bifurcación	100
4.5.1. Bifurcación del tridente	101
4.5.2. Histéresis	103
4.5.3. Modelos de tipo logístico con umbral	105
4.5.4. Consideraciones generales	108
4.6. Elección óptima de parámetros	108
5. Sistemas dinámicos continuos de varias variables	111
5.1. Introducción	111
5.2. Exponencial de una matriz	115
5.3. Sistemas dinámicos lineales	118
5.4. Clasificación de los sistemas lineales en el plano	119
5.5. Estudio de la estabilidad para sistemas no lineales	136
5.6. Modelos de competencia	142
5.7. Estabilidad de equilibrios no hiperbólicos	148
5.7.1. Coordenadas polares	148
5.7.2. Sistemas mecánicos	152
5.7.3. Estudio de la estabilidad mediante funciones de Lyapunov	163
5.7.4. Comentarios finales	166

PREFACIO

El presente trabajo recopila la materia que he impartido durante los últimos años en la asignatura *Modelización*, del Grado en Matemáticas de la Universidad de Málaga.

En una primera parte, se realiza un estudio de las ecuaciones que modelizan los procesos de *advección* (o transporte) y de *difusión* de una sustancia en un medio. Tras una introducción donde planteamos, para fijar ideas, un modelo discreto de advección-difusión, nos centramos en la deducción de un modelo continuo, cuya escritura involucra ecuaciones en derivadas parciales. Los modelos se plantean en una única dimensión espacial, aunque también damos ideas sobre sus extensiones a dimensión superior. Por otra parte, analizamos la forma de las soluciones del modelo continuo en algunos casos especiales, y planteamos la construcción de un esquema numérico que permite aproximar las soluciones en los casos en los que no puedan obtenerse de forma exacta.

El grueso del trabajo se centra en un estudio básico de la teoría de *sistemas dinámicos*, que permite analizar el comportamiento de un modelo de evolución (dependiente del tiempo) de forma cualitativa, esto es, sin necesidad de determinar las soluciones del modelo de forma exacta o aproximada. Tras introducir una serie de generalidades sobre dicha teoría, donde se introducen una serie de conceptos y definiciones básicos (órbitas, puntos de equilibrio, estabilidad, etc.), comenzamos con el estudio de sistemas dinámicos discretos de una variable, que esencialmente se reducen al estudio de las iteraciones de una cierta función definida en un intervalo. Veremos que, a pesar de la simplicidad de su definición, los sistemas dinámicos discretos presentan una gran variedad de comportamientos complejos.

A continuación nos centramos en el estudio de sistemas dinámicos continuos de una variable, que se definen a partir de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria. De esta forma, a partir de un dato inicial, la solución correspondiente nos da la evolución temporal del sistema. Estudiaremos asimismo sistemas dependientes de un parámetro, usando para ello los denominados diagramas de bifurcación.

La última parte del trabajo trata sobre sistemas dinámicos continuos de varias variables, aunque principalmente consideraremos sistemas con dos variables. De nuevo se trata de estudiar, de forma cualitativa, las soluciones de un problema de valores iniciales para un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso, la herramienta básica para dicho es-

tudio es el diagrama de fases, donde se representan las curvas definidas por las soluciones del sistema. Analizamos en primer lugar el caso lineal, para el que existe una clasificación de todos los posibles diagramas de fases. A continuación pasamos al estudio, más complejo, de los sistemas no lineales. Para ello, nos basamos en el teorema de linealización de Hartman-Grobman, que nos permite deducir la forma local del diagrama de fases a partir de una linealización de las ecuaciones, así como en el método de estabilidad de Lyapunov.

Desde un punto de vista de las aplicaciones, además de los modelos de advección y difusión comentados anteriormente, también aplicamos las teorías desarrolladas a lo largo del trabajo al estudio de modelos de población, en los cuales se analiza la evolución temporal de poblaciones de tipo biológico.

José M.^a Gallardo
Depto. Análisis Matemático,
Estadística e I. O.,
y Matemática Aplicada
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

INTRODUCCIÓN

Modelos

El conocimiento científico estudia la realidad a través de **modelos**, que permiten *comprender, predecir* y, si es posible, *controlar* los sistemas reales que se estudian. Un modelo matemático consiste en una ecuación (o conjunto de ecuaciones) que representa el comportamiento de un sistema físico. Actualmente, el modelado matemático es una disciplina que juega un papel esencial en la ciencia y la tecnología. Por otra parte, el modelado no solo sirve para simular la realidad física, sino que puede contribuir a un conocimiento más profundo de los sistemas físicos.

En la base de todos los modelos matemáticos siempre hay un proceso de simplificación y reducción. El modelado implica un compromiso entre la necesidad de construir un modelo que represente de forma muy precisa la realidad física (que puede ser muy costoso, o incluso imposible de construir), y la necesidad de tener un modelo efectivo que aproxime la realidad física de forma adecuada (aunque no sea tan preciso y general).

Tipos de variables

En un **modelo matemático**, un sistema real se representa mediante variables que se relacionan entre sí. Atendiendo a la naturaleza de los valores que pueden tomar, las variables pueden ser:

- **Variables discretas:** toman valores en un conjunto numérico *finito* o *infinito numerable*.
- **Variables continuas:** toman valores en un conjunto numérico *infinito no numerable* y *continuo*, es decir, si la variable puede tomar dos valores entonces también puede tomar todas los valores intermedios.

Por otro lado, atendiendo al papel que juegan en un modelo, hay dos tipos de variables:

- **Variables dependientes o de estado:** indican el estado del sistema. En los modelos que veremos, serán la temperatura, la concentración, la biomasa, etc.
- **Variables independientes:** variables en función de las cuales cambia el estado del sistema. En los modelos que veremos, serán por lo general el tiempo y las variables de espacio.

En el proceso de modelado, las leyes que rigen el comportamiento del sistema se expresan matemáticamente como relaciones entre las variables dependientes e independientes. A menudo, la expresión matemática de dichas leyes es una **ecuación**, cuya solución proporciona la evolución espacio-temporal de la variable de estado, es decir, el comportamiento físico, en el marco del modelo matemático, del sistema físico estudiado.

Modelos: clasificaciones

Atendiendo a la naturaleza de las variables independientes, los modelos pueden ser clasificados como sigue:

- **Modelos discretos:** las variables independientes son discretas.
- **Modelos continuos:** las variables independientes son continuas.
- **Modelos semidiscretos:** algunas variables independientes son discretas y otras continuas.

Según el tipo de leyes que relacionan las variables, los modelos pueden clasificarse como:

- **Modelos deterministas:** las leyes no dependen del azar. Se supone que una vez que se conocen todos los datos necesarios (situación inicial, influencia del medio externo, etc.), la evolución del sistema que se modela queda determinada.
- **Modelos estocásticos:** las leyes dependen del azar. En este caso, una vez conocidos los datos necesarios, hay más de una evolución posible. Se trata de determinar con qué probabilidad ocurre una u otra.

Nos centraremos en el estudio de modelos deterministas discretos y continuos sencillos.

Modelos matemáticos deterministas discretos

En los modelos discretos que simulan la evolución en el tiempo de un sistema, se obtiene generalmente una **ecuación en diferencias** cuya solución es una *sucesión*.

El siguiente ejemplo aparecía en el *Liber Abaci* que escribió en 1202 Leonardo de Pisa, *Fibonacci*, para divulgar en Europa el sistema de numeración arábigo-hindú:

Un hombre tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado. Se desea saber cuántos son creados a partir de este par cuando es su naturaleza parir otro par en un mes, y en el segundo mes los nacidos parir también.

Observación. Hay que tener en cuenta que cada pareja de conejos necesita dos meses de vida para hacerse adultos y poder procrear. A partir de entonces, cada mes criará una nueva pareja, que a su vez dará lugar a otro par de conejos cuando tenga dos meses de vida. En el primer mes tan solo hay una pareja, que todavía no puede procrear. En el segundo mes sigue habiendo una pareja, que dará lugar a otra pareja en el tercer mes. \square

Escribamos la ecuación en diferencias correspondiente:

- **Variable dependiente:** número de parejas. Designaremos por x_n al número de parejas que hay en el n -ésimo mes.
- **Variable independiente:** tiempo medido en meses. Si denominamos 0 al mes inicial, el tiempo tomará valores en los naturales.
- **Ley de crecimiento:**

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}.$$

- **Condición inicial:**

$$x_0 = x_1 = 1.$$

- La solución es la famosa *sucesión de Fibonacci*:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Lo ideal sería tener una fórmula que nos proporcionara el valor de x_n sin necesidad de tener que llegar a dicho valor sumando los valores anteriores. En este caso, es posible. Por mucho que pueda sorprender, se demuestra que

$$x_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

En general, aunque no se disponga de una fórmula así, los ordenadores permiten hacer muchas operaciones en poco tiempo de manera fiable: la informática juega un papel fundamental en el proceso de modelado de sistemas complejos.

La sucesión de Fibonacci tiene muchas propiedades curiosas. Por ejemplo, el factor de crecimiento del número de parejas tiende al *número áureo* φ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Modelos matemáticos deterministas continuos

En los modelos continuos que simulan la evolución en el tiempo de un sistema, se obtiene generalmente una **ecuación diferencial** (o un sistema de ecuaciones diferenciales). La solución consiste en una o más funciones que expresan cómo varían las variables dependientes en función de las independientes.

- Si hay una única variable independiente (tiempo), aparecen **ecuaciones diferenciales ordinarias**. Algunos ejemplos son: el modelo de Malthus, el modelo logístico, los modelos de varias especies, etc.
- Si hay varias variables independientes (tiempo, espacio), aparecen **ecuaciones en derivadas parciales**. Este tipo de ecuaciones aparece en la Mecánica de medios continuos (fluidos, estructuras, etc.), en Biología, Economía, etc.

Una vez obtenida la ecuación diferencial que rige el sistema bajo estudio y los datos necesarios (coeficientes de la ecuación, condiciones iniciales y de contorno, etc.), lo ideal sería resolver la ecuación para obtener la expresión exacta del valor que toman las variables dependientes en función de las independientes.

En muchos casos, esto no es fácil o incluso no es posible. En tales casos, es necesario recurrir a **métodos numéricos**, que permiten obtener soluciones tan aproximadas como se desee (o como se pueda). Como veremos, estos métodos consisten en obtener un modelo discreto, más fácil de resolver que el continuo, que aproxima de alguna manera al modelo de partida. Este proceso se denomina **discretización**.

Para modelos complejos, la resolución de las ecuaciones en diferencias de los modelos discretos que se obtienen conduce a millones de operaciones, que se hacen en el ordenador con ayuda de un programa informático.

Modelos matemáticos: error y validación

Obsérvese que en todo el proceso de modelado hay muchas fuentes de **error**:

- Errores de modelización.
- Errores de medición.
- Errores de discretización.
- Errores de redondeo.

Para estar seguro de que el modelo que se obtiene finalmente tiene alguna utilidad práctica, es necesario comparar los resultados que proporciona con datos obtenidos mediante experimentación. A este proceso se le denomina **validación**.

Las principales ventajas del uso de los modelos matemáticos son su bajo coste y su capacidad para tratar sistemas muy complejos con un gran número de variables que se relacionan de manera no lineal.

Su mayor inconveniente es que, debido al alto grado de complejidad, puede resultar difícil sacar conclusiones de los resultados que proporcionan. En particular, en el caso de **sistemas caóticos**, la capacidad de predicción de un modelo matemático puede ser muy limitada en el tiempo (ejemplo: Meteorología).

Como cualquier otro tipo de herramienta, los modelos matemáticos han de ser usados críticamente y con un conocimiento suficiente de su rango de validez y sus limitaciones.

TEMA

1

MODELOS DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN

A lo largo de este tema estudiaremos cómo deducir y resolver las ecuaciones de un modelo de *advección-difusión*. La advección y la difusión son dos mecanismos de singular importancia en el modelado de sistemas físicos. La *advección* hace referencia al transporte de una sustancia o una variable física mediante un fluido que se mueve con una cierta velocidad. Por ejemplo, podemos pensar en el transporte del calor o la humedad a través del océano o la atmósfera, o en el transporte de un contaminante en un río.

Un ejemplo del proceso de difusión lo tenemos cuando se abre un bote de perfume en una habitación en la que no hay corrientes de aire: las moléculas de perfume se esparcen por el aire debido a la difusión molecular. Este fenómeno fue descrito por primera vez por Robert Brown (c. 1827), a partir de observaciones microscópicas de granos de polen flotando en agua. Brown observó que los granos se encontraban en continuo movimiento siguiendo caminos irregulares, aparentemente aleatorios, y constató que dicho movimiento no era debido a fuerzas externas (vibraciones, corrientes, etc.). En su honor, dicho tipo de movimiento se conoce como *movimiento browniano*.

La explicación de este fenómeno fue encontrada por Albert Einstein (c. 1900): los granos de polen (cuyo diámetro es de, aproximadamente, $6 \mu\text{m} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$) están bajo un bombardeo constante de las moléculas de agua (cuyo diámetro es de $3 \cdot 10^{-4} \mu\text{m} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$); este gran número de impactos aleatorios da lugar a un movimiento browniano irregular.

Si se tiene inicialmente un número grande de partículas, cada una de ellas siguiendo un movimiento browniano, al pasar el tiempo tenderán a esparcirse por todo el medio. Las partículas en las regiones con mayor concentración tenderán a moverse hacia las zonas con menor concentración. Este es el proceso conocido como *difusión*. En resumen, la difusión es la

manifestación macroscópica del movimiento browniano que tiene lugar a nivel microscópico.

En la primera parte del tema nos centraremos en el estudio de un modelo discreto, y en la segunda, de uno continuo.

1.1. Modelo discreto de advección-difusión

Para motivar la construcción del modelo, consideremos un sistema formado por N compartimentos C_1, \dots, C_N conectados entre sí, de manera que:

- El compartimento C_i se comunica con los compartimentos C_{i-1} y C_{i+1} , si $i = 2, \dots, N-1$.
- El compartimento C_1 se comunica con el exterior y con el compartimento C_2 .
- El compartimento C_N se comunica con el compartimento C_{N-1} y con el exterior.

Ejemplo 1.1. Por fijar ideas, podemos pensar en diversos sistemas que se hallan en la realidad: células que componen una fibra de un cierto tejido, conectadas por membranas; nodos de una red hidráulica conectados por tuberías; porciones de una tubería, etc. \square

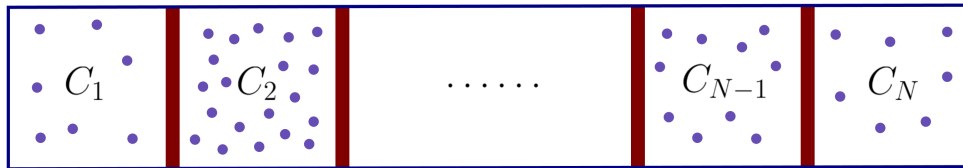


Figura 1.1: Esquema del modelo de compartimentos.

Lo que se desea modelar es la evolución de la distribución de una cierta sustancia \mathcal{S} (un nutriente, un contaminante, el calor, una población de microorganismos, etc.) que puede pasar de un compartimento a sus vecinos y del exterior a los extremos de la red (o viceversa), y que puede ser creada o destruida en cada uno de los compartimentos.

Aunque el sistema modela una red unidimensional, cada compartimento se supone tridimensional. Denominaremos:

- V_i al volumen del compartimento C_i .
- $A_{i+1/2}$ al área de la membrana que conecta los compartimentos C_i y C_{i+1} . En particular, $A_{1/2}$ y $A_{N+1/2}$ representan, respectivamente, las áreas de las membranas que conectan el primer y último compartimentos con el exterior.
- $d_{i+1/2}$ al espesor de la membrana que conecta los compartimentos C_i y C_{i+1} . Denotaremos por $d_{1/2}$ y $d_{N+1/2}$, respectivamente, a los espesores de las membranas que conectan el primer y último compartimentos con el exterior.

Como se trata de un modelo discreto, estamos interesados en cómo se distribuye \mathcal{S} en la red en una serie finita de instantes de tiempo. Denominaremos:

- t_0, t_1, \dots, t_M a los instantes de tiempo en los que se desea simular la distribución. Supondremos por comodidad que $t_0 = 0$ y que los instantes de tiempo están igualmente espaciados, es decir:

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 1, \dots, M,$$

siendo Δt el tiempo transcurrido entre dos instantes consecutivos.

- q_i^n a la cantidad total de \mathcal{S} que hay en el compartimento C_i en el instante t_n .
- ρ_i^n a la densidad en el compartimento C_i en el instante t_n , es decir,

$$\rho_i^n = \frac{q_i^n}{V_i}.$$

Denotaremos por $F_{i+1/2}^n$ al *flujo* entre los compartimentos C_i y C_{i+1} durante el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, es decir a la cantidad total de \mathcal{S} por unidad de tiempo que pasa de uno a otro compartimento. Se establece el siguiente convenio:

- Si $F_{i+1/2}^n > 0$, entonces \mathcal{S} viaja del compartimento C_i al C_{i+1} .
- Si $F_{i+1/2}^n < 0$, entonces \mathcal{S} viaja del compartimento C_{i+1} al C_i .

Por último, denominaremos G_i^n a la cantidad total de \mathcal{S} que se crea o se destruye por unidad de tiempo en el compartimento C_i durante el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$. Se utiliza el siguiente convenio:

- Si $G_i^n > 0$, significa que \mathcal{S} se crea.
- Si $G_i^n < 0$, entonces \mathcal{S} se destruye.

El término G_i^n suele denominarse *término fuente* o *término de reacción*.

Ejemplo 1.2. Si $F_{7/2}^2 = F_{3+1/2}^2 = -0.75$, esto significa que entre los tiempos t_2 y t_3 pasan 0.75 unidades de \mathcal{S} por unidad de tiempo del compartimento C_4 al C_3 . Si $\Delta t = 4$, la cantidad total que pasa es de 3 unidades.

Si $G_5^3 = -3$, significa que entre los tiempos t_3 y t_4 se destruyen 3 unidades de \mathcal{S} por unidad de tiempo en el compartimento C_5 . Si $\Delta t = 2$, la cantidad total que se destruye es de 6 unidades. \square

La escritura matemática del modelo se basa en la *ley de conservación de la cantidad de masa*, que puede escribirse como:

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \Delta t F_{i-1/2}^n - \Delta t F_{i+1/2}^n + \Delta t G_i^n, \quad (1.1)$$

para $i = 1, \dots, N$ y $n = 0, \dots, M - 1$. Esta ecuación puede interpretarse de la siguiente forma: la cantidad de \mathcal{S} que hay en el compartimento C_i en el instante t_{n+1} (esto es, q_i^{n+1}) es igual a

- la que había en el instante anterior en el mismo compartimento: q_i^n ;
- más/menos la que entra o sale por la izquierda: $\Delta t F_{i-1/2}^n$;

- más/menos la que entra o sale por la derecha: $\Delta t F_{i-1/2}^n$;
- más/menos la que se crea o se destruye en el compartimento: $\Delta t G_i^n$.

Observación 1.1. Para establecer los signos de los términos que aparecen en la ecuación (1.1), pensemos por el momento que la sustancia \mathcal{S} viaja en sentido positivo (esto es, de izquierda a derecha), por lo que $F_{i-1/2}^n > 0$ y $F_{i+1/2}^n > 0$. De esta forma, por la frontera izquierda *entra* una cantidad $\Delta t F_{i-1/2}^n$ de sustancia, que se le añade a la cantidad que ya había dentro de la celda, q_i^n . Por el contrario, por la frontera derecha *sale* una cantidad $\Delta t F_{i+1/2}^n$ de sustancia, que hay que restar a q_i^n . Si suponemos asimismo que $G_i^n > 0$, esto significa que en la celda C_i se *crea* una cantidad de sustancia $\Delta t G_i^n$, que se añade a q_i^n . Por tanto, la cantidad resultante de sustancia será la que había inicialmente (q_i^n), *más* la que entra por la izquierda ($\Delta t F_{i-1/2}^n$), *menos* la que sale por la derecha ($\Delta t F_{i+1/2}^n$), *más* la que se crea en la propia celda ($\Delta t G_i^n$): esto nos da la ecuación (1.1). Si ahora usamos un razonamiento similar para cada una de las posibles combinaciones de signos para $F_{i-1/2}^n$, $F_{i+1/2}^n$ y G_i^n , puede verse que se obtiene exactamente la misma ecuación. \square

La ecuación (1.1) debe complementarse con algunos datos adicionales:

- La distribución inicial de \mathcal{S} (*condición inicial*):

$$q_1^0, \dots, q_N^0,$$

o, equivalentemente,

$$\rho_1^0, \dots, \rho_N^0.$$

- El intercambio con el exterior (*condiciones de contorno*):

$$F_{1/2}^n, \quad F_{N+1/2}^n, \quad n = 0, \dots, M-1.$$

Respecto a las *incógnitas*, queremos conocer la cantidad de \mathcal{S} que hay en cualquier compartimento en cualquiera de los instantes de tiempo considerados:

$$q_i^n, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M,$$

o, equivalentemente,

$$\rho_i^n, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M.$$

Por último, es necesario realizar el *cierre del modelo*: para poder calcular las incógnitas a partir de los datos, es necesario conocer las expresiones de los flujos $F_{i+1/2}^n$ entre compartimentos y la cantidades G_i^n que se crean o se destruyen en cada compartimento. Las expresiones de estos términos, que pueden depender de las incógnitas, son las que expresan matemáticamente los mecanismos físicos que hacen evolucionar la distribución de la sustancia \mathcal{S} . En particular, vamos a ver expresiones del flujo $F_{i+1/2}^n$ que modelan procesos de *difusión* y *advección*.

1.1.1. Modelo discreto de difusión

Para deducir la expresión del flujo por difusión nos basaremos en la *ley de Fick*, que establece que el flujo entre dos compartimentos es proporcional a la diferencia de densidades, y va desde donde la densidad es mayor a donde es menor. Matemáticamente, esta ley se expresa como

$$F_{i+1/2}^n = k_{i+1/2}(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n),$$

siendo $k_{i+1/2} > 0$ el factor de proporcionalidad (que puede cambiar de unos compartimentos a otros). Admitiremos que $k_{i+1/2}$ tiene la expresión

$$k_{i+1/2} = \mu \frac{A_{i+1/2}}{d_{i+1/2}},$$

siendo μ el *coeficiente de difusión*, que depende de la sustancia y del medio en el que se difunde, y que supondremos constante.

Observación 1.2. La expresión para $k_{i+1/2}$ es adecuada desde un punto de vista físico. En efecto, mientras mayor sea el área $A_{i+1/2}$ de la membrana, más grande será $k_{i+1/2}$, lo que significa que pasará mayor cantidad de sustancia de un compartimento al otro. Por el contrario, al aumentar el espesor $d_{i+1/2}$ de la membrana, el factor $k_{i+1/2}$ disminuye, por lo que pasará menor cantidad de sustancia de un compartimento a otro. El factor μ sirve para diferenciar entre distintos tipos de sustancias o medios. \square

Sustituyendo la expresión del flujo en la ecuación (1.1), resulta

$$\begin{aligned} q_i^{n+1} &= q_i^n + \Delta t F_{i-1/2}^n - \Delta t F_{i+1/2}^n + \Delta t G_i^n \\ &= q_i^n + \Delta t k_{i-1/2}(\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) - \Delta t k_{i+1/2}(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) + \Delta t G_i^n \\ &= q_i^n + \Delta t \mu \left(\frac{A_{i-1/2}}{d_{i-1/2}}(\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) - \frac{A_{i+1/2}}{d_{i+1/2}}(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) \right) + \Delta t G_i^n. \end{aligned}$$

Dividiendo ambos términos de la igualdad por V_i , obtenemos

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \mu \left(\frac{A_{i-1/2}}{d_{i-1/2}}(\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) - \frac{A_{i+1/2}}{d_{i+1/2}}(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) \right) + \Delta t g_i^n,$$

siendo

$$g_i^n = \frac{G_i^n}{V_i}$$

la cantidad de sustancia que se crea o se destruye por unidad de volumen y unidad de tiempo en el compartimento C_i , durante el intervalo temporal $[t_n, t_{n+1}]$.

1.1.2. Modelo discreto de advección

Consideremos el caso de *transporte inerte*, en el que se supone que un fluido recorre el sistema a velocidad u , transportando en su movimiento la sustancia S .

Si $u > 0$, en un intervalo de tiempo de longitud Δt la cantidad de S que sale de C_i y entra en C_{i+1} es

$$u \Delta t A_{i+1/2} \rho_i^n.$$

Si, por el contrario, $u < 0$, en un intervalo de tiempo de longitud Δt la cantidad de S que sale de C_{i+1} y entra en C_i es

$$u \Delta t A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n.$$

Por tanto, podemos escribir el flujo de advección como

$$F_{i+1/2}^n = \begin{cases} u A_{i+1/2} \rho_i^n & \text{si } u > 0, \\ u A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Esta fórmula es asimismo válida para velocidades no constantes.

Supongamos, por ejemplo, que $u > 0$. Entonces, la ecuación (1.1) quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_i^{n+1} &= q_i^n + \Delta t F_{i-1/2}^n - \Delta t F_{i+1/2}^n + \Delta t G_i^n \\ &= q_i^n + \Delta t u A_{i-1/2} \rho_{i-1}^n - \Delta t u A_{i+1/2} \rho_i^n + \Delta t G_i^n \\ &= q_i^n + \Delta t u (A_{i-1/2} \rho_{i-1}^n - A_{i+1/2} \rho_i^n) + \Delta t G_i^n. \end{aligned}$$

Dividiendo los dos términos de la igualdad por V_i , obtenemos

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} u (A_{i-1/2} \rho_{i-1}^n - A_{i+1/2} \rho_i^n) + \Delta t g_i^n.$$

De forma análoga, si $u < 0$ se deduce

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} u (A_{i-1/2} \rho_i^n - A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n) + \Delta t g_i^n.$$

Es posible incluir los dos casos, $u > 0$ y $u < 0$, en una única fórmula, lo que será cómodo a la hora de manejar las expresiones del modelo o programarlas en el ordenador. Para ello, dado un número real a , se define su *parte positiva* como

$$a^+ = \text{máx}(a, 0),$$

y su *parte negativa* como

$$a^- = \text{mín}(a, 0).$$

Se verifica trivialmente que $a = a^+ + a^-$ y $|a| = a^+ - a^-$. Usando esta notación, el flujo por advección puede escribirse en una única expresión como

$$F_{i+1/2}^n = u^+ A_{i+1/2} \rho_i^n + u^- A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n.$$

Usando esta expresión para el flujo, la expresión resultante del modelo de advección es la siguiente:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} u^+ (A_{i-1/2} \rho_{i-1}^n - A_{i+1/2} \rho_i^n) + \frac{\Delta t}{V_i} u^- (A_{i-1/2} \rho_i^n - A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n) + \Delta t g_i^n.$$

1.1.3. Modelo discreto de advección-difusión

Combinando los mecanismos de advección y difusión introducidos en las secciones anteriores, podemos escribir el *flujo de advección-difusión* como

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^n &= k_{i+1/2}(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) + u^+ A_{i+1/2} \rho_i^n + u^- A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n \\ &= \mu \frac{A_{i+1/2}}{d_{i+1/2}} (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) + u^+ A_{i+1/2} \rho_i^n + u^- A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n \\ &= A_{i+1/2} \left(\frac{\mu}{d_{i+1/2}} (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) + u^+ \rho_i^n + u^- \rho_{i+1}^n \right). \end{aligned}$$

Por tanto, el *modelo de advección-difusión* adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} u^+ (A_{i-1/2} \rho_{i-1}^n - A_{i+1/2} \rho_i^n) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{V_i} u^- (A_{i-1/2} \rho_i^n - A_{i+1/2} \rho_{i+1}^n) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{V_i} \mu \left(\frac{A_{i-1/2}}{d_{i-1/2}} (\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) - \frac{A_{i+1/2}}{d_{i+1/2}} (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) \right) \\ &\quad + \Delta t g_i^n. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso particular en que todos los compartimentos son iguales y tienen forma cilíndrica y volumen dado por

$$V = A \cdot L,$$

siendo A el área de la base y L la altura. Supongamos además que las membranas coinciden con las bases de los compartimentos (por lo que su área es A) y que todas tienen el mismo espesor d . Entonces el modelo puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{\Delta t}{AL} u^+ (A \rho_{i-1}^n - A \rho_i^n) + \frac{\Delta t}{AL} u^- (A \rho_i^n - A \rho_{i+1}^n) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{AL} \mu \left(\frac{A}{d} (\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) - \frac{A}{d} (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) \right) + \Delta t g_i^n. \end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{\Delta t}{L} (u^+ (\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) + u^- (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n)) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{L} \frac{\mu}{d} (\rho_{i-1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i+1}^n) + \Delta t g_i^n. \end{aligned}$$

Observación 1.3. El valor $k = \mu/d$ se denomina *coeficiente de permeabilidad*. □

Para completar el modelo debemos especificar la forma del flujo entre el exterior y el sistema. Concretamente, hay que proporcionar como datos los flujos $F_{1/2}^n$ y $F_{N+1/2}^n$. En la práctica se pueden dar dos situaciones:

- Los flujos son conocidos. Por ejemplo, si el sistema está aislado del exterior,

$$F_{1/2}^n = F_{N+1/2}^n = 0, \quad n = 0, \dots, M-1.$$

- La densidad de la sustancia en el exterior ρ^{ext} es conocida. Entonces, la expresión de los flujos será

$$F_{1/2}^n = A_{1/2} \left(\frac{\mu}{d_{1/2}} (\rho^{ext} - \rho_1^n) + u^+ \rho^{ext} + u^- \rho_1^n \right),$$

$$F_{N+1/2}^n = A_{N+1/2} \left(\frac{\mu}{d_{N+1/2}} (\rho_N^n - \rho^{ext}) + u^+ \rho_N^n + u^- \rho^{ext} \right).$$

Estas expresiones se deducen a partir de la forma general del flujo $F_{i+1/2}^n$ para los índices $i = 0$ e $i = N$, definiendo $\rho_0^n = \rho^{ext}$ y $\rho_N^n = \rho^{ext}$.

Respecto al término de creación o destrucción de \mathcal{S} , algunas posibles expresiones son las siguientes:

- $G_i^n = 0$. Este es el caso de los *modelos conservativos*, en los que no se crea ni se destruye sustancia.
- G_i^n es un dato. Por ejemplo, si \mathcal{S} es la energía interna y se produce calentamiento o enfriamiento exterior de los compartimentos.
- G_i^n es una función de q_i^n . Este caso se da, por ejemplo, en modelos de población, modelos de advección-difusión-reacción, etc. Por ejemplo:

- Si \mathcal{S} es la biomasa de una población cuyo crecimiento se ajusta a un modelo logístico (véase la sección 1.1.4), tendríamos

$$G_i^n = kq_i^n \left(1 - \frac{q_i^n}{Q_i} \right),$$

siendo k la tasa de natalidad específica de la especie y Q_i la población sostenible en el i -ésimo compartimento.

- Si \mathcal{S} es una sustancia radiactiva, tendríamos

$$G_i^n = -\frac{\log(2)}{T_{1/2}} q_i^n,$$

siendo $T_{1/2}$ la semivida de la sustancia, que es el tiempo que tarda una cantidad de sustancia en reducirse a la mitad.

1.1.4. Un caso particular: modelos de población

Supongamos que \mathcal{S} representa una población de microorganismos. En tal caso, el término G_i^n puede expresarse a partir de la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad de la especie. Es decir, supondremos que

$$G_i^n = k_N q_i^n - k_M q_i^n,$$

donde k_N es la *tasa de natalidad*, que nos dice cuántos individuos han nacido entre los instantes de tiempo t_n y t_{n+1} , por cada individuo presente y por unidad de tiempo. De forma análoga se define k_M , la *tasa de mortalidad*, que tiene en cuenta el número de muertes.

El modelo más simple que podemos considerar es el *modelo de Malthus*, en el que ambas tasas se suponen constantes. Si llamamos $k = k_N - k_M$, resulta que

$$G_i^n = k q_i^n.$$

Si no hay ni advección ni difusión, el modelo discreto quedaría de la forma

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \Delta t k q_i^n = (1 + \Delta t k) q_i^n = \alpha q_i^n,$$

donde $\alpha = 1 + \Delta t k$. Para que el modelo tenga sentido, supondremos que Δt es lo suficientemente pequeño para que $\alpha > 0$ (si $\alpha = 0$, la población se extingue en el primer paso; si $\alpha < 0$, aparecerían valores negativos para el número de individuos).

Es inmediato comprobar que

$$q_i^n = \alpha^n q_i^0.$$

Aparecen entonces tres posibles comportamientos:

- Si $\alpha > 1$ (se da si $k > 0$, esto es, $k_N > k_M$), entonces $q_i^n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. La población crece indefinidamente.
- Si $\alpha = 1$ (esto es, $k_N = k_M$), entonces $q_i^n = q_i^0$: la población permanece constante.
- Si $0 < \alpha < 1$ (debe darse $k_N < k_M$), entonces $q_i^n \rightarrow 0$: la población tiende a la extinción.

Vemos que el modelo es poco realista, porque solo permite tres posibles comportamientos: extinción, población estacionaria o crecimiento exponencial.

Supongamos ahora que la tasa de natalidad k_N permanece constante, pero la tasa de mortalidad es proporcional al tamaño de la población: $k_M = a q_i^n$, con $a > 0$. En tal caso, el modelo para una especie aislada en un compartimento sería

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \Delta t (k_N q_i^n - (a q_i^n) q_i^n) = q_i^n + k_N \Delta t \left(1 - \frac{q_i^n}{Q}\right) q_i^n,$$

donde $Q = k_N/a$ se denomina *número sostenible*. Nótese que la población permanece constante si $q_i^n = Q$. En este modelo, denominado *logístico*, tendríamos

$$G_i^n = k_N \left(1 - \frac{q_i^n}{Q}\right) q_i^n.$$

Si en un instante dado el número de individuos es mayor que Q , entonces G_i^n es un término de destrucción. En caso contrario, es un término de creación.

Volveremos a los modelos de población en el tema 3.

1.1.5. Comentarios sobre el paso de tiempo

En los modelos estudiados el paso de tiempo Δt no puede tomarse arbitrariamente grande: si es demasiado grande, las simulaciones que proporciona el modelo pueden no tener nada que ver con los fenómenos que se estudian. Esto es debido, en primer lugar, a que las fórmulas que hemos propuesto para los flujos no son exactas y conllevan un error de modelado que aumenta con el paso de tiempo. Por ejemplo:

- En el flujo por advección, se ha supuesto que todo el fluido que entra en un compartimento a lo largo de un intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ tiene una densidad de \mathcal{S} constante e igual a la que había en el compartimento del que provienen en el tiempo t_n . Pero, en la realidad, la densidad en dicho compartimento no se mantiene constante a lo largo del intervalo, sino que va variando debido a la propia advección, a la difusión o a la creación o destrucción de sustancia.
- Análogamente, se ha supuesto que el flujo por difusión es proporcional a la diferencia de densidades, y que esta se mantiene constante a lo largo del intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Nuevamente, esto no es cierto en la realidad: a lo largo de dicho intervalo las densidades en los compartimentos variarán y, en consecuencia, también lo hará su diferencia.

En segundo lugar, hay argumentos conceptuales que obligan a limitar el tamaño del paso de tiempo. En el caso del flujo por advección, en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ las partículas de fluido que abandonan un compartimento C_i recorren una distancia igual a $u\Delta t$. Supongamos, por ejemplo, que $u > 0$. Si $u\Delta t > L$, las partículas de fluido alcanzarían el compartimento C_{i+2} , por lo que habría una transferencia de masa de C_i a C_{i+2} que no se ha tenido en cuenta en el modelo. Por lo tanto, el paso de tiempo ha de verificar la condición

$$u\Delta t \leq L.$$

En el caso de la difusión el argumento es menos directo y está relacionado con la naturaleza de la difusión a escala molecular. Supongamos, por sencillez, que todos los compartimentos son iguales, de forma cilíndrica, con área de la base igual a A y longitud L . Supongamos también que todas las membranas tienen área A y espesor d y que los coeficientes de difusión dentro de todos los compartimentos y en todas las membranas coinciden.

Las moléculas de la sustancia \mathcal{S} se mueven siguiendo un movimiento browniano, debido a las colisiones entre ellas y con las partículas del medio del que están constituidos los compartimentos o el fluido que fluye a través del sistema. Supongamos que, debido a este movimiento, una partícula puede desplazarse a la izquierda o la derecha (con la misma probabilidad) una distancia característica δ en un tiempo característico τ .

Si nos situamos en el tiempo t_n , las únicas partículas que pueden abandonar el compartimento C_i por difusión en el intervalo $[t_n, t_n + \tau]$ son las que se encuentran a una distancia menor o igual a δ de la membrana. Estas partículas ocupan un cilindro de base A y de longitud δ . Como la densidad en el compartimento C_i es ρ_i^n , la cantidad total de partículas que pueden abandonar el compartimento es igual a

$$A\delta\rho_i^n.$$

Como solo abandonarán el compartimento las partículas que se muevan a la derecha, la cantidad esperada de sustancia que abandona el compartimento C_i en el intervalo de tiempo $[t_n, t_n + \tau]$ vendrá dada por

$$\frac{1}{2}A\delta\rho_i^n.$$

Razonando de manera análoga, la cantidad esperada de sustancia que entra en el compartimento a través de la membrana será igual a

$$\frac{1}{2}A\delta\rho_{i+1}^n.$$

En consecuencia, el flujo esperado (es decir, la cantidad de sustancia que atraviesa la membrana por unidad de tiempo) será

$$\frac{A\delta}{2\tau}(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n).$$

Tomando $\delta = d$, podemos comparar esta expresión del flujo con la que da la ley de Fick:

$$\frac{Ad}{2\tau}(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) = \frac{A}{d}\mu(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n),$$

para llegar así a la siguiente relación:

$$\mu = \frac{d^2}{2\tau}. \quad (1.2)$$

La mayor distancia que puede avanzar una partícula por difusión en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ es

$$\frac{d\Delta t}{\tau}.$$

Esta distancia ha de ser menor que L , ya que, en otro caso, podría haber partículas del compartimento C_i que llegaran hasta los compartimentos C_{i+2} o C_{i-2} , lo que no está contemplado en el modelo. Por tanto, tenemos la siguiente restricción natural para el paso de tiempo:

$$\frac{d\Delta t}{\tau} \leq L,$$

o, equivalentemente,

$$\Delta t \leq \frac{\tau L}{d}.$$

Usando la igualdad (1.2), esta relación se escribe como

$$\Delta t \leq \frac{Ld^2}{2\mu d} = \frac{Ld}{2\mu}.$$

Finalmente, en el caso del modelo de advección-difusión, las dos restricciones obtenidas sobre Δt han de ser tenidas en cuenta; por ejemplo, imponiendo la condición

$$\frac{|u|\Delta t}{L} + \frac{2\mu\Delta t}{Ld} \leq 1.$$

Nótese que hemos escrito $|u|$ para incluir el caso en que la velocidad es negativa.

1.1.6. Redes bidimensionales de compartimentos

En este apartado vamos a ver cómo extender el modelo unidimensional de advección-difusión al caso bidimensional. Para ello, supongamos que tenemos un sistema formado por $N_1 \times N_2$ compartimentos

$$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1N_2}, \dots, C_{N_11}, C_{N_12}, \dots, C_{N_1N_2}$$

conectados entre sí mediante membranas planas, de manera que (figura 1.2):

- El compartimento C_{ij} se comunica con los compartimentos $C_{i-1,j}$, $C_{i+1,j}$, $C_{i,j-1}$ y $C_{i,j+1}$, si $1 < i < N_1$, $1 < j < N_2$.
- El compartimento C_{1j} se comunica con el exterior y con los compartimentos C_{2j} , $C_{1,j-1}$ y $C_{1,j+1}$, si $1 < j < N_2$.
- El compartimento C_{N_1j} se comunica con el exterior y con los compartimentos $C_{N_1-1,j}$, $C_{N_1,j-1}$ y $C_{N_1,j+1}$, si $1 < j < N_2$.
- El compartimento C_{i1} se comunica con el exterior y con los compartimentos $C_{i-1,1}$, $C_{i+1,1}$ y C_{i2} , si $1 < i < N_1$.
- El compartimento C_{iN_2} se comunica con el exterior y con los compartimentos C_{i-1,N_2} , C_{i+1,N_2} y C_{i,N_2-1} , si $1 < i < N_1$.
- Los compartimentos C_{11} , C_{N_11} , C_{1N_2} y $C_{N_1N_2}$ se relacionan con el exterior a través de dos membranas, así como con los pares de vecinos (C_{12}, C_{21}) , $(C_{N_1-1,1}, C_{N_12})$, (C_{2N_2}, C_{1,N_2-1}) y $(C_{N_1-1,N_2}, C_{N_1,N_2-1})$, respectivamente.

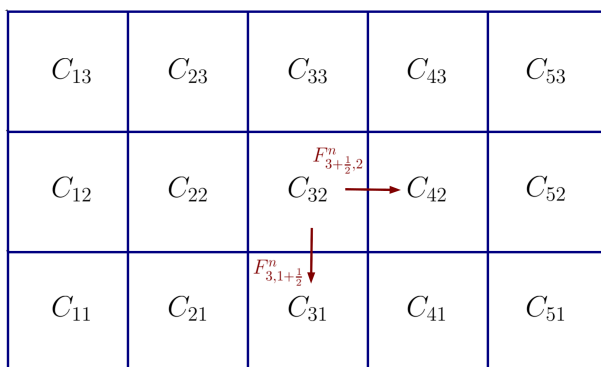


Figura 1.2: Esquema del modelo de compartimentos bidimensional.

Aunque el sistema modela una red bidimensional, cada compartimento se supone tridimensional. Denominaremos:

- V_{ij} al volumen del compartimento C_{ij} .

- $A_{i\pm 1/2,j}$ al área de la membrana que conecta a los compartimentos C_{ij} y $C_{i\pm 1,j}$ (o con el exterior, si $i = 1$ o $i = N_1$).
- $A_{i,j\pm 1/2}$ al área de la membrana que conecta a los compartimentos C_{ij} y $C_{i,j\pm 1}$ (o con el exterior, si $j = 1$ o $j = N_2$).
- $d_{i\pm 1/2,j}$ al espesor de la membrana que conecta a los compartimentos C_{ij} y $C_{i\pm 1,j}$ (o con el exterior, si $i = 1$ o $i = N_1$).
- $d_{i,j\pm 1/2}$ al espesor de la membrana que conecta a los compartimentos C_{ij} y $C_{i,j\pm 1}$ (o con el exterior, si $j = 1$ o $j = N_2$).

Como se trata de un modelo discreto, estamos interesados en cómo se distribuye \mathcal{S} en la red en una serie finita de instantes de tiempo. Llamaremos:

- t_0, t_1, \dots, t_M a los instantes de tiempo en los que se desea simular la distribución. Supondremos por comodidad que $t_0 = 0$ y que los instantes de tiempo están igualmente espaciados, es decir,

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 1, \dots, M,$$

siendo Δt el tiempo transcurrido entre dos instantes consecutivos.

- q_{ij}^n a la cantidad total de \mathcal{S} que hay en el compartimento C_{ij} en el instante t_n .
- ρ_{ij}^n a la densidad en el compartimento C_{ij} en el instante t_n , es decir,

$$\rho_{ij}^n = \frac{q_{ij}^n}{V_{ij}}.$$

Denotaremos como $F_{i+1/2,j}^n$ al *flujo* entre los compartimentos C_{ij} y $C_{i+1,j}$, es decir, a la cantidad total de \mathcal{S} por unidad de tiempo que pasa de uno a otro compartimento, durante el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$. De forma análoga, denotaremos como $F_{i,j+1/2}^n$ al flujo entre los compartimentos C_{ij} y $C_{i,j+1}$. Aplicaremos el siguiente convenio:

- Si $F_{i+1/2,j}^n > 0$, la sustancia pasa de C_{ij} a $C_{i+1,j}$.
- Si $F_{i+1/2,j}^n < 0$, la sustancia pasa de $C_{i+1,j}$ a C_{ij} .
- Si $F_{i,j+1/2}^n > 0$, la sustancia pasa de C_{ij} a $C_{i,j+1}$.
- Si $F_{i,j+1/2}^n < 0$, la sustancia pasa de $C_{i,j+1}$ a C_{ij} .

Por último, llamaremos G_{ij}^n a la cantidad total de \mathcal{S} que se crea o se destruye por unidad de tiempo en el compartimento C_{ij} durante el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$.

Siguiendo un razonamiento totalmente análogo al del caso unidimensional, deducimos que la expresión general del modelo es

$$q_{ij}^{n+1} = q_{ij}^n + \Delta t (F_{i-1/2,j}^n - F_{i+1/2,j}^n + F_{i,j-1/2}^n - F_{i,j+1/2}^n + G_{ij}^n),$$

para $i = 1, \dots, N_1$, $j = 1, \dots, N_2$ y $n = 0, \dots, M - 1$. Supondremos conocidos los siguientes datos:

- La distribución inicial de \mathcal{S} :

$$q_{ij}^0 \quad \text{o bien} \quad \rho_{ij}^0.$$

- El intercambio con el exterior:

$$F_{1/2,j}^n, F_{N_1+1/2,j}^n, \quad j = 1, \dots, N_2,$$

$$F_{i,1/2}^n, F_{i,N_2+1/2}^n, \quad i = 1, \dots, N_1.$$

En cuanto a las incógnitas, queremos conocer la cantidad de \mathcal{S} que hay en cualquier compartimento en cualquiera de los instantes de tiempo considerados:

$$q_{ij}^n \quad \text{o bien} \quad \rho_{ij}^n, \quad i = 1, \dots, N_1, \quad j = 1, \dots, N_2, \quad n = 1, \dots, M.$$

La expresión del flujo por difusión viene dada de nuevo por la ley de Fick: el flujo entre dos compartimentos es proporcional a la diferencia de densidades y va desde donde la densidad es mayor a donde es menor. Matemáticamente, esto se expresa como

$$F_{i+1/2,j}^n = k_{i+1/2,j}(\rho_{ij}^n - \rho_{i+1,j}^n), \quad F_{i,j+1/2}^n = k_{i,j+1/2}(\rho_{ij}^n - \rho_{i,j+1}^n).$$

Admitiremos las expresiones

$$k_{i+1/2,j} = \mu \frac{A_{i+1/2,j}}{d_{i+1/2,j}}, \quad k_{i,j+1/2} = \mu \frac{A_{i,j+1/2}}{d_{i,j+1/2}},$$

donde el coeficiente de difusión μ se supone constante.

La deducción de la expresión del flujo por advección no es tan directa en este caso, debido a que ahora la velocidad es un vector. Denotemos dicha velocidad como $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y supongamos que es constante; en este contexto, al módulo de \vec{u} se le llama *celeridad* del fluido:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Consideremos una membrana plana de área A . El volumen de fluido que pasa por la membrana en un tiempo Δt es igual a

$$A\Delta t|\vec{u}| \cos \alpha,$$

siendo α el ángulo que forma la dirección normal con el vector \vec{u} (figura 1.3).

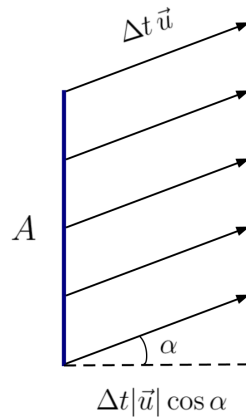


Figura 1.3: Volumen de fluido que atraviesa la membrana: $A\Delta t|\vec{u}| \cos \alpha$. Vista lateral.

Si elegimos un vector unitario \vec{n} perpendicular a la membrana, esta fórmula puede reescribirse usando el producto escalar:

$$A\Delta t (\vec{u} \cdot \vec{n}).$$

Consideremos ahora la membrana que comunica C_{ij} y $C_{i+1,j}$, y tomemos en ella el vector normal unitario $\vec{n}_{i+1/2,j}$ que apunta hacia $C_{i+1,j}$. En el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, el volumen de fluido que atraviesa la membrana será

$$A_{i+1/2,j}\Delta t (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j}).$$

La densidad de la sustancia en este fluido es la de C_{ij} si el fluido sale del compartimento. Esto ocurre si el vector velocidad apunta hacia el mismo lado de la membrana que el vector $\vec{n}_{i+1/2,j}$ (esto es, apunta hacia el exterior del compartimento), lo cual sucede si el ángulo que forman los vectores \vec{u} y $\vec{n}_{i+1/2,j}$ está en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, que a su vez equivale a que el coseno del ángulo que forman es positivo, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j} > 0$. En tal caso,

$$F_{i+1/2,j}^n = A_{i+1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j}) \rho_{ij}^n.$$

Por el contrario, si el fluido entra en el compartimento (es decir, si $\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j} < 0$), entonces

$$F_{i+1/2,j}^n = A_{i+1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j}) \rho_{i+1,j}^n.$$

Podemos combinar ambas expresiones en una sola:

$$F_{i+1/2,j}^n = A_{i+1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j})^+ \rho_{ij}^n + A_{i+1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j})^- \rho_{i+1,j}^n.$$

De forma análoga, en la membrana que conecta C_{ij} y $C_{i,j+1}$ tomamos el vector normal unitario $\vec{n}_{i,j+1/2}$ que apunta hacia $C_{i,j+1}$. El flujo viene dado en este caso por

$$F_{i,j+1/2}^n = A_{i,j+1/2} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i,j+1/2})^+ \rho_{ij}^n + A_{i,j+1/2} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i,j+1/2})^- \rho_{i,j+1}^n.$$

Finalmente, combinando los mecanismos de advección y difusión, obtenemos la siguiente expresión para el modelo de advección-difusión bidimensional:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^{n+1} = & \rho_{ij}^n + \frac{\Delta t}{V_{ij}} (A_{i-1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i-1/2,j})^+ \rho_{i-1,j}^n + A_{i-1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i-1/2,j})^- \rho_{ij}^n) \\ & - \frac{\Delta t}{V_{ij}} (A_{i+1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j})^+ \rho_{ij}^n + A_{i+1/2,j} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j})^- \rho_{i+1,j}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{V_{ij}} (A_{i,j-1/2} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i,j-1/2})^+ \rho_{i,j-1}^n + A_{i,j-1/2} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i,j-1/2})^- \rho_{ij}^n) \\ & - \frac{\Delta t}{V_{ij}} (A_{i,j+1/2} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i,j+1/2})^+ \rho_{ij}^n + A_{i,j+1/2} (\vec{u} \cdot \vec{n}_{i,j+1/2})^- \rho_{i,j+1}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{V_{ij}} \mu \left(\frac{A_{i-1/2,j}}{d_{i-1/2,j}} (\rho_{i-1,j}^n - \rho_{ij}^n) - \frac{A_{i+1/2,j}}{d_{i+1/2,j}} (\rho_{ij}^n - \rho_{i+1,j}^n) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{V_{ij}} \mu \left(\frac{A_{i,j-1/2}}{d_{i,j-1/2}} (\rho_{i,j-1}^n - \rho_{ij}^n) - \frac{A_{i,j+1/2}}{d_{i,j+1/2}} (\rho_{ij}^n - \rho_{i,j+1}^n) \right) \\ & + \Delta t g_{ij}^n, \end{aligned}$$

siendo

$$g_{ij}^n = \frac{G_{ij}^n}{V_{ij}}.$$

Consideremos ahora el caso particular en el que todos los compartimentos son iguales y tienen forma de paralelepípedos de lados L_1 , L_2 y L_3 . De esta forma, el volumen de cada compartimento es $V = L_1 L_2 L_3$. Supongamos además que las membranas coinciden con las caras verticales de los compartimentos, por lo que sus áreas son $A_1 = L_1 L_3$ o bien $A_2 = L_2 L_3$. Además, todas tienen el mismo espesor d . Finalmente, las caras de los compartimentos se suponen paralelas a los ejes coordenados, por lo que $\vec{n}_{i+1/2,j} = (1, 0, 0)$ y $\vec{n}_{i,j+1/2} = (0, 1, 0)$, de donde $\vec{u} \cdot \vec{n}_{i+1/2,j} = u_1$ y $\vec{u} \cdot \vec{n}_{i,j+1/2} = u_2$.

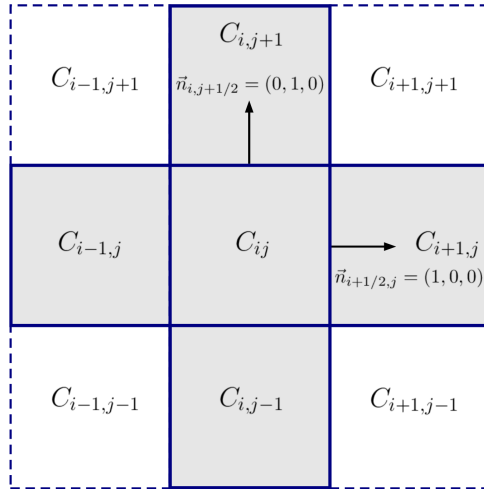


Figura 1.4: Red bidimensional simplificada. Vista superior.

Tras simplificar, la expresión del modelo es la siguiente:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^{n+1} = & \rho_{ij}^n + \frac{\Delta t}{L_1} (u_1^+ (\rho_{i-1,j}^n - \rho_{ij}^n) + u_1^- (\rho_{ij}^n - \rho_{i+1,j}^n)) \\ & + \frac{\Delta t}{L_2} (u_2^+ (\rho_{i,j-1}^n - \rho_{ij}^n) + u_2^- (\rho_{ij}^n - \rho_{i,j+1}^n)) \\ & + \frac{\Delta t}{L_1} \frac{\mu}{d} (\rho_{i-1,j}^n - 2\rho_{ij}^n + \rho_{i+1,j}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{L_2} \frac{\mu}{d} (\rho_{i,j-1}^n - 2\rho_{ij}^n + \rho_{i,j+1}^n) \\ & + \Delta t g_{ij}^n, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, N_1$, $j = 1, \dots, N_2$ y $n = 0, \dots, M - 1$.

Observación 1.4. La expresión de un modelo tridimensional es similar. En ese caso, son necesarios tres índices para representar un compartimento C_{ijk} . \square

1.2. Modelo continuo de advección-difusión

En esta sección nos centraremos en el desarrollo de un modelo continuo de advección-difusión. Para ello, primero veremos algunos conceptos básicos de la Mecánica de medios continuos.

