

Universidad de Málaga
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación



TESIS DOCTORAL

Optimización de Técnicas de Sincronización en
Sistemas de Transmisión Multiportadora

Autor:

EDUARDO MARTOS NAYA

Directores:

JOSÉ TOMÁS ENTRAMBASAGUAS MUÑOZ
LUIS DÍEZ DEL RÍO

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIÓN

Reunido el tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

Presidente: Dr. D. _____

Secretario: Dr. D. _____

Vocales: Dr. D. _____

Dr. D. _____

Dr. D. _____

para juzgar la Tesis Doctoral titulada *Optimización de Técnicas de Sincronización en Sistemas de Transmisión Multiportadora* realizada por D. Eduardo Martos Naya y dirigida por el Dr. D. José Tomás Entrambasaguas Muñoz y el Dr. D. Luis Díez del Río, acordó por

_____ otorgar la calificación de
_____ y para que conste, se
 extiende firmada por los componentes del tribunal la presente diligencia.

Málaga a ____ de _____ del ____

El presidente:

El secretario:

Fdo.: _____

Fdo.: _____

El vocal:

El vocal:

El vocal:

Fdo.: _____

Fdo.: _____

Fdo.: _____

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera comenzar mostrando mi agradecimiento a mis directores de tesis, Tomás y Luis. Sin sus explicaciones, su paciencia y su empuje no hubiera sido posible acabarla. Gracias por tratar de transmitirme la precisión y el rigor que requiere este trabajo.

Por supuesto, a Jesús, por haber sido el mejor compañero de investigación imaginable. A lo largo de estos años trabajando juntos he compartido con él algunas penas y muchas alegrías, pero sobre todo creo haber ganado un gran amigo.

A mis compañeros de despacho, Unai y José, por su ayuda constante y por aguantarme día tras día todo este tiempo. He aprendido mucho de los dos y espero seguir haciéndolo porque, como dice José, en el despacho se está como en casa.

Tampoco quiero olvidarme de mis demás compañeros, en especial de Francis, Nacho, José Antonio y M^a Carmen. Gracias por vuestro apoyo y vuestra amistad.

En el ámbito más personal, a mis padres y mis hermanos por sus ánimos y su cariño, que han sido de vital importancia para llegar hasta aquí.

Por último, a María, por soportarme más que nadie y llenarme de ilusión y de amor cada día. A ti te dedico este trabajo, al que tantos esfuerzos, tú lo sabes bien, he destinado.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
Acrónimos	IX
Símbolos	XI
Introducción	1
1. Sistemas de transmisión DMT	5
1.1. Introducción	5
1.2. Modulación DMT	6
1.2.1. Modulación PAM multipulso	7
1.2.2. Modulación DMT	7
1.3. Igualación	9
1.3.1. Extensión cíclica y FEQ	10
1.3.2. TEQ	12
1.4. Velocidad de transmisión	14
2. Estimación del error de sincronización	17
2.1. Introducción	17
2.2. Sincronización de símbolo	18
2.3. Sincronización de muestreo	20
2.3.1. Error de fase	21
2.3.2. Error de frecuencia	23
2.4. Procedimiento de sincronización	25
2.5. Estimación del error de frecuencia	26
2.6. Estimación del inicio de símbolo DMT	29
2.7. Estimación del error de fase	30
2.8. Lazo de sincronización	32
2.9. Conclusiones	33

2-A. Apéndice: Estimador ML y límite de Cramer-Rao	35
3. Corrección digital del error de muestreo	37
3.1. Introducción	37
3.2. Muestreo síncrono y asíncrono	38
3.3. Convertidor de frecuencia de muestreo	39
3.3.1. Modelo del convertidor de frecuencia continuo	40
3.3.2. Realización digital del convertidor de frecuencia	44
3.3.3. Convertidor de frecuencia con sobremuestreo	52
3.4. Estructura del interpolador	54
3.4.1. Consideraciones <i>hardware</i>	55
3.4.2. Estructura de coeficientes almacenados	57
3.4.3. Estructura de coeficientes computados	59
3.4.4. Estructura híbrida	64
3.5. Corrección mediante el sistema rotor	70
3.6. Conclusiones	75
4. Análisis del efecto del interpolador	77
4.1. Introducción	77
4.2. Modelo de sistema	78
4.2.1. Esquema del receptor	78
4.2.2. Señal recibida	82
4.3. Análisis del error en los símbolos QAM recibidos	83
4.4. Conclusiones	89
4-A. Apéndice: Cálculo de la SDR	91
4-A.1. Cálculo de la SDR a partir de la respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$	91
4-A.2. Cálculo de la SDR para la estructura de coeficientes almacenados .	93
4-A.3. Cálculo de la SDR para la estructura de coeficientes computados . .	94
4-A.4. Cálculo de la SDR para la estructura híbrida	96
5. Diseño del interpolador	99
5.1. Introducción	99
5.2. Método de diseño de los interpoladores	101
5.2.1. Criterio de diseño	101
5.2.2. Síntesis mediante la técnica de enventanado	102
5.2.3. Cálculo de los coeficientes de la estructura	106
5.2.4. Optimización de los parámetros de diseño	109
5.3. Evaluación de los resultados del diseño	112
5.3.1. Evaluación con distintas ventanas	114
5.3.2. Evaluación con distintos ajustes polinómicos	116

5.3.3. Evaluación con distintos números de coeficientes, polinomios y órdenes	117
5.3.4. Evaluación con coeficientes de precisión reducida	121
5.4. Simulación	124
5.5. Comparación con otros sistemas de corrección	126
5.5.1. Comparación con interpoladores polinómicos clásicos	127
5.5.2. Comparación con la <i>solución rotor</i>	130
5.6. Conclusiones	132
5-A. Apéndice: Límites de la SDR	134
5-A.1. Cálculo del límite teórico de la SDR para interpoladores de coeficientes almacenados	134
5-A.2. Cálculo del límite teórico de la SDR para interpoladores de coeficientes computados mediante polinomios de primer orden	135
6. Conclusiones	139
6.1. Conclusiones generales	139
6.2. Líneas futuras de continuación	141
Referencias	143

Resumen

Una de las técnicas de transmisión digital más utilizadas en la actualidad es la modulación multiportadora o modulación multitono, también conocida como OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) en el ámbito de sistemas radio, o DMT (Discrete Multitone Transmission) para sistemas cable. Se basa en la división del canal en múltiples subcanales o portadoras, adaptando por cada una de ellas la velocidad de transmisión a la relación señal a ruido. De este modo es posible aproximar la velocidad de transmisión a la capacidad teórica del canal. Su aplicación abarca desde la transmisión de datos a alta velocidad por línea telefónica -Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL)-, a sistemas radio como la difusión de televisión digital terrestre -Digital Video Broadcasting (DVB-T)-, redes locales inalámbricas - Wireless Local Area Network (WLAN) -, o redes metropolitanas - Wireless Metropolitan Area Network (WMAN)-.

La sincronización entre el transmisor y el receptor es uno de los problemas más importantes que esta técnica plantea. Pequeños desajustes en el sincronismo del muestreo provocan interferencia entre símbolos y entre portadoras, lo que puede suponer una pérdida importante de velocidad de transmisión, especialmente, en aquellos canales en los que se alcanzan elevadas relaciones señal a ruido.

Aunque el sincronismo se puede lograr por distintas vías, crece la tendencia a alcanzarlo únicamente mediante procesamiento digital de la señal recibida. Es posible calcular el error de sincronización usando estimadores digitales y corregirlo mediante sistemas de conversión de la frecuencia de muestreo basados en interpoladores. Estos sistemas de conversión sustituyen a los osciladores de frecuencia variable, que complican el *hardware* analógico de los receptores digitales.

El objetivo de esta tesis es la optimización o mejora de técnicas de sincronización en sistemas DMT, aunque se ha centrado fundamentalmente en el análisis y diseño optimizado de los sistemas de corrección digital del sincronismo de muestreo.

A continuación se resumen sus principales aportaciones:

- El desarrollo de un estimador de máxima semejanza para calcular el error de la fase de muestreo en sistemas DMT. Dicho estimador, con un menor coste computacional, mejora las prestaciones de los anteriormente propuestos, quedando muy próximas a los límites teóricos.

- Una nueva formulación para el análisis de los sistemas de conversión de frecuencia de muestreo basados en interpoladores, encargados de corregir el sincronismo en los sistemas de muestreo asíncrono. Gracias a este análisis se explica el funcionamiento de los distintos subsistemas que lo componen y es posible enfocar el diseño del interpolador desde distintas perspectivas.
- La propuesta de una nueva estructura de realización de los interpoladores, denominada híbrida, y que engloba a las usadas habitualmente, tanto de coeficientes computados como almacenados, y proporciona nuevas posibilidades intermedias que pueden resultar de mucho valor para adaptar la realización de interpoladores a distintas arquitecturas hardware.
- Un estudio analítico del impacto de los interpoladores usados para la corrección del sincronismo de muestreo en las prestaciones del receptor. Sus conclusiones son determinantes para el diseño de los interpoladores para sistemas DMT, modificando sus criterios habituales al contemplar la presencia del igualador en el dominio de la frecuencia.
- La propuesta de un método sistemático de diseño a priori de los interpoladores para sistemas DMT, basado en las técnicas de enventanado usadas para el diseño de filtros FIR. Este método contempla la posibilidad de calcular los coeficientes para las distintas estructuras del interpolador propuestas, y de imponer ciertas restricciones a dichos coeficientes que facilitan su realización. Por todo ello, el método de diseño propuesto supone una herramienta muy versátil para el diseño de interpoladores para sistemas DMT. Mediante simulación se demuestra la validez de los cálculos analíticos realizados y la mejora en las prestaciones a igual coste computacional con respecto a interpoladores de diseño clásico (B-Spline, Lagrange, etc) y a otro método de corrección del sincronismo basado en el sistema rotor.

Abstract

Nowadays, one of the most used digital transmission techniques is multicarrier or multitone modulation, also known as OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) in radio environment and DMT (Discrete Multitone Transmission) in wired environment. Based on the frequency division of the channel into many subchannels, the DMT adapts the bitrate to signal-to-noise ratio with aim of approaching it to the channel capacity. Their applications cover from wired systems as Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL), to radio systems as Digital Video Broadcasting-Terrestrial (DVB-T), Wireless Local Area Network (WLAN) or Wireless Metropolitan Area Network (WMAN).

Synchronization between transmitter and receiver is an important problem in multicarrier systems. A little synchronization error becomes intersymbol and intercarrier interference that involves an important bitrate decrease, particularly for high signal-to-noise ratio systems as wired ones.

Although many different ways can be used to achieve synchronization, there is a growing trend to use only digital signal processing methods. Synchronization errors can be measured by digital estimator and corrected by digital sampling frequency converters. These converters adjust the sampling frequency, and replace frequency-controlled oscillator, simplifying analog hardware of digital receivers.

Optimization or improvement of synchronization technics for DMT is the thesis aim, although it's basically concentrated to analysis and design of sampling correction system. Next, the most important contribution are summarized.

First of all, a new maximum likelihood phase error estimator is developed. This estimator exhibits a better performance than previous estimator proposed, close to theoretical limits, and its computational cost is lower.

A new theoretical formulation to analyze the sampling frequency converter is suggested, yielding a better explaining of the operational behaviour of converter subsystems and supplying different points of view for design purposes.

With regard to interpolator realization, a new interpolator structure is proposed, the hybrid structure. It includes the classical structures (polynomial and filter bank) and provides new intermediate possibilities, very interesting to suit the interpolator to different hardware architectures.

Furthermore, the most important contribution of this thesis is the development of

an analytical study of interpolator effects on receiver performance, yielding important conclusions for development of design techniques.

At last, a priori interpolator design method for DMT systems is proposed. This method, based on windowing techniques used for finite impulse response filter design, allows evaluate interpolator coefficients for all structures and establishes restrictions that simplify interpolation realization. For all these reasons, this design method provides a versatile tool for designing DMT system interpolators. Simulations show the validity of analytical results of interpolation performance, and the improvements with regard to classic interpolator designs (B-Spline, Lagrange, etc) and other more complex correction method, based on rotor system.

Acrónimos

ADSL Asymmetric Digital Subscriber Line

ASIC Application Specific Integrated Circuit

DAB Digital Audio Broadcast

DFT Discrete Fourier Transform

DMT Discrete Multitone Transmision

DSP Digital Signal Processor

DVBT Digital Video Broadcasting Terrestrial

FEQ Frequency EQualizer

FFT Fast Fourier Transform

FIR Finite Impulse Response

FPGA Field Programmable Gate Array

ICI Inter Carrier Interference

IDFT Inverse Discrete Fourier Transform

IFFT Inverse Fast Fourier Transform

ISI Inter Symbol Interference

IIR Infinite Impulse Response

ML Maximum Likelihood

MSE Mean Square Error

MMSE Minimum Mean Square Error

LMS Least Mean Square

OFDM Orthogonal Frequency Division Multiplexing

QAM Quadrature Amplitud Modulation

TEQ Time EQualizer

PAM Pulse Amplitude Modulation

ppm Parts Per Million

PTEQ Per Tone EQualizer

RLS Recursive Least Square

SDR Signal to Distortion Ratio

SER Signal to Error Ratio

SNR Signal to Noise Ratio

SIR Signal to Interference Ratio

Símbolos

$a_{k,m}$	Coeficiente de orden m del polinomio correspondiente al coeficiente k del interpolador
$a_{k,m,l}$	Coeficiente de orden m del polinomio l correspondiente al coeficiente k del interpolador
$a'_{k,m}$	Coeficiente de orden m del polinomio simétrico correspondiente al coeficiente k del interpolador
$a'_{k,m,l}$	Coeficiente de orden m del polinomio simétrico l correspondiente al coeficiente k del interpolador
α, β	Constantes del filtro de lazo de sincronización
$b_m[n]$	Señal de salida del subfiltro $\tilde{h}_m$
$b_{m,l}[n]$	Señal de salida del subfiltro $\tilde{h}_{m,l}$
D	Número de muestras del símbolo DMT transmitido
$\Delta\Phi_e[n]$	Incremento de la parte entera del desfase de muestreo $\Phi[n]$
$\Delta\Omega[n]$	Diferencia relativa de frecuencias de muestreo
$\Delta\Omega'[n]$	Diferencia relativa de frecuencias de muestreo diezmada
$\widehat{\Delta\Omega}[n]$	Estimación de la diferencia relativa de frecuencias de muestreo
E	Número de muestras de la extensión cíclica
f_M	Frecuencia de muestreo a la entrada del convertidor de frecuencia
f'_M	Frecuencia de muestreo a la salida del convertidor de frecuencia
$f_{M,t}$	Frecuencia de muestreo del transmisor
$f_{M,r}$	Frecuencia de muestreo del receptor
F	Parámetro de forma de la ventana de diseño del interpolador
$F_k(\mu)$	Polinomio del coeficiente k del interpolador
$F'_k(\mu')$	Polinomio simétrico del coeficiente k del interpolador
$F_{k,l}(\mu)$	Polinomio de índice l del coeficiente k del interpolador
$F'_{k,l}(\mu)$	Polinomio simétrico de índice l del coeficiente k del interpolador
FEQ_k	Coeficiente complejo del FEQ para la portadora k
$\Phi[n]$	Desfase de muestreo
$\Phi_e[n]$	Parte entera del desfase de muestreo
$\Phi_f[n]$	Parte fraccionaria del desfase de muestreo

$\hat{\Phi}_{ML}[\ell]$	Estimación de máxima semejanza de desfase de muestreo
$\hat{\Phi}_{MMSE}[\ell]$	Estimación de mínimo error cuadrático medio del desfase de muestreo
$\hat{\Phi}_{ML-simp}[\ell]$	Estimación de máxima semejanza simplificada del desfase de muestreo
$g[n]$	Respuesta al impulso discreta equivalente del canal
G_k	Respuesta del canal a la portadora k
γ	Margen de relación señal a ruido de funcionamiento
γ_M	Margen de funcionamiento del sistema
γ_C	Ganancia de codificación
γ_k	Constante de paso del algoritmos LMS para el ajuste del FEQ en la portadora k
$h(t)$	Respuesta la impulso del filtro continuo original del interpolador
$h_d[n, j]$	Respuesta al impulso variante del interpolador
$h_\mu[k]$	Respuesta al impulso del interpolador para un retardo μ
$\hat{h}[l, k]$	Respuesta al impulso del interpolador para el retardo correspondiente al índice l
$\tilde{h}_m$	Subfiltro correspondiente a los coeficientes de orden m de los polinomios del interpolador
$\tilde{h}_{m,l}$	Subfiltro correspondientes a los coeficientes de orden m de los polinomios de índice l del interpolador
$H(\omega)$	Respuesta en frecuencia del filtro continuo original del interpolador
$H_{\mu,k}$	Respuesta del interpolador con retardo μ a la portadora k
$H_{\mu,k}^c$	Respuesta de retardo compensado del interpolador con retardo μ a la portadora k
$\overline{H_k^c}$	Promedio con respecto a μ de $H_{\mu,k}^c$ con respecto a μ
$\overline{ H_k^c ^2}$	Valor cuadrático medio con respecto a μ de $H_{\mu,k}^c$
$H_{FL}(z)$	Función de transferencia del filtro de lazo de sincronización
l	Índice de las respuestas al impulso de un interpolador de coeficientes almacenados
L	Número de muestras de la respuesta del canal
L	Factor de sobremuestreo del receptor
M	Número de coeficientes del interpolador o número de respuestas cuando se usa la estructura de coeficientes almacenados
μ	Retardo fraccionario
$\hat{\mu}_l$	Retardo fraccionario que introduce la respuesta al impulso l del interpolador de coeficientes almacenados
N	Número de muestras del símbolo DMT original
N_k	Componente de ruido en la portadora k
N_θ	Componente de ruido tangencial al símbolo QAM
O	Orden de los polinomios del interpolador
ω_c	Frecuencia de corte del filtro ideal para el diseño del interpolador

ω_M	Frecuencia angular de muestreo
P	Número de polinomios por coeficiente del interpolador
P_e	Probabilidad de error
$r_s[n]$	Señal discreta DMT resultado del muestreo asíncrono del receptor
$r_{s,k}[n]$	Notación compacta de $r_s[n - \Phi_e[n] - k]$
$r(t)$	Señal DMT recibida continua
$r_\ell(t)$	Símbolo DMT ℓ recibido continuo
$r[n]$	Señal DMT recibida discreta
$r_\ell[n]$	Símbolo DMT ℓ recibido discreto
R	Velocidad de transmisión (bits/segundo)
$s[n]$	Señal DMT transmitida discreta
$s_\ell[n]$	Símbolo DMT ℓ transmitido
SDR_k	Relación señal a distorsión de la portadora k
SER_k	Relación señal a error de la portadora k
SNR_k	Relación señal a ruido de la portadora k
Sx_k	Potencia de los símbolos QAM transmitidos por la portadora k
σ_k^2	Potencia de ruido en la portadora k
t_n	Instantes de muestreo originales del convertidor de frecuencia
t'_n	Nuevos instantes de muestreo del convertidor de frecuencia
T_S	Periodo de símbolo DMT
$\theta_{k,\ell}$	Desfase que produce la componente de ruido N_θ en el símbolo de la portadora k el símbolo DMT ℓ
$T_{M,t}$	Periodo de muestreo del transmisor
$T_{M,r}$	Periodo de muestreo del receptor
T_M	Periodo de muestreo a la entrada del convertidor de frecuencia
T'_M	Periodo de muestreo a la salida del convertidor de frecuencia
$t_{k,l,n}$	Instante n de ajuste del polinomio l del coeficiente k del interpolador
$< U >$	Subconjunto de portadoras usadas para estimación de algún parámetro
$X_{k,\ell}$	Símbolo QAM transmitido de la portadora k y del símbolo DMT ℓ
$\tilde{Y}_{k,\ell}$	Símbolo QAM recibido de la portadora k y del símbolo DMT ℓ
$Y_{k,\ell}$	Símbolo QAM igualado por el FEQ de la portadora k y del símbolo DMT ℓ

Introducción

Los grandes avances tecnológicos que se han producido en este último siglo en el ámbito de las telecomunicaciones están desencadenando profundas transformaciones en la forma en que la sociedad actual se desarrolla. Se están modificando los paradigmas de la sociedad industrial y se tiende a lo que se ha denominado sociedad de la información.

Los instrumentos que están permitiendo estos cambios son las redes de telecomunicación. Hasta hace pocos años la más importante de las redes desplegadas ha sido la de telefonía fija, que permite establecer comunicaciones por voz de forma casi inmediata entre los puntos más remotos del planeta. No obstante, ha sido la aparición de Internet la que realmente ha abierto las puertas a nuevas formas de comunicación que hasta hace poco parecían impensables. Por sus peculiares características es una versátil infraestructura telemática y a la vez una fuente de contenidos inagotable. A raíz de todas estas transformaciones se ha producido un fuerte aumento de la demanda social de medios de transmisión de mayor velocidad, que hagan posible acceder de forma más fácil y cómoda a la creciente oferta de servicios que proporciona Internet.

Este fenómeno ha planteado la necesidad de desarrollar nuevas tecnologías de comunicación que permitan alcanzar y gestionar elevados regímenes binarios sobre las infraestructuras de redes ya desplegadas o aún por implantar. Una de las respuestas a esta demanda ha sido el desarrollo de nuevas técnicas de transmisión digital, que permiten aprovechar la capacidad de canales de transmisión aunque sus condiciones no sean las más favorables. Entre las más modernas de estas técnicas se encuentra la modulación multiportadora o multitono. Esta tecnología explota los enormes avances que ha experimentado los sistemas digitales de computación, haciendo posible realizar complejos algoritmos que se adaptan mejor a las características del canal para alcanzar elevadas velocidades de transmisión.

Las aplicaciones que se han dado a estas técnicas abarcan una amplia gama de sistemas de comunicaciones de muy distinta naturaleza: transmisión de alta velocidad por el bucle de abonado, redes inalámbricas locales o metropolitanas, difusión de radio y televisión digital, etc.

Como cualquier sistema de transmisión digital, uno de los aspectos importantes a considerar en su diseño es la sincronización entre transmisor y receptor. Para lograrla el receptor debe incorporar una serie de procedimientos que le permitan alcanzarla y mantenerla. En los sistemas que usan modulación multiportadora este problema es es-

pecialmente importante porque las pérdidas de sincronismo no sólo producen una mayor interferencia entre símbolos consecutivos sino también mayor interferencia entre las distintas portadoras.

Gracias a los avances en la capacidad de cómputo de los sistemas digitales, actualmente se tiende a diseñar sistemas que permiten alcanzar la sincronización, única y exclusivamente mediante procesamiento digital de la señal, es decir, sin necesidad de modificar la frecuencia del oscilador que controla el muestreo en el receptor.

La finalidad de esta tesis es optimizar o mejorar las distintas técnicas existentes para lograr la sincronización en sistemas multiportadora. Este propósito se puede concretar en distintos objetivos descritos a continuación.

Por un lado, se pretende mejorar la estimación del error de sincronización. Para alcanzar y mantener el sincronismo hay que realizar una estima continua y precisa del error de sincronización. Por este motivo, es importante obtener nuevos estimadores que mejoren las prestaciones de los ya existentes sin que aumente significativamente su coste computacional.

Por otro lado, se desea optimizar la corrección digital del error de sincronización, adaptándola a las características de los receptores de sistemas de transmisión multiportadora. Esta optimización comprende dos aspectos bien diferenciados: la reducción del coste computacional de su realización y la mejora de las prestaciones que ofrece al receptor. Estas mejoras requieren establecer modelos que describan su funcionamiento y que permitan analizar los efectos que provocan en la demodulación de los símbolos recibidos. De este modo se pueden comparar estructuras de realización que se adapten a distintas arquitecturas *hardware* sobre las que se implementan estos sistemas, y desarrollar métodos de diseño que minimicen el error introducido en los símbolos demodulados.

A continuación se presenta la organización de esta tesis, que consta de seis capítulos objeto de la siguiente descripción.

El primero de ellos introduce los sistemas multiportadora o sistemas DMT (Discrete Multitone Transmission). Se explican los fundamentos de la modulación multiportadora y los esquemas del transmisor y el receptor, basados en algoritmos rápidos para el cálculo de la transformada discreta de Fourier. También se abordan las principales soluciones al problema de la interferencia entre símbolos, que hacen uso de la extensión cíclica de los símbolos y los igualadores en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Por último se evalúa la velocidad de transmisión que es posible alcanzar en función de las características del canal.

En el segundo capítulo se estudian los estimadores de los errores de sincronización. Se plantean los principales problemas de sincronización que presentan los sistemas DMT: el sincronismo de símbolo o sincronismo grueso y el sincronismo de muestreo o sincronismo fino. Después se propone un procedimiento para alcanzar y mantener la sincronización en tres etapas. A continuación se exponen los estimadores necesarios en cada una de estas etapas, prestando especial atención a la estimación del error de fase de muestreo. Por

último se analiza como se cierra un lazo de sincronización y se describen brevemente sus peculiaridades, de utilidad para diseñar los parámetros del filtro de lazo.

El tercer capítulo se dedica al estudio del funcionamiento de los sistemas de corrección digital del error de muestreo. En primer lugar se plantea un modelo basado en el filtro de retardo fraccionario variable o interpolador. A continuación se analizan distintas estructuras para realizar el interpolador en función de la forma de calcular sus coeficientes, y se propone una nueva estructura que proporciona mayor flexibilidad al diseñador.

En el cuarto capítulo se realiza un análisis del impacto que tiene el interpolador en los símbolos demodulados de un sistema DMT. Se propone un modelo completo del receptor DMT y de la señal recibida que sirve para realizar un estudio de la distorsión que introduce el interpolador en los símbolos igualados, y del que se extraen expresiones analíticas para evaluar sus prestaciones.

En el capítulo quinto se propone un método para el diseño del interpolador. En primer lugar se establece un criterio que guíe el proceso de diseño a partir de las expresiones del análisis del capítulo anterior. Después se propone un algoritmo de optimización de los coeficientes de la estructura del interpolador basado en el método del inventariado, también usado para el diseño de filtros de respuesta al impulso finita. También se evalúan los resultados variando los distintos parámetros del diseño y se presentan simulaciones que confirman la validez general de las aproximaciones realizadas y de los resultados previstos. Estas simulaciones también sirven para comprobar las ventajas de estos diseños del interpolador frente otros diseños clásicos u otros sistemas de corrección de la sincronización.

El último capítulo expone las conclusiones generales de esta tesis, resumiendo sus principales aportaciones y los resultados más relevantes. Además, se plantean una serie de líneas futuras de continuación de este trabajo para profundizar aún más en el diseño de interpoladores y aprovechar los avances alcanzados para otras aplicaciones.

Capítulo 1

Sistemas de transmisión DMT

1.1. Introducción

La idea de multiplexar señales en el dominio de la frecuencia a través de un canal de transmisión casi se remonta a los primeros sistemas de comunicaciones. Sin embargo, mucho más reciente es usar la división en frecuencia para aumentar la velocidad de transmisión. Dependiendo de las condiciones de cada banda se puede repartir adecuadamente el flujo binario entre ellas, de modo que se adapte mejor a la capacidad del canal.

Uno de los primeros sistemas que propuso una aproximación rudimentaria a esta técnica para la transmisión digital a través del canal telefónico fue el de Collins Kineplex [Doel57]. Sin embargo, no fue hasta el inicio de la década de los 70 cuando se retoma la idea para aplicarla de forma más avanzada en [Wein71], con el uso de la transformada discreta de Fourier (DFT) para realizar la modulación/demodulación de forma eficiente y la introducción de un tiempo de guarda entre símbolos para reducir la interferencia entre símbolos - Inter Symbol Interference (ISI) -. A principio de los 80 se perfecciona con la invención de la extensión cíclica presentada en [Peled80]. De este modo, además de evitar la ISI, se elimina la interferencia entre portadoras - InterCarrier Interference (ICI)- siempre que la duración de la respuesta del canal sea inferior a la de la extensión cíclica. A finales de los 80 y principio de los 90 se demuestra teóricamente que su eficiencia espectral es equivalente a la que se puede alcanzar mediante sistemas monoportadora con complejos métodos de igualación [Zerv89] y se proponen los primeros módems que la aplican para transmisión de alta velocidad por bucle de abonado [Bing90][Chow91].

En estos últimos años esta técnica de transmisión ha cobrado una enorme importancia en el ámbito de la comunicaciones digitales. Se ha usado en multitud de estándares internacionales como los de transmisión de datos a alta velocidad por la línea telefónica - *Asymmetric Digital Subscriber Line* (ADSL)[ADSL95] -, difusión de radio y televisión digital -*Digital Audio Broadcasting* (DAB)[DAB95] y *Digital Video Broadcasting-Terrestrial*(DVB-T)[DVBT97]- o redes inalámbricas locales y metropolita-

nas - *Wireless Local Area Network* (WLAN)[WLAN99] y *Wireless Metropolitan Area Network* (WMAN)[WMAN02]-.

A lo largo de las últimas décadas esta modulación ha recibido múltiples denominaciones, entre las que se han terminado imponiendo dos: modulación multiportadora o multitono discreta, DMT (Discrete Multi-Tone), y multiplexación por división en frecuencias ortogonales, OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Aunque los principios teóricos son los mismos, cada uno de estos términos se utiliza en distintos ámbitos. Mientras que las siglas OFDM se usan en sistemas de transmisión por radio, DMT se usa en sistemas de transmisión por cable [Edfo96]. A lo largo de esta tesis se usará DMT, puesto que los modelos propuestos son propios de sistemas de transmisión banda base que prescinden de la modulación/demodulación mediante una portadora de radiofrecuencia.

En este capítulo se van a exponer los conceptos básicos sobre los sistemas de transmisión basados en DMT. En primer lugar se explicará la modulación DMT como caso particular de las modulaciones multipulso, que tanto auge han tenido en los últimos años. Se expondrá la ventaja que supone su implementación mediante los algoritmos de la transformada rápida de Fourier - *Fast Fourier Transform* (FFT)-. También se mostrarán las técnicas más importantes que se utilizan para evitar ISI y la ICI, que comprenden el uso de la extensión cíclica e igualadores en el dominio del tiempo - Time EQualizer (TEQ)- y de la frecuencia - Frequency EQualizer (FEQ). Por último se detallarán los cálculos de la velocidad alcanzable con los sistemas DMT en función de la relación señal a ruido presente en el canal. En [Ciof91] se pueden encontrar exposiciones más detalladas sobre muchos de los aspectos expuestos en este capítulo introductorio y en [Edfo96] multitud de referencias de interés.

El principal objetivo de este capítulo es construir un modelo sencillo de sistema transmisor/receptor DMT con el que se puedan analizar los principales problemas de sincronización en los siguientes capítulos.

1.2. Modulación DMT

La modulación DMT o modulación multiportadora es una técnica que divide el canal de transmisión en múltiples subcanales correspondientes a distintas bandas de frecuencia. Por cada uno de ellos se transmiten símbolos de una constelación QAM (Quadrature Amplitude Modulation), cuyo tamaño se escoge en función de la relación señal a ruido presente en la banda correspondiente. En canales muy dispersivos o con ruido muy coloreado este método tiene la ventaja de adaptar muy bien la velocidad de transmisión a la relación señal a ruido en cada banda, aprovechando mejor la capacidad del canal.

Para profundizar en las características de la modulación multiportadora conviene introducir primeramente las modulaciones PAM multipulso o modulaciones basadas en bancos de filtros discretos. Estas modulaciones han tenido un gran auge en los últimos años gracias al desarrollo del procesamiento digital de la señal, especialmente en lo relativo a los

sistemas de tasa de múltiple [Vayd92][Akan98]. Por este motivo, en el subapartado siguiente, se comenzará exponiendo los fundamentos de este tipo de modulación, para más adelante particularizar el caso de la modulación DMT.

1.2.1. Modulación PAM multipulso

Las modulaciones PAM multipulso son una combinación de las modulaciones PAM con las modulaciones de pulsos discretos ortogonales [Lee97]. La señal transmitida se puede expresar como una secuencia de símbolos multipulso de la forma

$$s[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} s_{\ell}[n - \ell N] \quad (1.1)$$

donde cada símbolo se define como

$$s_{\ell}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X_{k,\ell} \Psi_k[n] \quad (1.2)$$

Como se muestra en la expresión anterior, cada símbolo PAM $X_{k,\ell}$ modula a su correspondiente pulso $\Psi_k[n]$ de N muestras de duración, y el símbolo multipulso es la suma de estos símbolos modulados.

Para demodular en el receptor se usan un conjunto de filtros adaptados a los pulsos del transmisor, como se muestra en la figura 1.1. Para evitar que exista interferencia entre los símbolos PAM, los pulsos $\Psi_k[n]$ tienen que presentar la propiedad de ortogonalidad, que se puede enunciar como

$$\sum_{n=0}^N \Psi_k[n] \Psi_{k'}^*[n] = \delta[k - k'] \quad (1.3)$$

La estructuras del modulador y del demodulador, mostradas en la figura 1.1, equivalen a sendos bancos de filtros, de síntesis y de análisis respectivamente, y la condición de ortogonalidad se corresponde con la propiedad de reconstrucción perfecta usada para bancos de filtros [Vayd92]. El creciente interés por estos sistemas de tasa múltiple ha proporcionado una perspectiva diferente de los sistemas de modulación multipulso, lo que se refleja en algunas propuestas que profundizan en esta línea [Sand95][Scag99].

1.2.2. Modulación DMT

La modulación DMT es un caso particular de la modulación PAM multipulso, en la que los pulsos $\Psi_k[n]$ son portadoras complejas que se definen como

$$\Psi_k[n] = \frac{e^{j \frac{2\pi k n}{N}}}{N} w[n] \quad (1.4)$$

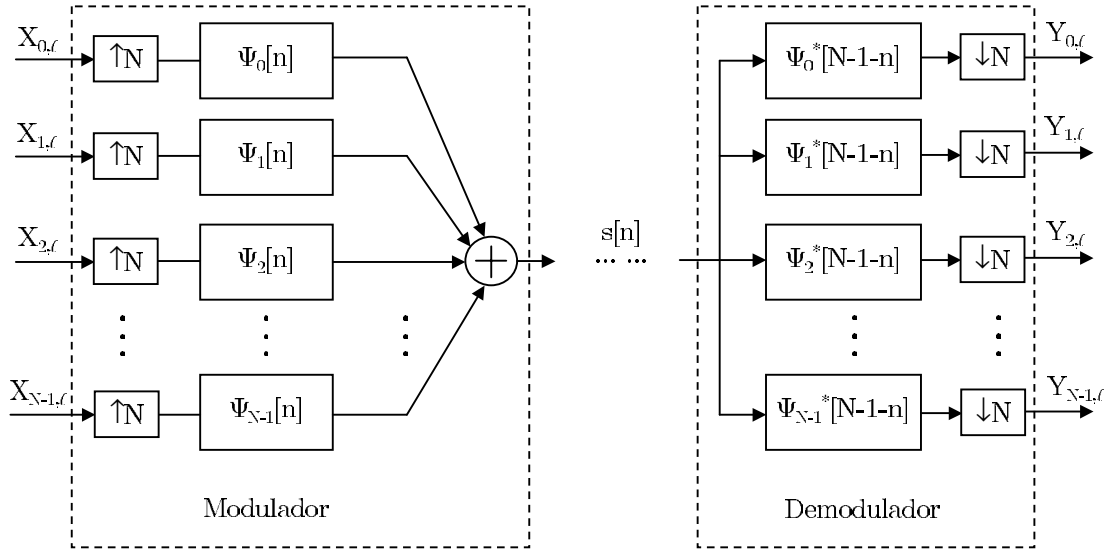


Fig. 1.1: Modulador/Demodulador multipulso

donde la función $w[n]$ equivale a

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1.5)$$

Usando estos pulsos la expresión de cada símbolo multipulso es

$$s_\ell[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{k,\ell} e^{j\frac{2\pi kn}{N}} w[n] \quad (1.6)$$

En adelante, los símbolos multipulso, cuyos pulsos se definen según la ecuación 1.4, se denominarán símbolos multitono o símbolos DMT, y los símbolos PAM $X_{k,\ell}$, que pueden ser amplitudes reales o complejas dependiendo de la constelación elegida, se denominarán genéricamente símbolos QAM (Quadrature Amplitud Modulation).

Hay que destacar que la ecuación 1.6 equivale exactamente a la transformada discreta de Fourier inversa - Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)- de la secuencia $X_{k,\ell}$ de N muestras. De la misma forma, la demodulación de la señal recibida equivale a la transformada discreta de Fourier -Discrete Fourier Transform (DFT)- de N muestras de la señal recibida. Esta propiedad es de gran importancia puesto que facilita mucho la realización de la modulación/demodulación usando algoritmos muy eficientes desarrollados para el cálculo de la DFT o IDFT, conocidos genéricamente como FFT (Fast Fourier Transform). Mientras que una implementación menos eficiente supone un número de multiplicaciones muy elevado (N^2), usando estos algoritmos dicho número se reduce drásticamente ($N \log_2(N)$).

Como se puede observar los pulsos $\Psi_k[n]$ son complejos, por lo que en general la señal transmitida $s[n]$ también lo será. En caso de que el canal sea paso banda (sistemas en los que la señal multitono modula una portadora de radio) es posible transmitir dicha señal compleja. Sin embargo, en el caso de que el canal sea banda base (sistemas en los que la señal multitono no modula una portadora de radio) sólo es posible transmitir señales reales. En este tipo de canales, para que la parte imaginaria sea igual a cero se impone a los símbolos QAM $X_{k,\ell}$ la condición de simetría hermítica

$$X_{k,\ell} = X_{k',\ell}^* \quad \text{donde} \quad k' = N - k \pmod{N} \quad (1.7)$$

Esta condición para los valores de k iguales a 0 y $N/2$ implica

$$\begin{aligned} X_{0,\ell} &= X_{0,\ell}^* \Rightarrow \Im\{X_{0,\ell}\} = 0 \\ X_{N/2,\ell} &= X_{N/2,\ell}^* \Rightarrow \Im\{X_{N/2,\ell}\} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Esta simetría supone que sólo se puedan enviar $N/2 + 1$ símbolos QAM, de los cuales los correspondientes a las portadoras 0 y $N/2$ deben ser reales, por lo que en total equivalen a $N/2$ símbolos complejos.

La estructura de un modulador/demodulador multitono para canal banda base se presenta en la figura 1.2. En el se observa un bloque hermitizador, que obtiene los $N/2 - 1$ símbolos adicionales y simétricos a los $N/2 - 1$ originales que, modulados mediante la IFFT, dan como resultado el símbolo transmitido. En el demodulador se aplica la FFT a cada símbolo para obtener los $N/2 + 1$ símbolos originales.

La densidad espectral de potencia de cada portadora tiene aproximadamente forma de función *sinc*(), como se aprecia en la figura 1.3. Claramente se observa que existen solapes entre los espectros de las distintas portadoras. Por este motivo, se puede afirmar que los símbolos de distintas portadoras, además de compartir tiempo, pues se transmiten simultáneamente, también comparten frecuencia. Lo que permite que sean separables es la condición de ortogonalidad expresada en la ecuación 1.3.

1.3. Igualación

En cualquier sistema de transmisión en el que el canal es dispersivo la duración de los símbolos transmitidos se alarga, lo que produce solapamiento entre los pulsos recibidos o ISI. Una de las características importantes que diferencia a los sistemas DMT con respecto a otros son las peculiares técnicas que se usan para reducir estas interferencias.

En este apartado se revisarán estas técnicas de igualación. En primer lugar, se explicará cómo, aplicando la extensión cíclica de los símbolos DMT, es posible llegar a eliminar la ISI y la ICI, y la necesidad de usar el FEQ para escalar adecuadamente los símbolos QAM. Posteriormente, se comentará la posibilidad de acortar la respuesta impulsiva del canal mediante el TEQ, permitiendo reducir la extensión cíclica y mejorando con ello la velocidad de transmisión.

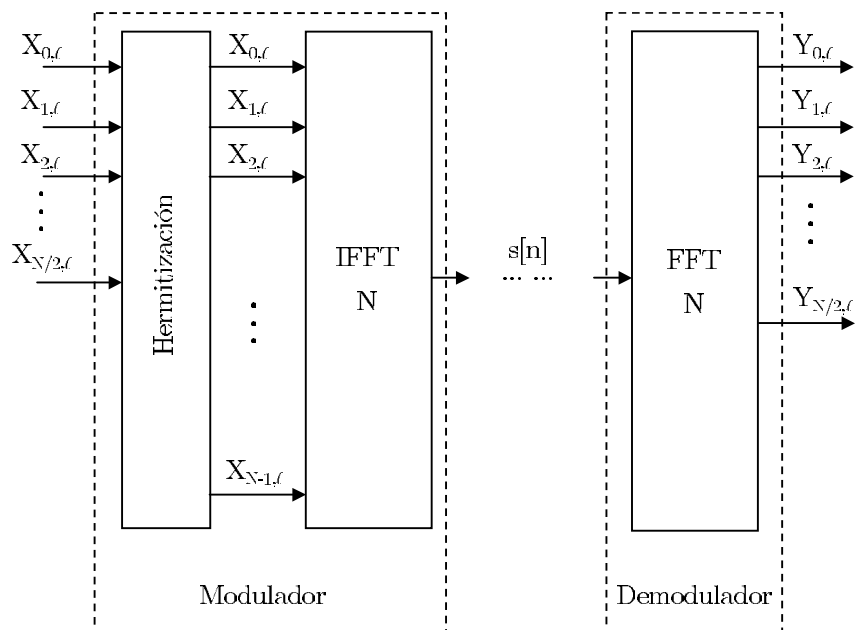


Fig. 1.2: Modulador/Demodulador multitono para canal banda base

1.3.1. Extensión cíclica y FEQ

La forma más directa para evitar que se produzca interferencia entre símbolos consecutivos es dejar un tiempo de guarda entre ellos en el que se detiene la transmisión. Su duración debe ser mayor que la de la respuesta impulsiva del canal. Como contrapartida, al alargar el periodo de símbolo se pierde velocidad de transmisión. Esta técnica sólo tiene interés en aquellos sistemas en los que el periodo de símbolo tenga una duración mucho mayor que la respuesta al impulso del canal, con lo que el periodo de guarda supone una pequeña pérdida de velocidad de transmisión.

En los sistemas DMT el periodo de símbolo puede alargarse sin que suponga una pérdida significativa de la velocidad de transmisión, aumentando el número de portadoras y por tanto el número de símbolos QAM. De este modo la pérdida en la velocidad de transmisión que supone la reducción de la frecuencia de símbolo DMT se compensa con el aumento de símbolos QAM y por tanto del número de bits transmitidos por símbolo DMT. Por este motivo la duración del símbolo se puede adaptar a la duración de la respuesta al impulso del canal, de modo que sea mucho mayor.

Sin embargo, al dejar un periodo de guarda entre símbolos, aunque se evite la ISI, como el canal altera la forma de pulso recibido, se pierde la ortogonalidad entre portadoras y aparece ICI. La solución para evitar la ICI consiste en usar el periodo de guarda para repetir las últimas muestras del símbolo a transmitir, como muestra la figura 1.4. Para diferenciar el símbolo antes y después de añadir la extensión cíclica, en adelante se denominará al primero símbolo DMT original y al segundo, simplemente, símbolo DMT.

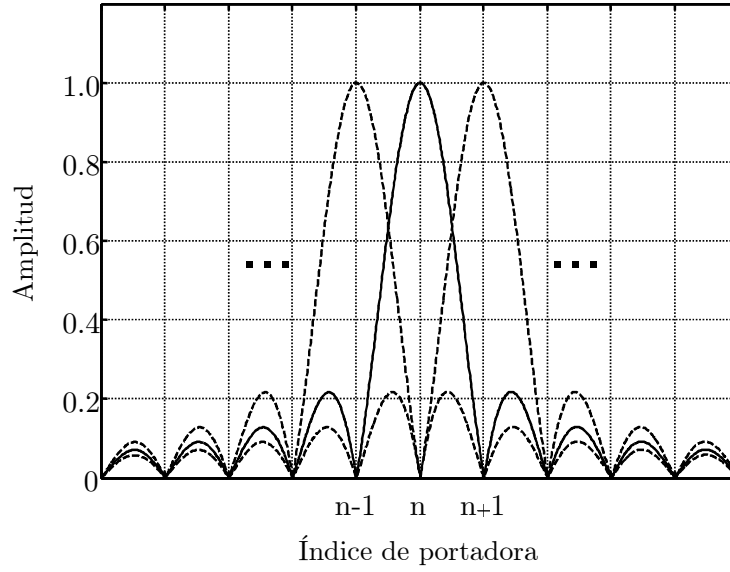


Fig. 1.3: Densidad espectral de potencia de tres portadoras consecutivas

El objetivo de dicha extensión es que al menos durante el periodo de símbolo DMT original la convolución de la respuesta del canal con el símbolo DMT sea equivalente a una convolución circular, es decir

$$r[n] = s[n] \otimes g[n] \quad (1.9)$$

donde $s[n]$ es la señal transmitida, $g[n]$ la respuesta al impulso del canal, y $r[n]$ la señal recibida. De esta forma, si en el receptor se elimina la extensión cíclica y se demodula el símbolo se obtiene

$$\tilde{Y}_{k,\ell} = X_{k,\ell} G_k \quad (1.10)$$

donde G_k es la respuesta del canal a la portadora k . En esta expresión se observa que los símbolos QAM demodulados $\tilde{Y}_{k,\ell}$ no sufren interferencia entre portadoras y sólo se ven escalados por un factor complejo G_k , correspondiente a la respuesta del canal. Por tanto, para detectar correctamente los símbolos demodulados sólo es necesario multiplicarlos por una constante compleja, de modo que el nuevo símbolo sería

$$Y_{k,\ell} = \tilde{Y}_{k,\ell} FEQ_k \quad \text{donde} \quad FEQ_k = G_k^{-1} \quad (1.11)$$

Este escalado es equivalente a una igualación o compensación de la respuesta en frecuencia del canal, por lo que recibe el nombre de igualador en el dominio de la frecuencia.