Suponer que un medio es *continuo* equivale a identificar las partículas del medio con los puntos geométricos de la región que ocupa. Consideremos, por ejemplo, el aire contenido en una habitación de $3 \times 3 \times 2 \text{ m}^3$. Si admitimos que el aire es un medio continuo, suponemos que en cada instante de tiempo hay una partícula de aire en cada punto de la habitación. Por tanto, admitimos que hay un número infinito de partículas.

Esto es una idealización: en la realidad, el número de partículas de aire es finito, aunque muy elevado. Sin embargo, este tipo de aproximación es útil cuando los fenómenos se estudian a una escala mucho mayor que la microscópica, ya que permite no tener que seguir el movimiento de cada partícula individualmente.

Las partículas reales del medio que se estudia tienen una masa concreta. Si suponemos que hay infinitas partículas, ¿puede tener masa cada una de ellas, sin que el medio tenga masa infinita? Pues depende del tipo de infinito...

En primer lugar, notemos que es posible repartir una masa finita entre una cantidad infinita numerable de partículas. Por ejemplo, para repartir una unidad de masa entre una familia de partículas numerada $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, podríamos asignar media unidad a P_1 y a cada partícula darle la mitad de lo que se le dio a la anterior. Es decir, P_n recibe 2^{-n} . Sin embargo, no es posible hacer un reparto uniforme: la cantidad que se le da a cada partícula tiene que tender a 0 cuando n tiende a ∞ .

La situación se complica cuando la cantidad es infinita no numerable: en ese caso, no es posible repartir una masa finita entre todas las partículas. En un medio continuo el número de partículas es infinito no numerable (volviendo al ejemplo de la habitación, cada partícula puede identificarse con un punto del conjunto $[0,3] \times [0,3] \times [0,2]$, cuyo cardinal es infinito no numerable). Esto nos lleva a la siguiente conclusión: *las partículas de un medio continuo no tienen dimensiones ni masa*.

Para medir masas en un medio continuo es necesario el concepto de *densidad*: asociada a cada medio continuo, existe una función de densidad ρ (que, en general, depende del tiempo y del espacio) que nos permite calcular la masa total del medio o de cualquier porción del mismo.

Ejemplo 1.3. Volviendo al ejemplo de la habitación, si nos dan el dato de que la densidad del aire es $\rho = 0.2 \text{ kg/m}^3$, ¿cuál será la masa total de aire? La respuesta es 3.6 kg. \square

Consideremos una varilla muy fina de longitud L , que aproximaremos mediante un medio continuo unidimensional. Los puntos geométricos pueden ser etiquetados con una sola coordenada x que toma valores en el intervalo $[0, L]$. Si la densidad es constante e igual a ρ_0 , entonces su masa será $L\rho_0$. Supongamos ahora que la varilla está compuesta por varios trozos de densidad diferente, es decir, existen puntos

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = L,$$

de forma que la porción correspondiente al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tiene densidad constante ρ_i . En tal caso, la masa será

$$\rho_1(x_1 - x_0) + \rho_2(x_2 - x_1) + \cdots + \rho_N(x_N - x_{N-1}) = \sum_{i=1}^N \rho_i(x_i - x_{i-1}).$$

Por último, si la densidad varía en cada punto, $\rho \equiv \rho(x)$, definimos la masa como la integral de la densidad:

$$\int_0^L \rho(x) dx.$$

Esta definición se extiende al caso en que ρ dependa de más de una variable.

Ejemplo 1.4. Supongamos que $L = 1$ m y que la densidad viene dada por la función $\rho(x) = 0.2x$ kg/m. Entonces la masa de la varilla será

$$\int_0^1 0.2x dx = 0.1 \text{ kg.} \quad \square$$

Ejemplo 1.5. Sea una placa plana cuyas dimensiones son $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Cada punto geométrico puede identificarse con un par de coordenadas (x, y) , con $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$. Supongamos que la densidad de la placa viene dada por la función

$$\rho(x, y) = 0.1(x^2 + y^2) \text{ kg/m}^2.$$

La masa de la placa será entonces

$$\int_0^1 \int_0^1 0.1(x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{15} \text{ kg.}$$

¿Y cuál sería la masa del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$? Pues

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 0.1(x^2 + y^2) dy dx = \frac{1}{60} \text{ kg.} \quad \square$$

Si tenemos una placa plana rectangular de dimensiones $L_1 \times L_2$, y su densidad solo depende de la variable x , $\rho \equiv \rho(x)$, entonces la masa vendrá dada por

$$\text{masa} = L_2 \int_0^{L_1} \rho(x) dx.$$

En el caso de una viga de dimensiones $L_1 \times L_2 \times L_3$, cuya densidad solo depende de la variable x , la masa será

$$\text{masa} = L_2 L_3 \int_0^{L_1} \rho(x) dx.$$

En general, si tenemos un sólido con forma cilíndrica, con el eje situado en la dirección x y siendo A el área de la sección transversal, si su densidad solo depende de la variable x , la masa se calcula con una integral de una sola variable:

$$\text{masa} = A \int_0^{L_1} \rho(x) dx.$$

Ya estamos en disposición de plantear nuestro modelo matemático. Para ello consideremos una tubería cilíndrica por la que circula un fluido y en la que hay contenida una cierta sustancia \mathcal{S} (un nutriente, un contaminante, la energía interna, una población de microorganismos, etc.) que puede pasar de unos puntos a otros y del exterior a los extremos de la tubería (o viceversa), y que puede ser creada o destruida en el interior de la misma.

Como se trata de un modelo continuo, estamos interesados en cómo se distribuye \mathcal{S} en cada punto de la tubería y en cada instante de tiempo en un cierto intervalo $[0, T]$. Sean L la longitud de la tubería y R el radio de la sección transversal. Tomemos un sistema de coordenadas en el espacio, y supongamos que el eje x coincide con el eje del cilindro.

Sea ρ la densidad de \mathcal{S} . Para simplificar el problema, supondremos que la densidad solo depende de la coordenada x y del tiempo t :

$$\rho \equiv \rho(x, t).$$

Esta hipótesis significa que, fijado un tiempo t , la densidad de los puntos que están en una misma sección transversal es constante. Denotemos por S_a a la sección correspondiente a $x = a$. En un instante t , la cantidad de \mathcal{S} que hay entre dos secciones arbitrarias, S_a y S_b , se obtiene integrando ρ en la porción de tubería T_{ab} contenida entre ambas secciones:

$$\int_{T_{ab}} \rho(x, t) dx dy dz = \pi R^2 \int_a^b \rho(x, t) dx.$$

Llamaremos $F(x, t)$ al *flujo* de \mathcal{S} a través de la sección S_x en el instante t , es decir, a la cantidad total de \mathcal{S} que atraviesa la sección por unidad de tiempo y por unidad de área. Se utiliza el siguiente convenio:

- Si $F(x, t) > 0$, entonces \mathcal{S} viaja hacia la derecha.
- Si $F(x, t) < 0$, entonces \mathcal{S} viaja hacia la izquierda.

Ejemplo 1.6. La igualdad $F(1, 2) = -0.75$ significa que, en el instante $t = 2$, la sustancia \mathcal{S} atraviesa la sección S_1 hacia la izquierda, con una velocidad de $0.75 \pi R^2$ unidades por unidad de tiempo. \square

Ejemplo 1.7. Supongamos que $L = 1$ m, $R = 1$ m y que la expresión del flujo es

$$F(x, t) = x \cos(2\pi t) \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}.$$

El transporte neto de materia a través de la sección $x = 1/2$ entre los instantes $t = 0$ y $t = 0.25$ viene dado por

$$\pi R^2 \int_0^{0.25} F\left(\frac{1}{2}, t\right) dt = \pi \int_0^{0.25} \frac{1}{2} \cos(2\pi t) dt = \frac{1}{4} \text{sen}(\pi/2) = 0.25,$$

esto es, han pasado 0.25 kg hacia la derecha.

Si ahora calculamos el transporte neto entre los tiempos $t = 0$ y $t = 0.5$, obtenemos que

$$\pi R^2 \int_0^{0.5} F\left(\frac{1}{2}, t\right) dt = \pi \int_0^{0.5} \frac{1}{2} \cos(2\pi t) dt = \frac{1}{4} \text{sen} \pi = 0,$$

lo que significa que no ha habido transporte neto de masa. \square

Supondremos que, en cualquier instante de tiempo, se crea o se destruye la misma cantidad de sustancia por unidad de tiempo y de volumen en cada punto de una sección S_x . Denominaremos $G(x, t)$ a dicha cantidad, y adoptaremos el siguiente convenio:

- Si $G(x, t) > 0$, significa que S se crea.
- Si $G(x, t) < 0$, entonces S se destruye.

Ejemplo 1.8. Si $G(L/2, 3) = -3$, tenemos que en el instante $t = 3$ se están destruyendo en la sección central 3 unidades de S por unidad de tiempo y de volumen. \square

Ejemplo 1.9. Supongamos que $L = 1$ m, $R = 1$ m y que la expresión de G es

$$G(x, t) = \text{sen}(2\pi x)e^{-0.5t} \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^3}.$$

En tal caso, la cantidad neta de sustancia creada o destruida entre las secciones $x = 1/4$ y $x = 1/2$ entre los tiempos $t = 0$ y $t = 0.25$ será

$$\pi R^2 \int_{1/4}^{1/2} \int_0^{0.25} \text{sen}(2\pi x)e^{-0.5t} dt dx = 2\pi(1 - e^{-1/8}) \int_{1/4}^{1/2} \text{sen}(2\pi x) dx = 1 - e^{-1/8},$$

lo que significa que se han creado $1 - e^{-1/8}$ kg.

¿Y entre las secciones $x = 0$ y $x = 1$, entre los tiempos $t = 0$ y $t = 0.25$? Pues

$$\pi R^2 \cdot \int_0^1 \int_0^{0.25} \text{sen}(2\pi x)e^{-0.5t} dt dx = 2\pi(1 - e^{-1/8}) \int_0^1 \text{sen}(2\pi x) dx = 0,$$

lo que significa que no ha habido creación o destrucción neta de sustancia. \square

La ley de conservación de la cantidad de masa (véase la sección 1.1) nos dice que la cantidad de S que hay entre dos secciones, S_a y S_b , en un instante t_1 , será igual a

- la que había en un instante anterior t_0 entre ambas secciones,
- más/menos la que entra o sale por la izquierda,
- más/menos la que entra o sale por la derecha,
- más/menos la que se crea o se destruye entre las secciones S_a y S_b , entre los instantes de tiempo t_0 y t_1 .

Expresándolo matemáticamente, tenemos

$$\begin{aligned} \pi R^2 \int_a^b \rho(x, t_1) dx &= \pi R^2 \int_a^b \rho(x, t_0) dx + \pi R^2 \int_{t_0}^{t_1} F(a, t) dt - \pi R^2 \int_{t_0}^{t_1} F(b, t) dt \\ &+ \pi R^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b G(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Deducimos así la *primera forma integral* de la ley de conservación de la masa, que nos dice que para cualesquiera a , b , t_0 y t_1 , se verifica

$$\int_a^b (\rho(x, t_1) - \rho(x, t_0)) dx + \int_{t_0}^{t_1} (F(b, t) - F(a, t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b G(x, t) dx dt.$$

Observación 1.5. A lo largo de esta sección, estamos suponiendo que todas las funciones involucradas (ρ , F y G) son suficientemente regulares. \square

Por otra parte, usando la regla de Barrow, se tiene que

$$F(b, t) - F(a, t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dx, \quad \rho(x, t_1) - \rho(x, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dt.$$

Sustituyendo estas expresiones en la primera forma integral, deducimos la *segunda forma integral* de la ley de conservación de la masa:

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dt dx + \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b G(x, t) dx dt.$$

Como el orden de integración no afecta al resultado, podemos escribir

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) - G(x, t) \right) dx dt = 0,$$

para cualesquiera a , b , t_0 y t_1 . Si admitimos que el integrando es una función continua, necesariamente ha de tenerse que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = G(x, t), \quad (1.3)$$

para cada $x \in [0, L]$ y $t \in [0, T]$. Esta es la *forma diferencial* de la ley de conservación de la masa.

1.2.1. Modelo continuo de difusión

A continuación, estableceremos la expresión que tiene el flujo por difusión. La diferencia con el caso discreto es que la difusión no se produce a través de una membrana, sino a través del propio medio. Para calcular el flujo en la sección S_x en un instante t , situaremos idealmente una membrana en la sección (figura 1.5), aplicaremos la ley de Fick y pasaremos al límite cuando el espesor de la membrana tiende a 0.

Si situamos en S_x una membrana de espesor Δx , la densidad al otro lado de la membrana en el instante t será $\rho(x + \Delta x, t)$. La cantidad de sustancia transportada por unidad de tiempo a través de la membrana sería, según la ley de Fick,

$$\mu \frac{A}{\Delta x} (\rho(x, t) - \rho(x + \Delta x, t)),$$

siendo A el área de la membrana, es decir, πR^2 . Tomando el límite cuando el espesor de la membrana tiende a 0, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mu \pi R^2}{\Delta x} (\rho(x, t) - \rho(x + \Delta x, t)) = -\mu \pi R^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t).$$

El flujo, es decir, la cantidad de sustancia transportada por unidad de tiempo y unidad de área, será entonces

$$F(x, t) = -\mu \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t).$$

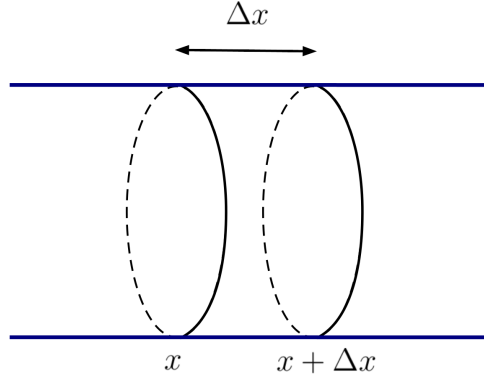


Figura 1.5: Cálculo del flujo por difusión.

1.2.2. Modelo continuo de advección

Nos centramos ahora en el cálculo del flujo por advección. Supongamos que el fluido recorre la tubería con velocidad u , transportando en su movimiento la sustancia \mathcal{S} . Si $u > 0$ es constante y ρ es también constante, el volumen de fluido que atraviesa la sección S_x durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es $u \Delta t \pi R^2$ (figura 1.6). Por tanto, la cantidad de sustancia que atraviesa será

$$u \Delta t \pi R^2 \rho.$$

El flujo, es decir, la cantidad de sustancia transportada por unidad de tiempo y unidad de área, vendrá dada por

$$F(x, t) = u \rho.$$

Si u y ρ no son constantes, se tiene que

$$F(x, t) = u(x, t) \rho(x, t).$$

Veámoslo en el caso en que $u > 0$ sea constante, pero ρ no. Si T_a representa el volumen comprendido entre las secciones S_a y $S_{a+u\Delta t}$, la cantidad de sustancia que atraviesa la sección S_a durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ puede calcularse como

$$\int_{T_a} \rho(x, t + \Delta t) dx dy dz = \pi R^2 \int_a^{a+u\Delta t} \rho(x, t + \Delta t) dx.$$

Teniendo en cuenta que solo actúa la advección, se verifica

$$\rho(x + u\Delta t, t + \Delta t) = \rho(x, t) \Rightarrow \rho(x, t + \Delta t) = \rho(x - u\Delta t, t).$$

Por tanto, la integral anterior puede escribirse como

$$\pi R^2 \int_a^{a+u\Delta t} \rho(x - u\Delta t, t) dx = \pi R^2 \int_{a-u\Delta t}^a \rho(\xi, t) d\xi.$$

Para calcular el flujo por advección, dividimos por el paso de tiempo y por el área de la sección transversal, y hacemos que el espesor de T_a tienda a cero:

$$F(a, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{a-u\Delta t}^a \rho(\xi, t) d\xi = u \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{u\Delta t} \int_{a-u\Delta t}^a \rho(\xi, t) d\xi = u \rho(a, t).$$

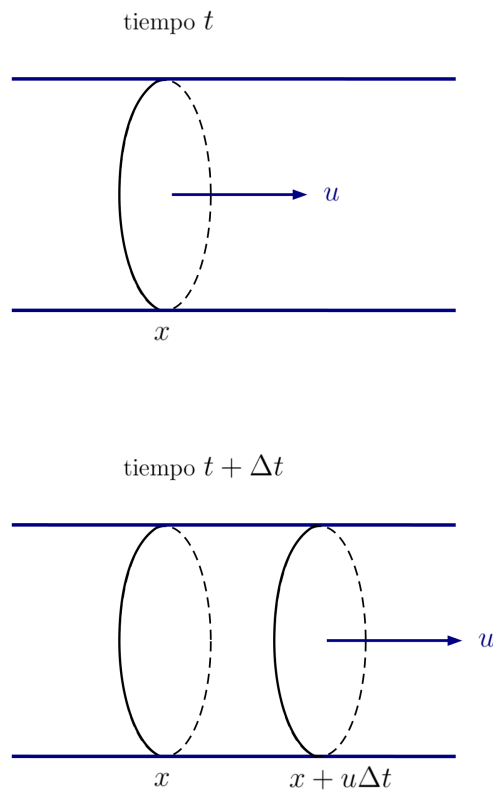


Figura 1.6: Cálculo del flujo por advección.

Observación 1.6. En el último paso hemos usado que, si $G(x)$ es una primitiva de una función $g(x)$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} g(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(\alpha+h) - G(\alpha)}{h} = G'(\alpha) = g(\alpha). \quad \square$$

1.2.3. Modelo continuo de advección-difusión

Por último, cuando los mecanismos de advección y difusión actúan conjuntamente, los flujos correspondientes se suman:

$$F(x, t) = -\mu \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) + u(x, t) \rho(x, t).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.3), obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) + u(x, t) \rho(x, t) \right) = G(x, t).$$

Si μ y u son constantes, podemos escribir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x, t) + u \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) = G(x, t).$$

Para tener un modelo completo, es necesario dar la densidad inicial,

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

donde la función $\rho_0(x)$ es un dato, y especificar las condiciones de contorno. Usualmente, estas consistirán en dar el valor de ρ en las secciones extremas:

$$\rho(0, t) = \rho_{S_0}(t) \quad \text{o bien} \quad \rho(L, t) = \rho_{S_L}(t),$$

donde las funciones $\rho_{S_0}(t)$ o $\rho_{S_L}(t)$ son datos (pueden ser constantes), o en dar el valor del flujo F en las secciones extremas:

$$F(0, t) = F_{S_0}(t) \quad \text{o bien} \quad F(L, t) = F_{S_L}(t),$$

donde las funciones $F_{S_0}(t)$ o $F_{S_L}(t)$ son datos (pueden ser constantes). También pueden darse otro tipo de condiciones de contorno que relacionen la densidad y el flujo en las secciones extremas, como por ejemplo

$$F(0, t) = K_0(\rho_{ext} - \rho(0, t)) \quad \text{o bien} \quad F(L, t) = K_L(\rho(L, t) - \rho_{ext}),$$

donde ρ_{ext} , K_0 , K_L son datos.

1.3. Modelos bidimensionales y tridimensionales

En el caso de medios continuos de dos o tres dimensiones, la deducción del modelo es similar a la realizada en la sección 1.2, aunque de mayor dificultad matemática. La expresión final que se obtiene es la siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mu \Delta \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho = G,$$

donde:

- $\Delta \rho$ es el *laplaciano* de ρ : si la dimensión es dos,

$$\Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2},$$

y si la dimensión es tres,

$$\Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}.$$

- $\nabla \rho$ es el *gradiente* de ρ : si la dimensión es dos, es el vector de componentes

$$\nabla \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y} \right),$$

y si la dimensión es tres, es el vector de componentes

$$\nabla \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right).$$

- $\vec{u} \cdot \nabla \rho$ representa el producto escalar de la velocidad por el gradiente de ρ , es decir,

$$\vec{u} \cdot \nabla \rho = u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

en dimensión dos, y

$$\vec{u} \cdot \nabla \rho = u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

en dimensión tres.

1.4. Modelo continuo de advección-difusión: soluciones

A fin de comprender los modelos continuos que hemos deducido en la sección anterior, vamos a estudiar cómo son sus posibles soluciones, es decir, qué tipo de comportamiento predicen para la sustancia que se estudia.

1.4.1. Soluciones del modelo continuo de advección

Consideremos inicialmente el modelo de advección:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

con u constante y con condición inicial

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

donde $\rho_0(x)$ es una función suficientemente regular. Supongamos, para simplificar, que la tubería es infinita: esto nos permite no tener en cuenta las condiciones de contorno.

Lo que estamos modelando es que la sustancia es transportada de forma inerte por el fluido. De esta forma, las partículas de fluido que se encuentran en la sección S_x en un instante de tiempo t , estaban en la sección de coordenada $x - ut$ en el instante $t = 0$. Por tanto, como la sustancia es transportada de forma inerte, la densidad en la sección S_x en el instante t debe coincidir con la que tenía en la sección S_{x-ut} en el instante $t = 0$, es decir,

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - ut).$$

Esta es la solución del problema de valor inicial¹, como puede comprobarse por sustitución directa. En efecto, se verifica la condición inicial:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x - 0t) = \rho_0(x),$$

¹Este resultado es falso si u no es constante. Por ejemplo, si $\rho_0(x) = 1$ y $u(x, t) = x$, entonces $\rho(x, t) = 1$ no es solución de la ecuación de advección:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \neq 0.$$

y se satisface la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -u\rho'(x-ut) \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho'(x-ut) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -u\rho'(x-ut) + u\rho'(x-ut) = 0.$$

Ejemplo 1.10. Supongamos que $u = 1$ y $\rho_0(x) = e^{-x^2}$. El problema a resolver es

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \rho(x, 0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$

cuya solución viene dada por

$$\rho(x, t) = e^{-(x-t)^2}.$$

En la figura 1.7 se ha representado la solución en los tiempos $t = 0, 1, 2$, así como también una vista de la superficie que define la solución. □

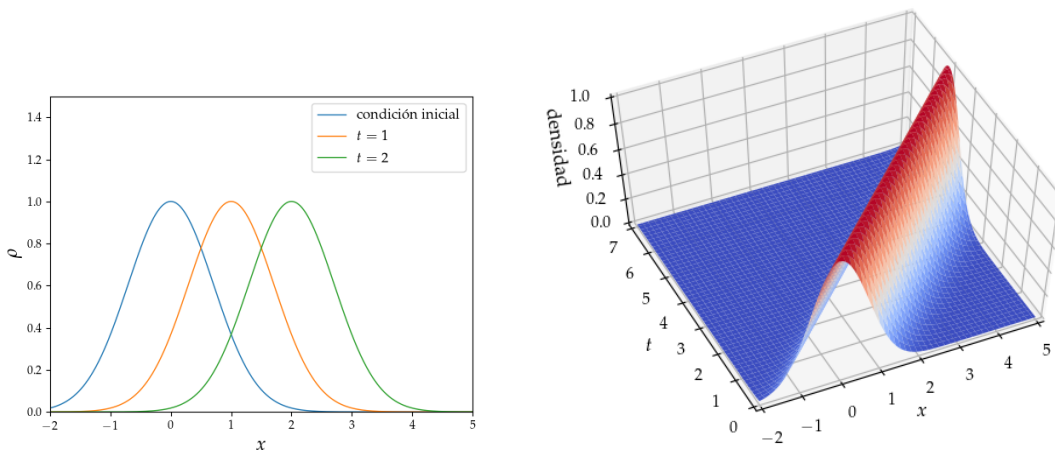


Figura 1.7: Izquierda: solución en los tiempos $t = 0, 1, 2$. Derecha: vista tridimensional.

Ejemplo 1.11. Consideremos ahora el caso de una tubería finita. Supongamos que la tubería tiene longitud 5; la sección de entrada es S_0 y la de salida es S_5 . Tomemos de nuevo $u = 1$ y $\rho_0(x) = e^{-x^2}$. En este caso, es necesario conocer la densidad del agua entrante, ya que la velocidad es positiva; supongamos, por ejemplo, que es 1. La densidad del agua que sale depende de lo que ocurre dentro de la tubería: no se pueden dar condiciones de contorno en la sección de salida.

El problema a resolver es ahora

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \rho(x, 0) = e^{-x^2}, \\ \rho(0, t) = 1. \end{cases}$$

Para determinar la solución, tengamos en cuenta las siguientes observaciones:

- En el instante $t = 1$, el agua que está en las secciones S_x cuya coordenada esté entre 0 y 1 ha entrado por la sección de entrada. La densidad en esta parte de la tubería es, por tanto, 1.
- En el instante $t = 1$, el agua que está en las secciones S_x cuya coordenada esté entre 1 y 5 estaba ya en la tubería en el instante inicial $t = 0$. La densidad en la sección S_x será la que había en la de coordenada $x - 1$ en el instante inicial.
- Para instantes de tiempo $t \geq 5$ toda el agua viene de fuera, por lo que la densidad en toda la tubería es 1.

Por tanto, la solución será:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 5 \text{ y } x \leq t, \\ e^{-(x-t)^2} & \text{si } 0 \leq t < 5 \text{ y } x > t, \\ 1 & \text{si } t \geq 5. \end{cases}$$

La solución en los tiempos $t = 1, 2, 3$, así como una vista tridimensional de la misma, se han representado en la figura 1.8. □

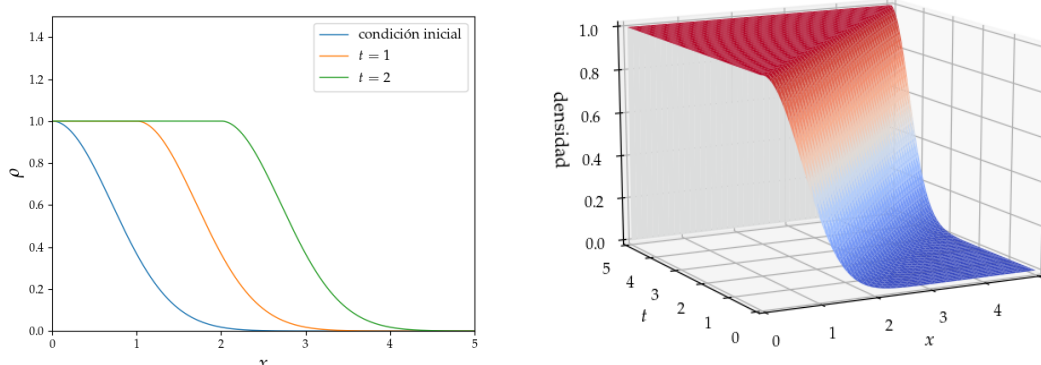


Figura 1.8: Caso de una tubería finita. Izquierda: solución en los tiempos $t = 0, 1, 2$. Derecha: representación tridimensional.

Ejemplo 1.12. El ejemplo anterior puede generalizarse de la siguiente forma: si la tubería tiene longitud L , y tanto la velocidad u como la densidad exterior ρ_{ext} son constantes, entonces la solución del problema de advección viene dada por

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_{ext} & \text{si } 0 \leq t \leq L/u \text{ y } x \leq ut, \\ \rho_0(x - ut) & \text{si } 0 \leq t \leq L/u \text{ y } x > ut, \\ \rho_{ext} & \text{si } t \geq L/u. \end{cases}$$

□

1.4.2. Soluciones del modelo continuo de difusión

Vamos a centrarnos ahora en el modelo de difusión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0.$$

Podemos suponer que, o bien el fluido está en reposo, o bien que en vez de una tubería tenemos una varilla cilíndrica en la que se transporta una sustancia por difusión, como por ejemplo, la energía interna. En ese caso, podemos asumir que ρ es la temperatura².

Supongamos que la temperatura en los extremos de la varilla es conocida; por ejemplo, igual a 0. Supongamos también que la distribución inicial de temperaturas es conocida,

$$\rho(x, 0) = f(x).$$

El problema a resolver es, por tanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \\ \rho(x, 0) = f(x), \\ \rho(0, t) = \rho(1, t) = 0. \end{cases}$$

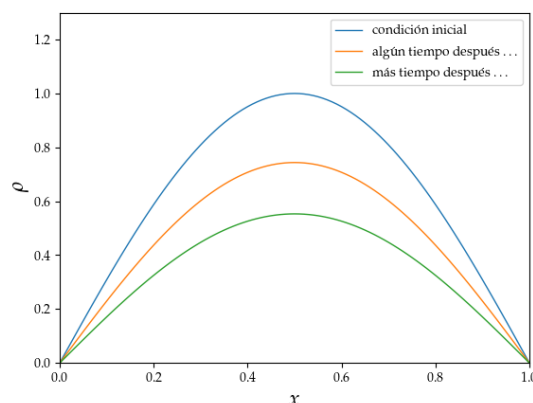


Figura 1.9: Evolución temporal de una solución de la ecuación de difusión.

Para motivar la forma en que hay que buscar las soluciones de la ecuación de difusión, en la figura 1.9 se ha representado la evolución en tiempo de una posible solución. Como vemos, los ceros de la solución permanecen inalterados, mientras que el máximo se produce en el mismo punto y su valor va decreciendo.

En general, para modificar la gráfica de una función de forma que los ceros sigan siendo los mismos, los puntos en los que se alcanzan máximos o mínimos sean los mismos, pero

²La ecuación de difusión también se conoce como *ecuación del calor*.

los valores máximos y mínimos sean más pequeños, basta con multiplicar la función por una cantidad menor que 1. Parece entonces razonable buscar soluciones que sean de la forma

$$\rho(x, t) = f(x)g(t), \quad (1.4)$$

donde $f(x)$ nos va a dar la condición inicial y $g(t)$ es el número por el que hay que multiplicar la condición inicial en el tiempo t . Cabe esperar que $g(0) = 1$, que $g(t)$ sea decreciente y que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

La idea anterior es la base del *método de separación de variables*. Supongamos pues que la solución buscada es de la forma (1.4). Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f(x)g'(t), \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = f''(x)g(t),$$

sustituyendo en la ecuación de difusión resulta que debe cumplirse

$$f(x)g'(t) = \mu f''(x)g(t).$$

Si las funciones f y g nunca se anulan, tiene que verificarse

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \mu \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Pero el término de la izquierda solo depende del tiempo t y el de la derecha, del espacio x . En consecuencia, ambos términos deben ser constantes; llamemos λ a dicha constante. En resumen, para encontrar soluciones de la forma (1.4), tiene que ocurrir:

- $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$ (condiciones de contorno).
- $g(0) = 1$ (condición inicial).
- Existe una constante λ tal que

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \equiv \lambda \equiv \mu \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Elijamos un valor arbitrario de λ y busquemos f y g que cumplan todo lo anterior. En primer lugar, g tiene que verificar

$$\begin{cases} g'(t) = \lambda g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

La solución de este problema de valor inicial viene dada por

$$g(t) = e^{\lambda t}.$$

Respecto a f , esta función tiene que verificar

$$\begin{cases} f''(x) - \frac{\lambda}{\mu} f(x) = 0, \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 0. \end{cases}$$

Para determinar la solución general de la ecuación diferencial³ consideramos las raíces de su ecuación característica,

$$s^2 - \frac{\lambda}{\mu} = 0.$$

Tenemos que considerar tres casos:

- Caso 1: Si $\lambda > 0$, hay dos raíces reales y distintas:

$$s_1 = -\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}.$$

En tal caso, la solución general de la ecuación es

$$f(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}.$$

Imponiendo las condiciones $f(0) = f(1) = 0$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{s_1} + C_2 e^{s_2} = 0, \end{cases}$$

cuya única solución es $C_1 = C_2 = 0$. Por tanto, si $\lambda > 0$, la única solución es la solución trivial: $\rho \equiv 0$.

³Para determinar la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden y coeficientes constantes,

$$f''(x) + pf'(x) + qf(x) = 0,$$

consideramos las raíces s_1 y s_2 de la ecuación característica

$$s^2 + ps + q = 0.$$

Hay tres casos posibles:

- s_1 y s_2 son reales y distintos. En este caso la solución de la ecuación es

$$f(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x},$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

- s_1 y s_2 son reales pero tienen el mismo valor, s . En este caso la solución de la ecuación es

$$f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{sx},$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

- s_1 y s_2 son complejos conjugados: $\alpha \pm i\beta$. En este caso la solución de la ecuación es

$$f(x) = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)) e^{\alpha x},$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

- Caso 2: Si $\lambda = 0$, hay una sola raíz: $s = 0$. La solución general es entonces

$$f(x) = C_1 + C_2x,$$

Imponiendo las condiciones $f(0) = f(1) = 0$, de nuevo obtenemos $C_1 = C_2 = 0$, por lo que la única solución es la trivial: $\rho \equiv 0$.

- Caso 3: Si $\lambda < 0$, hay dos raíces complejas conjugadas: $\pm i\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}$. La solución general de la ecuación es, en este caso,

$$f(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}x\right).$$

Por una parte,

$$f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

y por otra,

$$f(1) = 0 \Rightarrow C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}\right) = 0.$$

Si tomamos $C_2 = 0$, obtenemos de nuevo la solución trivial: $\rho \equiv 0$. La otra posibilidad es que el seno que aparece en la expresión sea cero. Para ello, tendríamos que tener

$$\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}} = n\pi,$$

para algún n natural. Dicho de otra forma, si elegimos λ como

$$\lambda = -\mu\pi^2n^2,$$

siendo n cualquier natural, entonces

$$f(x) = C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}x\right) = C_2 \operatorname{sen}(n\pi x)$$

verifica todas las propiedades requeridas, para cualquier $C_2 \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, tomamos

$$g(t) = e^{\lambda t} = e^{-\mu\pi^2n^2t}.$$

De esta forma, hemos obtenido la siguiente familia de soluciones no triviales:

$$\rho_n(x, t) = C_n e^{-\mu\pi^2n^2t} \operatorname{sen}(n\pi x),$$

en la que n es cualquier natural y C_n es cualquier constante arbitraria.

Ejemplo 1.13. Para $\mu = 0.1$ y $n = 1$, podemos considerar la solución

$$\rho_1(x, t) = e^{-0.1\pi^2t} \operatorname{sen}(\pi x),$$

que se ha representado, para distintos tiempos, en la figura 1.10.

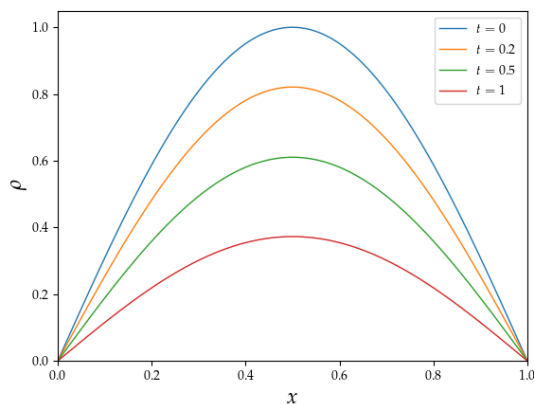


Figura 1.10: Evolución de la solución $\rho_1(x, t) = e^{-0.1\pi^2 t} \text{sen}(\pi x)$.

Para $n = 2$ y $n = 3$, tenemos las soluciones

$$\rho_2(x, t) = e^{-0.4\pi^2 t} \text{sen}(2\pi x), \quad \rho_3(x, t) = e^{-0.9\pi^2 t} \text{sen}(3\pi x),$$

cuyas evoluciones en tiempo se han representado en la figura 1.11. □

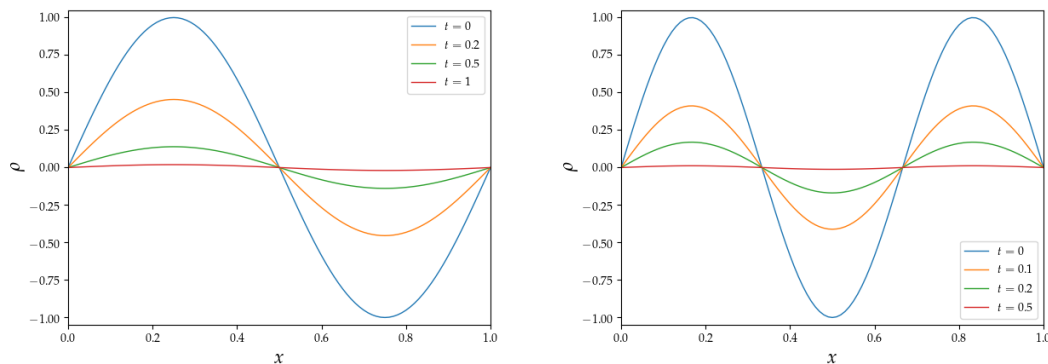


Figura 1.11: Evolución de las soluciones $\rho_2(x, t) = e^{-0.4\pi^2 t} \text{sen}(2\pi x)$ y $\rho_3(x, t) = e^{-0.9\pi^2 t} \text{sen}(3\pi x)$.

Es posible obtener nuevas soluciones haciendo combinaciones lineales de soluciones ya conocidas, ya que si $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ son soluciones de la ecuación de difusión y C_1, C_2, \dots, C_N son constantes arbitrarias, también es solución la función

$$\rho(x, t) = \sum_{n=1}^N C_n \rho_n(x, t) = C_1 \rho_1(x, t) + C_2 \rho_2(x, t) + \dots + C_N \rho_N(x, t).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^N C_n \rho_n \right) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^N C_n \rho_n \right) &= \sum_{n=1}^N C_n \frac{\partial \rho_n}{\partial t} - \mu \sum_{n=1}^N C_n \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} \\ &= \sum_{n=1}^N C_n \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, todas las funciones de la forma

$$\sum_{n=1}^N C_n e^{-\mu n^2 \pi^2 t} \text{sen}(n\pi x)$$

son soluciones de la ecuación de difusión.

En consecuencia, si la distribución inicial de temperatura en la barra, $\rho_0(x)$, puede expresarse como una combinación de senos,

$$\rho_0(x) = \sum_{n=1}^N C_n \text{sen}(n\pi x),$$

entonces la evolución de la temperatura vendrá dada por

$$\rho(x, t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-\mu n^2 \pi^2 t} \text{sen}(n\pi x).$$

Ejemplo 1.14. Si, por ejemplo, $\mu = 0.1$ y la temperatura inicial es

$$\rho_0(x) = \text{sen}(\pi x) - \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi x) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\pi x) - \frac{1}{4} \text{sen}(4\pi x),$$

la evolución de la temperatura vendrá dada por

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= e^{-0.1\pi^2 t} \text{sen}(\pi x) - \frac{1}{2} e^{-0.4\pi^2 t} \text{sen}(2\pi x) \\ &\quad + \frac{1}{3} e^{-0.9\pi^2 t} \text{sen}(3\pi x) - \frac{1}{4} e^{-1.6\pi^2 t} \text{sen}(4\pi x). \end{aligned}$$

En la figura 1.12 se ha representado esta solución en diferentes instantes de tiempo. □

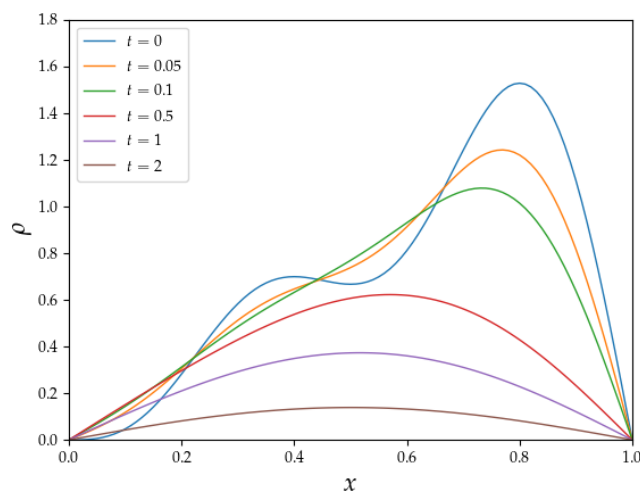


Figura 1.12: Evolución de la temperatura en el ejemplo 1.14.

Lo sorprendente es que muchas de las posibles distribuciones iniciales de temperatura pueden escribirse como una suma infinita de funciones sinusoidales,

$$\rho_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Ejemplo 1.15. Supongamos que

$$\rho_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x). \quad \square$$

Sea f una función periódica, esto es, existe un número T denominado *periodo*⁴, tal que

$$f(x + T) = f(x),$$

para toda x . Bajo ciertas hipótesis, f se puede expresar como una suma infinita de senos y cosenos con el mismo periodo, denominada *serie de Fourier*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right). \quad (1.5)$$

⁴Normalmente, se denomina *periodo* al menor T con esta propiedad.

Las funciones trigonométricas que aparecen a la derecha en (1.5) tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{T}x\right) dx &= 0, \quad \forall n, m, \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{T}x\right) dx &= \begin{cases} T/2 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{T}x\right) dx &= \begin{cases} T/2 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Supongamos que f es integrable en cada intervalo de longitud T y que la serie de funciones que aparece a la derecha en (1.5) es uniformemente convergente, lo que permite intercambiar la suma y la integral. Tomando integrales en (1.5) y usando las propiedades anteriores, se obtiene

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{a_0 T}{2}.$$

Multiplicando la igualdad (1.5) por $\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$, integrando y teniendo en cuenta las propiedades anteriores, resulta

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx = \frac{a_n T}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

De forma análoga, pero multiplicando por $\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$, obtenemos

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx = \frac{b_n T}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, los coeficientes de la serie de Fourier han de ser necesariamente

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 0, 1, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Observación 1.7. La pregunta de bajo qué condiciones la serie de Fourier de una función, es decir la serie que aparece en (1.5) con los coeficientes a_n y b_n anteriormente calculados, es sumable y su suma es igual a $f(x)$, es una cuestión difícil que es objeto del Análisis Matemático. Aquí supondremos que las funciones cuyas series de Fourier calculemos cumplen dichas condiciones. \square

Observación 1.8. La descomposición de una función periódica en sumandos sinusoidales tiene muchas aplicaciones prácticas en el estudio de fenómenos de naturaleza periódica, como pueden ser el sonido, las mareas, los biorritmos, etc. \square

Si además de ser periódica, la función f es par, es decir,

$$f(-x) = f(x),$$

es fácil probar que todos los coeficientes b_n se anulan y en la serie solo aparecen los cosenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right).$$

Además, en este caso se tiene que

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

En el caso en que la función f sea impar, es decir,

$$f(-x) = -f(x),$$

es fácil probar que todos los coeficientes a_n se anulan y en la serie solo aparecen los senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right).$$

Además, en este caso se tiene que

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Si se quiere expresar una función $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, no necesariamente periódica, como suma infinita de senos y cosenos, basta con extenderla por periodicidad (tal y como se ilustra en la figura 1.13) y calcular su desarrollo de Fourier. Después, basta con restringir la expresión resultante al intervalo $[0, L]$.

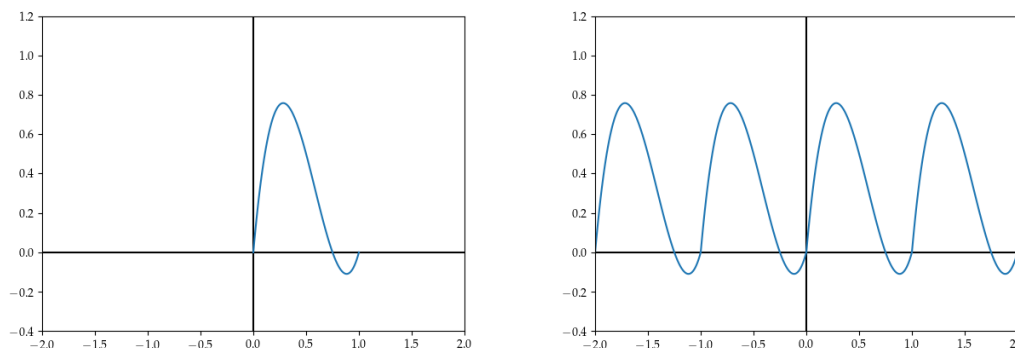


Figura 1.13: Función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (izquierda) y su extensión periódica (derecha).

Si queremos expresar como suma infinita de senos una función f definida solo en un intervalo $[0, L]$, primero se extiende a $[-L, L]$ por imparidad⁵, y después a todo \mathbb{R} por periodicidad: véase la figura 1.14. Al ser impar y periódica, en la serie de Fourier de esta extensión solo aparecen senos cuyos coeficientes se calculan como

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx.$$

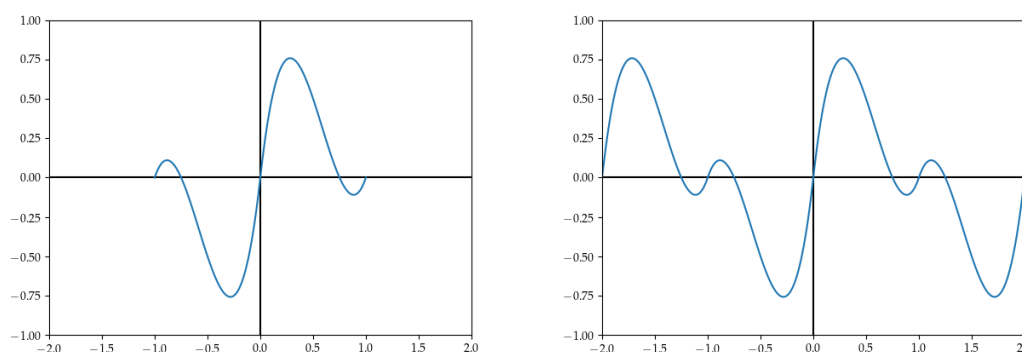


Figura 1.14: Izquierda: extensión impar de $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Derecha: extensión periódica.

Por último, si se quiere expresar como suma infinita de cosenos una función f definida solo en un intervalo $[0, L]$, primero se extiende a $[-L, L]$ por paridad⁶ y después a todo \mathbb{R} por periodicidad: véase la figura 1.15. Al ser par y periódica, en la serie de Fourier de esta extensión solo aparecen cosenos cuyos coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx.$$

⁵La *extensión impar* de una función $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como $\tilde{f}: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ -f(-x) & \text{si } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Se tiene que \tilde{f} es una función impar, que coincide con f en $[0, L]$.

⁶La *extensión par* de una función $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como $\tilde{f}: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ f(-x) & \text{si } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Se tiene que \tilde{f} es una función par, que coincide con f en $[0, L]$.

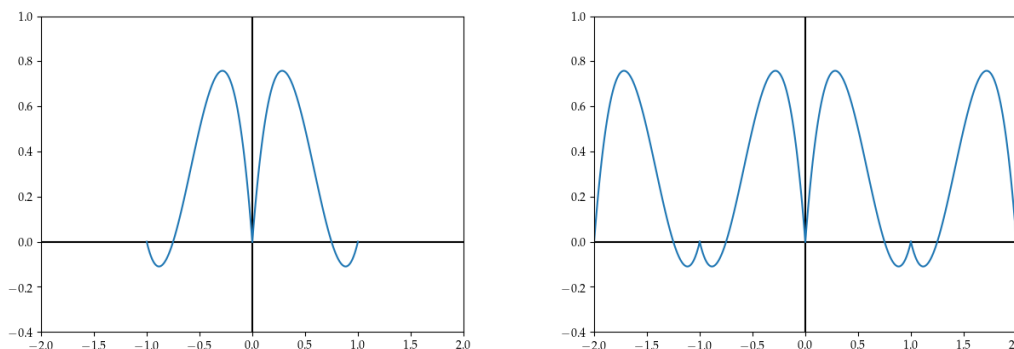


Figura 1.15: Izquierda: extensión par de $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Derecha: extensión periódica.

Ejemplo 1.16. Veamos un ejemplo de aplicación de las series de Fourier. Dada una distribución inicial de temperatura ρ_0 en el intervalo $[0, 1]$, calculamos su desarrollo en serie de senos. Cada uno de los coeficientes de la serie se determina mediante la integral

$$C_n = 2 \int_0^1 \rho_0(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx.$$

Una vez calculado los coeficientes, la solución de la ecuación de difusión viene dada por

$$\rho(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

En la práctica, la solución se aproxima truncando la serie:

$$\rho(x, t) \cong \sum_{n=1}^N C_n e^{-\mu n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Para ilustrar este proceso, consideremos el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} - 0.1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \\ \rho(x, 0) = x, \\ \rho(0, t) = \rho(1, t) = 0, \end{cases}$$

y aproximemos su solución usando series de Fourier. Para ello, se aproxima la condición inicial usando los N primeros sumandos de su serie de senos:

$$x \cong \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Entonces, la aproximación de la solución viene dada por

$$\rho(x, t) \cong \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} e^{-0.1n^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x). \quad \square$$

Observación 1.9. El análisis realizado en el ejemplo anterior puede extenderse a un intervalo general de la forma $[0, L]$. En ese caso, los coeficientes se calculan mediante la expresión

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \rho_0(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right).$$

Una vez calculados los coeficientes, la solución de la ecuación de difusión se puede expresar de la siguiente forma:

$$\rho(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right). \quad \square$$

Observación 1.10. El análisis de Fourier también permite expresar casi cualquier función como una suma infinita de cosenos, o de senos y cosenos. Sus aplicaciones prácticas son muy numerosas. □

1.5. Discretización del modelo de advección-difusión

En general, no es fácil (o incluso puede no ser posible) encontrar la expresión de la solución exacta del modelo de advección-difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = G, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), \\ + \text{condiciones de contorno.} \end{cases}$$

Por este motivo, se suele recurrir a métodos numéricos para aproximar la solución tanto como se desee o como se pueda. La idea es obtener un modelo discreto que aproxime al modelo continuo, y traducir el modelo discreto a un programa que permita la simulación en el ordenador. A este proceso se le denomina *discretización* del modelo. Hay distintas familias de métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales. En este tema aplicaremos el *método de diferencias finitas*.

1.5.1. Construcción del esquema numérico

Para comenzar la discretización, consideremos un conjunto de puntos en el intervalo $[0, L]$ en el que se resuelve la ecuación,

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L,$$

denominados *nodos*, y un conjunto de instantes de tiempo del intervalo temporal $[0, T]$ en el que se desea resolver la ecuación,

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T.$$

Para simplificar la presentación del método, supondremos que tanto los nodos como los niveles de tiempo considerados están igualmente espaciados. Llamaremos Δx al *paso de espacio*, es decir, a la distancia entre dos nodos consecutivos:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i,$$

y Δt al *paso de tiempo*, es decir, a la distancia entre dos niveles de tiempo consecutivos:

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n.$$

En consecuencia,

$$x_i = i\Delta x, \quad t_n = n\Delta t.$$

Los nodos y los niveles de tiempo considerados proporcionan una *malla* del espacio-tiempo, que se ha representado en la figura 1.16.

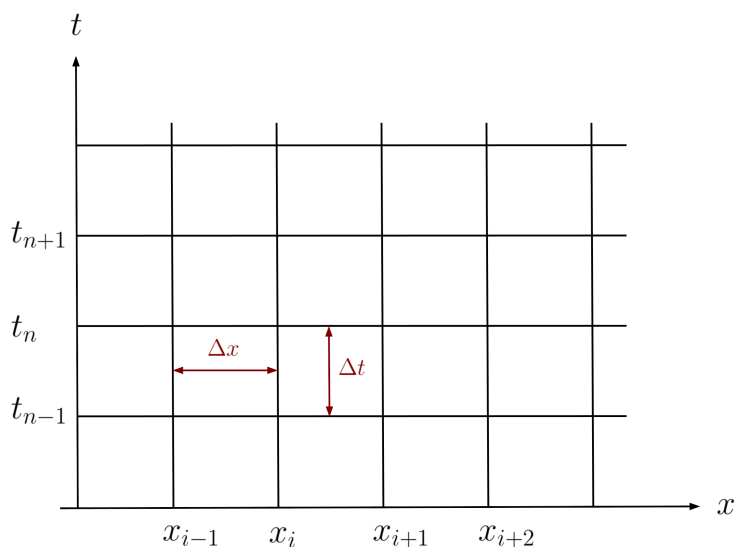


Figura 1.16: Discretización espacio-temporal.

La estrategia del método de diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas parciales de la solución en los puntos de la malla, mediante cocientes incrementales que involucren tan solo a puntos de la malla.

En primer lugar, vamos a aproximar la derivada en tiempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x_i, t_n).$$

Notemos que, por definición,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x_i, t_n) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\rho(x_i, t_n + k) - \rho(x_i, t_n)}{k}.$$

Si elegimos un valor concreto de k que sea lo suficientemente pequeño, la derivada puede aproximarse mediante un cociente incremental:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x_i, t_n) \cong \frac{\rho(x_i, t_n + k) - \rho(x_i, t_n)}{k}.$$

Si, en particular, tomamos $k = \Delta t$, obtenemos la aproximación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x_i, t_n) \cong \frac{\rho(x_i, t_n + \Delta t) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta t} = \frac{\rho(x_i, t_{n+1}) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta t},$$

en la que solo intervienen puntos de la malla.

Consideremos ahora la primera derivada en espacio

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n),$$

que es, por definición,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(x_i + h, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{h}.$$

Si elegimos un valor concreto de h que sea lo suficientemente pequeño, la derivada puede ser aproximada mediante el cociente incremental

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) \cong \frac{\rho(x_i + h, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{h}.$$

En particular, tomando $h = \Delta x$ se obtiene la aproximación

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) \cong \frac{\rho(x_i + \Delta x, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta x} = \frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta x},$$

que solo involucra a puntos de la malla. Notemos que los incrementos también pueden ser negativos. Si tomamos $h = -\Delta x$, obtenemos una aproximación diferente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) \cong \frac{\rho(x_i - \Delta x, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{-\Delta x} = \frac{\rho(x_i, t_n) - \rho(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x}.$$

Es más, se puede obtener una nueva aproximación que solo involucre a puntos de la malla haciendo la media de las dos anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) \right) \\ &\cong \frac{1}{2} \left(\frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta x} + \frac{\rho(x_i, t_n) - \rho(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - \rho(x_{i-1}, t_n)}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

Tenemos así tres aproximaciones diferentes para las derivadas en espacio de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) &\cong \frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) &\cong \frac{\rho(x_i, t_n) - \rho(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n) &\cong \frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - \rho(x_{i-1}, t_n)}{2\Delta x}, \end{aligned}$$

que se denominan, respectivamente, aproximación *descentrada a la derecha*, *descentrada a la izquierda* y *centrada*.