El diagrama de bloques del transmisor y el receptor DMT que incluye el sistema de igualación se presenta en la figura 1.5. En él se aprecia cómo, a los símbolos DMT, antes de ser transmitidos, se les añade la extensión cíclica y cómo, después, se elimina en el receptor para ser demodulados usando la FFT e igualados mediante el FEQ.

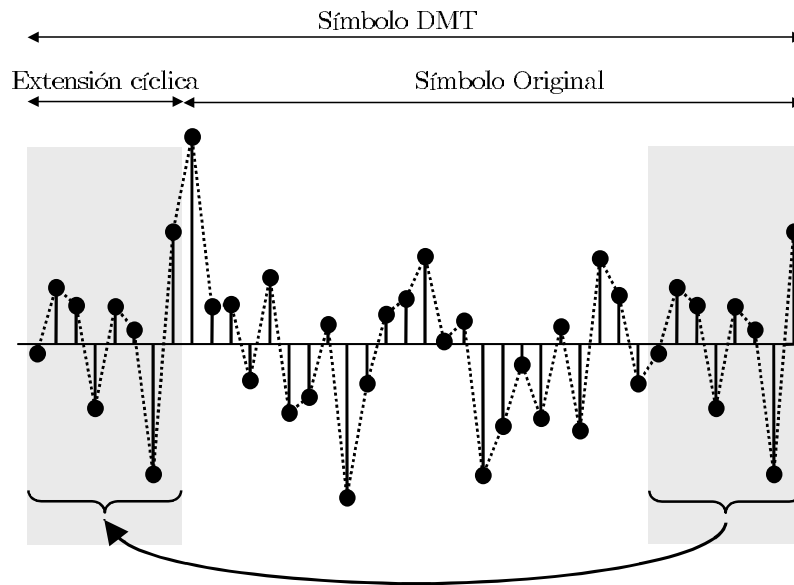


Fig. 1.4: Extensión cíclica de los símbolos DMT

El diseño del *FEQ* no tiene porque ser atender únicamente a compensación de la respuesta del canal (*zero-forcing*). En la práctica se diseña con el criterio de minimizar el error cuadrático medio - Mean Square Error (MSE)- haciendo uso de algoritmos LMS (Least Mean Square) [Chow91][Lee95][VanB95], que consideran también el ruido presente en los símbolos QAM recibidos.

1.3.2. TEQ

En ocasiones la respuesta al impulso del canal, cuando es muy dispersivo, tiene una duración demasiado larga con respecto al periodo de símbolo. Para evitar que la extensión cíclica suponga una pérdida importante de la velocidad de transmisión es necesario alargar el periodo de símbolo DMT, incrementando el número de portadoras para evitar que se reduzca la velocidad de transmisión. Sin embargo, si el número de portadoras es muy elevado, el coste computacional de los algoritmos FFT puede ser demasiado alto.

Para evitar este problema en algunos sistemas DMT se hace uso de un igualador en el dominio del tiempo o TEQ [Chow91], que se coloca en el receptor antes de la eliminación de la extensión cíclica, como se observa en la figura 1.6. La misión de este igualador es un tanto atípica puesto que no trata tanto de igualar la respuesta en frecuencia del canal como de acortar lo más posible su respuesta al impulso. De este modo, es posible usar una extensión cíclica más corta y, en consecuencia, un número menor de portadoras.

El diseño de este igualador es un problema muy complejo y que realmente no puede considerarse solucionado. Se han propuesto múltiples métodos para su diseño que parten

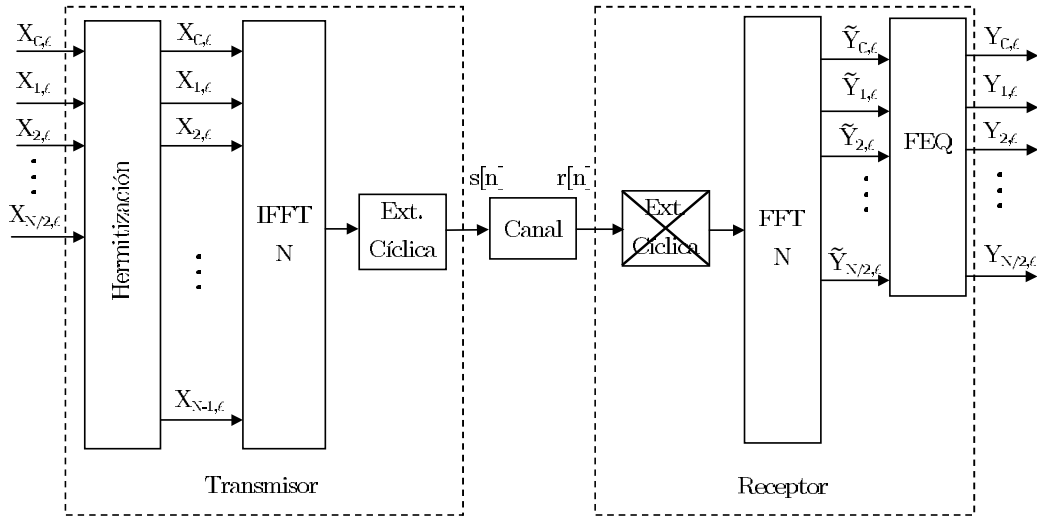


Fig. 1.5: Transmisor/receptor DMT con igualación de canal mediante extensión cíclica y FEQ

de una estimación previa de la respuesta del canal. En cuanto al criterio de diseño elegido, hay que distinguir dos: el *zero forcing*, que trata de lograr el máximo confinamiento de la respuesta al impulso del canal, y el de máxima capacidad, que considera también el ruido del canal y trata de optimizar la velocidad de transmisión. El método que se deriva de este último criterio, propuesto en [Dhah97], es muy complejo y, al tener que solventarse en tiempo real, resulta demasiado costoso computacionalmente. Además, no presenta grandes mejoras con respecto a otras soluciones ni asegura la convergencia a la solución óptima. En cuanto a los métodos que usan criterio *zero forcing*, se han presentado distintas alternativas en [Chow93][Lee95][Melsa96][López01]. Existen algunas diferencias en cuanto al algoritmo iterativo que proponen para calcularlo y a la condición inicial que usan para evitar la solución trivial, según la cuál todos los coeficientes son iguales a cero. No obstante, aunque en la mayoría de los casos dan buenos resultados, su convergencia tampoco está asegurada.

En [Poll00b] se propone una ingeniosa forma de trasladar el TEQ al dominio de la frecuencia, convirtiéndolo en un filtro de varios coeficientes complejos para cada portadora, denominado PTEQ (Per Tone Equalizer). De este modo es posible adaptar mejor su respuesta a cada portadora sin un incremento del coste computacional. En [VanAc03] se propone un método RLS (Recursive Least Square) para adaptar los coeficientes de cada filtro con un coste computacional moderado, pero que tampoco asegura la convergencia al valor óptimo.

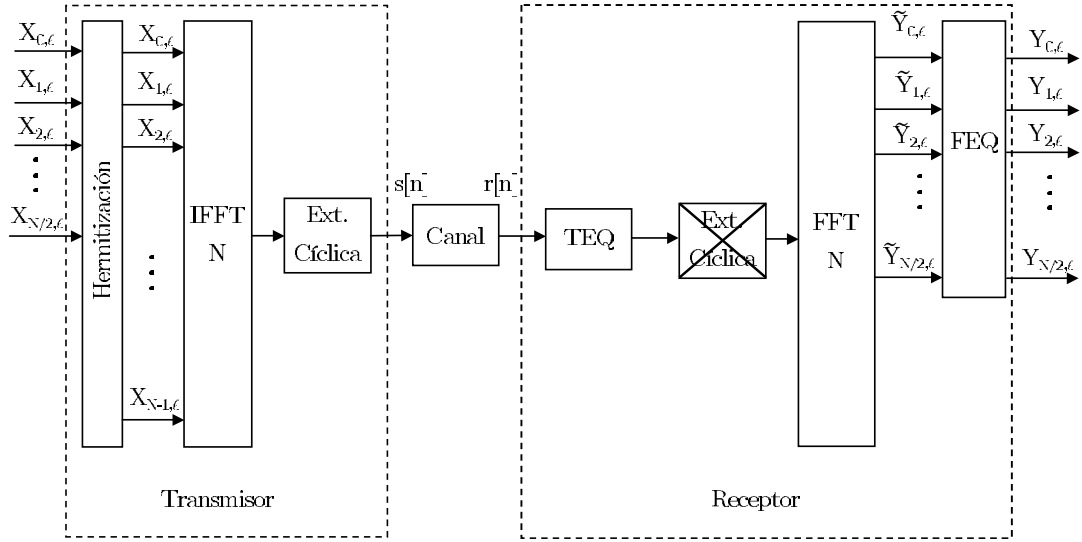


Fig. 1.6: Transmisor/receptor DMT con igualación de canal mediante extensión cíclica, TEQ y FEQ

1.4. Velocidad de transmisión

Los sistemas DMT se han presentado como una división del canal de transmisión en un conjunto de subcanales, por lo que el cálculo de la velocidad de transmisión alcanzable es equivalente a la suma de las velocidades de cada subcanal. Por cada uno de dichos subcanales se usa una modulación QAM. Si la suponemos libre de ISI e ICI, el régimen binario en bits/segundo de una modulación QAM se puede expresar como [Ciof91]

$$R_k = \frac{b_k}{T_S} = \frac{\log_2(1 + \frac{SNR_k}{\Gamma})}{T_S} \quad (1.12)$$

donde T_S es el periodo de símbolo, b_k el número de bits por símbolo de la portadora k y Γ es el *margen de SNR* o relación entre la SNR_k que proporciona una capacidad de transmisión b_k bits y la SNR_k que necesaria en la práctica para transmitir los b_k bits con una probabilidad de error por debajo de la máxima deseada. La SNR_k es la relación señal a ruido de la portadora k que se viene dada por

$$SNR_k = \frac{\varepsilon_k |G_k|^2}{2\sigma_k^2} \quad (1.13)$$

donde ε_k es la energía de la constelación QAM usada en la portadora k , σ_k^2 la potencia del ruido y $|G_k|^2$ es el módulo al cuadrado de la respuesta del canal. Suponiendo que las constelaciones son densas este parámetro Γ se puede determinar usando la expresión

$$\Gamma = \frac{[Q^{-1}(P_e/4)]^2 \gamma_M}{3 \gamma_C} \quad (1.14)$$

donde γ_C es la ganancia de codificación y γ_M es el *margen de funcionamiento* con el que se suelen diseñar los sistemas para que soporten otras imperfecciones imprevistas.

Sumando los regímenes binarios de los $N/2+1$ subcanales, se puede expresar el regimen binario total alcanzable como

$$R = \sum_{k=0}^{N/2} R_k = \sum_{k=0}^{N/2} \frac{\log_2(1 + \frac{SNR_k}{\Gamma})}{T_S} \quad (1.15)$$

Como se explica en [Bing90], el régimen óptimo de transmisión se obtiene garantizando la misma probabilidad de error para todas las portadoras. Por otro lado, la distribución de potencia total entre las portadoras idealmente debe seguir el procedimiento del *agua vertida*[Lee94]. Suponiendo que las SNR_k son suficientemente elevadas, la potencia que le corresponde a cada portadora es prácticamente idéntica. Al imponer la condición adicional de que el número de bits asignado a cada portadora b_k sea entero es necesario admitir pequeños incrementos o decrementos de la potencia en algunas portadoras con el fin mantener la misma probabilidad de error en todas. Los detalles del algoritmo para la asignación del régimen binario y potencia por portadora pueden consultarse en [Bing00].

Capítulo 2

Estimación del error de sincronización

2.1. Introducción

Como cualquier sistema de comunicaciones digitales, los sistemas DMT requieren cierta sincronía entre transmisor y receptor. Mediante una secuencia de algoritmos de estimación de errores de sincronización es posible alcanzar y mantener el grado de sincronismo necesario para que las prestaciones del sistema no se vean significativamente mermadas.

Fundamentalmente hay dos problemas de sincronización en los sistemas DMT: la sincronización de símbolo y la sincronización de muestreo. La sincronización de símbolo o sincronización gruesa persigue sincronizar el inicio del símbolo DMT con el del transmisor. La sincronización de muestreo o sincronización fina trata de sincronizar la fase y la frecuencia de muestreo de la señal recibida con la usada en el transmisor.

Los problemas de sincronización usando modulación multiportadora han sido ampliamente analizados desde la perspectiva de sistemas OFDM y DMT. Uno de los primeros artículos que aborda este problema es [Poll94], en el que se estudia el impacto que tiene un error en la frecuencia de muestreo en las prestaciones del receptor. En esa misma línea cabe destacar [Zoga96], en el que se estima cómo aumenta la probabilidad de error a causa del *jitter* del oscilador que controla el muestreo del receptor.

Se han propuesto múltiples técnicas para la estimación del error de sincronización, tanto de símbolo como de muestreo. En [Schmi97][VanB97][Lee97][Kell01][Negi02] se han planteado varios métodos ciegos muy similares para la estimación del error de sincronización de símbolo, que aprovechan la periodicidad cíclica de los símbolos DMT tanto en canales planos como canales con ISI. En cuanto a las técnicas para la estimación del error de sincronización de muestreo habría que destacar [Yang00][Sands02], en los que se proponen algoritmos para la estimación del error de muestreo sin necesidad de tonos piloto.

En este capítulo se analizan los problemas que supone la sincronización en los receptores DMT y se estudian los estimadores necesarios para garantizarla, incluyendo alguna nueva aportación.

Primero se analiza el sincronismo de símbolo. Se profundizará en su estrecha relación

con la respuesta al impulso del canal y se determina el margen posible de sincronización según la longitud de dicha respuesta.

Después se aborda el problema del sincronismo de muestreo. Se analiza el impacto de un error de fase o frecuencia de muestreo en los símbolos QAM recibidos, que justifica el uso de un sistema muy preciso de estimación y corrección de errores.

A continuación se expone una secuencia de procedimientos de estimación de errores de sincronización en sistemas DMT. Partiendo de una situación de asincronía inicial, dicha secuencia permite alcanzar el sincronismo en la fase de iniciación de la comunicación y mantenerlo en la fase de transmisión de información.

Para cada fase de la secuencia se estudian los distintos estimadores del error de sincronización necesarios. En primer lugar se analiza un estimador del error de frecuencia de muestreo basado en los giros que sufren los símbolos QAM de un símbolo DMT al siguiente. Después se describen un par de métodos para lograr el sincronismo de símbolo DMT, uno basado en la estima previa de la respuesta del canal y otro en la correlación de las muestras de los símbolos DMT. También se estudian estimadores del error de fase de muestreo basados en el giro de los símbolos QAM recibidos, entre los que se proponen nuevos estimadores basados en la estimación de máxima semejanza - Maximum Likelihood (ML)-. Dichos estimadores igualan o mejoran las prestaciones de los ya existentes con menor coste computacional. Además, se realiza un desarrollo matemático para obtener dicho estimador y se calcula el límite de Cramer-Rao para la varianza del estimador, expuestos ambos en el apéndice 2-A.

Por último se detallan los aspectos más importantes del funcionamiento del lazo de sincronización, analizando los criterios para el diseño del filtro de lazo que garanticen un correcto seguimiento de las fluctuaciones de frecuencia y fase de muestreo sin un excesivo error de fase residual o *jitter*.

2.2. Sincronización de símbolo

Para poder eliminar la extensión cíclica y demodular correctamente el símbolo DMT es necesario determinar el instante en el que comienza. A diferencia los procesos de sincronización de símbolo de otros sistemas, dependiendo de la longitud de la respuesta del canal puede existir un margen de tiempo más o menos amplio en el que la elección de un instante u otro no supone una pérdida de prestaciones significativa. Para determinar dicho margen hay que realizar un estudio de cómo los símbolos recibidos se dispersan y se solapan entre sí en función de la longitud de la respuesta al impulso del canal.

Si el canal de transmisión no fuese dispersivo los símbolos recibidos tendrían la misma duración que los transmitidos. En ese caso, si el instante en el que se supone que comienza el símbolo DMT original (el símbolo DMT sin la extensión cíclica previa) se adelantase un número de muestras Φ al instante real, al tratarse de un símbolo extendido cíclicamente,

los símbolos QAM obtenidos al demodular serían

$$Y_k = X_k e^{j \frac{2\pi k \Phi}{N}} \quad (2.1)$$

Esta ecuación es cierta si $0 < \Phi \leq E$, donde E es la duración de la extensión cíclica. De lo contrario se consideraría símbolo DMT original el final del símbolo DMT anterior o el principio del siguiente, y se produciría ISI. Este giro de la constelación, proporcional al error en el inicio del símbolo Φ y a la portadora k , se puede compensar sin dificultad mediante el FEQ. Como se aprecia en la figura 2.1-(a), en el caso ideal de canales no dispersivos existe una ventana temporal de E muestras donde se puede localizar el inicio del símbolo DMT original sin que aparezca ISI al eliminar la extensión cíclica.

Si el canal de transmisión es dispersivo la duración del símbolo DMT se alarga. En concreto, si la duración de un símbolo es $D = N + E$, donde N es el tamaño del símbolo DMT original y E la duración de la extensión cíclica, la duración del símbolo después de atravesar el canal es $D' = D + L - 1$, donde L es la duración de la respuesta al impulso del canal.

En el caso de que la duración de la respuesta al impulso del canal L sea menor a la extensión cíclica, los símbolos sólo interferirán en parte de la extensión cíclica del símbolo siguiente. Como se refleja en la figura 2.1-(b), la parte del símbolo DMT libre de ISI tiene duración $D - L + 1$, por lo que la ventana temporal en la que se puede localizar el inicio del símbolo original sin que se aparezca ISI es $E - L + 1$.

En el caso de que la duración de la respuesta al impulso del canal L sea mayor que la extensión cíclica, porque no se haya logrado acortar lo suficiente con el TEQ, los símbolos interferirán en parte del siguiente símbolo DMT original, como se aprecia en la figura 2.1-(c). La parte del símbolo DMT libre de ISI tiene una duración $D - L + 1$ menor que la duración del símbolo DMT original N y, por lo tanto, no existe una ventana temporal en la que se puede localizar el inicio de símbolo original sin que aparezca ISI.

A tenor de este análisis lo que determina la elección del instante inicial es duración de la respuesta al impulso del canal. De hecho, buscar el instante óptimo en el que se considera que comienza el símbolo original es equivalente a determinar el instante en el que comienza la respuesta al impulso del canal. Razonamientos muy similares a los utilizados en el análisis anterior se pueden aplicar usando dicha respuesta.

Si la respuesta del canal es totalmente plana, la respuesta al impulso del canal es un impulso retardado, como se muestra en la figura 2.2-(a). El retardo es desconocido en el receptor, pero podría considerarse que el inicio de la respuesta corresponde con una de las muestras anteriores al impulso siempre que la distancia entre el instante inicial y el impulso sea menor que E . De lo contrario la longitud efectiva de la respuesta considerada sería más larga que la extensión cíclica y se produciría ISI. En el caso de un canal cuya respuesta efectiva tenga una duración L menor que E como en 2.2-(b), también existe un posible margen de variación del instante inicial. Mientras que la respuesta quede dentro de una ventana de E muestras desde el instante inicial no existirá ISI. Por contra, en el

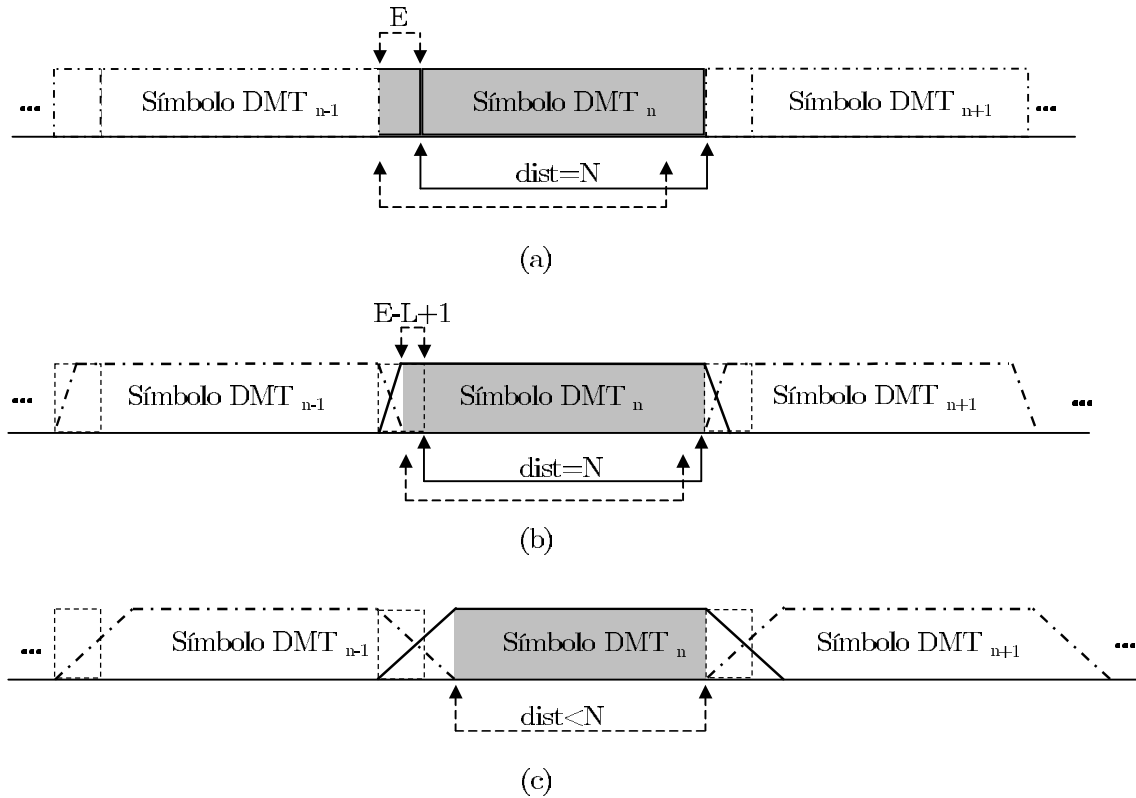


Fig. 2.1: Sincronización de símbolo: (a) símbolos DMT recibidos con un canal ideal; (b) símbolos recibidos con un canal cuya respuesta al impulso tiene una longitud $L \leq E$ (en gris parte del símbolo DMT libre de ISI); (c) símbolos recibidos con un canal cuya respuesta al impulso tiene una longitud $L > E$

caso que la respuesta tenga una duración mayor que E , como en la figura 2.2-(c), parte de la respuesta queda fuera de esta ventana y por tanto se producirá ISI.

En conclusión, dependiendo de la longitud de la respuesta al impulso del canal puede existir un margen más o menos amplio de sincronización libre de ISI pero, en aquellos casos en los que la respuesta tenga una duración mayor que la extensión cíclica, ese margen no existe y sólo cabe la posibilidad de intentar minimizar los efectos de dicha interferencia.

2.3. Sincronización de muestreo

Aunque los osciladores que controlan el muestreo del transmisor y el receptor tengan la misma frecuencia nominal, es inevitable que existan pequeñas diferencias entre las frecuencias de uno y otro. Además, la frecuencia de dichos osciladores fluctúa a lo largo del tiempo debido a distintas fuentes de ruido de fase [Cort04].

En este apartado se va a estudiar el efecto que produce la falta de sincronismo entre

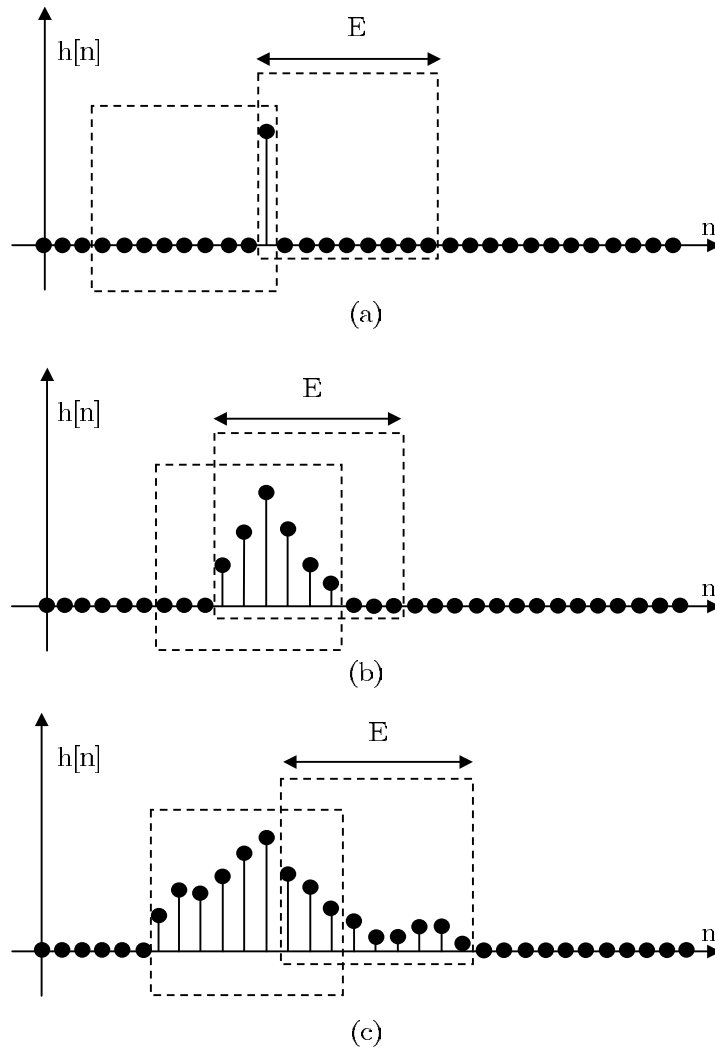


Fig. 2.2: Tipos de respuestas al impulso del canal $h[n]$ según su duración: (a) canal no dispersivo ; (b) canal dispersivo de respuesta al impulso igual o menor que la extensión cíclica; (c) canal dispersivo de respuesta al impulso mayor que la extensión cíclica

ambos osciladores. Primero, el caso en el que el error sea únicamente de fase de muestreo y, después, en el que el error sea de frecuencia.

2.3.1. Error de fase

Debido a las variaciones que sufren las frecuencias de los osciladores que controlan el muestreo del transmisor y el receptor, y a las imperfecciones de los sistemas de sincronización, pueden producirse pequeños errores de fase de muestreo en el receptor.

Para obtener las expresiones que relacionan el error de fase de muestreo del símbolo

DMT con el error en los símbolos QAM es necesario usar un modelo de la señal continua recibida. De este modo será posible introducir en dicha expresión el error en el muestreo, ya sea de fase o de frecuencia, y analizar su efecto en los símbolos QAM demodulados. Siguiendo esta directriz y eludiendo el término de ruido aditivo, la señal recibida se puede expresar como

$$r(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} r_{\ell}(t - \ell DT_{M,t}) \quad (2.2)$$

donde $r_{\ell}(t)$ es la expresión continua de cada símbolo DMT recibido y $T_{M,t}$ es el periodo de muestreo del transmisor. Una expresión sencilla que aproxima dichos símbolos en ausencia de ISI, ya propuesta en [Zoga96] y [Poll00], podría ser

$$r_{\ell}(t) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} X_{k,\ell} G_k e^{j \frac{2\pi k t}{NT_{M,t}}} \quad (2.3)$$

para $0 \leq t \leq NT_{M,t}$, donde $X_{k,\ell}$ son los símbolos QAM transmitidos correspondientes a la portadora k y al símbolo DMT ℓ , y G_k es la respuesta del canal a la portadora k .

Los instantes de muestreo del receptor, suponiendo sincronía en la frecuencia de muestreo del transmisor y receptor pero un error de fase igual a Φ , se pueden expresar como

$$t_n = (n + \Phi)T_{M,r} = (n + \Phi)T_{M,t} \quad (2.4)$$

donde $T_{M,r}$ es el periodo de muestreo del receptor.

La señal discreta obtenida después del muestreo en dichos instantes sería

$$r_{\ell}[n] = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} X_{k,\ell} G_k e^{j \frac{2\pi k(n+\Phi)}{N}} \quad (2.5)$$

Para simplificar el desarrollo, sin por ello perder generalidad, se supone que la duración de la respuesta al impulso es suficientemente corta y por tanto, al eliminar la extensión cíclica, no afecta a los símbolos demodulados la interferencia entre símbolos DMT. En ese caso los símbolos demodulados serían

$$\tilde{Y}_{k,\ell} = X_{k,\ell} G_k e^{j \frac{2\pi k \Phi}{N}} \quad (2.6)$$

Después de atravesar el FEQ, suponiendo por simplicidad un diseño *zero-forcing*, los símbolos obtenidos serían

$$Y_{k,\ell} = X_{k,\ell} e^{j \frac{2\pi k \Phi}{N}} \quad (2.7)$$

Como se puede observar en la ecuación 2.7, y de forma más gráfica en la figura 2.3, el efecto que produce en los símbolos QAM el error de fase de muestreo es un giro en el plano complejo proporcional al error de fase Φ y al índice de la portadora k . Este giro puede producir un incremento en la probabilidad de error, afectando especialmente a los

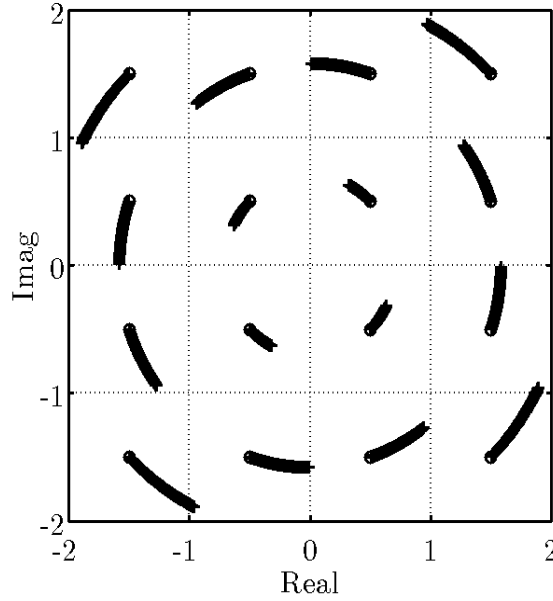


Fig. 2.3: Efecto de un error de fase de muestreo ($10\%T_M$) con constelaciones 16-QAM por portadora

símbolos de mayor amplitud correspondientes a las portadoras de índice más elevado o de constelaciones más densas. Un análisis más detallado se presenta en [Zoga96], en el que se calcula el incremento de la probabilidad de error en función de la desviación típica de este error de fase de muestreo o *jitter* para un par de ejemplos de canal telefónico para el servicio ADSL. Se concluye que, para las constelaciones empleadas en esos casos, la desviación típica del error de fase de muestreo debe ser menor del 0,01 % para que la pérdida no sea significativa.

2.3.2. Error de frecuencia

Inevitablemente existen diferencias entre las frecuencias de los osciladores que controlan la conversión digital/analógica y analógica/digital del transmisor y el receptor respectivamente. Aunque al inicio del símbolo la fase de muestreo estuviese sincronizada, estas diferencias producen un error en la fase de muestreo creciente a lo largo del símbolo DMT recibido, que además se van acumulando de un símbolo al siguiente.

El error o diferencia relativa de frecuencias de muestreo del transmisor y el receptor $\Delta\Omega$ se puede definir como

$$\Delta\Omega = \frac{f_{M,t} - f_{M,r}}{f_{M,r}} = \frac{T_{M,r} - T_{M,t}}{T_{M,t}} \quad (2.8)$$

donde $f_{M,t}$ es la frecuencia de muestreo del transmisor y $f_{M,r}$ la del receptor.

Los instantes de muestreo del símbolo recibido, suponiendo sincronismo inicial de fase,

se pueden expresar como

$$t_n = nT_{M,r} = n(1 + \Delta\Omega)T_{M,t} \quad (2.9)$$

Usando las expresiones 2.9 y 2.3 las muestras de la señal recibida se puede expresar como

$$r_\ell[n] = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} X_{k,\ell} G_k e^{j \frac{2\pi k(1+\Delta\Omega)n}{N}} \quad (2.10)$$

Si se supone de nuevo que no hay interferencia entre símbolos DMT, los símbolos demodulados resultarían

$$\tilde{Y}_{k,\ell} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_\ell[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k'=-N/2+1}^{N/2-1} X_{k',\ell} G_{k'} e^{-j \frac{2\pi(k-k')(1+\Delta\Omega)n}{N}} \quad (2.11)$$

Separando en dos términos el sumatorio en k' , según si esta variable es igual a k o no, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{k,\ell} &= \frac{1}{N} X_{k,\ell} G_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k \Delta\Omega n}{N}} + \frac{1}{N} \sum_{k' \neq k} X_{k',\ell} G_{k'} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi(k-k')(1+\Delta\Omega)n}{N}} = \\ &X_{k,\ell} G_k e^{j \frac{\pi k \Delta\Omega (N-1)}{N}} \left(\frac{\text{sen}(\pi k \Delta\Omega)}{N \text{sen}(\frac{\pi k \Delta\Omega}{N})} \right) + \sum_{k' \neq k} X_{k',\ell} G_{k'} e^{-j \frac{\pi(k-k')(1+\Delta\Omega)(N-1)}{N}} \left(\frac{\text{sen}(\pi(k-k')(1+\Delta\Omega))}{N \text{sen}(\frac{\pi(k-k')(1+\Delta\Omega)}{N})} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Después de atravesar el FEQ, los símbolos resultantes son

$$Y_{k,\ell} = X_{k,\ell} e^{j \frac{\pi k \Delta\Omega (N-1)}{N}} \left(\frac{\text{sen}(\pi k \Delta\Omega)}{N \text{sen}(\frac{\pi k \Delta\Omega}{N})} \right) + \sum_{k' \neq k} X_{k',\ell} G_{k'} F E Q_k e^{-j \frac{\pi(k-k')(1+\Delta\Omega)(N-1)}{N}} \left(\frac{\text{sen}(\pi(k-k')(1+\Delta\Omega))}{N \text{sen}(\frac{\pi(k-k')(1+\Delta\Omega)}{N})} \right) \quad (2.13)$$

En esta expresión se distinguen dos efectos del error de frecuencia de muestreo en el símbolo QAM, correspondientes a cada uno de los dos términos en los que se ha expresado la ecuación anterior. El primer término se corresponde con el símbolo QAM transmitido con un cierto giro y, considerando que $\Delta\Omega$ es muy pequeño, sólo una pequeña atenuación. Este giro es equivalente al que sufre en presencia de un error de fase y se puede considerar como un giro proporcional al error de fase promedio a lo largo del símbolo DMT que sería igual a $\frac{\Delta\Omega(N-1)}{2}$. El segundo término expresa la interferencia que introducen las demás portadoras o ICI. Este término depende del error de frecuencia $\Delta\Omega$ pero también de la respuesta del canal a cada portadora G_k . En la figura 2.4 se muestra el efecto del error de frecuencia usando un canal de respuesta al impulso ideal y en ausencia de ruido. Se aprecia un pequeño giro de la constelación, pero sobre todo cierta dispersión de los símbolos debida a la ICI.

La ICI que introduce un error de frecuencia típico (de 50 a 200 ppm) puede reducir notablemente la velocidad de transmisión alcanzable en el caso de que la SNR sea elevada, como se pone de manifiesto en la figura 2.5, en la que se representa la relación señal a

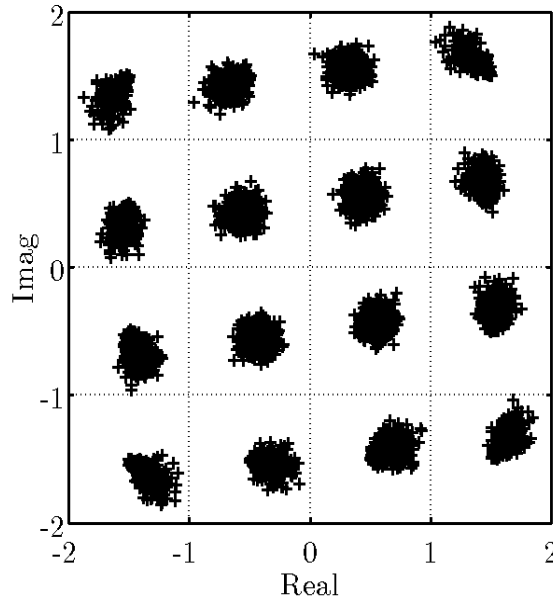


Fig. 2.4: Efecto de un error en la frecuencia de muestreo (100ppm) con constelaciones 16-QAM por portadora y canal plano

interferencia (SIR) debida a un error de frecuencia de 50, 100 y 200 ppm en el caso de canal ideal. Se aprecia que en gran parte de las portadoras de mayor frecuencia esta relación no alcanza ni los 35 dBs, lo que para canales con elevada SNR puede suponer una pérdida de capacidad importante. Por tanto, la corrección del error de frecuencia consistente en compensar únicamente el desfase acumulado del símbolo anterior no es suficiente, es necesario corregir a lo largo del símbolo DMT el error de fase de muestreo creciente causado por el error de frecuencia para, de ese modo, evitar la ICI [Poll99].

2.4. Procedimiento de sincronización

Para alcanzar y mantener el sincronismo en un sistema DMT es necesario aplicar una serie ordenada de procesos de sincronización, que permita realizar las restantes tareas en la fase de iniciación de la comunicación y que mantenga el error de sincronización en unos límites admisibles durante la fase de transmisión de información.

En la figura 2.6 se representa la secuencia de procesos de sincronización de las fases de iniciación de la comunicación y transmisión de información. En la primera fase hay que realizar dos procesos básicos: la sincronización de la frecuencia de muestreo y la sincronización de símbolo.

Para lograr la sincronización de símbolo es necesario que la frecuencia de muestreo esté sincronizada previamente, por lo que en primer lugar se sincroniza esta última. En concreto en la primera parte de la fase de iniciación de la comunicación se suelen transmitir

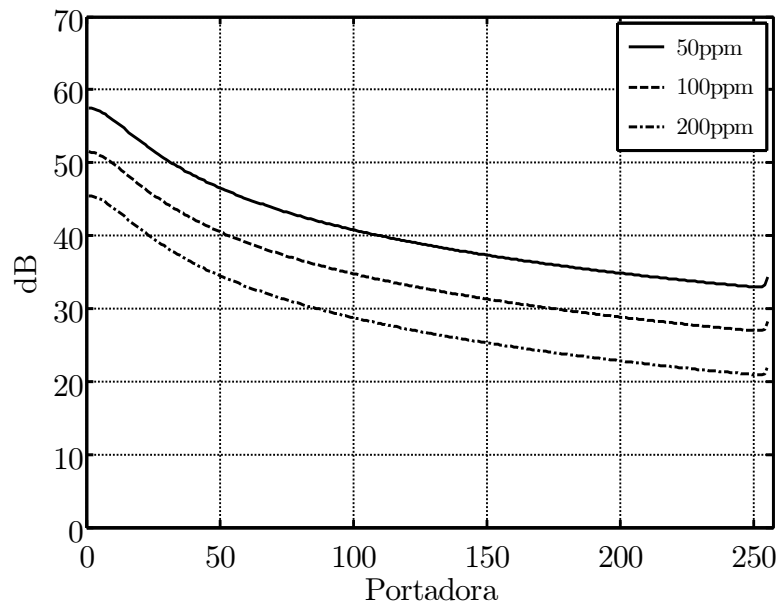


Fig. 2.5: Relación señal a interferencia (SIR) debida a un error en la frecuencia de muestreo (de 50, 100 o 200 ppm) en presencia de canal plano

señales periódicas o pilotos, que permiten estimar el error de la frecuencia de muestreo sin necesidad de haber logrado un sincronismo de símbolo previo.

Una vez estimado el error de la frecuencia de muestreo, se compensa y se procede a la sincronización de símbolo. Este proceso puede ser previo al proceso de estima de la respuesta del canal o, según el método elegido, realizarse de forma simultánea.

Después de alcanzar el sincronismo inicial comienza la fase de mantenimiento de la sincronización. Se realiza una continua estimación del error de fase de muestreo para seguir las variaciones de fase y frecuencia de muestreo con la ayuda de un lazo de sincronismo.

Los principales estimadores de cada una de las fases de la sincronización se presentan en los siguientes apartados de este capítulo, y en los próximos capítulos se describirá el funcionamiento y diseño de los sistemas de corrección del muestreo mediante procesamiento digital de la señal recibida.

2.5. Estimación del error de frecuencia

La mayoría de los algoritmos para la estimación fina del error de frecuencia y fase de muestreo se basan en los giros que producen dichos errores en los símbolos QAM recibidos. En el caso del error de frecuencia se trata de estimar el incremento del error de fase de los símbolos QAM de un símbolo DMT al siguiente.

La estima del error de frecuencia debe ser anterior a la estima del canal, por lo que debe ser una estima ciega, ya que los símbolos recibidos aún no se pueden igualar. Para

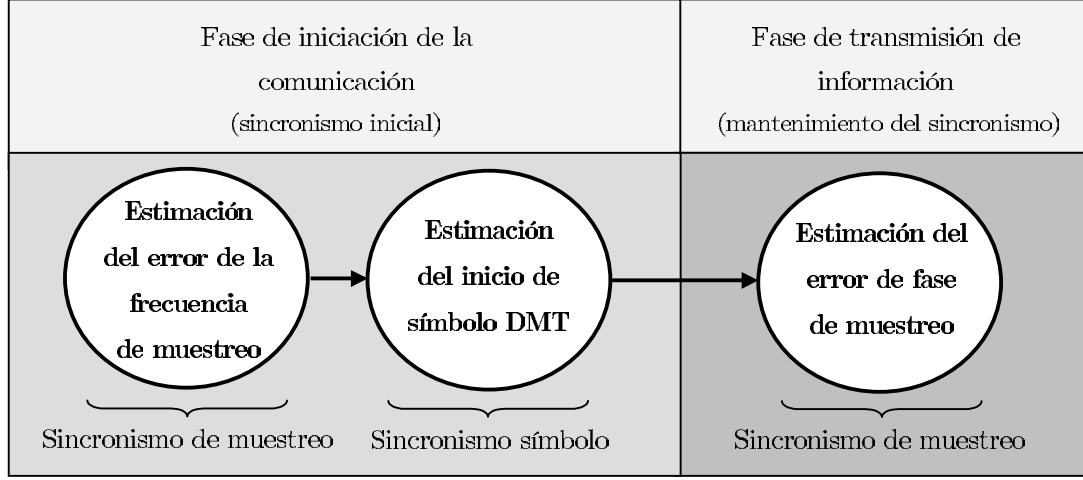


Fig. 2.6: Fases de la sincronización de un sistema DMT

lograrlo se envía por una única portadora piloto repetidamente el mismo símbolo X_k . En ese caso el primer símbolo recibido se puede expresar como

$$\tilde{Y}_{k,\ell} \approx X_k G_k e^{j \frac{\pi k \Delta \Omega (N-1)}{N}} + N_{k,\ell} \quad (2.14)$$

donde G_k es la respuesta del canal a la portadora k , $X_{k,\ell}$ el símbolo QAM transmitido de la portadora k y el símbolo DMT ℓ , $N_{k,\ell}$ es la componente de ruido y $\Delta \Omega$ el error de frecuencia. Como el error de frecuencia produce un error de fase creciente, en el símbolo DMT $\ell + 1$ el efecto sobre el símbolo QAM $Y_{k,\ell+1}$ será un giro similar al anterior al que se añade el error de fase acumulado a lo largo del símbolo DMT ℓ , obteniéndose

$$\tilde{Y}_{k,\ell+1} \approx X_{k,\ell} G_k e^{j \frac{\pi k \Delta \Omega (N-1) + 2\Delta \Omega D}{N}} + N_{k,\ell+1} \quad (2.15)$$

A partir de la diferencia de fase entre símbolos QAM consecutivos se puede estimar el error de fase acumulado a lo largo de un símbolo DMT, proporcional al error de frecuencia $\Delta \Omega$. En estas condiciones, considerando que el término de ruido $N_{k,\ell}$ tiene muestras independientes entre sí y e independientes del símbolo QAM enviado, la esperanza del producto de símbolos QAM recibidos consecutivos es

$$E[\tilde{Y}_{k,\ell}^* \tilde{Y}_{k,\ell+1}] \approx |X_k|^2 |G_k|^2 e^{j \frac{2\pi k \Delta \Omega (N+E)}{N}} \quad (2.16)$$

Considerando que el error de frecuencia $\Delta \Omega$ es muy pequeño se pueden hacer aproximaciones de la tangente por su argumento para estimar el error de frecuencia de muestreo partiendo de la expresión anterior [Sands02]. El estimador que se obtiene es

$$\widehat{\Delta \Omega}_\ell = \frac{N}{2\pi k(N+E)} \frac{\Im\{\tilde{Y}_{k,\ell-1}^* \tilde{Y}_{k,\ell}\}}{\Re\{\tilde{Y}_{k,\ell-1}^* \tilde{Y}_{k,\ell}\}} \quad (2.17)$$

Es fácil demostrar que la componente del ruido en la dirección del símbolo, o componente radial, no tiene efecto en el estimador, pero sí la componente perpendicular a ésta o componente tangencial. Una forma de analizar el efecto de esta componente tangencial del ruido N_θ es considerar que añade un desfase $\theta_{k,\ell}$ a la fase del símbolo recibido. Tal y como aparece en la figura 2.7, suponiendo la SNR_k suficientemente elevada, el desfase es pequeño y puede aproximarse por su tangente

$$\theta_{k,\ell} \approx \frac{N_\theta}{|X_{k,\ell}G_k|} \quad (2.18)$$

Como la potencia de la componente tangencial es la mitad de la potencia total de ruido en la portadora σ_k^2 , la varianza de este error de fase sería

$$\sigma_{\theta_k}^2 \approx \frac{\sigma_k^2}{2Sx_k|G_k|^2} = \frac{1}{2SNR_k} \quad (2.19)$$

donde Sx_k es la potencia de los símbolos de la portadora k y SNR_k es la relación señal a ruido en la portadora k . No hay que olvidar que en el estimador se calcula el desfase entre dos símbolos consecutivos, por lo que aparecen dos términos de error de fase correspondientes a cada uno de los símbolos. A partir de este análisis se puede aproximar la varianza del estimador como

$$\sigma_{\Delta\Omega}^2 \approx \frac{N^2}{4\pi^2k^2(N+E)^2SNR_k} \quad (2.20)$$

En [Sands02] se plantea la estima de forma similar a la expresada anteriormente pero usando múltiples portadoras en vez de una única portadora. Aunque no analiza el impacto que tiene la ICI que aparece al usar varias portadoras, que puede suponer un término de error muy considerable en presencia del error de frecuencia inicial (típicamente entre 50 y 100ppm), los resultados son mejores que usando una única portadora a costa de un mayor coste computacional. Esta solución es especialmente interesante cuando hay peligro de una gran interferencia a la frecuencia de la portadora piloto y, por tanto, conviene usar más de una.

De todos modos, calcular el error de frecuencia a partir de una sola estima es normalmente insuficiente, por lo que hay que promediar múltiples estimas. Sin embargo hay que tener en cuenta que los errores en la estimación de símbolos DMT consecutivos no son términos incorrelacionados. Cada uno de ellos se debe a los términos de ruido que acompañan a los dos símbolos QAM de símbolos DMT consecutivos. De cada dos estimaciones consecutivas uno de esos términos de error es común a ambas. Por tanto el diseño del método óptimo de cálculo del error de frecuencia a partir de sucesivas estimas no es tan inmediato. En [Kay89] se propone un método MMSE para el cálculo a partir de estimaciones de las diferencias de fase que mejora notablemente el simple promedio de las mismas y que resulta equivalente al cálculo de la recta de regresión de las fases de símbolos consecutivos.

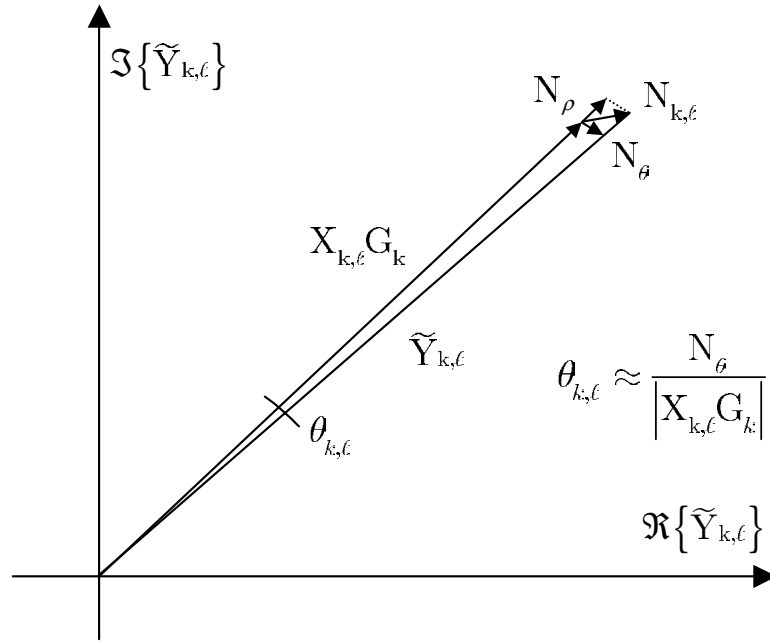


Fig. 2.7: Error de fase $\theta_{k,\ell}$ que produce el ruido en los símbolos QAM si la SNR es elevada

2.6. Estimación del inicio de símbolo DMT

Existen dos tipos de métodos para estimar el instante inicial de los símbolos DMT: unos basados en la estimación previa de la respuesta al impulso del canal y otros en la periodicidad cíclica de los símbolos transmitidos.

Los primeros métodos cuentan con escasas referencias que los analicen - [Poll99][López01]-, y tratan de localizar la ventana de E muestras de la respuesta al impulso que más energía concentra. Establecen el inicio del símbolo DMT de modo que el inicio de la respuesta al impulso coincida con el inicio de dicha ventana. Así, la energía de la parte de la respuesta que contribuye a la ISI, que coincide con la que queda fuera de la ventana, es la menor posible. También se ha planteado en [Poll99], aunque de forma un tanto imprecisa, el uso de otras ventanas de duración mayor que E muestras, que también consideran cómo se distribuye la energía fuera la ventana de E muestras. Hay que tener en cuenta que minimizar la potencia de la ISI no asegura que se minimice su impacto en los símbolos demodulados.

En otras propuestas como [VanB97][Schmi97][Negi02] se han desarrollado algoritmos *ciegos* que se apoyan en propiedades derivadas de la periodicidad cíclica de los símbolos DMT. En estos algoritmos se realiza el cálculo de la correlación de las muestras del símbolo recibido con muestras que se encuentran a una distancia N . Esta función debe tener un máximo al correlacionar las muestras de la extensión cíclica con sus muestras equivalentes del final del símbolo DMT. Localizando dicho máximo se puede encontrar el margen de

muestras en las que se puede establecer el inicio del símbolo DMT. Estos métodos están orientados a sistemas en los que la duración de la respuesta al impulso del canal es menor que la extensión cíclica, más habitual en canales de radiofrecuencia.

2.7. Estimación del error de fase

La estima fina del error de fase de muestreo para el mantenimiento del sincronismo se basa, al igual que la estima del error de frecuencia, en el giro que produce en los símbolos QAM un desfase Φ en el instante de muestreo. En esta fase de la transmisión no es necesario usar pilotos, pues ya se supone conocido el canal y los símbolos detectados, con muy alta probabilidad, son iguales a los transmitidos. Además, suponiendo que se ha alcanzado la suficiente sincronía en la frecuencia de muestreo, no habrá un nivel de ICI elevado, por lo que es posible usar múltiples portadoras para la estima.

Los símbolos recibidos e igualados se pueden expresar a partir de los transmitidos como

$$Y_{k,\ell} = X_{k,\ell} e^{j \frac{2\pi k \Phi}{N}} + N_{k,\ell} \quad (2.21)$$

Suponiendo que la probabilidad de error es muy pequeña, y por tanto el símbolo decidido $\hat{X}_{k,\ell}$ es con alta probabilidad igual al transmitido $X_{k,\ell}$, la esperanza del producto del símbolo recibido por el decidido será

$$E[Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*] \approx E[|X_{k,\ell}|^2] e^{j \frac{2\pi k \Phi}{N}} \quad (2.22)$$

De esta expresión, haciendo de nuevo la aproximación de la tangente por su argumento, se deduce el siguiente estimador del error de fase de muestreo usando la portadora k

$$\hat{\Phi}[\ell] = \frac{N}{2\pi k} \frac{\Im\{Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*\}}{\Re\{Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*\}} \quad (2.23)$$

Se puede aproximar la varianza de este estimador de forma similar al estimador del error de frecuencia, como

$$\sigma_{\hat{\Phi}}^2 \approx \frac{N^2}{8\pi^2 k^2 SNR_k} \quad (2.24)$$

A partir de las estimaciones de un subconjunto $\langle U \rangle$ de portadoras, y conociendo aproximadamente la varianza de cada estima, es posible obtener un estimador MMSE, descrito en [Sands02], que tiene la siguiente expresión

$$\hat{\Phi}_{MMSE}[\ell] = \frac{N}{2\pi \sum_{k=\langle U \rangle} k^2 SNR_k} \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{k SNR_k \Im\{Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*\}}{\Re\{Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*\}} \quad (2.25)$$

y su varianza sería

$$\sigma_{\hat{\Phi}}^2 \approx \frac{N^2}{8\pi^2 \sum_{k=\langle U \rangle} k^2 SNR_k} \quad (2.26)$$

Una alternativa al estimador MMSE es usar un estimador de máxima semejanza o ML (Maximum Likelihood) como se sugiere en [Poll99] y se desarrolla en [Mart05]. En el apéndice 2-A se ha realizado el análisis de la función de semejanza definida a partir de los símbolos QAM recibidos. Mediante dicho análisis y tras algunas aproximaciones trigonométricas sencillas, se ha obtenido un estimador de máxima semejanza con la siguiente expresión

$$\hat{\Phi}_{ML}[\ell] = \frac{N}{2\pi} \frac{\sum_{k=\langle U \rangle} k \Im\{Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*\} / \sigma_k^2}{\sum_{k=\langle U \rangle} k^2 \Re\{Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*\} / \sigma_k^2} \quad (2.27)$$

El estimador ML tiene como principal ventaja la reducción del coste computacional, al requerir únicamente una operación de división por cada estima, mientras que el estimador MMSE requiere tantas como portadoras se usen en el cálculo. Una simplificación adicional del estimador ML se basa en la aproximación $\Re\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} \approx E[|X_{k,\ell}|]^2$, obteniendo

$$\hat{\Phi}_{ML-simp}[\ell] = \frac{N}{2\pi} \frac{\sum_{k=\langle U \rangle} k \Im\{Y_{k,\ell} \hat{X}_{k,\ell}^*\} / \sigma_k^2}{\sum_{k=\langle U \rangle} k^2 SNR_k} \quad (2.28)$$

Usando una única portadora la estimación no es muy precisa a causa de la aproximación realizada, pero la precisión crece al incrementar el número de portadoras. Gracias a esta aproximación se eliminan las multiplicaciones correspondientes al cálculo del denominador, con lo que se reduce el coste computacional a casi la mitad.

En la figura 2.8 se representa la varianza de los estimadores MMSE, ML y ML-simplificado en función de la SNR para un error de fase de un 0,01 % del periodo de muestreo, para un sistema DMT de $N = 512$ y usando para la estima las 255 portadoras disponibles. Por simplicidad se ha supuesto que la SNR es idéntica para todas las portadoras y que el número de bits transmitido por cada una se corresponde con el que se puede calcular mediante la expresión 1.15. Para SNR bajas (10-17 dBs) las prestaciones de todos los estimadores son muy parecidas y a la vez muy próximas a el límite teórico de Cramer-Rao. Sin embargo, por encima de estas SNRs las prestaciones del estimador MMSE son peores que las de los estimadores ML, entre 3 y 7 dB.

Se constata que la aproximación para calcular la varianza del error de fase debido al ruido deja de ser válida, o de lo contrario el estimador MMSE alcanzaría el límite de Cramer-Rao. Aunque la SNR sea muy elevada, al corresponderle una constelación muy densa, la aproximación es correcta para los símbolos de más energía de la constelación, pero no para los de menor energía. Por contra las varianzas de los estimadores ML permanecen muy próximas al límite de Cramer-Rao.

Hay que destacar también que la varianza del estimador ML-simplificado es prácticamente igual a la del ML. Por este motivo, y considerando que el ML-simplificado tiene un coste computacional considerablemente menor, es preferible el uso de este último estimador.

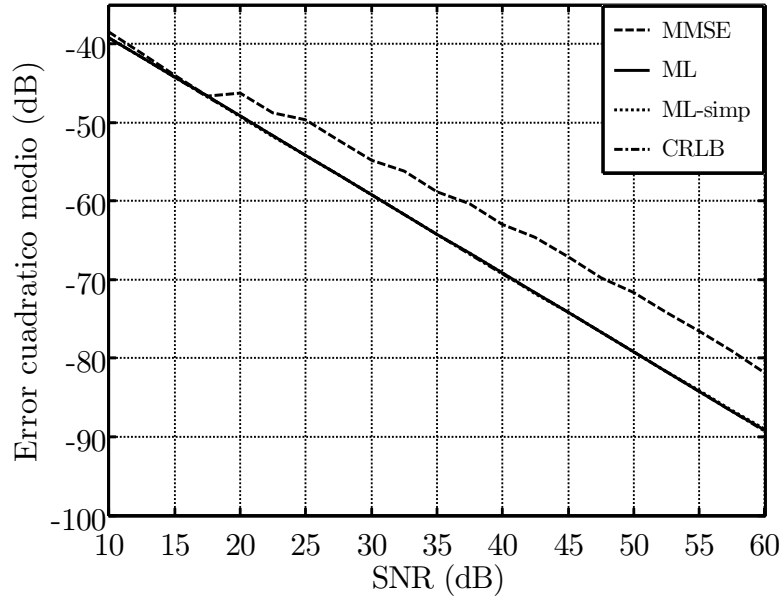


Fig. 2.8: Varianza del error de estimación del error de fase de muestreo ($10\log(\sigma_\phi^2)$) para los distintos estimadores propuestos y el límite de Cramer-Rao (queda oculto por su proximidad a la varianza de los estimadores ML)

2.8. Lazo de sincronización

En el periodo de mantenimiento de la sincronización, debido al ruido de fase del oscilador que controla el convertidor del transmisor, es necesario obtener una estima muy precisa del error de fase de muestreo para, así, poder corregirlo y evitar un sensible incremento de la probabilidad de error. Si este periodo de mantenimiento se prolonga mucho en el tiempo es posible que se produzcan derivas en la frecuencia del oscilador del transmisor, por lo que también será necesario estimar y corregir el error de frecuencia. Ambas correcciones se pueden realizar estimando y corrigiendo la frecuencia de muestreo del receptor. De este modo se cierra un lazo que permite mantener el sincronismo de forma muy precisa.

Para mantener simultáneamente la sincronización en frecuencia y fase se realizan estimas del error de fase que deben atravesar un filtro de lazo tipo II [Lee94]. La salida de este filtro proporciona la desviación de la frecuencia de muestreo que hay que corregir mediante el oscilador controlado. La función de transferencia típica de este lazo es

$$H_{FL}(z) = \frac{\alpha + \beta z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (2.29)$$

Mediante las constantes α y β se puede controlar tanto el ancho de banda del lazo de sincronismo como la forma de su respuesta transitoria. El ancho de banda está relacionado con el error de fase residual o *jitter*. Las muestras del error presente en la estima del error

de fase de muestreo, denominado error de fase residual, son incorrelacionadas, por lo que su espectro puede suponerse plano. Al cerrar el lazo de sincronización, el espectro de este error de fase residual queda modelado por la respuesta en frecuencia del lazo que es de tipo paso bajo, por lo que su ancho de banda determina la potencia del error de fase residual o *jitter*. Para que el *jitter* no perturbe significativamente la señal recibida es necesario que el ancho de banda del lazo sea pequeño (típicamente entre 50 y 200Hz). No obstante, este ancho de banda no se puede reducir demasiado porque eso limita la velocidad de respuesta del lazo frente a las variaciones de la fase de muestreo del transmisor. Si se pretende una respuesta transitoria rápida el ancho de banda del lazo debe ser mayor, pero a cambio crece el *jitter*.

Es común usar distintos valores para estas constantes según se trate de la fase de enganche inicial del lazo o de la fase posterior de mantenimiento del enganche. Los primeros valores proporcionan al lazo una respuesta más rápida que facilita el enganche pero no se reduce tanto el *jitter*. Una vez logrado el enganche inicial se modifican las constantes para que la respuesta sea más lenta pero se reduzca más el *jitter*.

Manteniendo el *jitter* en unos valores reducidos, el error de frecuencia residual $\Delta\Omega$ correspondiente también se mantiene, por lo que la ICI no tiene un impacto relevante en las prestaciones del sistema, como se demuestra en [Zoga96].

2.9. Conclusiones

En primer lugar, en este capítulo se han analizado los dos problemas básicos de la sincronización en los sistemas DMT: la sincronización de símbolo o sincronización gruesa, que trata de establecer los límites de los símbolos DMT, y la sincronización de muestreo o la sincronización fina, que pretende sincronizar en fase y frecuencia el muestreo del receptor.

Con respecto a la sincronización de símbolo se ha presentado su estrecha relación con la respuesta al impulso del canal, estableciendo los márgenes de sincronismo en función de la duración de dicha respuesta.

En la sincronización del error de muestreo se ha distinguido entre el error de fase y el de frecuencia. Del análisis del impacto que tienen ambos errores en los símbolos QAM recibidos, se deriva la necesidad de unos sistemas para la estima y la corrección del error de sincronización suficientemente sofisticado para no reducir significativamente las prestaciones del sistema de comunicación.

Después se ha expuesto un procedimiento para alcanzar y mantener el sincronismo en un sistema DMT. Se han repasado los estimadores propuestos para el error de frecuencia de muestreo, de sincronismo de símbolo y, en una mayor profundidad, de sincronización fase de muestreo. Para este último, a partir del estudio de la función de semejanza, desarrollado en el 2-A, se ha obtenido la expresión de un estimador ML y un estimador ML-simplificado, y además se ha calculado el límite teórico de Cramer-Rao de la varianza de este tipo de

estimadores. Mediante simulación se ha comprobado que la varianza de los estimadores ML propuestos es significativamente menor que la del estimador MMSE y, además, es muy próxima al límite de Cramer-Rao.

Por último se ha analizado el lazo de sincronización y los aspectos más relevantes a considerar en el diseño de las constantes del filtro de lazo para lograr un compromiso entre el correcto seguimiento de las variaciones de la frecuencia de muestreo y un reducido nivel de error de fase residual o *jitter*.

La corrección del error de muestreo y, en especial, el funcionamiento de los sistemas de corrección mediante procesamiento digital de la señal recibida, se estudia en el capítulo 3.

2-A. Apéndice: Estimador ML y límite de Cramer-Rao

En este apéndice se propone un estimador ML para el cálculo del error en la fase de muestreo a partir de los símbolos QAM igualados mediante el FEQ y los símbolos QAM transmitidos. Además, se calcula el límite de Cramer-Rao de la varianza de los estimadores de error de fase a partir de dichos símbolos.

Para obtener un estimador ML del error de fase de muestreo a partir de los símbolos QAM igualados es necesario tener una expresión que relacione el error de fase con dichos símbolos. Esta expresión es

$$Y_{k,\ell} = X_{k,\ell} e^{j \frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}} + N_{k,\ell} \quad (2-A.1)$$

donde $Y_{k,\ell}$ es el símbolo QAM igualado de la portadora k y del símbolo DMT ℓ , $X_{k,\ell}$ es el símbolo transmitido, $N_{k,\ell}$ el ruido presente en dicha portadora y $\Phi[\ell]$ es el error de fase de muestreo a estimar.

Considerando que el ruido es gaussiano y que las componentes de las distintas portadoras son prácticamente independientes, la función logarítmica de semejanza usando un subconjunto de portadoras $\langle U \rangle$ se puede expresar como

$$\Lambda(X_{k,\ell}, Y_{k,\ell}, \Phi[\ell]) = \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{|Y_{k,\ell} - X_{k,\ell} e^{j \frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}}|^2}{\sigma_k^2} \quad (2-A.2)$$

donde σ_k^2 es la potencia de ruido en la portadora k .

Eliminando términos superfluos que no dependen de Φ se obtiene

$$\Lambda(X_{k,\ell}, Y_{k,\ell}, \Phi[\ell]) = \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{2\Re\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^* e^{-j \frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}}\}}{\sigma_k^2} \quad (2-A.3)$$

Para obtener un estimador ML se deriva la función logarítmica de semejanza con respecto a Φ y se iguala a cero

$$\frac{\partial \Lambda(X_{k,\ell}, Y_{k,\ell}, \Phi[\ell])}{\partial \Phi[\ell]} = \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{\frac{4\pi k}{N} \{-\Re\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} \sin(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}) + \Im\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} \cos(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N})\}}{\sigma_k^2} = 0 \quad (2-A.4)$$

Suponiendo que Φ es suficientemente pequeño, se pueden aproximar las funciones seno por su argumento y las funciones coseno por uno, con lo que quedaría

$$\frac{\partial \Lambda(X_{k,\ell}, Y_{k,\ell}, \Phi[\ell])}{\partial \Phi[\ell]} \approx \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{-2\Re\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} \frac{4\pi^2 k^2 \Phi[\ell]}{N^2} + 2\Im\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} \frac{2\pi k}{N}}{\sigma_k^2} = 0 \quad (2-A.5)$$

De esta expresión se puede despejar Φ obteniendo el siguiente estimador

$$\widehat{\Phi}[\ell] = \frac{N}{2\pi} \frac{\sum_{k=\langle U \rangle} k \Im\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} / \sigma_k^2}{\sum_{k=\langle U \rangle} k^2 \Re\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} / \sigma_k^2} \quad (2-A.6)$$

En la práctica, como se expone en el apartado 2.7, en vez de usar el símbolo transmitido $X_{k,\ell}$, que no se conoce, se usa el símbolo decidido $\hat{X}_{k,\ell}$, que con alta probabilidad es idéntico, pues la probabilidad de error de símbolo suele ser muy baja.

Para el cálculo del límite de Cramer-Rao se puede retomar la expresión 2-A.4 y calcular la segunda derivada de la función de semejanza con respecto a Φ , cuyo resultado es

$$\frac{\partial^2 \Lambda(X_{k,\ell}, Y_{k,\ell}, \Phi[\ell])}{\partial \Phi[\ell]^2} = \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{2(\frac{2\pi k}{N})^2 \{-\Re\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} \cos(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}) - \Im\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\} \sin(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N})\}}{\sigma_k^2} \quad (2-A.7)$$

Sabiendo que la esperanza de

$$E[\Re\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\}] = E[|X_{k,\ell}|^2] \cos(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}) \quad (2-A.8)$$

y que

$$E[\Im\{Y_{k,\ell} X_{k,\ell}^*\}] = E[|X_{k,\ell}|^2] \sin(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}) \quad (2-A.9)$$

se puede calcular la esperanza de la segunda derivada de la función de semejanza como

$$\begin{aligned} E\left[-\frac{\partial^2 \Lambda(X_{k,\ell}, Y_{k,\ell}, \Phi[\ell])}{\partial \Phi[\ell]^2}\right] &= \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{2E[|X_{k,\ell}|^2] (\frac{2\pi k}{N})^2 \{\cos^2(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N}) + \sin^2(\frac{2\pi k \Phi[\ell]}{N})\}}{\sigma_k^2} = \\ &= \sum_{k=\langle U \rangle} \frac{2E[|X_{k,\ell}|^2] (\frac{2\pi k}{N})^2}{\sigma_k^2} = \frac{8\pi^2}{N^2} \sum_{k=\langle U \rangle} k^2 SNR_k \end{aligned} \quad (2-A.10)$$

Por tanto, el límite de Cramer-Rao para la estimación del error de fase de muestreo a partir de los símbolos transmitidos y recibidos sería

$$\sigma_\Phi^2 \geq \frac{1}{E\left[-\frac{\partial^2 \Lambda(X_{k,\ell}, Y_{k,\ell}, \Phi[\ell])}{\partial \Phi[\ell]^2}\right]} = \frac{N^2}{8\pi^2 \sum_{k=\langle U \rangle} k^2 SNR_k} \quad (2-A.11)$$

Capítulo 3

Corrección digital del error de muestreo

3.1. Introducción

En la solución a cualquiera de los problemas de sincronización que se plantean en un sistema de comunicaciones se pueden distinguir dos procesos bien diferenciados: la estima del error de sincronización y la corrección de dicho error. En los problemas de recuperación de portadora, de ajuste del instante de muestreo o de sincronización de símbolo o trama, tan necesario como poder estimar con precisión las pequeñas desviaciones que se van produciendo es disponer de los mecanismos necesarios para realizar las correcciones correspondientes.

Como se expone en el capítulo 2, uno de los principales problemas de sincronización que presentan los sistemas DMT son los errores de fase y frecuencia de muestreo. Estos errores se pueden corregir ajustando adecuadamente la frecuencia de muestreo de la señal recibida. Las posibles soluciones para realizar dichas correcciones son muy diversas, pero pueden clasificarse en dos grandes categorías según cómo se realice el muestreo de la señal: muestreo síncrono y muestreo asíncrono [Gard93][Meng97]. La principal diferencia entre ambos métodos estriba en si la corrección se logra modificando la frecuencia del oscilador que controla el muestreo del receptor (muestreo síncrono) o mediante procesamiento digital de la señal digital recibida (muestreo asíncrono).

En los primeros modems digitales la solución para la corrección de la sincronización se ha basado en el muestreo síncrono. Sin embargo, a medida que los sistemas digitales que se usan para implementar los receptores digitales han incrementado su velocidad de computación, han ido surgiendo cada vez más propuestas con la solución de muestreo asíncrono [Rams84][Asch89][Gard93] y, en la actualidad, es la opción elegida en un gran número de sistemas de transmisión [Harr01][Louv01][Speth01][Poll99].

En este capítulo se presentarán ambos métodos, aunque se hará especial hincapié en los sistemas y las estructuras necesarias para que el muestreo pueda ser asíncrono. Se explicará el esquema general del sistema de corrección basado en un interpolador y se profundizará en las posibles estructuras para su realización. Se repasarán las estructuras

clásicas [Farr88][Gard93] y se propondrá una estructura híbrida que las unifica todas y a la vez ofrece nuevas posibilidades de implementación, lo que otorga una mayor flexibilidad al diseño con distintas arquitecturas *hardware*. Por último se analiza un sistema de corrección alternativo propuesto en [Poll99], basado en conjugar un interpolador simple con un sistema denominado rotor, y se exponen las desventajas que presenta frente al sistema únicamente basado en un interpolador.

3.2. Muestreo síncrono y asíncrono

Como ya se afirmó en el capítulo anterior, para lograr la correcta decodificación de la señal transmitida, el muestreo del receptor debe permanecer sincronizado con el del transmisor. Sin embargo, en la práctica existen pequeñas diferencias entre las frecuencias de los de los osciladores que controlan la conversión digital/analógica y analógica/digital en el transmisor y el receptor. Además, las derivas térmicas y, a más corto plazo, el ruido de fase de dichos osciladores puede provocar que estas diferencias fluctúen a lo largo del tiempo [Demir00]. Para contrarrestar estos fenómenos es necesario realizar continuos ajustes en la frecuencia de muestreo del receptor. Existen dos soluciones básicas para hacer estos ajustes, representadas en la figura 3.1, que se pueden clasificar según el método de muestreo usado: síncrono o asíncrono.

En dicha figura se muestra en primer lugar el esquema de muestreo síncrono. La señal continua recibida $r(t)$ se transforma en señal discreta $r[n]$ mediante un convertidor analógico/digital. Los instantes en los que se capturan las muestras de la señal continua están determinados por una señal de reloj, que debe estar sincronizado con el reloj del convertidor digital/analógico del transmisor. Para conseguirlo se utiliza un oscilador controlado, que no es más que un oscilador cuya frecuencia puede modificarse ligeramente mediante una señal de control. De ese modo, a partir de la estimación del error de frecuencia de muestreo $\Delta\Omega[n]$, se actúa sobre el oscilador controlado modificando su periodo $T_M[n]$ para ajustar los instantes de muestreo.

En segundo término se presenta el esquema de muestreo asíncrono. Se denomina de esta forma porque el muestreo de la señal recibida $r(t)$ no está sincronizado con la conversión digital/analógica que realiza el transmisor. Por este motivo no es necesario modificar la frecuencia de la señal de reloj que controla el muestreo en el receptor y se puede generar mediante un oscilador de periodo T_M no controlado. En este esquema se corrigen los errores de sincronización usando un sistema de procesamiento digital para la conversión de la frecuencia de muestreo. Usando la estimación del error de frecuencia de muestreo $\Delta\Omega[n]$ interpola las muestras de la señal continua en los instantes adecuados a partir de las muestras de la señal recibida, obteniendo una señal $r[n]$ que sí está sincronizada con la señal discreta del transmisor.

La principal ventaja que presenta el muestreo asíncrono es la reducción de la complejidad del *hardware* analógico que requiere el proceso de muestreo. Como no se hacen

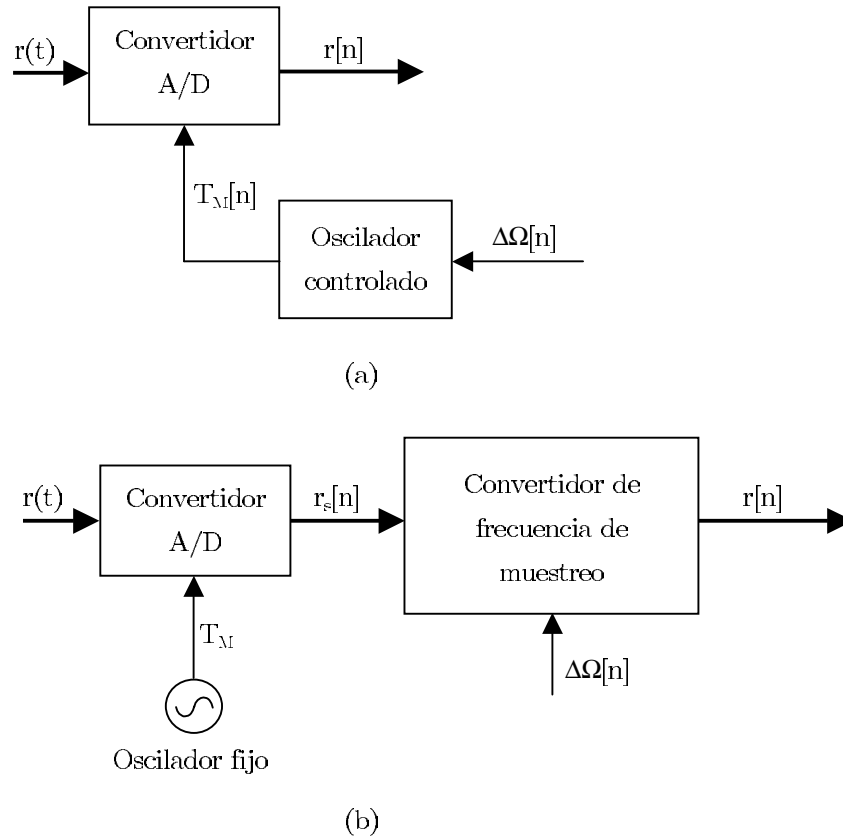


Fig. 3.1: Esquemas de muestreo: (a) síncrono y (b) asíncrono

ajustes de la frecuencia de la señal de reloj que lo gobierna, no es necesario usar un oscilador controlado, lo que simplifica el interfaz entre la etapa analógica de conversión de la señal y el sistema digital que implementa el receptor. El principal inconveniente de este método es el aumento de la complejidad del procesamiento del receptor al incluir un nuevo sistema para realizar la conversión de frecuencia de muestreo.

A continuación se estudiarán con detalle los fundamentos del sistema de corrección digital, describiendo cada uno de los bloques funcionales que lo forman así como las señales que los controlan.

3.3. Convertidor de frecuencia de muestreo

En las últimas décadas se ha estudiado con un creciente interés el problema de la conversión de la frecuencia de muestreo mediante procesamiento digital. En primer lugar se analizaron casos sencillos como aquellos en los que la relación entre la frecuencia de mues-

treo original y la frecuencia de muestreo deseada es un número racional [Croch83]. No obstante, en el problema de la conversión de la frecuencia de muestreo para la sincronización, dicha relación no es racional y suele ser variante, por lo que requiere una solución un poco más compleja. El primer trabajo encontrado que analiza en profundidad el problema y propone una solución completamente digital es [Rams84], pero los primeros artículos en los que se incluyen esta solución en el diseño de un receptor son [Taka87] y [Asch89]. Sin embargo, hasta la publicación de [Gard93] y [Erup93] no se hace un estudio realmente exhaustivo de todos sus aspectos, especialmente en lo relativo a la necesaria interpolación de las muestras de la señal.

A continuación se presenta un enfoque similar al propuesto por [Gard93] para analizar el problema. En primer lugar se plantea un modelo de convertidor de frecuencia continuo, basado en una doble conversión de señal discreta a continua y viceversa. Partiendo de una serie de ecuaciones sencillas que relacionan los instantes de reconstrucción y muestreo, se realiza un análisis que permite expresar la señal de salida en función de la señal de entrada original. Haciendo ligeras modificaciones se obtiene una expresión final en la que se vislumbra la forma de realizar un sistema discreto equivalente al sistema continuo. Después, se describe con detalle la estructura de realización digital de este sistema basada en los filtros de retardo fraccionario variable o interpoladores. Por último se plantea una mejora basada en el sobremuestreo previo de la señal en el receptor, y se describe cómo se ha de modificar la estructura bajo estas circunstancias.

3.3.1. Modelo del convertidor de frecuencia continuo

En la figura 3.2 se representa el diagrama de un sistema continuo para modificar la frecuencia muestreo. La señal discreta se convierte en señal continua a un ritmo fijo, y se vuelve a convertir en señal discreta usando una frecuencia de muestreo variable, logrando así la conversión a la frecuencia deseada en cada instante.

En primer lugar hay un bloque que convierte periódicamente la secuencia de muestras $r_s[n]$ en una señal continua $r_s(t)$. Dicha señal está formada por una secuencia de impulsos cuyos pesos se corresponden con las muestras de la señal original, con intervalo entre impulsos igual a T_M . A continuación, la señal $r_s(t)$ se filtra mediante un filtro reconstructor de respuesta al impulso $h(t)$, obteniéndose la señal continua $r(t)$. Por último el bloque convertidor de señal continua a discreta toma muestras de la señal $r(t)$ con una periodicidad $T'_M[n]$, resultando la señal discreta $r[n]$.

En teoría, el filtro restructor óptimo es un filtro paso bajo ideal cuya frecuencia de corte viene determinada por la frecuencia de reconstrucción f_M . Para eliminar las réplicas del espectro de la señal continua y conseguir que la reconstrucción sea fiel a la señal original, es necesario que el filtro tenga una frecuencia de corte igual a $f_M/2$.

Para describir las ecuaciones que relacionan la señal de salida $r[n]$ con la de entrada $r_s[n]$ es necesario formalizar la relación que existe entre la variación deseada de la fre-

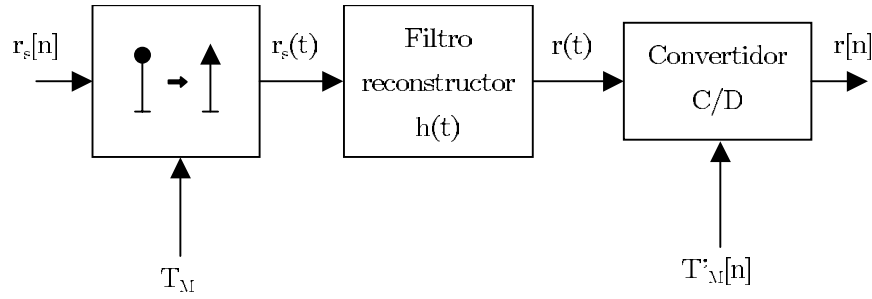


Fig. 3.2: Esquema del convertidor de frecuencia de muestreo

cuencia de muestreo y los instantes de conversión de señal discreta a continua y de la continua a discreta. En el subapartado que se presenta a continuación se definen una serie de señales y expresiones sencillas que concretan dicha relación. Partiendo de esa base, en el siguiente subapartado, se logra especificar las relaciones entre la señal de entrada $r_s[n]$ y salida $r[n]$.

Relación entre los instantes de reconstrucción y muestreo

El objetivo del convertidor es modificar la frecuencia de muestreo a conveniencia, por lo que el periodo de muestreo $T'_M[n]$ es, en general, distinto al periodo T_M y puede variar de un instante n al siguiente. La diferencia entre ambos viene dada por $\Delta\Omega[n]$, que es la diferencia de frecuencia de muestreo que se desea introducir en cada instante n , normalizada por la frecuencia de muestreo $f'_M[n]$, como se expresa en la siguiente ecuación

$$\Delta\Omega[n] = \frac{f_M - f'_M[n]}{f'_M[n]} = \frac{T'_M[n] - T_M}{T_M} \quad (3.1)$$

De esta ecuación se deduce que la desviación de frecuencia normalizada $\Delta\Omega[n]$ equivale a la fracción del periodo de muestreo T_M que diferencia a ambos periodos de muestreo, T_M y $T'_M[n]$.

Como en general ambos periodos de muestreo son distintos, los instantes t_n en los que se convierten las muestras de la señal discreta $r_s[n]$ en impulsos no coinciden con los instantes t'_n en los que se convierten los valores de la señal continua $r(t)$ en las muestras de la señal discreta $r[n]$, como se aprecia en la figura 3.3. Dado que el periodo de conversión de señal discreta a continua T_M es constante, y asumiendo que el instante $t_0 = 0$, los instantes t_n se pueden expresar como

$$t_n = t_{n-1} + T_M = nT_M \quad (3.2)$$

En cambio, como el periodo de muestreo $T'_M[n]$ es variable, los instantes t'_n sólo se pueden expresar mediante la ecuación recursiva

$$t'_n = t'_{n-1} + T'_M[n] \quad (3.3)$$

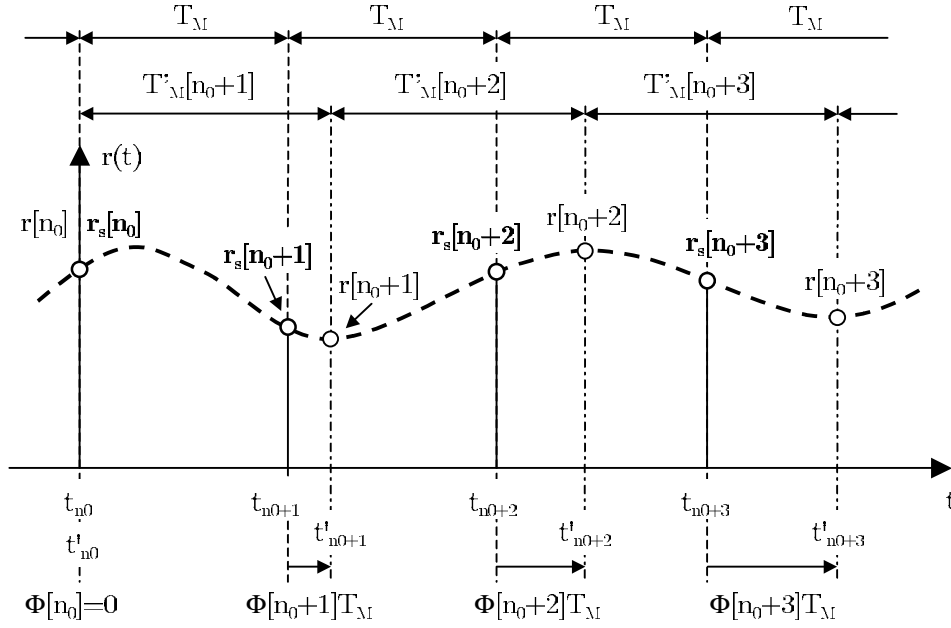


Fig. 3.3: Diferencias normalizadas del instante de muestreo $\Phi[n]$ al realizar la conversión de frecuencia

La diferencia entre instantes de muestreo t_n y t'_n normalizada por el periodo de muestreo T_M se ha denominado $\Phi[n]$, como aparece en la figura 3.3, y se puede expresar como

$$\Phi[n] = \frac{t'_n - t_n}{T_M} = \frac{t'_n - nT_M}{T_M} \quad (3.4)$$

Usando las ecuaciones 3.4, 3.2 y 3.3, puede expresarse $\Phi[n]$ mediante la siguiente ecuación recursiva

$$\Phi[n] = \frac{t'_n - t_n}{T_M} = \frac{(t'_{n-1} + T'_M[n]) - (t_{n-1} + T_M)}{T_M} = \Phi[n-1] + \Delta\Omega[n] \quad (3.5)$$

De esta expresión se deduce que, según sea mayor la frecuencia de muestreo f_M o f'_M , es decir, según sea el signo del error de frecuencia normalizado $\Delta\Omega[n]$, la diferencia entre instantes de muestreo $\Phi[n]$ puede ser creciente o decreciente en el tiempo. En la figura 3.3 se representa un ejemplo del caso en el que f_M es mayor que f'_M , o lo que es lo mismo, T_M es menor que T'_M , por lo que $\Delta\Omega[n]$ es positiva y en consecuencia $\Phi[n]$ es creciente.

Función de transferencia del modelo

Una vez determinadas las relaciones entre instantes de muestreo se procederá a analizar paso a paso las transformaciones que sufre la señal al atravesar el convertidor, con el fin

de obtener unas expresiones que permitan deducir como realizar este proceso mediante un sistema digital.

En primer lugar, hay un bloque que convierte la secuencia de muestras $r_s[n]$ en impulsos centrados en los instantes t_n . De esta forma se obtiene la señal continua $r_s(t)$ definida por la siguiente ecuación

$$r_s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_s[i] \delta(t - t_i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_s[i] \delta(t - iT_M) \quad (3.6)$$

A continuación, a la señal se le aplica un filtro rector de respuesta al impulso $h(t)$ que proporciona la señal continua $r(t)$, que puede expresarse como

$$r(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_s[i] h(t - iT_M) \quad (3.7)$$

La señal discreta $r[n]$ que se obtiene del convertidor continuo/discreto se puede expresar mediante la siguiente ecuación usando t'_n para representar los instantes de muestreo

$$r[n] = r(t'_n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_s[i] h(t'_n - iT_M) \quad (3.8)$$

Despejando t'_n de la ecuación 3.4 y haciendo el cambio de variable $j = n - i$, la ecuación anterior se puede expresar como

$$r[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_s[i] h((n + \Phi[n] - i)T_M) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r_s[n - j] h((j + \Phi[n])T_M) \quad (3.9)$$

La diferencia de instantes de muestreo normalizada $\Phi[n]$ varía a medida que crece n , por lo que no se puede encontrar un filtro discreto equivalente a todo el sistema de respuesta al impulso invariante. Aunque sí se puede encontrar la equivalencia con un sistema discreto de respuesta al impulso variante con el tiempo $h_d[n, j]$, convirtiendo la ecuación anterior en

$$r[n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r_s[n - j] h_d[n, j] \quad (3.10)$$

De esta última expresión se deduce que la respuesta al impulso del sistema variante $h_d[n, j]$ que se obtiene es

$$h_d[n, j] = h((j + \Phi[n])T_M) \quad (3.11)$$

La respuesta al impulso del sistema variante descrita en la expresión anterior incluye un retardo ¹ igual a la diferencia de instantes de muestreo normalizada $\Phi[n]$, que como se

¹Para evitar confusiones y poder ser más preciso, en adelante se usará el término *retardo* para denominar diferencias entre instantes de tiempo tanto positivas como negativas, mientras que se usarán los términos *adelanto* y *retraso* cuando se desee explicitar su signo.

mostró en la ecuación 3.5 puede ser creciente o decreciente. Desde la perspectiva de una realización práctica del convertidor, el crecimiento o decrecimiento de dicho retardo puede suponer que su respuesta al impulso se alargue en exceso en una u otra dirección. Para evitarlo es posible eliminar estos retardos de la respuesta del filtro retrasando o adelantando la señal de entrada al filtro, aunque sólo es sencillo introducir estos retardos en la señal si son de un número entero de periodos de muestreo T_M .

En el siguiente apartado se explicará cómo es posible modificar estas ecuaciones para lograr unas nuevas expresiones de las que se deduzca fácilmente la forma de realizar este sistema en la práctica.