También debemos aproximar la derivada espacial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x_i, t_n),$$

que es, por definición,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i + h, t_n) - \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i, t_n)}{h}.$$

Consideramos, en primer lugar, una aproximación centrada tomando $h = \Delta x/2$:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x_i, t_n) \cong \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, t_n \right) - \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(x_i - \frac{\Delta x}{2}, t_n \right) \right).$$

En esta aproximación aparecen puntos que están fuera de la malla, pero si volvemos a aproximar cada una de las derivadas parciales de primer orden mediante una aproximación centrada, tomando de nuevo $h = \Delta x/2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x_i, t_n) &\cong \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, t_n \right) - \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(x_i - \frac{\Delta x}{2}, t_n \right) \right) \\ &\cong \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\rho(x_i + \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}, t_n) - \rho(x_i + \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2}, t_n)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho(x_i - \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}, t_n) - \rho(x_i - \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2}, t_n)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta x} - \frac{\rho(x_i, t_n) - \rho(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - 2\rho(x_i, t_n) + \rho(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x^2}, \end{aligned}$$

que, nuevamente, solo involucra a puntos de la malla.

Ya tenemos los elementos necesarios para construir el esquema numérico. Para ello, evaluamos la ecuación en cada punto de la malla y aproximamos las derivadas parciales mediante los cocientes incrementales deducidos anteriormente. En particular, tomamos las aproximaciones vistas para la derivada en tiempo, para la derivada en espacio de segundo orden y elegimos la aproximación descentrada a la izquierda de la derivada en espacio de primer orden. En tal caso, la solución exacta debe verificar

$$\begin{aligned} \frac{\rho(x_i, t_{n+1}) - \rho(x_i, t_n)}{\Delta t} + u \frac{\rho(x_i, t_n) - \rho(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} \\ - \mu \frac{\rho(x_{i+1}, t_n) - 2\rho(x_i, t_n) + \rho(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x^2} \cong G(x_i, t_n). \end{aligned}$$

La idea del método consiste en buscar aproximaciones ρ_i^n de $\rho(x_i, t_n)$, que verifiquen exactamente la relación anterior:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + u \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{\Delta x} - \mu \frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{\Delta x^2} = G(x_i, t_n).$$

Despejando, obtenemos la expresión

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} u (\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\rho_{i-1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i+1}^n) + \Delta t G(x_i, t_n),$$

que permite ir calculando las aproximaciones en un nivel temporal a partir de las aproximaciones en el nivel precedente. Denominaremos a este esquema *descentrado a la izquierda*. Los valores en el tiempo inicial t_0 los proporciona la condición inicial:

$$\rho_i^0 = \rho_0(x_i), \quad \forall i.$$

Observación 1.11. Obsérvese la similitud que hay con los modelos discretos estudiados en el tema anterior: si $u > 0$, la expresión del esquema numérico coincide con un modelo discreto en el que cada x_i es el centro de un compartimento de longitud Δx , y el espesor de la membrana es Δx , es decir, el intercambio se produce a través de todo el compartimento.

La principal diferencia es que, en este caso, la longitud y el número de los compartimentos son arbitrarios: mientras menor sea Δx , mayor será la precisión del esquema, pero también mayor será el número de compartimentos y, en consecuencia, el número de operaciones a realizar. \square

Si se considera la aproximación descentrada a la derecha de la derivada en espacio de primer orden, se llega al esquema

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + u \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x} - \mu \frac{\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{\Delta x^2} = G(x_i, t_n),$$

que puede escribirse como

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} u (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\rho_{i-1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i+1}^n) + \Delta t G(x_i, t_n).$$

Denominaremos a este esquema *descentrado a la derecha*.

1.5.2. Consistencia, estabilidad y convergencia

Para que un esquema numérico sea útil tiene que ser *convergente*: cuando Δt y Δx tienden a 0, las aproximaciones que se obtienen tienen que tender a los valores exactos de la solución del modelo continuo. Dos conceptos fundamentales en el estudio de la convergencia son la *consistencia* y la *estabilidad*. A continuación daremos una idea intuitiva de estos conceptos; su estudio preciso pertenece a la rama del Análisis Numérico.

Un esquema es *consistente* si los valores exactos de la solución del modelo continuo en los puntos de la malla $\rho(x_i, t_n)$ satisfacen las ecuaciones del modelo discretizado con un error que tiende a 0 cuando Δx y Δt tienden a 0. Un esquema es *estable* si los errores que se cometen en cada nodo x_i en cada instante t_n no son indebidamente amplificados a medida que se avanza en el tiempo.

Un resultado fundamental es el *teorema de Lax*, que afirma que un esquema en diferencias finitas consistente es convergente si y solo si es estable. En general, es mucho más sencillo demostrar la consistencia y la estabilidad que la convergencia.

En nuestro caso, tanto el esquema descentrado a la derecha como el descentrado a la izquierda son consistentes. En cuanto a la estabilidad, se demuestran los siguientes resultados:

- El esquema descentrado a la izquierda es estable si $u > 0$ y se cumple la condición

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.$$

- El esquema descentrado a la derecha es estable si $u < 0$ y se cumple la condición

$$\frac{-u\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.$$

Los esquemas descentrados a la izquierda y a la derecha se pueden combinar en una única expresión, usando los conceptos de parte positiva y parte negativa de la velocidad:

$$u^+ = \max(u, 0), \quad u^- = \min(u, 0).$$

En efecto, es fácil verificar que el esquema

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} = & \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} u^+ (\rho_{i-1}^n - \rho_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} u^- (\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) \\ & + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\rho_{i-1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i+1}^n) + \Delta t G(x_i, t_n), \end{aligned}$$

coincide con el descentrado a la izquierda si $u > 0$, y con el descentrado a la derecha si $u < 0$. Este esquema, denominado *descentrado*, es consistente y estable bajo la condición

$$\frac{|u|\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1,$$

que se conoce como *condición CFL* (de Courant, Friedrichs y Levy). En tal caso, por el teorema de Lax, el esquema descentrado es convergente.

Observación 1.12. Notemos que la condición CFL limita los pasos de tiempo que se pueden tomar. Normalmente, se elige el paso de espacio Δx y se toma Δt de forma que se cumpla la condición CFL.

El término de difusión limita más el tamaño de Δt que el término de advección. En efecto, para un problema de advección puro la condición CFL es

$$\frac{|u|\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

es decir, el paso de tiempo ha de verificar

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u|}.$$

Sin embargo, para un problema de difusión puro la condición CFL es

$$\frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1,$$

por lo que el paso de tiempo debe verificar

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\mu}.$$

Si Δx es pequeño, Δx^2 es mucho más pequeño. De esta forma, la difusión impone una restricción más fuerte que la advección en la elección de Δt . \square

La estabilidad del esquema mejora haciendo un tratamiento *implícito* del término de difusión. Veámoslo con un ejemplo: consideremos el problema de difusión puro

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), \\ \rho(0, t) = 0, \quad \rho(L, t) = 0. \end{cases}$$

Tomemos $N + 1$ nodos $x_0 = 0, x_1, \dots, x_{N+1} = L$ y M niveles de tiempo $t_0 = 0, t_1, \dots, t_M$. Las condiciones iniciales permiten fijar los valores en los nodos en t_0 ,

$$\rho_i^0 = \rho_0(x_i),$$

y las condiciones de contorno, el valor en los nodos extremos en todos los instantes de tiempo,

$$\rho_0^n = 0, \quad \rho_N^n = 0.$$

Si usamos el esquema estudiado para aproximar el valor en los nodos interiores en los tiempos t_1, \dots, t_M , la expresión del esquema se reduce a

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\rho_{i-1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i+1}^n), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

La idea de los esquemas implícitos consiste en escribir el término de difusión en el tiempo t_{n+1} , esto es,

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\rho_{i-1}^{n+1} - 2\rho_i^{n+1} + \rho_{i+1}^{n+1}), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Este esquema es *incondicionalmente estable*: no hay que imponer ninguna restricción sobre el paso de tiempo Δt para evitar inestabilidades. El precio a pagar es que, para pasar de un instante de tiempo al siguiente, hay que resolver un sistema lineal de $N - 1$ ecuaciones y $N - 1$ incógnitas. Concretamente, el sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \rho_0^{n+1} = 0, \\ -\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \rho_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \rho_i^{n+1} - \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \rho_{i+1}^{n+1} = \rho_i^n, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \rho_N^{n+1} = 0. \end{cases}$$

En forma matricial, el sistema se escribe como

$$AU^{n+1} = U^n, \tag{1.6}$$

siendo

$$U^n = \begin{pmatrix} \rho_1^n \\ \rho_2^n \\ \vdots \\ \rho_{N-1}^n \end{pmatrix}$$

y A la matriz tridiagonal dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\mu\Delta t/\Delta x^2 & -\mu\Delta t/\Delta x^2 & 0 & \dots & 0 \\ -\mu\Delta t/\Delta x^2 & 1 + 2\mu\Delta t/\Delta x^2 & -\mu\Delta t/\Delta x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + 2\mu\Delta t/\Delta x^2 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es simétrica y definida positiva, lo que implica que el sistema lineal (1.6) tiene solución única.

Consideremos, por último, el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = G, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), \\ \rho(0, t) = 0, \quad \rho(L, t) = 0. \end{cases}$$

El esquema explícito adecuado sería, en este caso,

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} = & \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u^+ (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n) + u^- (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n)) \\ & + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n) + \Delta t G(x_i, t_n), \end{aligned}$$

que es estable bajo la condición CFL

$$\frac{|u|\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.$$

Se puede mejorar la estabilidad discretizando algunas derivadas en el tiempo t_{n+1} . Si se hace solo con el término de difusión y el término fuente, resulta

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} = & \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u^+ (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n) + u^- (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n)) \\ & + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\rho_{i+1}^{n+1} - 2\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}) + \Delta t G(x_i, t_{n+1}). \end{aligned}$$

El sistema a resolver tienen la misma matriz tridiagonal, simétrica y definida positiva que apareció en el modelo de difusión anterior.

TEMA

2

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE SISTEMAS DINÁMICOS

En este tema presentaremos una serie de conceptos básicos de la teoría de sistemas dinámicos, que serán fundamentales a la hora de abordar los temas siguientes.

Definición 2.1. *Un sistema dinámico es una terna (X, T, φ) , donde*

- *X es un espacio métrico¹, denominado conjunto de estados o de fases.*
- *T es un subconjunto de \mathbb{R} , denominado conjunto de tiempos, que verifica: $0 \in T$, $T \neq \{0\}$ y $s + t \in T, \forall s, t \in T$.*
- *$\varphi: T \times X \rightarrow X$ es una aplicación continua, denominada flujo, que satisface:*
 - $\varphi(0, x) = x, \forall x \in X$.
 - $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x), \forall t, s \in T, \forall x \in X$.

Ejemplo 2.1. Sean $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$ y $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(n, x) = \alpha^n x,$$

¹Recordemos que un *espacio métrico* es un par (M, d) , donde M es un conjunto y la aplicación $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (llamada *distancia* o *métrica*) verifica

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in M$.
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$.

con $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Es inmediato comprobar que la terna (X, T, φ) define un sistema dinámico. En particular,

- $\varphi(0, x) = \alpha^0 x = x$.
- $\varphi(n, \varphi(m, x)) = \alpha^n \varphi(m, x) = \alpha^n (\alpha^m x) = \alpha^{n+m} x = \varphi(n + m, x)$.

Si en el mismo ejemplo cambiamos el espacio de tiempos por $T = \mathbb{Z}$, se obtendría un sistema dinámico distinto. \square

Ejemplo 2.2. Consideremos $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}$ y

$$\varphi(t, x) = xe^{kt},$$

con $k \in \mathbb{R}$ fijado. Se tiene que

- $\varphi(0, x) = xe^0 = x$.
- $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s, x)e^{kt} = xe^{ks}e^{kt} = xe^{k(s+t)} = xe^{k(t+s)} = \varphi(t + s, x)$.

Por tanto, la terna (X, T, φ) define un sistema dinámico. \square

Definición 2.2. Dado un sistema dinámico (X, T, φ) y dado $x \in X$, se denomina órbita o trayectoria de x a la aplicación $\varphi_x: T \rightarrow X$ definida por $\varphi_x(t) = \varphi(t, x)$.

A veces también se le llama órbita a la imagen de φ_x , esto es,

$$\gamma_x = \{\varphi_x(t) : t \in T\} = \{\varphi(t, x) : t \in T\} \subset X.$$

Usaremos ambos conceptos indistintamente: el contexto nos dirá si nos referimos a la aplicación φ_x o a su imagen.

Observación 2.1. La primera propiedad del flujo nos dice que la órbita de un punto x comienza en el propio punto. La segunda propiedad del flujo puede interpretarse del siguiente modo: si, partiendo de un punto x , nos movemos primero durante un tiempo s , y a partir del punto al que llegamos viajamos un tiempo t , llegamos al mismo punto que si hubiésemos viajado un tiempo $t + s$ partiendo de x . \square

Ejemplo 2.3. En el ejemplo 2.1, la órbita de $x = 1$ sería la aplicación $\varphi_1(n) = \alpha^n$, cuya imagen es $\gamma_1 = \{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$. En el ejemplo 2.2, la órbita de $x = 1$ sería $\varphi_1(t) = e^{kt}$, y su imagen sería $\gamma_1 = \{e^{kt} : t \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$. \square

Consideremos ahora dos órbitas, γ_x y γ_y , con $x \neq y$. Dichas órbitas podrían ser disjuntas: $\gamma_x \cap \gamma_y = \emptyset$. En caso de que no lo sean, existen $t_1, t_2 \in T$ de modo que $\varphi(t_1, x) = \varphi(t_2, y)$. Entonces, para $t \in T$ arbitrario se verifica:

$$\varphi(t + t_1, x) = \varphi(t, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t, \varphi(t_2, y)) = \varphi(t + t_2, y).$$

Supongamos que T tiene además estructura de grupo, esto es, para cada tiempo $t \in T$ se tiene que $-t \in T$. En tal caso, para $s \in T$ arbitrario, definamos $t = s - t_1$ y apliquemos la igualdad anterior:

$$\varphi(s, x) = \varphi(t + t_1, x) = \varphi(t + t_2, y) = \varphi(s - t_1 + t_2, y).$$

Esto prueba que $\gamma_x \subset \gamma_y$. El recíproco se demuestra de forma análoga, con lo que concluimos que $\gamma_x = \gamma_y$. Hemos probado así el siguiente resultado:

Proposición 2.1. Supongamos que T es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} . Dados $x \neq y$ en X , entonces o bien $\gamma_x \cap \gamma_y = \emptyset$, o bien $\gamma_x = \gamma_y$.

Observación 2.2. Aunque $\gamma_x = \gamma_y$, en general $\varphi_x \neq \varphi_y$. De hecho, lo que se verifica es la igualdad $\varphi_x(s) = \varphi_y(s - t_1 + t_2)$, es decir, φ_y es una reparametrización de φ_x , en la que pasamos por los mismos puntos en diferentes tiempos. \square

Cuando T es un grupo, podemos concluir que el conjunto $\{\gamma_x : x \in X\}$ constituye una partición del espacio de estados X . Al representar gráficamente las órbitas γ_x , es necesario indicar la dirección que siguen los puntos de las órbitas conforme el tiempo avanza. El conjunto de todas las órbitas orientadas de esta forma se denomina *diagrama de fases* del sistema.

Ejemplo 2.4. Veamos algunos ejemplos ilustrativos:

- $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{Z}$, $\varphi(n, x) = x/2^n$. Para $x = 1$, se tiene que

$$\gamma_1 = \{\dots, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}.$$

La órbita de cualquier punto de la forma $1/2^n$ coincide con γ_1 .

- $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$, $\varphi(n, x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

En este caso, todas las órbitas coinciden a partir del tiempo $n = 1$. Nótese que esto no entra en contradicción con la proposición 2.1, ya que en este ejemplo T no es un grupo.

- $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}$, $\varphi(t, x) = xe^{kt}$. Tenemos varios casos:

- Si $k > 0$,

$$\gamma_x = \begin{cases} (0, \infty) & \text{si } x > 0, \\ \{0\} & \text{si } x = 0, \\ (-\infty, 0) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Vemos entonces que solo hay tres órbitas distintas.

- Si $k = 0$, entonces $\gamma_x = \{x\}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. En este caso, cada punto constituye una órbita.
- Si $k < 0$, se obtiene el mismo resultado que en el caso $k > 0$.

Los diagramas de fases correspondientes a cada uno de los casos se ha representado en la figura 2.1. El sentido de las flechas indica hacia dónde se mueve un punto de la órbita conforme avanza el tiempo. Es importante notar que, aunque para $k > 0$ y $k < 0$ se obtiene la misma partición de la recta real, las órbitas tienen diferente orientación, por lo que el diagrama de fases es diferente en ambos casos. \square

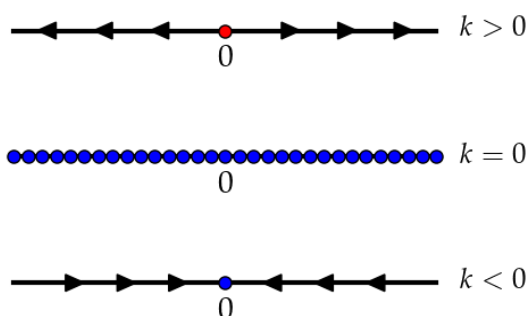


Figura 2.1: Diagramas de fases del sistema dinámico determinado por $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}$ y $\varphi(t, x) = x e^{kt}$.

Damos a continuación dos definiciones fundamentales:

Definición 2.3. Si $x^* \in X$ es tal que $\gamma_{x^*} = \{x^*\}$, esto es,

$$\varphi(t, x^*) = x^*, \quad \forall t \in T,$$

diremos que x^* es un equilibrio y que su órbita es estacionaria.

Definición 2.4. Dado $x \in X$, diremos que la órbita γ_x es periódica si existe $\tau \in T$ tal que

$$\varphi(t + \tau, x) = \varphi(t, x), \quad \forall t \in T.$$

Observación 2.3. Cuando γ_x es una sucesión, si es periódica entonces solo recorre un número finito de puntos. En el caso continuo ($T = \mathbb{R}$), las órbitas periódicas representan curvas cerradas; en particular, si $X = \mathbb{R}$ entonces no puede haber órbitas periódicas. \square

Las dos definiciones siguientes no son tan utilizadas, pero de todas formas las damos:

Definición 2.5. Para $x \in X$, diremos que γ_x es finalmente estacionaria si existen un equilibrio x^* y un tiempo \bar{t} tales que $\varphi(\bar{t}, x) = x^*$.

Observación 2.4. Nótese que la condición anterior implica que $\varphi(t + \bar{t}, x) = x^*$, $\forall t \in T$. En particular, si T es un grupo entonces no pueden existir órbitas finalmente estacionarias. \square

Definición 2.6. Diremos que una órbita γ_x es finalmente periódica si existen $\bar{t}, \tau \in T$ de modo que $\varphi(t + \tau, x) = \varphi(t, x)$, $\forall t \geq \bar{t}$.

Las definiciones siguientes son muy importantes:

Definición 2.7. Una órbita γ es estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \gamma$ e $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, entonces

$$d(\varphi(t, y), \varphi(t, x)) < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Cuando γ no es estable, se dice que es inestable.

La idea intuitiva de órbita estable es que si perturbamos ligeramente el punto desde el que parte la órbita, la trayectoria resultante no se aleja demasiado de la órbita original, tal y como se muestra en la figura 2.2.

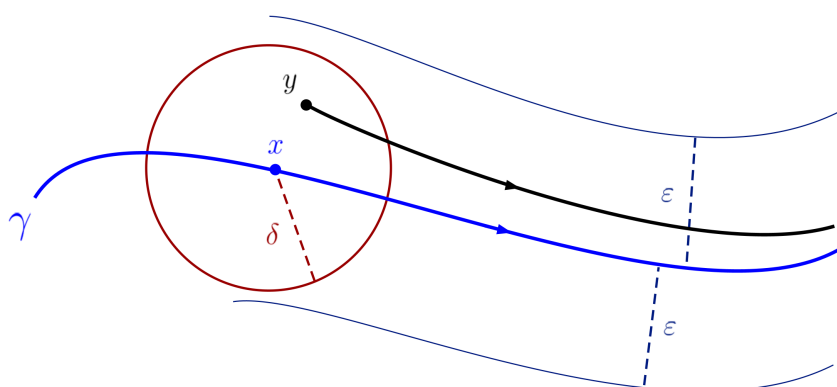


Figura 2.2: Órbita estable: idea geométrica.

Definición 2.8. Una órbita γ es atractora si existe $\delta > 0$ tal que, dados $x \in \gamma$ e $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \varphi(t, y)) = 0.$$

Observación 2.5. Nótese que la definición de órbita atractora solo tiene sentido cuando existe dicho límite, es decir, cuando ∞ es un punto de acumulación del conjunto de tiempos T . \square

La idea intuitiva de órbita atractora es que dicha órbita «atrae» a todas las órbitas de un entorno suyo, en el sentido de que tienden a la órbita atractora conforme el tiempo tiende a infinito: véase la figura 2.3.

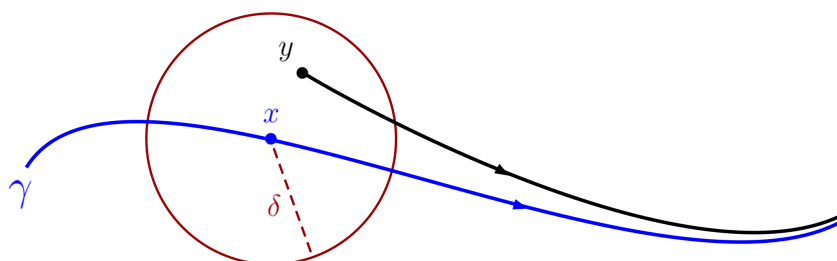
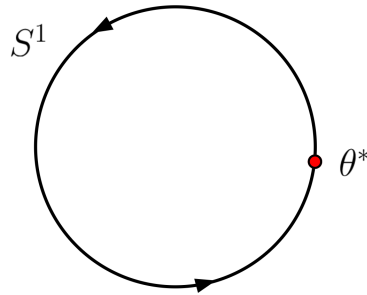


Figura 2.3: Órbita atractora: idea geométrica.

Observación 2.6. Una órbita puede ser atractora e inestable. Para ver un ejemplo, consideremos el sistema dinámico sobre la circunferencia unidad S^1 representado en la siguiente figura:



El diagrama de fases consta de dos órbitas: un equilibrio θ^* y $\gamma = S^1 \setminus \{\theta^*\}$. El equilibrio θ^* es atractor, ya que la órbita γ tiende a θ^* cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, es inestable, ya que si elegimos un intervalo pequeño alrededor de θ^* , la trayectoria γ abandonará dicho intervalo en algún momento. El sistema dinámico considerado puede definirse a partir de las soluciones de la ecuación diferencial $\theta'(t) = 1 - \cos \theta(t)$. Los sistemas dinámicos definidos a partir de una ecuación diferencial se estudiarán en el tema 4. \square

Definición 2.9. Diremos que una órbita γ es asintóticamente estable si es estable y atractora.

Definición 2.10. Una órbita γ es repulsora si existe $\delta > 0$ tal que, dados $x \in \gamma$ e $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, x), \varphi(t, y)) = 0.$$

Observación 2.7. La idea intuitiva de una órbita repulsora es que «repele» a todas las órbitas en un entorno suyo. \square

Definición 2.11. El dominio de atracción de una órbita γ se define como²

$$S_\gamma = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0\},$$

y su dominio de repulsión como

$$U_\gamma = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0\}.$$

Cuando $S_\gamma = X$, se dice que γ es un atractor universal. Análogamente, γ es un repulsor universal si $U_\gamma = X$.

Observación 2.8. Notemos que siempre se verifica $\gamma \subset S_\gamma \cap U_\gamma$. Por otra parte, supongamos que γ es atractora y sea $\delta > 0$ el valor que aparece en la definición. Entonces, si $x \in \gamma$, la bola abierta de centro x y radio δ estará también contenida en S_γ . En particular, los puntos de la trayectoria γ están contenidos en el interior del dominio de atracción S_γ . Lo mismo puede decirse respecto del dominio de repulsión U_γ cuando γ es repulsora. \square

²Dados un subconjunto $A \subset X$ y un punto $x \in X$, se define la distancia de x a A como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Es interesante ver cómo quedan algunas de las definiciones anteriores en el caso particular en que la órbita sea un equilibrio x^* :

- El equilibrio x^* es *estable* si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $y \in X$ con $d(x^*, y) < \delta$, se tiene que $d(\varphi(t, y), x^*) < \varepsilon$.
- El equilibrio x^* es *atractor* si existe $\delta > 0$ tal que, para cada $y \in X$ con $d(x^*, y) < \delta$, se verifica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, y) = x^*$.
- El equilibrio x^* es *repulsor* si existe $\delta > 0$ tal que, para cada $y \in X$ con $d(x^*, y) < \delta$, se verifica $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x^*) = x^*$.
- El equilibrio x^* es *asintóticamente estable* si es estable y atractor.
- Los *dominios de atracción y repulsión* del equilibrio x^* son, respectivamente,

$$S_{x^*} = \{y \in X: \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, y) = x^*\}, \quad U_{x^*} = \{y \in X: \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, y) = x^*\}.$$

- Se verifica que $x^* \in S_{x^*} \cap U_{x^*}$. Por otra parte, x^* está en el interior de S_{x^*} cuando es atractor, y en el interior de U_{x^*} cuando es repulsor.

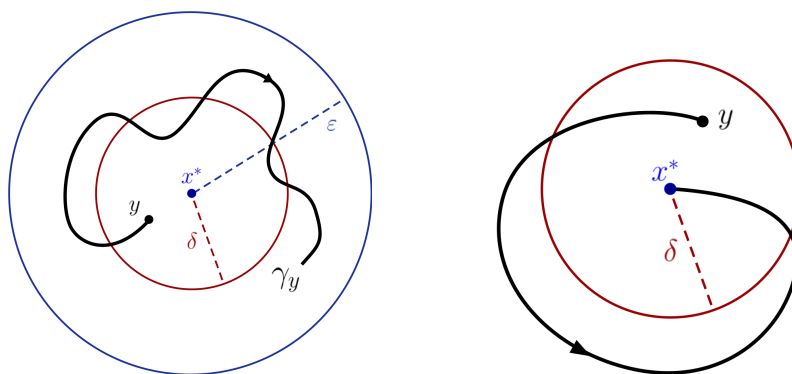


Figura 2.4: Izquierda: equilibrio estable. Derecha: equilibrio atractor.

Ejemplo 2.5. Consideremos el sistema dinámico $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \varphi)$, con $\varphi(n, x) = \alpha^n x$, $\alpha \neq 0$. Vamos a estudiar sus equilibrios y analizar su estabilidad. En primer lugar, determinemos los equilibrios:

$$\varphi(n, x) = x \Leftrightarrow \alpha^n x = x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ para cualquier valor de } \alpha, \\ \text{todo } \mathbb{R} \text{ cuando } \alpha = 1. \end{cases}$$

Centrémonos en el estudio del equilibrio $x^* = 0$. Hay que considerar varios casos:

- $\alpha > 1$. Para cualquier $y \neq 0$ se verifica que la sucesión $\{\alpha^n y\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tiende a ∞ o a $-\infty$, dependiendo del signo de y . En consecuencia, se tiene que 0 es inestable, $S_0 = \{0\}$ y $U_0 = \mathbb{R}$ (repulsor universal). Veamos esto último: dado $y \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi(n, y) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \alpha^n y = y \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{-n} = 0,$$

lo que implica que $y \in U_0$.

- $\alpha = 1$. Al ser cada punto de \mathbb{R} un equilibrio, se tiene que 0 es estable pero no es atractor ni repulsor; de hecho, $S_0 = U_0 = \{0\}$.
- $0 < \alpha < 1$. En este caso, las sucesiones $\{\alpha^n y\}_{n \in \mathbb{Z}}$ convergen a 0 para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Puede deducirse entonces que 0 es asintóticamente estable, es atractor universal ($S_0 = \mathbb{R}$) y $U_0 = \{0\}$.
- $-1 < \alpha < 0$. Se tienen las mismas conclusiones que en el caso anterior. La única diferencia es que ahora las sucesiones $\{\alpha^n y\}_{n \in \mathbb{Z}}$ van alternando el signo.
- $\alpha = -1$. En este caso todas las órbitas son periódicas de periodo 2, salvo la de 0, que es estacionaria. En efecto, para $y \neq 0$,

$$\varphi(n+2, y) = (-1)^{n+2} y = (-1)^n y = \varphi(n, y).$$

Se tiene que 0 es estable, pero no asintóticamente estable, y $S_0 = U_0 = \{0\}$.

- $\alpha < -1$. Se obtienen las mismas conclusiones que en el primer caso.

□

Ejemplo 2.6. Consideremos el sistema dinámico $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varphi)$, con $\varphi(t, x) = e^{kt}x$. Cuando $k \neq 0$, el único equilibrio es 0:

$$\varphi(t, x) = x \Leftrightarrow e^{kt}x = x \Leftrightarrow x = 0.$$

En cambio, para $k = 0$, cualquier punto es un equilibrio. Tenemos los siguientes casos:

- $k > 0$. El equilibrio 0 es inestable, $U_0 = \mathbb{R}$ (repulsor universal) y $S_0 = \{0\}$.
- $k = 0$. Todos los puntos de \mathbb{R} son equilibrios estables, pero no atractores. En particular, $S_0 = U_0 = \{0\}$.
- $k < 0$. Ahora 0 es asintóticamente estable, $S_0 = \mathbb{R}$ (atractor universal) y $U_0 = \{0\}$.

Los diagramas de fases para cada uno de los casos pueden verse en la figura 2.1.

□

SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS DE UNA VARIABLE

3.1. Introducción

Consideremos un sistema dinámico (X, T, φ) , donde $X = I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y T puede ser $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^-$, o bien $k\mathbb{N}, k\mathbb{Z}, k\mathbb{Z}^-$, con $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(I) \subset I$. Definimos

$$\varphi(n, x) = f^n(x) = (f \circ \cdots \circ f)(x) = f(f(\cdots(f(x))\cdots)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es fácil comprobar que, si se define $f^0(x) = x$, entonces (I, \mathbb{N}, φ) es un sistema dinámico. La *órbita* de $x \in I$ es la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$x_0 = x, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f^2(x_0) = f(x_1), \quad x_3 = f^3(x_0) = f(x_2), \dots$$

Recíprocamente, si la órbita de $x \in I$ es $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, podemos probar por inducción que $x_n = f^n(x_0) = f(x_{n-1})$.

Si $l \in I$ es un *equilibrio* del sistema, en particular se tiene que $x_1 = f(l) = l$; es decir, l es un *punto fijo* de f . Recíprocamente, si $l \in I$ es un punto fijo de f (esto es, $l = f(l)$), entonces

$$\varphi(n, l) = f^n(l) = f(f(\cdots(f(l))\cdots)) = l.$$

En consecuencia, l es un equilibrio. En resumen, $l \in I$ es un equilibrio del sistema dinámico si y solo si l es un punto fijo de la función f . □

El recíproco del ejemplo anterior es asimismo cierto, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.1. Si (I, \mathbb{N}, φ) es un sistema dinámico, existe una única función continua $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(I) \subset I$, tal que $\varphi(n, x) = f^n(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$.

Demostración. Basta con tomar $f(x) = \varphi(1, x)$. Comprobemos que se verifican las propiedades correspondientes:

- f es continua, por serlo φ .
- $f(I) \subset I$ es trivial, ya que $\varphi: \mathbb{N} \times I \rightarrow I$; en particular, $\varphi(1, x) \in I$, para cada $x \in I$.
- ¿ $\varphi(n, x) = f^n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$? Veámoslo por inducción:
 - Para $n = 1$ es obvio.
 - Suponiendo que es cierto para n , usando la propiedad del flujo se tiene que

$$\varphi(n+1, x) = \varphi(n, \varphi(1, x)) = \varphi(n, f(x)) = f^n(f(x)) = f^{n+1}(x).$$

Por tanto, es asimismo cierto para $n+1$.

□

Observación 3.1. Supongamos que f es inyectiva y $f(I) = I$ (es decir, f posee inversa). En tal caso, podemos extender el sistema dinámico del ejemplo 3.1 al conjunto de tiempos $T = \mathbb{Z}$, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \varphi(n, x) = f^n(x) & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ \varphi(0, x) = x & \text{si } n = 0, \\ \varphi(-n, x) = (f^{-1})^n(x) & \text{si } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Así, (I, \mathbb{Z}, φ) sería un sistema dinámico.

Por otro lado, dado un sistema dinámico (I, \mathbb{Z}, φ) , existe una única función continua e invertible $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(I) = I$, tal que $\varphi(n, x) = f^n(x)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $x \in I$. Para verlo, basta con tomar $f(x) = \varphi(1, x)$ y $f^{-1}(x) = \varphi(-1, x)$. □

Resumiendo lo visto hasta ahora, el estudio de un sistema dinámico (I, \mathbb{N}, φ) , con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, equivale a estudiar las sucesiones

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

para una cierta función continua $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subset I$, en el sentido de que la trayectoria de $x_0 \in I$ es la sucesión $\gamma_{x_0} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ definida anteriormente, tomando $f(x) = \varphi(1, x)$. Por otra parte, si $l \in I$ es tal que $\gamma_l = \{l, l, l, \dots\}$ (equilibrio), entonces se tiene que $l = f(l)$ (y viceversa), ya que por definición $\gamma_l = \{l, f(l), f^2(l), \dots\}$. Es decir, un punto $l \in I$ es equilibrio del sistema dinámico si y solo si l es punto fijo de f .

3.2. Modelos de población discretos

Supongamos que x_n representa el estado de una población en un instante de tiempo de la forma $t_n = n\Delta t$. El valor $x_n \in [0, \infty)$ se puede medir en número de individuos, masa de población, etc. Definimos:

- la *tasa de natalidad*, k_N , como el número de nacimientos por unidad de tiempo y unidad de población;
- la *tasa de mortalidad*, k_M , como el número de muertes por unidad de tiempo y unidad de población.

La ley que usaremos para deducir un modelo es la siguiente: la cantidad de población en el instante t_{n+1} será igual a la cantidad de población que había en el instante t_n , *más* el número de nacimientos entre los tiempos t_n y t_{n+1} , *menos* el número de muertes durante el mismo periodo. Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, esta ley puede escribirse como

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t k_N x_n - \Delta t k_M x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

siendo $x_0 \in [0, \infty)$ la población inicial. Según la forma que tengan k_N y k_M , podemos deducir varios modelos. A continuación estudiaremos dos de ellos.

3.2.1. Modelo de Malthus

En este modelo se suponen que las tasas de natalidad y mortalidad son constantes. Si definimos la *tasa de crecimiento* $k = k_N - k_M$, el modelo puede escribirse como

$$x_{n+1} = ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

siendo $a = 1 + \Delta t k$. Notemos que el modelo solo tiene sentido cuando $a \geq 0$. Cuando $k \geq 0$ (es decir, hay más nacimientos que muertes) esta condición se verifica trivialmente. Si $k < 0$ (hay más muertes que nacimientos) entonces hay que elegir $\Delta t \leq -1/k$ para que se verifique $a \geq 0$.

La función que define el sistema dinámico es $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$. ¿Cuáles son los equilibrios del sistema? La ecuación a resolver es $f(x) = x \Leftrightarrow x = ax$; tenemos entonces dos situaciones:

- El estado $l_1 = 0$ es siempre un equilibrio. Teniendo en cuenta que la solución del modelo puede escribirse de forma explícita como

$$x_n = a^n x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

deducimos que $l_1 = 0$ es asintóticamente estable y atractor universal cuando $a \in [0, 1)$, y es inestable cuando $a > 1$.

- Si $a = 1$, todos los estados son equilibrios. Esto sucede cuando $k_N = k_M$, es decir, el número de nacimientos y muertes es el mismo durante cada intervalo temporal. Cada estado es estable pero no asintóticamente estable.

3.2.2. Modelo logístico

Suponemos ahora que k_N es constante y k_M es proporcional a la cantidad de población: $k_M = \alpha x_n$, con $\alpha > 0$. En tal caso, el modelo quedaría así:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t k_N x_n - \Delta t (\alpha x_n) x_n = (1 + \Delta t k_N) x_n - \Delta t \alpha x_n^2 \\ &= (1 + \Delta t k_N) x_n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha}{1 + \Delta t k_N} x_n \right) = r x_n \left(1 - \frac{x_n}{\bar{x}} \right), \end{aligned}$$

siendo $r = 1 + \Delta t k_N > 1$ y $\bar{x} = \frac{r}{\Delta t \alpha}$. Para evitar que x_n tome valores negativos, hay que considerar el intervalo $I = [0, \bar{x}]$; de esta forma, \bar{x} representa el mayor valor posible de la población. En resumen, el modelo a estudiar es de la forma

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \bar{x}], \\ x_{n+1} = r x_n \left(1 - \frac{x_n}{\bar{x}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Notemos que el modelo depende de dos parámetros, r y \bar{x} , por lo que su análisis es, en principio, más complicado que el del modelo de Malthus. Para intentar simplificar su estudio, vamos a realizar una *adimensionalización* del modelo (en este contexto, la *dimensión* de una variable es la unidad con la que se mide). Denotaremos por P a la unidad utilizada para medir poblaciones (número de individuos, miles de individuos, millones de individuos, gramos, kilos, etc.), y por T a la unidad para medir el tiempo (segundos, días, años, etc.); escribiremos $[x_n] = P$ y $[\Delta t] = T$.

En primer lugar, haremos un *análisis dimensional* para determinar las unidades de todos los elementos que intervienen en el modelo. La regla básica a usar es que solo es posible sumar o igualar magnitudes que tengan la misma dimensión. A partir de la ecuación del modelo, tenemos que

$$[x_{n+1}] = [r][x_n] \left(1 - \frac{[x_n]}{[\bar{x}]} \right).$$

Como 1 es adimensional, tenemos que $[\bar{x}] = [x_n] = P$. Usando que $[x_{n+1}] = [x_n] = P$, deducimos que $[r] = 1$, esto es, r es adimensional. Al ser $[r] = 1 + [\Delta t][k_N]$, resulta que $[k_N] = T^{-1}$. A partir de la definición de \bar{x} , se obtiene que $[\alpha] = \frac{[r]}{[\bar{x}][\Delta t]} = T^{-1}P^{-1}$. Por último, $[k_M] = [\alpha][x_n] = T^{-1}$.

A continuación, elegimos estados fijos x^* y t^* , y tomamos como nuevas variables $x'_n = \frac{x_n}{x^*}$ y $t'_n = \frac{t_n}{t^*}$. En nuestro caso elegimos $x^* = \bar{x}$, por lo que

$$x'_n = \frac{x_n}{\bar{x}}.$$

Nótese que x'_n es adimensional: $[x_n] = \frac{[x_n]}{[\bar{x}]} = \frac{P}{P} = 1$; además, si $x_n \in [0, \bar{x}]$, entonces $x'_n \in [0, 1]$. Por otro lado,

$$x'_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\bar{x}} = r \frac{x_n}{\bar{x}} \left(1 - \frac{x_n}{\bar{x}} \right) = r x'_n (1 - x'_n).$$

De esta forma, el modelo adimensionalizado quedaría así:

$$\begin{cases} x'_0 \in [0, 1], \\ x'_{n+1} = rx'_n(1 - x'_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Por último, si elegimos $t^* = \Delta t$, entonces $t'_n = n$.

En resumen, renombrando las variables, el modelo a estudiar es de la forma

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1], \\ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Este modelo adimensionalizado tiene varias ventajas:

- Se ha reducido el número de parámetros a uno solo, con lo que el análisis posterior será más simple.
- El mismo modelo sirve para estudiar distintas poblaciones, independientemente de los valores de los parámetros.
- Los estados varían en el intervalo $[0, 1]$.

La función que definiría el sistema dinámico es $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = rx(1 - x)$. ¿Se verifica que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$? Es fácil ver que la imagen de $[0, 1]$ por f es el intervalo $[0, \frac{r}{4}]$, por lo que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ si y solo si $r \leq 4$. En lo sucesivo, cuando tratemos con el modelo logístico supondremos que $r \in [0, 4]$.

A continuación vamos a estudiar el comportamiento de las sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ generadas por el modelo. Para ello, vamos a recordar algunos resultados útiles.

Teorema (del punto fijo). Si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es contractiva¹ y $f(I) \subset I$, siendo I un intervalo cerrado, entonces f posee un único punto fijo $\hat{x} \in I$. Además, para cualquier $x_0 \in I$, la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, está bien definida y converge a \hat{x} .

En el lenguaje de los sistemas dinámicos, el teorema del punto fijo se escribiría como sigue:

Teorema 3.1. Dado un sistema dinámico (I, \mathbb{N}, φ) , con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo cerrado y tal que la función $f(x) = \varphi(1, x)$ es contractiva, existe un único equilibrio l , que además es asintóticamente estable y atractor universal.

Otro resultado útil es el siguiente, que es una consecuencia del teorema del valor medio:

Proposición 3.2. Si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en I y derivable en² $\text{int}(I)$, entonces f es contractiva si y solo si existe $c \in [0, 1)$ tal que $|f'(x)| \leq c$, para cada $x \in \text{int}(I)$.

¹Recordemos que f es contractiva si es de Lipschitz con constante $c \in [0, 1)$, es decir,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

²Denotaremos como $\text{int}(I)$ al interior del conjunto I .

Volvamos al caso de la función $f(x) = rx(1-x)$, $x \in [0,1]$. ¿Cuándo es contractiva? Se tiene que $f'(x) = r(1-2x)$, así que, trivialmente,

$$\max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = r.$$

Por la proposición 3.2, f será contractiva cuando $r < 1$. En este caso, por el teorema 3.1 sabemos que hay un único equilibrio atractor universal.

¿Cuáles son los puntos fijos de f ? Veamos:

$$f(x) = x \Leftrightarrow rx(1-x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ r(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Llamemos $l_1 = 0$ y $l_2 = 1 - \frac{1}{r}$. Tenemos que l_1 es punto fijo para cualquier valor de r . Por otro lado, si $r \in (0,1)$ entonces $l_2 < 0$, que no tiene sentido en el modelo; si $r = 1$ se tiene que $l_1 = l_2$; y si $r > 1$, se verifica que $l_2 \in [0,1]$. Tenemos entonces:

- Para $r \in (0,1)$ hay un único equilibrio en $[0,1]$, $l_1 = 0$. En este caso la aplicación f es contractiva, por lo que l_1 es asintóticamente estable y atractor universal. Nótese que este caso no tendría sentido en el contexto del modelo de poblaciones, ya que en este $r = 1 + \Delta t k_N > 1$.
- Si $r = 1$ entonces $l_1 = 0$ sigue siendo el único equilibrio. Ahora la aplicación f no es contractiva, por lo que no podemos usar el teorema 3.1 para estudiar su estabilidad. En este caso, un razonamiento geométrico³ nos permite deducir que l_1 es asintóticamente estable y atractor universal (figura 3.1).
- Si $r > 1$ hay dos puntos fijos en $[0,1]$, $l_1 = 0$ y $l_2 = 1 - \frac{1}{r}$. En este caso, un razonamiento geométrico no va a ser concluyente. Si nos fijamos en la figura 3.1, para $r < 3$ parece ser que l_1 es inestable, mientras que l_2 es asintóticamente estable (pero no es atractor universal: atrae a todos los puntos excepto a 0 y a 1). Sin embargo, a partir de $r = 3$ aparecen comportamientos más complejos. Más adelante, en los ejemplos 3.2 y 3.3, deduciremos de forma precisa la estabilidad de ambos equilibrios.

Llegados a este punto, es interesante estudiar (de forma puramente descriptiva) qué ocurre conforme el valor de r va aumentando. En la figura 3.1 se han representado los comportamientos correspondientes, que se han generado usando el código Python `web_diagram.py`.

- Para $r \approx 2$ las sucesiones son monótonas o, si la semilla está a la izquierda de l_2 , son monótonas a partir del segundo término.
- Para $r \approx 2.5$ aparece convergencia en espiral.
- Para $r \approx 3.2$ parece que los dos equilibrios son inestables (la espiral se va abriendo). Para $x_0 = 0.8$ aparece una órbita de periodo 2 rodeando a l_2 .

³Recuérdense las iteraciones de punto fijo estudiadas en la asignatura *Métodos Numéricos I*.

- Para $r = 4$ el régimen es *caótico*, en el sentido de que, aparentemente, no sigue ningún patrón regular.

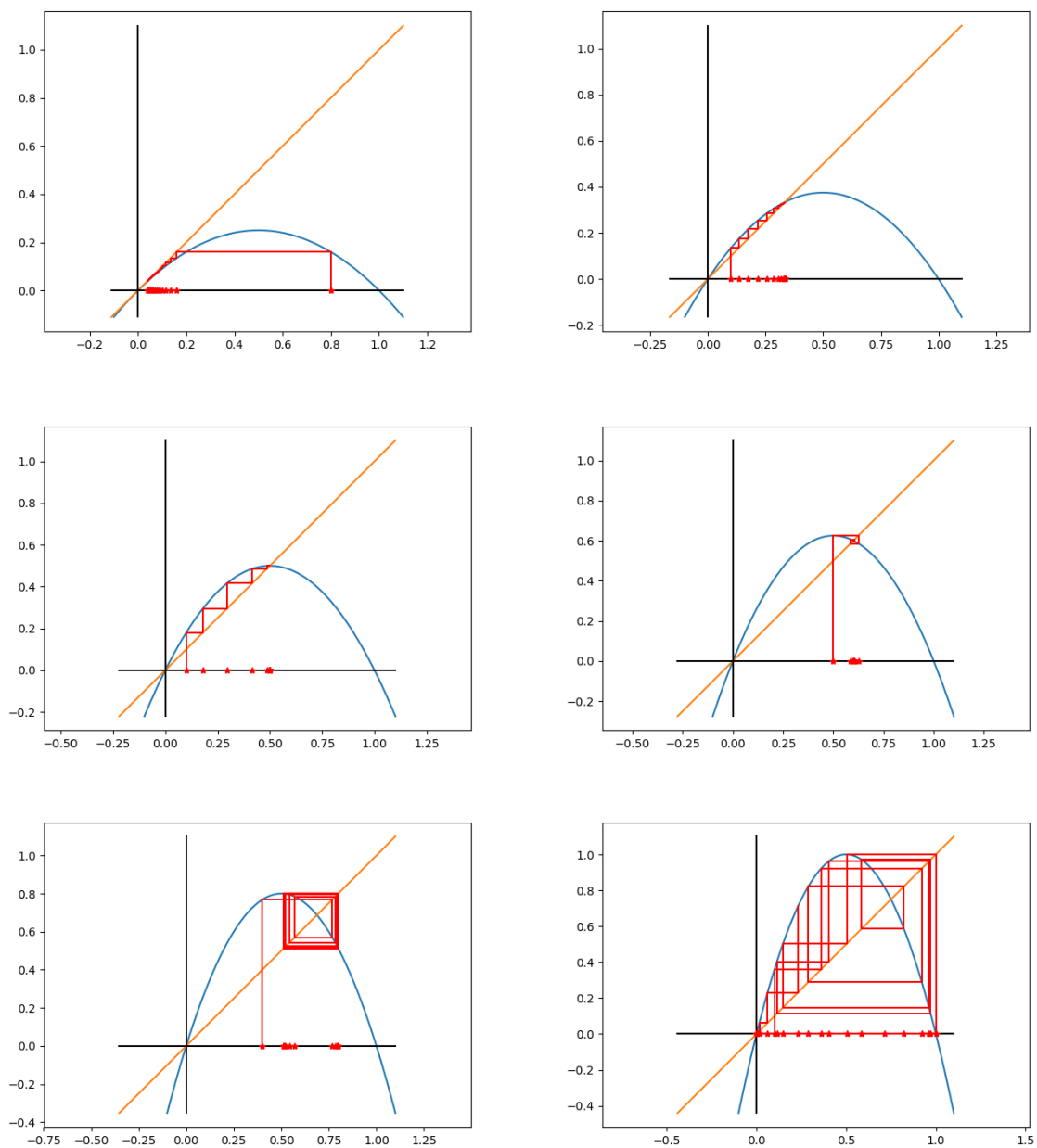


Figura 3.1: Iteraciones del modelo logístico. De arriba abajo y de izquierda a derecha: $r = 1$, $r = 1.5$, $r = 2$, $r = 2.5$, $r = 3.2$ y $r = 4$.

3.3. Algunos resultados sobre estabilidad

En esta sección estudiaremos resultados que nos ayudarán a determinar la estabilidad de un equilibrio cuando la función f es de clase $C^1(I)$.

Teorema 3.2. *Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(I) \subset I$ y $f \in C^1(I)$. Si $l \in I$ es un equilibrio y $|f'(l)| < 1$, entonces l es asintóticamente estable.*

Demostración. La idea consiste en elegir $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que f restringida a $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ esté en las condiciones del teorema del punto fijo. Tomemos $c \in (|f'(l)|, 1)$; al ser $|f'|$ continua y $|f'(l)| < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f'(x)| < c, \quad \forall x \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon].$$

Usando la proposición 3.2, deducimos que $f|_{[l - \varepsilon, l + \varepsilon]}$ es contractiva con constante c .

Veamos ahora que $f([l - \varepsilon, l + \varepsilon]) \subset [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. Para ello, dado $x \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ y teniendo en cuenta que $f(l) = l$, se tiene que

$$|f(x) - l| = |f(x) - f(l)| \leq c|x - l| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon].$$

Podemos entonces aplicar el teorema del punto fijo para afirmar que las sucesiones

$$\begin{cases} x_0 \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon], \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

convergen hacia l .

Para probar que l es asintóticamente estable, hay que demostrar dos cosas:

- l es atractor. Para verlo, basta con tomar $\delta = \varepsilon$ en la definición de atractor.
- l es estable. Dado $\varepsilon' > 0$ arbitrario, tomemos $\delta = \min(\varepsilon, \varepsilon')$; de esta forma, si $|x_0 - l| < \delta$, se tiene que $x_0 \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, por lo que $x_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, $\forall n \geq 0$; por último, se prueba fácilmente por inducción, usando que f es contractiva en $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, que $|x_n - l| < \varepsilon'$.

Concluimos así la demostración del teorema. □

El teorema anterior tiene la siguiente contrapartida:

Teorema 3.3. *Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(I) \subset I$ y $f \in C^1(I)$. Si l es un equilibrio y $|f'(l)| > 1$, entonces l es inestable y repulsor.*

Demostración. Por continuidad, dado $c \in (1, |f'(l)|)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| \geq c$ para cada $x \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. Aplicando el teorema del valor medio, se tiene que

$$|f(y) - f(x)| \geq c|y - x|, \quad \forall x, y \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon].$$

Supongamos que l es estable: en tal caso, existe $\delta > 0$ tal que, si $|x_0 - l| < \delta$, entonces $x_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, $\forall n \geq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq |x_n - l| = |f(x_{n-1}) - f(l)| \geq c|x_{n-1} - l| = c|f(x_{n-2}) - f(l)| \\ &\geq c^2|x_{n-2} - l| \geq \dots \geq c^n|x_0 - l|, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Pero esto no es posible, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n |x_0 - l| = \infty$ si $x_0 \neq l$, por ser $c > 1$. En consecuencia, l es inestable.

Veamos ahora que l es repulsor. La función f es inyectiva en $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ (es consecuencia inmediata de que $|f(y) - f(x)| \geq c|y - x| > 0$, si $x, y \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ con $x \neq y$). Se tiene entonces que f posee inversa $f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$, donde $J = f([l - \varepsilon, l + \varepsilon])$ es un intervalo cerrado y acotado (por ser f continua y ser I cerrado y acotado). Obviamente, $l \in J$ y es punto fijo de f^{-1} ; además,

$$|(f^{-1})'(l)| = \frac{1}{|f'(f^{-1}(l))|} = \frac{1}{|f'(l)|} < 1.$$

Por el teorema anterior, l es atractor para el sistema dinámico asociado a f^{-1} . Esto significa que existe $\delta > 0$ tal que, si $|y_0 - l| < \delta$, la sucesión $y_{n+1} = f^{-1}(y_n)$ converge a l .

Si ahora tomamos $x_0 \in I$ tal que $|x_0 - l| < \delta$, la sucesión $\{x_{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ (que se obtiene iterando con f^{-1} , esto es, $x_{-(n+1)} = f^{-1}(x_{-n})$; o, dicho de otra forma, $y_n = x_{-n}$) converge a l . Esto prueba que l es repulsor. \square

Observación 3.2. Los teoremas 3.2 y 3.3 son asimismo ciertos si f solo es de clase C^1 en un entorno de l . \square

Observación 3.3. Aunque en las demostraciones se ha supuesto implícitamente que $l \in \text{int}(I)$, estas también son válidas si l es un extremo: basta considerar intervalos de la forma $[l - \varepsilon, l]$ o $[l, l + \varepsilon]$, según corresponda. \square

Tenemos la siguiente definición fundamental:

Definición 3.1. Sea l un equilibrio y supongamos que f es de clase C^1 en un entorno de l . Diremos que el equilibrio l es hiperbólico si $|f'(l)| \neq 1$.

Si l es un equilibrio hiperbólico, los resultados anteriores nos dicen que, o bien l es asintóticamente estable (si $|f'(l)| < 1$), o bien l es inestable y repulsor (si $|f'(l)| > 1$).