3.3.2. Realización digital del convertidor de frecuencia

Para lograr una realización digital del convertidor de frecuencia, conviene replantear la expresión de la señal discreta $r[n]$. Para ello, es necesario separar la diferencia entre instantes de muestreo normalizada $\Phi[n]$ en parte entera $\Phi_e[n]$ y parte fraccionaria $\Phi_f[n]$, como se expresa en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\Phi_e[n] &= \lfloor \Phi[n] \rfloor \\ \Phi_f[n] &= \Phi[n] - \Phi_e[n]\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde la operación $\lfloor x \rfloor$ significa *el mayor entero menor o igual que x* . De esta ecuación se deduce que

$$0 \leq \Phi_f[n] < 1\tag{3.13}$$

De este modo, usando las ecuaciones 3.12 y 3.9 se puede expresar la señal discreta $r[n]$ como

$$r[n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r_s[n-j]h((j + \Phi_e[n] + \Phi_f[n])T_M)\tag{3.14}$$

Aplicando un nuevo cambio de variable de la forma

$$k = j + \Phi_e[n]\tag{3.15}$$

se obtiene

$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_s[n + \Phi_e[n] - k]h((k + \Phi_f[n])T_M)\tag{3.16}$$

De esta última ecuación se desprende que es posible obtener la señal discreta $r[n]$ realizando dos procesos viables mediante sistemas digitales. Por un lado, aplicar un retardo a la señal $r_s[n]$ de un número entero de muestras $\Phi_e[n]$. Por otro, filtrar dichas muestras usando un filtro discreto de respuesta variante que depende de $\Phi_f[n]$. A tenor de la ecuación 3.13, este filtro introduce un adelanto en la respuesta al impulso que en ningún caso alcanza un periodo de muestreo T_M , por lo que la longitud de su respuesta no cambia significativamente.

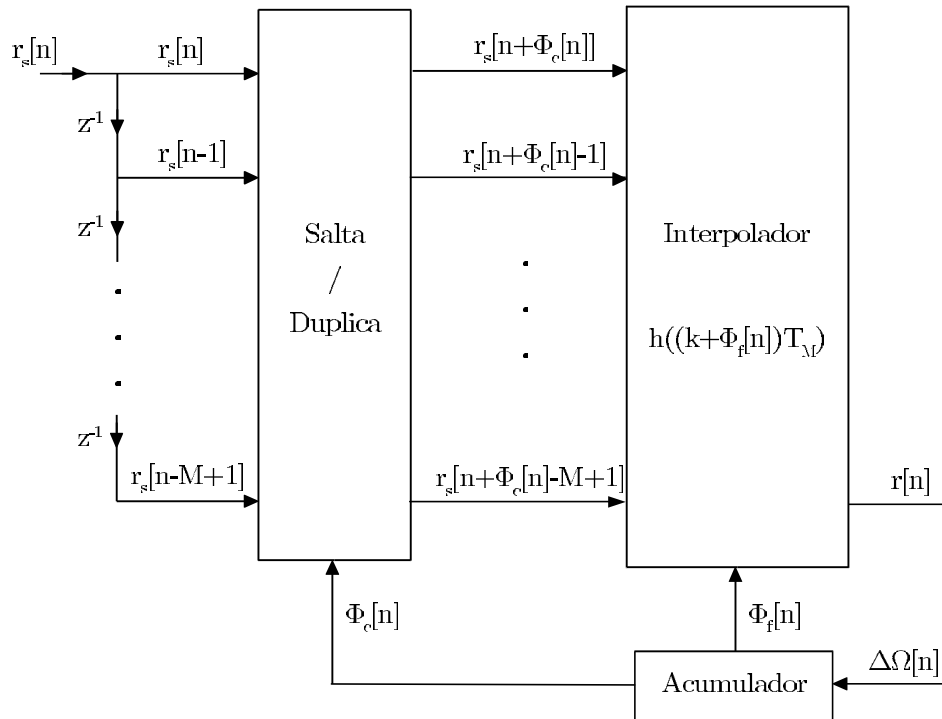


Fig. 3.4: Estructura del convertidor de frecuencia de muestreo

Los dos procesos se representan en el diagrama de la figura 3.4 con sendos bloques, en el que se ha supuesto que, para simplificar, la respuesta al impulso $h(t)$ tiene duración finita igual a $(M + 1)T_M$. El bloque *Salta/Duplica* introduce el retardo de un número entero de muestras, mientras que el bloque *Interpolador* introduce el retardo fraccionario implementando los productos y sumas asociados al filtrado discreto variante.

Además de estos dos bloques, aparece un tercero denominado *Acumulador*, encargado de calcular en cada instante n las diferencias de instantes de muestreo entera $\Phi_e[n]$ y fraccionaria $\Phi_f[n]$ a partir de la diferencia normalizada de frecuencias de muestreo $\Delta\Omega[n]$, usando la ecuación recursiva 3.5. La denominación del bloque se debe a que para calcular la diferencia de instantes de muestreo $\Phi[n]$ hay que *acumular* las diferencias de frecuencias normalizadas $\Delta\Omega[n]$ hasta el instante n . A su vez, $\Phi_e[n]$ y $\Phi_f[n]$ se derivan de forma directa a partir de $\Phi[n]$ usando la expresión 3.12.

A continuación se describe con más de detalle el funcionamiento de los dos bloques básicos del convertidor de frecuencia: *Salta/Duplica* e *Interpolador*

Bloque *Salta/Duplica*

El procedimiento para introducir un retardo $\Phi_e[n]$ en la señal $r_s[n]$ es sencillo, porque un retardo entero encaja perfectamente en el eje de tiempos discreto n . Para lograrlo se realizan saltos temporales en una u otra dirección según varíe el retardo a aplicar $\Phi_e[n]$.

Habitualmente, teniendo en cuenta que la modificación de la frecuencia de muestreo suele ser relativamente pequeña (en sistemas para la sincronización del muestreo en recepción no suele superar el 0.01 % o 100 ppm), la variación del retardo $\Phi[n]$ es muy lenta, por lo que, de un instante n al siguiente, no se producen incrementos o reducciones en $\Phi_e[n]$ de más de una muestra.

En la figura 3.5 se observa concretamente cómo se introducen estas variaciones de una muestra en el retardo $\Phi_e[n]$. Si en el instante n el retardo $\Phi_e[n]$ aumenta en una muestra es necesario adelantar la señal $r_s[n]$ una muestra. En ese caso se elimina una muestra a la salida saltando a la muestra siguiente de manera que, a partir de entonces, la señal queda adelantada una muestra, como se aprecia en la figura. Si por el contrario en el instante n el retardo $\Phi_e[n]$ disminuye en una unidad hay que retrasar una muestra la señal. En ese caso se intercala una muestra que es el duplicado de la anterior de modo que, a partir de entonces, la señal queda retrasada una muestra, como se aprecia en la figura.

Aunque las distintas muestras de salida de este bloque $r_s[n + \Phi_e[n] - k]$, mostradas en la figura 3.4, puedan parecer muestras de una misma señal $r_s[n + \Phi_e[n]]$ con distintos retardos k , esto no es cierto debido al término $\Phi_e[n]$. De hecho la secuencia de muestras de cada una de las salidas del bloque no equivalen a una misma secuencia con distintos retardos. Cuando se producen saltos o repeticiones de muestra debido a una variación de $\Phi_e[n]$ la muestra repetida o saltada de la señal original $r_s[n]$ es distinta en cada una de las salidas del bloque, introduciendo diferencias entre unas secuencias y otras. Para remarcar este hecho a partir de ahora cada una de estas señales $r_s[n + \Phi_e[n] - k]$ se referirán como señales distintas denominadas $r_{s,k}[n]$. Lo que sí se mantiene en cada instante n es el hecho de que las muestras de salida de este bloque son muestras consecutivas de la señal original $r_s[n]$.

Desde una perspectiva centrada en el flujo de muestras o número de muestras por segundo, el convertidor de frecuencia de muestreo debe servir para modificar a la salida el ritmo de muestras por segundo de la señal de entrada. Si la nueva frecuencia de muestreo $f'_M[n]$ es mayor que f_M el número de muestras por segundo a la salida es mayor que a la entrada. Si por el contrario $f'_M[n]$ es menor que f_M , el número de muestras por segundo a la salida es menor que a la entrada. Para ajustar el ritmo a la salida es necesario que cada cierto tiempo el número de muestras a la salida sea mayor o menor que el de la entrada. Precisamente mediante los intercalados y eliminaciones de muestras que realiza este bloque se logra dicho ajuste.

En la práctica, para poder saltar muestras o duplicarlas es necesario almacenar un cierto número de muestras en un banco de memoria que amortigua las diferencias de frecuencias de entrada y salida. De ese modo es posible lograr que el proceso sea causal en caso de saltos, y evitar que se pierdan las muestras que van llegando en caso de duplicación.

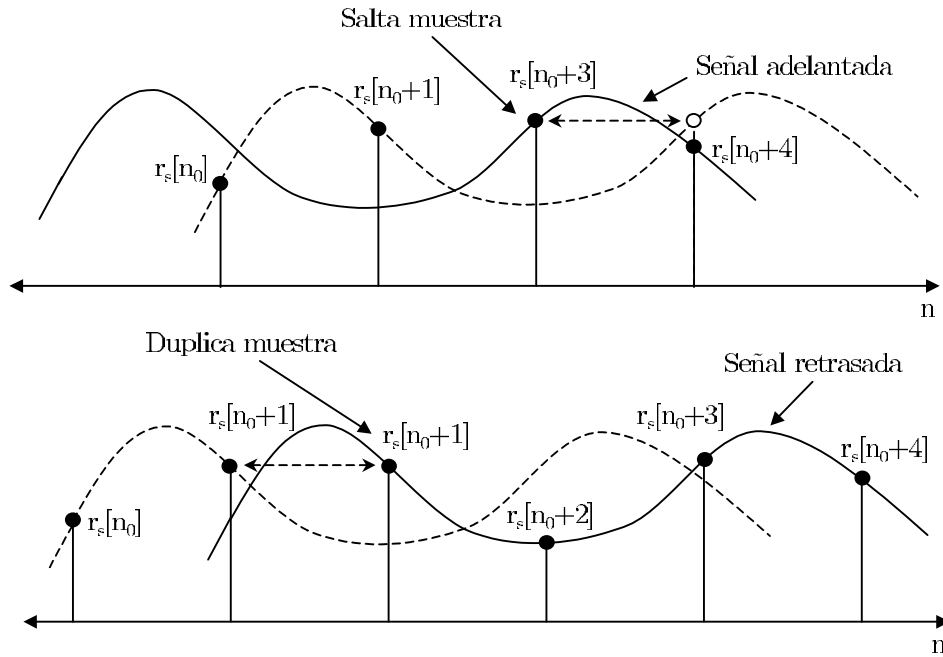


Fig. 3.5: Ejemplos del funcionamiento del bloque *Salta/Duplica*

Bloque *Interpolador*

A partir de la ecuación 3.16 se deduce que la respuesta al impulso del filtro discreto variante $h_d[n, k]$ que hay que aplicar a las muestras $r_{s,k}[n]$ es

$$h_d[n, k] = h((k + \Phi_f[n])T_M) \quad (3.17)$$

Aunque esta expresión describe con detalle el funcionamiento del convertidor, desde una perspectiva orientada a su realización práctica se puede simplificar eliminando las referencias a la dinámica de variación de los coeficientes del filtro. De este modo, la respuesta al impulso del filtro discreto variante en un instante n se puede representar como

$$h_\mu[k] = h((k + \mu)T_M) \quad (3.18)$$

donde μ se corresponde en cada instante n con el valor de $\Phi_f[n]$.

En estas últimas ecuaciones se pone más claramente de manifiesto que la respuesta al impulso del filtro discreto variante en un instante n equivale a la respuesta al impulso $h(t)$ muestreada a frecuencia f_M y con un adelanto de una fracción de muestra μ .

Si se supone que el filtro reconstructor de partida es un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $f_M/2$, como se planteó en el apartado 3.3.1, las distintas respuestas en frecuencia del filtro discreto variante deben ser paso todo, con un desfase lineal proporcional a μ o, lo que es lo mismo, un retardo de grupo constante e igual a $-\mu$. Esto significa

que el único efecto que introduciría en la señal de entrada sería un adelanto de una fracción de muestra μ , por lo que recibe la denominación de filtro discreto de retardo fraccionario.

A este tipo de filtros de respuesta variable se les conoce como interpoladores. Este hecho se debe a que introducir en la señal un retardo de una fracción de muestra μ es equivalente a realizar una interpolación en el sentido clásico de aproximación del valor de una función o señal, como se aprecia en la figura 3.6. Dicha interpolación consiste en calcular el valor que toma la señal en el instante t'_{n0} a partir de una serie de muestras de la señal tomadas en los instantes t_{n0+k} , donde el instante t_{n0} es el instante anterior más próximo a t'_{n0} de dicha secuencia. Desde la perspectiva de la teoría de señales y sistemas, la distancia entre el instante t_{n0} y el instante t'_{n0} equivale al retardo fraccionario del filtro μ . En la práctica, para poder usar muestras correspondientes a instantes posteriores al instante t'_{n0} y que el filtro sea causal, se introduce un retardo mayor. En concreto el retardo fraccionario se incrementa en un número de muestras igual al número de muestras de la señal de instantes posteriores a t'_{n0} que se pretendan usar para la interpolación. Aunque las dos formas de entender este filtro, como filtro discreto de retardo fraccionario variante o como interpolador, son realmente análogas, por simplificar la nomenclatura se ha decidido denominarlo interpolador.

Para resaltar que la respuesta al impulso variante del interpolador $h_\mu[k]$ procede de la respuesta continua $h(t)$ del filtro reconstructor, en adelante se denominará a esta última, respuesta del filtro continuo original del interpolador.

La realización del interpolador plantea algunos problemas prácticos. Si se decide usar el filtro paso bajo ideal como filtro continuo original, hay que considerar que su respuesta al impulso $h(t)$ tiene la forma de la función *sinc*(.), por lo que tiene longitud infinita y no es causal. Las respuestas al impulso del interpolador que se derivan de ella también son de longitud infinita y no causales, por lo que dicho filtro no es realizable en tiempo real.

En principio es posible que la respuesta del filtro continuo original sea de longitud finita o infinita [Brai97]. Mediante el uso de estructuras directas para filtros digitales se pueden obtener respuestas de ambos tipos siempre que los coeficientes de la función de transferencia del interpolador que se van modificando en función de μ sean únicamente los coeficientes del numerador. De lo contrario, como los estados internos del filtro dependen de valores anteriores tanto de la señal de entrada como de los coeficientes denominador de la función de transferencia, si en un instante determinado cambia el valor de dichos coeficientes, dichos estados internos no concordarían con los que se habrían obtenido de haber usado hasta entonces los nuevos coeficientes. Este hecho produce una respuesta transitoria indeseada hasta lograr el reajuste de los estados internos del filtro [Laak01]. De todos modos en esta tesis se ha profundizado en el caso habitual de interpoladores de respuesta al impulso finita que, además de tener un menor coste computacional, presentan algunas ventajas adicionales para la sincronización en sistemas DMT, como se pone de manifiesto en el capítulo 4.

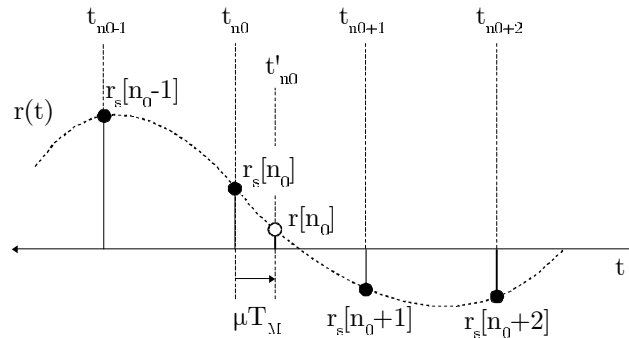


Fig. 3.6: Muestra interpolada en el instante t'_{n0} a partir de las muestras en los instantes t_{n0+n}

Un ejemplo de diseño para la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro continuo original, podría ser la respuesta al impulso del filtro ideal con un retraso igual a $T_M M/2$ multiplicada por una ventana rectangular de longitud $T_M M$. Gracias a estas transformaciones se logra que la respuesta final sea finita, causal y simétrica. La respuesta al impulso $h(t)$ resultante sería

$$h(t) = \text{sinc} \left(f_M \left(t - \frac{MT_M}{2} \right) \right) w(t) \quad (3.19)$$

donde la ventana rectangular $w(t)$ es igual a

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < MT_M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.20)$$

A partir de estas expresiones se deduce que la respuestas al impulso del interpolador serían

$$h_\mu[k] = \text{sinc} \left(k + \mu - \frac{M}{2} \right) w[k] \quad (3.21)$$

donde $w[k]$ es igual a

$$w[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k < M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.22)$$

En la figura 3.7 se presentan las respuestas al impulso del interpolador diseñado para distintos valores de μ . Se aprecia claramente como la respuesta del filtro discreto se adelanta con respecto a la respuesta continua del filtro reconstructor $h(t)$ a medida que el valor de μ aumenta. En la figura 3.8 se presentan las respuestas en frecuencia, módulo y retardo de grupo, del interpolador. En ella se observa que la respuesta dista mucho de los filtros paso todo de retardo de grupo constante que se obtendrían con la respuesta al impulso $h(t)$ de un filtro reconstructor ideal. Por un lado el módulo de la respuesta en frecuencia (excepto en el caso de $\mu = 0$) no es igual a 1, en especial cuando la frecuencia es próxima a la frecuencia máxima $f_M/2$. Algo parecido le ocurre al retardo de grupo. Como la respuesta del filtro ideal se retrasa $M/2$ muestras, los retardos de grupo deberían

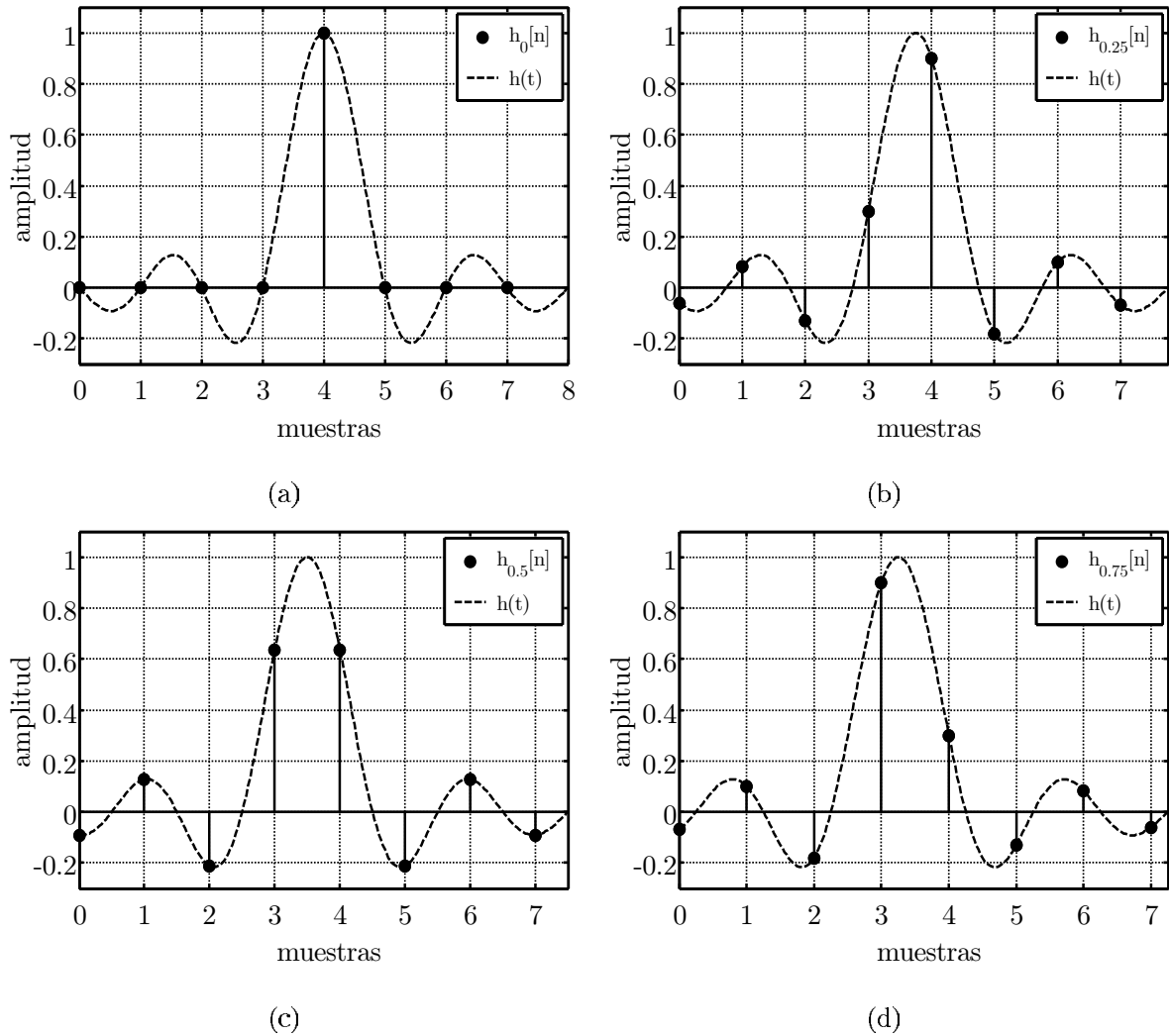


Fig. 3.7: Respuestas al impulso del interpolador, con $M = 8$ y retardo fraccionario (a) $\mu = 0$, (b) $\mu=0.25$, (c) $\mu=0.5$, (d) $\mu=0.75$

ser iguales a $M/2 - \mu$. Para frecuencias bajas el resultado es aproximadamente igual al esperado, pero al aproximarse a la frecuencia máxima se desvía bastante.

Este fenómeno se debe a que la respuesta original $h(t)$ no es la del filtro ideal y al tomar muestras a frecuencia f_M se produce solapamiento espectral de la respuesta en frecuencia original, como se observa en la figura 3.9. A pesar de que el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro antes de solaparse no depende de μ , la fase sí, por lo que, el resultado final de este solapamiento varía, obteniéndose muy distintas respuestas. Aunque con ciertas fluctuaciones, cuanto más próxima es la frecuencia a la frecuencia máxima mayor es el solape, por lo que la variación de la respuesta en frecuencia resultante es también mayor. De todos modos, aun mejorando el diseño del filtro original $h(t)$ este

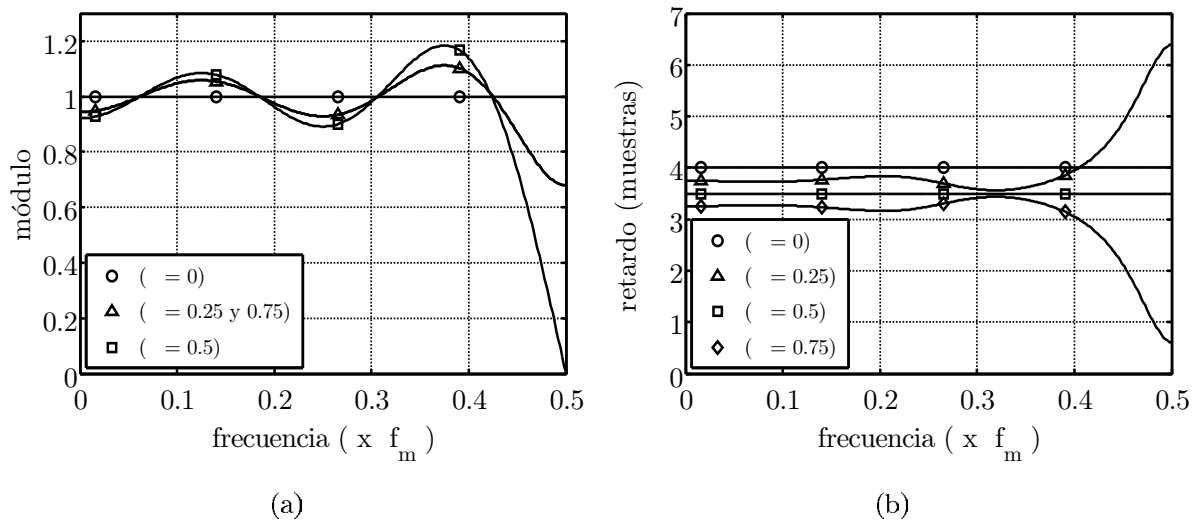


Fig. 3.8: Respuestas en frecuencia del interpolador diseñado mediante ventana rectangular ($M=8$): (a) módulo y (b) retardo de grupo

fenómeno sigue produciéndose, pero en menor medida. Al tratarse de una respuesta al impulso de duración finita, su respuesta en frecuencia no está limitada en banda y por tanto este solapamiento es inevitable. Analizando la interpolación en el dominio del tiempo esta conclusión también parece lógica, puesto que es razonable pensar que es más fácil calcular con precisión un valor intermedio de una señal de baja frecuencia que de frecuencia más alta. Para frecuencias bajas las variaciones relativas de una muestra a otra han de ser pequeñas y, por tanto, pequeño el margen de error relativo, mientras que para frecuencias más altas las variaciones relativas son mayores y, por tanto, mayor el margen de error relativo.

Debido a este problema que presentan los interpoladores, en la práctica es necesario, habitualmente, realizar un sobremuestreo de la señal antes de realizar la conversión de frecuencia, de modo que la frecuencia máxima de la señal discreta recibida $r_s[n]$ esté alejada de la frecuencia $f_M/2$, y no afecte a la señal el mal comportamiento de estos filtros a altas frecuencias. Suele aplicarse un factor de sobremuestreo L entero para que el proceso de diezmado necesario para obtener finalmente la frecuencia de muestreo deseada sea sencillo.

El sobremuestreo obliga a realizar algunos cambios en la estructura del convertidor de frecuencia para preservar su eficiencia. En el apartado siguiente se detallan estos cambios para presentar la realización del convertidor de frecuencia de muestreo que se usa en la práctica.

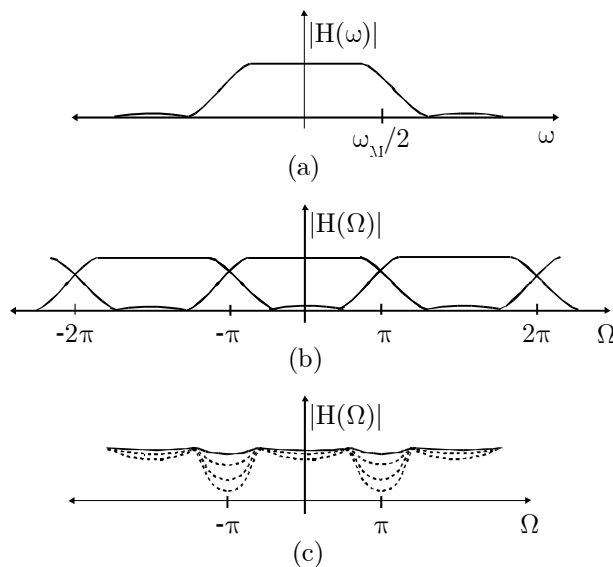


Fig. 3.9: Solapamiento espectral de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original al tomar muestras a frecuencia f_M con distintos retardos μ : (a) respuesta en frecuencia del filtro continuo original; (b) respuestas en frecuencia solapadas al tomar muestras a frecuencia f_M ; (c) respuesta en frecuencia resultante para distintos retardos μ

3.3.3. Convertidor de frecuencia con sobremuestreo

Como ya se ha mencionado en el apartado anterior, para lograr buenos resultados con el convertidor de frecuencia de muestreo es necesario aplicar un sobremuestreo previo a la señal recibida. El problema que implica el sobremuestreo es un incremento notable de la velocidad de procesamiento en el receptor. Para reducir en lo posible este incremento, después del convertidor de frecuencia de muestreo, la señal se diezma por el mismo factor de sobremuestreo, de modo que disminuya la velocidad de procesamiento necesaria en el resto del receptor.

El diagrama completo de cómo se corrige el sincronismo mediante el convertidor de frecuencia con sobremuestreo es el que aparece en la figura 3.10. La señal continua $r(t)$ se convierte en la señal discreta $r_s[m]$ a una frecuencia de muestreo Lf_M , con lo que se le aplica un factor de sobremuestreo igual a L . Posteriormente, se convierte su frecuencia de muestreo y se obtiene la señal $r[m]$. Y, por último, se diezma la señal por un factor L , obteniendo la señal discreta $r[n]$.

La presencia del bloque de diezmo después del convertidor de frecuencia abre la posibilidad de una realización más eficiente basada en las identidades nobles para el diezmo [Croch83]. Estas identidades permiten modificar las estructuras de algoritmos de múltiples frecuencias de muestreo para reducir notablemente su coste computacional. Las identidades nobles usadas son únicamente dos. La primera afirma que la suma de varias señales que después se diezman es equivalente a diezmar antes cada uno de los sumandos

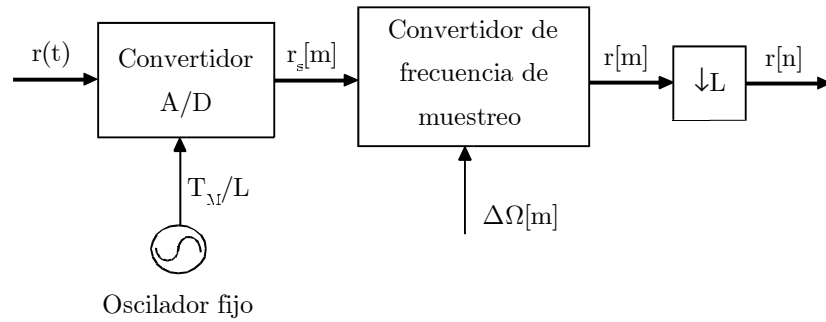


Fig. 3.10: Diagrama de bloques del sistema de corrección de sincronismo usando sobremuestreo

y después sumar. La segunda que los productos por constante pueden desplazarse de un lado a otro de un bloque de diezmado sin que cambie el funcionamiento de la estructura.

Si al esquema de la figura 3.4 se le añade el bloque de diezmado y se aplican dichas identidades antes mencionadas se obtiene el diagrama de la figura 3.11. El bloque de diezmado se distribuye en cada una de las entradas correspondientes a las señales $r_{s,k}[m]$ que se suman en el filtro de retardo fraccionario multiplicadas por sus correspondientes coeficientes, y queda situado antes de dichas multiplicaciones, como aparece en la figura. El problema es que, en rigor, los productos que se realizan para calcular la salida del filtro no son por constantes, puesto que varían dependiendo del retardo fraccionario $\Phi_f[n]$ a aplicar. En ese caso, la identidad sigue siendo válida si el parámetro que las controla es a su vez diezmado por el mismo factor, lo que justifica la aparición del bloque que diezma la señal $\Phi_f[m]$ para obtener $\Phi'_f[n]$.

En la misma figura aparece recuadrado con línea discontinua el bloque *Salta/Duplica* junto con los múltiples bloques de diezmado resultantes. Estos bloques se pueden unir en uno sólo puesto que, en cierto modo, comparten funcionalidad al realizar las operaciones de eliminar o replicar muestras. El bloque *Salta/Duplica* elimina o duplica muestras si se incrementa o reduce $\Phi_e[m]$, y el bloque de diezmado elimina $L - 1$ de cada L muestras de la señal de entrada.

Para poder unir ambos bloques en uno sólo se puede definir una nueva señal $\Delta\Phi_e[n]$ como

$$\Delta\Phi_e[n] = \Phi_e[nL] - \Phi_e[(n-1)L] = \Phi'_e[n] - \Phi'_e[n-1] \quad (3.23)$$

Esta señal representa el incremento de $\Phi_e[m]$ en cada paquete de L muestras de la señal $r_s[m]$, o lo que es lo mismo el incremento de la señal diezmada $\Phi'_e[n]$ con respecto a la muestra anterior. Este incremento equivale al número de muestras que el bloque *Salta/Duplica* elimina si es positivo o replica si es negativo por cada grupo de L muestras. Como el bloque de diezmado elimina $L - 1$ de cada L muestras, si se suman los que elimina/replica un bloque y los del otro se obtiene el total de muestras eliminadas/replicadas entre ambos. Habitualmente, como la corrección de frecuencias de muestreo es relativa-

mente pequeña, la variación de $\Phi_e[n]$ es muy lenta, por lo que $\Delta\Phi_e[n]$ sólo toma los valores $\{-1, 0, 1\}$. Por otro lado, el factor de sobremuestreo L debe ser un entero lógicamente mayor que 1 (típicamente igual a 2). La suma de muestras eliminadas/replicadas de ambos bloques es mayor que cero, por lo que el nuevo bloque nunca duplica muestras. A tenor de este análisis, ambos bloques pueden sustituirse por un sólo bloque de diezmado de factor variable $L + \Delta\Phi_e[n]$.

Obsérvese en la figura 3.11 que si se introduce el nuevo bloque de diezmado variable, las señales que genera el bloque *Acumulador* para controlar el interpolador y el bloque de diezmado variable, $\Phi_e[m]$ y $\Phi_f[m]$, se usan previamente diezmadas por un factor L . En el caso de $\Phi_f[m]$, para aprovechar las identidades nobles antes mencionadas, y en el caso de $\Phi_e[m]$, para calcular $\Delta\Phi_e[n]$, según la ecuación 3.23. Por tanto, parece más razonable que en vez de calcular ambas señales mediante el bloque *Acumulador* y después diezmarlas, se calculen previamente diezmadas. Como habitualmente la diferencia de frecuencias de muestreo normalizada $\Delta\Omega[m]$ varía muy lentamente puede usarse también su equivalente diezmada $\Delta\Omega'[n]$ sin temor a pérdida de información significativa. De esta forma la ecuación que gobierna el *Acumulador* requiere un ligero cambio para adaptarla a la nueva señal de entrada, obteniéndose

$$\Phi'[n] = \Phi'[n-1] + L\Delta\Omega'[n] \quad (3.24)$$

donde el producto por el factor L equivale a la acumulación que se produciría en los L instantes de muestreo del eje temporal m entre cada muestra del eje temporal n .

Estas modificaciones quedan recogidas en la figura 3.12, que representa el esquema final del convertidor de frecuencia de muestreo en sistemas con sobremuestreo a la entrada. En ella aparece el nuevo bloque de diezmado variable y el acumulador con entrada $\Delta\Omega[n]$, regido por la ecuación 3.24.

3.4. Estructura del interpolador

El interpolador, como se ha mencionado en apartados anteriores, es equivalente a un filtro FIR, por lo que para su implementación puede usarse una estructura análoga a la directa, clásica para este tipo de filtros. Esta estructura se caracteriza porque sus coeficientes coinciden con los valores que toma en cada instante k la respuesta al impulso $h_\mu[k]$, referidas en la ecuación 3.18. El interpolador tiene la peculiaridad de que su respuesta al impulso es variante y depende en cada instante n del parámetro μ , retardo fraccionario que debe introducir. Por tanto, los coeficientes de la estructura elegida deben cambiar en cada nuevo periodo de muestreo.

A continuación se describirán tres posibles familias de estructuras para realizar el interpolador, clasificadas según la forma de obtener sus coeficientes. La primera, conocida como estructura de banco de filtros, se basa en el cálculo y almacenamiento previo de todos los posibles valores de dichos coeficientes. La segunda se basa en el cálculo en cada

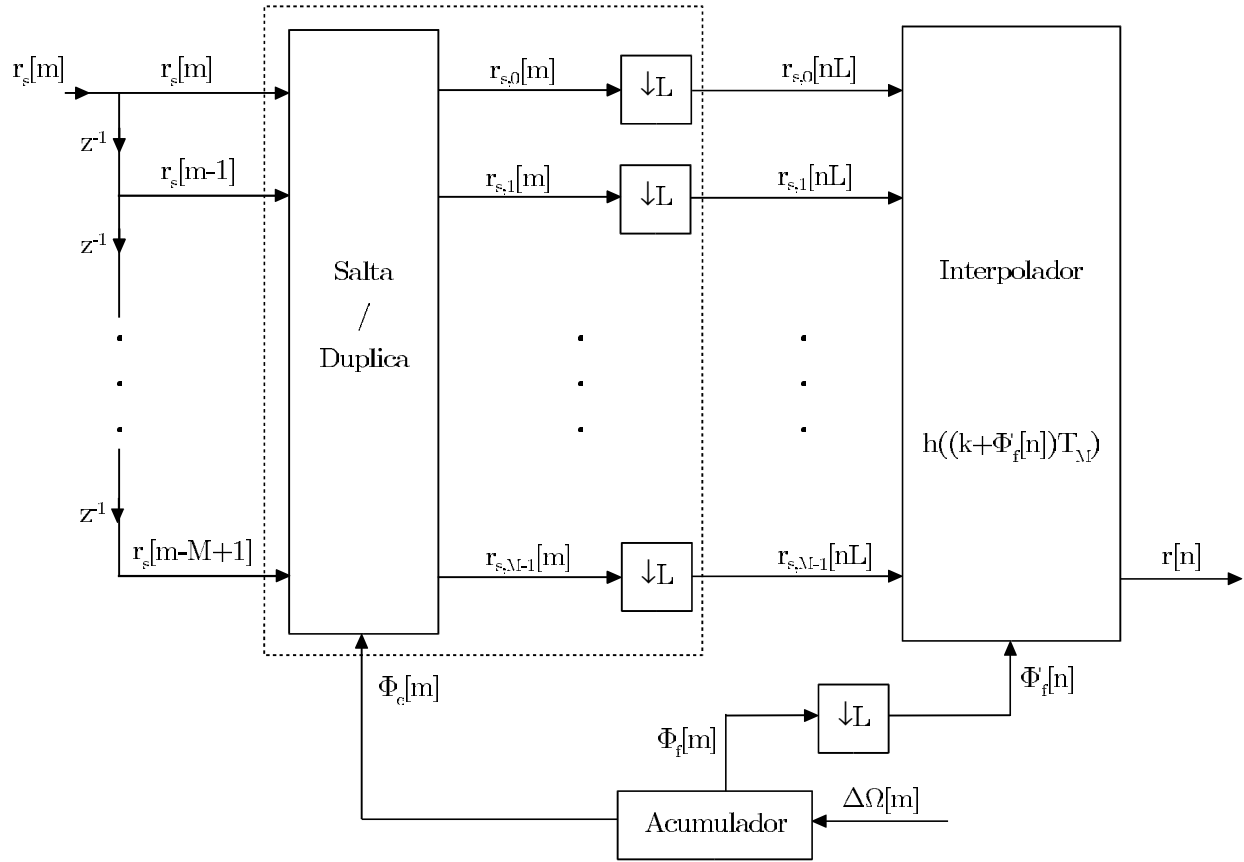


Fig. 3.11: Estructura del convertidor de frecuencia usando sobremuestreo

instante n de los coeficientes mediante polinomios. Y la tercera es una opción híbrida, que incluye a las anteriores pero abre la posibilidad de otras de opciones intermedias, lo que permite adaptarla a muy distintas arquitecturas.

Existen múltiples estructuras posibles, pero no se puede elegir a priori la más adecuada, ya que dicha elección depende de la arquitectura *hardware* disponible para su realización. Por este motivo, en este apartado se presentará, en primer lugar, una serie de consideraciones sobre las distintas arquitecturas posibles, con el objetivo de determinar la conveniencia de una u otra estructura según el caso.

3.4.1. Consideraciones *hardware*

La diferencia básica a la hora de diseñar la estructura del interpolador con unas plataformas *hardware* u otras es el grado de paralelismo que se puede alcanzar con cada una. Mientras que los sistemas digitales de arquitectura configurable (sistemas de lógica cableada) permiten realizar estructuras masivamente paralelas, con los de arquitectura fija

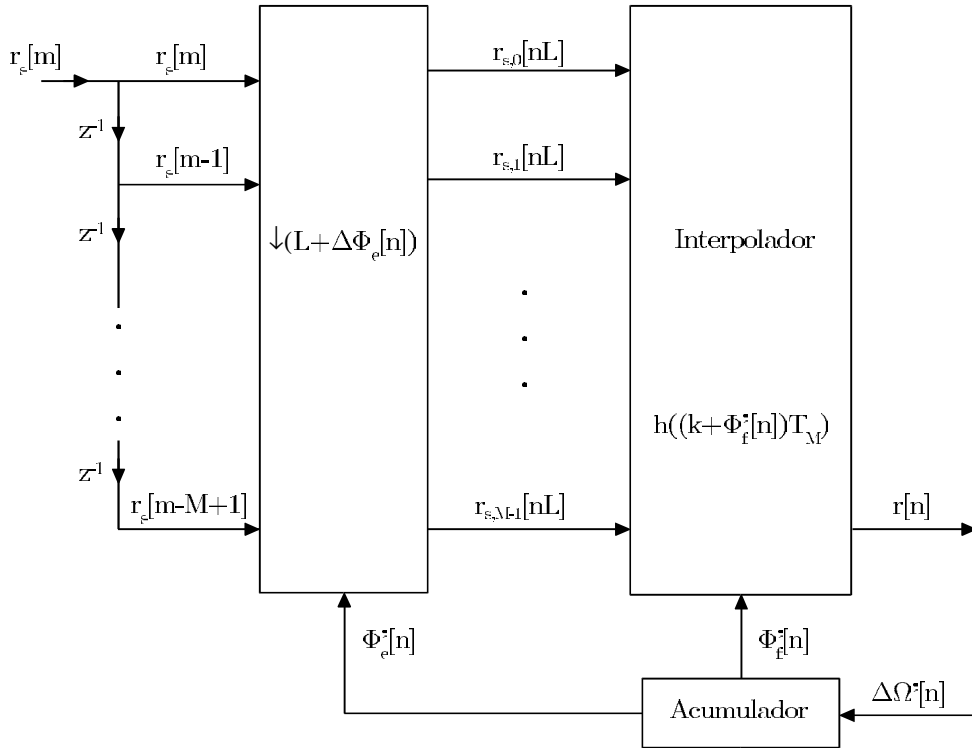


Fig. 3.12: Estructura simplificada del convertidor de frecuencia usando sobremuestreo

(sistemas de lógica programada) no se puede, por lo que los algoritmos deben ser secuenciales. Este aspecto va a determinar mucho la estructura a utilizar dentro del amplio abanico disponible.

En los primeros es posible configurar con mayor libertad la arquitectura del sistema para adaptarla a los algoritmos que se desean implementar. En unos casos porque tienen un diseño reconfigurable, basado en multitud de celdas multipropósito interconectadas entre sí, como ocurre con las FPGAs (*Field Programmable Gate Array*) [Xili03][Alte03]; en otros porque su arquitectura se diseña expresamente para adaptarla a los algoritmos, como ocurre con los ASICs (*Application Specific Integrated Circuit*). En mayor o menor medida, en ambos es posible adaptar muy bien el *hardware* disponible al algoritmo en cuestión para que el tiempo de ejecución sea mínimo, aplicando para ello técnicas basadas en el paralelismo. A cambio estos sistemas tienen como principales desventajas la falta de flexibilidad del hardware una vez producido. Es evidente que los ASICs no se pueden volver a configurar una vez fabricados, y aunque con las FPGAs sí es posible, no es tan sencillo como cambiar el programa de un procesador.

Entre los de arquitectura fija, los más usados para este tipo de aplicaciones son los procesadores digitales de señales (DSPs). Están diseñados específicamente para el tratamiento digital de señales y permiten realizar algoritmos de gran complejidad, pero tienen una arquitectura más restrictiva (reducido número de unidades multiplicadoras, unidades

aritmético-lógicas y registros internos de propósito general; un sólo bus de datos y otro de programa; etc) que sólo permite aplicar un grado de paralelismo muy reducido. Habitualmente estos procesadores hacen un uso intensivo de la técnica *pipeline*, que permite paralelizar las distintas fases de ejecución de cada instrucción. Excepcionalmente, como en el caso de los DSPs de la familia TMS320C6x de Texas Instruments [C6x98], incluyen la posibilidad de ejecutar varias instrucciones completamente en paralelo gracias al uso de múltiples unidades aritmético-lógicas y bancos de registros de propósito general. De todas formas, se trata de un paralelismo con muchas restricciones, y que en muchos casos no es posible aprovechar para el algoritmo que se desea implementar.

3.4.2. Estructura de coeficientes almacenados

Una posible alternativa para realizar el interpolador es limitar el número de posibles valores de μ , calcular los coeficientes para dichos valores y almacenarlos en una memoria. Durante la ejecución, en cada instante n se selecciona el conjunto de coeficientes almacenados correspondiente a $\mu[n]$.

Para lograrlo se dividirá el intervalo $[0, 1)$ en el que varía μ en P subintervalos iguales. Cada uno de estos subintervalos se designa por un valor $l \in \{0, \dots, P-1\}$. De todos los posibles valores que puede tomar μ en cada subintervalo l sólo se almacenarán los valores de los coeficientes correspondientes al valor medio del subintervalo que se designará como $\hat{\mu}_l$.