Ejemplo 3.2. Consideremos la aplicación logística $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = rx(1 - x)$, cuya derivada es $f'(x) = r(1 - 2x)$. Teníamos dos equilibrios, $l_1 = 0$ y $l_2 = 1 - \frac{1}{r}$ (que solo aparecía si $r > 1$). Estudiemos su estabilidad:

- $l_1 = 0$. Tenemos que $|f'(0)| = r$; por lo tanto:

$$\begin{cases} \text{si } r \in [0, 1), l_1 \text{ es asintóticamente estable;} \\ \text{si } r > 1, l_1 \text{ es inestable y repulsor;} \\ \text{si } r = 1, l_1 \text{ no es hiperbólico.} \end{cases}$$

- $l_2 = 1 - \frac{1}{r}$. En este caso, $|f'(1 - \frac{1}{r})| = |2 - r|$; se tiene que $|2 - r| < 1 \Leftrightarrow r \in (1, 3)$. Por tanto:

$$\begin{cases} \text{si } r \in (1, 3), l_2 \text{ es asintóticamente estable;} \\ \text{si } r > 3, l_2 \text{ es inestable y repulsor;} \\ \text{si } r = 3, l_2 = \frac{2}{3} \text{ no es hiperbólico.} \end{cases}$$

Esto concluye el estudio de todos los casos hiperbólicos. □

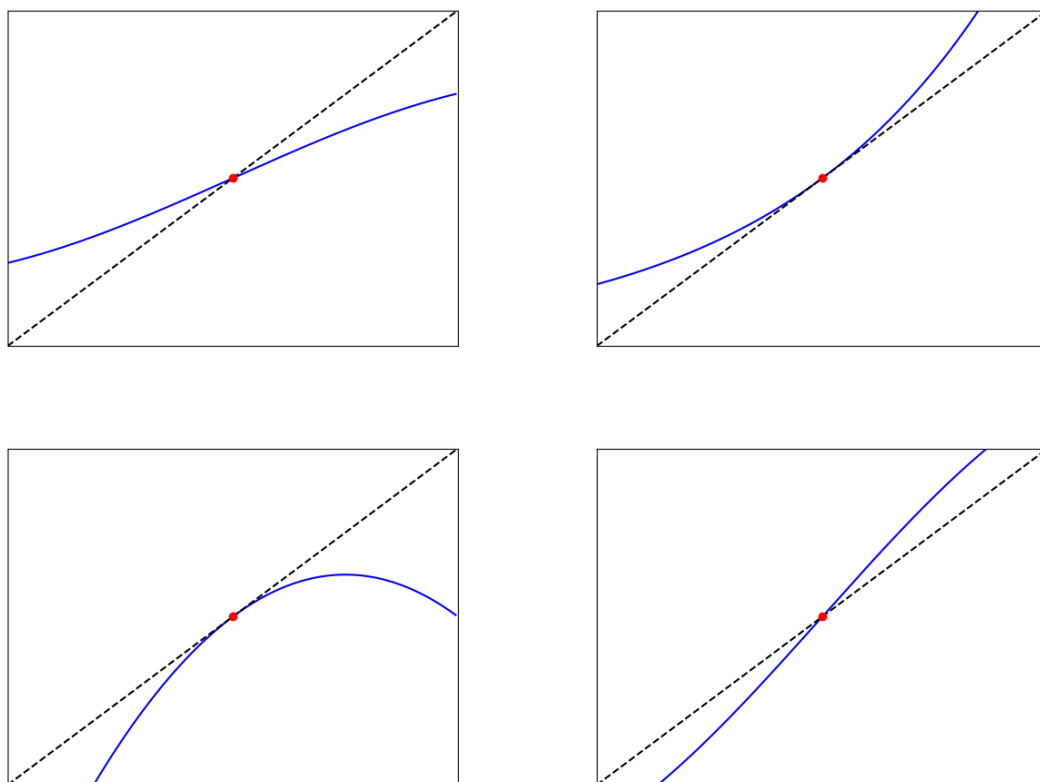


Figura 3.2: Equilibrios no hiperbólicos para f creciente en un entorno del equilibrio. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, el equilibrio es: asintóticamente estable; inestable (semiestable por la izquierda); inestable (semiestable por la derecha); inestable y repulsor. La línea discontinua es la bisectriz $y = x$.

Para analizar los equilibrios no hiperbólicos podemos recurrir a argumentos de tipo geométrico. Sea l un equilibrio no necesariamente hiperbólico. Cuando f es creciente en un entorno de l hay cuatro casos posibles, que se muestran en la figura 3.2 (si f es decreciente, habría que hacer un análisis similar). Por ejemplo, en la primera figura las pendientes cerca del equilibrio están dentro del intervalo $(0, 1)$. De esta forma, si tomamos una semilla a izquierda o derecha del equilibrio, la sucesión de iteraciones va a converger al equilibrio; en consecuencia, este será asintóticamente estable. En la segunda figura, las pendientes a la izquierda del equilibrio están en $(0, 1)$, mientras que a su derecha son mayores que 1. Por tanto, si la semilla está a la izquierda, las iteraciones convergen al equilibrio, mientras que si está a su derecha, divergen: se dice que el equilibrio es semiestable por la izquierda (sería un tipo particular de equilibrio inestable). Los dos casos restantes se estudian de manera análoga.

Vamos a analizar ahora las relaciones existentes entre los siguientes sistemas dinámicos:

$$(SD)_1 \quad \begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0; \end{cases} \quad (SD)_2 \quad \begin{cases} y_0 \in I, \\ y_{n+1} = f^2(y_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Es obvio que si $x_0 = y_0$, entonces

$$y_1 = f^2(y_0) = f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(x_1) = x_2.$$

En general, puede probarse por inducción que $y_n = x_{2n}$, para cada $n \geq 0$. Asimismo, es obvio que si l es un punto fijo de f entonces también lo es de f^2 , pero no necesariamente a la inversa. La pregunta ahora es: si l es asintóticamente estable para $(SD)_1$, ¿lo será también para $(SD)_2$? ¿Y al revés? Veamos:

- Si l es atractor para $(SD)_1$, existe $\delta > 0$ tal que, si $|x_0 - l| < \delta$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Por tanto, si $|y_0 - l| < \delta$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = l.$$

En consecuencia, l es atractor para $(SD)_2$.

- Recíprocamente: si l es atractor para $(SD)_2$, existe $\delta > 0$ tal que, si $|y_0 - l| < \delta$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$. Por tanto, si $|x_0 - l| < \delta$, deducimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = l$. Por otra parte, como $x_{2n+1} = f(x_{2n})$ y f es continua, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}) = f(l) = l.$$

En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Vemos así que l es atractor para $(SD)_1$.

Se tiene por tanto que l es atractor para $(SD)_1$ si y solo si lo es para $(SD)_2$. De forma análoga, se obtiene la misma conclusión para la estabilidad. Por tanto, l es asintóticamente estable para $(SD)_1$ si y solo si lo es para $(SD)_2$.

Es trivial comprobar que si f es decreciente, entonces f^2 es creciente. Por tanto, para estudiar la estabilidad de un equilibrio l cuando f es decreciente en un entorno de l , bastaría con estudiar la estabilidad de f^2 .

Por último, las siguientes proposiciones son una alternativa para estudiar la estabilidad de un equilibrio, sea o no hiperbólico.

Proposición 3.3. Sean $f: I \rightarrow I$ continua y l un punto fijo perteneciente al interior de I .

1. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que f es estrictamente creciente en $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, y es tal que

$$\begin{cases} f(x) > x & \text{si } x \in (l - \varepsilon, l), \\ y \\ f(x) < x & \text{si } x \in (l, l + \varepsilon), \end{cases}$$

entonces l es un equilibrio asintóticamente estable.

2. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que f es estrictamente decreciente en $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, y es tal que

$$\begin{cases} f(x) < 2l - x & \text{si } x \in (l - \varepsilon, l), \\ y \\ f(x) > 2l - x & \text{si } x \in (l, l + \varepsilon), \end{cases}$$

entonces l es un equilibrio asintóticamente estable.

Proposición 3.4. Sean $f: I \rightarrow I$ continua y l un punto fijo perteneciente al interior de I .

1. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que f es estrictamente creciente en $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, y es tal que

$$\begin{cases} f(x) < x & \text{si } x \in (l - \varepsilon, l), \\ \text{o bien} \\ f(x) > x & \text{si } x \in (l, l + \varepsilon), \end{cases}$$

entonces l es un equilibrio inestable.

2. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que f es estrictamente decreciente en $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, y es tal que

$$\begin{cases} f(x) > 2l - x & \text{si } x \in (l - \varepsilon, l), \\ y \\ f(x) < 2l - x & \text{si } x \in (l, l + \varepsilon), \end{cases}$$

entonces l es un equilibrio inestable.

Observación 3.4. Las demostraciones de las proposiciones 3.3 y 3.4 son elementales. Por ejemplo, supongamos que estamos en el caso 1 de la proposición 3.3. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que en el intervalo $[l, l + \varepsilon]$ no hay ningún punto fijo más de f (si lo hubiese, bastaría con tomar ε más pequeño). Si tomamos $x_0 \in (l, l + \varepsilon)$, usando que en el intervalo $(l, l + \varepsilon)$ f es estrictamente creciente y $f(x) < x$, tenemos que

$$l < x_0 < l + \varepsilon \Rightarrow l = f(l) < f(x_0) = x_1 < f(l + \varepsilon) < l + \varepsilon \Rightarrow x_1 \in (l, l + \varepsilon).$$

Por inducción, deducimos que $x_n \in (l, l + \varepsilon)$, $n \geq 0$; en particular, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente por l . Como $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$, se tiene además que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente. Por tanto, existe $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [l, l + \varepsilon]$. Al ser f continua,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(L).$$

Por unicidad del punto fijo, deducimos que $L = l$. Si tomamos $x_0 \in (l - \varepsilon, l)$, razonaríamos de forma análoga. Esto prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ para $x_0 \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, lo que implica que l es asintóticamente estable. \square

Observación 3.5. Cuando f es estrictamente decreciente en un entorno de l , en los casos no contemplados en las proposiciones 3.3 y 3.4 no podemos concluir nada. \square

Observación 3.6. Si l es un punto fijo que está en un extremo del intervalo, el caso 1 de las dos proposiciones anteriores sigue siendo cierto si se restringen las hipótesis al intervalo en el que tienen sentido, esto es, $(l - \varepsilon, l)$ o $(l, l + \varepsilon)$. \square

Ejemplo 3.3. Vamos a estudiar la estabilidad de los equilibrios no hiperbólicos para el sistema logístico determinado por $f(x) = rx(1 - x)$ (véase el ejemplo 3.2).

En primer lugar, el equilibrio $l_1 = 0$ no es hiperbólico si $r = 1$. En este caso, la recta $y = x$ permanece por encima de la gráfica de $y = x(1 - x)$, que es estrictamente creciente en un entorno de 0 de la forma $(0, \varepsilon)$ (figura 3.3, izquierda). En virtud del punto 1 de la proposición 3.3, deducimos que $l_1 = 0$ es asintóticamente estable.

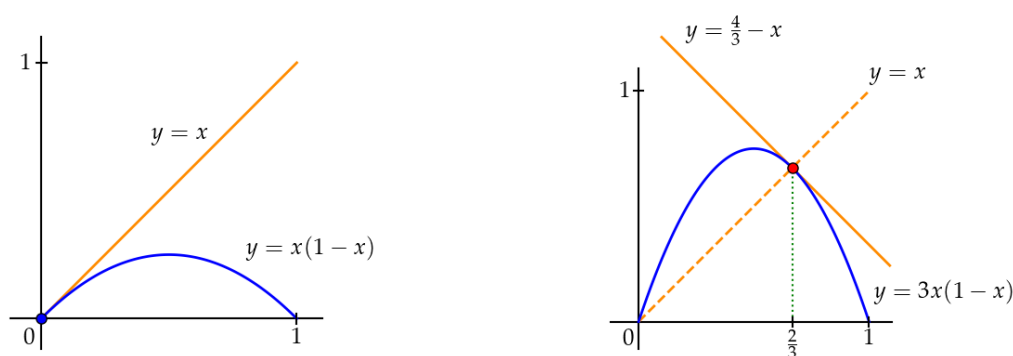


Figura 3.3: Equilibrios no hiperbólicos para el sistema logístico. Izquierda: $l_1 = 0$ para $r = 1$. Derecha: $l_2 = \frac{2}{3}$ para $r = 3$.

Por otra parte, para $r = 3$ el equilibrio $l_2 = \frac{2}{3}$ no es hiperbólico. En este caso (figura 3.3, derecha), en un entorno de la forma $(l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ se verifica que la gráfica de $y = 3x(1 - x)$, que es estrictamente decreciente, permanece por debajo de la recta $y = 2l_2 - x = \frac{4}{3} - x$. Por tanto, no podemos aplicar ninguna de las proposiciones para determinar la estabilidad de l_2 . Sin embargo, puede demostrarse que l_2 es asintóticamente estable. \square

3.4. Órbitas periódicas

Después de los equilibrios, el tipo de órbitas más importante en un sistema dinámico son las *órbitas periódicas*. Dado un sistema dinámico

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

diremos que la órbita de x_0 es p -periódica si $x_{n+p} = x_n, \forall n \geq 0$, para un cierto $p \geq 0$; llamaremos *periodo* al menor p con esta propiedad. De esta forma,

$$\gamma_{x_0} = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, \dots\}.$$

El estudio de las órbitas periódicas de un sistema dinámico es un tema mucho más complejo que el estudio de sus equilibrios. De hecho, hay resultados tan sorprendentes como el siguiente.

Teorema (de Li-Yorke). *Si existe una órbita 3-periódica, entonces hay al menos una órbita de cualquier periodo $p \in \mathbb{N}$.*

El siguiente resultado es más general:

Teorema (de Sarkovski). *Si hay una órbita p -periódica, entonces existe al menos una órbita n -periódica para cada $n \triangleleft p$.*

Observación 3.7. En el teorema de Sarkovski, el símbolo \triangleleft representa la siguiente ordenación⁴ de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} & 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2n+1 \triangleright \dots \triangleright \\ & \triangleright 3 \cdot 2 \triangleright 5 \cdot 2 \triangleright 7 \cdot 2 \triangleright \dots \triangleright (2n+1) \cdot 2 \triangleright \dots \triangleright \\ & \triangleright 3 \cdot 2^2 \triangleright 5 \cdot 2^2 \triangleright 7 \cdot 2^2 \triangleright \dots \triangleright (2n+1) \cdot 2^2 \triangleright \dots \triangleright \\ & \dots \\ & \triangleright 3 \cdot 2^k \triangleright 5 \cdot 2^k \triangleright 7 \cdot 2^k \triangleright \dots \triangleright (2n+1) \cdot 2^k \triangleright \dots \triangleright \\ & \dots \\ & \triangleright \dots \triangleright 2^{n+1} \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2 \triangleright 1. \end{aligned}$$

Es claro entonces que el teorema de Li-Yorke puede verse como un corolario del teorema de Sarkovski, ya que 3 es el mayor elemento en el orden \triangleleft . \square

Comencemos nuestro estudio de las órbitas periódicas con el caso más simple: las *órbitas 2-periódicas*. Sea l un punto fijo de f^2 , es decir, $f(f(l)) = l$; pueden suceder entonces dos cosas:

- Que l sea punto fijo de f : en tal caso, l sería un equilibrio.
- Que $f(l) = \tilde{l} \neq l$. Se tiene que $f(\tilde{l}) = f(f(l)) = l$, por lo que la órbita de l es 2-periódica: $\gamma_l = \{l, \tilde{l}, l, \tilde{l}, l, \tilde{l}, \dots\}$. Nótese que \tilde{l} también es un punto fijo de f^2 : $f^2(\tilde{l}) = f(f(\tilde{l})) = f(l) = \tilde{l}$.

Estas consideraciones nos permiten establecer la siguiente igualdad:

$$\text{n.º de órbitas 2-periódicas} = \frac{\text{n.º de puntos fijos de } f^2 - \text{n.º de puntos fijos de } f}{2}.$$

⁴La relación \triangleleft es un *orden total*: para cualesquiera $p, q, r \in \mathbb{N}$,

- $p \triangleleft p$ (reflexividad).
- $p \triangleleft q$ y $q \triangleleft p \Rightarrow p = q$ (antisimetría).
- $p \triangleleft q$ y $q \triangleleft r \Rightarrow p \triangleleft r$ (transitividad).
- $p \triangleleft q$ o bien $q \triangleleft p$ (completitud).

Sin embargo, no es un *buen orden*: por ejemplo, el conjunto $S = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ no tiene un mínimo.

Ejemplo 3.4. Dado el sistema logístico, donde $f(x) = rx(1-x)$, $x \in [0, 1]$, ¿para qué valores de r existen órbitas 2-periódicas? Para responder a esta pregunta, calculemos primero f^2 :

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = rf(x)(1-f(x)) = r^2x(1-x)(1-rx(1-x)) \\ &= r^2x(1-(1+r)x+2rx^2-rx^3). \end{aligned}$$

Tenemos que estudiar la ecuación $f^2(x) = x$, esto es,

$$r^2x(1-(1+r)x+2rx^2-rx^3) = x.$$

Sabemos que la solución $l_1 = 0$ es un equilibrio, por lo que la descartamos. La ecuación resultante puede escribirse entonces como

$$rx^3 - 2rx^2 + (1+r)x - 1 + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Sabíamos que $l_2 = 1 - \frac{1}{r}$ era punto fijo de f , por lo que también lo será de f^2 ; podemos entonces dividir la ecuación anterior por $x - (1 - \frac{1}{r})$ (por ejemplo, usando la regla de Ruffini), para obtener

$$rx^2 - (r+1)x + 1 + \frac{1}{r} = 0,$$

cuyas soluciones son

$$x = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Deducimos entonces que, cuando $r > 3$, existe una única órbita 2-periódica, que consta de los puntos

$$p_1 = \frac{r+1 - \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}, \quad p_2 = \frac{r+1 + \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Es trivial comprobar que $p_1, p_2 \in [0, 1]$ si $r \in (3, 4]$. En el caso $r = 3$, se tiene que $p_1 = p_2 = l_2 = \frac{2}{3}$, que es un equilibrio. Si $r \in (0, 3]$, no hay órbitas 2-periódicas. \square

3.4.1. Órbitas periódicas estables y atractoras

¿Qué significa que una órbita 2-periódica sea atractora? Por definición, si γ es una órbita 2-periódica formada por los puntos $\{p_1, p_2\}$, será atractora si y solo si existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x_0 \in I$ y $x \in \gamma$ con $|x - x_0| < \delta$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(x_0)| = 0.$$

Pero $x \in \gamma$ solo puede tomar dos valores:

- $x = p_1$. En este caso, la definición nos dice que si $x_0 \in I$ con $|x_0 - p_1| < \delta$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_1) - x_n| = 0.$$

Pero $f^n(p_1) = p_2$ si n es impar, y $f^n(p_1) = p_1$ si n es par. Por tanto, el límite anterior equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = p_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = p_2.$$

- $x = p_2$. Razonando como en el punto anterior, deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = p_2 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = p_1.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.5. *Sea γ una órbita 2-periódica formada por los puntos $\{p_1, p_2\}$. Entonces γ es atractora si y solo si el punto p_1 es atractor para f^2 .*

Demostración. Supongamos que el punto p_1 es atractor para f^2 , esto es, existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $|x_0 - p_1| < \delta_1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p_1$, donde $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión definida por

$$\begin{cases} y_0 = x_0, \\ y_{n+1} = f^2(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Vimos en la sección 3.3 que $y_n = x_{2n}$. Por tanto, si $|x_0 - p_1| < \delta_1$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = p_1.$$

Usando que f es continua, se tiene además que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{2n}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}) = f(p_1) = p_2.$$

Por otro lado, por continuidad existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $|x_0 - p_2| < \delta_2$, entonces $|f(x_0) - f(p_2)| < \delta_1$ o, lo que es lo mismo, $|x_1 - p_1| < \delta_1$. Aplicando el caso anterior, deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = p_2 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = p_1.$$

Finalmente, tomando $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ concluimos que la órbita γ es atractora.

La implicación recíproca es trivial. □

Se verifican resultados análogos en relación a la estabilidad, estabilidad asintótica, inestabilidad, repulsión, etc. Por ejemplo, si la órbita γ es estable, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in \gamma$ y $x_0 \in I$ con $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f^n(x) - f^n(x_0)| < \varepsilon$, $\forall n \geq 0$. Hay de nuevo dos posibilidades para x :

- $x = p_1$. Si $|x_0 - p_1| < \delta$, entonces $|f^n(p_1) - x_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq 0$. Por tanto, $|p_1 - x_{2n}| < \varepsilon$ y $|p_2 - x_{2n+1}| < \varepsilon$, para cada $n \geq 0$.
- $x = p_2$. Si $|x_0 - p_2| < \delta$, entonces $|p_1 - x_{2n+1}| < \varepsilon$ y $|p_2 - x_{2n}| < \varepsilon$, para cada $n \geq 0$.

Aplicando esta caracterización, puede demostrarse el siguiente resultado:

Proposición 3.6. *Sea γ una órbita 2-periódica formada por los puntos $\{p_1, p_2\}$. Entonces γ es estable si y solo si p_1 es estable para f^2 .*

Observación 3.8. Es obvio que las proposiciones 3.5 y 3.6 son asimismo ciertas si en lugar del punto p_1 se considera el punto p_2 . De esta forma, las propiedades de estabilidad y atracción para p_1 y p_2 son las mismas. Por ejemplo, p_1 es asintóticamente estable para f^2 si y solo si lo es p_2 , lo que a su vez es equivalente a que la órbita γ sea asintóticamente estable. □

Vamos a ver ahora un criterio para determinar la estabilidad de una órbita periódica cuando f es de clase C^1 . Sea $\gamma = \{p_1, p_2\}$ una órbita 2-periódica y supongamos que f es de clase C^1 en sendos entornos de p_1 y p_2 . Usando los resultados anteriores, la órbita γ será asintóticamente estable si y solo si p_1 es asintóticamente estable para f^2 . Esto se verificará, en particular, si $|(f^2)'(p_1)| < 1$, en virtud del teorema 3.2. Notemos que

$$(f^2)'(p_1) = (f \circ f)'(p_1) = f'(f(p_1))f'(p_1) = f'(p_1)f'(p_2).$$

y análogamente, $(f^2)'(p_2) = f'(p_1)f'(p_2)$. En consecuencia:

- Si $|f'(p_1)f'(p_2)| < 1$ entonces p_1 (y también p_2) es asintóticamente estable para f^2 y, por tanto, γ es asintóticamente estable para f .
- Si $|f'(p_1)f'(p_2)| > 1$ entonces p_1 (y también p_2) es inestable para f^2 y, por tanto, γ es inestable para f .

Definición 3.2. Una órbita 2-periódica $\gamma = \{p_1, p_2\}$ es hiperbólica si f es de clase C^1 en un entorno de cada uno de los puntos p_1 y p_2 , y se verifica $|f'(p_1)f'(p_2)| \neq 1$.

El criterio anterior nos permite determinar fácilmente la estabilidad de una órbita hiperbólica. Cuando la órbita no es hiperbólica, hay que recurrir a criterios geométricos similares a los que utilizamos para analizar los equilibrios no hiperbólicos.

3.4.2. Órbitas p -periódicas

El estudio realizado en las secciones anteriores para órbitas 2-periódicas puede extenderse directamente al caso de órbitas p -periódicas, para $p \geq 2$. En particular, para determinar las órbitas p -periódicas de un sistema hemos de estudiar la ecuación

$$f^p(x) = x.$$

Si γ es una órbita p -periódica formada por los puntos $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$, diremos que γ es hiperbólica si f es de clase C^1 en un entorno de cada uno de los puntos de γ , y se verifica

$$|f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1})| \neq 1.$$

En este caso, si $|f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1})| < 1$ entonces γ es asintóticamente estable, y si $|f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1})| > 1$ entonces γ es inestable.

¿Cuántas órbitas p -periódicas pueden aparecer? No es difícil establecer que el número de órbitas p -periódicas viene dado por

$$\frac{1}{p} \left(\text{n.º de puntos fijos de } f^p - \sum_{\substack{j \text{ divisor de } p \\ j \neq p}} j \times \text{n.º de órbitas } j\text{-periódicas} \right),$$

donde las órbitas 1-periódicas son los equilibrios.

Ejemplo 3.5. Consideremos el sistema logístico $f(x) = rx(1-x)$, $x \in [0, 1]$. Para el valor $r = 2.9$, hemos representado en la figura 3.4 (izquierda) las gráficas de f y f^2 . Vemos que f tiene dos puntos de corte con la bisectriz, que son los puntos fijos de f . Por otro lado, f^2 tiene los mismos dos puntos de corte con la bisectriz, es decir, los puntos fijos de f^2 coinciden con los de f . En consecuencia, no existen órbitas 2-periódicas. El equilibrio 0 es inestable ($|f'(0)| = r = 2.9 > 1$), mientras que el segundo equilibrio $1 - \frac{1}{r} \approx 0.6552$ es asintóticamente estable ($|f'(1 - \frac{1}{r})| = |2 - r| = 0.9 < 1$).

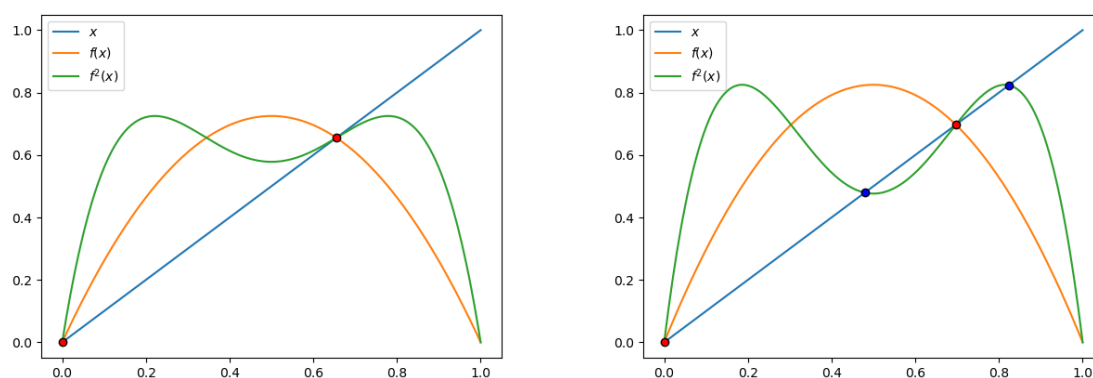


Figura 3.4: Sistema logístico. Izquierda: $r = 2.9$. Derecha: $r = 3.3$. Se han representado en rojo los equilibrios y en azul los puntos que forman la órbita 2-periódica.

Tomemos ahora el valor $r = 3.3$. Las gráficas de f y f^2 se han representado en la figura 3.4 (derecha). Como puede verse, f sigue teniendo dos puntos fijos, mientras que f^2 ahora tiene cuatro: dos de ellos son los puntos fijos de f , y los dos restantes (llamémosles p_1 y p_2) dan lugar a una órbita 2-periódica. Esta órbita es asintóticamente estable, ya que las pendientes de la gráfica de f^2 en p_1 y p_2 son menores que 1 en valor absoluto. De hecho, podemos aproximar numéricamente dichos valores: $p_1 \approx 0.4794$ y $p_2 \approx 0.8236$, de donde $|f'(p_1)f'(p_2)| \approx 0.29 < 1$. Notemos que el equilibrio 0 sigue siendo inestable ($|f'(0)| = 3.3 > 1$), mientras que el segundo equilibrio pasa a ser inestable ($|f'(1 - \frac{1}{r})| = 1.3 > 1$).

Esta situación se mantiene hasta que, a partir del valor $r \approx 3.44949$, aparece una órbita 4-periódica para f . En la figura 3.5 se han representado las gráficas de f , f^2 y f^4 para $r = 3.5$, así como los puntos de corte con la bisectriz $y = x$. Los puntos que conforman la órbita 4-periódica son $q_1 \approx 0.3828$, $q_2 \approx 0.5009$, $q_3 \approx 0.8269$ y $q_4 \approx 0.8750$. Como $|f'(q_1)f'(q_2)f'(q_3)f'(q_4)| \approx 0.03 < 1$, la órbita 4-periódica es asintóticamente estable. Es inmediato comprobar que tanto los equilibrios como la órbita 2-periódica son inestables.

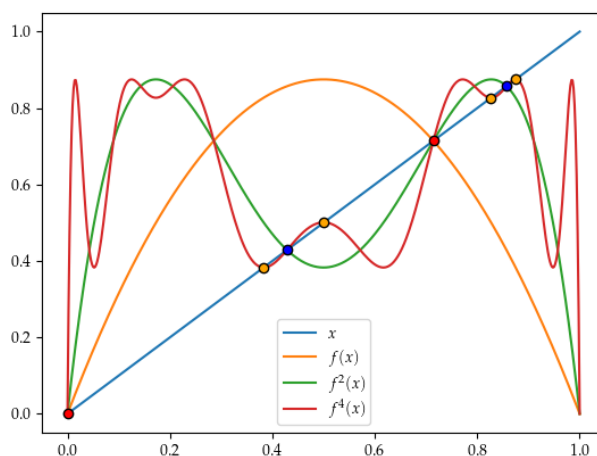


Figura 3.5: Sistema logístico. Gráficas de f , f^2 y f^4 para $r = 3.5$. Se han representado en rojo los equilibrios, en azul los puntos que forman la órbita 2-periódica, y en naranja los puntos que conforman la órbita 4-periódica.

Las gráficas de las figuras 3.4 y 3.5 se han generado con el código `logistico_per.py`. \square

En el ejemplo anterior, el valor $r \approx 3.44949$ es un ejemplo de *punto de bifurcación*, entendiéndose como tal un valor del parámetro a partir del cual la estructura cualitativa del sistema cambia de alguna forma (cambio en la estabilidad, aparición de nuevas órbitas periódicas, etc.). De hecho, en el sistema logístico podemos identificar las siguientes bifurcaciones:

- $r_0 = 1$. A partir de este valor, el equilibrio 0 pasa de ser estable a inestable. Además, aparece el nuevo equilibrio $1 - \frac{1}{r}$, que es asintóticamente estable.
- $r_1 = 3$. El equilibrio $1 - \frac{1}{r}$ se vuelve inestable y aparece una órbita 2-periódica asintóticamente estable.
- $r_2 \approx 3.44949$. La órbita 2-periódica se vuelve inestable y aparece una órbita 4-periódica asintóticamente estable.
- $r_3 \approx 3.54409$. La órbita 4-periódica se vuelve inestable y aparece una órbita 8-periódica asintóticamente estable.
- Este proceso continúa conforme r aumenta. A partir del valor $r \approx 3.569945$ el sistema entra en un régimen caótico⁵.

⁵Existen en la literatura distintas definiciones de sistema caótico. Una de ellas es la siguiente: el sistema dinámico definido por $f: I \rightarrow I$ es *caótico* si se verifican las siguientes propiedades:

- Sensibilidad extrema a las condiciones iniciales: partiendo de condiciones iniciales muy cercanas, conforme iteramos las órbitas tienden a seguir comportamientos muy diferentes.
- Ergodicidad (o transitividad topológica): Dados abiertos $U, V \subset I$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto

El proceso descrito anteriormente se denomina *transición al caos por duplicación del periodo*. Un hecho curioso es que, si denotamos por $d_k = r_{k+1} - r_k$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = \delta \equiv 4.669202\dots,$$

valor que se conoce como *constante de Feigenbaum*, y que aparece recurrentemente en el estudio de los sistemas dinámicos discretos.

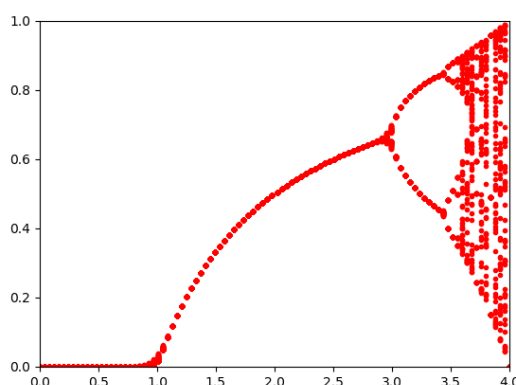


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación para el sistema logístico.

En la figura 3.6 se ha dibujado el *diagrama de bifurcación* correspondiente al sistema logístico, con la ayuda del programa Python `orbit_diagram.py`. En el eje de abscisas se representan los valores del parámetro $r \in [0, 4]$; los puntos rojos indican, o bien equilibrios estables, o bien valores de órbitas periódicas estables. Los puntos de bifurcación descritos anteriormente corresponden a los puntos de la gráfica donde aparecen ramificaciones.

Si interpretamos el sistema logístico como un modelo de poblaciones, podemos obtener las siguientes conclusiones:

- Si $0 < r \leq 1$, la población siempre tendería a la extinción (ya que $l_1 = 0$ es el único equilibrio, y es asintóticamente estable). Sin embargo, recordemos que en el modelo de poblaciones se verificaba $r > 1$, por lo que este caso no habría que contemplarlo.
- Si $1 < r \leq 3$, salvo algunos casos especiales ($x_0 = 0$ y $x_0 = 1$), la especie tiende a equilibrarse en el valor $l_2 = 1 - \frac{1}{r}$.
- Si $3 < r \leq r_2$, la especie tiende a seguir un patrón 2-periódico.
- A partir de aquí, conforme mayor sea el valor de r , más impredecible será la evolución de la población.

corresponde a la idea de que todas las órbitas están, de alguna manera, «mezcladas».

- Los puntos cuyas órbitas son periódicas son densos en I .

Terminamos esta sección mostrando con un ejemplo cómo analizar las órbitas periódicas mediante los programas `orbit_diagram.py` y `web_diagram.py`. Lo primero es generar la gráfica de la figura 3.6 con `orbit_diagram.py`, para lo cual se han usado los siguientes valores para la función logística: parámetro mínimo = 0, parámetro máximo = 4, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 1$, número de parámetros = 100 y semilla = 0.5. Elegimos ahora el valor de r que queremos estudiar, por ejemplo, $r = 3.55$; en la figura 3.7 (izquierda) se ha representado el diagrama de bifurcación junto con el valor elegido del parámetro. A continuación ejecutamos `web_diagram.py` con la función logística, parámetro $r = 3.55$ y semilla = 0.5: el resultado se muestra en la figura 3.7 (derecha). Las ocho líneas verticales que aparecen corresponden a los puntos de la órbita 8-periódica estable. Los puntos que la forman se representan asimismo sobre el eje de abscisas (los dos que están más a la derecha están muy cerca uno de otro, por lo que habría que ampliar la figura para poder distinguirlos).

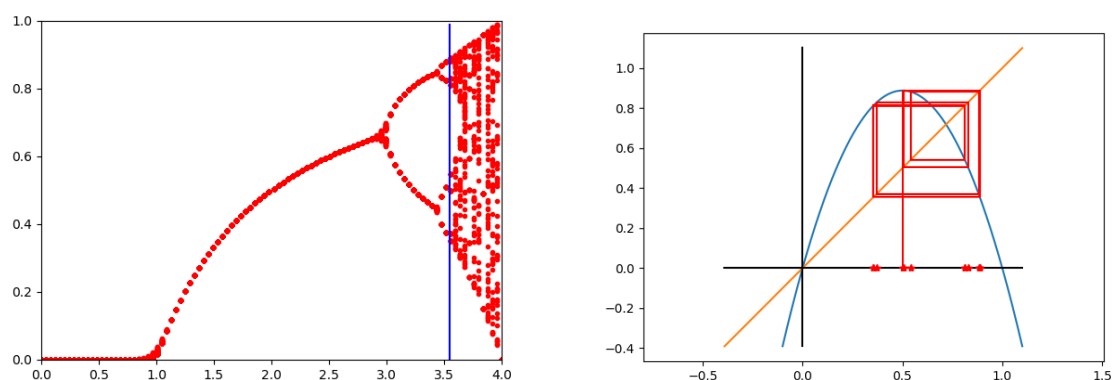


Figura 3.7: Órbita 8-periódica estable para $r = 3.55$.

3.5. Algunas consideraciones finales

El objetivo de esta sección es mostrar algunas situaciones más complejas que pueden aparecer en el estudio de los sistemas dinámicos discretos. Por ese motivo, adoptaremos un punto de vista divulgativo, sin entrar en demasiadas formalidades.

En primer lugar, nos planteamos estudiar el modelo logístico para valores del parámetro $r > 4$. Recordemos que, en tal caso, la aplicación logística no define un sistema dinámico, tal y como vimos en la sección 3.2.2: la condición $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ solo se verificaba si $r \in [0, 4]$. Para soslayar este problema, lo que hacemos es considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} rx(1-x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

(nótese que f no es derivable en $x = 1$), que da lugar al sistema dinámico

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \infty), \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si tomamos $r > 4$, existirán puntos que abandonen el intervalo $[0, 1]$ después de una única iteración. El conjunto de tales puntos es un intervalo abierto centrado en $1/2$, que denotaremos por A_0 . Definamos $A_1 = \{x \in [0, 1]: f(x) \in A_0\}$, es decir, A_1 está formado por los puntos que abandonan $[0, 1]$ al cabo de dos iteraciones; en este caso, A_1 es la unión de dos intervalos abiertos: $A_1 = I_0 \cup I_1$. De forma inductiva, definimos $A_n = \{x \in [0, 1]: f^n(x) \in A_0\}$; es decir, A_n está formado por los puntos que abandonan $[0, 1]$ en la iteración $n + 1$, pero no antes. Por último, consideremos el conjunto

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

que está formado por aquellos puntos $x \in [0, 1]$ tales que $f^n(x) \notin [0, 1]$ para cada $n \geq 0$.

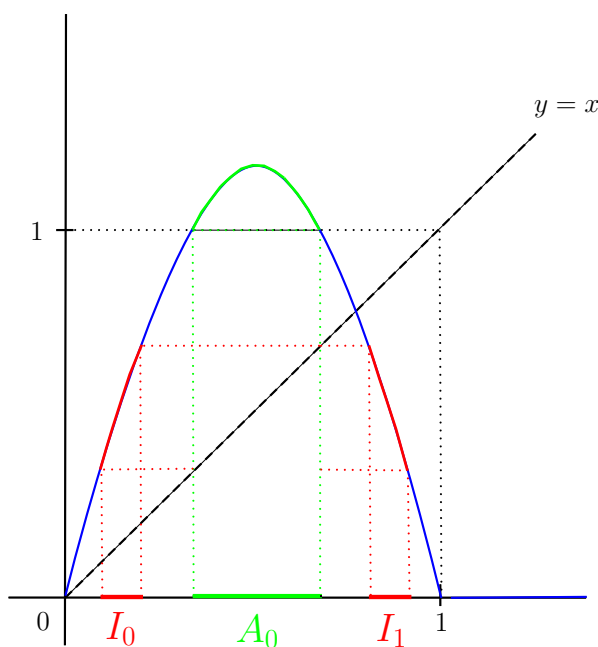


Figura 3.8: Gráfica de $f(x)$ para $r > 4$.

Puede probarse que C es un conjunto de tipo Cantor; algunas de sus propiedades son las siguientes:

- C es infinito no numerable, tiene medida nula, es cerrado y su complementario es denso.
- C es invariante por f , esto es, $f(C) \subset C$.
- En C hay órbitas de todos los periodos.

El conjunto C es un ejemplo de *repulsor extraño*, que se define como un conjunto invariante de dimensión no entera.

¿Qué se entiende como dimensión de un conjunto? Existen diferentes definiciones: topológica, de Hausdorff, de Minkowski, etc. Aquí nos centraremos en el concepto de *dimensión*

fractal, aplicado al caso de un conjunto autosimilar. Diremos que $A \subset \mathbb{R}^d$ es *autosimilar* si puede escribirse como

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i,$$

donde la unión es disjunta y cada A_i puede transformarse en A mediante una homotecia⁶ de razón r y un movimiento espacial de rotación o traslación.

Ejemplo 3.6. Consideremos el intervalo $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y dividámoslo en N intervalos A_i de igual longitud. Notemos que cada intervalo A_i puede transformarse en A mediante una homotecia de razón $r = n$, siendo $n = N$. Se verifica trivialmente que

$$N = r^1.$$

Sea ahora $A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Si dividimos cada lado de A en n partes iguales, se obtienen $N = n^2$ cuadrados de lado $1/n$. Al aplicar una homotecia de razón $r = n$ a cada uno de estos cuadrados, recuperamos el cuadrado original A . En este caso, se verifica que

$$N = r^2.$$

Por último, si dividimos cada lado del cubo $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ en n partes iguales, obtenemos que A es la unión de $N = n^3$ cubos, cada uno de los cuales da lugar a A al aplicarle una homotecia de razón $r = n$. En este caso,

$$N = r^3.$$

Véase la figura 3.9.

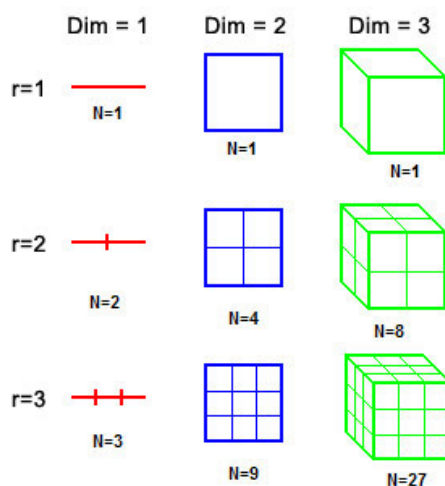


Figura 3.9: Otra interpretación del concepto de dimensión.

⁶Recordemos que una *homotecia* de razón r y centro C se define como la aplicación

$$X \mapsto rX + (1 - r)C.$$

Consideremos ahora un hipercubo $A = [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$. Si dividimos cada uno de sus lados en n partes iguales, el número de cubos en que se particiona A es igual a $N = n^d$. Cada uno de estos cubos puede transformarse en A mediante una homotecia de razón $r = n$. Se verifica pues la siguiente relación:

$$N = r^d.$$

De esta forma, se verifica que

$$d = \frac{\log(N)}{\log(r)},$$

lo que nos permite expresar la dimensión euclídea de A en términos de r y N . □

La idea planteada en el ejemplo anterior podría aplicarse a un objeto autosimilar arbitrario. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.3. Dado un conjunto autosimilar $A = \cup_{i=1}^N A_i$, definimos su dimensión fractal como

$$d = \frac{\log(N)}{\log(r)},$$

donde r es la razón de la homotecia que permite transformar A_i en A .

Ejemplo 3.7.

1. *El conjunto de Cantor.* Recordemos que el conjunto de Cantor clásico se obtiene mediante un proceso iterativo: partiendo del intervalo $[0, 1]$, lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos el intervalo central; este proceso se aplica a cada uno de los intervalos restantes indefinidamente. En este caso, el número de trozos sería $N = 2$ (nos quedamos con dos trozos de los tres en que se divide cada intervalo), mientras que la razón sería $r = 3$ (cada intervalo tiene un tercio de la longitud del intervalo original). Por tanto, la dimensión fractal del conjunto de Cantor es

$$d = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.63.$$

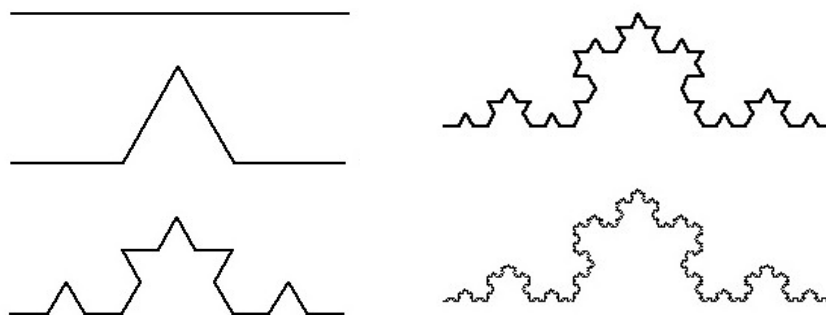


Figura 3.10: Primeras iteraciones de la curva de Koch.

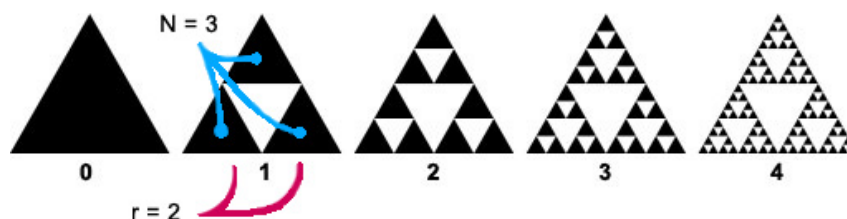


Figura 3.11: Construcción del triángulo de Sierpinski.

2. *La curva de Koch.* Para construir la curva de Koch partimos de un segmento de longitud uno, lo dividimos en tres partes iguales y reemplazamos la parte central por dos segmentos de longitud $1/3$. En la segunda iteración aplicamos el proceso anterior a cada uno de los cuatro segmentos, y así sucesivamente. Haciendo el paso al límite se obtiene la curva de Koch, que tiene la particularidad de ser una curva continua en todo punto y derivable en ninguno. En la figura 3.10 se han representado las primeras iteraciones. Fijémonos ahora en la primera iteración: se tienen $N = 4$ trozos cuya longitud es un tercio del original, lo que indica que $r = 3$. Por tanto, la dimensión fractal de la curva de Koch es

$$d = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26.$$

Intuitivamente, esto nos dice que la dimensión de la curva de Koch es algo mayor que la dimensión euclídea de una curva (uno).

3. *El triángulo de Sierpinski.* En este caso partimos de un triángulo equilátero, que dividimos en cuatro triángulos congruentes y eliminamos el triángulo central. Repitiendo este proceso obtenemos el triángulo de Sierpinski. Este proceso se detalla en la figura 3.11. Se tiene que $N = 3$ y $r = 2$, por lo que la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski es

$$d = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.58.$$

Es decir, la dimensión del triángulo de Sierpinski es menor que dos, que sería la dimensión euclídea del triángulo original.

4. En general, se dice que un objeto es *fractal* si tiene dimensión fractal no entera. Existen muchos otros objetos fractales autosimilares del mismo estilo que los presentados: la alfombra de Sierpinski, la esponja de Menger, etc.

□

Concluiremos esta parte con algunos breves comentarios sobre sistemas dinámicos discretos en el plano complejo, que estarían definidos de la forma

$$\begin{cases} z_0 \in D, \\ z_{n+1} = f(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

donde $D \subset \mathbb{C}$ y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, con $f(D) \subset D$. Un ejemplo muy interesante es el siguiente:

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C}, \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{C}$. Fijemos como semilla $z_0 = 0$ y consideremos las sucesiones $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ para distintos valores del parámetro c . Estas sucesiones podrán estar acotadas o no. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto de todos los valores $c \in \mathbb{C}$ que hacen que la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ esté acotada. En la figura 3.12 se ha representado dicho conjunto⁷.

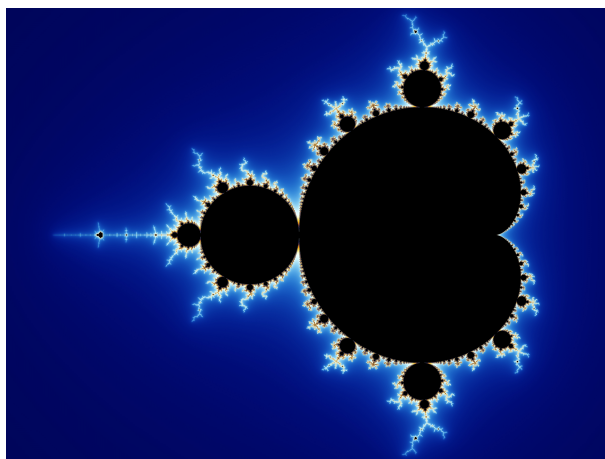


Figura 3.12: Conjunto de Mandelbrot.

Explorando el conjunto de Mandelbrot podemos encontrar incontables ejemplos de patrones autosimilares: véase la figura 3.13. Pero a diferencia de los fractales estudiados anteriormente, que muestran el mismo nivel de detalle a cualquier escala, el conjunto de Mandelbrot no es perfectamente autosimilar. De hecho, los patrones ganan en complejidad conforme exploramos más profundamente. Asimismo, se pueden encontrar infinitas copias más pequeñas del conjunto de Mandelbrot dentro del mismo, ¡y cada una de estas réplicas es tan compleja como la figura original!

⁷El conjunto de Mandelbrot corresponde a la parte en color negro de la figura 3.12. El resto de colores se obtiene mediante un algoritmo de coloreado basado en el número de iteraciones que hacen falta para que una sucesión no acotada supere un cierto umbral prefijado.

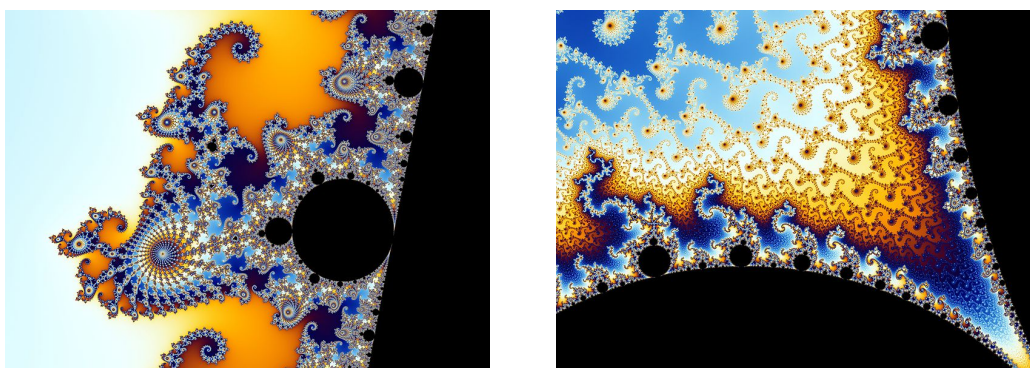


Figura 3.13: Ampliaciones del conjunto de Mandelbrot.

Asociado al conjunto de Mandelbrot tenemos los *conjuntos de Julia*, que se definen de forma análoga a partir del mismo sistema dinámico, pero fijando el valor del parámetro c y variando la semilla z_0 . De esta forma, para cada c tenemos un conjunto de Julia diferente: en la figura 3.14 se han representado dos ejemplos.

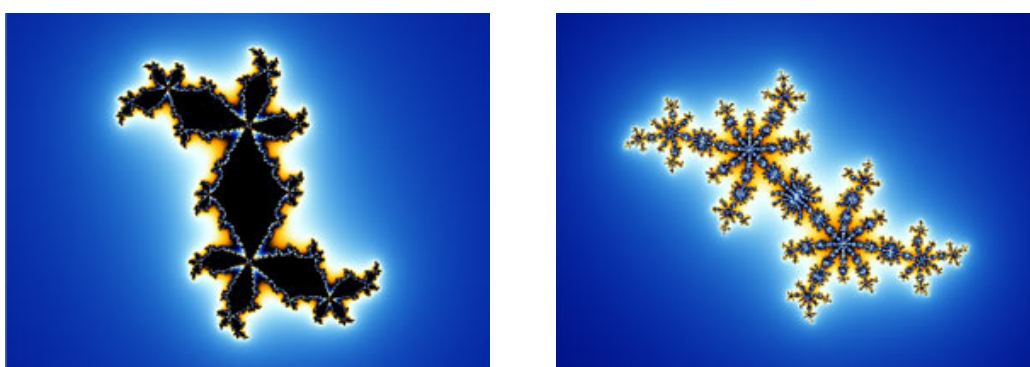


Figura 3.14: Dos ejemplos de conjuntos de Julia.

El software gratuito Xaos permite representar y analizar multitud de objetos fractales, incluyendo los que hemos visto en esta sección. También os animo a que le echéis un vistazo a la página web <https://fractalfoundation.org/>, donde podéis encontrar información de todo tipo sobre los fractales.

TEMA

4

SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS DE UNA VARIABLE

4.1. Introducción

En este tema vamos a estudiar sistemas dinámicos continuos de la forma (I, \mathbb{R}, φ) , donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Vamos a ver que este tipo de sistemas está muy relacionado con las ecuaciones diferenciales autónomas¹. Concretamente, dada una función continua $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos el problema de valor inicial

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0 \in I. \end{cases}$$

Supongamos que, para cada $x_0 \in I$, el problema (P) tiene una única solución (recordemos que esto sucede, por ejemplo, cuando f es de Lipschitz), que denotaremos por $\varphi_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow I$; esto es, φ_{x_0} es de clase $C^1(\mathbb{R})$, $\varphi'_{x_0}(t) = f(\varphi_{x_0}(t))$ para cada $t \in \mathbb{R}$, y $\varphi_{x_0}(0) = x_0$. En tal caso, podemos definir un sistema dinámico continuo (I, \mathbb{R}, φ) , donde

$$\varphi(t, x_0) = \varphi_{x_0}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in I.$$

Comprobémoslo. En primer lugar, notemos que al ser f continua, la función φ es asimismo continua². Por otra parte, φ es un flujo:

¹Recordemos que una ecuación diferencial es *autónoma* si en la expresión de la ecuación no aparece la variable independiente de forma explícita.

²Este resultado se estudia en la asignatura *Ecuaciones Diferenciales*.

- Por definición, $\varphi(0, x_0) = \varphi_{x_0}(0) = x_0$ para cada $x_0 \in I$.
- Dados $t, s \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$, hemos de comprobar que se verifica $\varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(t + s, x_0)$. Si definimos $x^* = \varphi(s, x_0)$, para un cierto $s \in \mathbb{R}$, bastaría con demostrar que las funciones $x(t) = \varphi(t, x^*) = \varphi_{x^*}(t)$ e $y(t) = \varphi(t + s, x_0) = \varphi_{x_0}(t + s)$ son iguales. Por definición, $x(t)$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x^*. \end{cases}$$

Pero resulta que $y(t)$ también es solución del mismo problema:

$$\begin{cases} y(0) = \varphi(0 + s, x_0) = \varphi(s, x_0) = x^*, \\ y'(t) = \varphi'_{x_0}(t + s) = f(\varphi_{x_0}(t + s)) = f(y(t)). \end{cases}$$

Por la unicidad de solución, necesariamente $x(t) = y(t)$ para cada $t \in I$.

Observación 4.1. El razonamiento anterior no es válido cuando la ecuación diferencial no es autónoma: $x' = f(t, x)$. Concretamente, la función $y(t)$ no verifica la ecuación diferencial. \square

Nos planteamos ahora el problema recíproco: dado un sistema dinámico (I, \mathbb{R}, φ) , queremos ver si existe alguna función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{x_0}(t) = \varphi(t, x_0)$ es la única solución del problema (P). Si así fuese, deberían verificarse las dos condiciones siguientes:

- $\varphi_{x_0}(0) = x_0$. Esto se verifica trivialmente, por ser φ un flujo: $\varphi_{x_0}(0) = \varphi(0, x_0) = x_0$.
- $\varphi'_{x_0}(t) = f(\varphi_{x_0}(t))$. Para que esto tenga sentido, es necesario que φ sea derivable respecto a t y que la derivada sea continua. Por otro lado, $\varphi'_{x_0}(t) = \partial_t \varphi(t, x_0)$, de donde $f(\varphi_{x_0}(t)) = \partial_t \varphi(t, x_0)$; en particular, para $t = 0$ tenemos que $f(x_0) = \partial_t \varphi(0, x_0)$. Al ser $x_0 \in I$ arbitrario, deducimos que la única función candidata es

$$f(x) = \partial_t \varphi(0, x), \quad x \in I.$$

Ejemplo 4.1. Consideremos el sistema dinámico $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varphi)$ dado por $\varphi(t, x) = xe^t$. Haciendo

$$f(x) = \partial_t \varphi(0, x) = x,$$

obtenemos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

cuyas soluciones, en efecto, son de la forma $x(t) = x_0 e^t = \varphi(t, x_0)$. \square

Demostremos entonces que $\varphi_{x_0}(t) = \varphi(t, x_0)$ es solución de (P), siendo $f(x) = \partial_t \varphi(0, x)$. La condición inicial se verifica trivialmente, por ser φ un flujo. Por otra parte, para cada $t \in \mathbb{R}$,

llamando $x^* = \varphi(t, x_0)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi'_{x_0}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi_{x_0}(t+s) - \varphi_{x_0}(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+s, x_0) - \varphi(t, x_0)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s, \varphi(t, x_0)) - \varphi(0, \varphi(t, x_0))}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s, x^*) - \varphi(0, x^*)}{s} \\ &= \partial_t \varphi(0, x^*) = f(x^*) = f(\varphi(t, x_0)) = f(\varphi_{x_0}(t)),\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Hemos comentado antes que cuando f es de Lipschitz, el problema (P) tiene solución única. ¿Qué sucede si f es solamente de Lipschitz local? (por ejemplo, cuando $f \in C^1(I)$). En este caso, existe una única solución maximal $\varphi_{x_0}: J_{x_0} \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ del problema (P), donde J_{x_0} es un intervalo que contiene a 0 en su interior. Por tanto, $\varphi(t, x_0) = \varphi_{x_0}(t)$ solo está bien definido si $t \in J_{x_0}$. Podemos entonces definir un sistema dinámico *local*, definido sobre el conjunto $\Lambda = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times I: t \in J_x\}$.

Ejemplo 4.2. Sea el problema

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es de Lipschitz local, pero no global. Si resolvemos la ecuación mediante separación de variables, obtenemos

$$\frac{x'}{x^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{x'}{x^2} dt = t + C \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + C \Rightarrow x = -\frac{1}{t + C}.$$

Usando la condición inicial, obtenemos $C = -1/x_0$. Por tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \equiv \varphi_{x_0}(t).$$

¿Dónde está definida esta solución? Dependerá del valor de x_0 :

$$J_{x_0} = \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{x_0}) & \text{si } x_0 > 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } x_0 = 0, \\ (\frac{1}{x_0}, +\infty) & \text{si } x_0 < 0. \end{cases}$$

□

En general, se define un *sistema dinámico local* como una terna (I, Λ, φ) , donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo; $\Lambda \subset \mathbb{R} \times I$ es tal que $(0, x) \in \text{int}(\Lambda)$, $\forall x \in I$; y la aplicación $\varphi: \Lambda \rightarrow I$ satisface $\varphi(0, x) = x$ y $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, siempre que esta expresión tenga sentido. Existe una equivalencia entre las soluciones de una ecuación diferencial autónoma con función de Lipschitz local y los sistemas dinámicos locales continuos, siempre que exista $\partial_t \varphi$ y sea de Lipschitz local.

Consideremos el problema (P) y el sistema dinámico que genera (sea local o global). Dado $x_0 \in I$, se define la *órbita* de x_0 como

$$\gamma_{x_0} = \{\varphi_{x_0}(t): t \in J_{x_0}\},$$

donde $\varphi_{x_0}: J_{x_0} \rightarrow I$ es la solución maximal de (P) (cuando el sistema dinámico es global, $J_{x_0} = \mathbb{R}$ para cualquier $x_0 \in I$). Un punto x_0 es un *equilibrio* cuando $\gamma_{x_0} = \{x_0\}$, esto es, $\varphi_{x_0}(t) = x_0, \forall t \in J_{x_0}$; por tanto, $0 = \varphi'_{x_0}(t) = f(\varphi_{x_0}(t)) = f(x_0)$. En resumen, $x_0 \in I$ es un equilibrio si y solo si $f(x_0) = 0$.

4.2. Modelos de población continuos

4.2.1. Modelo de Malthus

Un modelo de población de tipo Malthus vendría dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde $x(t)$ representa la población en el instante de tiempo t , $x_0 \in [0, \infty)$ es la población inicial y $k = k_N - k_M$ es la tasa de crecimiento; k_N y k_M son, respectivamente, las tasas de nacimiento y mortalidad, que se suponen constantes. En este caso $f(x) = kx$, por lo que el único equilibrio es $l = 0$ si $k \neq 0$; cuando $k = 0$ todos los puntos son equilibrios. Nótese que el problema de valor inicial tiene como solución

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Tenemos que tener en cuenta entonces tres situaciones:

- $k > 0$. La órbita de $x_0 \neq 0$ es el intervalo $(0, \infty)$, esto es, la imagen por x de \mathbb{R} . Nótese que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$, por lo que el equilibrio $l = 0$ es inestable y repulsor universal: partiendo de cualquier condición inicial, al viajar en el tiempo hacia atrás llegamos a 0. La representación del diagrama de fases correspondiente puede verse en la figura 4.1. En el contexto del modelo, partiendo de cualquier población $x_0 \neq 0$, esta crece exponencialmente.

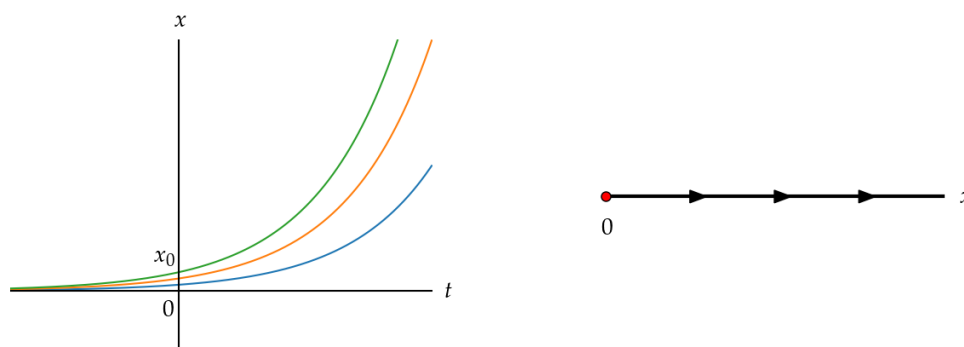


Figura 4.1: Modelo de Malthus para $k > 0$: equilibrio inestable y repulsor universal.

- $k = 0$. En este caso las soluciones son constantes, $x(t) \equiv x_0$, por lo que cada punto de $[0, \infty)$ es un equilibrio, que es estable pero no asintóticamente estable. El diagrama de fases se ha representado en la figura 4.2.

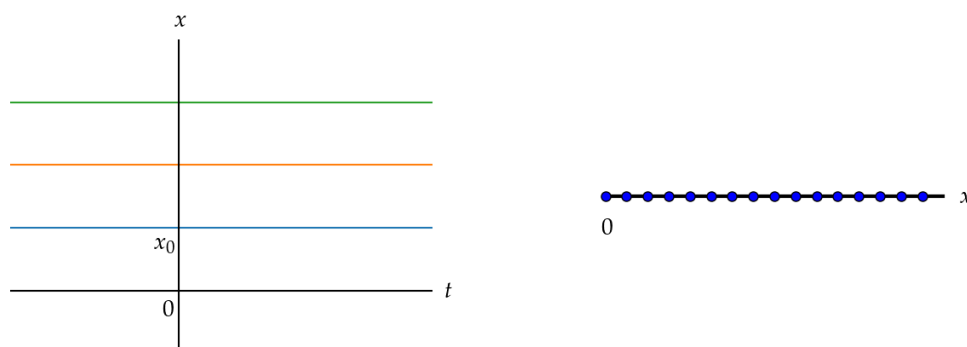


Figura 4.2: Modelo de Malthus para $k = 0$: equilibrio estable pero no asintóticamente estable.

- $k < 0$. Ahora la órbita de $x_0 \neq 0$ es el intervalo $(0, \infty)$, pero $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \infty$. Esto indica que el equilibrio $l = 0$ es asintóticamente estable y atractor universal. En la figura 4.3 se ha representado el diagrama de fases correspondiente. En términos del modelo, sea cual sea la población inicial $x_0 \neq 0$, esta tiende a extinguirse.

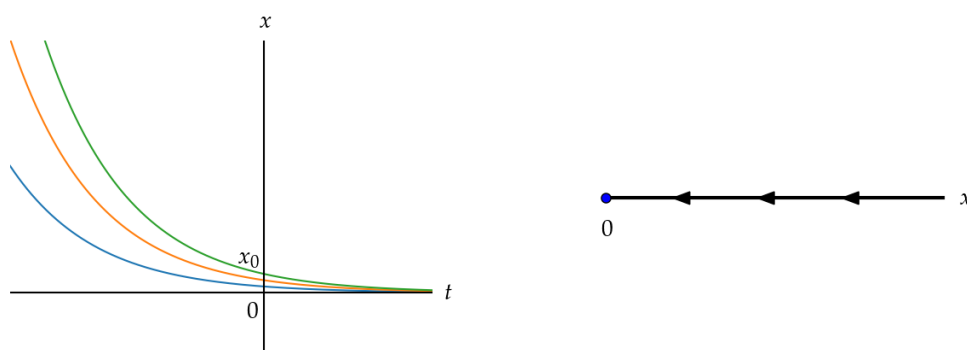


Figura 4.3: Modelo de Malthus para $k < 0$: equilibrio asintóticamente estable y atractor universal.

4.2.2. Modelo logístico

Para definir el modelo logístico suponemos que la tasa de natalidad k_N es constante, mientras que la tasa de mortalidad es proporcional al tamaño de la población: $k_M = \alpha x$, $\alpha > 0$. De

esta forma, la ecuación diferencial sería

$$\frac{dx}{dt} = k_N x - k_M x = k_N x - \alpha x^2 = k_N x \left(1 - \frac{x}{N}\right),$$

donde $N = k_N/\alpha$ se denomina *número sostenible*. A partir de ahora llamaremos $k \equiv k_N$ por simplicidad. Tenemos pues el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{N}\right), \\ x(0) = x_0 \in [0, \infty), \end{cases}$$

cuya solución viene dada por

$$x(t) = \frac{x_0 N}{x_0 + (N - x_0)e^{-kt}}, \quad t \in J_{x_0},$$

donde

$$J_{x_0} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x_0 \in [0, N], \\ \left(-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{x_0}{x_0 - N}\right), \infty\right) & \text{si } x_0 \in (N, \infty). \end{cases}$$

La función que define el sistema dinámico es

$$f(x) = kx \left(1 - \frac{x}{N}\right),$$

cuyos equilibrios son los ceros de f , esto es, 0 y N . Para estudiar su estabilidad, podemos basarnos en el signo de la función f . Concretamente, cuando $f > 0$ tenemos que $x' = f(x) > 0$, por lo que $x(t)$ será estrictamente creciente; análogamente, cuando $f < 0$ tendremos que $x(t)$ es estrictamente decreciente.

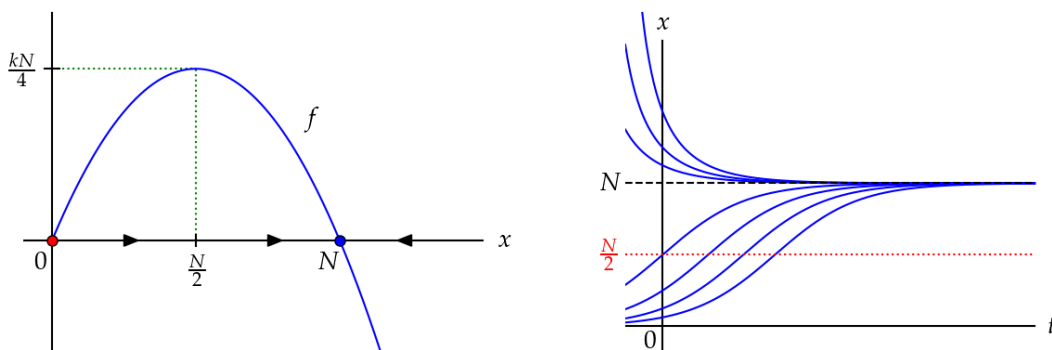


Figura 4.4: Izquierda: Diagrama de fases del modelo logístico continuo. Derecha: Soluciones.

En la figura 4.4 (izquierda) se ha representado la gráfica de f . Como vemos, f es positiva en el intervalo $(0, N)$ y negativa en (N, ∞) . Si tomamos $x_0 \in (0, N)$, la solución correspondiente será creciente, por lo que la órbita de x_0 viajará, necesariamente, desde 0 (cuando $t \rightarrow -\infty$) hasta N (cuando $t \rightarrow \infty$)³. De forma análoga, si tomamos $x_0 \in (N, \infty)$, la órbita correspondiente viajará desde ∞ hacia N . Nótese que el diagrama de fases consta de cuatro órbitas: los puntos⁴ 0 y N , que son órbitas estacionarias o equilibrios, el intervalo $(0, N)$ orientado hacia la derecha (esta orientación nos indica el sentido en que se mueven los puntos de la órbita cuando $t \rightarrow \infty$), y el intervalo (N, ∞) orientado hacia la izquierda. Dicho de otra forma,

$$\gamma_{x_0} = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 = 0, \\ \{N\} & \text{si } x_0 = N, \\ (0, N) & \text{si } x_0 \in (0, N), \\ (N, \infty) & \text{si } x_0 > N. \end{cases}$$

A partir de la orientación de las órbitas, deducimos inmediatamente que:

- 0 es inestable y repulsor, con dominio de repulsión $U_0 = [0, N)$.
- N es asintóticamente estable y atractor, con dominio de atracción $S_N = (0, \infty)$.

Volviendo a la interpretación como modelo de poblaciones, vemos que para cualquier población inicial $x_0 > 0$, la población tiende al número sostenible N . Por tanto, este número nos indica el valor en el cual se estabiliza la población.

Observación 4.2. Otra forma de analizar el comportamiento de las órbitas sería calculando los límites de $x(t)$ cuando t tiende a los extremos del intervalo de definición J_{x_0} , usando para ello la expresión analítica de $x(t)$. De esta forma, para $x_0 \in (0, N)$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = N,$$

mientras que si $x_0 \in (N, \infty)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a^+} x(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = N,$$

donde $a = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{x_0}{x_0 - N}\right)$. Sin embargo, el razonamiento geométrico a partir de la gráfica de f nos permite deducir el comportamiento de las órbitas sin necesidad de conocer las soluciones exactas. Esto es especialmente importante cuando estudiamos sistemas dinámicos más complejos, para los cuales es probable que no dispongamos de soluciones exactas. \square

A partir de la gráfica de f es posible también deducir cómo son aproximadamente las gráficas de las soluciones, sin necesidad de recurrir a la forma exacta de las mismas. Ya conocemos su comportamiento asintótico, esto es, los límites cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Además, notemos que si $x(t)$ es una solución del sistema, entonces

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = f'(x) \frac{dx}{dt} = f(x)f'(x) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = f(x)f'(x).$$

³Es importante recordar que las órbitas de un sistema dinámico son disjuntas, por lo que la órbita de x_0 nunca pasará ni por 0 ni por N , que son órbitas estacionarias (equilibrios).

⁴Aquí hacemos un abuso de notación: realmente las órbitas serían los conjuntos $\{0\}$ y $\{N\}$, pero por comodidad escribimos 0 y N .

Por tanto, cuando f y f' tengan el mismo signo, la solución x será convexa; cuando f y f' tengan signos opuestos, $x(t)$ será cóncava.

Fijémonos ahora en la figura 4.4 (izquierda), y notemos que la función f posee un máximo en $N/2$ (ahí $f' = 0$). En el intervalo $(0, N/2)$ se tiene que $f > 0$ y $f' > 0$ (ya que f es creciente), por lo que $x(t)$ será convexa. En el intervalo $(N/2, N)$ se verifica que $f > 0$ y $f' < 0$ (por ser decreciente), por lo que $x(t)$ será cóncava. Tenemos por tanto un punto de inflexión para $x(t)$ cuando su gráfica pasa por el valor $N/2$. Por último, en el intervalo (N, ∞) se tiene que $f < 0$ y $f' < 0$, por lo que $x(t)$ será convexa.

Las gráficas correspondientes se han representado en la figura 4.4 (derecha). Las gráficas de los equilibrios 0 y N son líneas rectas horizontales (soluciones constantes). Si tomamos una condición inicial $x_0 \in (0, N)$, sabemos que la solución correspondiente tiende a 0 cuando $t \rightarrow -\infty$ y a N cuando $t \rightarrow \infty$; esto es, $x = 0$ y $x = N$ son asíntotas horizontales. Cuando los valores de $x(t)$ están en el intervalo $(0, N/2)$ la gráfica de la solución es convexa, y cuando toma valores en $(N/2, N)$ es cóncava. Por otra parte, si $x_0 > N$ sabemos que la solución tiende a ∞ cuando $t \rightarrow a^+$ y a N cuando $t \rightarrow \infty$; además, la gráfica es cóncava. Todos estos hechos nos permiten representar de forma aproximada las gráficas de las soluciones $x(t)$.

Ejemplo 4.3 (Modelo logístico con umbral). Nos planteamos la cuestión de deducir cómo tendría que ser la gráfica de la función f para que el sistema dinámico asociado tuviese tres equilibrios $0 < U < N$, con 0 y N asintóticamente estables y U inestable y repulsor. Estas condiciones de estabilidad nos dicen que el diagrama de fases tendría que ser como el de la figura 4.5 (izquierda). En consecuencia, la gráfica de f tendría que cortar al eje de abscisas en 0 , U y N , ser negativa en $(0, U)$ y (N, ∞) , y ser positiva en (U, N) , tal y como se refleja en la figura 4.5 (izquierda).

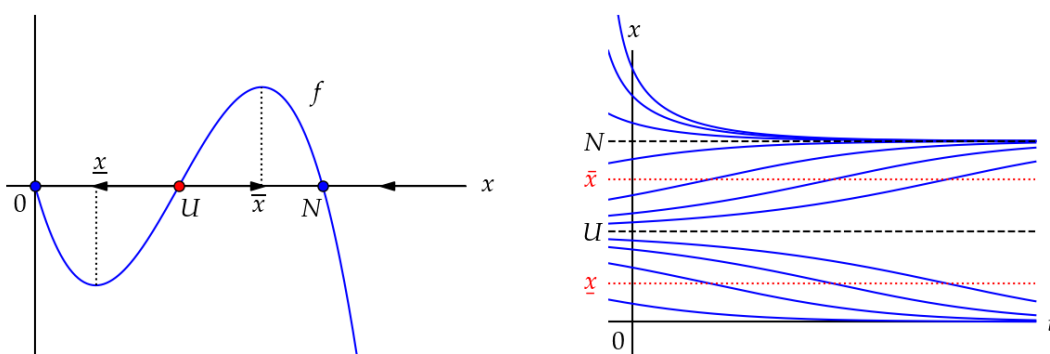


Figura 4.5: Izquierda: Sistema logístico con valor umbral. Derecha: Soluciones.

¿Cómo serían las gráficas de las soluciones? Recordemos que el signo de f determina la monotonía de las soluciones. Por otra parte, notemos que f posee dos extremos, en los puntos \bar{x} (mínimo) y \tilde{x} (máximo); esto nos permite deducir la monotonía de f' y, por ende, la convexidad de las soluciones. De forma más concreta:

- En $(0, \underline{x})$: $f < 0, f' < 0 \Rightarrow x$ decreciente y convexa.
- En (\underline{x}, U) : $f < 0, f' > 0 \Rightarrow x$ decreciente y cóncava.
- En (U, \bar{x}) : $f > 0, f' > 0 \Rightarrow x$ creciente y convexa.
- En (\bar{x}, N) : $f > 0, f' < 0 \Rightarrow x$ creciente y cóncava.
- En (N, ∞) : $f < 0, f' < 0 \Rightarrow x$ decreciente y convexa.

Las gráficas correspondientes se han representado en la figura 4.5 (derecha).

Es importante notar que las conclusiones anteriores son válidas para cualquier función f que tenga la forma representada en la figura 4.5. Un ejemplo de una tal función sería el siguiente:

$$f(x) = kx(x - U)(N - x),$$

con $k > 0$. Si interpretamos el sistema como un modelo de poblaciones, k representaría la tasa de natalidad, N sería el número sostenible y U representaría un *valor umbral*. Si la población inicial x_0 está por debajo del valor umbral, la población tiende a extinguirse; en cambio, si está por encima tiende a estabilizarse en el número sostenible. El modelo obtenido se denomina *modelo logístico con valor umbral*. Para determinar las soluciones numéricamente puede utilizarse el programa `dfield`. \square

Por último, vamos a ver qué relación hay entre el modelo logístico continuo y el modelo logístico discreto estudiado en el tema 2. Dado el modelo continuo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_N x - \alpha x^2, \\ x(0) = x_0 \in I, \end{cases}$$

aproximamos su solución mediante el método de Euler, cuyas iteraciones son de la forma

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t(k_N x_n - \alpha x_n^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

esto es,

$$x_{n+1} = r x_n \left(1 - \frac{x_n}{\bar{x}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde $r = 1 + \Delta t k_N > 1$ y $\bar{x} = \frac{r}{\Delta t \alpha}$. Este es justo el modelo logístico discreto que estudiamos en la sección 4.2.2. Cuando Δt es suficientemente pequeño (basta con que $\Delta t < 2/k_N$), se tiene que $r < 3$. En este caso, $1 - \frac{1}{r}$ era un equilibrio asintóticamente estable para el sistema discreto.

4.3. Criterios de estabilidad para equilibrios

En esta sección veremos una serie de resultados que nos ayudarán a determinar la estabilidad de un punto de equilibrio de manera simple. En la figura 4.6 se han representado distintos casos que podemos encontrarnos al analizar un equilibrio:

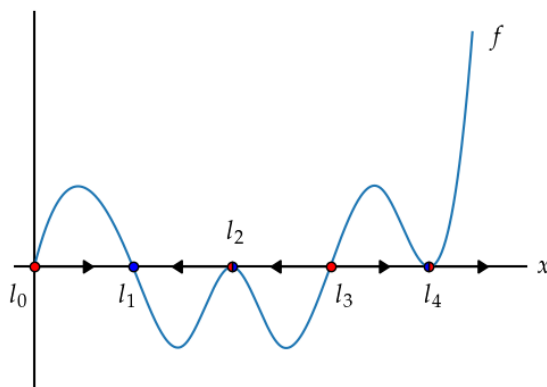


Figura 4.6: Estabilidad de puntos de equilibrio.

- l_0 : inestable y repulsor.
- l_1 : asintóticamente estable.
- l_2 : inestable (semiestable por la derecha); no es repulsor.
- l_3 : inestable y repulsor.
- l_4 : inestable (semiestable por la izquierda); no es repulsor.

El primer tipo de criterio al que podemos recurrir es de tipo geométrico.

Proposición 4.1. Sea l un equilibrio del sistema (P) , esto es, $f(l) = 0$. Entonces:

1. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x \in (l - \varepsilon, l), \\ f(x) < 0 & \text{para } x \in (l, l + \varepsilon), \end{cases}$$

entonces l es asintóticamente estable.

2. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x \in (l - \varepsilon, l), \\ f(x) > 0 & \text{para } x \in (l, l + \varepsilon), \end{cases}$$

entonces l es inestable y repulsor.

3. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) < 0 \quad \text{para } x \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \setminus \{l\},$$

entonces l es inestable (semiestable por la derecha).

4. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \quad \text{para } x \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \setminus \{l\},$$

entonces l es inestable (semiestable por la izquierda).

La demostración de la proposición es elemental, por eso no la daremos aquí. Los casos 1-4 de la proposición corresponden, respectivamente, a los equilibrios l_1 , l_3 , l_2 y l_4 de la figura 4.6. Los resultados de la proposición pueden adaptarse al caso en que el equilibrio l sea un extremo del intervalo I donde está definida f : este es el caso del equilibrio l_0 de la figura 4.6.

Cuando f es de clase C^1 en un entorno del equilibrio, los casos 1 y 2 de la proposición anterior pueden escribirse en términos de la derivada de f .

Proposición 4.2. Sea l un equilibrio y supongamos que f es de clase C^1 en un entorno de l . Entonces:

1. Si $f'(l) < 0$, el equilibrio l es asintóticamente estable.
2. Si $f'(l) > 0$, el equilibrio l es inestable y repulsor.
3. Si $f'(l) = 0$, podría darse cualquiera de los casos 1-4 de la proposición 4.1.

Tenemos la siguiente definición:

Definición 4.1. Sea l un equilibrio y supongamos que f es de clase C^1 en un entorno de l . Diremos que el equilibrio l es hiperbólico si $f'(l) \neq 0$.

La proposición 4.2 nos permite determinar el comportamiento asintótico de cualquier equilibrio hiperbólico en términos del signo de la derivada $f'(l)$.

Ejemplo 4.4. Consideremos el modelo logístico $f(x) = kx(1 - \frac{x}{N})$, cuyos equilibrios son 0 y N . Se tiene que

$$f'(x) = k \left(1 - \frac{2x}{N}\right) \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = k > 0, \\ f'(N) = -k < 0. \end{cases}$$

Por la proposición 4.2, tenemos que 0 es inestable y repulsor, y N es asintóticamente estable, como ya sabíamos. En particular, ambos equilibrios son hiperbólicos. \square

Terminamos esta sección mostrando que el sistema (P) no puede tener órbitas periódicas. Supongamos que $x(t)$ fuese una solución periódica de (P), con periodo T . Entonces la función $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ estaría en las condiciones del teorema de Rolle (es continua en $[0, T]$, derivable en $(0, T)$ y $x(0) = x(T)$). Por tanto, existiría $t^* \in (0, T)$ tal que $x'(t^*) = 0$. Pero entonces $f(x(t^*)) = x'(t^*) = 0$, por lo que $x(t^*)$ sería un equilibrio. Tendríamos entonces dos órbitas que se cortan (el equilibrio y la órbita periódica), lo cual es imposible. De hecho, las soluciones de una ecuación diferencial autónoma para la cual hay unicidad de solución, o bien son constantes, o bien son estrictamente monótonas.

Observación 4.3. En general, las órbitas de (P) solo pueden ser puntos (equilibrios) o intervalos (donde f tiene signo constante). Los extremos de estos intervalos pueden ser equilibrios, extremos del intervalo donde está definida f , o bien $\pm\infty$.

4.4. Modelos logísticos con tasa de captura

En esta sección estudiaremos variaciones del modelo logístico, donde se introduce un efecto de captura (pesca, caza, tala, etc., según qué tipo de especie estemos considerando). Se considera pues un modelo de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{N}\right) - h, \\ x(0) = x_0 \in [0, \infty), \end{cases}$$

donde h es un factor positivo que representa la tasa de captura; nótese que el signo negativo delante de h indica que la captura hace disminuir la población. Por supuesto, k representa la tasa de natalidad de la especie, y N es el número sostenible en ausencia de capturas. Estudiaremos dos casos: captura constante (por ejemplo, pensemos en una piscifactoría) y captura proporcional al tamaño de la población (un ejemplo sería la pesca de arrastre).

4.4.1. Modelo logístico con tasa de captura constante

En este caso supondremos que la tasa de captura h es constante. Los posibles equilibrios del sistema van a depender ahora del valor de h . Para determinar dichos equilibrios, tenemos que estudiar los ceros de la función

$$\tilde{f}(x) = kx \left(1 - \frac{x}{N}\right) - h.$$

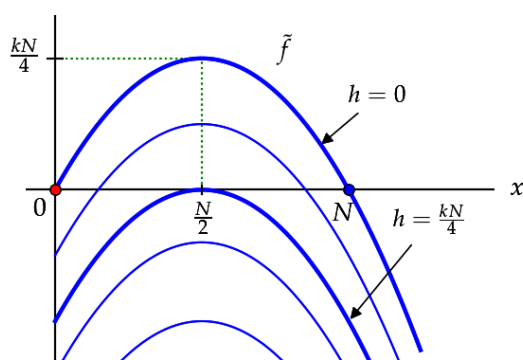


Figura 4.7: Gráficas de \tilde{f} para distintos valores de la tasa de captura h .

En la figura 4.7 se ha representado la gráfica de \tilde{f} para distintos valores del parámetro h . El máximo de \tilde{f} se da en el punto $x = N/2$, y su valor es $\tilde{f}(N/2) = \frac{kN}{4} - h$. Se tiene entonces que $\tilde{f}(N/2) = 0$ si y solo si $h = kN/4$. En este valor del parámetro es donde cambia el tipo de gráfica, esto es, $h = kN/4$ va a ser un punto de bifurcación. Tenemos entonces varios casos:

- Caso 1: $h \in (0, \frac{kN}{4})$. Se tienen dos equilibrios, l_1 y l_2 , que corresponden con los cortes de \tilde{f} con el eje de abscisas. En la figura 4.8 (izquierda) se han representado la gráfica de \tilde{f} y el correspondiente diagrama de fases. Como vemos, el equilibrio l_1 es inestable y repulsor, mientras que l_2 es asintóticamente estable.

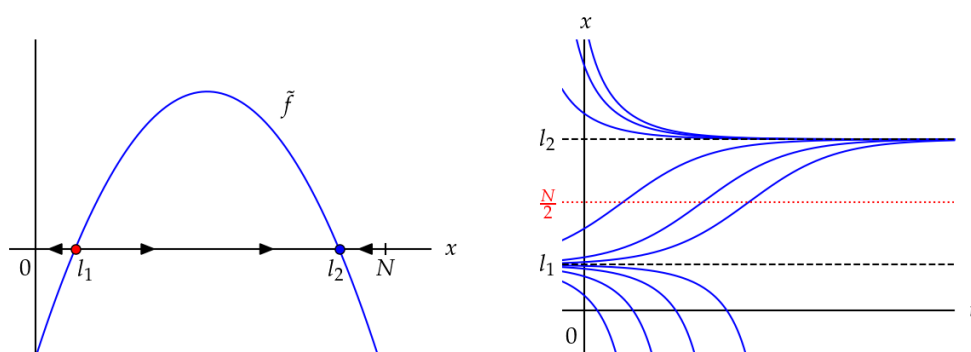


Figura 4.8: Caso 1: $h \in (0, \frac{kN}{4})$. Izquierda: Gráfica de \tilde{f} y diagrama de fases. Derecha: Soluciones.

En función de la condición inicial x_0 , la solución $x(t)$ tiende a l_1 si $x_0 = l_1$; tiende a l_2 si $x_0 \in (l_1, \infty)$; y llega a 0 en un tiempo finito si $x_0 \in [0, l_1)$. Analizando los signos de \tilde{f} y \tilde{f}' , podemos determinar la forma de las soluciones: véase la figura 4.8 (derecha). En términos de modelos de población, l_1 sería un valor umbral y l_2 representaría el nuevo número sostenible; nótese que $l_2 \rightarrow N$ cuando $h \rightarrow 0$.

- Caso 2: $h = \frac{kN}{4}$. Ahora se tiene un único equilibrio, $l_1 = N/2$, que es inestable (de forma más específica, es semiestable por la derecha): véase la figura 4.9 (izquierda). Las correspondientes soluciones se han representado en la figura 4.9 (derecha). En función de la condición inicial x_0 , la población tiende a $N/2$ si $x_0 \geq N/2$, y se extingue en tiempo finito si $x_0 \in [0, N/2)$.

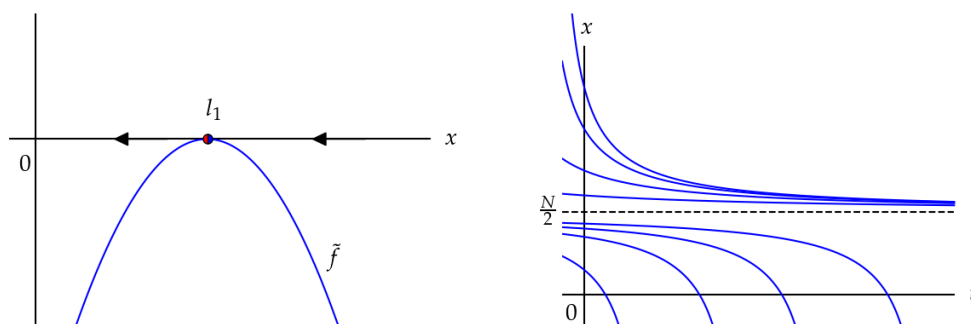


Figura 4.9: Caso 2: $h = \frac{kN}{4}$. Izquierda: Gráfica de \tilde{f} y diagrama de fases. Derecha: soluciones

- Caso 3: $h > \frac{kN}{4}$. Ahora no hay puntos de equilibrio: véase la figura 4.10 (izquierda). Las soluciones tienen la forma representada en la figura 4.10 (derecha). Como puede verse, la población se extingue en tiempo finito, sea cual sea la población inicial.

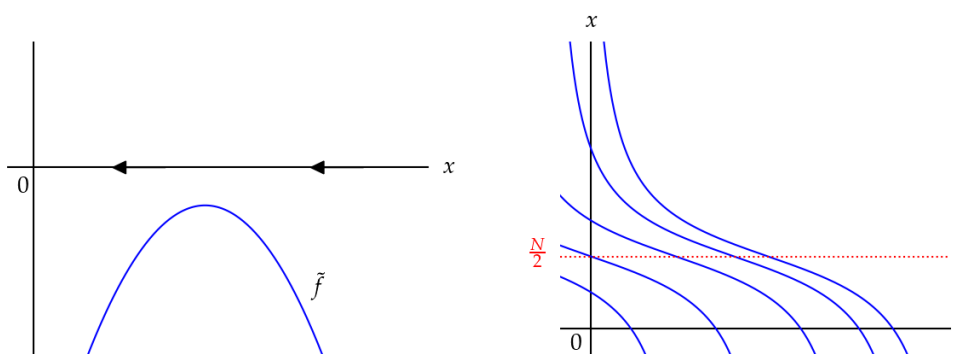


Figura 4.10: Caso 3: $h > \frac{kN}{4}$. Izquierda: Gráfica de \tilde{f} y diagrama de fases. Derecha: Soluciones

Una forma alternativa de estudiar los equilibrios consiste en estudiar los puntos de corte de las gráficas $y = f(x)$, donde $f(x) = kx(1 - \frac{x}{N})$, y la recta $y = h$. Los tres casos se han representado en la figura 4.11, junto con los correspondientes diagramas de fases. Para determinar la estabilidad, basta con ver si la gráfica $y = f(x)$ queda por encima ($\tilde{f} > 0$) o por debajo ($\tilde{f} < 0$) de la recta $y = h$.

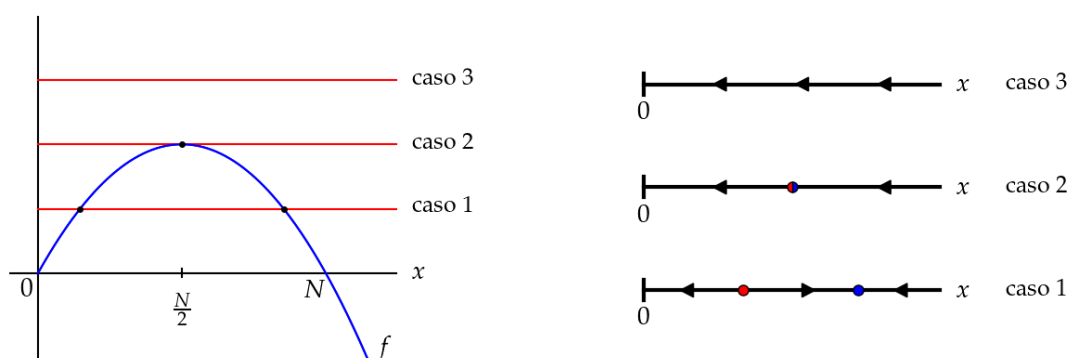


Figura 4.11: Estudio alternativo de los equilibrios en el caso h constante.

En los párrafos anteriores hemos estudiado los equilibrios del sistema en función del valor del parámetro h . Es posible representar de forma sucinta toda esta información haciendo uso del *diagrama de bifurcación*. En este diagrama se representan los equilibrios en el plano $h-x$, indicando asimismo su estabilidad. También nos proporciona una herramienta para detectar los

posibles puntos de bifurcación, que son aquellos donde cambia el comportamiento cualitativo del sistema.

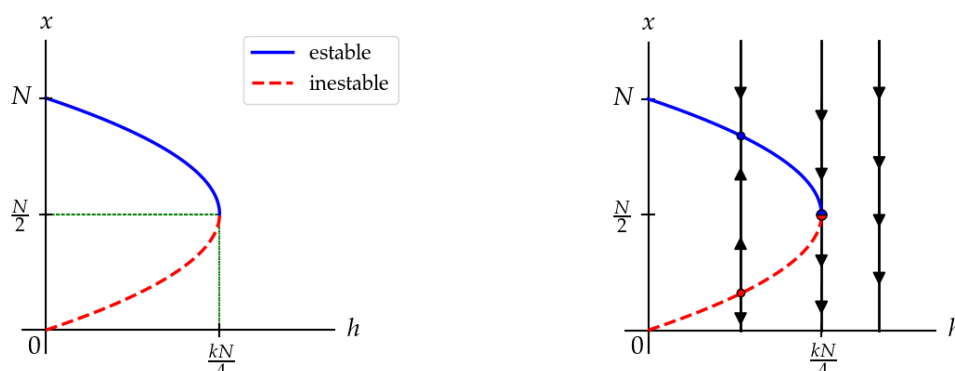


Figura 4.12: Modelo logístico con tasa de captura constante. Izquierda: diagrama de bifurcación. Derecha: diagrama de bifurcación y diagramas de fases.

Partimos entonces de la ecuación para los puntos de equilibrio, $\tilde{f}(x) = 0$, que podemos escribir, despejando el parámetro h , como

$$h = kx \left(1 - \frac{x}{N} \right).$$

De esta forma, la expresión anterior nos permite representar los equilibrios como los puntos de una curva en el plano h - x (la forma más simple de representar el diagrama de bifurcación consiste en dibujar la gráfica en el plano x - h y luego intercambiar los ejes para obtener la curva en el plano h - x). A continuación indicamos qué equilibrios son inestables y cuales estables: véase la figura 4.12 (izquierda). Claramente vemos que en $h^* = \frac{kN}{4}$ se produce una bifurcación: si $h \in (0, h^*)$ hay dos equilibrios, uno asintóticamente estable y otro inestable, que se van acercando conforme h aumenta; para $h = h^*$ los dos equilibrios se unen en uno solo, que es semiestable por la derecha; por último, para $h \in [h^*, \infty)$ no existen puntos de equilibrio. En la figura 4.12 (derecha) se ha representado el diagrama de bifurcación junto con los diagramas de fases correspondientes a cada caso (en vertical).

Observación 4.4.

- El punto h^* se denomina *punto de retorno*, y veremos que siempre corresponde a un equilibrio no hiperbólico. Para los demás valores de h los equilibrios son hiperbólicos.
- En este caso, la expresión para los equilibrios puede calcularse fácilmente, resolviendo la ecuación

$$\tilde{f}(x) = 0 \Rightarrow kx \left(1 - \frac{x}{N} \right) - h = 0 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{N}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4h}{kN}} \right), \\ l_2 = \frac{N}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4h}{kN}} \right). \end{cases}$$

Obviamente, l_1 y l_2 solo tienen sentido cuando $h \in [0, h^*]$. Para determinar la estabilidad, evaluamos \tilde{f}' en cada uno de los equilibrios cuando $h \in (0, h^*)$:

- $\tilde{f}'(l_1) > 0$, por lo que l_1 es inestable y repulsor.
- $\tilde{f}'(l_2) < 0$, por lo que l_2 es asintóticamente estable.
- Cuando $h = h^*$ se tiene que $l_1 = l_2 = N/2$ y $\tilde{f}'(N/2) = 0$, por lo que el equilibrio no es hiperbólico; en este caso se estudia su estabilidad mediante criterios geométricos (proposición 4.1).

4.4.2. Modelo logístico con tasa de captura proporcional a la población

Supongamos ahora que la tasa de captura es proporcional a la población, esto es, $h = \alpha x$, con $\alpha > 0$. El modelo a considerar es, pues,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{N}\right) - \alpha x, \\ x(0) = x_0 \in [0, \infty). \end{cases}$$

Los equilibrios son las soluciones de la ecuación

$$kx \left(1 - \frac{x}{N}\right) = \alpha x.$$

Para determinarlos de forma cualitativa, estudiaremos los puntos de corte de la gráfica de $f(x) = kx(1 - \frac{x}{N})$ con la recta $y = \alpha x$ (figura 4.13).

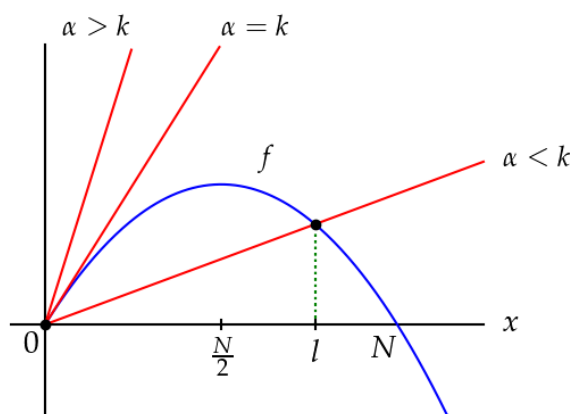


Figura 4.13: Cortes de $y = f(x)$ con la recta $y = \alpha x$, para los distintos valores de α .

Como puede observarse, el punto 0 es siempre un equilibrio y, dependiendo del valor de α , puede aparecer otro equilibrio $l \in (0, N)$. El valor de α que separa ambos casos es aquel en el

que $y = \alpha x$ es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$, esto es,

$$\alpha = f'(0) = k.$$

Tenemos que considerar, por tanto, tres casos:

- Si $\alpha \in (0, k)$, tenemos dos equilibrios: 0 y l . Entre 0 y l la gráfica de f está por encima de la recta $y = \alpha x$, por lo que x será creciente; entre l y N ocurre justo lo contrario. En consecuencia, l es asintóticamente estable y 0 es inestable y repulsor.
- Para $\alpha = k$ se tiene que 0 es el único equilibrio, que es asintóticamente estable y atractor universal.
- Por último, para $\alpha > k$ sucede lo mismo que en el caso anterior: 0 es el único equilibrio, que es asintóticamente estable y atractor universal.

Vemos que en $\alpha = k$ se produce una bifurcación: cambia la estabilidad de 0 y el equilibrio l desaparece. El diagrama de bifurcación del sistema se ha representado en la figura 4.14.

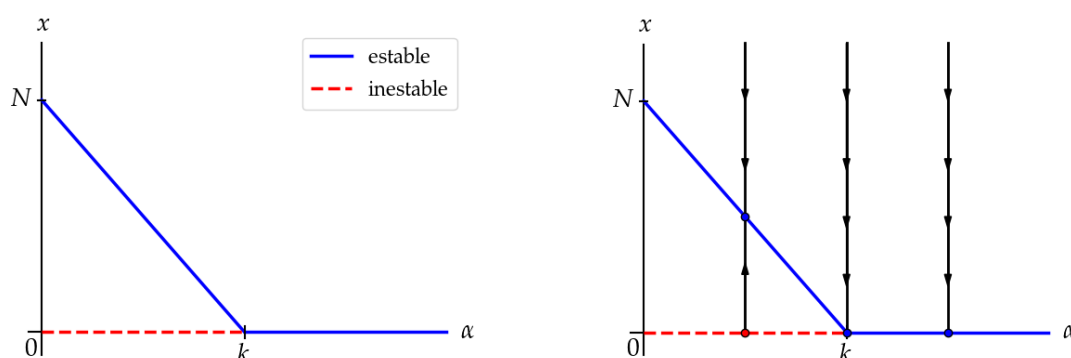


Figura 4.14: Modelo logístico con tasa de captura proporcional a la población. Izquierda: diagrama de bifurcación. Derecha: diagrama de bifurcación y diagramas de fases.

El estudio anterior es puramente cualitativo: en ningún momento hemos usado las expresiones analíticas del modelo, tan solo un simple razonamiento geométrico. Vamos a hacer ahora el estudio analítico del sistema. Para ello, primero calculamos los equilibrios:

$$kx \left(1 - \frac{x}{N}\right) = \alpha x \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ k \left(1 - \frac{x}{N}\right) = \alpha \Rightarrow x = N \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \equiv l. \end{cases}$$

Nótese que el equilibrio l solo tiene sentido en el modelo cuando es no negativo, esto es, cuando $\alpha < k$. Para analizar la estabilidad consideramos la derivada de $\tilde{f}(x) = f(x) - \alpha x$:

$$\tilde{f}'(x) = k \left(1 - \frac{2x}{N}\right) - \alpha \Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}'(0) = k - \alpha, \\ \tilde{f}'(l) = \alpha - k. \end{cases}$$

En consecuencia, si $\alpha \in (0, k)$ entonces $\tilde{f}'(0) > 0$ y $\tilde{f}'(l) < 0$, lo que implica que 0 es inestable y repulsor, mientras que l es asintóticamente estable. Cuando $\alpha > k$ tenemos que $\tilde{f}'(0) < 0$, por lo que 0 es asintóticamente estable; en este caso, el punto l no tiene sentido en el modelo. Por último, cuando $\alpha = k$ el único equilibrio es 0 y se verifica que $\tilde{f}'(0) = 0$; esto es, 0 es un equilibrio no hiperbólico, por lo que no podemos aplicar el criterio de la derivada para deducir su estabilidad.

4.5. Diagramas de bifurcación

En esta sección vamos a dar una serie de consideraciones generales sobre diagramas de bifurcación. Para ello, consideremos una familia uniparamétrica de ecuaciones diferenciales autónomas, de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(\mu, x), \\ x(0) = x_0 \in I, \end{cases}$$

donde μ representa el parámetro. Para dibujar el diagrama de bifurcación, tenemos que representar en el plano μ - x todos los puntos de equilibrio, esto es, los puntos (μ, x) que verifican

$$f(\mu, x) = 0.$$

Dicho de otra forma, hay que dibujar la curva de nivel 0 de la función de dos variables $f(\mu, x)$. Asimismo, hay que indicar la estabilidad de los puntos de equilibrio, que puede determinarse mediante el signo de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, x)$$

en los equilibrios que sean hiperbólicos.

Ejemplo 4.5. En los modelos logísticos con tasa de captura estudiados en la sección 4.4, teníamos:

- Tasa de captura constante:

$$f(\mu, x) = kx \left(1 - \frac{x}{N} \right) - \mu.$$

- Tasa de captura proporcional a la población:

$$f(\mu, x) = kx \left(1 - \frac{x}{N} \right) - \mu x.$$

Los diagramas de bifurcación correspondientes pueden verse en las figuras 4.12 y 4.14, respectivamente. □

Ejemplo 4.6. Consideremos el sistema dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu^2 + x^2, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En este caso,

$$f(\mu, x) = 0 \Rightarrow \mu^2 + x^2 = 0 \Rightarrow (\mu, x) = (0, 0).$$

Por tanto, si $\mu = 0$ entonces $x = 0$ sería el único equilibrio, y si $\mu \neq 0$ no hay equilibrios. El diagrama de bifurcación se reduce en este caso al punto $(0, 0)$.

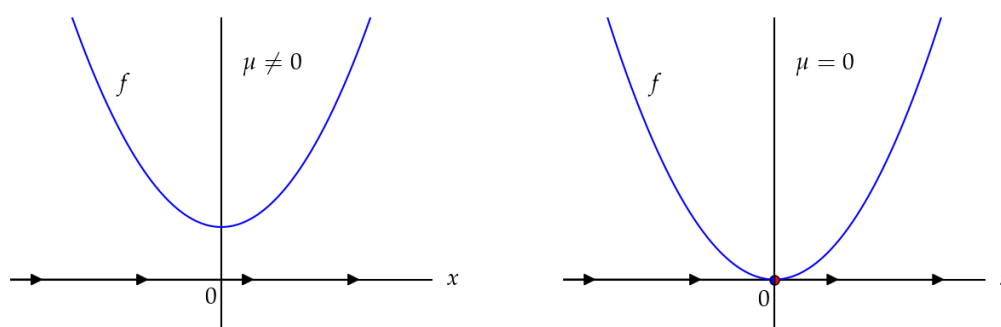


Figura 4.15: Ejemplo 4.6. Gráfica de $f(\mu, x)$. Izquierda: $\mu \neq 0$. Derecha: $\mu = 0$.

Respecto a la estabilidad, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, por lo que el equilibrio 0 (con $\mu = 0$) no es hiperbólico. Para determinar su estabilidad podemos fijarnos en la figura 4.15, donde se ha representado la gráfica de $f(0, x)$; es claro entonces que 0 es semiestable por la izquierda. \square

A continuación vamos a ver algunos ejemplos representativos de diagramas de bifurcación.

4.5.1. Bifurcación del tridente

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\mu - x^2), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

y calculemos sus equilibrios:

$$x(\mu - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \text{o bien} \\ \mu = x^2. \end{cases}$$

De esta forma, el conjunto de todos los posibles equilibrios es

$$\{(\mu, 0) : \mu \in \mathbb{R}\} \cup \{(x^2, x) : x \neq 0\},$$

que se ha representado en la figura 4.16.

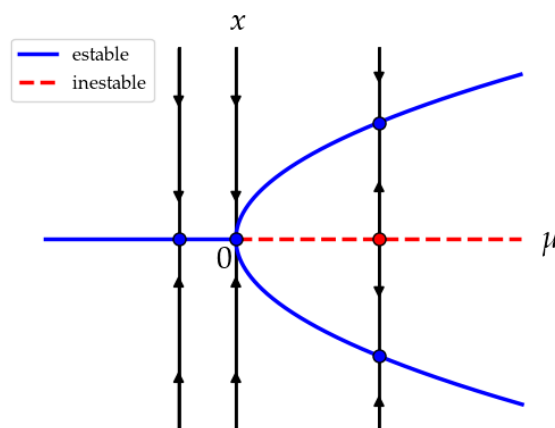


Figura 4.16: Bifurcación del tridente.

Analicemos ahora la estabilidad de los equilibrios. En este caso, tendríamos que estudiar el signo de f

$$f(\mu, x) = x(\mu - x^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, x) = \mu - 3x^2.$$

Para un equilibrio de la forma $(\mu, 0)$ se tiene entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, 0) = \mu \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ es inestable y repulsor si } \mu > 0, \\ 0 \text{ es asintóticamente estable si } \mu < 0, \\ 0 \text{ no es hiperbólico si } \mu = 0. \end{cases}$$

En el caso $\mu = 0$, a partir de la figura 4.16 podemos deducir que el equilibrio 0 es asintóticamente estable. Para verlo, basta con notar que el diagrama de fases varía de forma continua conforme $\mu \rightarrow 0^-$. Por otro lado, para un equilibrio del tipo (x^2, x) tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^2, x) = -2x^2 < 0,$$

por lo que el equilibrio es asintóticamente estable.

En este caso, los equilibrios pueden determinarse de manera explícita:

$$x(\mu - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 = \mu \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\mu} & \text{si } \mu > 0, \\ x = 0 & \text{si } \mu = 0, \\ \text{no tiene solución si } \mu < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Tenemos entonces que si $\mu \leq 0$, el único equilibrio es $l_1 = 0$, que es asintóticamente estable, mientras que si $\mu > 0$ hay tres equilibrios: por un lado $l_1 = 0$, que es inestable y repulsor, y por otro lado $l_2 = -\sqrt{\mu}$ y $l_3 = \sqrt{\mu}$, que son asintóticamente estables.

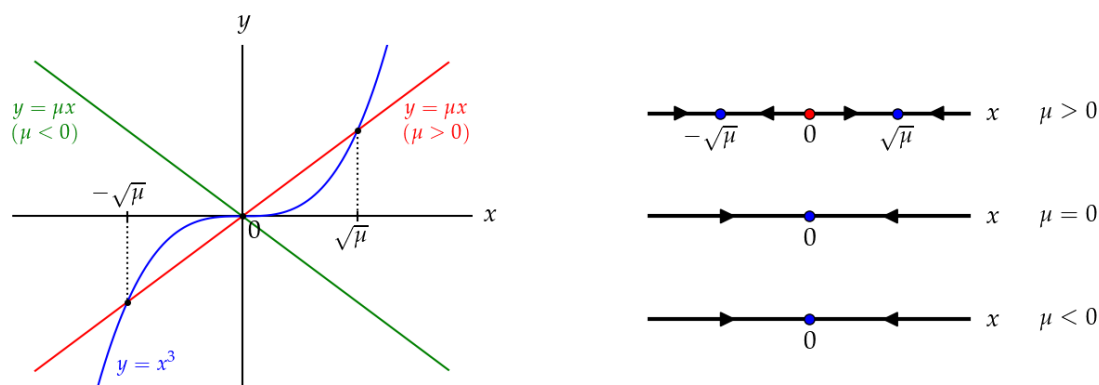


Figura 4.17: Bifurcación del tridente. Estudio geométrico.

También podemos estudiar la estabilidad de manera gráfica. Para ello, hemos representado en la figura 4.17 (izquierda) las gráficas de $y = x^3$ e $y = \mu x$ (para $\mu > 0$ y $\mu < 0$), cuyos puntos de corte determinan los equilibrios del sistema. En función del signo de μ , vemos que puede haber uno o tres puntos de corte. Ahora solo hay que mirar si la gráfica de $y = x^3$ está por encima o por debajo de la recta $y = \mu x$ para determinar el signo de f y, en consecuencia, la monotonía de las soluciones. De esta forma, se obtienen los diagramas de fases de la figura 4.17 (derecha).

Por último, en función de la condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial tiene el siguiente comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$:

- Si $\mu \leq 0$, x tiende a 0 para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Si $\mu > 0$ y $x_0 = 0$, la solución tiende a 0; de hecho, es una solución estacionaria.
- Si $\mu > 0$ y $x_0 \in (-\infty, 0)$, x tiende a $-\sqrt{\mu}$; si $x_0 = -\sqrt{\mu}$, la solución es estacionaria.
- Si $\mu > 0$ y $x_0 \in (0, \infty)$, x tiende a $\sqrt{\mu}$; si $x_0 = \sqrt{\mu}$, la solución es estacionaria.