Para seleccionar el subintervalo l que corresponde a un valor concreto de μ se usa la ecuación

$$l = \lfloor \mu P \rfloor \quad (3.25)$$

Y para calcular el valor de $\hat{\mu}_l$ que le corresponde la expresión es

$$\hat{\mu}_l = \frac{2l+1}{2P} \quad (3.26)$$

De este modo, los coeficientes del filtro para cada valor de l se pueden expresar en función del filtro continuo original como

$$\hat{h}[l, k] = h_{\hat{\mu}_l}[k] = h((k + \hat{\mu}_l)T_M) = h\left(\left(k + \frac{2l+1}{2P}\right)T_M\right) \quad (3.27)$$

La principal desventaja que ofrece esta estructura es el inevitable error que se comete al aproximar el retardo μ por el valor más cercano del conjunto discreto de retardos $\hat{\mu}_l$, como se muestra en la figura 3.13. Dicho error se pone especialmente de manifiesto a frecuencias altas, las más sensibles a pequeñas desviaciones del retardo. Sólo es posible reducirlo usando un número mayor de posibles retardos $\hat{\mu}_l$, lo que requiere usar un mayor número de conjuntos de valores de los coeficientes, y por tanto mayor capacidad de memoria. En concreto, el número de conjuntos de valores de los coeficientes que hay que almacenar para una respuesta al impulso del filtro continuo original de duración MT_M es MP .

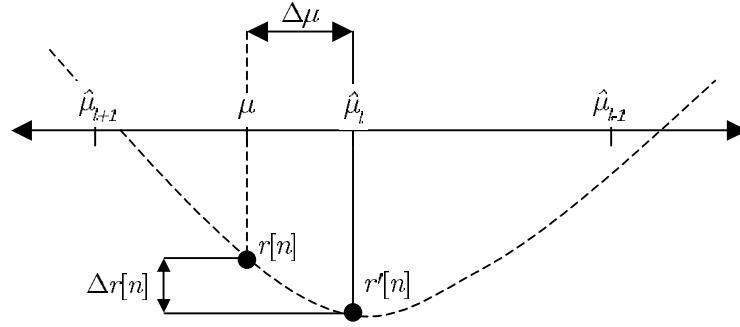


Fig. 3.13: Ejemplo del error $\Delta r[n]$ que se comete por limitar el número de posibles retardos μ

El número de valores de los coeficientes a almacenar se puede reducir sin perder prestaciones del interpolador si se aprovecha la simetría que suele presentar la respuesta al impulso del filtro rector $h(t)$. Si dicho filtro, a semejanza de los filtros FIR, se diseña usando la técnica del enventanado su respuesta al impulso $h(t)$ tiene la siguiente simetría

$$h(t) = h(MT_M - t) \quad (3.28)$$

donde la MT_M es la longitud de la respuesta al impulso $h(t)$.

Aprovechando la simetría indicada en la expresión anterior y usando la ecuación 3.27 se obtiene

$$h_{\hat{\mu}_l}[k] = h((k + \hat{\mu}_l)T_M) = h((M - k - \hat{\mu}_l)T_M) = h_{1-\hat{\mu}_l}[M - 1 - k] \quad (3.29)$$

Y si por otro lado se usa la expresión 3.26 se demuestra que

$$1 - \hat{\mu}_l = 1 - \frac{2l - 1}{2P} = \frac{2(P - l) + 1}{2P} = \hat{\mu}_{P-l} \quad (3.30)$$

de donde se deduce directamente que

$$\hat{h}[l, k] = \hat{h}[P - l, M - 1 - k] \quad (3.31)$$

Esta simetría del interpolador hace posible reducir el número de valores de los coeficientes que hay que almacenar prácticamente a la mitad, lo que es del todo exacto si MP es par y por tanto todos los valores tienen su correspondiente simétrico.

Esta estructura se puede implementar de forma eficiente tanto en arquitecturas fijas como configurables. El requisito más exigente es la cantidad de memoria necesaria, que puede llegar a ser elevada para lograr alta precisión. La ventaja de una implementación con arquitectura configurable es que se pueden realizar los productos de los coeficientes $\hat{h}[l, k]$ por las muestras de entrada $r_{s,k}[nL]$ en paralelo si se almacenan los coeficientes en distintas bancos de memoria según el valor de k . En cualquier caso, el número total de operaciones por muestra de salida serán M multiplicaciones y $M - 1$ sumas.

3.4.3. Estructura de coeficientes computados

Otra de las posibilidades para obtener los coeficientes del interpolador $h_\mu[n]$ es calcularlos en cada instante dependiendo del valor que tome μ . El problema es que, dependiendo de la complejidad de la función que define la respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$, puede resultar muy costoso el cálculo de dichos coeficientes. A continuación se propone una estructura que permite realizar el cálculo con un menor coste computacional, usando funciones simples y reordenando los cálculos para reducir el número de operaciones.

Normalmente se realizan aproximaciones mediante polinomios de la variable μ de órdenes no muy elevados, que son muy sencillos de evaluar. Lo común, como se describe en [Erup93], es usar un polinomio $F_k(\mu)$ para el cálculo de cada uno de los M coeficientes $h_\mu[k]$ como se aprecia en la figura 3.14, de modo que

$$h_\mu[k] = F_k(\mu) = \sum_{m=0}^O a_{k,m} \mu^m \quad (3.32)$$

donde O es el orden del polinomio y $a_{k,m}$ es el coeficiente de orden m del polinomio k .

La opción más inmediata para realizar cada operación de filtrado consiste en calcular primero los coeficientes del interpolador $h_\mu[k]$ y después multiplicarlos por las muestras de la señal $r_{s,k}[nL]$ correspondientes. Sin embargo, es posible reordenar los cálculos de modo que el número de operaciones necesarias se reduzca, como se propone en [Farr88]. Se puede introducir la expresión anterior en la ecuación 3.16 para el cálculo de la señal interpolada

$$r[n] = \sum_{k=0}^M r_{s,k}[nL] F_k(\mu) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{m=0}^O r_{s,k}[nL] a_{k,m} \mu^m \quad (3.33)$$

De esta expresión se puede deducir que el número de multiplicaciones necesarias para calcular cada muestra de salida sería $(2O + 1)M + O - 1$, correspondientes a los $2OM$ productos realizados dentro del doble sumatorio para potencias de μ mayores que cero, más las M para potencias cero de μ , más las $O - 1$ requeridas para el cálculo de las potencias sucesivas de μ .

Si se reordenan adecuadamente los términos, la expresión resultante es

$$r[n] = \sum_{m=0}^O \mu^m \sum_{k=0}^{M-1} r_{s,k}[nL] a_{k,m} \quad (3.34)$$

Analizando la ecuación anterior se concluye que cada sumatorio en la variable k equivale a una operación de filtrado de las muestras $r_{s,k}[nL]$ con los coeficientes $a_{k,m}$. Cada uno de dichos subfiltros que forman parte del interpolador se designará a partir de ahora como $\tilde{h}_m$, y las señales de salida como $b_m[n]$. Esta señal se puede expresar a partir de la

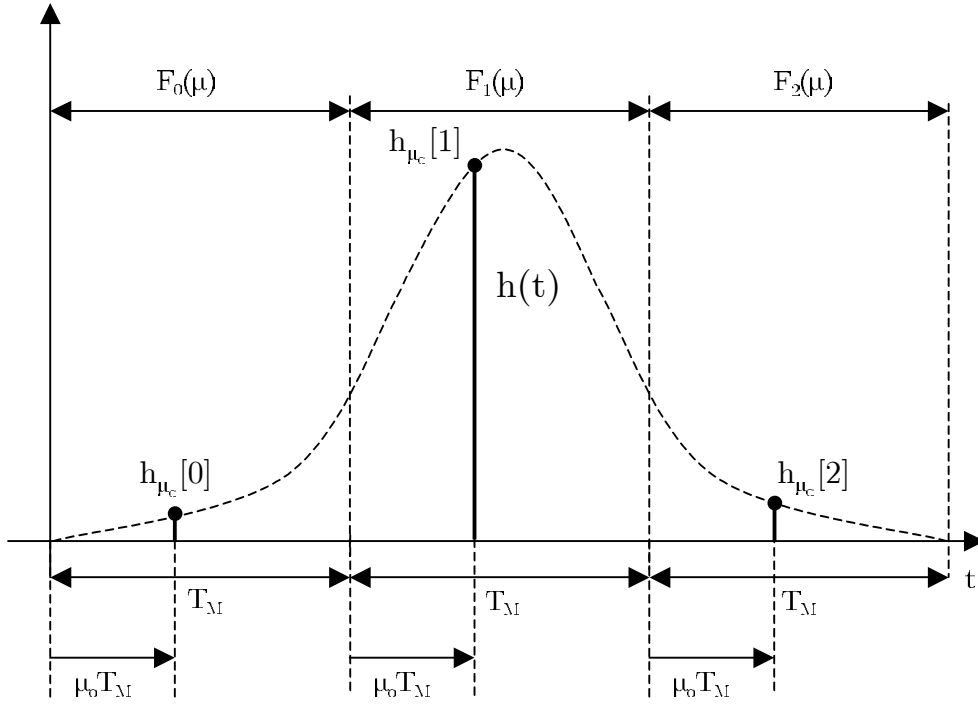


Fig. 3.14: Respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$ aproximada mediante un polinomio $F_k(\mu)$ para cada coeficiente $h_\mu[k]$

ecuación anterior como

$$b_m[n] = \sum_{k=0}^{M-1} r_{s,k}[nL] a_{k,m} \quad (3.35)$$

Usando esta ecuación en la expresión 3.34 puede reescribirse como

$$r[n] = \sum_{m=0}^O \mu^m b_m[n] \quad (3.36)$$

Con esta nueva expresión el número de multiplicaciones por cada muestra de salida es $(O+1)(M+2)-3$, correspondientes a los M productos de cada uno de los $(O+1)$ subfiltros $\tilde{h}_m$, más las $O-1$ necesarias para el cálculo de las potencias sucesivas de μ , más las O de los productos de las salidas de los subfiltros por las potencias de μ .

Aprovechando las características del término μ^m es posible obtener una realización aún más eficiente. Usando la siguiente ecuación recursiva se pueden calcular a la vez las potencias sucesivas de μ y multiplicarlas por los términos $b_m[n]$

$$\begin{aligned} c_{n,m} &= \mu c_{n,m-1} + b_{O-m}[n] \text{ para } m \in \{1, \dots, O\} \\ \text{con } c_{n,0} &= b_O[n] \end{aligned} \quad (3.37)$$

de forma que se obtiene directamente la salida del interpolador $r[n]$ como

$$r[n] = c_{n,O} \quad (3.38)$$

El número de multiplicaciones en este caso se reduce a las $M + 1$ de cada uno de los O términos recursivos $c_{n,j}$ con $j > 0$, más las M correspondientes al término inicial $c_{n,0}$, lo que supone un total de $(O + 1)(M + 1) - 1$ multiplicaciones, aproximadamente la mitad de las calculadas inicialmente. En la figura 3.15 se representa la estructura para realizar de forma eficiente el interpolador. En ella se presenta más claramente como se realizan los subfiltros $\tilde{h}_m$ y como sus salidas $b_m[n]$ quedan multiplicadas por las sucesivas potencias de μ al ir acumulándose.

Otra posibilidad para que la realización tenga un menor coste computacional es aprovechar la simetría del filtro continuo original $h(t)$ presentada en la ecuación 3.28, tal y como se propone en [Erup93] y se generaliza en [Babic02]. Esta simetría, trasladada a la respuesta del interpolador, implica que

$$h_\mu[k] = h_{1-\mu}[M - 1 - k] \quad (3.39)$$

de donde se deriva que en caso de computar los coeficientes mediante polinomios $F_m(\mu)$ estos poseen la siguiente simetría

$$F_k(\mu) = F_{M-1-k}(1 - \mu) \quad (3.40)$$

A pesar de esta simetría, los coeficientes de dichos polinomios son distintos, con lo que no se puede aprovechar directamente para reducir el coste computacional. Para lograrlo es necesario cambiar la variable μ que se usa para calcular los coeficientes del filtrado $h_\mu[k]$, de manera que la simetría de estos coeficientes se traduzca también en simetría de los coeficientes de los polinomios. Si se define una nueva variable μ' como

$$\mu' = \mu - 0,5 \quad (3.41)$$

de modo que $\mu' \in [-0,5, 0,5)$, y se recalculan los polinomios para usar esta nueva variable μ' se obtienen los polinomios $F'_k(\mu')$ definidos como

$$F'_k(\mu') = h_{\mu'+0,5} = \sum_{m=0}^O a'_{k,m}(\mu')^m \quad (3.42)$$

Estos polinomios se pueden expresar en función de los polinomios $F_k(\mu)$ como

$$F'_k(\mu') = F_k(\mu + 0,5) \quad (3.43)$$

Con esta definición los nuevos polinomios poseen la simetría

$$F'_k(\mu') = F_k(\mu + 0,5) = F_{M-1-k}(0,5 - \mu) = F'_{M-1-k}(-\mu') \quad (3.44)$$

de donde se obtiene

$$F'_k(\mu') = \sum_{m=0}^O a'_{k,m}(\mu')^m = \sum_{m=0}^O a'_{M-1-k,m}(-\mu')^m = F'_{M-1-k}(-\mu') \quad (3.45)$$

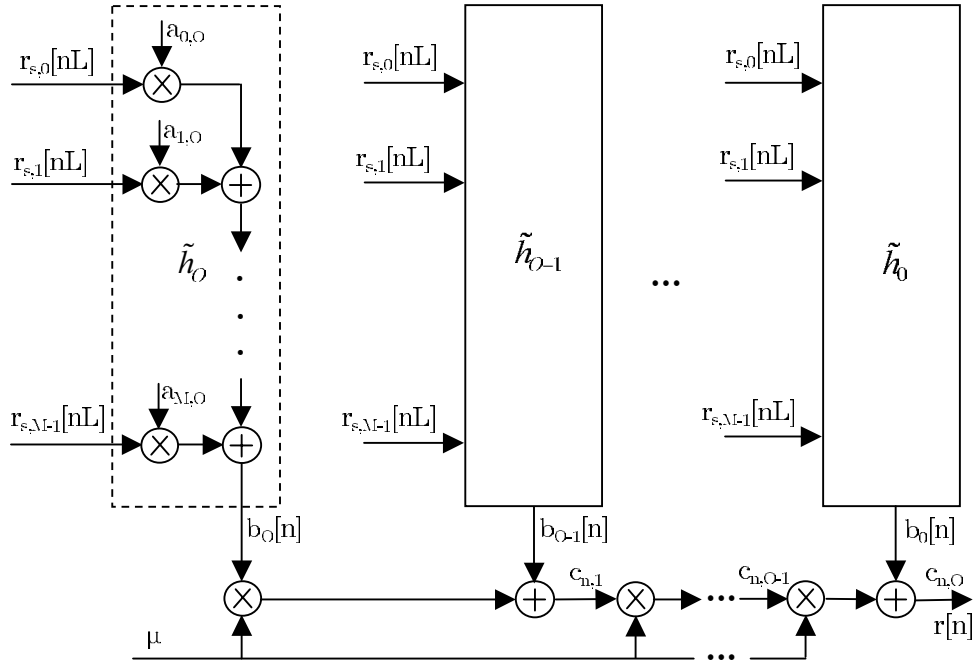


Fig. 3.15: Estructura de *Farrow* para realizar un interpolador

De esta última ecuación se deduce que

$$a'_{k,m} = (-1)^m a'_{M-1-k,m} \quad (3.46)$$

La simetría de la respuesta $h(t)$, que de esta forma sí implica simetría de los coeficientes de los polinomios $a'_{k,m}$, se puede aprovechar reduciendo el número de multiplicaciones necesarias para la realización de cada subfiltro $\tilde{h}'_m$. Por un lado los coeficientes $a'_{k,m}$ y $a'_{M-1-k,m}$ del subfiltro $\tilde{h}'_m$ son iguales u opuestas, según sea m par o impar respectivamente. Además, dichos coeficientes multiplican a distintas muestras $r_{s,k}[nL]$ y $r_{s,M-1-k}[nL]$, cuyos resultados se suman para obtener la señal de salida $b'_m[n]$. Por tanto, es posible extraer como factor común la constante del polinomio $a'_{k,m}$ y sumar o restar las muestras $r_{s,k}[nL]$ y $r_{s,M-1-k}[nL]$, según los dos coeficientes sean iguales u opuestos, como se muestra en la figura 3.16.

Con esta simplificación el número de multiplicaciones se reduce casi a la mitad, hasta un total de $O(M+2)/2 - 1$ si el orden del interpolador M es par y por tanto todas los coeficientes tienen su correspondiente simétrica, o $O(M+3)/2 - 1$ si M es impar. A tenor de este resultado parece poco interesante, desde el punto de vista del coste computacional, usar un valor de M impar, ya que tiene el mismo coste computacional que el valor par inmediatamente superior $M+1$. Sin embargo, en [Babic04] se propone una estructura basada en la estructura de Farrow para reducir un poco más el coste computacional en

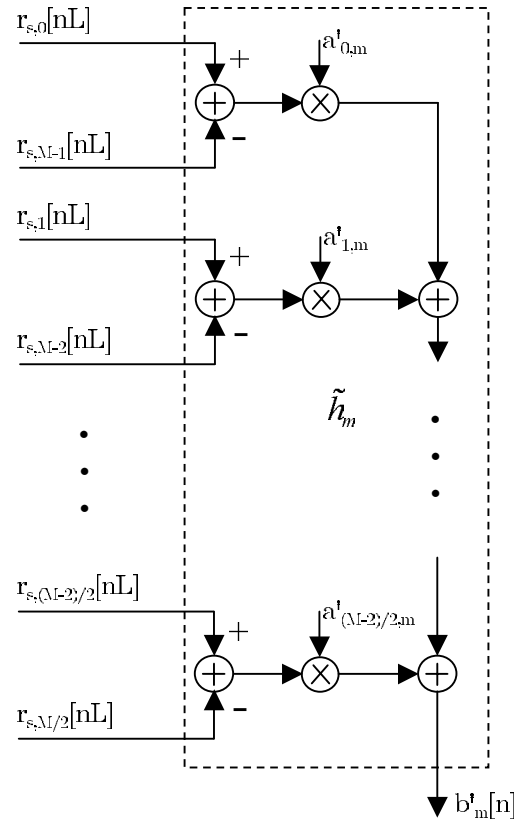


Fig. 3.16: Estructura de un subfiltro $\tilde{h}'_m$ de la estructura de *Farrow* aprovechando la simetría de los coeficientes $a'_{k,m}$. Se supone que el valor de m es impar, por lo que en cada suma el segundo sumando tiene el signo cambiado

dicho caso, aprovechando la simetría del polinomio correspondiente al coeficiente central del interpolador $F_{(M+1)/2}(\mu)$.

A pesar de su eficiente implementación esta estructura tiene un coste computacional notablemente superior a la estructura de coeficientes almacenados debido al cálculo adicional de los coeficientes del filtro. En general, no parece la mejor solución en sistemas de arquitectura fija, ya que el tiempo de procesamiento se eleva demasiado ante la imposibilidad de realizar múltiples operaciones en paralelo.

Por contra, en sistemas de arquitectura configurable es posible reducir dicho tiempo gracias al paralelismo, aunque a costa de utilizar más recursos *hardware*. Analizando la estructura se observa que las multiplicaciones por los coeficientes $a_{k,m}$ de cada subfiltro se pueden realizar en paralelo mientras que las sucesivas multiplicaciones por μ han de realizarse de forma secuencial. Además, las multiplicaciones por constante tienen menor complejidad y requieren un tiempo de procesamiento menor, en especial si dichos coeficientes pueden representarse con pocos bits de precisión. Estos aspectos se reseñan ya

en [Erup93] pero se analizan con mayor profundidad en [Demp00] y [Pun03], en los que se plantean realizaciones basadas en bloques multiplicadores y en la descomposición de los coeficientes como sumas o diferencias de potencias de dos. De este modo, es posible convertir las multiplicaciones de los subfiltros en secuencias de desplazamientos y sumas cuyo orden está optimizado para reducir al máximo el número total de operaciones.

De este análisis de la estructura se deduce además que el tiempo de procesamiento necesario para calcular cada muestra a la salida es prácticamente equivalente al que requieren las O multiplicaciones por μ . Por este motivo es especialmente interesante que el orden de los polinomios O sea lo más reducido posible.

3.4.4. Estructura híbrida

Otra posibilidad para la estructura del interpolador se basa en generalizar aún más el cálculo de los coeficientes usando polinomios. En vez de usar un único polinomio para el cálculo de cada coeficiente es posible usar múltiples polinomios, eligiendo uno u otro dependiendo del valor de μ . De esta forma, al dividir la respuesta del filtro reconstructor original $h(t)$ en intervalos aún más pequeños se pueden lograr mejores ajustes polinómicos, o parecidos pero con polinomios de órdenes inferiores. Se trata de una estructura híbrida entre las dos presentadas anteriormente ya que el intervalo μ se divide en intervalos, como la estructura de coeficientes almacenados, pero para cada uno en vez de almacenar un sólo conjunto de coeficientes se usan un conjunto de polinomios, como en la de coeficientes computados.

Con la estructura de coeficientes computados se calcula cada coeficiente $h_\mu[k]$ mediante un polinomio $F_k(\mu)$. Usando esta estructura híbrida para el cálculo de cada coeficiente $h_\mu[k]$ se usa uno de los P polinomios $F_{k,l}(\mu)$ definidos como

$$h_\mu[k] = F_{k,l}(\mu) = \sum_{m=0}^O a_{k,m,l} \mu^m \quad (3.47)$$

donde el índice $l \in \{0, 2, \dots, P-1\}$ depende de μ de la forma

$$l = \lfloor \mu P \rfloor \quad (3.48)$$

expresión idéntica a 3.25, usada para interpoladores de coeficientes almacenados.

Esta definición equivale a dividir el intervalo $[0, 1)$ de posibles valores de μ en P subintervalos del mismo tamaño, a cada uno de los cuales les corresponde un polinomio $F_{k,l}$, como se muestra en la figura 3.17.

De la misma forma que para la estructura de coeficientes computados, se pueden reordenar los cálculos del interpolador para obtener una estructura de *Farrow*. De nuevo, la salida $r[n]$ puede expresarse mediante la misma ecuación recursiva 3.37, basada en el

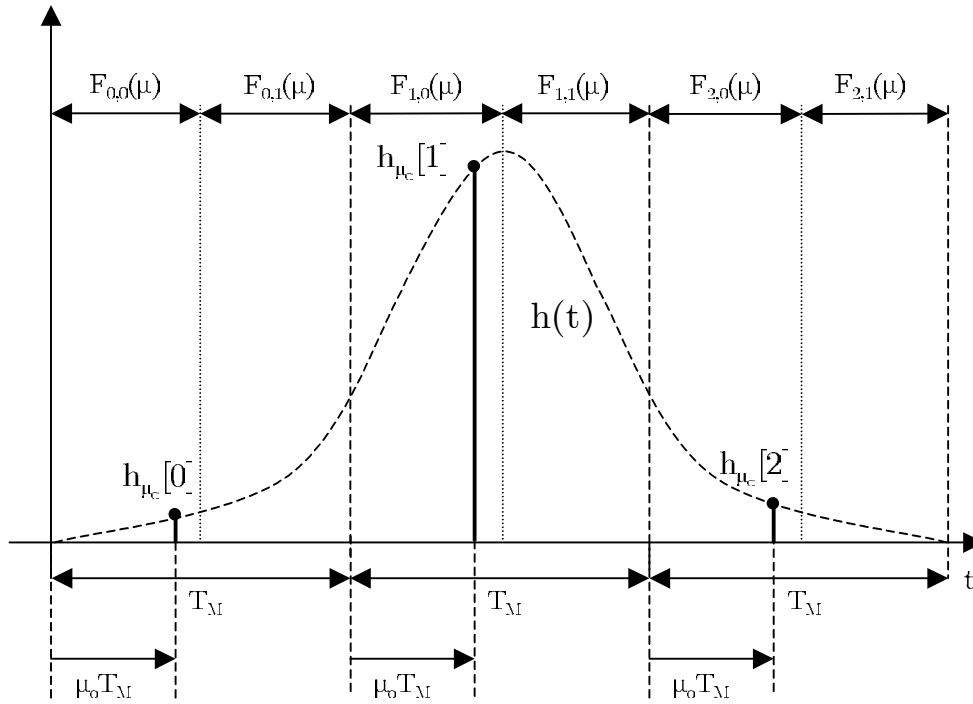


Fig. 3.17: Respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$ aproximada mediante dos polinomios $F_{k,l}(\mu)$ por cada coeficiente $h_{\mu}[k]$ ($P=2$ y $M=3$)

cálculo previo de los términos $b_m[n]$. Dichos términos $b_m[n]$ se calculan como

$$b_m[n] = b_{m,l}[n] = \sum_{k=0}^M r_{s,k}[nL] a_{k,m,l} \quad (3.49)$$

donde l se obtiene de la expresión 3.48 antes descrita. De nuevo equivale a una operación de filtrado de las muestras $r_{s,k}$ por un subfiltro de coeficientes $a_{k,m,l}$ que en adelante se denominará $\tilde{h}_{m,l}$, y cuya salida se denominará $b_{m,l}[n]$. La diferencia con respecto a la estructura anterior es que para realizar el cálculo del término $b_m[n]$ es necesario seleccionar previamente la salida $b_{m,l}[n]$ adecuada, cuyo índice l depende del valor de μ en cada instante, como se presenta en el esquema de la figura 3.18.

Es importante destacar que esta estructura híbrida realmente engloba a las dos estructuras presentadas anteriormente. Es equivalente a la estructura de coeficientes computados en el caso de que el valor de P es igual a uno y, por tanto, sólo usa un polinomio por coeficiente. También se corresponde con la estructura de coeficientes almacenados si el orden de los polinomios O es igual uno. En ese caso los polinomios están formados únicamente por una constante y, para obtener la salida $r[n]$, sólo habría que calcular la salida $b_{0,l}[n]$ del subfiltro $\tilde{h}_{0,l}$ seleccionado entre los P posibles, ya que la potencia de μ por la que habría que multiplicarla es $\mu^0 = 1$. De este razonamiento se deduce que los coeficientes de cada subfiltro $\tilde{h}_{0,l}$ se corresponden con los conjuntos de coeficientes almacenados, y el

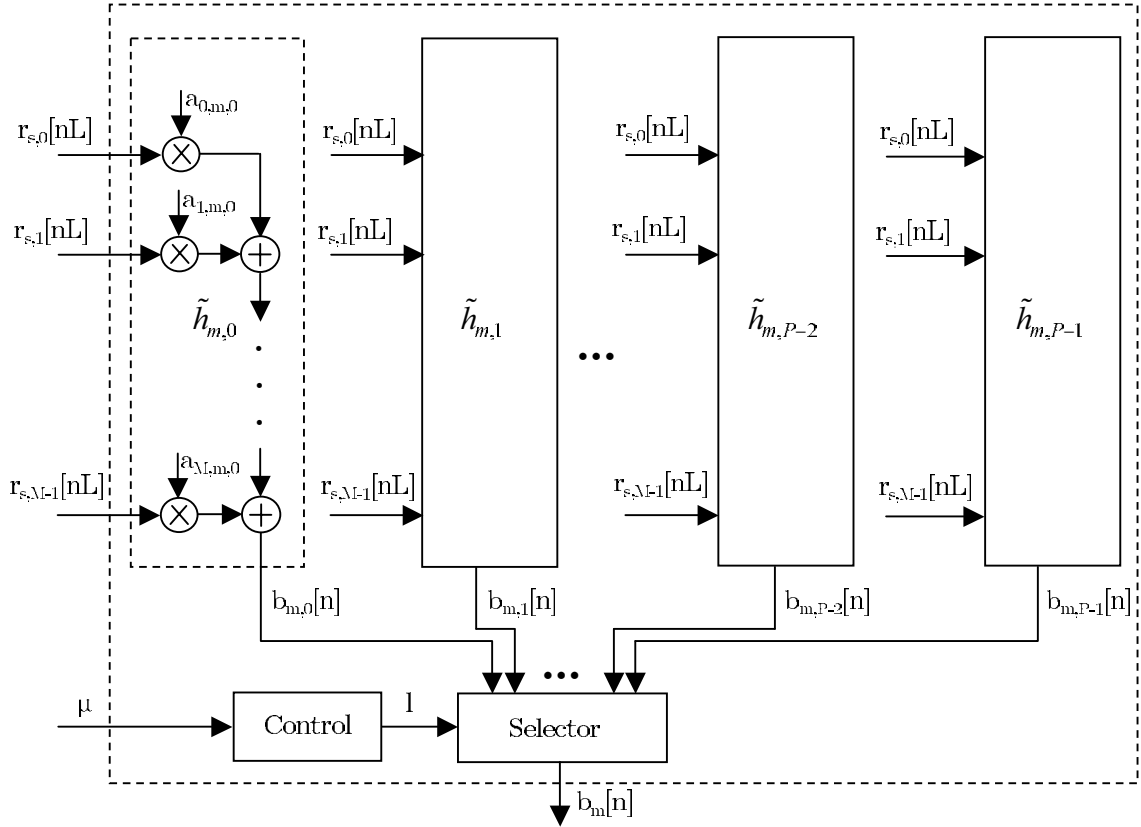


Fig. 3.18: Estructura para el cálculo del término $b_m[n]$ que incluye el detalle de la realización del subfiltro $\tilde{h}_{m,0}$

número de polinomios P equivale al número de conjuntos de coeficientes que forman el interpolador.

La ventaja adicional que aporta esta última estructura frente a las anteriores es la posibilidad de encontrar soluciones intermedias entre una y otra, estructuras con mayor número de polinomios pero de menor orden, lo que para algunas arquitecturas *hardware* puede resultar más eficiente.

Por otro lado, como en los casos anteriores, es posible aprovechar la simetría que suele presentar $h(t)$ para simplificar la estructura. Esta simetría expresada en la ecuación 3.39 se traduce en que los polinomios $F_{k,l}(\mu)$, como se observa en la figura 3.17, presentan la siguiente relación

$$F_{k,l}(\mu) = F_{M-1-k,P-1-l}(1 - \mu) \quad (3.50)$$

Al igual que en la estructura anterior, para que esta simetría sea de utilidad de cara a simplificar la estructura, hay que definir una nueva variable μ' , de forma que la simetría de $h(t)$ se traduzca en simetría en los coeficientes de los nuevos polinomios $F'_{k,l}(\mu')$. Si se

define μ' como

$$\mu' = \mu - 0,5 \quad (3.51)$$

y se definen los nuevos polinomios $F'_{k,l}(\mu')$ como

$$F'_{k,l}(\mu') = h_\mu[k] = \sum_{m=0}^O a'_{k,m,l}(\mu')^m \quad (3.52)$$

es sencillo demostrar que la simetría entre estos nuevos polinomios se puede expresar como

$$F'_{k,l}(\mu') = \sum_{m=0}^O a'_{k,m,l}(\mu')^m = \sum_{m=0}^O a'_{M-1-k,m,P-1-l}(-\mu')^m = F'_{M-1-k,P-1-l}(-\mu') \quad (3.53)$$

y por tanto

$$a'_{k,m,l} = (-1)^m a'_{M-1-k,m,P-1-l} \quad (3.54)$$

Esta propiedad permite simplificar los cálculos de cada uno de los nuevos términos $b'_m[n]$, como se aprecia en la figura 3.19, reduciendo a la mitad los bloques necesarios para calcular los distintos subfiltros $h'_{m,l}$. De la ecuación anterior, atendiendo a la definición expresada en 3.49, se deduce que los subfiltros $h'_{m,l}$ tienen una clara simetría con los subfiltros $h'_{m,P-1-l}$, por lo que el mismo bloque sirve para realizar ambos subfiltros. Para ello, a partir del valor de μ se obtiene el valor de l' entre 0 y $(P-2)/2$, que indica la salida del subfiltro a seleccionar, y una señal de control w , que indica si hay que calcular $b'_{m,l}[n]$ o $b'_{m,P-1-l}[n]$.

En concreto, si m es par el conjunto de coeficientes $a'_{k,m,l}$ del subfiltro $h'_{m,l}$ coinciden con los coeficientes $a'_{M-1-k,m,P-1-l}$ del subfiltro $h'_{m,P-1-l}$, y si m es impar son opuestas. El problema es que estos coeficientes multiplican a distintas muestras de la señal interpolada, $r_{s,k}[nL]$ y $r_{s,M-1-k}[nL]$. Por tanto, para aprovechar dicha simetría y usar la misma estructura para calcular ambos subfiltros hay que introducir selectores que según el valor de la señal de control w permitan reordenar las muestras de $r_{s,k}[nL]$ según se desee calcular $b'_{m,l}[n]$ o $b'_{m,P-1-l}[n]$, como se aprecia en la figura 3.20. Si m es impar además de reordenar las muestras hay que cambiarles el signo para compensar el hecho de que los coeficientes de uno y otro término son opuestas.

Como la estructura híbrida engloba a las anteriores no cabe realizar un análisis del coste computacional orientado a su posible implementación en distintas arquitecturas *hardware* si no es diferenciando distintos casos según los parámetros que la configuran. Es evidente que si el orden de los polinomios O es cero se le pueden aplicar los razonamientos expuestos para la estructura de coeficientes almacenados, del mismo modo que si el número de polinomios P es igual a uno se puede aplicar lo mismo que lo desarrollado para la estructura de coeficientes computados.

En los casos intermedios, en los que el orden de los polinomios O es mayor que cero y el número de polinomios P es mayor que uno, sí cabe plantearse las ventajas e inconvenientes de su realización en una u otra arquitectura.

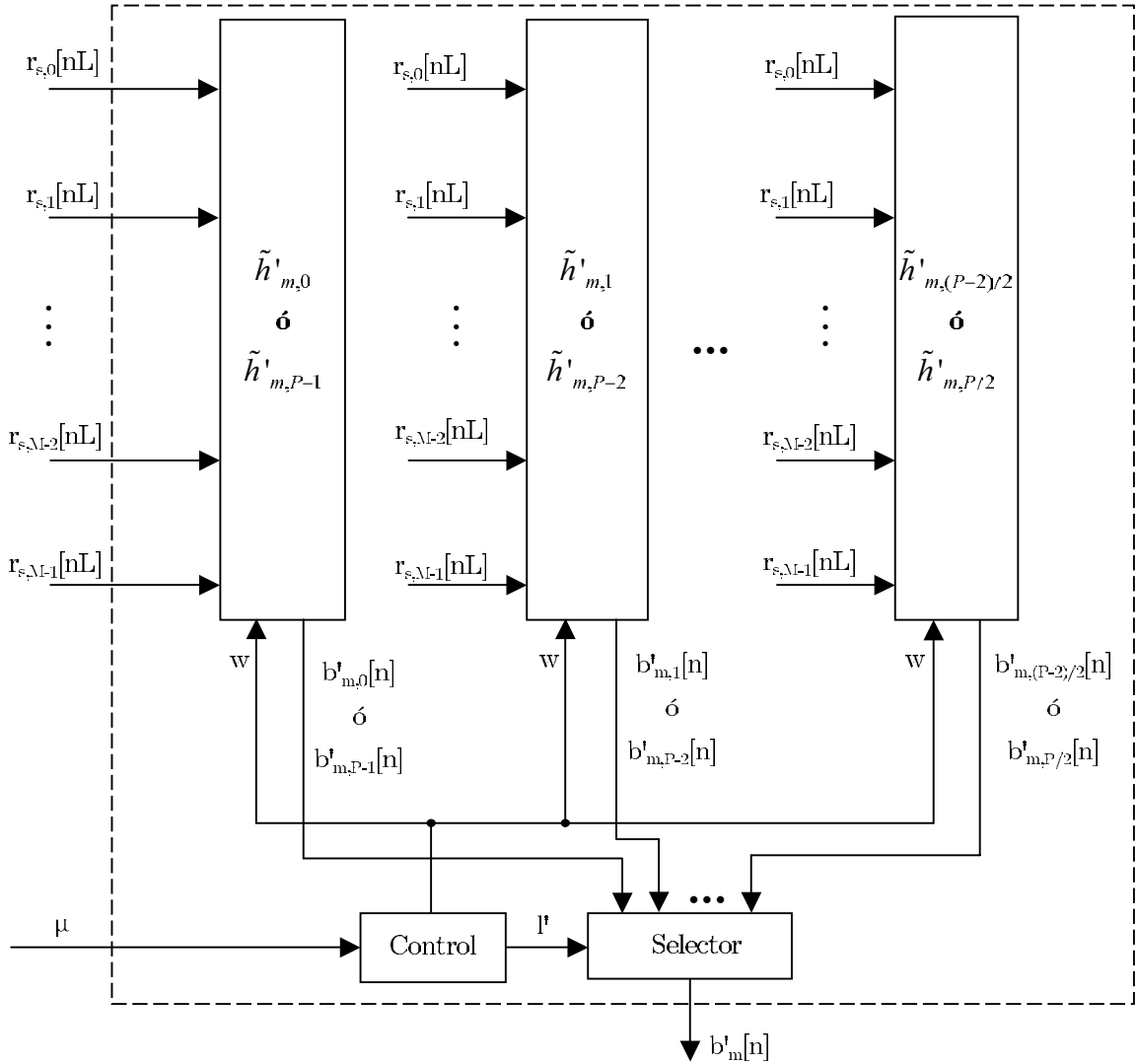


Figura 3.19: Estructura para el cálculo de los términos $b'_m[n]$ de una estructura híbrida aprovechando la simetría

El coste computacional de estas estructuras para una arquitectura fija es similar al de la estructura de coeficientes computados, y por tanto muy elevado. La única diferencia notable es que a la hora de seleccionar los coeficientes del polinomio $a_{k,m,l}$ para realizar las operaciones de filtrado $b_m[n]$ hay que hacer una selección previa del polinomio adecuado, lo cual no incrementa el número de operaciones sino el espacio en memoria para almacenarlos.

Si se usa una arquitectura configurable esta estructura puede presentar algunas ventajas aunque, eso sí, muy ligadas a las posibilidades del *hardware* disponible. En principio, el hecho de tener que realizar P veces más subfiltros $\tilde{h}_{m,l}$ que con la estructura de coeficientes computados parece un incremento en el coste demasiado alto. Sin embargo, si

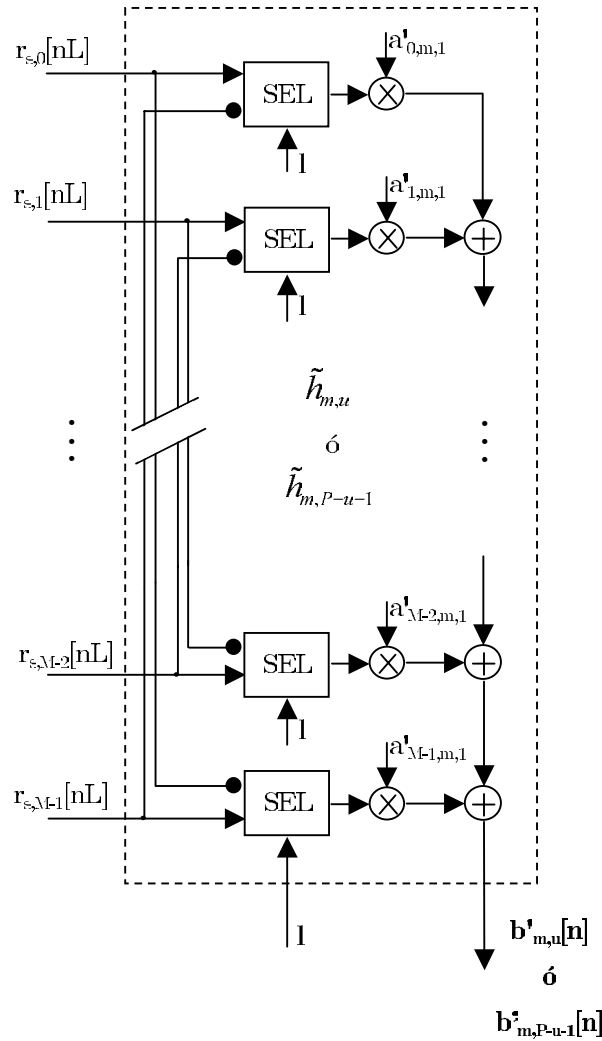


Fig. 3.20: Estructura para la realización de los subfiltros $\tilde{h}_{m,u}$ y $\tilde{h}_{m,P-1-u}$ de una estructura híbrida en un único bloque aprovechando la simetría de sus coeficientes. Se supone m impar, por lo que las muestras de la señal de entrada que se cruzan para entrar a los selectores están negadas.

el aumento en el número de polinomios no es muy elevado y permite reducir el orden de los mismos sin perder prestaciones, es posible lograr cierto ahorro computacional. Esto se debe a que el número de multiplicaciones en las que los dos factores son variables es igual a $O - 1$, y el coste computacional efectivo de las multiplicaciones cuando uno de los factores es constante es en general bastante menor que el de las multiplicaciones en el que los dos factores son variables. Si además se logra usar coeficientes representables con un número de bits muy reducido, su coste puede ser aún menor en algunas implementaciones *hardware*, como se presenta en [Pun03].

El tiempo de procesamiento para cada muestra a la salida es igual al de una estructura de coeficientes computados y, por tanto, proporcional al orden de los polinomios O . A

pesar de que existen P veces más subfiltros sólo se usa uno de cada P en cada muestra de salida, por lo que su cómputo no requiere un tiempo extra con esta estructura. Este aspecto puede suponer una ventaja importante si el aspecto más crítico del diseño es el tiempo de procesamiento. Con la estructura de coeficientes computados se puede acortar el tiempo de procesamiento reduciendo el orden de los polinomios O , pero esta reducción empeoraría el ajuste polinómico a la respuesta continua original y, por tanto, las prestaciones del interpolador. Sin embargo, con la estructura híbrida este hecho se puede compensar aumentando el número de polinomios, o lo que es lo mismo, aumentando P . De este modo, aumenta el número de posibles subfiltros, y por tanto los recursos hardware utilizados, pero se puede reducir el tiempo de procesamiento y mantener las prestaciones del interpolador.

3.5. Corrección mediante el sistema rotor

Además de las propuestas que se han presentado en este capítulo, existe otra solución basada en el muestreo asíncrono para la corrección del error de sincronización, específica para sistemas DMT. Dicha solución aprovecha alguna de las propiedades de la FFT, algoritmo en el que está basada la modulación/demodulación en los sistemas DMT.

Como se describe en el capítulo 2 de esta tesis, una pequeña desviación en el instante de muestreo Φ , constante a lo largo de todo un símbolo DMT, produce sobre los símbolos QAM recibidos Y_k un giro en el plano complejo. El ángulo de giro es proporcional en cada símbolo QAM recibido Y_k al desfase que lo ha producido Φ y al índice de la portadora k , según la expresión

$$Y_k \approx X_k e^{-j2\pi\Phi k/N} \quad (3.55)$$

donde X_k es el símbolo QAM transmitido.

De esta propiedad se deriva una de las posibilidades para corregir un error en el instante de muestreo Φ , que consiste en multiplicar los símbolos QAM de cada portadora k por un factor $e^{-j2\pi\Phi k/N}$, compensando el giro que había producido dicho error. Al sistema que compensa estos giros para cada una de las portadoras realizando las multiplicaciones complejas correspondientes se le ha denominado *rotor* [Poll99].

Mediante el rotor se pueden compensar errores en el instante de muestreo Φ equivalente a varios periodos de muestreo, siempre que dicho error no establezca los límites del símbolo DMT recibido dentro de los símbolos anterior o posterior. A medida que el error adentra los límites en los de los símbolos contiguos va dejando de ser válida la aproximación de la ecuación 3.55, al crecer los términos de error debido a la interferencia entre símbolos DMT. Este margen de validez depende lógicamente del tamaño de la extensión cíclica y de la longitud de la respuesta equivalente del canal, que acotan el intervalo en el que se puede establecer los límites del símbolo DMT sin interferencias, como se detalló en el

capítulo 2 de esta tesis.

Para evitar este problema se puede separar la corrección del error del instante de muestreo Φ en dos partes: la parte entera Φ_e y la parte fraccionaria Φ_f . Como se observa en la figura 3.21, la parte fraccionaria Φ_f se corrige usando el rotor y la parte entera Φ_e mediante un bloque *Salta/Duplica* como el usado en el convertidor de frecuencia de muestreo. Este bloque, al compensar el error grueso del error en el muestreo, logra mantener los límites del símbolo DMT dentro del intervalo que minimiza la interferencia entre símbolos con un margen de $\pm T_M/2$.

El inconveniente que plantea este esquema es que no puede corregir adecuadamente el error que produce la desviación de la frecuencia de muestreo $\Delta\Omega$ a lo largo de un periodo de símbolo DMT. Este error constituye un problema en el caso de usar constelaciones QAM muy densas, en las que el error admisible es mucho menor [Poll99]. Debido a este error de frecuencia, el error en el instante de muestreo crece a lo largo del símbolo DMT. El receptor observa una ligera variación en la frecuencia de cada portadora, lo que provoca cierta pérdida de la ortogonalidad entre ellas o, lo que es lo mismo, un incremento de la ICI. Aunque con el sistema *rotor* es posible compensar el error en el instante de muestreo al inicio del símbolo, no es posible corregir las variaciones de dicho error a lo largo del símbolo DMT.

Una alternativa que sí logra corregir el error de frecuencia de muestreo es un sistema mixto con rotor e interpolador, mostrada en la figura 3.22. En ella se aprecia cómo la corrección se realiza mediante un *rotor* y un convertidor de la frecuencia de muestreo con un esquema ligeramente modificado. De nuevo, al igual que en la solución que sólo usa un convertidor de la frecuencia de muestreo, al usar un interpolador es necesario realizar un sobremuestreo previo de la señal recibida para lograr que alcance prestaciones satisfactorias a frecuencia altas.

A partir del error de frecuencia $\Delta\Omega'[n]$ que llega al *Acumulador* se calcula el error de fase de muestreo en cada instante $\Phi'[n]$. Del mismo modo que en el convertidor de frecuencia de muestreo presentado anteriormente, dicho error se divide en parte entera $\Phi'_e[n]$ y parte fraccionaria $\Phi'_f[n]$. La parte entera se compensa mediante el bloque de diezmado variable. Sin embargo, la parte fraccionaria en este sistema se corrige a medias entre el sistema rotor y el interpolador. Como el rotor sólo puede corregir un error en el instante de muestreo para todo el símbolo, sólo compensa el error que hay al comienzo de cada símbolo DMT, y el interpolador se encarga del incremento que se produce a lo largo del símbolo. De forma más precisa, el rotor corrige el error en el instante de muestreo $\Phi[iD]$, donde D es la longitud en muestras de un símbolo DMT, y la variable i es el índice del símbolo DMT correspondiente a los instantes n tales que

$$i = \lfloor \frac{n}{D} \rfloor \quad (3.56)$$

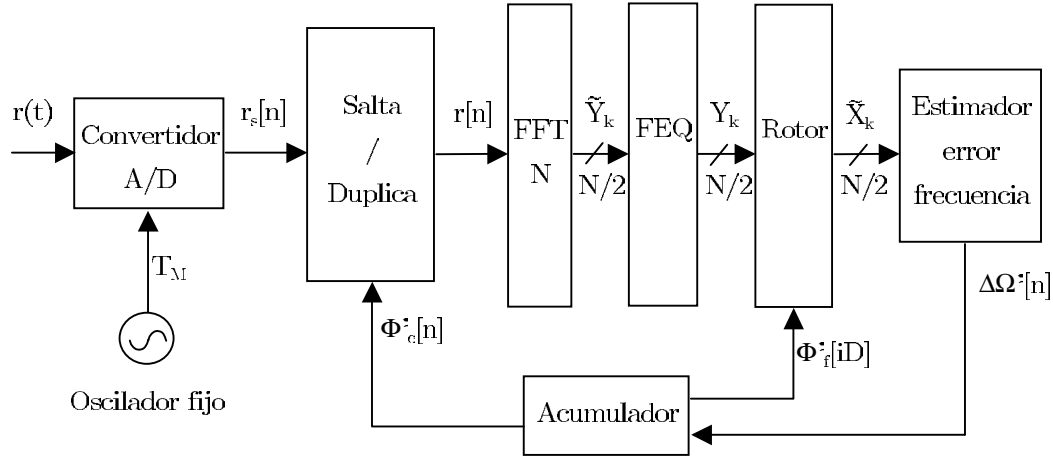


Fig. 3.21: Diagrama de bloques de un receptor DMT que usa una solución rotor para corregir el error de sincronismo

El interpolador corrige el incremento del error en el instante de muestreo $\Delta\Phi_f[n]$ definido como

$$\Delta\Phi_f[n] = \Phi'_f[n] - \Phi'_f[iD] \quad (3.57)$$

Como este incremento $\Delta\Phi_f[n]$ se hace cero al inicio de cada nuevo símbolo, y se incrementa a lo largo del símbolo DMT en $\Delta\Omega'[n]$ cada nuevo instante n , el valor máximo que puede tomar $\Delta\Phi_f[n]$ se puede expresar como

$$\max\{\Delta\Phi_f[n]\} \leq DL \max\{\Delta\Omega'[n]\} \quad (3.58)$$

donde $\max\{\Delta\Omega'[n]\}$ es el error de frecuencia de muestreo máximo previsto. Como este error de la frecuencia de muestreo es normalmente muy pequeño (típicamente entre 50 y 100 ppm) el error máximo que es necesario corregir mediante el interpolador es bastante reducido (para $L = 2$, $D = 512 + 32$ y $\max\{\Delta\Omega'[n]\} < 100\text{ppm}$ el valor máximo de $\Delta\Phi_f[n]$ es aproximadamente 0,1 muestra). Esta característica es importante por que los interpoladores proporcionan mejor respuesta cuanto menor es el error a compensar [Erup93]. Como sólo es necesario corregir errores muy pequeños es posible diseñar interpoladores de un coste computacional muy bajo y alcanzar muy buenas prestaciones [Poll00].

Uno de los principales problemas que plantea esta solución se debe al solapamiento espectral que se produce en el convertidor de frecuencia de muestreo modificado, como se expone en [Mart01]. En la práctica, la señal recibida inevitablemente tiene un exceso de ancho de banda a causa de la imperfección del filtro reconstructor del convertidor digital/analógico de transmisión. Al tomar muestras de la señal recibida, el exceso de ancho de banda produce solapamiento espectral. En el caso de usar convertidor de frecuencia con sobremuestreo, este solapamiento se produce al diezmar la señal interpolada. Si la conversión de la frecuencia de muestreo está sincronizada con el convertidor digital/analógico

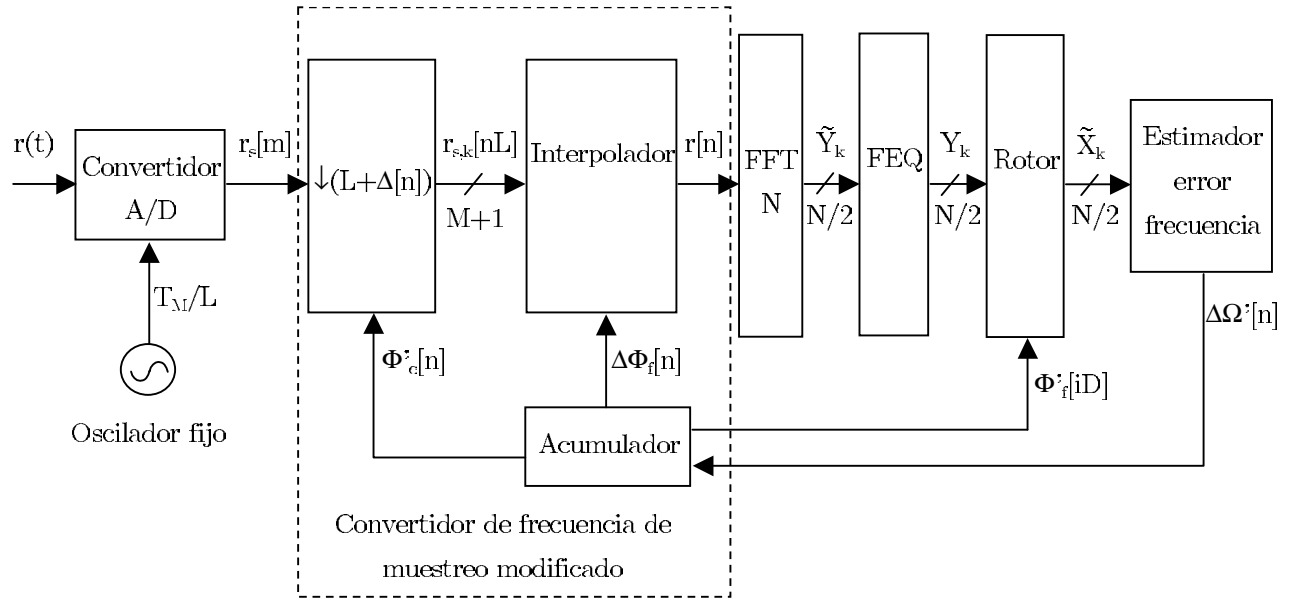


Fig. 3.22: Diagrama de bloques de un receptor DMT que usa para corregir el error de sincronismo un sistema *rotor* y un convertidor de frecuencia de muestreo modificado

del transmisor, las componentes que se solapan mantienen la misma fase, de modo que el canal equivalente se mantiene prácticamente invariante mientras la sincronización se mantenga, por lo que puede ser perfectamente compensado mediante el igualador. El problema en los sistemas con rotor se debe a que, al convertir la frecuencia de muestreo, la señal mantiene un error en el instante de muestreo $\Phi_f[iL]$, precisamente el que después trata de corregir el sistema rotor. Como dicho error varía con el tiempo, la fase de las componentes en frecuencia que se solapan también varía, con lo que el canal equivalente se modifica, como se aprecia en la figura 3.23, y no es posible compensarlo correctamente mediante el igualador. Este efecto es especialmente grave en las portadoras más elevadas, ya que las componentes que se solapan suelen tener mayor potencia.

Otro de los factores a tener en cuenta a la hora de comparar el método de corrección de sincronismo propuesto en esta tesis con el método propuesto en [Poll00] es el coste computacional de ambos. Para calcular el coste computacional de la solución rotor hay que considerar los dos bloques básicos que lo conforman: el convertidor de frecuencia de muestreo modificado y el rotor.

La implementación del interpolador no sería distinta a la que se ha presentado previamente en este capítulo en cuanto a su estructura. La ventaja que tiene frente a la solución basada únicamente en un convertidor de frecuencia de muestreo es que, como ya se ha comentado, al tener que compensar retardos muy pequeños es posible usar un interpolador más simple. Incluso se ha propuesto en [Poll00] un interpolador con estructura de

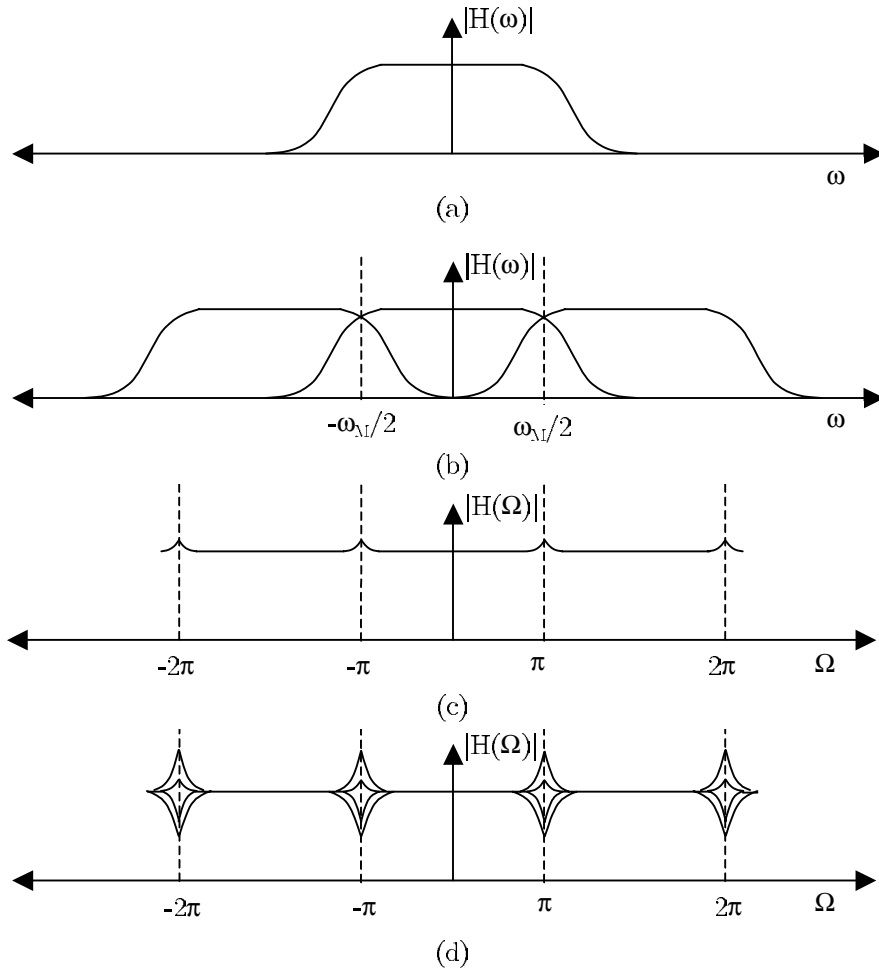


Fig. 3.23: Respuesta en frecuencia del canal equivalente: (a) Respuesta en frecuencia del canal continuo equivalente (b) Respuestas en frecuencia del canal continuo equivalente solapadas a causa del muestreo. (c) Respuesta en frecuencia del canal discreto equivalente cuando el receptor está sincronizado. (d) Respuesta en frecuencia variante del canal discreto equivalente cuando el receptor no está sincronizado

coeficientes computados con polinomios de orden 1, mientras que usando únicamente un convertidor de frecuencia de muestreo el interpolador necesario es de orden 3, como se demuestra en el capítulo 5. Esto implica un menor número de subfiltros con la estructura de Farrow, pero sobre todo un número menor de multiplicaciones por el parámetro μ que, al tratarse de multiplicaciones de dos factores variables, es mucho más costosa computacionalmente.

A cambio, en la solución rotor es necesario añadir un bloque que realiza una multiplicación compleja por cada símbolo QAM, lo que equivale a 4 multiplicaciones reales por cada uno. Como el número de símbolos QAM $N/2$ es prácticamente igual a la mitad del número de muestras de un símbolo DMT L (ya que $D = N + E$, donde el orden de la

FFT N es mucho mayor que la longitud de la extensión cíclica E) esta operación equivale aproximadamente a dos multiplicaciones adicionales por muestra del símbolo DMT.

A este coste adicional hay que añadirle el que supone el cálculo de los factores complejos que multiplican al símbolo QAM para corregirlo. Dichos factores son distintos para cada símbolo QAM por lo que sería necesario calcular cada uno de ellos. Como su cálculo implica evaluar funciones trigonométricas sería demasiado costoso computacionalmente, por lo que la mejor solución práctica parece almacenar un conjunto de valores de dichas funciones en una tabla. El problema es que, para asegurar la precisión suficiente, la tabla debiera ser de gran tamaño.

En resumen, a iguales prestaciones ambos sistemas de corrección tienen un coste computacional similar, pero la solución basada en el rotor tiene un problema de solapamiento espectral que, como se demuestra en el capítulo 5, son determinantes para decantarse por el uso de un único interpolador.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la estructura de un sistema de corrección del error de sincronización para sistemas de muestreo asíncrono basada en el interpolador, y se ha profundizado en las distintas posibilidades para su realización.

En primer lugar se ha desarrollado un modelo teórico de funcionamiento del sistema para la corrección de la sincronización: el convertidor de la frecuencia de muestreo. Se ha propuesto una nueva formulación para su descripción y análisis que, tras algunas transformaciones sencillas, permite deducir su realización mediante un sistema completamente digital. El núcleo de dicha estructura es el interpolador, objetivo principal de estudio de esta tesis.

Se han analizado las distintas estructuras para la realización del interpolador. En primer lugar las dos estructuras clásicas, basadas en la computación de los coeficientes o en su almacenamiento. Además, se ha propuesto una nueva estructura denominada estructura híbrida, que puede considerarse una combinación de las dos anteriores que a la vez engloba a ambas. Presenta la ventaja de proporcionar una mayor flexibilidad al diseñador para adaptar la estructura a las características del *hardware* disponible. También se ha analizado el coste computacional de todas estas estructuras estudiadas y las posibles modificaciones que permitan reducirlo, basadas en la estructura propuesta por Farrow y la posibles simetrías que presente la respuesta del interpolador.

Por último se han descrito y analizado un método de corrección alternativo, específico para sistemas DMT, propuesto en [Poll99] y basado en una combinación de convertidor de frecuencia de muestreo modificado y sistema rotor. Se ha profundizado en su funcionamiento y se ha analizado el problema del solapamiento espectral, que como se demostrará en el capítulo 5 mediante simulación, supone un grave inconveniente frente al método propuesto en esta tesis.

En el capítulo 5 se propone un método para el diseño de los interpoladores que permite obtener los coeficientes de cualquiera de las tres estructuras propuestas. Este método está enfocado a optimizar las prestaciones que el interpolador ofrece al receptor, por lo que previamente, en el capítulo 4, se analiza el efecto del interpolador sobre la recepción de los símbolos transmitidos.

Capítulo 4

Análisis del efecto del interpolador

4.1. Introducción

Antes de plantear un método para el diseño de un interpolador para la corrección del sincronismo es necesario conocer su efecto en el proceso de recepción, porque puede condicionar en gran medida el criterio de diseño. Al disponer de un sistema de igualación que, además de compensar la no idealidad de la respuesta del canal, puede también compensar, al menos en parte, la respuesta no ideal del interpolador, este condicionamiento es evidente. Por este motivo, el presente capítulo está dedicado al análisis del error que introduce el interpolador en los símbolos QAM igualados.

Para poder realizar el análisis, en primer lugar se plantea un modelo del sistema a estudiar, tanto del receptor como de la señal recibida. Dentro de dicho modelo se destaca el funcionamiento del convertidor de frecuencia, con algunas peculiaridades que simplifican el análisis, y del igualador en el dominio de la frecuencia o FEQ MMSE, de gran importancia para las prestaciones del interpolador.

A continuación se realiza el análisis del efecto del interpolador en la relación señal a error de los símbolos QAM igualados. Primero se calcula la expresión de los símbolos demodulados considerando la presencia del interpolador. Se determinan teóricamente los coeficientes del FEQ y se evalúa el error cuadrático medio de los símbolos igualados. Se obtiene la relación entre la potencia de la señal y la del error, distinguiendo dos términos bien diferenciados: la relación señal a ruido y la relación señal a distorsión, esta última debida al interpolador. Por último se interpretan los resultados del análisis, alcanzando importantes conclusiones de cara al diseño de los interpoladores.

Además, en un apéndice al final del capítulo se concreta el cálculo de las expresiones de la relación señal a distorsión mediante la respuesta del filtro continuo original o mediante los coeficientes de cualquiera de las estructuras del interpolador.

4.2. Modelo de sistema

El modelo de sistema se establece mediante una serie de ecuaciones y diagramas, que conllevan algunas simplificaciones o aproximaciones que facilitan el análisis. En cada caso se detallan y justifican cada una de ellas, y en capítulo 5 se probará su validez mediante simulación. En primer lugar se expone el esquema del receptor, descrito a partir de su diagrama de bloques, y a continuación se obtienen las expresiones que determinan la señal recibida.

4.2.1. Esquema del receptor

El esquema del receptor DMT usado como modelo de análisis se presenta en la figura 4.1. Como se puede apreciar, no existen importantes diferencias con respecto a diseños antes propuestos como los que se presentan en [Bing90],[Chow91] o [Lee95], aunque sí que hay algunas peculiaridades en el convertidor de frecuencia de muestreo y en el sistema de igualación, que serán expuestas y justificadas en los siguientes subapartados.

Convertidor de frecuencia de muestreo

Si se observa con detalle la figura 4.1 se aprecia que el bloque convertidor de la frecuencia de muestreo se ha modificado ligeramente con respecto al de la figura 3.12. Para justificar estos cambios, a continuación se exponen las aproximaciones que los motivan.

Uno de los principales problemas de la sincronización de un sistema DMT es el error de la frecuencia, que produce pérdida de ortogonalidad entre las portadoras y, por tanto, interferencia entre ellas. Para corregirlo es necesario que el interpolador vaya modificando sus coeficientes para compensar la variación del retardo a lo largo del símbolo DMT. A pesar de su uso, al no tratarse de un interpolador ideal, aparece un término de interferencia entre portadoras residual en los símbolos QAM recibidos.

En este análisis se prescindirá de la interferencia entre portadoras residual. Este término de error, como se demuestra mediante simulación en el capítulo 5, suele ser de menor relevancia que el resto de términos de error provocados por el interpolador. Sólo cobra mayor importancia bajo ciertas condiciones de la respuesta en frecuencia del canal de transmisión, bajo la cuáles son otros términos de error los que limitan la velocidad de transmisión.

También hay que considerar que la inclusión de este error en el análisis implicaría una solución dependiente de la respuesta en frecuencia del canal, ya que la interferencia entre unas portadoras y otras depende de la atenuación que introduzca el canal en cada una de ellas. En ese caso, los resultados del análisis no permitirían obtener criterios de diseño a priori, objetivo deseable cuya necesidad se discute en 5.2.1.

Para prescindir de dicho error se asumirá que el error de frecuencia de muestreo $\Delta\Omega[\ell]$ es suficientemente pequeño, por lo que la variación de la fase de muestreo a lo largo del

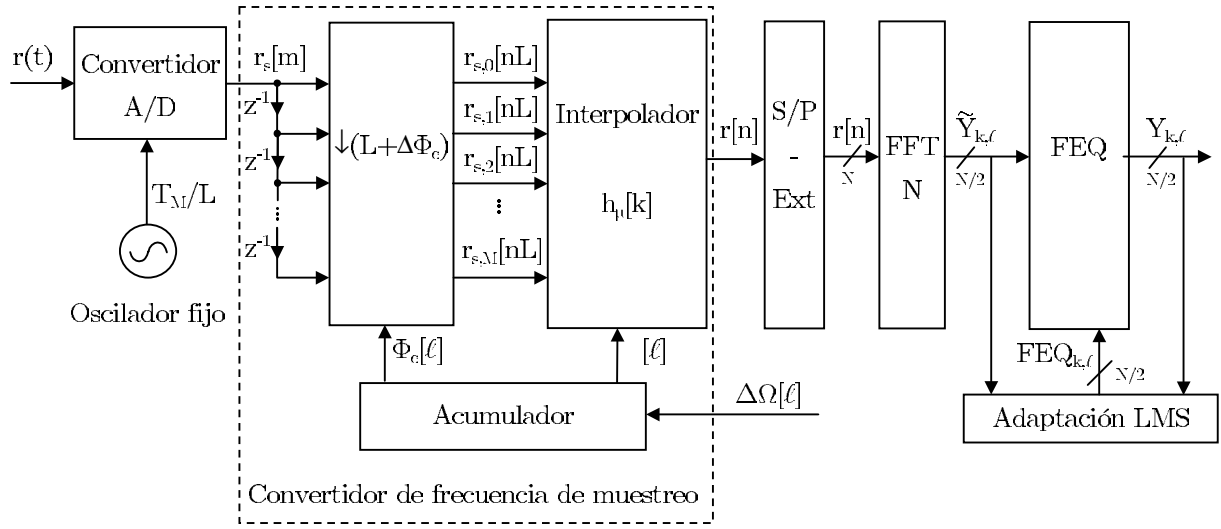


Fig. 4.1: Diagrama de bloques de un receptor DMT para el análisis del efecto del interpolador

símbolo se considerará despreciable. De esta forma el error de fase $\Phi[n]$ que varía a lo largo del símbolo DMT se aproxima por un error de fase promedio $\Phi[\ell]$ que sólo varía de un símbolo al siguiente, como se aprecia en la figura 4.2. Por tanto, su parte entera $\Phi_e[\ell]$ sólo se modificará al inicio de cada símbolo DMT, con lo que el bloque de diezmado variable sólo cambiará su factor de diezmado al inicio del símbolo DMT. Igualmente, la parte fraccionaria $\mu[\ell]$ sólo se modificará al comienzo del símbolo DMT, por lo que el bloque *Interpolador* que lo corrige únicamente cambiará sus coeficientes al comienzo de cada símbolo. De este modo no es posible que se produzca ICI por la variación de la respuesta del interpolador a lo largo del símbolo DMT.

Hay que destacar que, por pequeña que sea la diferencia de frecuencias de muestreo entre el transmisor y receptor, el valor de $\mu[\ell]$ crece o decrece recorriendo todo el rango de posibles valores en el intervalo $[0,1)$, con forma de rampa casi periódica mientras $\Delta\Omega[\ell]$ no varíe sensiblemente, como se aprecia en la figura 4.2. Como estas variaciones no tienen ninguna característica especial que haga pensar en regiones del intervalo $[0,1)$ más probables que otras, de cara a un estudio estadístico que requiera un promedio temporal, μ puede considerarse una variable aleatoria que a lo largo de múltiples símbolos DMT toma distintos valores en el rango $[0,1)$ con una función densidad de probabilidad uniforme. Esta consideración es de especial relevancia en todo el análisis, incluyendo el propio cálculo los coeficientes del FEQ.

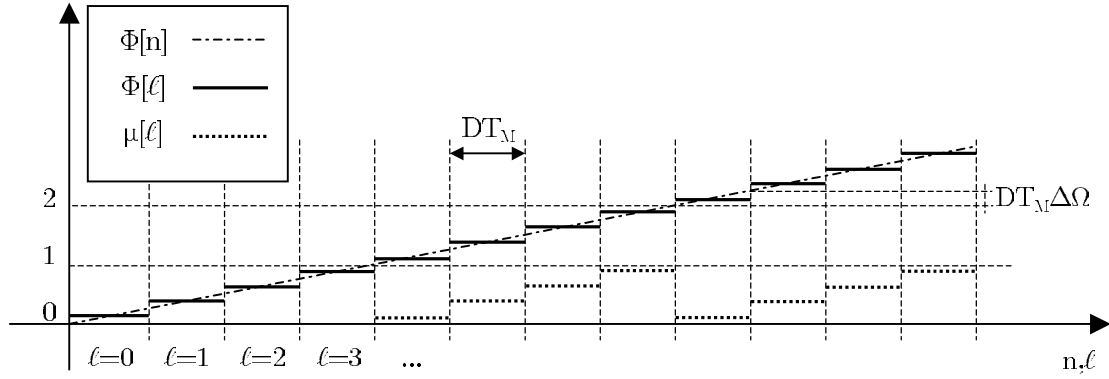


Fig. 4.2: Representación del retardo a compensar $\Phi[n]$ debido a cierto error de frecuencia $\Delta\Omega$ a lo largo de sucesivos símbolos DMT, junto con el retardo $\Phi[\ell]$ usado en el modelo de análisis, y el retardo fraccionario $\mu[\ell]$ correspondiente

Sistema de igualación

La tarea de igualación de canal de un receptor DMT, como se describió en el capítulo 1, esta repartida entre en dos sistemas: el igualador en el dominio del tiempo o TEQ, y el igualador en el dominio de la frecuencia o FEQ. El primero trata de acortar la respuesta al impulso del canal discreto equivalente para tratar de confinarla en un intervalo de longitud igual a la extensión cíclica, de forma que reduzca al máximo la interferencia entre símbolos. El segundo sólo consta de una constante compleja FEQ_k por cada portadora k para reescalar el símbolo QAM y ajustarlo a la rejilla de decisión.

En el esquema del receptor presentado se ha prescindido del TEQ. Aunque su presencia es necesaria en muchos de los canales en los que se usan sistemas DMT, su efecto de cara al presente análisis es equivalente a que la respuesta al impulso del canal equivalente tenga una duración menor que la extensión cíclica, aspecto a tener en cuenta en el modelo de la señal que llega al receptor. Así que, para no complicarlo inútilmente, se ha prescindido de este sistema en el modelo utilizado.

Por el contrario, sí es de especial importancia considerar la presencia del FEQ. Este igualador normalmente se diseña con criterio de mínimo error cuadrático medio, es decir

$$\frac{\partial E[|Y_{k,\ell} - X_{k,\ell}|^2]}{\partial \Re\{FEQ_k\}} = 0 \quad \frac{\partial E[|Y_{k,\ell} - X_{k,\ell}|^2]}{\partial \Im\{FEQ_k\}} = 0 \quad (4.1)$$

donde $X_{k,\ell}$ es el símbolo QAM transmitido por la portadora k , $Y_{k,\ell}$ el símbolo igualado y FEQ_k es la constante compleja del igualador.

En la práctica, para diseñarlo con este criterio se usan algoritmos adaptativos LMS, tal y como se propone en [Chow91] y [Lee95]. Mediante una secuencia de símbolos QAM conocidos, estos algoritmos tratan de reducir al mínimo el error cuadrático medio mediante

la siguiente ecuación recurrente

$$FEQ_{k,\ell} = FEQ_{k,\ell-1} + \gamma_k(Y_{k,\ell} - X_{k,\ell})\tilde{Y}_{k,\ell}^* \quad (4.2)$$

donde γ_k es la constante que regula la velocidad de convergencia del algoritmo LMS para la portadora k e $\tilde{Y}_{k,\ell}$ es el símbolo QAM de la portadora k antes de la igualación del FEQ.

Efecto del interpolador en la adaptación del FEQ

Durante el proceso de adaptación, en el receptor está presente el bloque *Convertidor de frecuencia de muestreo*, y por tanto el *Interpolador*. De este modo, en el error cuadrático medio de los símbolos igualados estará incluido el error producido por la respuesta en frecuencia no ideal del interpolador, por lo que habrá que considerar que el FEQ trata de compensar en cierta medida la distorsión que introduce el interpolador. Por tanto, el FEQ es una parte del esquema del receptor fundamental para evaluar la distorsión que finalmente introduce el interpolador en los símbolos QAM recibidos.

Hay que tener en cuenta que la respuesta del interpolador a lo largo del proceso de adaptación cambia dependiendo del valor de $\mu[\ell]$ en cada símbolo DMT. Por este motivo, en el promedio del error implícito en el proceso de adaptación hay un promedio de las distintas respuestas del interpolador. Es decir, que cuando se realiza el promedio $E[|Y_k - X_k|^2]$ se está realizando un promedio que depende, entre otras, de la variable aleatoria μ .

Desde un punto de vista práctico, cabría plantearse la posibilidad de que la diferencia de frecuencias de muestreo entre el transmisor y el receptor fuera muy pequeña. En ese caso es probable que en el periodo de tiempo en el que se realiza la adaptación inicial del FEQ el valor de μ no haya recorrido todo su posible rango de variación en el intervalo $[0,1)$. Por tanto, plantear un cálculo teórico de los coeficientes del FEQ mediante la ecuación 4.1, en la que se incluiría el promediado de la variable μ no sería del todo correcto.

Al hacer esta consideración también hay que tener en cuenta que en la mayor parte de los esquemas propuestos, como [Chow91] o [Lee95], durante la fase de transmisión se continúa adaptando el FEQ mediante un algoritmo LMS, como se aprecia en la figura 4.1. Las constantes γ_k de este algoritmo en dicha fase son más pequeñas que en la fase inicial, por lo que proporcionan una lenta pero segura convergencia. Por tanto, aunque en la fase inicial no se realice completamente el promediado de las respuestas del interpolador, a largo plazo sí que se logra.

A pesar de todo puede ocurrir que la diferencia entre frecuencias de muestreo sea tan pequeña, que el tiempo en el que la variable μ recorre todo el rango $[0,1)$ sea mayor que el periodo efectivo de adaptación que imponen las constantes γ_k . En ese caso los coeficientes del FEQ no convergen a un valor concreto, sino que se van adaptando a los cambios de la respuesta del interpolador, por lo que cabe esperar que la compensación que realiza el FEQ es aún mejor que la que se obtiene cuando se adapta al promedio de sus respuestas.

Como conclusión, se puede afirmar que los valores de los coeficientes del FEQ obtenidos mediante la expresión 4.1 son, en la mayoría de los casos, muy próximos a los que convergen en la práctica y, aunque las condiciones de adaptación sean muy desfavorables porque el error de frecuencia sea muy pequeño, los valores calculados suponen una aproximación pesimista de cara a evaluar el error de los símbolos QAM recibidos.

4.2.2. Señal recibida

Para expresar la señal recibida $r(t)$ de forma apropiada para el análisis, hay que realizar algunas aproximaciones y consideraciones previas expuestas a continuación.

En primer lugar se supondrá que la señal que llega al receptor es limitada en banda, en concreto, que su frecuencia máxima es $\frac{1}{2T_M}$, donde T_M es el periodo de muestreo del transmisor. En la práctica, como el filtro conformador en el transmisor y el filtro antisolapamiento del receptor no son ideales, la señal tiene cierto exceso ancho de banda que produce solapamiento espectral tras la conversión de frecuencia de muestreo. Si no existe sincronización dicho solapamiento origina una variación del canal discreto equivalente, como se expone en el apartado 3.5. No obstante, este error se supone despreciable porque el muestreo está sincronizado gracias al convertidor de frecuencia de muestreo.

Además, se admitirá que no existe interferencia entre símbolos (ISI) gracias a la extensión cíclica. En la práctica suele aparecer un pequeño término de ISI ya que la longitud de la respuesta al impulso del canal discreto equivalente no suele ser inferior a la de la extensión cíclica, aunque fuera de sus límites tome valores poco apreciables. El hecho de usar un interpolador sólo alarga un poco la respuesta al impulso del canal equivalente, ya que su respuesta al impulso suele tener una longitud de pocas muestras. En concreto puede alargarla como máximo $(M - 1)T_M/L$, donde M es el número de coeficientes del interpolador y T_M/L es el periodo de muestreo de la señal al ser interpolada. Esto implica que su longitud en muestras a la frecuencia de muestreo de Nyquist f_M es $(M - 1)/L$ muestras, lo que para valores habituales de M y L representa menos de 3 muestras. Este es un motivo importante para preferir que la respuesta del interpolador sea finita, ya que facilita la tarea de evitar la ISI.

Por tanto, en el modelo se supondrá que la extensión cíclica tiene una duración mayor que la suma de las duraciones de las respuestas al impulso del canal y del interpolador. Visto de otra forma, antes de llegar al interpolador, la última parte de la extensión cíclica de cada símbolo DMT no contiene interferencia del símbolo anterior, en concreto el intervalo final de duración igual a $(M - 1)T_M/L$. De este modo el alargamiento de la respuesta al impulso del canal discreto equivalente por parte del interpolador no podrá introducir interferencia entre símbolos.

La señal recibida $r(t)$ puede expresarse como la suma de dos términos

$$r(t) = s(t) + \eta(t) = x(t) * g(t) + \eta(t) \quad (4.3)$$

donde $\eta(t)$ es el ruido aditivo que introduce el canal, $x(t)$ es la señal transmitida y $s(t)$ es la señal transmitida $x(t)$ después de atravesar el canal continuo equivalente de respuesta al impulso $g(t)$.

Para realizar el análisis conviene expresar un periodo de símbolo DMT ℓ de la señal $s(t)$ y $\eta(t)$ en función de los símbolos QAM transmitidos $X_{k,\ell}$ y la componente de ruido $N_{k,\ell}$ por cada portadora k respectivamente. Teniendo en cuenta las consideraciones previas realizadas, y excluyendo la parte de la extensión cíclica que podría tener interferencia del símbolo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} X_{k,\ell} G_k e^{j \frac{2\pi k(t-\ell DT_M)}{NT_M}} \\ \eta(t) &= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} N_{k,\ell} e^{j \frac{2\pi k(t-\ell DT_M)}{NT_M}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

para $-(M-1)T_M/L \leq t - \ell DT_M \leq (N-1)T_M$, donde G_k es la respuesta equivalente del canal para la portadora k , $N_{k,\ell}$ es la componente de ruido, D es la duración en muestras del símbolo DMT y $N/2$ el número de portadoras.

4.3. Análisis del error en los símbolos QAM recibidos

Una vez aclaradas las principales particularidades del esquema de receptor expuesto en la figura 4.1 y partiendo de la descripción detallada de la señal recibida del apartado 4.2.2, es posible realizar el análisis del efecto del interpolador en los símbolos QAM recibidos. Con este fin se obtiene la expresión de los símbolos QAM, resultantes de aplicar a la señal recibida los procesos de muestreo, interpolación y demodulación. Después, se evalúa el error cuadrático medio de los dichos símbolos igualados mediante el FEQ, y finalmente calcula la relación entre la potencia de la señal y la potencia del error, separando los términos debidos al ruido y a la distorsión que introduce el interpolador. Este último término es determinante para valorar las prestaciones del interpolador y guiar su proceso de diseño.

Cálculo de los símbolos QAM igualados

Siguiendo el esquema de la figura 4.1, en primer lugar, la señal continua recibida $r(t)$ se convierte en la señal digital $r_s[m]$. Se le aplica un sobremuestreo en los instantes $t = (m - \Phi[\ell])(T_M/L) + \ell DT_M$, donde $\Phi[\ell]$ es el error en el instante de muestreo a lo largo del símbolo DMT ℓ y puede expresarse como la suma de su parte entera $\Phi_e[\ell]$ y su parte fraccionaria $\mu[\ell]$. En adelante se suprimirá el índice ℓ que indica del símbolo DMT del

que se trata por simplicidad en la nomenclatura. La señal discreta $r_s[m]$ que se obtiene se puede expresar a partir de 4.4 y 4.3 como

$$r_s[m] = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} (X_k G_k + N_k) e^{j \frac{2\pi k(m-\Phi)}{LN}} \quad (4.5)$$

para $-M \leq m - \Phi_e \leq (N-1)L$.

Una vez tomadas las muestras a la señal se le aplica el diezmado variable que compensa la parte entera del retardo Φ_e , dejando sin compensar únicamente la parte fraccionaria μ , y diezma la señal por un factor L . Las señales $r_{s,i}[nL]$ obtenidas pueden expresarse

$$\begin{aligned} r_{s,i}[nL] &= r_s[nL - i + \Phi_e] = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} (X_k G_k + N_k) e^{j \frac{2\pi k(nL-i+\Phi_e-\Phi)}{LN}} \\ &= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} (X_k G_k + N_k) e^{j \frac{2\pi k(nL-i-\mu)}{LN}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

para $0 \leq n \leq N-1$ y $0 \leq i \leq M-1$.

Para compensar el retardo μ las señales $r_{s,i}[nL]$ se procesan mediante el interpolador de respuesta al impulso $h_\mu[n]$, obteniéndose la señal $r[n]$ definida como

$$r[n] = \sum_{i=0}^{M-1} r_{s,i}[nL] h_\mu[i] \quad (4.7)$$

Aplicando la expresión 4.6 en 4.7 se obtiene

$$r[n] = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} (X_k G_k + N_k) H_{\mu,k} e^{j \frac{2\pi k(nL-\mu)}{LN}} \quad (4.8)$$

para $0 \leq n \leq N-1$ y donde $H_{\mu,k}$ es la respuesta a la portadora k del interpolador que compensa el retardo μ , que se calcula según la siguiente expresión

$$H_{\mu,k} = \sum_{i=0}^{M-1} h_\mu[i] e^{-j \frac{2\pi k i}{LN}} \quad (4.9)$$

Continuando con el esquema de la figura 4.1, se realiza la demodulación mediante un algoritmo FFT de las N muestras correspondientes al símbolo DMT sin la extensión cíclica, como ya se expuso en el capítulo 1. A partir de la ecuación 4.8 es inmediato obtener que el símbolo QAM de la portadora k recibido es

$$\tilde{Y}_k = X_k G_k H_{\mu,k}^c + N_k H_{\mu,k}^c \quad (4.10)$$

donde $H_{\mu,k}^c$ se define como la respuesta en frecuencia de retardo compensado μ del interpolador y se calcula

$$H_{\mu,k}^c = H_{\mu,k} e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} \quad (4.11)$$

Para comprender qué significado tienen las respuestas en frecuencia de retardo compensado $H_{\mu,k}^c$ conviene analizar como dependen del parámetro μ . Si se tratase de un interpolador ideal, el cociente entre la respuesta en frecuencia del interpolador $H_{\mu,k}$ y la respuesta $H_{0,k}$ sería un término de la forma $e^{j \frac{2\pi k \mu}{LN}}$. Por tanto, la respuesta en frecuencia de retardo compensado $H_{\mu,k}^c$, al estar multiplicada por ese mismo término pero invertido, debiera ser idéntica a $H_{0,k}$ para todo valor de μ . Lo que ocurre en la práctica es que, aunque sean muy parecidas, las respuestas de retardo compensado tienen ligeras diferencias. Como se comprobará un poco más adelante, estas diferencias son precisamente las causantes del error que introduce el interpolador.

Cálculo del error cuadrático medio de los símbolos QAM

El símbolo QAM recibido $\tilde{Y}_k$ es multiplicado por una constante compleja FEQ_k correspondiente al igualador en el dominio de la frecuencia. Este igualador, como ya se expuso en el apartado 4.2.1, se diseña con criterio de error cuadrático medio mínimo. La expresión del error cuadrático medio de la portadora k a la salida del FEQ será

$$Se_k = E[|e_k|^2] = E[|\tilde{Y}_k FEQ_k - X_k|^2] \quad (4.12)$$

donde e_k es el error del símbolo recibido de la portadora k y FEQ_k es el coeficiente del FEQ correspondiente a la portadora k .

Conociendo la expresión anterior es posible calcular de forma analítica los coeficientes del FEQ que se obtendrían idealmente mediante el algoritmo LMS en la fase de entrenamiento inicial. Para ello no hay más que derivar el error cuadrático medio Se_k con respecto a la parte real e imaginaria de los coeficientes FEQ_k e igualarlas a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[|\tilde{Y}_k FEQ_k - X_k|^2]}{\partial \text{Re}\{FEQ_k\}} &= E \left[\frac{\partial |\tilde{Y}_k FEQ_k - X_k|^2}{\partial \text{Re}\{FEQ_k\}} \right] = 0 \\ \frac{\partial E[|\tilde{Y}_k FEQ_k - X_k|^2]}{\partial \text{Im}\{FEQ_k\}} &= E \left[\frac{\partial |\tilde{Y}_k FEQ_k - X_k|^2}{\partial \text{Im}\{FEQ_k\}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sustituyendo 4.10 en 4.13 y derivando se obtiene

$$E[(X_k G_k H_{\mu,k}^c + N_k H_{\mu,k}^c)((X_k^* G_k^* H_{\mu,k}^{c*} + N_k^* H_{\mu,k}^{c*}) FEQ_k^* - X_k^*)] = 0 \quad (4.14)$$

Promediando y despejando se calcula la expresión de los coeficientes FEQ_k óptimos con criterio MSE

$$FEQ_k = \frac{Sx_k (G_k \overline{H_k^c})^*}{(Sx_k |G_k|^2 + \sigma_k^2) \overline{|H_k^c|^2}} \quad (4.15)$$

donde $Sx_k = E[|X_k|^2]$ es la potencia de los símbolos de la portadora k , $\sigma_k^2 = E[|N_k|^2]$ es la potencia de ruido en la portadora k .

La media y el valor cuadrático medio de la respuesta de retardo compensado del interpolador, $\overline{H_k^c}$ y $\overline{|H_k^c|^2}$, se calculan promediando las respuestas para distintos símbolos DMT. Como la única variación de dicha respuesta de un símbolo DMT a otro es el retardo fraccionario μ que compensa el interpolador, el promediado se realiza con respecto a la variable μ . Es decir, la media y el valor cuadrático medio de las respuestas en frecuencia de retardo compensado se calculan como

$$\overline{H_k^c} = E[H_{\mu,k}^c] = \int_0^1 H_{\mu,k}^c p(\mu) d\mu = \int_0^1 H_{\mu,k}^c d\mu \quad (4.16)$$

$$\overline{|H_k^c|^2} = E[|H_{\mu,k}^c|^2] = \int_0^1 |H_{\mu,k}^c|^2 p(\mu) d\mu = \int_0^1 |H_{\mu,k}^c|^2 d\mu \quad (4.17)$$

donde $p(\mu)$ es la función densidad de probabilidad de la variable μ que, como se expuso el apartado 4.2.1, puede considerarse uniforme en el intervalo $[0,1]$.

Tras un sencillo desarrollo a partir del cálculo de los coeficientes del FEQ, expresado en 4.15, y de la expresión del error cuadrático medio de la ecuación 4.12, dicho error se puede expresar como

$$Se_k = \frac{Sx_k(Sx_k|G_k|^2(\overline{|H_k^c|^2} - |\overline{H_k^c}|^2) + \sigma_k^2\overline{|H_k^c|^2})}{(Sx_k|G_k|^2 + \sigma_k^2)\overline{|H_k^c|^2}} \quad (4.18)$$

Cálculo de la relación señal a error

Usando la expresión 4.18 se puede calcular directamente la relación potencia de señal a potencia de error de la portadora k como

$$SER_k = \frac{Sx_k}{Se_k} = \frac{(Sx_k|G_k|^2 + \sigma_k^2)\overline{|H_k^c|^2}}{Sx_k|G_k|^2(\overline{|H_k^c|^2} - |\overline{H_k^c}|^2) + \sigma_k^2\overline{|H_k^c|^2}} \quad (4.19)$$

Suponiendo una relación señal a ruido no muy desfavorable, se puede considerar que el término de ruido del numerador es notablemente inferior al de señal, por lo que, reordenando adecuadamente los términos, es sencillo aproximar la SER_k por

$$SER_k \approx \left(\left(\frac{\sigma_k^2}{Sx_k|G_k|^2} \right)^{-1} + \left(\frac{\overline{|H_k^c|^2}}{|\overline{H_k^c}|^2 - \overline{|H_k^c|^2}} \right)^{-1} \right)^{-1} = (SNR_k^{-1} + SDR_k^{-1})^{-1} \quad (4.20)$$

En esta expresión, el primer término depende del ruido a la entrada del receptor, mientras que el segundo está relacionado únicamente con la distorsión que introduce el interpolador. Por tanto, se pueden diferenciar dos términos en la relación señal a error: la

relación señal a ruido SNR_k y la relación señal a distorsión SDR_k . Esta última se expresa como

$$SDR_k = \frac{\overline{|H_k^c|^2}}{|H_k^c|^2 - |\overline{H_k^c}|^2} \quad (4.21)$$

La expresión de la SDR_k obtenida es genérica y puede aplicarse a cualquiera de las estructuras expuestas para la realización del interpolador. Para tratar de optimizar las prestaciones de un interpolador que usa una estructura concreta, es conveniente expresar la SDR_k en función de parámetros que caracterizan dicha estructura. Con este fin se ha desarrollado una serie de expresiones, incluidas en un apéndice al final de este capítulo, que permiten calcular la SDR_k a partir de la respuesta a impulso del filtro continuo original $h(t)$ (apéndice 4-A.1) o a partir de los coeficientes que caracterizan a cada una de las estructuras presentadas en esta tesis: de coeficientes almacenados (apéndice 4-A.2), de coeficientes computados (apéndice 4-A.3) o híbrida (apéndice 4-A.4).