4.5.2. Histéresis

Se considera el sistema dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - x^3 + \mu, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para calcular los equilibrios planteamos la ecuación $f(\mu, x) = 0$, donde $f(\mu, x) = x - x^3 + \mu$:

$$f(\mu, x) = 0 \Rightarrow \mu = x^3 - x.$$

Representando la curva correspondiente en el plano μ - x , se obtiene la gráfica de la figura 4.18.

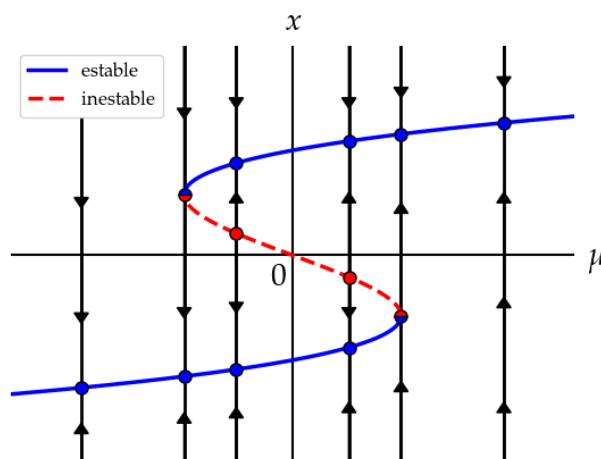


Figura 4.18: Histéresis. Diagrama de bifurcación.

El análisis de estabilidad sigue las mismas pautas que en ejemplos anteriores, por lo que no entraremos en detalles. Para determinar los puntos de bifurcación, resolvemos la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, x) = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Obtenemos así dos puntos de retorno, que son no hiperbólicos. Los valores correspondientes del parámetro son

$$\mu = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

En resumen, se obtienen los siguientes resultados:

- Si $\mu \in (-\infty, -\frac{2}{3\sqrt{3}})$ solo hay un equilibrio, que es asintóticamente estable.
- Si $\mu = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ hay dos equilibrios: $\frac{1}{\sqrt{3}}$, que es semiestable, y otro que es asintóticamente estable.
- Si $\mu \in (-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$ hay tres equilibrios: los dos de los extremos son asintóticamente estables, y el interior es inestable y repulsor.
- Si $\mu = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ hay dos equilibrios: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, que es semiestable, y otro que es asintóticamente estable.
- Si $\mu \in (\frac{2}{3\sqrt{3}}, \infty)$ hay un único equilibrio, que es asintóticamente estable.

4.5.3. Modelos de tipo logístico con umbral

Supongamos que una población sigue un modelo de tipo logístico con umbral, definido por una función f cuya gráfica tiene la forma representada en la figura 4.5. Vimos en el ejemplo 4.3 que el sistema posee dos equilibrios asintóticamente estables, 0 y N , y uno inestable y repulsor, U (valor umbral). Supongamos además que se produce una captura de individuos con tasa h , con lo que el sistema tendría la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - h, \\ x(0) = x_0 \in [0, \infty). \end{cases}$$

Consideremos primero el caso de tasa de captura constante $h > 0$. En este caso, la ecuación que nos da los equilibrios en términos del parámetro h sería simplemente

$$h = f(x).$$

Representemos entonces la gráfica de $y = f(x)$ y la recta horizontal $y = h$, y estudiemos los puntos de corte en función del valor de h : véase la figura 4.19 (izquierda).

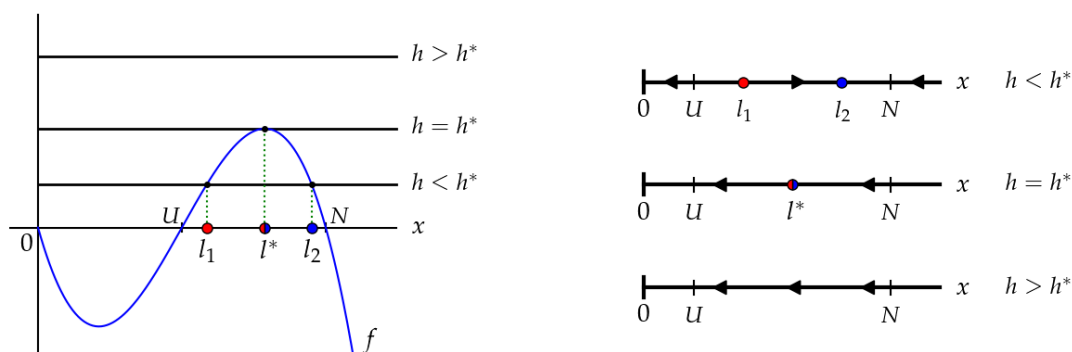


Figura 4.19: Modelo logístico con umbral y tasa de captura constante.

Si llamamos $h^* = \max_{x \in [0, \infty)} f(x)$, tenemos que:

- Si $h < h^*$ hay dos puntos de equilibrio, l_1 y l_2 , tales que $U < l_1 < l_2 < N$. Se tiene que l_1 es inestable y repulsor, mientras que l_2 es asintóticamente estable. En términos de poblaciones, l_1 representa un nuevo valor umbral, por debajo del cual la población se extingue en tiempo finito; l_2 juega el papel de un nuevo número sostenible, al cual tiende la población si está por encima del valor umbral. Nótese que, conforme aumenta h , los equilibrios l_1 y l_2 tienden a acercarse.
- Si $h = h^*$ entonces hay un único equilibrio l^* , que es inestable; concretamente, es semiestable por la derecha. Este es el caso límite en el que el valor umbral y el número

sostenible coinciden. Si la población inicial es menor que l^* , la población se extingue en tiempo finito; si es mayor, tiende al equilibrio l^* .

- Si $h > h^*$ no hay puntos de corte, por lo que el sistema no posee equilibrios. Sea cual sea la población inicial, hay extinción en tiempo finito.

Los diagramas de fases correspondientes a los tres casos pueden verse en la figura 4.19 (derecha). Asimismo, el diagrama de bifurcación se ha representado en la figura 4.20.

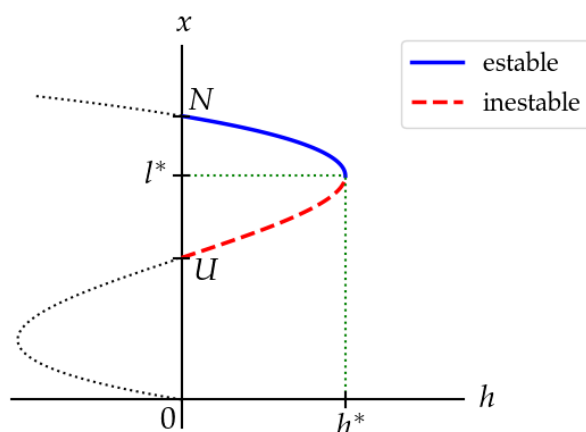


Figura 4.20: Modelo logístico con umbral y tasa de captura constante. Diagrama de bifurcación.

Pasemos ahora al caso en el que la tasa de captura es proporcional a la población: $h = \alpha x$, con $\alpha > 0$. En este caso, la ecuación para los equilibrios en función de α es

$$\alpha x = f(x).$$

Por tanto, tenemos que estudiar los puntos de corte entre la gráfica de $y = f(x)$ y la recta $y = \alpha x$, en función del valor de α : véase la figura 4.21 (izquierda). Sea α^* el valor en el cual la recta $y = \alpha^* x$ es tangente a $y = f(x)$. Aparecen entonces tres casos:

- Si $\alpha < \alpha^*$ tenemos tres equilibrios: 0 , l_1 y l_2 , con $U < l_1 < l_2 < N$. Los equilibrios 0 y l_2 son asintóticamente estables, mientras que l_1 es inestable y repulsor. En términos de poblaciones, l_1 representa un valor umbral por debajo del cual la población tiende a extinguirse (en este caso, en tiempo infinito), y l_2 sería un nuevo número sostenible, al cual tiende la población cuando está por encima del valor umbral.
- Si $\alpha = \alpha^*$ entonces tenemos dos equilibrios: 0 , que es asintóticamente estable, y l , que es inestable (semiestable por la derecha). Si el valor inicial de la población es menor que l la población tiende a extinguirse, mientras que si es mayor que l tiende a estabilizarse en el valor l .

- Si $\alpha > \alpha^*$ el único equilibrio es 0, que es asintóticamente estable y atractor universal. Sea cual sea la población inicial, la población tiende a extinguirse (en tiempo infinito).

Los diagramas de fases para los tres casos se han representado en la figura 4.21 (derecha), mientras que el diagrama de bifurcación se ha dibujado en la figura 4.22.

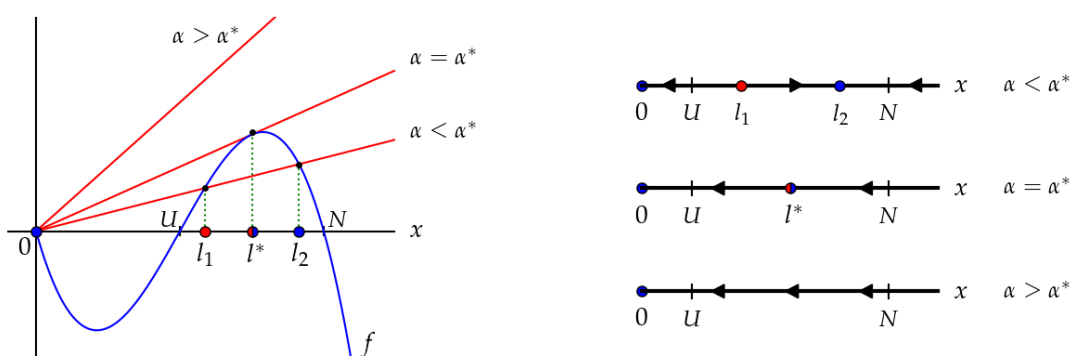


Figura 4.21: Modelo logístico con umbral y tasa de captura proporcional.

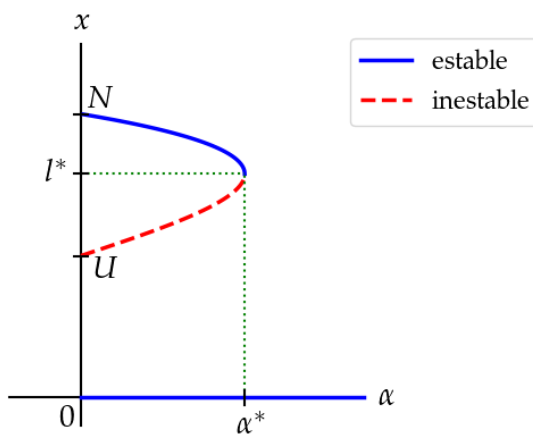


Figura 4.22: Modelo logístico con umbral y tasa de captura proporcional a la población. Diagrama de bifurcación.

4.5.4. Consideraciones generales

Supongamos que x^* es un equilibrio hiperbólico para el parámetro μ^* , esto es,

$$f(\mu^*, x^*) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mu^*, x^*) \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, es posible despejar x en un entorno de μ^* . Esto implica que, localmente, la curva de nivel 0 de f coincide con la gráfica de una cierta función $x = \psi(\mu)$. La forma del diagrama de bifurcación cerca de (μ^*, x^*) sería como en la figura 4.23 (izquierda).

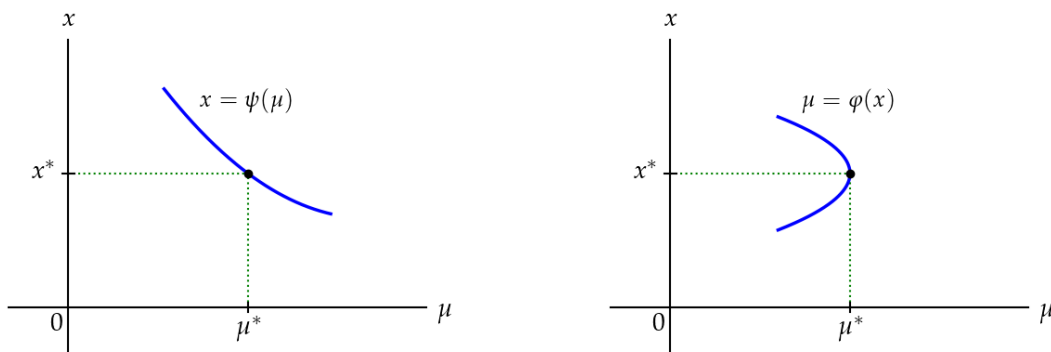


Figura 4.23: Forma local del diagrama de bifurcación.

¿Qué sucede si $\frac{\partial f}{\partial x^*}(\mu^*, x^*) = 0$? En tal caso, si $\frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu^*, x^*) \neq 0$ podemos aplicar también el teorema de la función implícita para deducir que, localmente, la curva de nivel 0 coincide con la gráfica de una función $\mu = \varphi(x)$. Estaríamos, por ejemplo, en el caso representado en la figura 4.23 (derecha). Nótese que el gradiente de f en (μ^*, x^*) sería en este caso un vector horizontal:

$$\nabla f(\mu^*, x^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu^*, x^*), \frac{\partial f}{\partial x}(\mu^*, x^*) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu^*, x^*), 0 \right).$$

Al ser el gradiente normal a la curva de nivel, esta debe ser vertical, lo que implica que la función φ debe ser tangente a la vertical en el punto.

Por último, solo podrían darse puntos aislados o corte entre ramas si $\frac{\partial f}{\partial x}(\mu^*, x^*) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu^*, x^*) = 0$. En este caso se dice que (μ^*, x^*) es un *punto singular*.

4.6. Elección óptima de parámetros

Consideremos una población de peces que sigue un modelo logístico, y supongamos que la tasa de captura es proporcional al tamaño de la población. La ecuación correspondiente es

$$\frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{N} \right) - ax,$$

donde $\alpha > 0$. El análisis de este modelo se realizó en la sección 4.4.2, donde vimos que los valores admisibles para α son los del intervalo $(0, k)$ (en caso contrario, la población se extinguía).

Para una política de captura a largo plazo, un posible criterio sería el de maximizar la *tasa de captura estabilizada*. Veamos qué significa esto. Elegido un valor $\alpha \in (0, k)$, sabemos que la población tiende a estabilizarse en un equilibrio que denotaremos como $x^*(\alpha)$. Entonces la tasa de captura αx tenderá a estabilizarse en el valor $\alpha x^*(\alpha)$. Vimos en la sección 4.4.2 que

$$x^*(\alpha) = N \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right),$$

por lo que la función a maximizar sería

$$B(\alpha) = \alpha N \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right), \quad \alpha \in [0, k].$$

Es inmediato comprobar que el valor óptimo del parámetro es

$$\alpha = \frac{k}{2}.$$

Otro criterio podría ser el de maximizar los *beneficios estabilizados*. Sea P el precio en el mercado de la unidad de población. Dado α , podemos determinar la tasa de captura estabilizada $\alpha x^*(\alpha)$, y definir la *ganancia estabilizada* por unidad de tiempo como

$$P\alpha x^*(\alpha).$$

Por otra parte, supondremos que los *costes* son proporcionales a α , esto es, $Q\alpha$. Teniendo en cuenta que los beneficios se calculan como las ganancias menos los costes, la función a maximizar en este caso sería

$$C(\alpha) = P\alpha x^*(\alpha) - Q\alpha = P\alpha N \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right) - Q\alpha, \quad \alpha \in [0, k].$$

Notemos que el máximo de $C(\alpha)$ se da en el punto

$$\alpha = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{Q}{PN} \right),$$

que pertenece al intervalo admisible $(0, k)$ cuando $Q < PN$.

SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS DE VARIAS VARIABLES

5.1. Introducción

Este tema se centra en el estudio de sistemas dinámicos de la forma $(\Omega, \mathbb{R}, \varphi)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es conexo. El caso $n = 1$ ya lo estudiamos en el tema 3. De forma análoga a lo que ocurría entonces, cuando φ es diferenciable con respecto a t , existe una única ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}),$$

con $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, para cada $\vec{x}_0 \in \Omega$, la única solución del problema de valor inicial

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), & t \in \mathbb{R}, \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \end{cases}$$

viene dada por $\varphi_{\vec{x}_0}: \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ definida como

$$\varphi_{\vec{x}_0}(t) = \varphi(t, \vec{x}_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La función \vec{f} es, necesariamente,

$$\vec{f}(\vec{x}) = \partial_t \varphi(0, \vec{x}).$$

Usaremos la siguiente notación:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

De esta forma, la ecuación $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ equivale al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Cuando $n = 2$, usaremos la notación $\vec{x} = (x, y)^t$ en lugar de $\vec{x} = (x_1, x_2)^t$.

Recíprocamente, si tenemos una función de Lipschitz $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y llamamos $\varphi_{\vec{x}_0}: \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ a la única solución del problema (P), entonces podemos definir un sistema dinámico $(\Omega, \mathbb{R}, \varphi)$, donde el flujo $\varphi: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ viene dado por

$$\varphi(t, \vec{x}_0) = \varphi_{\vec{x}_0}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \vec{x}_0 \in \Omega.$$

Observación 5.1. Cuando la función \vec{f} es solo de Lipschitz local, tiene asociado un sistema dinámico local, según la definición vista en el tema anterior. \square

La *órbita* o *trayectoria* de un punto $\vec{x}_0 \in \Omega$ es el conjunto¹

$$\gamma_{\vec{x}_0} = \{\varphi_{\vec{x}_0}(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

El punto \vec{x}_0 es un *equilibrio* si y solo si

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0},$$

esto es, la órbita correspondiente es estacionaria (no varía con el tiempo). Los puntos de equilibrio corresponden a las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 5.1. Supongamos que los individuos de dos especies, x e y , siguen el siguiente modelo:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

Al tratarse de un modelo de poblaciones, tanto x como y deben ser no negativas: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

¿Qué tipo de relación se produce entre ambas especies? Para verlo, fijémonos en primer lugar en que en ausencia de la especie y , la especie x seguiría un crecimiento malthusiano: $x' = 2x$. Lo mismo ocurriría con y en ausencia de x : $y' = y$. Por otra parte, el término $-2y$ en la primera ecuación hace que el ritmo de crecimiento de la especie x , x' , sea menor que el que

¹Recuérdese que con el término *órbita* nos referimos indistintamente a la aplicación $\varphi_{\vec{x}_0}$ o a su imagen $\gamma_{\vec{x}_0}$.

habría en ausencia de y . Lo mismo sucede en la segunda ecuación: el término $-x$ hace que disminuya el ritmo de crecimiento y' . Por tanto, podemos decir que se trata de una relación de *competencia* entre ambas especies (por ejemplo, por el alimento o por el espacio vital).

¿Cuáles son los equilibrios del sistema? Serían las soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$$

Por tanto, hay infinitos puntos de equilibrio, todos de la forma (x_0, x_0) , con $x_0 \geq 0$.

Vamos a determinar ahora la órbita de un punto arbitrario, digamos $(2, 1)$. Para ello, consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -x + y, \\ x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Una forma sencilla de resolverlo consiste en transformarlo en un problema para una ecuación de segundo orden. Derivando en la primera ecuación y sustituyendo y' e y usando la segunda ecuación, obtenemos

$$x'' = 2x' - 2y' = 2x' - (-x + y) = 2x' + 2x - 2y = 2x' + 2x + (x' - 2x) = 3x' \Rightarrow x'' = 3x'.$$

Las raíces del polinomio característico $\lambda^2 = 3\lambda$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 3$. Por tanto, la solución general para la componente x sería

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 + C_2 e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando la primera ecuación, podemos determinar y :

$$x' = 2x - 2y \Rightarrow y = \frac{x - x'}{2} = C_1 - \frac{C_2}{2} e^{3t}.$$

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es, por tanto,

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 - \frac{C_2}{2} e^{3t}, \end{cases}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Por último, imponiendo las condiciones iniciales deducimos

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2 \\ y(0) = 1 \Rightarrow C_1 - \frac{C_2}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = \frac{4}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{3}.$$

La solución del problema de valores iniciales es entonces

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} e^{3t}, \\ y(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} e^{3t}. \end{cases}$$

Para representar gráficamente la órbita del punto $(2, 1)$, $\gamma_{(2,1)}$, podemos interpretar las expresiones obtenidas como las ecuaciones paramétricas de una curva. En este caso, es fácil pasar a la forma cartesiana (por ejemplo, despejando e^{3t} en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda), para obtener la recta

$$y = 2 - \frac{x}{2}.$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que todo punto $(x(t), y(t))$ de la órbita está sobre la recta $y = 2 - x/2$, pero no todo punto de la recta pertenece a la órbita. En primer lugar, solo hay que considerar aquellos puntos en los que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Por otra parte, notemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, -\infty), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

donde el punto $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ es un equilibrio. Así pues, la órbita $\gamma_{(2,1)}$ tiene la forma representada en la figura 5.1. Se deduce asimismo que el equilibrio $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ es inestable pero no repulsor, ya que en cualquier entorno del punto hay infinitos puntos de equilibrio.

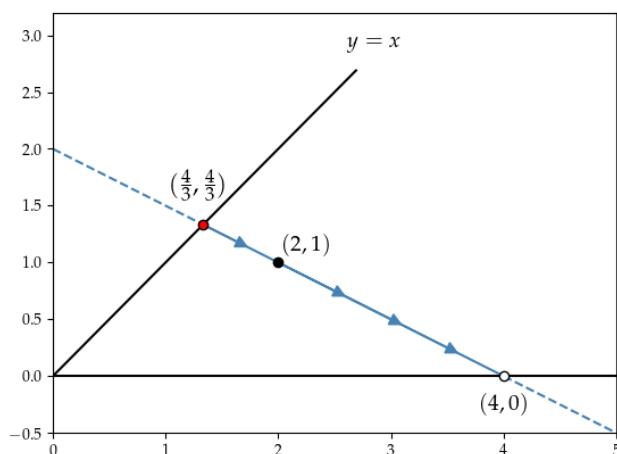


Figura 5.1: Órbita del punto $(2, 1)$ en el ejemplo 5.1.

¿Cuál es el comportamiento asintótico de las especies? Notemos que la recta $y = 2 - x/2$ corta al eje x en el punto $(4, 0)$. Por tanto, habrá un tiempo t^* en el que $x(t^*) = 4$ e $y(t^*) = 0$. Esto significa que en el tiempo t^* la especie y se extingue (extinción en tiempo finito); a partir de este tiempo, el modelo deja de ser válido porque aparecen valores negativos para y . Podemos calcular el valor de t^* :

$$y(t^*) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{3}e^{3t^*} = 0 \Rightarrow t^* = \frac{\ln(4)}{3} \approx 0.46.$$

Por tanto, el modelo considerado será válido en el intervalo temporal $[0, t^*]$. En el tiempo t^* la especie x alcanza su valor máximo 4, mientras que la especie y se extingue. Desde un punto de vista matemático, olvidándonos de la interpretación de las ecuaciones como modelo

de poblaciones, el dominio temporal es \mathbb{R} , la órbita $\gamma_{(2,1)}$ «proviene»² del equilibrio $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ y tiende hacia $(\infty, -\infty)$.

Los cálculos anteriores pueden hacerse de forma análoga para un punto (x_0, y_0) arbitrario. En este caso, la ecuación cartesiana que se obtiene para las órbitas es

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_1 + C_2 e^{3t} \\ y(t) &= C_1 - \frac{C_2}{2} e^{3t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + 2y = 3C_1,$$

es decir, la familia de rectas paralelas con pendiente $-\frac{1}{2}$. Cada una de estas rectas consta de tres órbitas: un equilibrio (situado en la intersección con la recta $y = x$) y dos semirrectas, cuya orientación dependerá del signo de C_2 . Dentro del modelo solo tienen sentido lo que sucede en el primer cuadrante. El diagrama de fases resultante se ha representado en la figura 5.2.

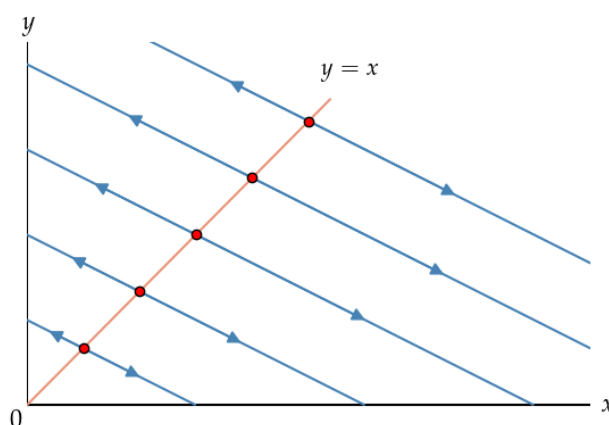


Figura 5.2: Diagrama de fases del ejemplo 5.1.

A partir del diagrama de fases podemos deducir varias cosas. En primer lugar, cada equilibrio (x_0, x_0) es inestable pero no repulsor. En términos de especies, si las poblaciones iniciales son iguales entonces permanecerán iguales para siempre. Por otro lado, si $x_0 > y_0$ entonces la población y se extingue en tiempo finito; a partir de ese tiempo, el modelo se reduce a $x' = 2x$. De forma análoga, si $x_0 < y_0$ entonces la población x se extingue en tiempo finito y , a partir de ese tiempo, el modelo se reduce a $y' = y$. \square

5.2. Exponencial de una matriz

Vamos a recordar algunos conceptos básicos sobre la exponencial de una matriz, que nos serán de utilidad en las siguientes secciones.

²Cuando decimos que la órbita «proviene» del equilibrio, significa que la órbita tiende al punto de equilibrio cuando $t \rightarrow -\infty$.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define la *exponencial* de A como

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots + \frac{1}{m!} A^m + \cdots$$

donde $A^0 = I$ es la matriz identidad. La serie anterior es siempre convergente, por lo que e^A está bien definida para cualquier matriz A . Además, $\det(e^A) \neq 0$, por lo que e^A es invertible; su inversa viene dada por e^{-A} .

Un caso simple, pero muy importante, es cuando A es una matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Es fácil demostrar por inducción que, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, se verifica

$$A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_n^2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} a_1^m & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_n^m & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \cdots + \frac{a_1^m}{m!} + \cdots & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 + a_n + \frac{a_n^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n^m}{m!} + \cdots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{a_n} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma, la exponencial de una matriz diagonal es otra matriz diagonal, cuyos elementos son las exponenciales de los elementos diagonales de la matriz original.

Otro caso importante es el de una matriz diagonalizable. Se dice que A es *diagonalizable* si existen una matriz diagonal Λ y una matriz invertible P , tales que

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

En tal caso, es sencillo demostrar por inducción que

$$A^m = P\Lambda^m P^{-1},$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$. De esta forma,

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \cdots + \frac{1}{m!} A^m + \cdots = I + P\Lambda P^{-1} + \frac{1}{2!} P\Lambda^2 P^{-1} + \cdots + \frac{1}{m!} P\Lambda^m P^{-1} + \cdots \\ &= P \left(I + \Lambda + \frac{1}{2!} \Lambda^2 + \cdots + \frac{1}{m!} \Lambda^m + \cdots \right) P^{-1} = P e^\Lambda P^{-1}. \end{aligned}$$

Al ser Λ diagonal, e^Λ es fácilmente calculable. En resumen,

$$e^{P\Lambda P^{-1}} = Pe^\Lambda P^{-1}.$$

Observación 5.2. Cuando A es diagonalizable, existe una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de manera que la expresión de A en dicha base es la matriz diagonal Λ ; la matriz de cambio de base es precisamente P . Llamemos λ_i a los elementos de la diagonal de Λ . La expresión del vector \vec{v}_1 en la base \mathcal{B} sería $P^{-1}\vec{v}_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $A\vec{v}_1$ se escribe entonces en dicha base como $\Lambda P^{-1}\vec{v}_1 = (\lambda_1, 0, \dots, 0) = \lambda_1(1, 0, \dots, 0)$; por último, deshacemos el cambio de base multiplicando por P , obteniéndose así $\lambda_1\vec{v}_1 = P\Lambda P^{-1}\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$. Esto muestra que, necesariamente, λ_1 tiene que ser un autovalor de A y \vec{v}_1 es un autovector asociado:

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1.$$

El mismo razonamiento se aplicaría para cualesquiera λ_i y \vec{v}_i , $i = 1, \dots, n$. En resumen, una matriz es diagonalizable si y solo si existe una base formada por autovectores. \square

Un caso especial es el de una matriz A cuyos autovalores son todos reales y distintos. En tal caso, A es diagonalizable: Λ está formada por los autovalores de A , y las columnas de P son autovectores asociados a los autovalores (en el mismo orden en que aparecen en Λ). Concretamente, si $\lambda_i \in \mathbb{R}$ son los autovalores de A , distintos dos a dos, y $\vec{v}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})^t$ es un autovector asociado a λ_i , se tiene que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \cdots | \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.2. Calculemos la exponencial de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de A son las soluciones de la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3.$$

Por tanto,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora necesitamos autovectores asociados a cada uno de los autovalores: para ello se determina \vec{x}_i tal que $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$, para $i = 1, 2$. Por ejemplo, podemos tomar

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Por último, la exponencial de A viene dada por

$$e^A = e^{P\Lambda P^{-1}} = Pe^{\Lambda}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^3 & 2 - 2e^3 \\ 1 - e^3 & 2 + e^3 \end{pmatrix}.$$

□

5.3. Sistemas dinámicos lineales

En esta sección vamos a centrarnos en el estudio de los sistemas dinámicos definidos por ecuaciones diferenciales lineales. Consideremos pues un sistema lineal de la forma

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

donde $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^t$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dado un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, la solución del problema de valor inicial

$$(PL) \quad \begin{cases} \vec{x}' = A\vec{x}, \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \end{cases}$$

viene dada por

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0.$$

Ejemplo 5.3. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -x + y, \end{cases}$$

cuya solución general ya determinamos en el ejemplo 5.1. En este caso, el sistema puede escribirse como $\vec{x}' = A\vec{x}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz que estudiamos en el ejemplo 5.2. Se tiene entonces que

$$e^{At} = e^{P(\Lambda t)P^{-1}} = Pe^{\Lambda t}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{3t} & 2 - 2e^{3t} \\ 1 - e^{3t} & 2 + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma, la solución del problema (PL) con $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ sería

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{3t} & 2 - 2e^{3t} \\ 1 - e^{3t} & 2 + e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{x_0 + 2y_0}{3} + \frac{2x_0 - 2y_0}{3} e^{3t}, \\ y(t) = \frac{x_0 + 2y_0}{3} + \frac{-x_0 + y_0}{3} e^{3t}. \end{cases}$$

Si llamamos $C_1 = (x_0 + 2y_0)/3$ y $C_2 = (2x_0 - 2y_0)/3$, vemos que la expresión anterior de la solución coincide con la vista en el ejemplo 5.1. □

Veamos a continuación otra forma de escribir la solución general del sistema lineal, en el caso en que A sea diagonalizable. En primer lugar, dado $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, escribimos

$$P^{-1}\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= Pe^{\Lambda t}P^{-1}\vec{x}_0 = (\vec{v}_1 | \cdots | \vec{v}_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = (e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 | \cdots | e^{\lambda_n t}\vec{v}_n) \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n. \end{aligned}$$

Esto es, cuando A es diagonalizable la solución general del sistema lineal $\vec{x}' = A\vec{x}$ viene dada por

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n,$$

donde, para $i = 1, \dots, n$, λ_i es un autovalor de A , \vec{v}_i es un autovector asociado a λ_i , y $C_i \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

Ejemplo 5.4. Volviendo al ejemplo 5.2, tendríamos que

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - 2C_2 e^{3t} \\ C_1 + C_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

□

Terminamos este apartado recopilando algunos resultados útiles para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- Si A es simétrica entonces es diagonalizable y todos sus autovalores son reales.
- A es diagonalizable si y solo si existe una base formada por autovectores de A .
- Si A posee n autovalores reales distintos, entonces A es diagonalizable.

5.4. Clasificación de los sistemas lineales en el plano

Debido a que la solución de un sistema de ecuaciones lineales siempre puede determinarse de forma explícita, es factible hacer un estudio de todos los posibles diagramas de fases que puede tener un sistema dinámico lineal. En este apartado nos centraremos en sistemas lineales en el plano³, esto es,

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Nótese que el origen $\vec{0}$ es siempre un equilibrio, que es único cuando $\det(A) \neq 0$.

³El estudio de sistemas de orden superior está fuera del alcance de este curso.

A lo largo de esta sección usaremos la notación habitual: λ_i será un autovalor de la matriz $A = (a_{ij})$ y \vec{v}_i será un autovector asociado, para $i = 1, 2$. Nótese que $\lambda_i \in \mathbb{C}$ en general.

Antes de comenzar con la clasificación de los posibles casos, vamos a dar unas indicaciones que nos serán de utilidad más adelante. Supongamos que los autovalores λ_i son reales; en tal caso, vimos en la sección anterior que la solución general del sistema tiene la forma

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Consideremos ahora una solución en la que $C_2 = 0$, esto es, $\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$. La curva que representa la solución en el plano de fases está sobre la recta r_1 que pasa por el origen y tiene a \vec{v}_1 como vector director. Tenemos entonces tres posibilidades:

- $\lambda_1 > 0$. En este caso, la recta r_1 consta de tres órbitas: el equilibrio $\vec{0}$ y las dos semirrectas restantes. Al ser λ_1 positivo las dos trayectorias se alejan del origen, y se acercan a él cuando $t \rightarrow -\infty$: véase la figura 5.3 (izquierda). Deducimos que $\vec{0}$ es inestable; sin embargo, no podemos afirmar que sea repulsor, ya que no conocemos el comportamiento de las órbitas cercanas.
- $\lambda_1 < 0$. De nuevo la recta r_1 contiene tres órbitas: el equilibrio $\vec{0}$ y las dos semirrectas restantes, pero estas ahora tienden a $\vec{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$: véase la figura 5.3 (derecha). En principio, no podemos afirmar nada sobre la estabilidad de $\vec{0}$.
- $\lambda_1 = 0$. Ahora toda solución es constante, es decir, cada punto de la recta r_1 es un equilibrio.

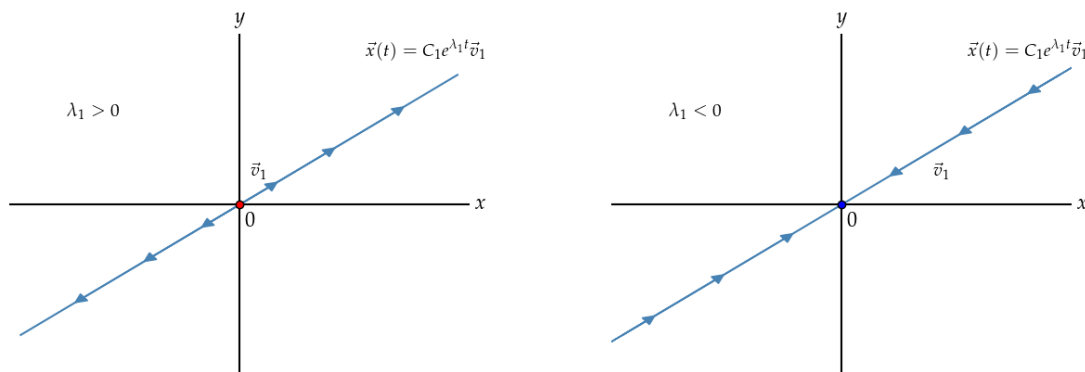


Figura 5.3: Órbitas en el caso $C_2 = 0$. Izquierda: $\lambda_1 > 0$. Derecha: $\lambda_1 < 0$.

Razonaríamos de forma análoga para una solución de la forma $\vec{x}(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$. Denotaremos por r_2 a la recta que pasa por el origen y tiene a \vec{v}_2 como vector director.

Ya podemos proceder con el análisis de casos para el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, donde la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no es necesariamente diagonalizable. Se tienen tres casos:

- A tiene autovalores reales y distintos.

- A posee autovalores complejos conjugados.
- A tiene un autovalor real doble.

Dentro de cada uno de estos casos, tenemos varias posibilidades. A continuación examinaremos cada una de ellas en detalle⁴.

• **Caso I:** A posee dos autovalores reales y distintos, $\lambda_1 < \lambda_2$.

En este caso, A es diagonalizable. Si ningún autovalor es 0, entonces $\vec{0}$ es el único⁵ equilibrio. Distinguiremos varios casos.

◦ **Caso I.1:** $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Recordemos que la solución general del sistema era

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para $C_1 = 0$ o $C_2 = 0$ hemos visto anteriormente que, además del origen, tenemos cuatro órbitas correspondientes a las semirrectas que pasan por el origen y tienen como vectores directores a \vec{v}_2 y \vec{v}_1 , respectivamente. Es decir, se tienen dos direcciones principales linealmente independientes determinadas por los autovectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , que dan lugar a cinco órbitas (incluyendo el equilibrio). Vimos también que, al ser los autovalores positivos, las órbitas correspondientes a las cuatro semirrectas se alejan del origen cuando $t \rightarrow \infty$ y tienden a él cuando $t \rightarrow -\infty$.

Supongamos ahora que $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$. Teniendo en cuenta la forma de la solución general, las órbitas tienden a $\pm\infty$ en cada dirección cuando $t \rightarrow \infty$, y los vectores tangentes tienden a ser paralelos a \vec{v}_2 . Para verlo⁶, basta con tener en cuenta que para $t > 0$ suficientemente grande, el término $C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$ es despreciable frente a $C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$ (ya que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$), con lo que el comportamiento de la solución será similar al del término $C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$; por tanto, las componentes de la solución tenderán a $\pm\infty$ (dependiendo de la dirección de \vec{v}_2 y el signo de C_2) y la dirección de los vectores tangentes a la órbita tenderá hacia \vec{v}_2 . De forma análoga, cuando $t \rightarrow -\infty$ las órbitas tienden a $\vec{0}$, acercándose asintóticamente a la recta r_1 . En consecuencia, el equilibrio $\vec{0}$ es inestable y repulsor universal. El dominio de estabilidad de $\vec{0}$ es $S_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$, y su dominio de inestabilidad es $U_{\vec{0}} = \mathbb{R}^2$.

La configuración del diagrama de fases, que puede verse en la figura 5.4 (izquierda) recibe el nombre de *nodo inestable* (en inglés, *unstable node* o *source*). A veces también se le llama *nodo propio inestable*, para distinguirlo de otros tipos de nodos que veremos más adelante.

⁴Nótese que la solución general de un sistema lineal puede calcularse de forma exacta, por lo que es posible determinar la configuración del diagrama de fases en cualquier caso. Sin embargo, un análisis pormenorizado es bastante tedioso de realizar. Por ello, nos conformaremos con dar unas ideas generales.

⁵Ya que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$.

⁶Esta idea podría formalizarse estudiando el comportamiento de la diferencia entre las órbitas y las rectas que determinan las direcciones principales.

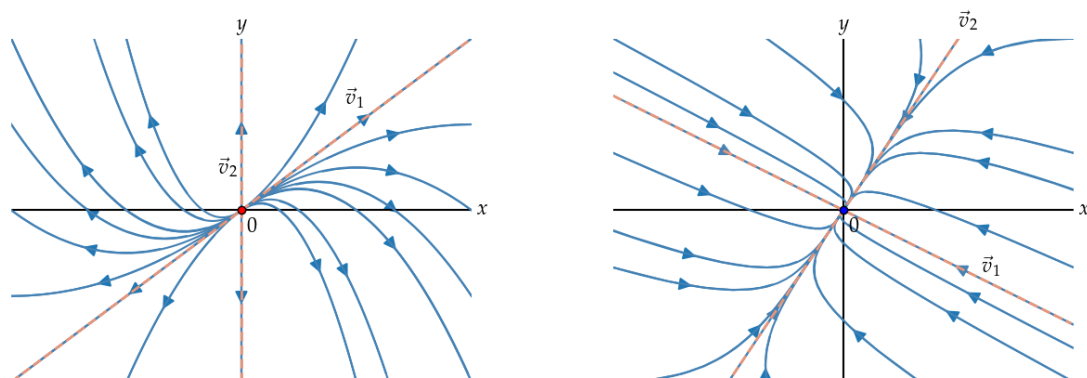


Figura 5.4: Izquierda: nodo inestable (caso I.1). Derecha: nodo estable (caso I.2). Se han destacado las direcciones principales correspondientes a los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Ejemplo 5.5. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$$

La matriz del sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, por lo que la configuración del diagrama de fases será un nodo inestable. Las direcciones principales vienen dadas por los autovectores asociados $\vec{v}_1 = (1, 1)^t$ y $\vec{v}_2 = (0, 1)^t$.

En este caso podemos describir las órbitas que conforman el diagrama de fases de manera más precisa. Para ello, notemos que la solución general del sistema es de la forma

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t, \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias. El punto de equilibrio $(0, 0)$ se obtiene para los valores $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Para $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$, se tiene que $x = 0$ e $y = C_2 e^{2t}$. Si $C_2 > 0$ entonces $y > 0$; además, $y \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que $y \rightarrow 0$ si $t \rightarrow -\infty$. La órbita correspondiente consiste en el semieje y positivo, orientado en el sentido creciente de y . De forma análoga, la órbita correspondiente a $C_2 < 0$ consiste en el semieje y negativo, orientado en el sentido decreciente de y . Gráficamente, en ambos casos la órbita «sale» del origen.

Si $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$, tenemos $x = C_1 e^t$ e $y = C_1 e^t$, por lo que $y = x$; esto indica que las órbitas correspondientes estarán sobre la recta $y = x$. Para $C_1 > 0$ se tiene que $x = y > 0$, por lo que la órbita estará en el primer cuadrante. Se verifica que $x = y \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, mientras que $x = y \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$. La órbita obtenida es la semirrecta $y = x$ contenida en el primer cuadrante, orientada en sentido creciente (hacia el noreste). Para $C_1 < 0$ se obtiene la semirrecta $y = x$ en el cuarto cuadrante, orientada en sentido decreciente (hacia el suroeste).

Supongamos ahora que $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$. Teniendo en cuenta que $x = C_1 e^t$, podemos escribir

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} = C_1 e^t + \frac{C_2}{C_1^2} (C_1 e^t)^2 = x + \frac{C_2}{C_1^2} x^2.$$

Por tanto, las órbitas estarán sobre parábolas de la forma $y = x + Cx^2$, con $C \neq 0$ constante. Cada una de estas parábolas pasa por $(0,0)$, y es claro que $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$, por lo que todas las órbitas salen del origen. Cada parábola consta pues de tres órbitas: el equilibrio $(0,0)$ y los dos trozos de parábola restantes, que salen del origen. El diagrama de fases se ha representado en la figura 5.4 (izquierda). \square

◦ **Caso I.2:** $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Este caso es totalmente análogo al caso I.1, pero invirtiendo la orientación de las órbitas y el papel de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Se tiene que el equilibrio $\vec{0}$ es asintóticamente estable y atractor universal. El dominio de estabilidad de $\vec{0}$ es $S_{\vec{0}} = \mathbb{R}^2$, y su dominio de inestabilidad es $U_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$. El diagrama de fases se ha representado en la figura 5.4 (derecha), y se denomina *nodo estable* (en inglés, *stable node* o *sink*).

Ejemplo 5.6. El diagrama de fases de la figura 5.4 (derecha) corresponde al sistema lineal

$$\begin{cases} x' = -8x + 3y, \\ y' = 4x - 4y. \end{cases}$$

Los autovalores de la matriz del sistema son $\lambda_1 = -10$ y $\lambda_2 = -2$, por lo que el diagrama de fases es un nodo estable. Las direcciones principales vienen determinadas por los autovectores $\vec{v}_1 = (3, -2)^t$ y $\vec{v}_2 = (1, 2)^t$. \square

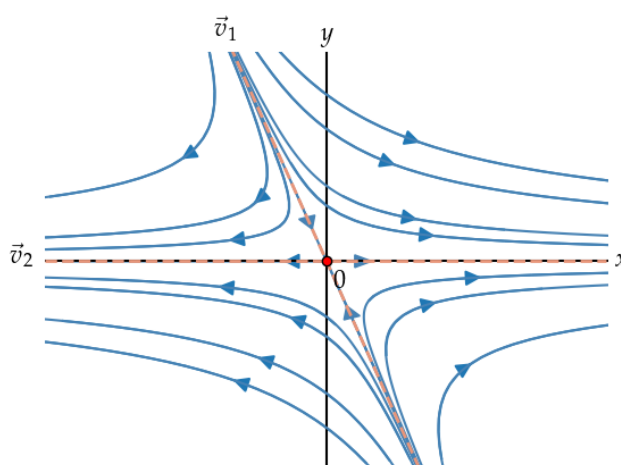


Figura 5.5: Punto de silla (caso I.3).

◦ **Caso I.3:** $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

En este caso, sobre la recta r_1 tenemos dos órbitas que tienden hacia $\vec{0}$ (por ser $\lambda_1 < 0$), mientras que sobre r_2 tenemos dos órbitas que se alejan del origen (por ser $\lambda_2 > 0$). De esta forma, el equilibrio $\vec{0}$ es inestable, pero no es repulsor ni atractor. Los dominios de atracción

y repulsión son, respectivamente, $S_{\vec{0}} = \langle \vec{v}_1 \rangle = \{c\vec{v}_1 : c \in \mathbb{R}\}$ (variedad estable) y $U_{\vec{0}} = \langle \vec{v}_2 \rangle$ (variedad inestable).

El comportamiento de las demás órbitas se analiza de forma similar a como se hizo en el caso I.1. Cuando $t \rightarrow \infty$ el término dominante es el correspondiente a \vec{v}_2 , por lo que la solución tenderá asintóticamente a la recta r_2 . Análogamente, las órbitas tenderán a la recta r_1 cuando $t \rightarrow -\infty$. La configuración resultante del diagrama de fases, que puede verse en la figura 5.5, se denomina *punto de silla* (en inglés, *saddle*).

Ejemplo 5.7. Un ejemplo de punto de silla nos lo proporciona el diagrama de fases del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -y. \end{cases}$$

En este caso los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, y como autovectores asociados podemos tomar $\vec{v}_1 = (1, -3)^t$ y $\vec{v}_2 = (1, 0)^t$, respectivamente. Al ser $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, efectivamente tenemos un punto de silla (caso I.3), cuyas variedades estable e inestable vienen determinadas por los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Podemos precisar un poco más la forma del diagrama de fases. Para ello, consideremos la solución general del sistema, que viene dada por

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y(t) = -3C_1 e^{-t}. \end{cases}$$

Para $C_1 = 0$, tenemos que $x = C_2 e^{2t}$ e $y = 0$. Determinamos así la variedad inestable, asociada a \vec{v}_2 , que está formada por el semieje x positivo (orientado hacia la derecha; corresponde a $C_2 > 0$) y el semieje x negativo (orientado hacia la izquierda; corresponde a $C_2 < 0$), separados por el punto de equilibrio $(0, 0)$.

Al considerar $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$, resulta que $x = C_1 e^{-t}$ e $y = -3C_1 e^{-t}$, de donde $y = -3x$. El origen divide a esta recta en dos órbitas que tienden al punto de equilibrio. La recta $y = -3x$ determina la variedad estable, asociada a \vec{v}_1 .

Supongamos por último que $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$. De $y = -3C_1 e^{-t}$ tenemos que $e^{-t} = -\frac{y}{3C_1}$; por tanto,

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} = C_1 \left(-\frac{y}{3C_1} \right) + C_2 \left(-\frac{3C_1}{y} \right)^2 = -\frac{y}{3} + \frac{9C_1^2 C_2}{y^2}.$$

En consecuencia, las órbitas corresponden a las ramas de las curvas definidas por la ecuación

$$x = -\frac{y}{3} + \frac{C}{y^2}, \quad C \neq 0.$$

Su sentido viene determinado por el sentido de las órbitas que forman las variedades estable e inestable. El diagrama de fases se ha representado en la figura 5.5. \square

o **Caso I.4:** $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$.

La solución general del sistema es ahora

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que para $C_2 = 0$ y $C_1 \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución constante, de la forma $\vec{x}(t) = C_1 \vec{v}_1$; esto indica que todos los puntos de la recta r_1 determinada por \vec{v}_1 y el origen son equilibrios. Por otra parte, si $C_2 \neq 0$ la expresión para $\vec{x}(t)$ puede interpretarse como la parametrización de una recta con vector director \vec{v}_2 . Por tanto, sobre cada una de estas rectas tendremos, además del equilibrio correspondiente al corte con la recta r_1 , dos órbitas que se alejan de dicho equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$ y tienden a él cuando $t \rightarrow -\infty$ (ya que $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = C_1 \vec{v}_1$, por ser $\lambda_2 > 0$). En particular, el equilibrio $\vec{0}$ es inestable pero no es repulsor ni atractor; se tiene que $S_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$ y $U_{\vec{0}} = \langle \vec{v}_2 \rangle$. El diagrama de fases se ha representado en la figura 5.6 (izquierda).

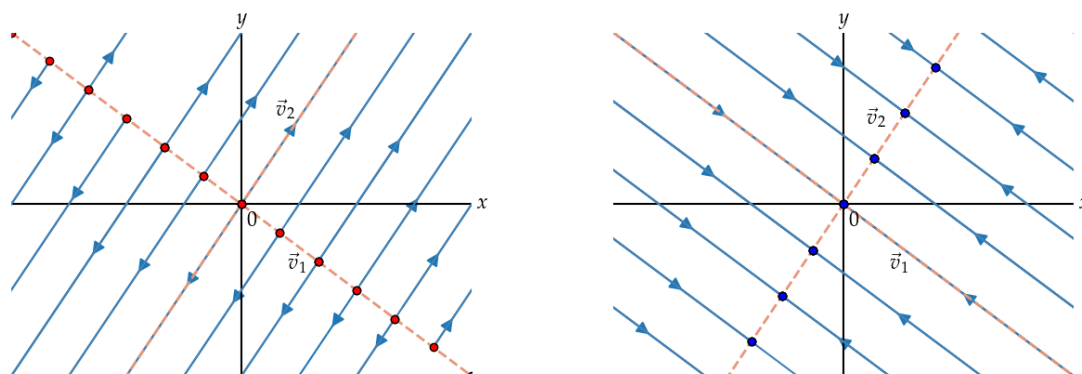


Figura 5.6: Izquierda: recta de equilibrios inestables (caso I.4). Derecha: recta de equilibrios estables (caso I.5).

Ejemplo 5.8. El diagrama de fases de la figura 5.6 (izquierda) corresponde al sistema lineal

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 3$. El autovector $\vec{v}_1 = (1, -1)^t$ determina la recta de puntos de equilibrio, mientras que el autovector $\vec{v}_2 = (1, 2)^t$ nos da la dirección del resto de órbitas.

En efecto, la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{3t}, \\ y(t) = -C_1 + 2C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Para $C_2 = 0$ se obtiene un equilibrio de la forma $(C_1, -C_1)$, para cada $C_1 \in \mathbb{R}$; por tanto, la recta $y = -x$ está formada por equilibrios. Si $C_2 \neq 0$ tenemos que $C_2 e^{3t} = x - C_1$, de donde

$$y = -C_1 + 2C_2 e^{3t} = -C_1 + 2C_2(x - C_1) = 2x - 3C_1 \Rightarrow y = 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Cada recta $y = 2x + C$ consta de tres órbitas: un equilibrio (en la intersección con la recta $y = -x$) y dos semirrectas; cuando $t \rightarrow -\infty$, las órbitas tienden al equilibrio correspondiente. En consecuencia, cada uno de los equilibrios es inestable (pero no repulsor). \square

◦ **Caso I.5:** $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$.

Este caso es análogo al caso I.4, invirtiendo el papel de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Ahora la recta r_2 está formada por equilibrios y las órbitas correspondientes a las semirrectas tienden al correspondiente equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$. En particular, $\vec{0}$ es estable pero no asintóticamente estable; se tiene que $S_{\vec{0}} = \langle \vec{v}_1 \rangle$ y $U_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$. En la figura 5.6 (derecha) puede verse el diagrama de fases correspondiente.

• **Caso II:** A posee autovalores complejos, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

En este caso, el único equilibrio del sistema es $\vec{0}$, y la solución general tiene la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha t} (C_1(\cos(\beta t)\vec{v} - \sin(\beta t)\vec{w}) + C_2(\sin(\beta t)\vec{v} + \cos(\beta t)\vec{w})), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donde $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ son tales que $\vec{v} \pm \vec{w}i$ son autovectores del sistema⁷. Tenemos que considerar varias posibilidades:

◦ **Caso II.1:** $\alpha = 0$.

Los autovalores son imaginarios puros: $\lambda_1 = \beta i$ y $\lambda_2 = -\beta i$. Para cada $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tenemos una solución de la forma

$$\vec{x}(t) = (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))\vec{v} + (-C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t))\vec{w},$$

que representa una órbita periódica de periodo $2\pi/\beta$, cuya orientación depende de la orientación de la base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$. El equilibrio $\vec{0}$ es estable, pero no asintóticamente estable. Se tiene

⁷Para verlo, lo más cómodo es estudiar las soluciones en el plano complejo, es decir, considerar el sistema $z' = Az$, donde $z(t) \in \mathbb{C}^2$ para cada $t \in \mathbb{R}$. La solución general del sistema tiene entonces la forma

$$\vec{z}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C},$$

donde $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{C}^2$ son autovectores asociados a λ_1 y λ_2 . Escribamos $\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{w}i$, con $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Es trivial comprobar que, si \vec{v}_1 es un autovector asociado a $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, entonces $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{w}i$ es un autovector asociado a $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. De esta forma, teniendo en cuenta que $e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + \sin(\beta t)i)$, resulta:

$$\begin{aligned} \vec{z}(t) &= C_1 e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + \sin(\beta t)i)(\vec{v} + \vec{w}i) + C_2 e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - \sin(\beta t)i)(\vec{v} - \vec{w}i) \\ &= C_1 e^{\alpha t} (\cos(\beta t)\vec{v} - \sin(\beta t)\vec{w} + i(\sin(\beta t)\vec{v} + \cos(\beta t)\vec{w})) \\ &\quad + C_2 e^{\alpha t} (\cos(\beta t)\vec{v} - \sin(\beta t)\vec{w} - i(\sin(\beta t)\vec{v} + \cos(\beta t)\vec{w})). \end{aligned}$$

Ahora, tomando $C_1 = C_2 = 1/2$ se obtiene

$$\vec{x}_1(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t)\vec{v} - \sin(\beta t)\vec{w}),$$

y tomando $C_1 = \frac{1}{2i} = -C_2$ resulta

$$\vec{x}_2(t) = e^{\alpha t} (\sin(\beta t)\vec{v} + \cos(\beta t)\vec{w}).$$

Deducimos que las soluciones reales son, por tanto, las combinaciones lineales reales de $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$.

que $S_0 = U_0 = \{\vec{0}\}$. La configuración del diagrama de fases puede verse en la figura 5.7, y se denomina *centro* (en inglés, *center*).

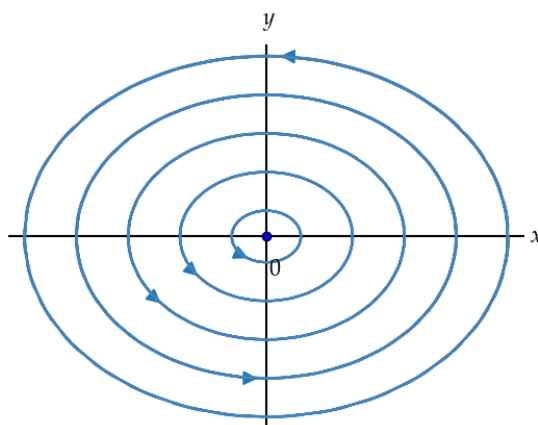


Figura 5.7: Centro (caso II.1).

Ejemplo 5.9. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -4y, \\ y' = x, \end{cases}$$

cuyos autovalores son de la forma $\pm 2i$. Por tanto, la configuración del diagrama de fases corresponde a un centro (caso II.1).

Veamos con más detalle cómo son las órbitas. Para ello, consideremos la solución general del sistema, que viene dada por

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t), \\ y(t) = \frac{1}{2}(C_1 \sin(2t) - C_2 \cos(2t)). \end{cases}$$

Notemos que

$$x^2 + 4y^2 = (C_1^2 + C_2^2)(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) = C_1^2 + C_2^2 \equiv C^2,$$

lo que significa que cada órbita distinta del origen está sobre una elipse de ecuación

$$x^2 + 4y^2 = C^2,$$

para cada $C \neq 0$. Como ninguna elipse contiene al punto de equilibrio, resulta que cada elipse es una órbita completa. Este tipo de órbita se denomina *cerrada* o *periódica*.

¿Cuál es el sentido de giro de las órbitas? Supongamos que $x > 0$ e $y > 0$; a partir de las ecuaciones, deducimos que $x' = -4y < 0$ e $y' = x > 0$, lo que significa que x decrece mientras que y crece. Por tanto, las órbitas se orientan en sentido contrario a las agujas del reloj.

El diagrama de fases resultante puede verse en la figura 5.7. □

o **Caso II.2:** $\alpha > 0$.

Ahora cada órbita es una espiral que se va alejando del origen conforme $t \rightarrow \infty$, y tiende a este cuando $t \rightarrow -\infty$. Nótese que la distancia de un punto de la órbita al origen depende de la exponencial $e^{\alpha t}$, que aumenta conforme $t \rightarrow \infty$ y tiende a cero cuando $t \rightarrow -\infty$. Por otra parte, los términos dependientes de α hacen que la órbita vaya girando alrededor del origen. Deducimos entonces que $\vec{0}$ es inestable y repulsor universal; se tiene que $S_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$ y $U_{\vec{0}} = \mathbb{R}^2$. El diagrama de fases se denomina *foco inestable* (en inglés, *unstable spiral* o *unstable focus*), y puede verse en la figura 5.8 (izquierda).

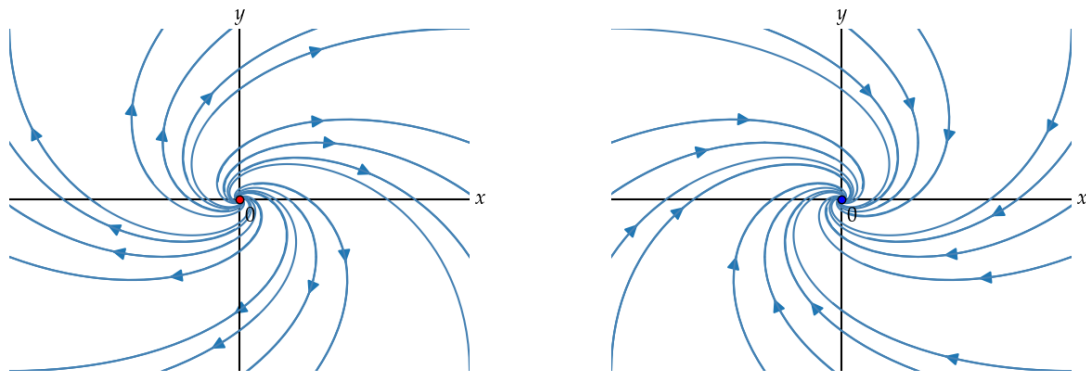


Figura 5.8: Izquierda: foco inestable (caso II.2). Derecha: foco estable (caso II.3).

Ejemplo 5.10. El sistema lineal

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + y, \end{cases}$$

tiene como autovalores $1 \pm i$. Por tanto, al ser $\alpha = 1 > 0$, el diagrama de fases es un foco inestable (caso II.2).

Vamos a analizar con un poco de detalle cómo son las órbitas del sistema. Para ello consideremos su solución general, que viene dada por

$$\begin{cases} x(t) = e^t(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)), \\ y(t) = e^t(-C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)). \end{cases}$$

La solución correspondiente a $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$ viene dada por la curva de componentes $x(t) = C_2 e^t \sin(t)$ e $y(t) = C_2 e^t \cos(t)$, cuya representación gráfica es una espiral que surge del origen. Para verlo, notemos que

$$x(t)^2 + y(t)^2 = C_2^2 e^{2t} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = C_2^2 e^{2t}.$$

Para cada valor de t , el punto $(x(t), y(t))$ está sobre la circunferencia de centro el origen y radio $|C_2|e^t$. Al ir variando el ángulo de giro t el radio va aumentando, por lo que los puntos $(x(t), y(t))$ van describiendo una espiral que se va alejando del origen. El número de

vueltas que da la espiral es infinito, ya que el ángulo t recorre todos los intervalos de la forma $[k, 2\pi + k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, $x(t)$ e $y(t)$ tienden a 0 cuando $t \rightarrow -\infty$, por lo que las órbitas parten del origen. Los restantes casos se tratan de manera similar. El diagrama de fases se ha representado en la figura 5.8 (izquierda).

Una forma alternativa de representar las soluciones en este caso consiste en escribir el sistema en coordenadas polares. Si llamamos

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \operatorname{sen} \theta(t),$$

es inmediato comprobar que

$$rr' = xx' + yy', \quad r^2\theta' = xy' - yx'$$

(véase la sección 5.7.1). Por tanto, supuesto $r \neq 0$, se tiene que

$$\begin{cases} rr' = xx' + yy' = x(x+y) + y(-x+y) = x^2 + y^2 = r^2, \\ r^2\theta' = xy' - yx' = x(-x+y) - y(x+y) = -(x^2 + y^2) = -r^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = r, \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

La solución general de la ecuación $r' = r$ es de la forma $r(t) = r_0 e^t$, con $r_0 > 0$. Esto indica que el radio tiende a infinito cuando $t \rightarrow \infty$, y tiende a cero cuando $t \rightarrow -\infty$. Por otra parte, al ser $\theta' = -1 < 0$, tenemos que el ángulo θ decrece cuando t aumenta, por lo que la órbita correspondiente girará en el sentido de las agujas del reloj. Este es precisamente el comportamiento observado en la figura 5.8 (izquierda). \square

◦ **Caso II.3:** $\alpha < 0$.

Este caso es análogo al anterior, pero ahora las órbitas tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$. El equilibrio $\vec{0}$ es asintóticamente estable y atractor universal; se tiene que $S_{\vec{0}} = \mathbb{R}^2$ y $U_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$. El diagrama de fases se denomina *foco estable* (en inglés, *stable spiral* o *stable focus*), y puede verse en la figura 5.8 (derecha).

• **Caso III:** A tiene un autovalor real doble λ .

Se presentan varios casos, dependiendo de si A es o no diagonalizable y del signo de λ .

◦ **Caso III.1:** A es diagonalizable y $\lambda > 0$.

En este caso podemos expresar A como $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda P I P^{-1} = \lambda I$, con lo que el sistema se reduce a $\vec{x}' = \lambda \vec{x}$. En particular, el único equilibrio es $\vec{0}$. ¿Cuáles son los autovectores? Para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ se verifica que $A\vec{v} = \lambda I\vec{v} = \lambda \vec{v}$, por lo que todos los vectores son autovectores. En consecuencia, cada recta que pasa por el origen consta de tres órbitas: el origen y dos semirrectas; como $\lambda > 0$, las órbitas tienden a $\vec{0}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. El equilibrio $\vec{0}$ es inestable y repulsor universal; se tiene que $S_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$ y $U_{\vec{0}} = \mathbb{R}^2$. El diagrama de fases correspondiente se denomina *nodo estrella inestable*⁸: véase la figura 5.9 (izquierda).

⁸Nótese que un nodo inestable (caso I.1) y un nodo estrella inestable (caso III.1) son topológicamente equivalentes, en el sentido de que las órbitas de un diagrama pueden deformarse continuamente en las del otro, manteniendo la orientación de las órbitas. Lo mismo puede decirse del caso estable.

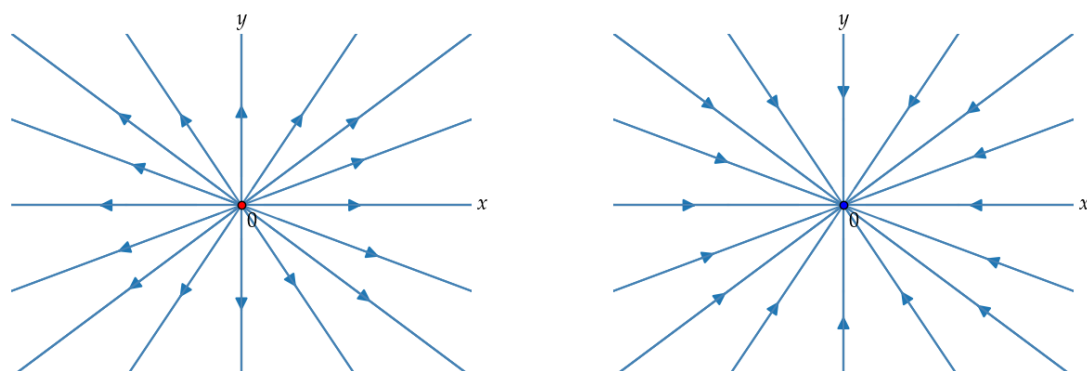


Figura 5.9: Izquierda: nodo estrella inestable (caso III.1). Derecha: nodo estrella estable (caso III.2).

Ejemplo 5.11. Un ejemplo de nodo estrella inestable lo proporciona el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

En efecto, la matriz del sistema tiene a $\lambda = 1$ como autovalor doble y es diagonalizable (de hecho, es diagonal).

La solución del sistema viene dada por

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t, \\ y(t) = C_2 e^t. \end{cases}$$

Si $C_1 \neq 0$, deducimos que las órbitas están sobre una recta de la forma $y = Cx$, con $C = C_2/C_1$ arbitraria. Cada recta consta del equilibrio $\vec{0}$ y dos semirrectas que tienden al origen cuando $t \rightarrow -\infty$. Las órbitas correspondientes al eje y se obtienen para $C_1 = 0$. El diagrama de fases se muestra en la figura 5.9 (izquierda). \square

◦ **Caso III.2:** A es diagonalizable y $\lambda < 0$.

Razonando como en el caso anterior, se deduce que todas las órbitas son semirrectas que convergen al equilibrio $\vec{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto, $\vec{0}$ es asintóticamente estable y atractor universal. El diagrama de fases, representado en la figura 5.9 (derecha), se denomina *nodo estrella estable*.

◦ **Caso III.3:** A no es diagonalizable y $\lambda > 0$.

En general, si A no es diagonalizable y tiene un único autovalor λ , existe una matriz invertible P tal que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La matriz P tiene la forma $P = (\vec{v}|\vec{w})$, donde \vec{v} es un autovector asociado a λ . En este caso, la solución general viene dada por⁹

$$\vec{x}(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}\vec{v} + C_2 e^{\lambda t}\vec{w}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

En particular, el único equilibrio es $\vec{0}$. Hay una única dirección principal r , determinada por el autovector \vec{v} (corresponde a tomar $C_2 = 0$): $\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{v}$. De esta forma, r consta de tres órbitas: el origen y dos semirrectas que, al ser $\lambda > 0$, tienden a $\vec{0}$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

El resto de órbitas tienden a seguir la dirección de \vec{v} cuando $t \rightarrow \pm\infty$, se acercan al origen cuando $t \rightarrow -\infty$, y a $\pm\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. El origen es un equilibrio inestable y repulsor universal. El diagrama de fases se ha representado en la figura 5.10 (izquierda), y se denomina *nodo degenerado (o impropio) inestable*¹⁰.

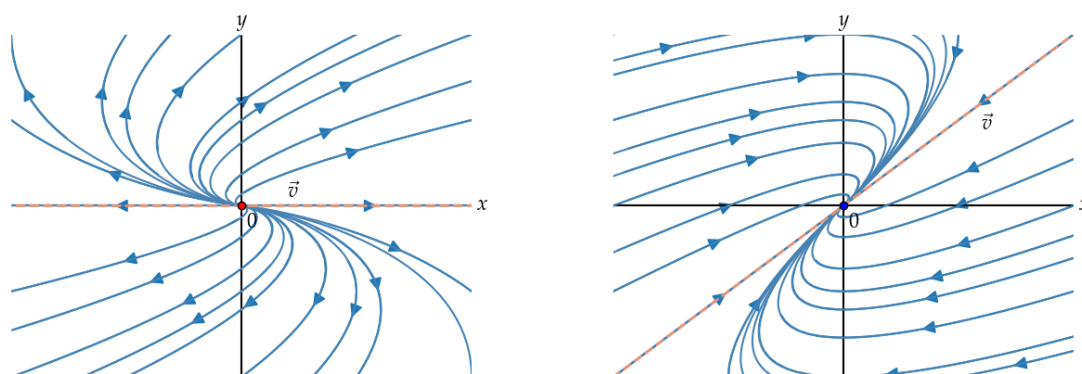


Figura 5.10: Izquierda: nodo degenerado inestable (caso III.3). Derecha: nodo degenerado estable (caso III.4).

⁹Para determinar la solución general del sistema necesitamos calcular $e^{At} = Pe^M P^{-1}$, donde $M = \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Recordemos que si dos matrices A y B conmutan, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$. Por tanto,

$$e^M = e^{\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Por un lado, $e^{\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}} = e^{\lambda t} I$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, a partir de la definición deducimos que la exponencial de $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De esta forma,

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Por último, dado $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ arbitrario y llamando $P^{-1}\vec{x}_0 = (C_1, C_2)^t$, la solución correspondiente es

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 = Pe^M P^{-1}\vec{x}_0 = (\vec{v}|\vec{w}) \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = (\vec{v}|\vec{w}) \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

de donde

$$\vec{x}(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}\vec{v} + C_2 e^{\lambda t}\vec{w}.$$

¹⁰Un nodo inestable (caso I.1), un nodo estrella inestable (caso III.1) y un nodo degenerado inestable (caso III.3) son topológicamente equivalentes. Lo mismo se aplica al caso estable.

Ejemplo 5.12. El diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y, \end{cases}$$

es un nodo degenerado inestable, ya que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable y el autovalor doble $\lambda = 1$ es positivo. En este caso, tenemos un autovector $\vec{v} = (1, 0)^t$.

Estudiamos las órbitas a partir de la solución del sistema, que viene dada por

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t, \\ y(t) = C_2 e^t. \end{cases}$$

Para $C_2 = 0$ obtenemos una parametrización del eje x , que consta de tres órbitas: el equilibrio $\vec{0}$ y dos semirrectas; esta es la dirección principal, correspondiente al vector \vec{v} . Para $C_2 \neq 0$ se obtiene la parametrización de una curva que contiene al origen y dos órbitas más. Estas órbitas tienden asintóticamente a $\vec{0}$ cuando $t \rightarrow -\infty$, tendiendo el vector tangente a \vec{v} . La figura 5.10 (izquierda) muestra el diagrama de fases correspondiente. \square

◦ **Caso III.4:** A no es diagonalizable y $\lambda < 0$.

En este caso el diagrama de fases es análogo al del caso anterior, pero invirtiendo la orientación de las órbitas. El origen es un equilibrio asintóticamente estable y atractor universal. En la figura 5.10 se ha representado el diagrama de fases, que se denomina *nodo degenerado (o impropio) estable*.

◦ **Caso III.5:** $\lambda = 0$.

Si la dimensión del núcleo de A es uno, y \vec{v} es un autovector asociado a 0, la solución general del sistema viene dada por

$$\vec{x}(t) = (C_1 + C_2 t)\vec{v} + C_2 \vec{w} = (C_1 \vec{v} + C_2 \vec{w}) + C_2 t \vec{v}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para $C_2 = 0$ se tiene $\vec{x}(t) = C_1 \vec{v}$, lo que significa que la recta r que pasa por el origen y tiene vector director \vec{v} está formada por equilibrios. El resto de las órbitas son rectas paralelas a r , cuya orientación depende del signo de C_2 . En este caso $\vec{0}$ es un equilibrio inestable y $S_{\vec{0}} = U_{\vec{0}} = \{\vec{0}\}$. El diagrama de fases correspondiente se ha representado en la figura 5.11; cada órbita corresponde a un movimiento uniforme.

Por último, notemos que cuando la dimensión del núcleo de A es dos, necesariamente A es la matriz nula y cada punto del plano es un equilibrio.

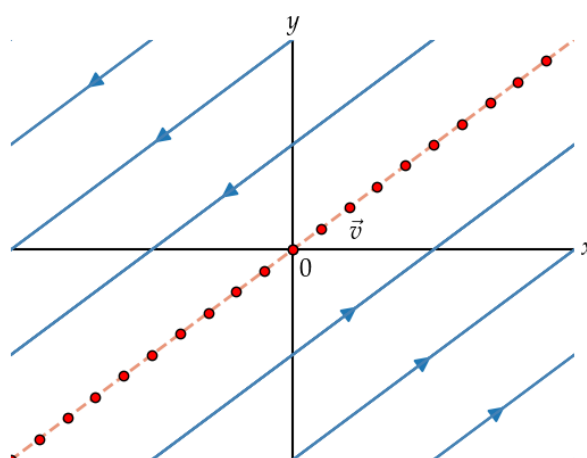


Figura 5.11: Diagrama de fases del caso III.5: movimiento uniforme.

Ejemplo 5.13. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x - y, \end{cases}$$

que tiene como autovalor $\lambda = 0$; un autovector asociado es $\vec{v} = (1, 1)^t$. Estamos en el caso III.5, por lo que tendremos una recta de puntos de equilibrio determinada por \vec{v} : en este caso, se trata de la recta $y = x$. El resto de órbitas son rectas paralelas a $y = x$, orientadas de forma distinta según si nos encontramos por encima o por debajo de $y = x$.

La solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 t, \\ y(t) = C_1 - C_2 + C_2 t. \end{cases}$$

Si $C_2 = 0$ obtenemos un equilibrio de la forma (C_1, C_1) , esto es, cada punto de la recta $y = x$ es un equilibrio. Si $C_2 \neq 0$, obtenemos que las órbitas están sobre la recta de ecuación $y = x - C_2$; como en dicha recta no hay ningún equilibrio, necesariamente toda la recta es una órbita. Las órbitas que están por debajo de $y = x$ corresponden a $C_2 > 0$; cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que $(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)$, lo que determina su orientación. Para $C_2 < 0$ se obtienen las rectas que están por encima de $y = x$, orientadas hacia $(-\infty, -\infty)$. La figura 5.11 muestra el diagrama de fases del sistema. \square

Observación 5.3. Excepto en los casos en que aparece una recta de equilibrios (casos I.4, I.5 y III.5) o un centro (caso II.1), se verifica que $S_{\vec{0}} \oplus U_{\vec{0}} = \mathbb{R}^2$. \square

Una vez finalizada la clasificación de los sistemas lineales en el plano, observemos que para determinar el diagrama de fases de un sistema basta con conocer los autovalores de la

matriz del sistema, y si esta es o no diagonalizable. El diagrama de fases estará determinado de forma única, salvo posibles equivalencias topológicas.

Para finalizar esta sección, vamos a ver una forma de representar todos los posibles casos estudiados en un único esquema. Para ello, recordemos que los autovalores de la matriz A se determinan resolviendo la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Por tanto, los autovalores vienen dados por

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4 \det(A).$$

Un análisis elemental de casos nos lleva a las siguientes conclusiones:

- $\Delta > 0$: autovalores reales (caso I).
 - $\det(A) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tr}(A) > 0 \Rightarrow \text{nodo inestable (caso I.1),} \\ \operatorname{tr}(A) < 0 \Rightarrow \text{nodo estable (caso I.2).} \end{cases}$
 - $\det(A) < 0 \Rightarrow \text{punto de silla (caso I.3).}$
 - $\det(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tr}(A) > 0 \Rightarrow \text{recta de equilibrios inestables (caso I.4),} \\ \operatorname{tr}(A) < 0 \Rightarrow \text{recta de equilibrios estables (caso I.5).} \end{cases}$
- $\Delta < 0$: autovalores complejos (caso II).
 - $\operatorname{tr}(A) = 0 \Rightarrow \text{centro (caso II.1).}$
 - $\operatorname{tr}(A) > 0 \Rightarrow \text{foco inestable (caso II.2).}$
 - $\operatorname{tr}(A) < 0 \Rightarrow \text{foco estable (caso II.3).}$
- $\Delta = 0$: autovalor real doble (caso III).
 - $\operatorname{tr}(A) > 0 \Rightarrow \begin{cases} A \text{ diagonalizable} \Rightarrow \text{nodo estrella inestable (caso III.1),} \\ A \text{ no diagonalizable} \Rightarrow \text{nodo degenerado inestable (caso III.3).} \end{cases}$
 - $\operatorname{tr}(A) < 0 \Rightarrow \begin{cases} A \text{ diagonalizable} \Rightarrow \text{nodo estrella estable (caso III.2),} \\ A \text{ no diagonalizable} \Rightarrow \text{nodo degenerado estable (caso III.4).} \end{cases}$
 - $\operatorname{tr}(A) = 0 \Rightarrow \text{movimiento uniforme (caso III.5).}$

El *diagrama de Poincaré* nos permite representar gráficamente la clasificación anterior. Para ello, dibujamos en el plano $\operatorname{tr}(A)$ - $\det(A)$ la parábola correspondiente a $\Delta = 0$, esto es, $\det(A) = \frac{1}{4} \operatorname{tr}(A)^2$. Esta parábola, junto con los ejes, divide al plano en varias zonas, cada una de las cuales se corresponde con alguno de los casos estudiados: véase la figura 5.12.

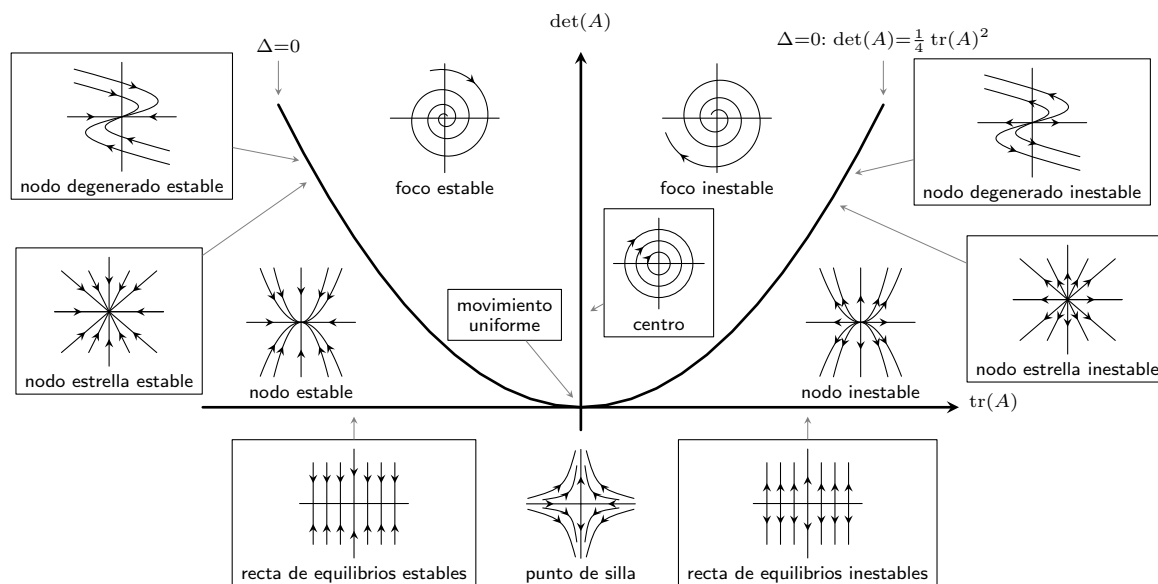


Figura 5.12: Diagrama de Poincaré: clasificación de los diagramas de fases en el plano $\text{tr}(A)$ - $\text{det}(A)$.

5.5. Estudio de la estabilidad para sistemas no lineales

En esta sección nos centraremos en el estudio de un sistema general de la forma

$$(NL) \quad \begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

con $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, y Ω abierto conexo. Salvo en casos muy particulares, no podemos determinar la forma explícita de las soluciones, por lo que ahora no podemos proceder como en el caso lineal (donde $f(x, y) = a_{11}x + a_{12}y$ y $g(x, y) = a_{21}x + a_{22}y$). Incluso conociendo la forma analítica de las soluciones, podría ser que su análisis fuese complicado. Todo esto hace que el estudio de los sistemas no lineales sea mucho más complejo e interesante que el de los sistemas lineales.

El primer paso en el estudio del sistema consiste en determinar los puntos de equilibrio, que son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

Esto es, un punto (l_1, l_2) será un equilibrio del sistema si verifica

$$\begin{cases} f(l_1, l_2) = 0, \\ g(l_1, l_2) = 0. \end{cases}$$

Nótese que en el caso lineal solo había dos posibilidades: un único equilibrio (el origen) o infinitos equilibrios. En el caso no lineal, sin embargo, podemos tener cualquier cantidad de equilibrios.

¿Cómo podemos estudiar la estabilidad de un equilibrio? Una posible forma consiste en aplicar el *método de linealización*, cuya idea se basa en hacer una linealización del sistema alrededor del punto de equilibrio, con la esperanza de que la configuración del diagrama de fases del sistema lineal resultante (que está perfectamente determinada, como ya sabemos) sea topológicamente equivalente a la del sistema no lineal en un entorno del equilibrio. A continuación damos las ideas principales de este método.

Consideremos la siguiente condición inicial:

$$\begin{cases} x(0) = l_1 + u_0, \\ y(0) = l_2 + v_0, \end{cases}$$

donde¹¹ $u_0, v_0 \ll 1$, y sea $(x(t), y(t))$ la correspondiente solución del problema de valores iniciales, que estará definida en un cierto intervalo I que contiene a 0. Definamos las funciones

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - l_1, \\ v(t) = y(t) - l_2, \end{cases}$$

¹¹La notación $u \ll 1$ significa que u es «relativamente pequeño». La idea es que u_0 y v_0 representan pequeñas perturbaciones de los valores l_1 y l_2 , respectivamente.

que miden la distancia de la solución al equilibrio en cada instante t . Tenemos entonces que

$$u'(t) = x'(t) = f(x(t), y(t)) = f(l_1 + u(t), l_2 + v(t)),$$

y análogamente para $v'(t)$. Por tanto, $(u(t), v(t))$ será solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} u'(t) = f(l_1 + u(t), l_2 + v(t)), \\ v'(t) = g(l_1 + u(t), l_2 + v(t)), \\ u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Obsérvese que $(0, 0)$ es un equilibrio del sistema en las variables u y v . Al ser $u_0, v_0 \ll 1$, para tiempos t suficientemente pequeños se tiene que $u(t), v(t) \ll 1$. Por tanto, tiene sentido considerar la siguiente aproximación de Taylor de primer orden:

$$\begin{cases} u'(t) = f(l_1 + u(t), l_2 + v(t)) \approx \cancel{f(l_1, l_2)}^0 + \frac{\partial f}{\partial x}(l_1, l_2)u(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(l_1, l_2)v(t), \\ v'(t) = g(l_1 + u(t), l_2 + v(t)) \approx \cancel{g(l_1, l_2)}^0 + \frac{\partial g}{\partial x}(l_1, l_2)u(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(l_1, l_2)v(t). \end{cases}$$

En resumen, mientras las perturbaciones sean pequeñas, se satisface de manera aproximada el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(l_1, l_2)u(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(l_1, l_2)v(t), \\ v'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(l_1, l_2)u(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(l_1, l_2)v(t). \end{cases}$$

La matriz del sistema lineal es precisamente la matriz jacobiana de $\vec{f} = (f, g)$ en $\vec{l} = (l_1, l_2)$, esto es,

$$J(\vec{l}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(l_1, l_2) & \frac{\partial f}{\partial y}(l_1, l_2) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(l_1, l_2) & \frac{\partial g}{\partial y}(l_1, l_2) \end{pmatrix}.$$

Cabe esperar que el tipo de estabilidad del equilibrio (l_1, l_2) para el sistema no lineal de partida sea el mismo que el del equilibrio $(0, 0)$ para el sistema lineal. Esto va a ser cierto bajo ciertas condiciones que veremos a continuación. Antes, haremos una definición.

Definición 5.1. Supongamos que \vec{l} es un equilibrio del sistema (NL) y que existen las primeras derivadas parciales de f y g en \vec{l} . Diremos que \vec{l} es un equilibrio hiperbólico si $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ para cada autovalor λ de la matriz jacobiana $J(\vec{l})$.

Se tiene el siguiente resultado, cuya demostración no daremos.

Teorema 5.1 (de la primera aproximación). Sea $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $C^1(\Omega)$, con Ω abierto y conexo. Sea \vec{l} un equilibrio hiperbólico y sean λ_i , $i = 1, 2$, los autovalores de $J(\vec{l})$; en el caso de autovalores complejos, λ_i denota su parte real. Entonces:

- Si $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, entonces \vec{l} es asintóticamente estable.
- Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces \vec{l} es inestable y repulsor.
- Si $\lambda_1 > 0$ o $\lambda_2 > 0$, entonces \vec{l} es inestable.

De hecho, se tiene un resultado más fuerte: el diagrama de fases del sistema (NL) cerca de \vec{l} es igual al del sistema linealizado cerca de $\vec{0}$, salvo deformaciones topológicas. Precisemos esto un poco más.

Definición 5.2. Sean $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\vec{g}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ continuas, con $\Omega, \Sigma \subset \mathbb{R}^2$ abiertos conexos. Diremos que los sistemas $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ y $\vec{x}' = \vec{g}(\vec{x})$ son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $h: \Omega \rightarrow \Sigma$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\varphi_t} & \Omega \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{\phi_t} & \Sigma \end{array}$$

para cada tiempo t , donde φ y ϕ representan los respectivos flujos. De forma más precisa: dado $\vec{x} \in \Omega$, consideremos las órbitas $\varphi_{\vec{x}}: I \rightarrow \Omega$ y $\phi_{h(\vec{x})}: J \rightarrow \Sigma$; entonces $I = J$ y se verifica

$$h(\varphi(t, \vec{x})) = \phi(t, h(\vec{x})), \quad \forall t \in I.$$

La idea de la definición anterior es que la estructura del diagrama de fases de ambos sistemas es la misma, incluyendo orientaciones, salvo deformaciones continuas de las órbitas. En particular, los equilibrios se transforman en equilibrios y las órbitas periódicas en órbitas periódicas.

Ejemplo 5.14. Supongamos que $\vec{l} \in \Omega$ es un equilibrio del sistema $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$, esto es, la órbita $\varphi_{\vec{l}}$ es constante igual a \vec{l} . Si h es un homeomorfismo de conjugación, para cada t se tiene que

$$\phi_{h(\vec{l})}(t) = \phi(t, h(\vec{l})) = h(\varphi(t, \vec{l})) = h(\varphi_{\vec{l}}(t)) = h(\vec{l}),$$

es decir, la órbita $\phi_{h(\vec{l})}$ es constante igual a $h(\vec{l})$. En consecuencia, el punto $h(\vec{l}) \in \Sigma$ es un equilibrio del sistema $\vec{x}' = \vec{g}(\vec{x})$.

Supongamos ahora, por ejemplo, que la órbita de un punto $\vec{x} \in \Omega$ converge al equilibrio \vec{l} , esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\vec{x}}(t) = \vec{l}.$$

Entonces, usando que h es continua, se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{h(\vec{x})}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, h(\vec{x})) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(\varphi(t, \vec{x})) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(\varphi_{\vec{x}}(t)) = h(\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\vec{x}}(t)) = h(\vec{l}).$$

Por tanto, la órbita del punto $h(\vec{x}) \in \Sigma$ converge al equilibrio $h(\vec{l})$. □

Un resultado fundamental para el estudio del diagrama de fases de un sistema no lineal es el *teorema de Hartman-Grobman*, cuyo enunciado damos a continuación. La demostración del teorema queda fuera del alcance de este curso.

Teorema 5.2 (de Hartman-Grobman). *Sea \vec{l} un equilibrio hiperbólico de $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$, donde \vec{f} está en las condiciones del teorema anterior. Entonces existen un entorno U de \vec{l} y un entorno V de $\vec{0}$ tales que los sistemas $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ y $\vec{x}' = J(\vec{l})\vec{x}$ son topológicamente conjugados.*

El teorema de Hartman-Grobman permite reducir el estudio del diagrama de fases alrededor de un equilibrio hiperbólico al del sistema linealizado correspondiente, cuya estructura puede determinarse a partir de los autovalores de la matriz jacobiana. Los equilibrios hiperbólicos se denominan igual que $\vec{0}$ en el sistema lineal: nodo¹², punto de silla, foco, etc.

Ejemplo 5.15. Supongamos que dos especies, x e y , siguen el siguiente modelo:

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - xy, \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}xy. \end{cases}$$

En la primera ecuación, x corresponde al término de natalidad, $-x^2$ representa la competencia entre miembros de la misma especie, y $-xy$ indica que la especie y ejerce una influencia perjudicial sobre la especie x . Los términos de la segunda ecuación tienen una interpretación análoga. En resumen, hay competencia en dos niveles: entre los individuos de la propia especie y entre las dos especies. Notemos que:

- En ausencia de y , la especie x sigue un modelo logístico con tasa de natalidad 1 y tasa de mortalidad x .
- En ausencia de x , la especie y sigue un modelo logístico con tasa de natalidad $1/2$ y tasa de mortalidad $y/4$.
- La tasa de mortalidad debida a la competencia es y para la especie x , y $3x/2$ para la especie y .

Determinemos los equilibrios del sistema:

$$\begin{cases} x - x^2 - xy = 0 \Rightarrow x(1 - x - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x + y = 1 \end{cases} \\ y \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}xy \Rightarrow \frac{y}{2} \left(1 - \frac{y}{2} - 3x \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{o bien} \\ 3x + \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

¹²Nótese que los distintos tipos de nodo (propio, degenerado y estrella) son equivalentes desde un punto de vista topológico, por lo que en este contexto no procede hacer distinciones entre ellos.

Tenemos entonces cuatro posibilidades: $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$ y $(1/5,4/5)$. Estos son los cuatro equilibrios del sistema. En términos del comportamiento de las especies, el último punto es la única posibilidad de que coexistan ambas especies sin que una de ellas se extinga. Para estudiar la estabilidad de los equilibrios, necesitaremos la matriz jacobiana del sistema,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -\frac{3y}{2} & \frac{1}{2} - \frac{y}{2} - \frac{3x}{2} \end{pmatrix}.$$

- Estabilidad de $(0,0)$. En este caso $J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = 1$; por tanto, estamos en el caso I.1. En consecuencia, la configuración del diagrama de fases del sistema linealizado en torno a $(0,0)$ es un nodo inestable. El punto $(0,0)$ es hiperbólico, por lo que podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman para afirmar que el diagrama de fases del sistema no lineal es también un nodo inestable en un entorno de $(0,0)$. En particular, $(0,0)$ es inestable; sin embargo, como hay más equilibrios, no es un repulsor universal (como sí ocurría en el caso lineal).

- Estabilidad de $(1,0)$. La matriz jacobiana es $J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene un autovalor doble $\lambda = -1$ y no es diagonalizable (caso III.2). El sistema linealizado tiene un nodo (degenerado) estable en $(0,0)$. Al ser $(1,0)$ hiperbólico, el teorema de Hartman-Grobman nos dice que el diagrama de fases local alrededor de $(1,0)$ es también un nodo estable. En particular, $(1,0)$ es asintóticamente estable.

- Estabilidad de $(0,2)$. Los autovalores de la matriz jacobiana $J(0,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -1/2$; estamos por tanto en el caso I.2. Al ser $(0,2)$ hiperbólico, deducimos que el diagrama de fases en un entorno de $(0,2)$ es un nodo estable. En consecuencia, $(0,2)$ es asintóticamente estable.

- Estabilidad de $(1/5,4/5)$. La matriz jacobiana es, en este caso, $J(1/5,4/5) = \begin{pmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -6/5 & -1/5 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{6}}{5} < 0$ y $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{6}}{5} > 0$ (caso I.3). Al ser el equilibrio hiperbólico, por el teorema de Hartman-Grobman tenemos que el diagrama de fases en un entorno de $(1/5,4/5)$ es un punto de silla. En particular, $(1/5,4/5)$ es un equilibrio inestable (pero no repulsor).

En la figura 5.13 se ha representado el diagrama de fases del sistema. Como puede verse, el dibujo concuerda con los resultados obtenidos anteriormente: el punto $(0,0)$ es un nodo inestable (todas las órbitas cercanas tienden a él cuando $t \rightarrow -\infty$), $(1,0)$ es un nodo estable (todas las órbitas cercanas tienden a él cuando $t \rightarrow \infty$), al igual que $(0,2)$; por último, $(1/5,4/5)$ es un punto de silla (en la figura se han destacado las variedades estable e inestable). En términos de dinámica de poblaciones, se observa que una de las poblaciones siempre tiende a la extinción, excepto en los casos en que las poblaciones iniciales correspondan al equilibrio $(1/5,4/5)$ o que estén sobre la variedad estable, en cuyo caso tienden al citado equilibrio. \square

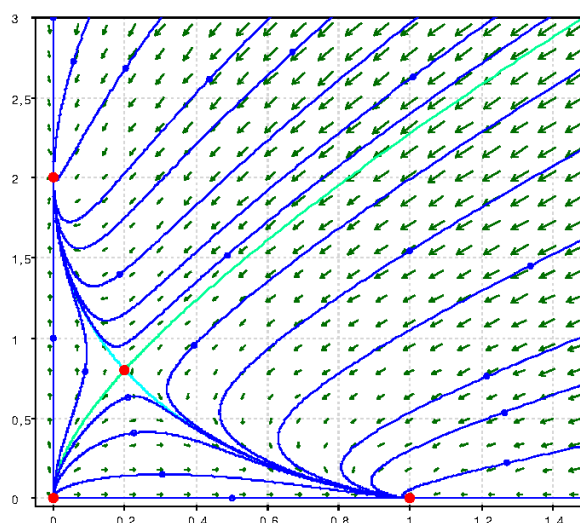


Figura 5.13: Diagrama de fases del ejemplo 5.15. Los puntos de equilibrio se han marcado en rojo, la variedad estable del punto de silla en verde, y la variedad inestable en celeste. En este caso se ha representado el campo de vectores para determinar el sentido de las órbitas.

Observación 5.4. En el ejemplo anterior, hay órbitas que unen dos puntos de equilibrio¹³: este tipo de órbitas se denominan *heteroclínicas*. También puede darse el caso de una órbita que parte de un equilibrio y tiende al mismo; en este caso, la órbita se denomina *homoclínica*. \square

Para terminar esta sección, vamos a interpretar el sistema dinámico como un campo de vectores, lo cual nos dará una nueva herramienta geométrica para determinar los equilibrios de un sistema y estudiar su estabilidad.

Dado el sistema (NL), podemos considerar el campo de vectores $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si tenemos una solución $(x(t), y(t))$ de (NL), entonces $\vec{f}(x, y)$ representa el vector tangente a la solución en el punto (x, y) . Se define el conjunto de *nulclinas horizontales* como

$$\mathcal{N}_0 = \{(x, y) \in \Omega: g(x, y) = 0\},$$

y el conjunto de *nulclinas verticales* como

$$\mathcal{N}_\infty = \{(x, y) \in \Omega: f(x, y) = 0\}.$$

Sobre un punto $(x, y) \in \mathcal{N}_0$ el vector $\vec{f}(x, y)$ tiene pendiente 0, mientras que si $(x, y) \in \mathcal{N}_\infty$ entonces $\vec{f}(x, y)$ tiene pendiente infinita. De esta forma, el campo de vectores \vec{f} es horizontal cuando atraviesa el conjunto \mathcal{N}_0 , y es vertical cuando pasa por \mathcal{N}_∞ . Asimismo, es obvio que el conjunto de puntos de equilibrio viene dado por

$$\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}_\infty.$$

¹³Cuando decimos «unen» quiere decir que los límites de la solución cuando $t \rightarrow \pm\infty$ son los citados puntos de equilibrio.

Ejemplo 5.16. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 1 + x - y, \\ y' = 4 + x^3 - y. \end{cases}$$

El campo de vectores asociado es $\vec{f}(x, y) = (1 + x - y, 4 + x^3 - y)$, y las nulclinas son

$$\mathcal{N}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4 + x^3\}, \quad \mathcal{N}_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 + x\}.$$

Ambos conjuntos se han representado en la figura 5.14. Como puede observarse, al atravesar \mathcal{N}_0 los vectores son horizontales, mientras que al pasar por \mathcal{N}_∞ son verticales. El único equilibrio, que en este caso es estable, se da en la intersección de ambos conjuntos. Se ha representado también una órbita, que en este caso es cerrada. \square

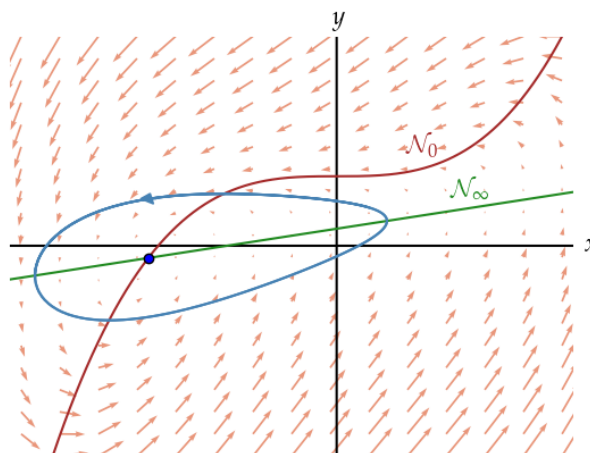


Figura 5.14: Nulclinas del ejemplo 5.16, punto de equilibrio y órbita arbitraria.

5.6. Modelos de competencia

En esta sección vamos a estudiar un modelo de competencia general, de la forma

$$\begin{cases} x' = k_1 x \left(1 - \frac{x}{N_1}\right) - a_1 xy, \\ y' = k_2 y \left(1 - \frac{y}{N_2}\right) - a_2 xy, \end{cases}$$

con k_1 , k_2 , N_1 , N_2 , a_1 y a_2 constantes positivas. Nótese que el sistema del ejemplo 5.15 es un caso particular de este modelo. En términos de poblaciones, tenemos dos especies que compiten entre sí, con una tasa de mortalidad proporcional al número de individuos de la otra especie. Asimismo, en ausencia de una de las especies, la otra sigue un modelo logístico.

Para determinar los equilibrios, reescribamos el sistema de una forma más conveniente:

$$\begin{cases} x' = k_1 x \left(1 - \frac{x}{N_1} - \frac{\alpha_1}{N_1} y \right), \\ y' = k_2 y \left(1 - \frac{y}{N_2} - \frac{\alpha_2}{N_2} x \right), \end{cases}$$

donde $\alpha_i = \frac{N_i a_i}{k_i}$, $i = 1, 2$. Por tanto:

$$\begin{cases} k_1 x \left(1 - \frac{x}{N_1} - \frac{\alpha_1}{N_1} y \right) = 0 \\ y \\ k_2 y \left(1 - \frac{y}{N_2} - \frac{\alpha_2}{N_2} x \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x + \alpha_1 y = N_1 \\ \\ y = 0 \\ \text{o bien} \\ \alpha_2 x + y = N_2 \end{cases}$$

Tenemos entonces tres equilibrios seguros: $(0, 0)$, $(N_1, 0)$ y $(0, N_2)$. Para ver si hay un cuarto, hay que estudiar el sistema lineal

$$\begin{cases} x + \alpha_1 y = N_1, \\ \alpha_2 x + y = N_2. \end{cases}$$

Es trivial comprobar que:

- Si $\alpha_1 \alpha_2 \neq 1$, tenemos un único equilibrio dado por

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{N_1 - \alpha_1 N_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}, \frac{N_2 - \alpha_2 N_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \right),$$

que tiene sentido en el modelo solo cuando sus componentes sean positivas.

- Si $\alpha_1 \alpha_2 = 1$ entonces, o bien no hay más equilibrios (si $N_1 \neq \alpha_1 N_2$), o bien hay infinitos (si $N_1 = \alpha_1 N_2$ o, equivalentemente, $N_2 = \alpha_2 N_1$); este último caso no lo consideraremos.

Vamos a utilizar las nulclinas del sistema para discriminar entre los diferentes casos que pueden presentarse. Por una parte, las nulclinas horizontales son

$$\mathcal{N}_0 = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : y(1 - y/N_2 - \alpha_2 x/N_2) = 0\}.$$

Hay entonces dos ramas, $y = 0$ y $\alpha_2 x + y = N_2$: véase la figura 5.15 (izquierda). De modo análogo, las nulclinas verticales son

$$\mathcal{N}_\infty = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x(1 - x/N_1 - \alpha_1 y/N_1) = 0\},$$

lo que da lugar a dos ramas, $x = 0$ y $x + \alpha_1 y = N_1$: véase la figura 5.15 (derecha).

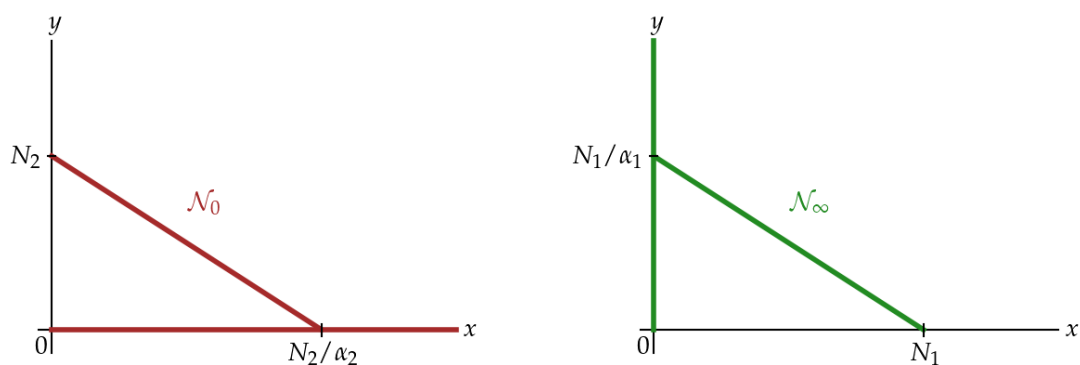


Figura 5.15: Nulclinas horizontales (izquierda) y verticales (derecha).

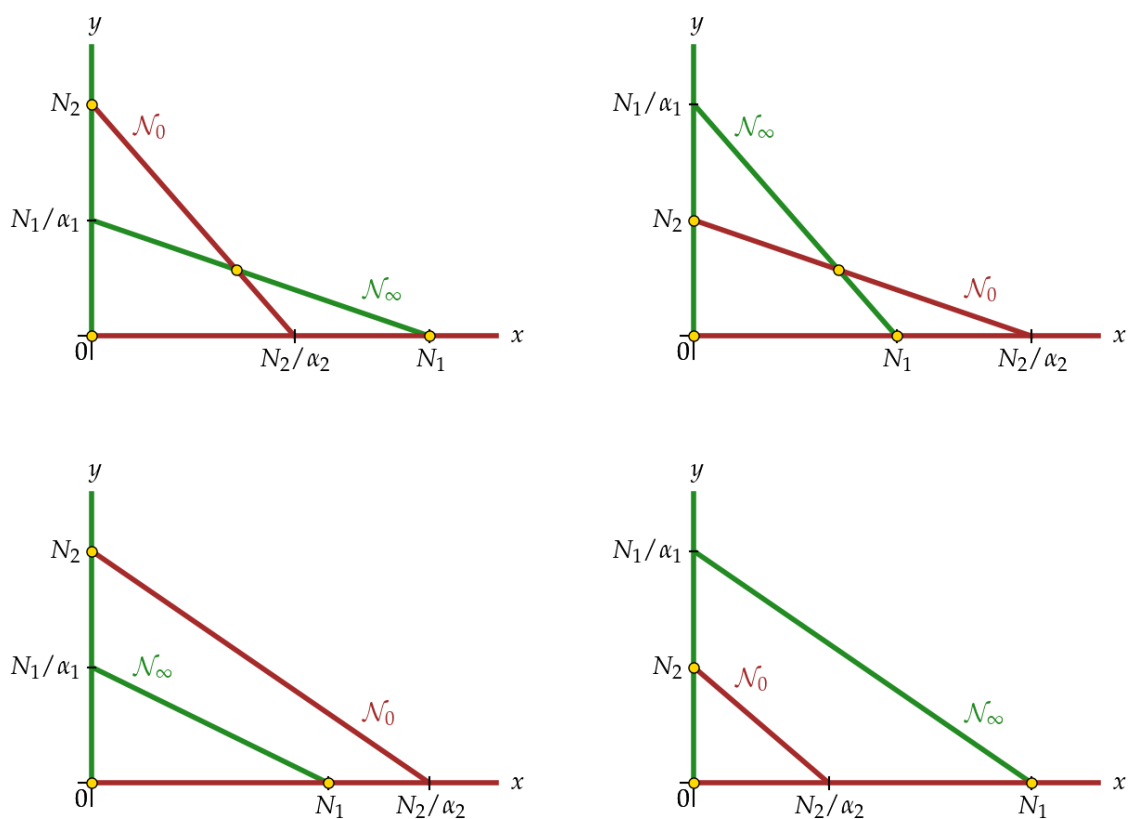


Figura 5.16: Posiciones relativas de las nulclinas. De arriba abajo y de izquierda a derecha: casos 1 a 4. Se han señalado los puntos de equilibrio, que se encuentran en las intersecciones entre las nulclinas horizontales y verticales.

Recordemos que siempre teníamos los equilibrios $(0,0)$, $(N_1,0)$ y $(0,N_2)$; además, dependiendo de las posiciones relativas de N_1 , N_2 , N_1/α_1 y N_2/α_2 , puede aparecer un cuarto equilibrio, (x^*,y^*) . Los posibles casos que pueden darse son los siguientes:

- Caso 1: $N_1 > N_2/\alpha_2$ y $N_2 > N_1/\alpha_1$. A partir de la figura 5.16 (arriba, izquierda), deducimos que hay cuatro equilibrios.
- Caso 2: $N_1 < N_2/\alpha_2$ y $N_2 < N_1/\alpha_1$. En este caso hay cuatro equilibrios, como puede observarse en la figura 5.16 (arriba, derecha).
- Caso 3: $N_1 < N_2/\alpha_2$ y $N_2 > N_1/\alpha_1$. Ahora solo hay tres equilibrios admisibles: véase la figura 5.16 (abajo, izquierda).
- Caso 4: $N_1 > N_2/\alpha_2$ y $N_2 < N_1/\alpha_1$. De nuevo, como puede verse en la figura 5.16 (abajo, derecha), solo hay tres equilibrios.

Para determinar la estabilidad de los equilibrios necesitaremos la matriz jacobiana del sistema, que viene dada por

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} k_1 \left(1 - \frac{2}{N_1}x - \frac{\alpha_1}{N_1}y \right) & -\frac{k_1\alpha_1}{N_1}x \\ -\frac{k_2\alpha_2}{N_2}y & k_2 \left(1 - \frac{\alpha_2}{N_2}x - \frac{2}{N_2}y \right) \end{pmatrix}.$$

En el análisis de estabilidad, aunque no se indique, se hará uso repetido del teorema de Hartman-Grobman.

• Estabilidad de $(0,0)$. En este caso $J(0,0) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$. Al ser los autovalores k_1 y k_2 positivos, el equilibrio hiperbólico $(0,0)$ es un nodo inestable. Por tanto, se trata de un equilibrio inestable y repulsor. En particular, esto indica que las dos especies no pueden extinguirse a la vez.

• Estabilidad de $(N_1,0)$. Ahora tenemos

$$J(N_1,0) = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_1\alpha_1 \\ 0 & k_2(1 - \alpha_2 N_1/N_2) \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = -k_1 < 0$ y $\lambda_2 = k_2(1 - \alpha_2 N_1/N_2)$. De esta forma,

- Si $N_2 > \alpha_2 N_1$ entonces $\lambda_2 > 0$, por lo que $(N_1,0)$ es un punto de silla, que es inestable.
- Si $N_2 = \alpha_2 N_1$ el equilibrio no es hiperbólico; en este caso vimos que había infinitos equilibrios.
- Si $N_2 < \alpha_2 N_1$ tenemos un nodo estable; en particular, $(N_1,0)$ es asintóticamente estable.

En resumen, el equilibrio $(N_1,0)$ es un nodo estable en los casos 1 y 4, y un punto de silla en los casos 2 y 3.

- Estabilidad de $(0, N_2)$. Los autovalores de

$$J(0, N_2) = \begin{pmatrix} k_1(1 - \alpha_1 N_2/N_1) & 0 \\ -k_2\alpha_2 & -k_2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = -k_2 < 0$ y $\lambda_2 = k_1(1 - \alpha_1 N_2/N_1)$. Se tienen entonces tres casos para $(0, N_2)$:

- Punto de silla si $N_1 > \alpha_1 N_2$.
- No es hiperbólico si $N_1 = \alpha_1 N_2$; este caso no lo consideraremos.
- Nodo estable si $N_1 < \alpha_1 N_2$.