Interpretación de los resultados

De la ecuación 4.21 se pueden obtener interesantes conclusiones, muchas de las cuales son importantes para diseñar interpoladores específicos para sistemas DMT.

En primer lugar, se puede apreciar que el denominador de la SDR es igual a la varianza de las respuestas en frecuencia de retardo compensado de los interpoladores, puesto que se calcula la diferencia entre el valor cuadrático medio y la media al cuadrado. Esto significa que el error que introduce el interpolador no se debe a que las respuestas en frecuencia no sean completamente planas, sino a que las respuestas de retardo compensado no son idénticas. Si todas lo fuesen, no introducirían distorsión alguna. Esto es consecuencia del uso del FEQ, que permite compensar la respuesta del interpolador al ajustarse inicialmente para minimizar el error. Lo que no puede compensar el FEQ son las variaciones de la respuesta de retardo compensado del interpolador según sea el retardo μ que se esté corrigiendo en cada instante.

Además, hay que reseñar que en la SDR no sólo influye la varianza de la respuestas de retardo compensado del interpolador. Si la respuesta del interpolador tiene valores pequeños para una determinada portadora k y por tanto una varianza también pequeña, el FEQ tenderá a amplificar el símbolo recibido para compensarla, por lo que la variación de las respuestas también quedará amplificada. Este hecho se refleja en el numerador de la SDR, en la que aparece el valor cuadrático medio de la respuesta del interpolador. Se puede afirmar, por tanto, que lo que realmente determina la SDR no es la variación absoluta de dichas respuestas sino la relativa.

Esta conclusión hace suponer que, al diseñar el interpolador minimizando la distorsión introducida por el interpolador, se reduce también el término residual de interferencia entre portadoras, despreciado en este análisis. Como la respuesta de retardo compensado

del interpolador no es igual para los distintos valores de μ y, en la práctica, a lo largo del símbolo DMT varía por efecto del error de frecuencia de muestreo, este efecto equivale a un variación del canal discreto equivalente. Esta ligera variación temporal provoca pérdida de ortogonalidad entre portadoras, lo que introduce cierta interferencia entre ellas. Por esta razón, al tratar de reducir la variación relativa de la respuesta en frecuencia del interpolador en el proceso de diseño, se tiende a reducir la interferencia entre portadoras aunque, al no incluir este término en el análisis, esta reducción no tiene porqué hacerse de forma óptima.

Por otro lado, conviene analizar la causa de que las respuestas de retardo compensado no sean idénticas unas a otras para elegir el método de diseño del interpolador que más reduzca estas diferencias. Estas variaciones se deben al solapamiento espectral de la respuesta en frecuencia producido al tomar muestras de la respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$ para obtener los coeficientes del interpolador. La SDR puede expresarse a partir de $H(\omega)$, la transformada de Fourier del filtro continuo original $h(t)$, usando el desarrollo expuesto en el apéndice 4-A.1. La expresión final que se obtiene es

$$SDR_k = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega_k - nL\omega_M)|^2}{\sum_{n \neq 0} |H(\omega_k - nL\omega_M)|^2} \quad (4.22)$$

En el numerador de esta solución se puede observar que el valor cuadrático medio de la respuesta de retardo compensado, representado en la figura 4.3, equivale a la suma de los módulos de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original periódicamente repetidos. Además, como puede apreciarse en el denominador de la ecuación anterior, la varianza de estas respuestas se corresponde con las réplicas de la respuesta en frecuencia que se solapan sobre la respuesta en frecuencia del filtro continuo original. Por tanto, para lograr un interpolador de altas prestaciones es necesario que las regiones de la respuesta en frecuencia que se solapan sean de la menor amplitud posible en relación a la respuesta original. Sin embargo, no es tan importante que la respuesta original tenga una banda de paso muy plana, puesto que ésta queda compensada por el FEQ. Estas conclusiones implican que el diseño del interpolador debe realizarse a partir de filtros continuos paso bajo con la mayor atenuación posible entre la banda de rechazo y la banda de paso.

En la figura 4.4 se representa un detalle del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original de un interpolador, el solape de la primera repetición o réplica de esta respuesta y el solape de la suma total de las réplicas. Por tanto, si la atenuación en la banda de rechazo es suficientemente alta y el factor de sobremuestreo igual o mayor que 2, es razonable suponer que la suma de estas respuestas coincida con la respuesta del filtro en su banda de paso, desde la frecuencia 0 hasta $0,5\omega_M$. Esto se debe a que en dicha banda las réplicas que se solapan tiene una amplitud mucho menor que la original, y por tanto esta última domina en la suma. Además, se puede afirmar que la diferencia en dBs entre la respuesta original y la suma de las réplicas solapadas equivale a la SDR_k , puesto

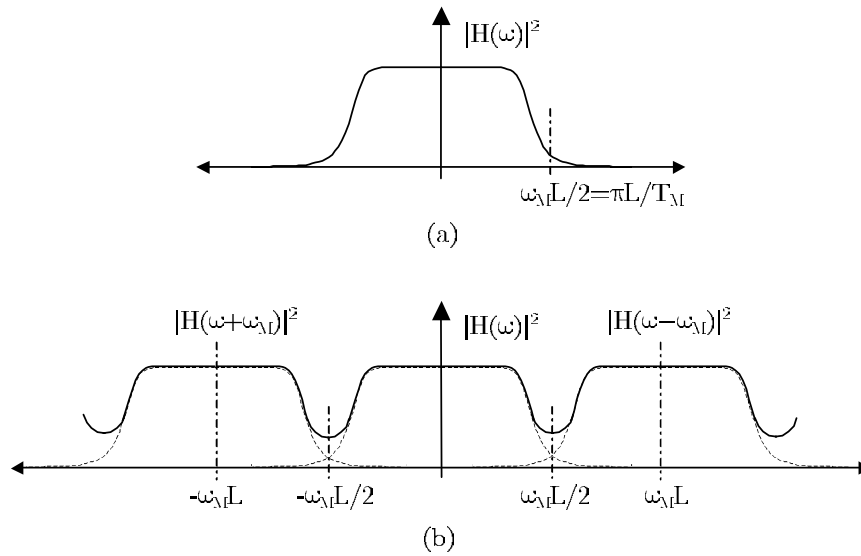


Fig. 4.3: Efecto de solapamiento espectral en el promedio del módulo al cuadrado de la respuesta de retardo compensado: (a) módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original $|H(\omega)|^2$; (b) promedio del módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de retardo compensado

que este solape es el que produce la variación de la respuesta del interpolador.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se ha realizado un análisis del impacto del interpolador en los símbolos QAM recibidos, del que se extraen importantes conclusiones para su diseño.

En primer lugar se ha presentado un modelo, tanto de la señal recibida como del sistema receptor, en el que se han realizado algunas aproximaciones. Entre los bloques del receptor, se ha estudiado especialmente el FEQ, que reduce en gran medida la distorsión que introduce el interpolador gracias a su diseño de mínimo error cuadrático medio.

Partiendo de ese modelo se ha realizado el cálculo de los símbolos demodulados e igualados, lo que ha permitido obtener su error cuadrático medio y la relación señal a error. Esta relación se ha podido descomponer en relación señal a ruido y relación señal a distorsión, siendo esta última de especial relevancia para el estudio del impacto del interpolador en los sistemas DMT. El cálculo detallado de la *SDR* en función de los coeficientes que definen cualquiera de las estructuras presentadas en el capítulo anterior se presenta en el apéndice 4-A.

Por último se han interpretado los resultados obtenidos. Se ha comprobando la importancia del FEQ en el impacto del interpolador en los símbolos recibidos, ya que su presencia evita que el diseño de la respuesta en frecuencia del interpolador tenga que ser lo más plana posible, como clásicamente se ha propuesto. Además, se ha relacionado la

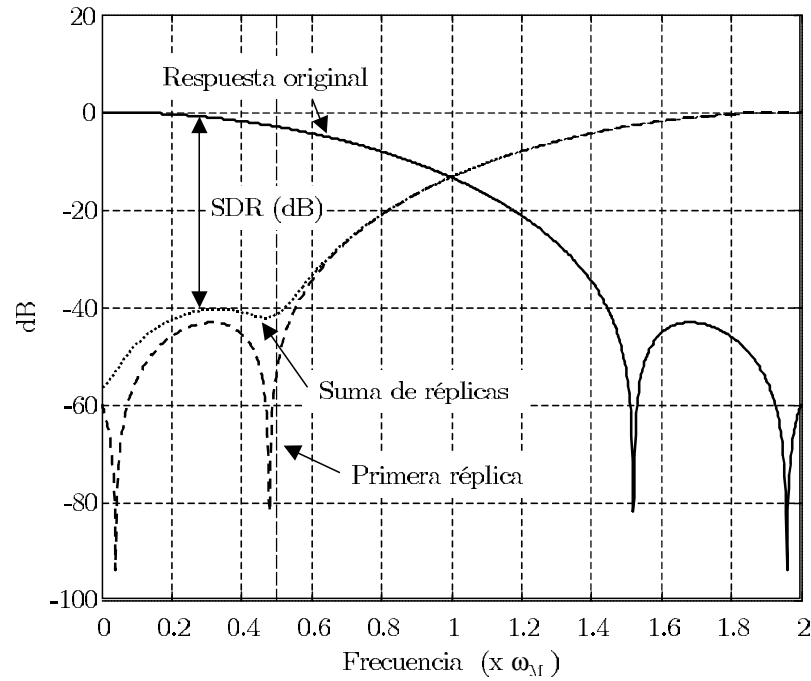


Fig. 4.4: Ejemplo de representación en escala logarítmica del módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original $|H(\omega)|^2$, de la primera réplica que se solapa $|H(\omega - 2\omega_M)|^2$ y la suma de las réplicas solapadas $\sum_{n \neq 0} |H(\omega_k - 2n\omega_M)|^2$. La diferencia entre la respuesta original y la suma de las réplicas es aproximadamente igual a la SDR_k .

forma de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original con las variaciones relativas de la respuesta del interpolador, de donde se deducen algunas consideraciones importantes para su diseño.

En el capítulo 5 se utilizan estas conclusiones para desarrollar un nuevo método de diseño de interpoladores para sistemas DMT, y mediante simulación se comprueban los resultados y se validan las aproximaciones realizadas en el análisis.

4-A. Apéndice: Cálculo de la SDR

Las expresiones para el cálculo de la SDR debida al uso del interpolador para la corrección de la sincronización, expuestas en el apartado 4.3, se basan en los promedios de las respuestas en frecuencia de retardo compensado. Sin embargo, es conveniente poder realizar este cálculo a partir de las funciones o parámetros que de forma más inmediata caracterizan el interpolador. Por este motivo, se ha realizado el cálculo a partir de la respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$ y de los coeficientes que definen el interpolador según sea la estructura elegida: los conjuntos de valores de los coeficientes del interpolador, en el caso de estructura de coeficientes almacenados, o los coeficientes de los polinomios para su cálculo, en el caso de la estructura de coeficientes computados o estructura híbrida. De esta forma es posible evaluar las prestaciones de un interpolador concreto a partir de los coeficientes de su estructura y poder así aplicar un algoritmo de optimización de dichos coeficientes para su diseño.

4-A.1. Cálculo de la SDR a partir de la respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$

Las respuestas al impulso del interpolador se pueden expresar a partir de la respuesta al impulso del filtro continuo original $h(t)$ de la siguiente forma

$$h_\mu[n] = h((n + \mu)T_M/L) \quad (4-A.1)$$

Por tanto la respuesta del interpolador de retardo compensado a la portadora k se puede expresar como

$$H_{\mu,k}^c = H_{\mu,k} e^{-j\frac{2\pi k\mu}{NL}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\mu[n] e^{-j\frac{2\pi k(n+\mu)}{NL}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h((n + \mu)T_M/L) e^{-j\frac{2\pi k(n+\mu)}{NL}} \quad (4-A.2)$$

A partir de esta última expresión se puede obtener el promedio de las respuestas compensadas

$$\overline{H_{\mu,k}^c} = \int_0^1 H_{\mu,k} e^{j\frac{2\pi k\mu}{NL}} d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 h((n + \mu)T_M/L) e^{-j\frac{2\pi k(n+\mu)}{NL}} d\mu \quad (4-A.3)$$

Realizando el cambio de variable $t = (n + \mu)T_M/L$ se obtiene

$$\overline{H_{\mu,k}^c} = \frac{L}{T_M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT_M/L}^{(n+1)T_M/L} h(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{NT_M}} dt = \frac{L}{T_M} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{NT_M}} dt = \frac{L}{T_M} H(\omega_k) \quad (4-A.4)$$

donde $H(\omega)$ es la respuesta en frecuencia del filtro continuo original y ω_k la frecuencia $\frac{2\pi k}{NT_M}$. De modo similar, el valor cuadrático medio del módulo de la respuestas de retardo

compensado es igual a

$$\begin{aligned} \overline{|H_{\mu,k}^c|^2} &= \int_0^1 |H_{\mu,k}|^2 d\mu = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h((n+\mu)T_M/L) h((n'+\mu)T_M/L) e^{-j\frac{2\pi k(n-n')}{NL}} d\mu \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 h((n+\mu)T_M/L) h((n'+\mu)T_M/L) d\mu \right) e^{-j\frac{2\pi k(n-n')}{NL}} \end{aligned} \quad (4-A.5)$$

De nuevo, realizando el cambio de variable $t = (n' + \mu)T_M/L$ se obtiene

$$\overline{|H_{\mu,k}^c|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \left(\frac{L}{T_M} \int_{nT_M/L}^{(n+1)T_M/L} h((n-n')T_M/L + t) h(t) dt \right) e^{-j\frac{2\pi k(n-n')}{NL}} \quad (4-A.6)$$

Con el cambio $i = n - n'$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \overline{|H_{\mu,k}^c|^2} &= \frac{L}{T_M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\int_{nT_M/L}^{(n+1)T_M/L} h(iT_M/L + t) h(t) dt \right) e^{-j\frac{2\pi ki}{NL}} \\ &= \frac{L}{T_M} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT_M/L}^{(n+1)T_M/L} h(iT_M/L + t) h(t) dt \right) e^{-j\frac{2\pi ki}{NL}} \\ &= \frac{L}{T_M} \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_{hh}(iT_M/L) e^{-j\frac{2\pi ki}{NL}} \end{aligned} \quad (4-A.7)$$

donde $R_{hh}(\tau)$ es la autocorrelación de la función $h(t)$. Esta última expresión es la transformada de Fourier para señal discreta de la función de autocorrelación $R_{hh}(\tau)$ evaluada en los instantes múltiplos de T_M/L . Usando el teorema del muestreo se obtiene la expresión final

$$\overline{|H_{\mu,k}^c|^2} = \left(\frac{L}{T_M} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega_k - nL\omega_M)|^2 \quad (4-A.8)$$

Por tanto, la expresión final de la SDR_k que se obtiene es

$$SDR_k = \frac{\left(\frac{L}{T_M} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega_k - nL\omega_M)|^2}{\left(\frac{L}{T_M} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega_k - nL\omega_M)|^2 - \left| \frac{L}{T_M} H(\omega_k) \right|^2} \quad (4-A.9)$$

y simplificando

$$SDR_k = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega_k - nL\omega_M)|^2}{\sum_{n \neq 0} |H(\omega_k - nL\omega_M)|^2} \quad (4-A.10)$$

Esta última expresión es de especial relevancia porque pone de manifiesto que la varianza del error debido al interpolador, término del denominador, se debe a la respuesta en frecuencia del filtro continuo original a frecuencias superiores a la frecuencia $0,5L\omega_M$, frecuencia límite por encima de la cual se produce solapamiento espectral al tomar muestras a frecuencia $f_M L$.

4-A.2. Cálculo de la SDR para la estructura de coeficientes almacenados

Cuando se usa esta estructura, se cuenta con P de posibles conjuntos de coeficientes permiten compensar otros tantos retardos fraccionarios $\hat{\mu}_l$ definidos en la ecuación 3.26. De este modo, cualquier retardo μ que se pretenda compensar se puede expresar como

$$\mu = \hat{\mu}_l + \tau, \quad \frac{-1}{2P} \leq \tau \leq \frac{1}{2P} \quad (4-A.11)$$

donde τ es la parte del retardo fraccionario que el interpolador no puede compensar.

Asumiendo que μ puede considerarse una variable aleatoria de función densidad de probabilidad uniforme, como se expuso en el apartado 4.2.1, la variable τ , que se deriva de ella, también debe ser uniforme en el intervalo especificado en la ecuación anterior. De este modo, la media de la respuesta de retardo compensado del interpolador se puede expresar como

$$\begin{aligned} \overline{H_k^c} &= E[H_{\mu,k}^c] = \int_0^1 H_{\mu,k} e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} \int_{-1/2P}^{1/2P} H_{l,k} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} (\hat{\mu}_l + \tau)} d\tau = \sum_{l=0}^{P-1} H_{l,k} \int_{-1/2P}^{1/2P} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} (\frac{2l+1}{2P} + \tau)} d\tau \end{aligned} \quad (4-A.12)$$

donde $H_{l,k}$ es la respuesta del interpolador para la portadora k que compensa el error $\hat{\mu}_l$. Esta respuesta se puede calcular a partir de la respuesta al impulso $\hat{h}[l, n]$ como

$$H_{l,k} = \sum_{n=0}^{M-1} \hat{h}[l, n] e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} \quad (4-A.13)$$

La ecuación 4-A.12 puede simplificarse calculando la integral, obteniéndose el siguiente resultado

$$\overline{H_k^c} = E[H_{\mu,k}^c] = \frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} H_{l,k} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} \frac{2l+1}{2P}} \text{sinc} \left(\frac{\pi k}{LNP} \right) \quad (4-A.14)$$

Siguiendo un procedimiento similar, el valor cuadrático medio de las respuestas de retardo compensado puede calcularse como

$$\begin{aligned} \overline{|H_k^c|^2} &= E[|H_{\mu,k}^c|^2] = \sum_{l=0}^{P-1} \int_{-1/2P}^{1/2P} |H_{l,k} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} (\frac{2l+1}{2P} + \tau)}|^2 d\tau = \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} \int_{-1/2P}^{1/2P} |H_{l,k}|^2 d\tau = \frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} |H_{l,k}|^2 \end{aligned} \quad (4-A.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4-A.14 y 4-A.15 en 4.21 se obtiene la expresión final de la SDR_k

$$SDR_k = \frac{\frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} |H_{l,k}|^2}{\frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} |H_{l,k}|^2 - \left| \frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} H_{l,k} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} \frac{2l+1}{2P}} \right|^2 \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi k}{LNP} \right) \right|^2} \quad (4-A.16)$$

Conviene recordar que el denominador de esta expresión es la varianza de las respuestas de retardo compensado del filtro del interpolador, por lo que se expresa como la diferencia entre el valor cuadrático medio y el módulo al cuadrado del valor medio. Este último término se puede dividir en dos factores. Por un lado, aparece el factor $\left| \frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} H_{l,k} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} \frac{2l+1}{2P}} \right|^2$ que representa el módulo al cuadrado del promedio de las respuestas de retardo compensado. Por otro, el factor $|\text{sinc}(\frac{\pi k}{LNP})|^2$, que está relacionado con el error debido a que la diferencia entre el retardo a compensar μ y el realmente compensado $\hat{\mu}_l$, es decir, el error debido a la variable τ . Obsérvese que si el número de conjuntos de coeficientes posibles, P , tiende a infinito, este factor tiende a 1 y por tanto desaparece. Lógicamente si el número de posibles conjuntos de coeficientes tiende a infinito el número de posibles retardos compensables $\hat{\mu}_l$ también, por lo que el error debido a la diferencia entre μ y $\hat{\mu}_l$ tiende a cero.

Hay que recordar que el error en el retardo compensado debido al número finito de conjuntos de coeficientes debe afectar menos a frecuencias bajas que a altas, ya que la variación relativa de la señal en el tiempo es menor para las primeras. Por ello el término $|\text{sinc}(\frac{\pi k}{LNP})|^2$ indicado es más próximo a 1 cuanto menor sea el valor de k , y por tanto menor la frecuencia de la portadora.

4-A.3. Cálculo de la SDR para la estructura de coeficientes computados

En esta opción los coeficientes del interpolador son calculados para cada retardo a compensar μ mediante los polinomios $F_n(\mu)$, descritos en la ecuación 3.32. En este caso se puede calcular el promedio de la respuesta de retardo compensado como

$$\overline{H}_k^c = E[H_{\mu,k}^c] = \int_0^1 H_{\mu,k} e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu \quad (4-A.17)$$

donde $H_{\mu,k}$, usando 3.32, se calcula

$$H_{\mu,k} = \sum_{n=0}^{M-1} h_\mu[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} = \sum_{n=0}^{M-1} F_n(\mu) e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^O \mu^m a_{n,m} e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} \quad (4-A.18)$$

donde $a_{n,m}$ es el coeficiente de orden m del polinomio con el que se calcula el coeficiente n del interpolador. Reordenando términos, tal y como se demostró en el capítulo anterior, el interpolador puede entenderse como una serie de O subfiltros cuyos coeficientes son

$a_{n,i}$ y cuyas salidas quedan multiplicados por potencias de μ , tal y como se expresa en la siguiente ecuación

$$H_{\mu,k} = \sum_{m=0}^O \left(\sum_{n=0}^{M-1} a_{n,m} e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} \right) \mu^m = \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,k} \mu^m \quad (4-A.19)$$

en la que $\tilde{H}_{m,k}$ es la respuesta a la portadora k del subfiltro de coeficientes $a_{n,m}$ del interpolador.

Usando las expresiones anteriores el valor de $\overline{H_k^c}$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} \overline{H_k^c} &= \int_0^1 H_{\mu,k} e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \int_0^1 \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,k} \mu^m e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu \\ &= \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,k} \int_0^1 \mu^m e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,k} C_{m,k} \end{aligned} \quad (4-A.20)$$

donde los coeficientes $C_{m,k}$ se calculan de forma analítica mediante la siguiente expresión

$$C_{m,k} = \int_0^1 \mu^m e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \frac{e^{-j \frac{2\pi k}{LN}} m!}{(j 2\pi k / LN)^{m+1}} \left(e^{j \frac{2\pi k}{LN}} - \sum_{r=0}^m \frac{(j 2\pi k / LN)^r}{r!} \right) \quad (4-A.21)$$

El valor cuadrático medio de las respuestas de retardo compensado $|\overline{H_k^c}|^2$, siguiendo un camino similar al anterior, es

$$|\overline{H_k^c}|^2 = E[|H_{\mu,k}^c|^2] = \int_0^1 \left| H_{\mu,k} e^{j \frac{2\pi k \mu}{LN}} \right|^2 d\mu = \int_0^1 |H_{\mu,k}|^2 d\mu \quad (4-A.22)$$

Introduciendo la ecuación 4-A.19 en la anterior y calculando la integral se obtiene

$$\begin{aligned} |\overline{H_k^c}|^2 &= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,k} \mu^m \right|^2 d\mu = \int_0^1 \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,k} \tilde{H}_{m',k}^* \mu^{m+m'} d\mu \\ &= \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,k} \tilde{H}_{m',k}^* \int_0^1 \mu^{m+m'} d\mu = \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,k} \tilde{H}_{m',k}^* \left(\frac{1}{m+m'+1} \right) \end{aligned} \quad (4-A.23)$$

Introduciendo 4-A.23 y 4-A.17 en la expresión de la SDR_k queda

$$SDR_k = \frac{\sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,k} \tilde{H}_{m',k}^* \left(\frac{1}{m+m'+1} \right)}{\sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,k} \tilde{H}_{m',k}^* \left[\left(\frac{1}{m+m'+1} \right) - C_{m,k} C_{m',k}^* \right]} \quad (4-A.24)$$

4-A.4. Cálculo de la SDR para la estructura híbrida

Esta estructura se basa en que los coeficientes son computados para cada valor de μ usando el polinomio que le corresponde de entre los P polinomios $F_{n,l}(\mu)$ descritos en 3.47. En este caso, la respuesta a la portadora k de retardo compensado promedio se puede expresar usando la ecuación 4-A.17. En esa expresión $H_{\mu,k}$ se calcula, usando 3.47, mediante la ecuación

$$H_{\mu,k} = \sum_{n=0}^{M-1} h_{\mu}[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} = \sum_{n=0}^{M-1} F_{n,l}(\mu) e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^O a_{n,m,l} \mu^m e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} \quad (4-A.25)$$

donde l es el polinomio que le corresponde al retardo μ según la ecuación 3.48 y $a_{n,m,l}$ son los coeficientes del subfiltro $\tilde{h}_{m,l}$. De nuevo, reordenando términos se obtiene la siguiente ecuación

$$H_{\mu,k} = \sum_{m=0}^O \left(\sum_{n=0}^{M-1} a_{n,m,l} e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} \right) \mu^m = \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \mu^m \quad (4-A.26)$$

en la que $\tilde{H}_{m,l,k}$ es la respuesta a la portadora k del subfiltro $\tilde{h}_{m,l}$ del interpolador.

Usando las expresiones anteriores, y usando la ecuación 3.48 que permite calcular l a partir del valor de μ , el valor de $\overline{H}_k^c$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} \overline{H}_k^c &= \int_0^1 H_{\mu,k} e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \sum_{l=0}^{P-1} \int_{l/P}^{(l+1)/P} \left(\sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \mu^m \right) e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \int_{l/P}^{(l+1)/P} \mu^m e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} C_{m,l,k} \end{aligned} \quad (4-A.27)$$

donde los coeficientes $C_{m,l,k}$ se calculan de forma analítica mediante la siguiente expresión

$$C_{m,l,k} = \int_{l/P}^{(l+1)/P} \mu^m e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \sum_{r=0}^m \frac{\left(\left(\frac{l}{P} \right)^{m-r} e^{-j \frac{2\pi k l}{LN} \frac{l}{P}} - \left(\frac{l+1}{P} \right)^{m-r} e^{-j \frac{2\pi k l}{LN} \frac{l+1}{P}} \right) m!}{(j \frac{2\pi k}{LN})^{r+1} (m-r)!} \quad (4-A.28)$$

El valor cuadrático medio de las respuestas compensadas $|\overline{H}_k^c|^2$, siguiendo un camino similar al anterior, es

$$|\overline{H}_k^c|^2 = E[|H_{\mu,k}^c|^2] = \int_0^1 \left| H_{\mu,k} e^{j \frac{2\pi k \mu}{LN}} \right|^2 d\mu = \int_0^1 |H_{\mu,k}|^2 d\mu \quad (4-A.29)$$

Introduciendo la ecuación 4-A.26 en la anterior y calculando la integral se obtiene

$$|\overline{H}_k^c|^2 = \sum_{l=0}^{P-1} \int_{l/P}^{l+1/P} \left| \sum_{m=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \mu^m \right|^2 d\mu = \sum_{l=0}^{P-1} \int_{l/P}^{l+1/P} \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \tilde{H}_{m',l,k}^* \mu^{m+m'} d\mu =$$

$$\sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \tilde{H}_{m',k,l}^* \int_{\frac{l}{P}}^{\frac{l+1}{P}} \mu^{m+m'} d\mu = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \tilde{H}_{m',l,k}^* \left(\frac{\left(\frac{l+1}{P}\right)^{m+m'+1} - \left(\frac{l}{P}\right)^{m+m'+1}}{m+m'+1} \right) \quad (4-A.30)$$

Introduciendo 4-A.30 y 4-A.27 en la expresión de la SDR_k queda

$$SDR_k = \frac{\sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \tilde{H}_{m',l,k}^* \left(\frac{\left(\frac{l+1}{P}\right)^{m+m'+1} - \left(\frac{l}{P}\right)^{m+m'+1}}{m+m'+1} \right)}{\sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^O \sum_{m'=0}^O \tilde{H}_{m,l,k} \tilde{H}_{m',l,k}^* \left[\left(\frac{\left(\frac{l+1}{P}\right)^{m+m'+1} - \left(\frac{l}{P}\right)^{m+m'+1}}{m+m'+1} \right) - C_{m,l,k} C_{m',l,k}^* \right]} \quad (4-A.31)$$

Por tanto se han obtenido las expresiones que permiten calcular la SDR de cada portadora a partir de la matriz de coeficientes $a_{n,m,l}$ que define cualquiera de las estructuras expuestas en esta tesis.

Esta ecuación pone claramente de manifiesto que para el caso de usar un único polinomio ($P=1$) la solución es idéntica a la obtenida para la estructura de coeficientes computados. Más complejo es comprobar que para orden cero ($O=0$) la solución es equivalente a la obtenida para la estructura de coeficientes almacenados pero, sin realizar demasiados cálculos, se puede demostrar que en dicho caso el término $\tilde{H}_{m,l,k} \tilde{H}_{m',l,k}^*$ se convierte en $|H_{l,k}|^2$ y que el término $C_{m,l,k} C_{m',l,k}^*$ se convierte en $|\frac{1}{P} \text{sinc}(\frac{\pi k}{LNP})|^2$.

Capítulo 5

Diseño del interpolador

5.1. Introducción

El elemento primordial para realizar la corrección del error en la sincronización es el interpolador, filtro de coeficientes variables que permite introducir en la señal distintos retardos fraccionarios. Su uso hace posible compensar con precisión las desviaciones en el instante de muestreo que producen las pequeñas diferencias de frecuencias del transmisor y receptor. En el caso concreto de los sistemas DMT el interpolador debe ofrecer unas prestaciones muy elevadas si se desea aprovechar al máximo la capacidad del canal para sistemas de alta velocidad.

Una de las primeras referencias relacionada con interpoladores digitales es [Croch75], en la que se aborda por primera vez en profundidad el problema del diseño de un filtro de retardo fraccionario. Otra de las de las más importantes entre las pioneras es [Rams84], en la que se analiza el problema de la modificación de la frecuencia de muestreo mediante un filtro de coeficientes variables. En este trabajo se estudian varias opciones para el diseño del interpolador: a partir de la respuesta al impulso del filtro ideal; usando los polinomios de Lagrange e incluso aplicando el criterio de mínimo error cuadrático medio, partiendo del conocimiento de la función autocorrelación estadística de la señal que hay que convertir. Aunque no se desarrolla plenamente, también se propone la computación de los coeficientes mediante polinomios, basándose en los desarrollos de Taylor de las expresiones de los coeficientes del filtro obtenidas mediante los métodos anteriores. Otra de las referencias más importante es [Farr88]. En este artículo se propone de partida el uso de polinomios para el cálculos de los coeficientes del interpolador, así como una realización eficiente, expuesta en el capítulo 3 con el nombre de estructura de coeficientes computados. Además se describe un método para el diseño de estos interpoladores basado en calcular las coeficientes de los polinomios que minimicen el error cuadrático medio de la respuesta en frecuencia en la banda de interés, comparándola con la respuesta del interpolador ideal.

Por otro lado, los interpoladores clásicos como el de Lagrange o β -*Spline* no se han

analizado desde la perspectiva de filtros de coeficientes variables hasta hace pocos años. Ejemplos de artículos en los que se encuentra este enfoque para interpoladores de Lagrange son [Erup93], [Meij99] o [Demp00], y [Dool99], y en [Unse93] y [Unse93b] para interpoladores *B-Spline*, siendo estos dos últimos auténticos referentes en lo relacionado con su aplicación al procesamiento de señal.

En los últimos tiempos han aparecido múltiples artículos en los que se proponen distintos métodos de diseño. En [Zivo93] se presenta una técnica basada en el criterio de mínimo error cuadrático medio de la señal interpolada, con la restricción de que los coeficientes se han de calcular mediante funciones polinómicas. También se han desarrollado procedimientos, como en [Kim97] o [Watk01], que intentan minimizar la probabilidad de error para un determinado receptor. Sin embargo, al tratarse de un problema tan complejo, optan por el criterio subóptimo de minimizar el error cuadrático medio del símbolo recibido. Otra opción planteada en [Dool99] es el diseño a partir de los polinomios B-spline usando la estructura propuesta por Farrow. Además, se ha sugerido el uso de otras funciones para el cómputo de los coeficientes del interpolador como en [Fu00] en el que se propone usar potencias de funciones trigonométricas.

La idea de que la respuesta del interpolador forma parte del canal discreto equivalente y que debía ser considerada en el diseño del receptor ya se expone en [Erup93]. En [Kim97] se considera el uso de un filtro adicional que compense la respuesta del interpolador y sugiere la posibilidad de aplicar un proceso de optimización iterativo para optimizar ambos, tanto el interpolador como el filtro de compensación. La primera referencia donde se considera la presencia del FEQ MMSE para el diseño de interpoladores para sistemas DMT es en [Mart99]. Esta inclusión es de gran importancia, no sólo porque permite alcanzar muy buenas prestaciones con interpoladores de órdenes razonables, al contrario de lo que se afirma en [Poll99], también porque modifica radicalmente el criterio de diseño del interpolador para sistemas DMT, como se demuestra en este capítulo 4.

Partiendo del análisis del capítulo 4, en este capítulo se propone un método de diseño de interpoladores orientado a sistemas DMT. Este método se basa en la optimización la SDR usando un criterio a priori. Para simplificar la optimización se restringe la posible solución a una familia de filtros continuos originales diseñados mediante una variante de la técnica de enventanado de la respuesta al impulso del filtro ideal.

Una vez desarrollado el método se presentan los resultados obtenidos variando los parámetros de diseño propuestos: tipo de ventana, número de coeficientes del filtro, orden de los polinomios, número de polinomios por coeficiente, etc. También se cotejan los resultados obtenidos analíticamente con los obtenidos mediante simulación. Por último estos resultados se contrastan con los que se logran con interpoladores clásicos y con el método de corrección de sincronización basado en el *rotor*, descrito en el capítulo anterior.

5.2. Método de diseño de los interpoladores

A continuación se expone un método de diseño de los interpoladores optimizado para sistemas DMT. Por su complejidad, al concurrir varias técnicas relativas a la síntesis y optimización de filtros digitales, conviene dividir el problema en varias partes.

En primer lugar hay que concretar el criterio de diseño. Para establecerlo se considerarán algunos aspectos prácticos relativos a las peculiaridades del sistema DMT, a la complejidad del método de diseño que derivaría y a la dificultad para la realización del interpolador.

A continuación se propone una técnica que permite sintetizar el filtro continuo original, derivada de la conocida técnica de enventanado para filtros FIR. Se explican sus ventajas desde el punto de vista de la optimización del diseño y se plantean algunas consideraciones sobre las ventanas más convenientes.

También se detalla un procedimiento general para calcular los coeficientes de la estructura a partir de la respuesta al impulso continua - objetivo final del proceso - que sirve para cualquiera de las estructuras propuestas en el capítulo 3.

Por último, se expone el proceso de optimización, explicando cómo conjugar la técnica de síntesis mediante enventanado, el procedimiento de cálculo de los coeficientes y los métodos iterativos de búsqueda de máximos/mínimos, e incluyendo aquellas particularidades que puedan facilitar la realización de los interpoladores según la plataforma *hardware* disponible.

5.2.1. Criterio de diseño

Cualquier método de diseño de filtros necesita establecer un criterio que lo gobierne. En el caso de un interpolador para un sistema DMT no es fácil escogerlo, especialmente, teniendo en consideración que dicho criterio conviene que sea un criterio a priori, es decir, independiente de las características del canal. Sólo así se podría diseñar antes de iniciar la comunicación, porque en tiempo de ejecución no sería posible usar un método complejo para el cálculo de los coeficientes del interpolador, y menos aún optimizar la estructura de realización del interpolador para evitar que el coste computacional se dispare.

El criterio que podría parecer más conveniente en primera instancia es el de minimizar la probabilidad de error. Sin embargo, para optimizar el interpolador con este criterio es necesario conocer características del canal, como son el nivel de ruido y la atenuación que sufren los símbolos QAM de cada portadora, lo cuál es incompatible con un criterio a priori.

Como solución de compromiso se puede optar por un criterio orientado a minimizar la distorsión que introduce el interpolador. El problema es que la *SDR* es distinta en cada portadora. Considerar una *SDR* promedio no parece razonable, puesto que cabe la posibilidad de que tenga bastante varianza y, mientras unas portadoras apenas sufran

los efectos del interpolador, otras estén muy afectadas por su distorsión. En esos casos puede ocurrir que, por las características del canal, se estén deteriorando las prestaciones de las portadoras de mayor SNR , con lo que a causa del interpolador habría que reducir considerablemente la velocidad de transmisión.

Por todos estos motivos parece razonable usar la $\min_k\{SDR_k\}$ como medida de las prestaciones del interpolador, para asegurar un nivel máximo de distorsión de los símbolos DMT debido al interpolador. Teniendo en cuenta esta medida, el criterio de optimización es *maximin*, es decir, consiste en maximizar la $\min_k\{SDR_k\}$, y se puede expresar como

$$\max_{h(t)}\{\min_k\{SDR_k(h(t))\}\} \quad (5.1)$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del filtro original del que se derivan los coeficientes del interpolador.

Este criterio condiciona la forma de establecer las especificaciones de diseño para estos interpoladores. Estas se referirán al límite máximo de distorsión que puede introducir, para que no reduzcan significativamente la SER en el rango previsto de atenuaciones y potencia de ruido del canal.

5.2.2. Síntesis mediante la técnica de enventanado

Otro problema que plantea el diseño de los interpoladores es la necesidad de encontrar un proceso de síntesis de la respuesta al impulso $h(t)$ para obtener su forma óptima.

En principio se podría tratar de obtener analíticamente una $h(t)$ que maximice la $\min_k\{SDR_k\}$. La teoría del cálculo variacional [Els77] plantea una ecuación para encontrar la función que maximice la función de coste, pero dada su gran complejidad esta ecuación no se ha podido resolver, por lo que se optó por buscar una solución más sencilla.

Una forma de simplificar el proceso de diseño sería tratar de determinar directamente los coeficientes que definen cualquiera de las estructuras presentadas para el interpolador: los coeficientes del interpolador de la estructura de coeficientes almacenados, o los coeficientes de los polinomios de las estructuras de coeficientes computados o híbrida. A partir de estos coeficientes se puede calcular la $\min_k\{SDR_k\}$ y buscar sus valores óptimos mediante algoritmos iterativos. El inconveniente es que, para lograr la $\min_k\{SDR_k\}$ suficiente, puede ser necesario un número de coeficientes relativamente elevado, lo que supone un gran problema para la convergencia del algoritmo de optimización. Además, si se representa la función a maximizar se observa que presenta un gran número de máximos locales, lo que obliga a escoger bien el valor inicial para obtener una solución, si no óptima al menos suficientemente buena.

La forma más sencilla de solventar este problema es usar familias de curvas $h(t)$ de las que quepa esperar buenos resultados para el interpolador y que a la vez se puedan definir mediante unos pocos parámetros. De esta forma, aunque el resultado final no sea óptimo, ya que se restringe el conjunto de posibles soluciones, el número de parámetros a

calcular es reducido, tarea mucho más sencilla mediante algoritmos de optimización. En conclusión, el criterio de diseño modificado sería

$$\max_{\nu} \{ \min_k \{ SDR_k(\nu) \} \} \quad (5.2)$$

donde ν representa el conjunto de parámetros de diseño que determinan cada una de las respuestas $h(t)$ de la familia de respuestas propuestas. Cada uno de los parámetros de este conjunto ν tienen un rango acotado en el que es posible obtener resultados razonables, lo que facilita una primera fase de búsqueda exhaustiva para, posteriormente, refinar la solución mediante un algoritmo iterativo. Este procedimiento no permite asegurar que el resultado sea óptimo, pero sí lograr muy buenas prestaciones.

Una de las posibilidades para diseñar una respuesta al impulso finita $h(t)$ es usar la técnica del enventanado, variante de la técnica usada para los filtros FIR. Mediante este método se calcula la respuesta al impulso continua $h(t)$ a partir de la respuesta impulsiva de un filtro paso bajo ideal. Como su respuesta tiene forma de función $\text{sinc}(x)$ es de duración infinita, por lo que se hace necesario recortarla, para lo cual se usa una ventana $w(t)$ de anchura igual a la duración de la respuesta deseada del filtro MT_M/L . Para que el interpolador sea causal la respuesta se retrasa previamente un periodo igual a $MT_M/(2L)$. Siguiendo estos pasos se obtiene la expresión

$$h(t) = \frac{\text{sen} \left(\omega_c \left(t - \frac{MT_M}{2L} \right) \right)}{\pi t} w(t) \quad (5.3)$$

donde $w(t) \neq 0$ únicamente para $0 \leq t < MT_M/L$.

Existen multitud de ventanas $w(t)$ para diseñar estos filtros, como se observa en la figura 5.1. Unas tienen una forma fija, como es el caso de las ventanas de Hammning, Hanning o Blackman [Oppe89], aunque pueden reescalarsen en el tiempo para lograr la duración deseada. Otras, como las ventana de Kaiser [Kais80] o Chebyshev [Saram91], tienen un parámetro que introduce un mayor grado de libertad en su forma. Tanto la denominación de este parámetro (típicamente β para ventana de Kaiser y R para ventana de Chebysev) como su rango de posibles valores son muy distintos para cada ventana. Sin embargo, el efecto que su modificación produce en la forma de la ventana, como se observa en la figura, es muy similar. Para simplificar la nomenclatura, el parámetro de forma se denominará a partir de ahora F , independientemente de la ventana usada.

En la figura 5.2 se observa que el módulo de la transformada de Fourier $|W(\omega)|$ de estas ventanas consta de un primer lóbulo principal y una serie de lóbulos secundarios de mucha menor amplitud. La anchura del lóbulo principal y la amplitud de los lóbulos secundarios están relacionadas con los dos parámetros que es posible modificar de la ventana: la anchura de la ventana MT_M/L y el parámetro de forma F .

Por un lado, modificar la duración de la ventana MT_M/L sólo provoca una expansión/compresión temporal de su forma, lo que a su vez da lugar a una compresión/expansión de $|W(\omega)|$ en el eje de frecuencia. Por tanto, el ancho del lóbulo principal decrece al aumentar la duración de la ventana.