En los casos 1 y 3 el equilibrio $(0, N_2)$ es un nodo estable (asintóticamente estable), y en los casos 2 y 4 es un punto de silla (inestable, pero no repulsor).

- Estabilidad de (x^*, y^*) . Este equilibrio solo aparece en los casos 1 y 2. La matriz jacobiana viene dada por

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 x^*}{N_1} & -\frac{k_1 \alpha_1 x^*}{N_1} \\ -\frac{k_2 \alpha_2 y^*}{N_2} & -\frac{k_2 y^*}{N_2} \end{pmatrix},$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 + \left(\frac{k_1 x^*}{N_1} + \frac{k_2 y^*}{N_2} \right) \lambda + \frac{k_1 k_2}{N_1 N_2} x^* y^* (1 - \alpha_1 \alpha_2) = 0.$$

Por tanto, los autovalores tienen la siguiente forma:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left(\frac{k_1 x^*}{N_1} + \frac{k_2 y^*}{N_2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta},$$

donde

$$\Delta = \left(\frac{k_1 x^*}{N_1} + \frac{k_2 y^*}{N_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{N_1 N_2} x^* y^* (1 - \alpha_1 \alpha_2) = \left(\frac{k_1 x^*}{N_1} - \frac{k_2 y^*}{N_2} \right)^2 + 4 \frac{k_1 k_2}{N_1 N_2} \alpha_1 \alpha_2 x^* y^* > 0.$$

En cualquier caso, los autovalores son reales y distintos. Hay dos posibilidades:

- Si $\alpha_1 \alpha_2 > 1$ entonces los autovalores tienen distinto signo, por lo que tenemos un punto de silla. Esto se da en el caso 1.
- Si $\alpha_1 \alpha_2 < 1$ aparece un nodo estable, ya que ambos autovalores son negativos. Esta situación corresponde al caso 2.

Todas las posibilidades estudiadas se recogen en la siguiente tabla:

Casos	$(0,0)$	$(N_1,0)$	$(0,N_2)$	(x^*,y^*)
1. $N_1 > N_2/\alpha_2$ $N_2 > N_1/\alpha_1$	Nodo inestable	Nodo estable	Nodo estable	Punto de silla
2. $N_1 < N_2/\alpha_2$ $N_2 < N_1/\alpha_1$	Nodo inestable	Punto de silla	Punto de silla	Nodo estable
3. $N_1 < N_2/\alpha_2$ $N_2 > N_1/\alpha_1$	Nodo inestable	Punto de silla	Nodo estable	–
4. $N_1 > N_2/\alpha_2$ $N_2 < N_1/\alpha_1$	Nodo inestable	Nodo estable	Punto de silla	–

Por último, en la figura 5.17 se ha representado cada uno de los diagramas de fases.

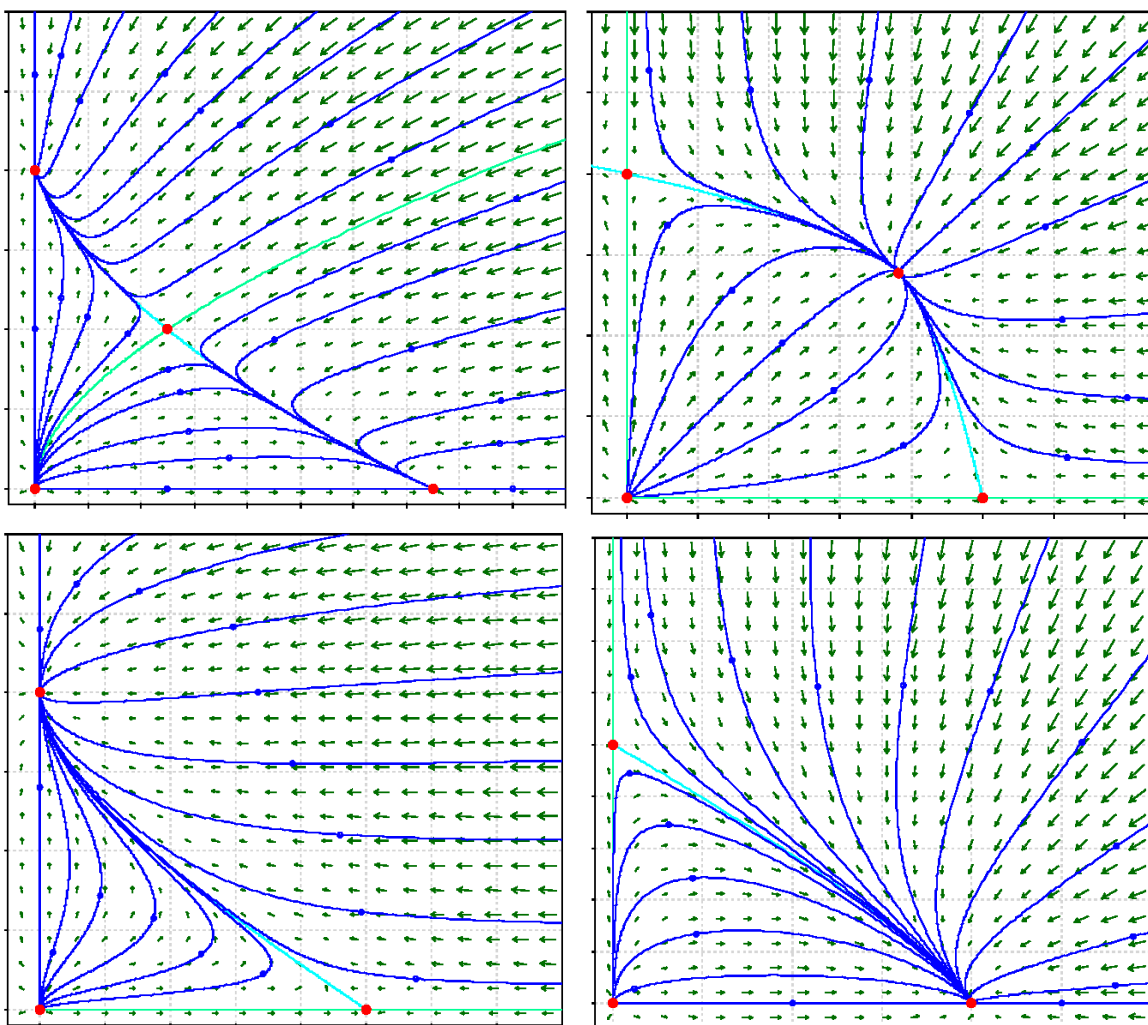


Figura 5.17: Diagramas de fases para el modelo de competencia. De arriba abajo y de izquierda a derecha: casos 1 a 4.

5.7. Estabilidad de equilibrios no hiperbólicos

Como ya sabemos, cuando tenemos un equilibrio no hiperbólico no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman para determinar la configuración local del diagrama de fases. En esta sección estudiaremos algunas técnicas que pueden aplicarse para el estudio de la estabilidad de equilibrios no hiperbólicos.

5.7.1. Coordenadas polares

En determinados casos, es posible aplicar un cambio a coordenadas polares para obtener información sobre la estabilidad de un punto de equilibrio. En particular, esta es una opción cuando en las ecuaciones diferenciales aparecen términos de la forma $x^2 + y^2$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.17. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -y + kx(x^2 + y^2), \\ y' = x + ky(x^2 + y^2), \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Es inmediato comprobar que el único equilibrio es $(0,0)$, y que la matriz jacobiana asociada es

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores $\lambda = \pm i$ tienen parte real nula. Por tanto, el equilibrio $(0,0)$ no es hiperbólico. El único caso en que podemos determinar directamente la configuración del diagrama de fases es $k = 0$, ya que entonces se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases}$$

que corresponde a un centro.

Hagamos un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \operatorname{sen} \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = r'(t) \cos \theta(t) - r(t)\theta'(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\ y'(t) = r'(t) \operatorname{sen} \theta(t) + r(t)\theta'(t) \cos \theta(t) \end{cases}$$

(a partir de ahora, no indicaremos la dependencia de la variable t). Por una parte, se tiene que

$$\begin{cases} xx' = rr' \cos^2 \theta - r^2 \theta' \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \\ yy' = rr' \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \theta' \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \end{cases}$$

de donde

$$xx' + yy' = rr'.$$

Por otro lado,

$$\begin{cases} -yx' = -rr' \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r^2 \theta' \operatorname{sen}^2 \theta, \\ xy' = rr' \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r^2 \theta' \cos^2 \theta, \end{cases}$$

de donde

$$xy' - yx' = r^2\theta'.$$

Entonces, si (x, y) es solución del sistema, tenemos que

$$\begin{cases} rr' = xx' + yy' = x(-y + k(x^2 + y^2)) + y(x + ky(x^2 + y^2)) = k(x^2 + y^2)^2 = kr^4, \\ r^2\theta' = xy' - yx' = x(x + ky(x^2 + y^2)) - y(-y + kx(x^2 + y^2)) = x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

En resumen, el sistema en polares se escribe como

$$\begin{cases} r' = kr^3, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Notemos que $r = 0$ corresponde al equilibrio $(0, 0)$. Supongamos entonces que $r \neq 0$ (en cada tiempo t), por lo que el sistema se reduce a

$$\begin{cases} r' = kr^3, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Tenemos dos ecuaciones desacopladas, que podemos estudiar por separado. Claramente, la solución para el ángulo θ es de la forma

$$\theta(t) = t + \theta_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde θ_0 es el ángulo inicial. Vemos entonces que θ recorre todo \mathbb{R} .

Respecto al radio r , el análisis del sistema $r' = kr^3$ es totalmente análogo al que hicimos para el modelo de Malthus (sección 4.2.1). Los diagramas de fases correspondientes pueden verse en la figura 5.18:

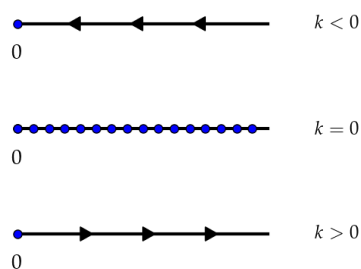


Figura 5.18: Diagramas de fases del sistema $r' = kr^3$.

Ya estamos en condiciones de determinar el diagrama de fases del sistema, en función del signo de k :

- $k < 0$. En este caso, para una órbita cercana a $(0, 0)$, el radio r tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, a la vez que el ángulo θ varía en \mathbb{R} . El diagrama de fases corresponde a un foco estable; en particular, $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

- $k = 0$. En este caso, las órbitas son circunferencias centradas en el origen, ya que el radio permanece constante. La configuración del diagrama de fases es un centro, por lo que $(0,0)$ es estable pero no asintóticamente estable.
- $k > 0$. En este caso el diagrama de fases es un foco inestable, por lo que $(0,0)$ es inestable y repulsor.

Los respectivos diagramas de fases se han representado en la figura 5.19. □

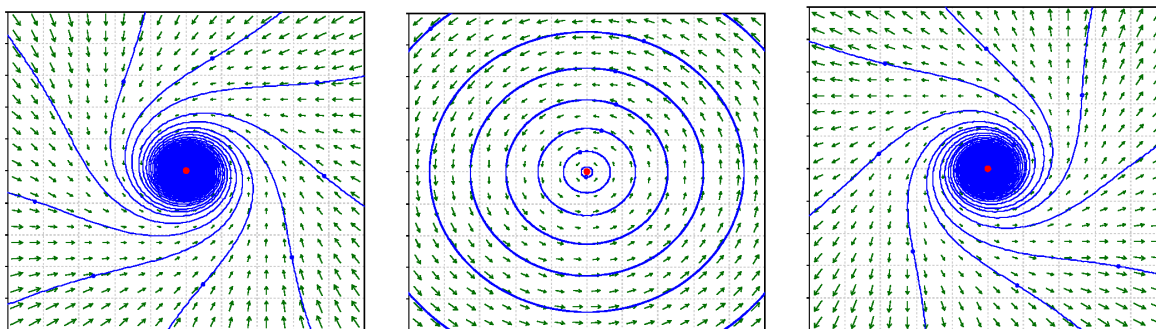


Figura 5.19: Diagramas de fases del sistema $r' = kr^3$, $\theta' = 1$. De izquierda a derecha: $k < 0$, $k = 0$ y $k > 0$.

En el ejemplo anterior hemos deducido las ecuaciones

$$\begin{cases} xx' + yy' = rr', \\ xy' - yx' = r^2\theta', \end{cases}$$

que serán las que usemos sistemáticamente para realizar el cambio a polares.

Ejemplo 5.18. Consideremos el sistema dado por

$$\begin{cases} x' = x - x\sqrt{x^2 + y^2} - y\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \\ y' = y - y\sqrt{x^2 + y^2} + x\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \end{cases}$$

En principio, el dominio de definición del sistema sería $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sin embargo, las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ que definen el sistema se pueden extender por continuidad a \mathbb{R}^2 , definiendo $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 0$. En tal caso, $(0,0)$ es un punto de equilibrio.

Haciendo el cambio a polares, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} rr' = r^2 - r^3, \\ r^2\theta' = r^2(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

El valor $r = 0$ corresponde al origen, que es un equilibrio. Suponiendo $r \neq 0$, podemos simplificar:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \theta' = 1 - \cos\theta. \end{cases}$$

Al estar las ecuaciones desacopladas, podemos estudiarlas por separado.

Por un lado, la ecuación para r corresponde al modelo logístico (sección 4.2.2): véase la figura 5.20 (izquierda). Tenemos pues que las trayectorias tienden al radio 1 cuando $t \rightarrow \infty$.

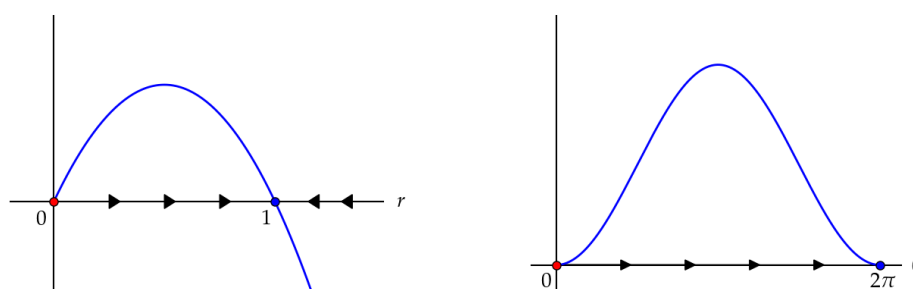


Figura 5.20: Diagramas de fases. Izquierda: $r' = r(1 - r)$. Derecha: $\theta' = 1 - \cos \theta$.

Por otra parte, el diagrama de fases de la ecuación $\theta' = 1 - \cos \theta$ se ha representado en la figura 5.20 (derecha). Vemos que el ángulo θ tiende a 0 cuando $t \rightarrow -\infty$, y a 2π cuando $t \rightarrow \infty$; esto significa que las trayectorias dan una única vuelta.

Para que un punto (r^*, θ^*) sea un equilibrio, tanto r^* como θ^* han de ser equilibrios de sus ecuaciones correspondientes. De esta forma, el único equilibrio del sistema distinto a $(0,0)$ se obtiene tomando $(r^*, \theta^*) = (1,0)$, que corresponde al punto $(x^*, y^*) = (1,0)$. Entonces la circunferencia unidad S^1 consta de dos órbitas: el equilibrio $(1,0)$ y $S^1 \setminus \{(1,0)\}$. Cuando $t \rightarrow \infty$ las trayectorias tienden a $(1,0)$, mientras que cuando $t \rightarrow -\infty$ tienden a $(0,0)$, dando una única vuelta. El diagrama de fases resultante se muestra en la figura 5.21. Como vemos, el equilibrio $(1,0)$ es inestable y atractor universal, mientras que $(0,0)$ es un nodo inestable. \square

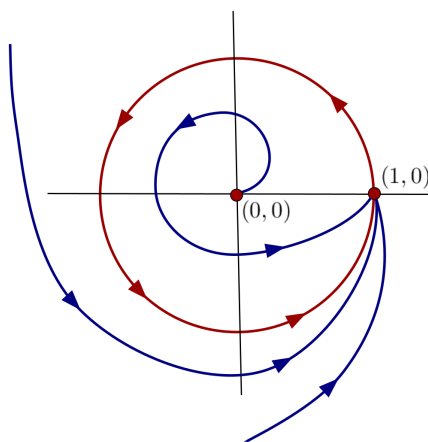


Figura 5.21: Ejemplo de atractor inestable.

5.7.2. Sistemas mecánicos

Para motivar el método de Lyapunov para el estudio de la estabilidad de puntos de equilibrio (sección 5.7.3), vamos a centrarnos en el análisis de sistemas mecánicos. Concretamente, consideremos un móvil de masa m que sigue un movimiento rectilíneo, y denotemos por $x(t)$ a la posición del móvil en el instante de tiempo t , medida desde la posición de equilibrio. Supondremos que, en cada punto x , actúa sobre el móvil una fuerza $F(x)$. Seguiremos el siguiente convenio: si $F(x) > 0$, la fuerza actúa hacia la derecha; si $F(x) < 0$, lo hace hacia la izquierda.

Ejemplo 5.19. Supongamos que el móvil está enganchado mediante un muelle a una pared, y está en equilibrio en la posición $x = 0$. Por fijar ideas, supongamos que la pared está situada a la izquierda del móvil (figura 5.22); se razonaría de manera análoga si estuviese a la derecha. La *ley de Hooke* nos dice que la fuerza que ejerce el muelle al contraerse o expandirse es proporcional a la elongación del muelle, y de sentido opuesto al movimiento. De esta forma, si $x < 0$ (el muelle se contrae), la fuerza elástica actuaría en sentido positivo (hacia la derecha) y sería de la forma

$$F(x) = k(0 - x) = -kx,$$

siendo k la *constante elástica*, que depende del material con que esté hecho el muelle. Por el contrario, si $x > 0$ (el muelle se estira), se ejerce una fuerza en sentido negativo, de la forma

$$F(x) = -k(x - 0) = -kx.$$

En cualquier caso, obtenemos la misma expresión para la fuerza elástica: $F(x) = -kx$. □

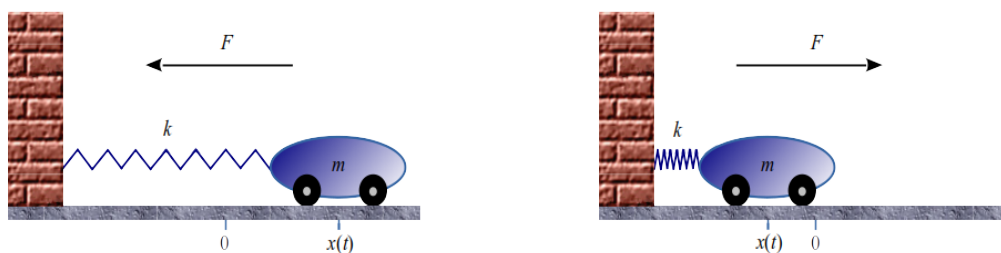


Figura 5.22: Móvil sometido a una fuerza elástica.

Ejemplo 5.20. Consideremos el péndulo simple de la figura 5.23, donde l es la longitud de la varilla rígida, m es la masa de la bola, g es la constante gravitatoria y $x(t)$ representa el ángulo que forma la varilla con la vertical, en el instante de tiempo t .

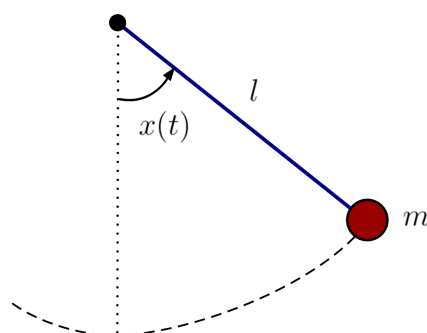


Figura 5.23: Péndulo simple.

En este caso, puede probarse que la fuerza que actúa sobre el sistema (gravedad), es de la forma

$$F(x) = -k \operatorname{sen}(x),$$

donde $k = gm/l$. Este sistema puede interpretarse como un móvil sobre la circunferencia unidad. \square

Para establecer la ecuación del movimiento en un caso general, aplicamos la *segunda ley de Newton* que, en el caso de masa constante, nos dice que la fuerza que actúa sobre el móvil es igual al producto de la masa por la aceleración del mismo. Como $x(t)$ representa la posición del móvil, tenemos que $x'(t)$ y $x''(t)$ nos proporcionan, respectivamente, su velocidad y su aceleración. Por tanto, la segunda ley de Newton nos dice que

$$mx''(t) = F(x(t)).$$

Por simplicidad, supondremos que $m = 1$ (aquí la masa no juega un papel relevante). Supondremos también que la función $F(x)$ es suficientemente regular. Si llamamos $y = x'$, podemos escribir la ecuación anterior en forma de sistema:

$$(S) \quad \begin{cases} x' = y & \text{(ecuación para la posición } x), \\ y' = F(x) & \text{(ecuación para la velocidad } y). \end{cases}$$

Para calcular los equilibrios del sistema, igualamos los segundos miembros a cero:

$$\begin{cases} y = 0, \\ F(x) = 0. \end{cases}$$

De esta forma, vemos que los equilibrios son de la forma $(x^*, 0)$, con

$$F(x^*) = 0.$$

Para estudiar su estabilidad, calculamos la matriz jacobiana del sistema y evaluamos en $(x^*, 0)$:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J(x^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x^*) & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $J(x^*, 0)$ son las soluciones de la ecuación característica, $\lambda^2 = F'(x^*)$. Tenemos entonces dos casos:

- Si $F'(x^*) > 0$, los autovalores son reales y de distinto signo; por tanto, el equilibrio $(x^*, 0)$ es un punto de silla (local).
- Si $F'(x^*) \leq 0$, el equilibrio $(x^*, 0)$ no es hiperbólico.

Ejemplo 5.21. En el caso del ejemplo 5.19, tenemos que

$$F(x^*) = 0 \Leftrightarrow -kx^* = 0 \Leftrightarrow x^* = 0.$$

Como $F'(x^*) = -k < 0$, estamos en un caso no hiperbólico.

En el ejemplo 5.20 tenemos

$$F(x^*) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$F'(n\pi) = -k \cos(n\pi) \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ < 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En consecuencia, $(x^*, 0) = (n\pi, 0)$ es un punto de silla si n es impar, y no es hiperbólico si n es par. \square

Veamos cómo podemos analizar los puntos de equilibrio del sistema (S) en los casos no hiperbólicos. Para ello, primero introducimos el concepto de *energía potencial* del sistema, que se define como una primitiva arbitraria de $-F$. Es decir, $U(x)$ es una energía potencial si

$$U'(x) = -F(x).$$

Las energías potenciales se diferencian pues en una constante arbitraria. La *energía total* del sistema, $V(x, y)$, se define como la suma de las energías potencial y cinética, esto es,

$$V(x, y) = U(x) + \frac{y^2}{2}.$$

Ejemplo 5.22. Una energía potencial para el sistema del ejemplo 5.19 sería

$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$

y la energía total asociada sería entonces

$$V(x, y) = \frac{kx^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Para el ejemplo 5.20, una energía potencial sería

$$U(x) = -k \cos(x),$$

y

$$V(x, y) = -k \cos(x) + \frac{y^2}{2}.$$

sería la energía total asociada. \square

Supongamos que $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (S). Si $V(x, y)$ es la energía total del sistema, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt} \left(U(x(t)) + \frac{y(t)^2}{2} \right) = U'(x(t))x'(t) + y(t)y'(t) \\ &= -F(x(t))y(t) + y(t)F(x(t)) = 0, \end{aligned}$$

es decir, la función $t \mapsto V(x(t), y(t))$ es constante:

$$V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0)), \quad \forall t.$$

Dicho de otra forma, la energía total es constante a lo largo de una trayectoria. En consecuencia, si dibujamos en el plano x - y las curvas de nivel de la función $V(x, y)$,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R},$$

las órbitas del sistema tienen que estar entonces contenidas en ellas.

Ejemplo 5.23. Consideremos el sistema del muelle del ejemplo 5.19. Las curvas de nivel son de la forma

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

(nótese que da igual la energía potencial que tomemos, ya que dos de ellas se diferencian en una constante, que podemos pasar al segundo miembro). Es decir, las curvas de nivel son elipses concéntricas alrededor del origen, de la forma (renombrando la constante arbitraria)

$$kx^2 + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como el único equilibrio es el origen, necesariamente cada elipse es una trayectoria completa. En conclusión, el origen es un centro, que es estable pero no asintóticamente estable. Mirando la dirección de los vectores tangentes a la órbita, podemos determinar el sentido de giro de las mismas, tal y como se ilustra en la figura 5.24.

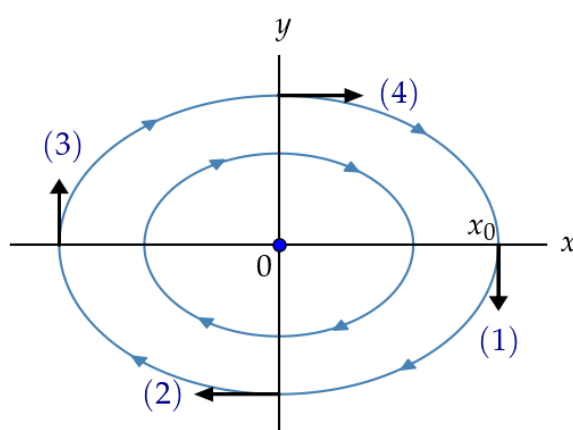


Figura 5.24: Móvil sometido a una fuerza elástica. Diagrama de fases.

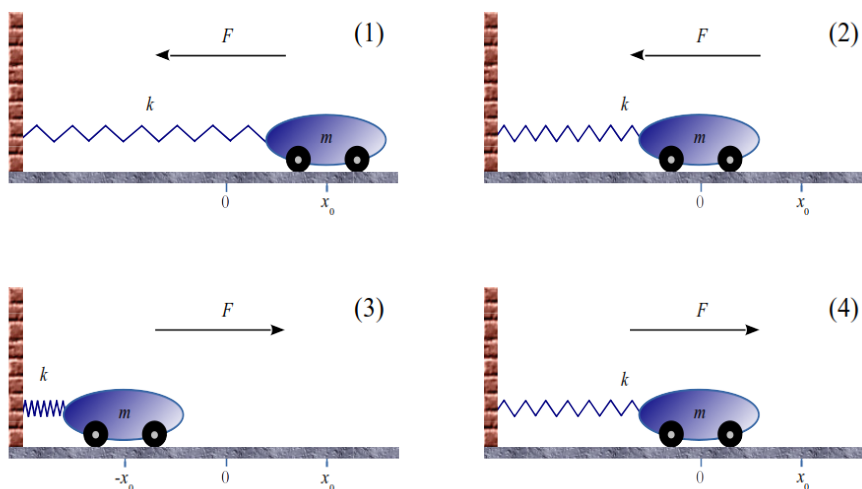


Figura 5.25: Evolución de un móvil sometido a una fuerza elástica.

¿Cuál sería la interpretación física del diagrama de fases? Imaginemos que tomamos una condición inicial de la forma $(x_0, 0)$, con $x_0 > 0$; es decir, estiramos el muelle hacia la derecha una distancia x_0 y lo soltamos sin velocidad inicial. Al principio, el muelle ejerce una fuerza que empuja al móvil hacia la izquierda, haciendo que x decrezca y la velocidad y aumente: punto (1) en las figuras 5.24 y 5.25. A continuación, el móvil pasa por la posición de equilibrio 0 con su máxima velocidad en sentido negativo: punto (2). A partir de este momento, x se hace negativa (estamos a la izquierda de la posición de equilibrio) y sigue decreciendo, mientras que y tiende a cero: punto (3). Es entonces cuando se invierte el sentido del movimiento (el muelle contraído empuja ahora hacia la derecha): tanto x como y aumentan hasta pasar de nuevo por la posición de equilibrio con velocidad máxima positiva: punto (4). A continuación, el móvil tiende a la posición inicial y la velocidad se acerca a cero (debido a que el muelle ejerce una fuerza que se opone al movimiento): estamos de nuevo en el punto (1). Este movimiento continúa de forma periódica.

Es interesante notar que, en este ejemplo, la gráfica de la energía potencial $U(x) = kx^2/2$ es una parábola convexa cuyo mínimo se da en $x^* = 0$. Entonces,

$$U'(x^*) = -F(x^*) = 0,$$

es decir, el equilibrio x^* es un punto crítico de $U(x)$; además, se tiene que

$$0 < U''(x^*) = -F'(x^*) \Rightarrow F'(x^*) < 0. \quad \square$$

A continuación, vamos a ver qué podemos deducir sobre el diagrama de fases del sistema a partir de la forma de la función de energía potencial. Sea $U(x)$ una energía potencial del sistema (S), esto es, $U'(x) = -F(x)$. Si x^* es un punto crítico de $U(x)$,

$$U'(x^*) = 0,$$

entonces

$$F(x^*) = 0,$$

y por tanto $(x^*, 0)$ es un equilibrio del sistema (S). Recíprocamente, si $(x^*, 0)$ es un equilibrio de (S), entonces x^* es un punto crítico de $U(x)$.

Dado un punto crítico x^* de $U(x)$, tenemos varios casos:

- Si x^* es un máximo local con $U''(x^*) < 0$, entonces $F'(x^*) > 0$. Por tanto, como ya vimos, el equilibrio $(x^*, 0)$ es un punto de silla.
- Si x^* es un mínimo local con $U''(x^*) > 0$, se tiene que $F'(x^*) < 0$. En este caso el equilibrio $(x^*, 0)$ no es hiperbólico. Puede demostrarse que siempre es un centro, como sucedía en el ejemplo 5.23.
- Si $U''(x^*) = 0$, no podemos deducir nada directamente; habría que analizar, en cada caso, cómo es el diagrama de fases.

Ejemplo 5.24. Consideremos el péndulo del ejemplo 5.20. Una energía potencial es la función periódica

$$U(x) = -k \cos(x),$$

cuya gráfica en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se ha representado en la figura 5.26.

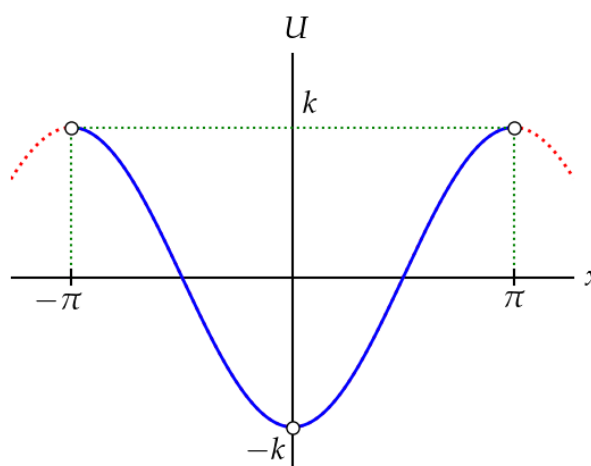


Figura 5.26: Gráfica de la energía potencial para el péndulo.

Como puede observarse, tenemos máximos en $-\pi$ y π , y un mínimo en 0. Por tanto, los equilibrios $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ son puntos de silla, mientras que $(0, 0)$ es un centro. Al ser el potencial periódico, el diagrama de fases se extiende a todo el plano por periodicidad. El diagrama de fases correspondiente se ha representado en la figura 5.27. \square

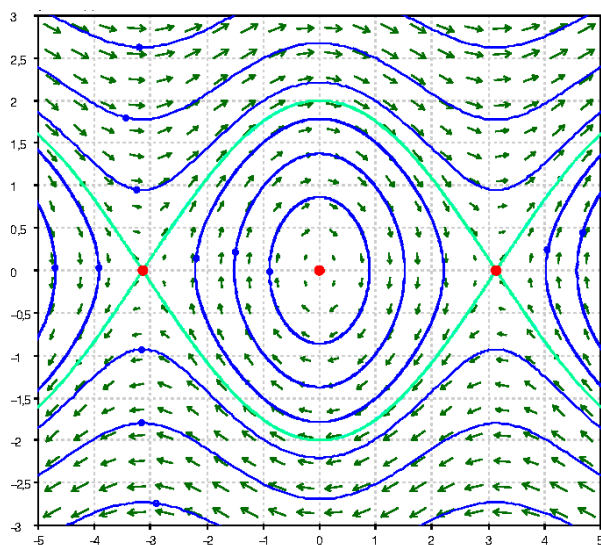


Figura 5.27: Diagrama de fases para el péndulo.

Ejemplo 5.25. Consideremos el sistema dado por

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -4x^3 + 2x. \end{cases}$$

En este caso $F(x) = -4x^3 + 2x$, cuyos ceros son $x = 0$ y $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tenemos por tanto tres equilibrios: $(0,0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$. Para determinar su estabilidad, primero calculamos la matriz jacobiana del sistema:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12x^2 + 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que los autovalores de $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ son $\lambda = \pm\sqrt{2}$, lo que significa que $(0,0)$ es un punto de silla. Por otro lado, los equilibrios $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ no son hiperbólicos, ya que los autovalores de $J(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ son $\lambda = \pm 2i$.

Calculemos una energía potencial del sistema (esto es, una primitiva de $-F$):

$$U(x) = - \int F(x) dx = \int (4x^3 - 2x) dx = x^4 - x^2.$$

La gráfica de $U(x)$, denominado *potencial de doble pozo*, se muestra en la figura 5.28.

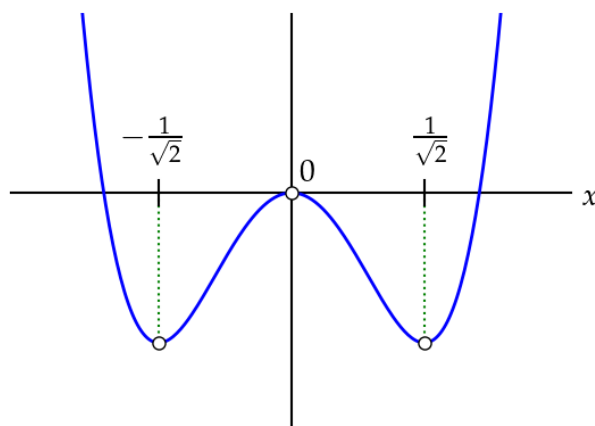


Figura 5.28: Potencial $U(x) = x^4 - x^2$.

Como puede observarse, hay un máximo en $x = 0$ que correspondería al punto de silla $(0, 0)$, y sendos mínimos en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. En consecuencia, los equilibrios $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ son centros. El diagrama de fases correspondiente se ha representado en la figura 5.29.

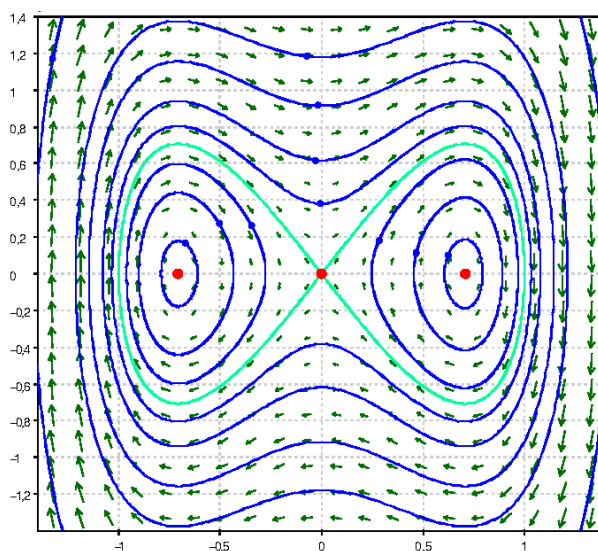


Figura 5.29: Diagrama de fases para el potencial de doble pozo.

Nótese que el «ocho» central consta de tres órbitas: el origen y dos órbitas que «conectan» al origen consigo mismo. Este tipo de órbitas, que tienden al mismo punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \pm\infty$, se denominan *homoclinicas*. \square

Hasta ahora hemos considerado sistemas *no disipativos*, en los cuales la energía se conserva.

Por este motivo, tanto el móvil como el péndulo de los ejemplos 5.19 y 5.20 continuaban su movimiento indefinidamente. Vamos a estudiar ahora el efecto que tendría una fuerza de rozamiento, que se opone al movimiento. En concreto, este tipo de fuerza tiene signo contrario a la velocidad y su módulo aumenta cuando lo hace la velocidad. De esta forma, a partir de la segunda ley de Newton, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$mx''(t) = F(x) - \mu x'(t),$$

donde $\mu > 0$ se denomina *coeficiente de fricción dinámica*. Suponiendo $m = 1$ (esto no supone pérdida de generalidad), obtenemos el sistema *disipativo*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = F(x) - \mu y, \end{cases}$$

cuya matriz jacobiana viene dada por

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x) & -\mu \end{pmatrix}.$$

Los equilibrios del sistema son los mismos que los del sistema sin fricción. Supongamos que $(x^*, 0)$ es un equilibrio, esto es, $F(x^*) = 0$. Los autovalores de $J(x^*, 0)$ son de la forma

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4F'(x^*)}}{2}.$$

Tenemos pues tres posibilidades:

- Si $F'(x^*) > 0$ tenemos autovalores reales de signo opuesto, por lo que $(x^*, 0)$ sería un punto de silla.
- Si $F'(x^*) = 0$ aparece un autovalor 0, por lo que estaríamos en un caso no hiperbólico.
- Si $F'(x^*) < 0$, tenemos que distinguir varios casos:
 - Si $\mu^2 + 4F'(x^*) > 0$ ($\Leftrightarrow \mu > 2\sqrt{|F'(x^*)|}$), aparecen dos autovalores reales negativos, por lo que $(x^*, 0)$ sería un nodo estable para el sistema linealizado. Este caso se denomina *sobreamortiguado*.
 - Si $\mu^2 + 4F'(x^*) = 0$ ($\Leftrightarrow \mu = 2\sqrt{|F'(x^*)|}$), tenemos un autovalor doble negativo; en consecuencia, $(x^*, 0)$ sería un nodo degenerado estable para el sistema linealizado. Este caso se conoce como *críticamente amortiguado*.
 - Si $\mu^2 + 4F'(x^*) < 0$ ($\Leftrightarrow \mu < 2\sqrt{|F'(x^*)|}$), los autovalores son complejos con parte real negativa, por lo que $(x^*, 0)$ sería un foco estable para el sistema linealizado. Este caso se llama *subamortiguado*.

En cualquiera de los tres casos, al aplicar el teorema de Hartman-Grobman deducimos que el equilibrio $(x^*, 0)$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 5.26. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\operatorname{sen}(x) - \mu y, \end{cases}$$

que modela un péndulo simple con rozamiento (véase el ejemplo 5.20). Los equilibrios son de la forma $(n\pi, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}$. En este caso, $F(x) = -\operatorname{sen}(x)$, de donde $F'(x) = -\cos(x)$. Para n impar, se tiene que $F'(n\pi) = 1 > 0$, por lo que el equilibrio correspondiente es un punto de silla. Por el contrario, $F'(n\pi) = -1 < 0$ para n par, por lo que el equilibrio correspondiente es asintóticamente estable.

Analicemos más detenidamente la forma del diagrama de fases cerca de los equilibrios con n par (recordemos que todos estos equilibrios representan el mismo estado físico, en el que el péndulo se halla en la posición más baja de la vertical). En la figura 5.30 se ha representado el diagrama de fases para el caso subamortiguado, que corresponde a $\mu < 2$. Como puede observarse, en un entorno de los equilibrios pares las órbitas trazan espirales mientras tienden al equilibrio. En este caso, la fuerza de rozamiento hace que el péndulo tienda a la posición de equilibrio, con infinitas oscilaciones cuya amplitud tiende a cero.

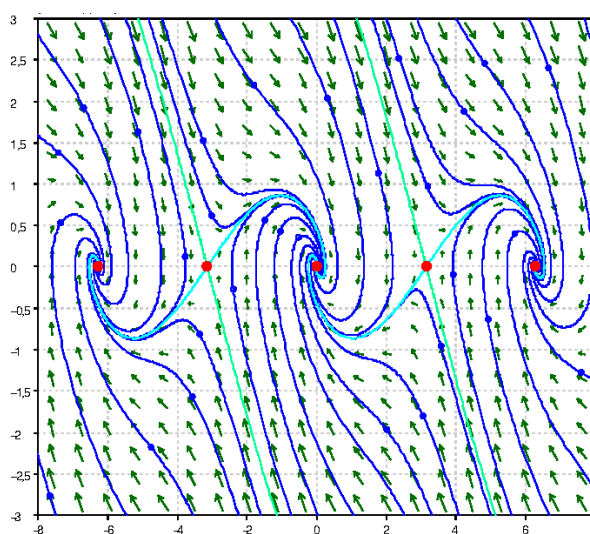


Figura 5.30: Péndulo con rozamiento. Caso subamortiguado.

En la figura 5.31 podemos ver el diagrama de fases en el caso sobreamortiguado ($\mu > 2$). Ahora no se observa el comportamiento espiral cerca de los equilibrios pares, sino que las órbitas tienden a estos directamente. Esto es debido a que la fuerza de rozamiento es más fuerte que la gravitatoria, lo que hace que el péndulo tienda a la posición de equilibrio sin oscilar indefinidamente alrededor de este.

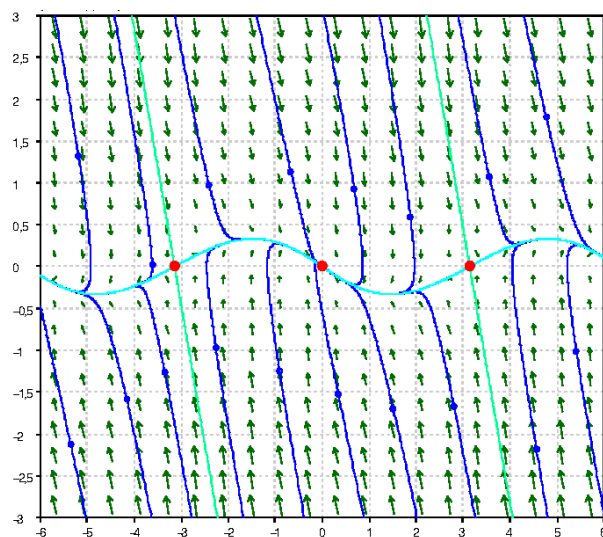


Figura 5.31: Péndulo con rozamiento. Caso sobremortiguado.

En el caso críticamente amortiguado ($\mu = 2$) se observa un comportamiento análogo al del caso sobreamortiguado (figura 5.32). \square

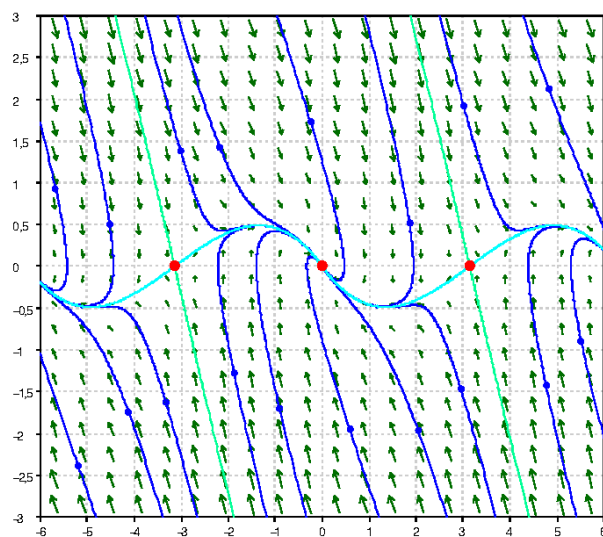


Figura 5.32: Péndulo con rozamiento. Caso críticamente amortiguado.

En el caso del sistema sin rozamiento, vimos que las órbitas se encontraban sobre las curvas de nivel de la energía total del sistema, $V(x, y) = U(x) + y^2/2$. ¿Qué ocurre cuando consideramos el sistema con rozamiento? Si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema con

rozamiento, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}\left(U(x(t)) + \frac{y(t)^2}{2}\right) = U'(x(t))x'(t) + y'(t)y(t) \\ &= -F(x(t))y(t) + (F(x(t)) - \mu y(t))y(t) \\ &= -F(x(t))y(t) + F(x(t))y(t) - \mu y(t)^2 = -\mu y(t)^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Esto significa que la energía decrece a lo largo de una trayectoria. En un equilibrio $(x^*, 0)$ en el que x^* es un mínimo local de $U(x)$, en ausencia de rozamiento teníamos órbitas periódicas (el diagrama de fases era un centro). Cuando se introduce el rozamiento, como $V(x, y)$ disminuye a lo largo de las trayectorias, podemos pensar que vamos pasando de forma continua a curvas de menor nivel, lo que se traduce en un movimiento espiral. En consecuencia, pasamos de un equilibrio estable en el caso sin rozamiento a un equilibrio asintóticamente estable en el caso con rozamiento.

5.7.3. Estudio de la estabilidad mediante funciones de Lyapunov

En esta sección vamos a presentar el *método de Lyapunov* para el estudio de la estabilidad de puntos de equilibrio. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$$

donde las funciones $f_1, f_2: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 en un abierto conexo Ω . Llamemos $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ a la función $\vec{f} = (f_1, f_2)^t$.

Definición 5.3. Una función $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es definida positiva en el punto $(x^*, y^*) \in \Omega$ si existe un entorno $\mathcal{O} \subset \Omega$ de (x^*, y^*) tal que $V(x^*, y^*) = 0$ y

$$V(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{O} \setminus \{(x^*, y^*)\}.$$

Ejemplo 5.27. Sea $V(x, y) = U(x) + y^2/2$ la energía total de un sistema de la forma (S) (sección 5.7.2), y supongamos que x^* es un mínimo (estricto) de $U(x)$. Veamos que V es definida positiva en $(x^*, 0)$. En primer lugar, añadiendo una constante adecuada, siempre podemos tomar la energía potencial U de forma que $U(x^*) = 0$. Entonces

$$V(x^*, 0) = U(x^*) = 0.$$

Por otra parte, usando que x^* es un mínimo de U , en un entorno de $(x^*, 0)$ se tiene que

$$V(x, y) = U(x) + \frac{y^2}{2} \geq U(x) \geq U(x^*) = 0.$$

En particular, en dicho entorno se verifica que $V(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (x^*, 0)$. \square

Definición 5.4. Si la función $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ posee primeras derivadas parciales, llamamos derivada total de V a la función

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)f_2(x, y).$$

En forma vectorial, $\dot{V} = \overrightarrow{\nabla V} \cdot \vec{f}$.

Ejemplo 5.28. Consideremos un sistema de la forma (S), esto es,

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = F(x). \end{cases}$$

En este caso, $f_1(x, y) = y$ y $f_2(x, y) = F(x)$. Si $U(x)$ es una energía potencial y $V(x, y)$ es la energía total asociada, se tiene que

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)y + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)F(x) = U'(x)y + yF(x) = 0,$$

usando que U es una primitiva de $-F$. □

Observación 5.5. Sea $(x(t), y(t))$ una solución del sistema, esto es,

$$x'(t) = f_1(x(t), y(t)), \quad y'(t) = f_2(x(t), y(t)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t))f_1(x(t), y(t)) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))f_2(x(t), y(t)) \\ &= \dot{V}(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Por tanto, la derivada total \dot{V} puede interpretarse como la derivada de V siguiendo una trayectoria. □

El método de Lyapunov se basa en aplicar el siguiente teorema, que daremos sin demostración.

Teorema 5.3. Sea $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$, con $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo, y sea (x^*, y^*) un equilibrio. Supongamos que existe una función V definida en un entorno abierto $\mathcal{O} \subset \Omega$ de (x^*, y^*) , continua en \mathcal{O} y diferenciable en $\mathcal{O} \setminus \{(x^*, y^*)\}$. Supongamos que V es definida positiva en (x^*, y^*) . Entonces:

- Si $\dot{V}(x, y) \leq 0$ para cada $(x, y) \in \mathcal{O} \setminus \{(x^*, y^*)\}$, el equilibrio (x^*, y^*) es estable.
- Si $\dot{V}(x, y) < 0$ para cada $(x, y) \in \mathcal{O} \setminus \{(x^*, y^*)\}$, el equilibrio (x^*, y^*) es asintóticamente estable.
- Si $\dot{V}(x, y) > 0$ para cada $(x, y) \in \mathcal{O} \setminus \{(x^*, y^*)\}$, el equilibrio (x^*, y^*) es inestable.

En cualquiera de los casos, se dice que V es una función de Lyapunov para el sistema en (x^*, y^*) .

Observación 5.6. El teorema de Lyapunov puede aplicarse para estudiar cualquier equilibrio, sea o no hiperbólico. Su aplicación dependerá de si puede encontrarse una función de Lyapunov para el sistema. Para equilibrios hiperbólicos, el teorema de Hartman-Grobman es más sencillo de aplicar y nos da información más precisa sobre el diagrama de fases. □

Ejemplo 5.29. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x+y)^2, \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2. \end{cases}$$

Vamos a analizar la estabilidad del punto de equilibrio $(0,0)$. Un sencillo cálculo muestra que $J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que $(0,0)$ no es hiperbólico. Dada $V(x,y) = x^2 + y^2$, comprobemos que es una función de Lyapunov para $(0,0)$:

- Trivialmente, $V(x,y)$ es definida positiva en $(0,0)$.
- La derivada total de V es

$$\dot{V}(x,y) = -2(x^2 + y^4)(1 - 2(x+y)^2).$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$, obviamente $-2(x^2 + y^4) < 0$. Por otro lado, podemos tomar un entorno de $(0,0)$ donde $1 - 2(x+y)^2 > 0$ (basta con que se cumpla $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x+y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$). Por tanto, existe un entorno \mathcal{O} de $(0,0)$ donde $\dot{V}(x,y) < 0$ para $(x,y) \in \mathcal{O} \setminus \{(0,0)\}$: véase la figura 5.33.

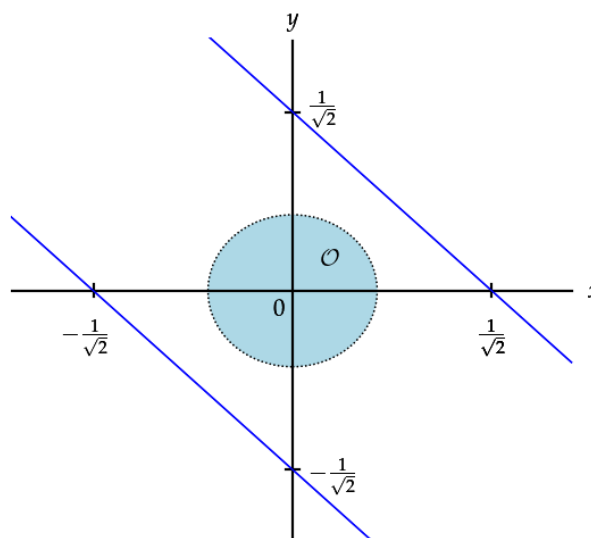


Figura 5.33: Entorno \mathcal{O} .

Aplicando el teorema de Lyapunov, deducimos que el equilibrio $(0,0)$ es asintóticamente estable. \square

5.7.4. Comentarios finales

En este tema nos hemos centrado en el estudio de sistemas de dos ecuaciones, $n = 2$. Sin embargo, la mayoría de conceptos y resultados que hemos visto pueden extenderse al caso general, $n \geq 3$. Las definiciones de equilibrio, estabilidad, hiperbolicidad, etc., se extienden de forma directa.

Un resultado importante que se generaliza es que si todos los autovalores del sistema en un equilibrio verifican $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, el equilibrio es asintóticamente estable; si alguno de los autovalores verifica $\text{Re}(\lambda_j) > 0$, entonces el equilibrio es inestable. Asimismo, tanto el teorema de Hartman-Grobman como el teorema de Lyapunov siguen siendo válidos.

Por otro lado, en el caso general las configuraciones del diagrama de fases pueden ser mucho más complejas. De hecho, pueden aparecer comportamientos caóticos; un ejemplo lo tenemos en el *atractor de Lorenz* (figura 5.34), que corresponde a un sistema de tres ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} x' = -sx + sy, \\ y' = -xz + rx - y, \\ z' = xy - bz, \end{cases}$$

siendo b , r y s constantes positivas.

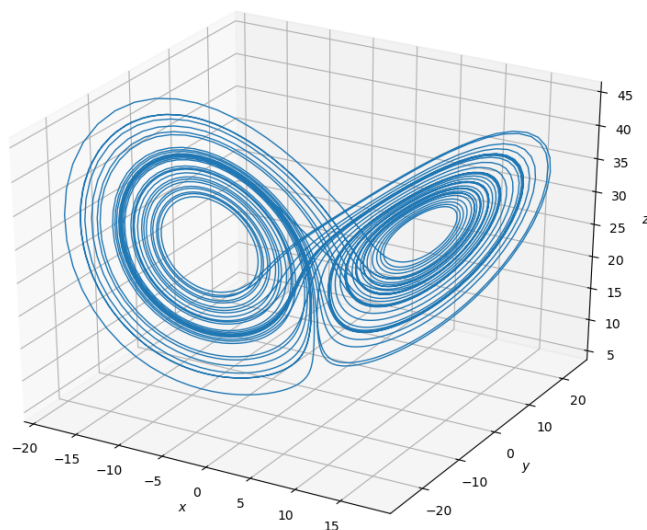


Figura 5.34: Atractor de Lorenz. Vista tridimensional de la solución correspondiente a $b = \frac{8}{3}$, $s = 10$ y $r = 28$, con condiciones iniciales $x(0) = -8$, $y(0) = 8$ y $z(0) = 27$, para tiempos $t \in [0, 50]$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] N. Bellomo, L. Preziosi. *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC Press, 1995.
- [2] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Perseus Books Publishing, 1989.
- [3] A. C. Fowler. *Mathematical Models in the Applied Sciences*. Cambridge University Press, 1997.
- [4] H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian. *An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Methods*. Addison-Wesley, 2007.
- [5] M. W. Hirsch, S. Smale R. L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2012.
- [6] V. Jiménez. *Ecuaciones Diferenciales: Cómo aprenderlas, cómo enseñarlas*. Universidad de Murcia, 2000.
- [7] R. E. Keen, J. D. Spain. *Computer Simulation in Biology. A Basic Introduction*. Wiley-Liss, 1992.
- [8] J. L. Lions. *El Planeta Tierra. El Papel de las Matemáticas y de los Superordenadores*. Espasa-Calpe, 1990.
- [9] S. Lynch. *Dynamical Systems with Applications using Python*. Birkäuser, 2018.
- [10] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2013.