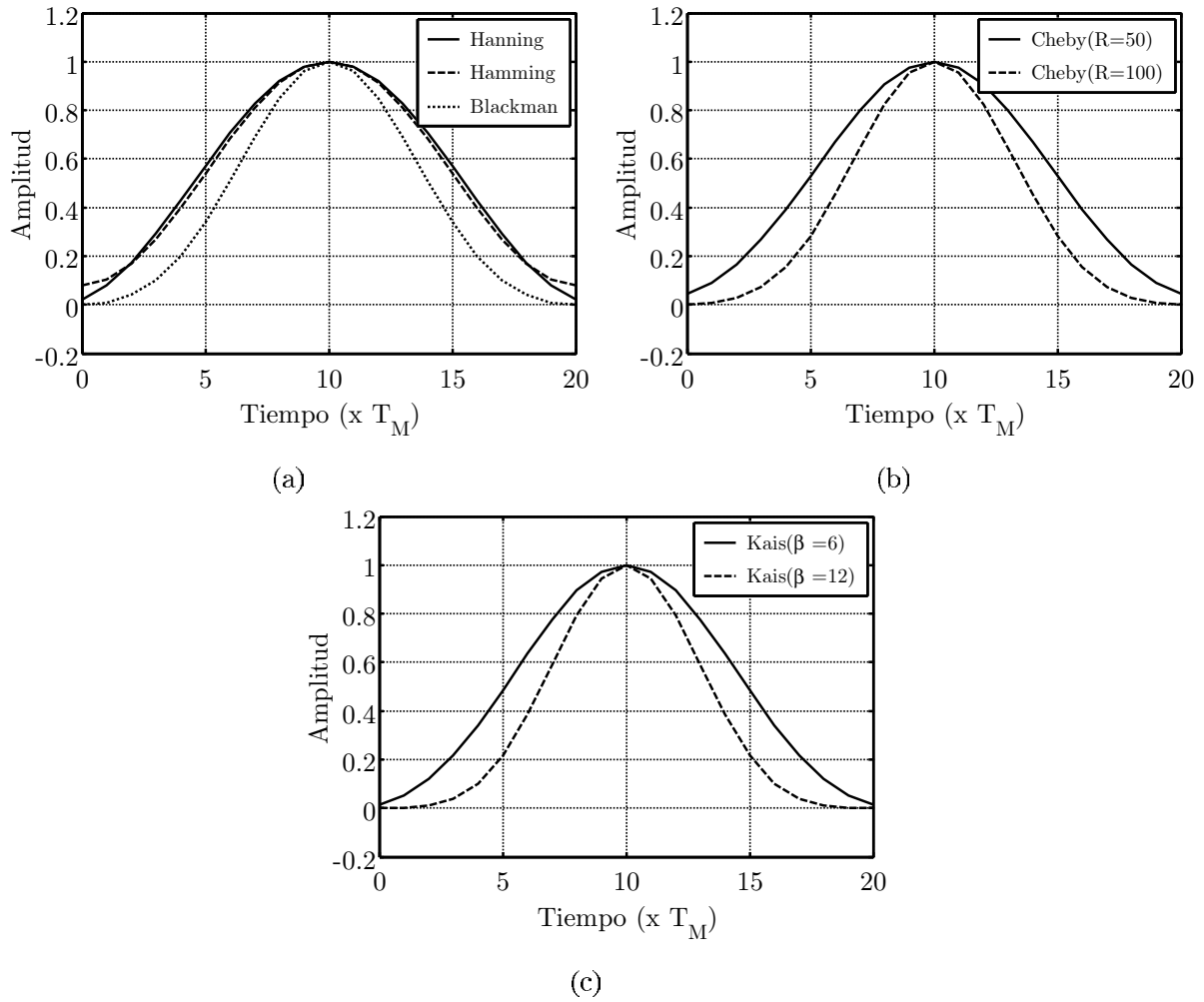


Fig. 5.1: Forma de las Ventanas de duracion MT_M ($M = 20$): (a) Hanning, Hamming y Blackman, (b) Chebysev ($R=50$ y 100) y (c) Kaiser ($\beta=6$ y 12)

Por otro lado, existe cierta relación entre el parámetro de forma F y tanto la amplitud de los lóbulos secundarios como la anchura del lóbulo principal. En concreto, a mayor valor del parámetro de forma F menor amplitud tienen los lóbulos secundarios y mayor es la anchura del lóbulo principal. El problema que plantean estas últimas relaciones, de cara a su uso en el diseño de filtros, es que no existen expresiones analíticas que las determinen más que de forma muy aproximada.

A tenor de la figura 5.2, sobre lo que no queda duda es que las ventanas que tienen lóbulos secundarios de menor amplitud son precisamente aquellas que poseen el parámetro de forma F en su definición.

El proceso de enventanado equivale en el dominio de la frecuencia a la convolución periódica de la transformada de Fourier de la ventana con la respuesta en frecuencia del filtro ideal. Por este motivo existe una estrecha relación entre las características de la

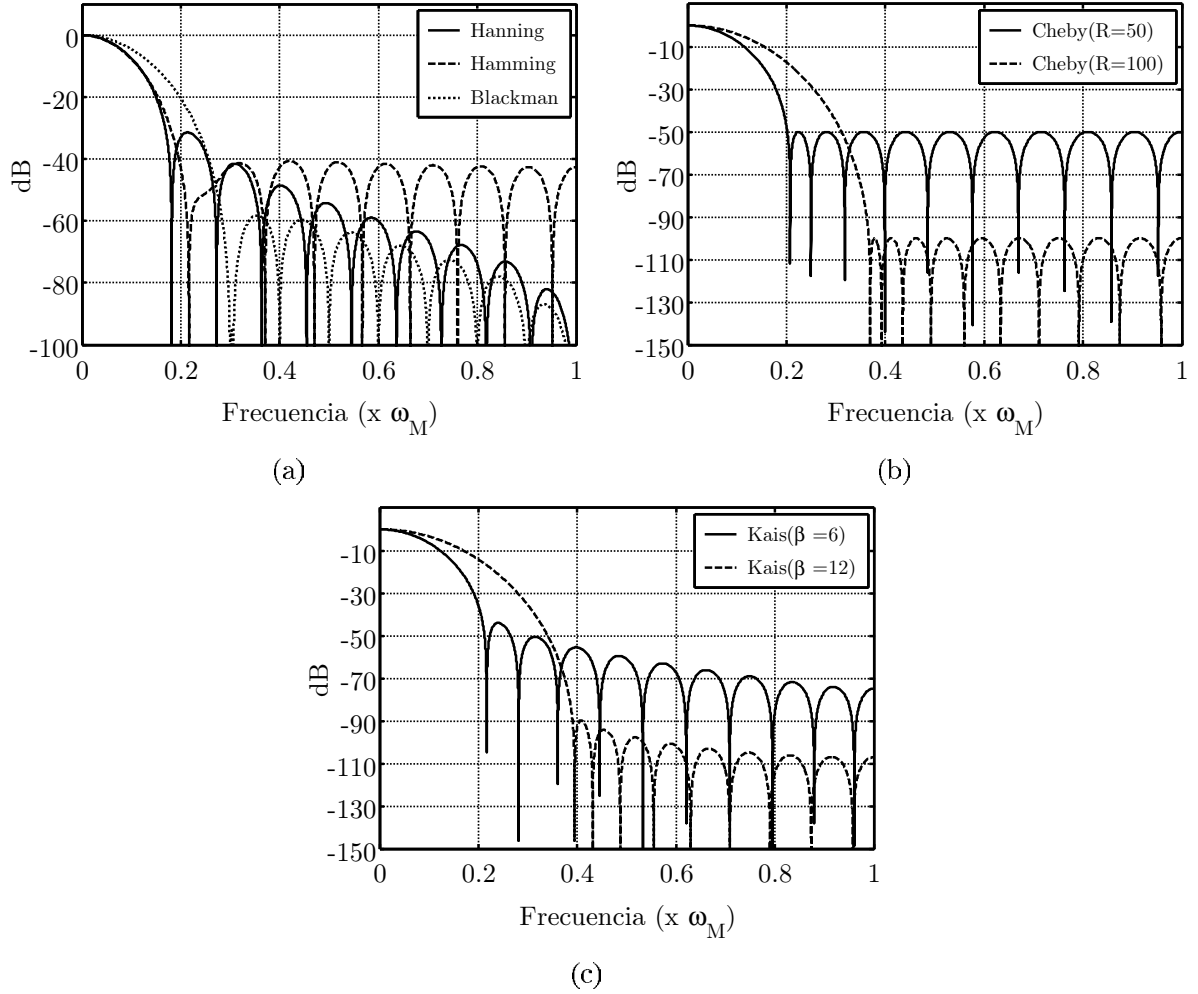


Fig. 5.2: Módulo de la transformada de Fourier de las ventanas de duración MT_M ($M=20$): (a) Hanning, Hamming y Blackman, (b) Chebysev ($R=50$ y 100) y (c) Kaiser ($\beta=6$ y 12)

respuesta en frecuencia del filtro obtenido y la transformada de Fourier de la ventana utilizada. Tanto la anchura de la banda de transición como la atenuación en la banda de rechazo del filtro dependen de la anchura del lóbulo principal y la amplitud de los lóbulos secundarios de $|W(\omega)|$ respectivamente [Oppe89]. Es decir, a mayor anchura del lóbulo principal mayor anchura de la banda de transición, y a menor amplitud de los lóbulos secundarios mayor atenuación en la banda de rechazo. De nuevo estas relaciones no se pueden expresar analíticamente de forma precisa, lo que complica el diseño de los filtros usando esta técnica.

De las conclusiones obtenidas en el capítulo 4 se deduce que se obtienen mejores resultados con los filtros cuya respuesta en frecuencia $H(\omega)$ alcanza una mayor atenuación en la banda de rechazo con respecto a la de la banda de paso. Como la mayor atenuación, usando la técnica de enventanado, se logra con la $|W(\omega)|$ de menor amplitud en los lóbulos

secundarios, parece lógico suponer que los mejores interpoladores tienen que ser diseñados con las ventanas que cuentan con el parámetro de forma F . Los resultados que se presentan en apartados posteriores obtenidos con distintas ventanas corroboran esta suposición.

5.2.3. Cálculo de los coeficientes de la estructura

Para realizar la optimización que requiere el diseño del interpolador es necesario calcular la SDR_k a partir de alguna de las expresiones descritas en 4-A. Dicho cálculo puede realizarse a partir de la respuesta impulsiva $h(t)$ mediante la ecuación 4-A.10, o a partir de los coeficientes de la estructura, usando las expresiones 4-A.24, 4-A.16 o 4-A.31. La primera opción es la que evidentemente plantea mayor complejidad, ya que requiere el cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original. Además no tiene utilidad directa, ya que, sea cual sea la estructura empleada, en la práctica la función $h(t)$ se aproxima mediante uno u otro método. Si se usa directamente la $h(t)$ para el cálculo de la SDR_k el error de esta aproximación no se habrá considerado en el proceso de optimización. Para poder hacerlo es necesario que durante la optimización se calculen los coeficientes de la estructura y se usen para el cálculo de la SDR_k .

A continuación se expone un método general para el cálculo de los coeficientes para cualquiera de las estructuras. El desarrollo de este método se ha basado en las expresiones usadas para la estructura híbrida, descritas en el apartado 3.4.4. Como el resto de las estructuras pueden considerarse casos particulares de ésta, el método es extensible a todas ellas.

Posteriormente se expondrá el método para la cuantificación de los coeficientes de la estructura, que permitirá diseñar interpoladores con coeficientes de precisión reducida.

Ajuste polinómico

Según el teorema de Taylor, en general son necesarios polinomios de orden infinito para lograr un ajuste perfecto a cada segmento de duración $\frac{T_M}{LP}$ de la respuesta continua $h(t)$. Como en la práctica el orden del polinomio está limitado por su coste computacional, la única posibilidad que resta es aproximar lo más posible cada polinomio $F_{k,l}$, que es uno de los P polinomios que permite calcular el coeficiente del interpolador $h_\mu[k]$, a cada segmento de duración $\frac{T_M}{LP}$ de la respuesta continua $h(t)$, de modo que

$$h_\mu[k] = F_{k,l}(\mu) = \sum_{m=0}^O a_{k,m,l} \mu^m \approx h((k + \mu)T_M/L) \quad (5.4)$$

donde μ se encuentra en el intervalo $[\frac{l}{P}, \frac{l+1}{P})$.

Resulta muy complicado establecer un criterio óptimo para realizar este ajuste, dado que la relación entre el error cometido en la aproximación y la pérdida de prestaciones

del interpolador es muy compleja. Definiendo el error de la aproximación como

$$e(t) = e((k + \mu)T_M/L) = F_{k,l}(\mu) - h((k + \mu)T_M/L) \quad (5.5)$$

para $0 \leq t \leq (M - 1)T_M/L$, parece lógico pensar que la pérdida de prestaciones del interpolador no dependen únicamente de la magnitud media de dicho error, también dependen de su variación con μ , ya esta variación condiciona a su vez el error en la respuesta en frecuencia obtenida frente a la respuesta en frecuencia pretendida $H(\omega)$. Como se ha considerado demasiado complejo tratar de desarrollar un método que minimice el impacto de dicho error se ha optado por realizar un ajuste que minimice el error cuadrático medio, que al menos reduce su magnitud media lo más posible.

Para llevar cabo este método es necesario tomar muestras de la respuesta al impulso continua $h(t)$ que sirvan de referencia para realizar el ajuste. Para calcular los coeficientes $a_{k,m,l}$ del polinomio $F_{k,l}(\mu)$ se definen una serie de instantes $t_{k,l,n}$ de la forma

$$t_{k,l,n} = (k + \mu_n)T_M/L \quad (5.6)$$

donde μ_n toma valores en el intervalo $[\frac{l}{P}, \frac{l+1}{P})$.

Si se desea que los polinomios presenten simetría los instantes deberán ser

$$t_{k,l,n} = (k + \mu'_n + 1/2)T_M/L \quad (5.7)$$

donde μ'_n toma valores en el intervalo $[\frac{l}{P} - 1/2, \frac{l+1}{P} - 1/2)$

A partir de estos instantes $t_{k,l,n}$ y los valores de la respuesta al impulso continua $h(t_{k,l,n})$ correspondientes es posible plantear el sistema de ecuaciones lineales

$$h(t_{k,l,n}) = \sum_{m=0}^O a_{k,m,l} \mu_n^m \quad (5.8)$$

donde los coeficientes $a_{k,m,l}$ son las incógnitas a calcular.

El número de instantes $t_{k,l,n}$ de cada polinomio $F_k(\mu)$ debe ser mayor que el orden del polinomio O , de modo que el sistema tenga al menos tantas ecuaciones como incógnitas. La matriz que define este sistema de ecuaciones es de Vandermonde, por lo que a priori se conocen algunas de sus características. En primer lugar, se sabe que en el caso de tomar un número de ecuaciones igual a $O + 1$ el sistema será determinado y tiene solución única, denominada polinomio interpolador de Lagrange [Burd85]. En el caso de que sea mayor el sistema puede estar sobredeterminado y no tener solución, por lo que en general sólo se puede obtener una solución de error cuadrático medio mínimo.

Con este método quedan abiertas muchas posibilidades en cuanto al número y la posición de estos instantes $t_{k,l,n}$. Por simplicidad, ante la ausencia de un criterio más justificado, se han tomado instantes $t_{k,l,n}$ con valores de μ_n equidistribuidos en el intervalo $[0,1)$ o $[-1/2, 1/2)$, según corresponda.

El número de estos instantes $t_{k,l,n}$ se define como $(O + 1)K$, donde la constante K es un factor que incrementa el número mínimo de muestras $O + 1$ necesarias para realizar el ajuste de la respuesta al impulso $h(t)$. A priori este parámetro K podría considerarse de influencia en las prestaciones del interpolador porque, a mayor número de instantes usados, más próxima a la curva original será la referencia del sistema de ajuste. No obstante, como la relación entre el error en el ajuste y las prestaciones del interpolador no son tan directas, no es posible concluirlo. En los resultados que se expondrán en apartados posteriores se pone de manifiesto que, si bien al aumentar este número los resultados mejoran, dicha mejora no es demasiado relevante.

Cuantificación de los coeficientes de la estructura

El único método sencillo para acotar el número de bits de precisión de los coeficientes de la estructura se basa en cuantificar con el número de bits deseado los valores obtenidos en el proceso de ajuste polinómico, ante la dificultad que supone imponer esta limitación a los coeficientes en el proceso de ajuste.

El procedimiento para cuantificarlos con un número de bits n es sencillo. En primer lugar se dividen todas los coeficientes por aquel que tenga mayor valor absoluto, normalizándolos de modo que todas queden en el intervalo $[-1, 1]$. Después se multiplica por un valor C que ha de ser menor o igual que el entero máximo representable mediante n -bits, es decir, menor o igual que $2^{n-1} - 1$. Por último, los valores obtenidos se redondean al entero más próximo, con lo que todas los coeficientes tienen valores enteros menores que $2^{n-1} - 1$ y, por tanto, son representables con n -bits de precisión.

El hecho de que las prestaciones del interpolador se vean más o menos reducidas por la cuantificación de los coeficientes depende, fundamentalmente, de si las relaciones entre distintos coeficientes se pueden aproximar bien mediante valores racionales sencillos. Si esto ocurre, y se multiplica por la constante C adecuada, el error que se comete al redondear es pequeño y, por tanto, reducida la pérdida de prestaciones del interpolador.

De todos modos hay que distinguir entre dos casos muy distintos, según si la estructura elegida es de coeficientes almacenados o es de coeficientes computados o híbrida.

En el caso de estructuras de coeficientes almacenados, cuantificar los coeficientes de la estructura equivale a cuantificar las muestras de las distintas respuestas impulsivas del interpolador $h[l, n]$. Si al elevar el número de respuestas se mejoran las prestaciones del interpolador por tener una aproximación más ajustada a la respuesta al impulso original $h(t)$, el hecho de cuantificar con pocos bits equivale a reducir el número de respuestas distintas. Esto se debe a que después de cuantificar pueden repetirse muchas de dichas respuestas si sus valores originales, aunque distintos, pertenecen al mismo intervalo de cuantificación. Por ese motivo no es lógico reducir demasiado el número de bits de cuantificación para estas estructuras, porque diezmaría drásticamente el número de respuestas distintas, y por tanto las prestaciones del interpolador. De todas formas, las realizacio-

nes eficientes de estas estructuras tampoco lo requieren. Para aprovechar mejor el hecho de que uno de los operandos tenga un número de bits muy reducido es necesario usar distintas unidades multiplicadoras para realizar el producto por cada coeficientes, y en las realizaciones eficientes de estas estructuras se reutilizan las unidades multiplicadoras porque el número de coeficientes es muy elevado.

Por otro lado, las prestaciones de los interpoladores cuyos coeficientes cuentan con un número no muy elevado de bits de precisión (de 8 a 10 bits) son muy próximas a las que se alcanzan sin aplicar la cuantificación, por lo que es posible reducir la precisión necesaria en la aritmética de la estructura.

En el caso de estructuras de coeficientes computados y estructura híbrida, la cuantificación de los coeficientes no se traduce directamente en una cuantificación de la respuesta impulsiva del interpolador. Además, como el número de coeficientes que requieren estas estructuras para obtener buenas prestaciones es considerablemente menor que en el caso de estructuras de coeficientes almacenados, es más fácil encontrar combinaciones que tengan relaciones muy próximas a números racionales sencillos. Este hecho permite que la cuantificación con un número de bits reducido no afecte demasiado sus prestaciones. Hay que tener en cuenta que son precisamente estas estructuras las que pueden aprovechar mejor este número de bits de precisión reducido, ya que su realización eficiente sí permite usar unidades multiplicadoras distintas para cada producto por constante.

5.2.4. Optimización de los parámetros de diseño

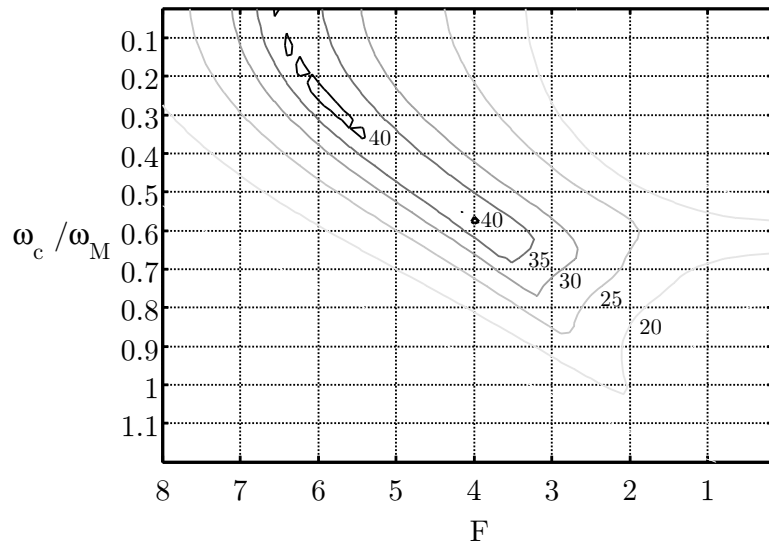
En el método de diseño propuesto en los apartados previos, la respuesta al impulso $h(t)$ se sintetiza usando la técnica de enventanado a partir de uno o dos parámetros (la frecuencia de corte ω_c y, si la ventana elegida lo posee, un parámetro de forma F). Usando dicha respuesta se calculan los coeficientes de la estructura del interpolador siguiendo el procedimiento expuesto en el apartado 5.2.3. A su vez, con estos coeficientes se obtiene la SDR_k usando las expresiones propuestas en el apéndice 4-A.

La optimización de los parámetros ω_c y F se realizará de acuerdo al criterio indicado en el apartado 5.2.1,

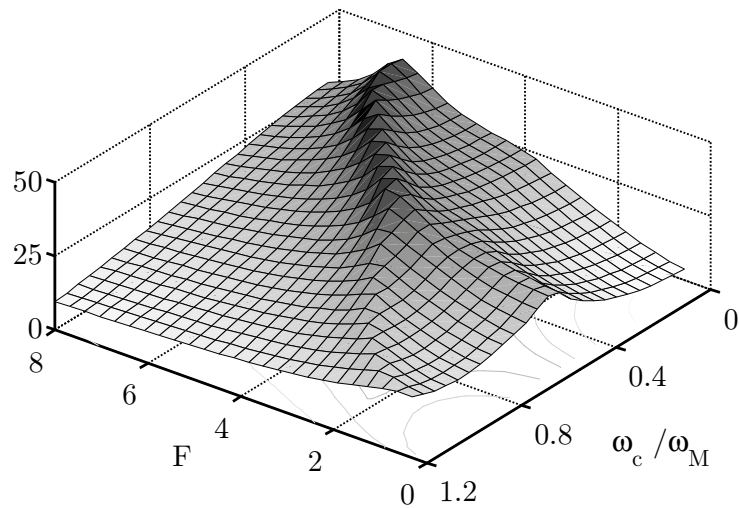
$$\max_{\omega_c, F} \{ \min_k \{ SDR_k(\omega_c, F) \} \} \quad (5.9)$$

En la figura 5.3 se representa un ejemplo de cómo $\min_k \{ SDR_k \}$ depende de ω_c y F para el caso de usar la ventana de Kaiser. En esta figura se observa que la región en la que la mín SDR_k llega a sus máximas cotas abarca un amplio rango de valores de ω_c . Hay que destacar que a medida que los valores de F en esta región aumentan disminuyen los de ω_c . Este comportamiento se repite para cualquiera de las ventanas usadas que poseen el parámetro de forma F , aunque cambie su rango de variación, y tiene una explicación sencilla que se expone en la figura 5.4 y se detalla a continuación.

En primer lugar hay que recordar que la SDR del interpolador puede calcularse mediante la respuesta en frecuencia del filtro continuo $H(\omega)$. La diferencia en dB entre la



(a)



(b)

Fig. 5.3: Representación del $\min\{SDR_k\}$ en dB en función de la frecuencia de corte ω_c normalizada y el parámetro de forma de la ventana F , de un interpolador diseñado mediante ventana de Kaiser: a) curvas de nivel, b) superficie 3-D

atenuación de la banda de paso y la atenuación en la banda de rechazo puede considerarse una primera aproximación de la SDR , tal y como se aprecia en la figura 4.4. También hay tener en cuenta la relación entre el parámetro de forma de la ventana F y las anchuras de las bandas de transición y rechazo, mostrada en la figura 5.2. Si se incrementa el valor de F aumenta la atenuación en la banda de rechazo y se ensancha la banda de transición.

Si ω_c tiene un valor próximo a ω_M , la banda de transición debe ser estrecha para que la banda de rechazo tenga mayor atenuación, por lo que el valor de F debe ser relativamente más pequeño. Sin embargo, si ω_c tiene un valor próximo a cero, la banda de transición puede ser más ancha, lo que significa un valor de F mayor, lo que aumenta también la atenuación en la banda de rechazo. Sin embargo, este aumento de la atenuación no tiene porque incrementar la SDR porque a menudo también se produce un aumento de la atenuación en la banda de paso, como se aprecia en la figura 5.4.

Otra característica importante de las funciones $\min_k\{SDR_k(\omega_c, F)\}$ es que la región en la que alcanza los valores máximos es una región más o menos plana o con muy poca pendiente, y suele contar con varios máximos locales. En el ejemplo de la figura 5.3 se aprecia una amplia región que supera los 40dB de $\min_k\{SDR_k\}$, y dentro de esta región dos máximos, uno para valores de ω_c próximos a $\omega_M/2$ y otro para valores muy próximos a cero. Estas características complican en gran medida la búsqueda del máximo absoluto mediante algoritmos iterativos de optimización.

Por estos motivos, para encontrar los valores óptimos de ω_c y F es conveniente hacer una búsqueda exhaustiva, estableciendo una rejilla sobre el plano formado por ω_c y F . Antes es necesario acotar el rango de valores en el que es razonable encontrar la solución. La frecuencia de corte puede acotarse en el rango entre cero y ω_M , independientemente de la ventana utilizada. El rango de F sin embargo se ha establecido de forma empírica, basándose en la representación de la superficie de $\min\{SDR_k\}$, y es distinto según la ventana utilizada.

En el caso de que los coeficientes de la estructura sean cuantificados para reducir el número de bits de representación, la superficie que determina la $\min_k\{SDR_k\}$ tiene una forma más compleja con multitud de discontinuidades, como se aprecia en la figura 5.5. En estos casos es necesario usar una rejilla de valores aún más tupida, ya que la mejor solución puede ser difícil de encontrar en estas circunstancias.

Gracias a los valores calculados de $\min_k\{SDR_k\}$, en la rejilla se determina la posición aproximada de los máximos locales. A partir de ellos y usando un algoritmo de optimización iterativo se precisa la posición de cada máximo, para terminar escogiendo el mejor de todos los candidatos. En concreto, el algoritmo iterativo usado se basa en el método simplex de Nelder-Mead [Lag98]. Este procedimiento no asegura la localización del máximo absoluto, pero desde el punto de vista práctico permite encontrar un buen resultado si la rejilla es suficientemente tupida.

Por último, se puede mejorar aún más la solución obtenida mediante un nuevo algoritmo de optimización que no restringe las posibles soluciones al no usar la técnica de inventariado para su diseño. Los coeficientes de la estructura obtenidas mediante el proceso descrito hasta ahora se introducen en un algoritmo iterativo de optimización. Éste permite buscar directamente los valores de dichos coeficientes que proporcionan el valor máximo de $\min SDR_k$. El método numérico utilizado es el mismo que el usado para la localización de los valores óptimos de ω_c y F . Este algoritmo es inviable por sí sólo, ya que

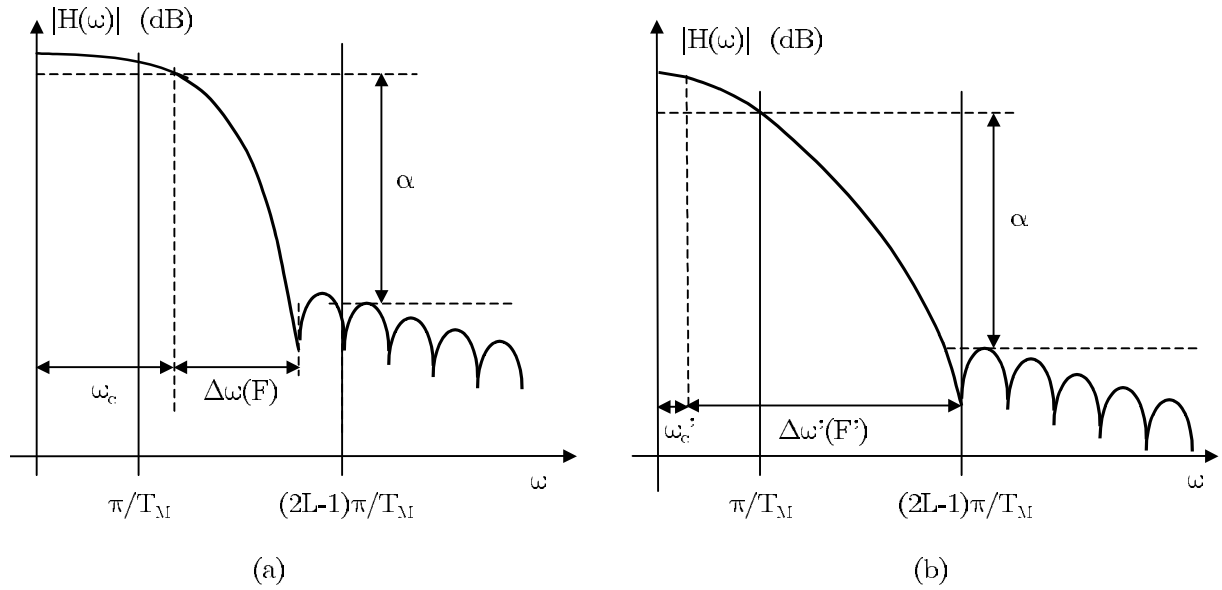


Fig. 5.4: Respuesta en frecuencia del filtro continuo original $H(\omega)$ para: (a) valor de ω_c próximo a ω_M y F bajo, y (b) valor de ω_c próximo a cero y F' alto

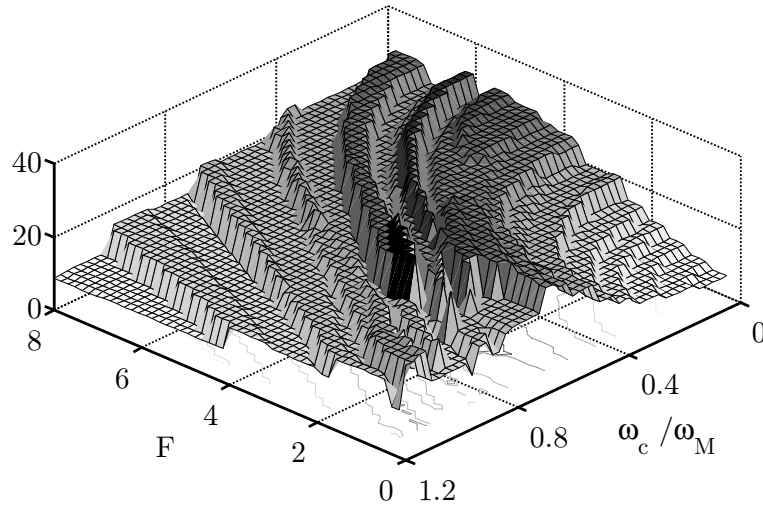
necesita partir de una solución suficientemente buena, por la cantidad de máximos locales y la complejidad de la función a evaluar. Realmente sólo supone un refinamiento de la solución obtenida usando la técnica de inventanado y, como es lógico, tampoco asegura la localización de un máximo absoluto, pero en ocasiones supone un incremento de varios dB en la $\min_k \{SDR_k\}$.

5.3. Evaluación de los resultados del diseño

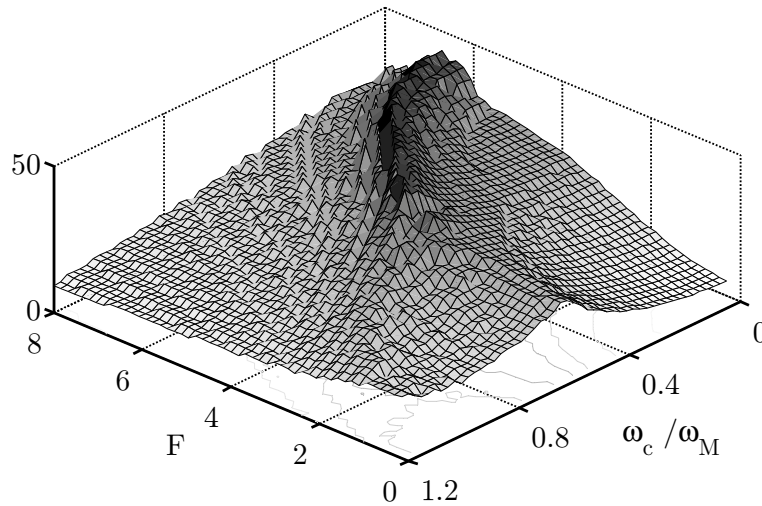
Gracias a la técnica de diseño expuesta en el apartado anterior es posible obtener distintos diseños de interpoladores variando multitud de parámetros. En este apartado se analizará cómo dependen las prestaciones del interpolador de una serie de parámetros, ya sean propios del proceso de diseño o que caracterizan al interpolador.

Se comenzará por estudiar la dependencia de las prestaciones con respecto a los parámetros del método de diseño: el tipo de ventana para el diseño de la respuesta del filtro continuo original $h(t)$ y el número de muestras de dicha respuesta para ajustar el polinomio.

A continuación se realizará un análisis de cómo varían las prestaciones según los valores elegidos de los parámetros básicos que lo caracterizan: el número de coeficientes del interpolador M , el número de polinomios por coeficiente P , el orden de los polinomios



(a)



(b)

Fig. 5.5: Representación del $\min\{SDR_k\}$ en dB en función de la frecuencia de corte ω_c normalizada y el parámetro de forma de la ventana F , de un interpolador diseñado mediante ventana de Kaiser con coeficientes cuantificados con: a) 5 bits , b) 6 bits

O. Así mismo se mostrará una relación sencilla que permite escoger de forma óptima cualquiera de los tres parámetros a partir de los dos restantes.

Finalmente se estimará el impacto que tiene el hecho de imponer a los coeficientes un número reducido de bits de precisión, tanto para la estructura de coeficientes almacenados como para la de coeficientes computados o híbrida.

5.3.1. Evaluación con distintas ventanas

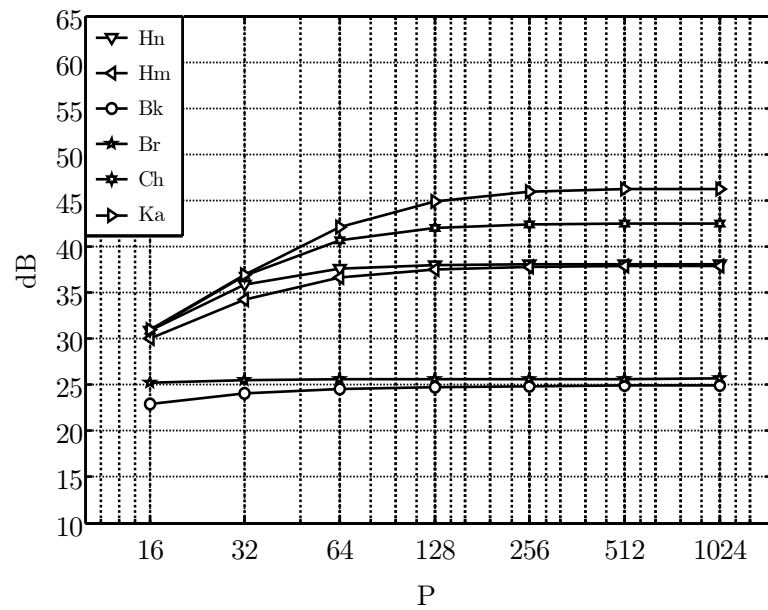
La técnica de síntesis de la respuesta al impulso del filtro continuo $h(t)$ mediante enventanado de la respuesta al impulso del filtro ideal permite el uso de distintas ventanas. Como ya se expuso en el apartado 5.2.2, por las características de la transformada de Fourier de dichas ventanas, cabe pensar que unas permitirán obtener mejores resultados que otras. En concreto, aquellas que poseen un parámetro de forma F deben resultar mejores.

Para poder comparar convenientemente los diseños que se obtienen con una ventana u otra es necesario buscar los parámetros adecuados, de modo que se pueda aislar la dependencia de las prestaciones con la ventana, evitando que influyan parámetros adicionales. En ocasiones los resultados que se obtienen con distintas ventanas son muy similares ya que son otros factores los que limitan sus prestaciones, como el ajuste polinómico que se hace de la respuesta al impulso del filtro continuo $h(t)$.

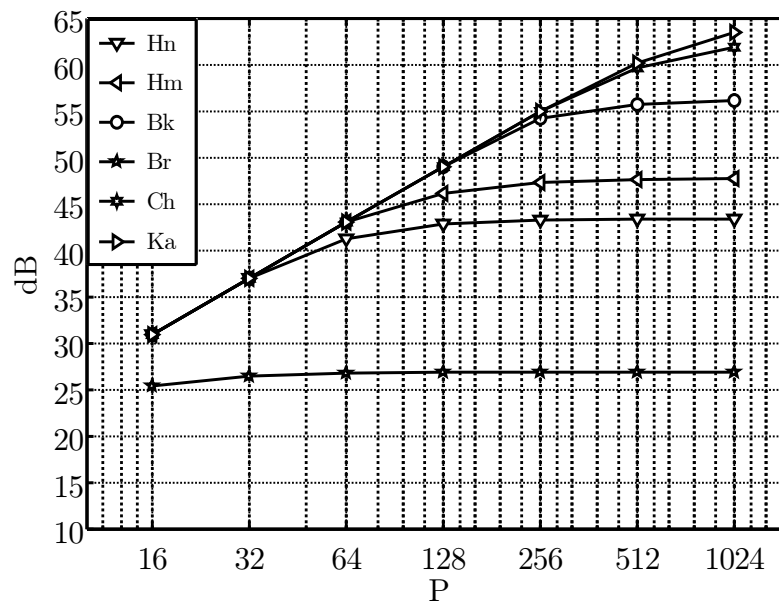
Para evitar este problema se han escogido interpoladores diseñados para una estructura de coeficientes almacenados. El hecho de tener que tomar un número finito de conjuntos de coeficientes del interpolador, o lo que es lo mismo, un conjunto finito de retardos a compensar, provoca cierta pérdida en sus prestaciones, como se pone de manifiesto en la ecuación 4-A.2. Sin embargo, si se incrementa dicho número P se observa que la $\min\{SDR_k\}$ tiende a un límite impuesto por el diseño de la respuesta continua original $h(t)$. Por tanto, a medida que crece el valor de P se aprecia más claramente las prestaciones que es posible obtener con una ventana u otra.

En la figura 5.6 se representa la $\min\{SDR_k\}$ de distintos interpoladores diseñados para la estructura de coeficientes almacenados, con $M = 3$ (figura 5.6(a)) y $M = 4$ (figura 5.6(b)), y P variable entre 16 y 1024. Se aprecia que a medida que P crece la $\min_k\{SDR_k\}$ también lo hace, independientemente del tipo de ventana usada. Sin embargo, a partir de un número de respuestas la $\min\{SDR_k\}$ tiene una asíntota, debido a la limitación que impone la respuesta continua original $h(t)$ de la que se obtienen. Lo que queda patente es que con distintas ventanas los resultados cambian notablemente. Mientras que las ventanas que no poseen parámetro de forma F no alcanzan los 40dB en caso de $M = 3$ y los 60dB para $M = 4$, las ventanas de Chebyshev o Kaiser, que sí lo poseen, superan ampliamente estas cotas, especialmente en el caso de esta última ventana, aproximándose a los 50dB para $M = 3$ y superando claramente los 60dB para $M = 4$.

Además, se aprecia que la diferencia entre unas ventanas y otras se incrementa al aumentar el número de coeficientes. Este fenómeno se puede explicar mediante el análisis de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original $H(\omega)$. Si el número de coeficientes del interpolador M es reducido, la longitud de la ventana $w(t)$ es pequeña con respecto al periodo de muestreo y, por tanto, el lóbulo principal de la transformada de Fourier $W(\omega)$ tiene un ancho relativo a la f_M elevado. En ese caso no es posible aumentar mucho el parámetro de forma F para obtener una atenuación mayor por el incremento de la



(a)



(b)

Fig. 5.6: Representación del $\min\{SDR_k\}$ de distintos interpoladores en función del número de posibles respuestas P , la ventana usada para su diseño - Hanning (Hn), Hamming (Hm), Blackman (Bk), Bartlett (Br), Chebyshev (Ch), Kaiser (Ka) - y el número de coeficientes: (a) $M=3$ y (b) $M=4$

anchura del lóbulo principal que supone. Dicho incremento aumentaría la anchura de la banda de transición, lo que haría inútil el aumento de la atenuación en la banda de rechazo. A medida que el número de coeficientes crece, el ancho relativo del lóbulo principal de

$W(\omega)$ es menor y por tanto es posible incrementar más el parámetro de forma F para lograr mejores resultados. Como esto no es posible con ventanas sin parámetro de forma F , la diferencia entre dichas ventanas y las que si lo poseen se acrecienta a medida que aumenta el número de coeficientes.

En la figura 5.7 se representa la respuesta en frecuencia del filtro continuo $H(\omega)$ y la suma de las réplicas solapadas, de dos interpoladores diseñados con ventana de Kaiser y coeficientes $M = 3$ (figura 5.7(a)) y $M = 4$ (figura 5.7(b)). Como al aumentar el número de coeficientes el ancho relativo del lóbulo principal de $W(\omega)$ se reduce, en las figuras se observa que, es posible aumentar la atenuación en la banda de rechazo aumentando el valor del parámetro de forma β .

De todo lo expuesto en este apartado se concluye que los diseños con las ventanas que poseen parámetro de forma F , tal y como se esperaba, obtienen mejores resultados, especialmente usando la ventana de Kaiser. Por este motivo en adelante sólo se usará dicha ventana para evaluar el resto de parámetros.

5.3.2. Evaluación con distintos ajustes polinómicos

Para diseñar interpoladores para estructuras de coeficientes computados siguiendo el procedimiento propuesto, uno de los parámetros necesarios es el número de muestras de la respuesta al impulso del filtro continuo $h(t)$ para realizar el ajuste polinómico. Como se comentó en el apartado 5.2.3, el número mínimo indispensable para ajustar cada polinomio de orden O es $O + 1$ muestras, aunque este número puede incrementarse para que el ajuste sea más preciso. En general, el número de muestras usadas ha sido $(O + 1)K$, donde la constante K representa un factor de sobremuestreo de la respuesta al impulso $h(t)$ para realizar el ajuste.

En la figura 5.8 se representa la $\min_k \{SDR_k\}$ de dos interpoladores diseñados con distintos valores del factor de sobremuestreo K . Se observa que al aumentar K mejoran ligeramente las prestaciones del interpolador, pero a partir del valor $K = 8$ las mejoras son casi imperceptibles.

De todas formas estos resultados se han obtenido sin realizar la segunda fase del proceso de optimización, que refina los coeficientes de la estructura sin usar la técnica de inventanado. Si a los coeficientes obtenidas se les aplica este otro proceso la diferencia de los resultados dependiendo del valor de K es aún menor de la mostrada en la figura anterior, por lo que este parámetro no ha resultado de especial relevancia en el diseño de los interpoladores. A pesar de todo, para el cálculo de sucesivos interpoladores se ha optado por usar valores elevados de K , entre 16 y 32, para asegurar los mejores resultados posibles.

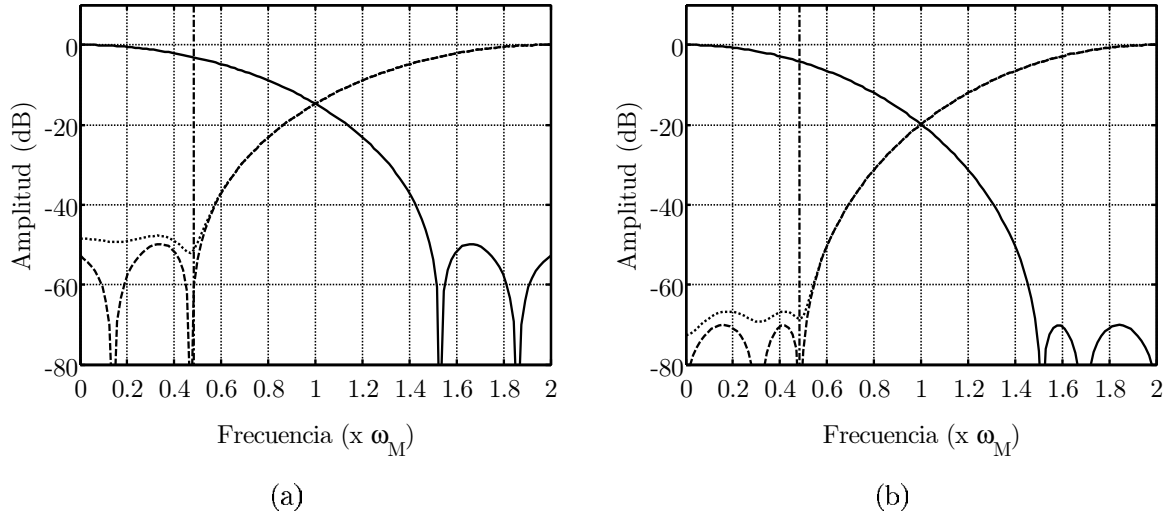


Fig. 5.7: Respuesta en frecuencia del filtro continuo original $H(\omega)$ (línea continua) y de la primera réplica (línea discontinua), así como de la suma de las réplicas solapadas (línea punteada) de un interpolador diseñado para una estructura de coeficientes almacenados ($P=1024$) con ventana de Kaiser y: (a) $M=3$, $\beta=5.87$ y $\omega_c/\omega_M=0.27$; (b) $M=4$, $\beta=8.40$ y $\omega_c/\omega_M=0.17$

5.3.3. Evaluación con distintos números de coeficientes, polinomios y órdenes

Los parámetros evaluados hasta ahora sólo influyen en las prestaciones del interpolador, por lo que para su elección basta con el criterio descrito en el apartado 5.2.4. Sin embargo, el número de coeficientes M , el número de polinomios por coeficiente P y el orden de dichos polinomios O condicionan completamente su complejidad, por lo que en su elección confluyen más factores a tener en cuenta, como las limitaciones *hardware* de la plataforma disponible. Por este motivo, el estudio que se ha realizado sobre estos parámetros se ha dirigido, no a buscar sus valores óptimos, sino a encontrar las relaciones que existen entre ellos y las prestaciones del interpolador, lo que facilita que el diseño contemple tanto las prestaciones como el coste computacional.

Para tratar de obtener las relaciones óptimas entre unos parámetros y otros se ha realizado el diseño de un amplio conjunto de interpoladores. De este modo se puede representar mediante una serie de curvas cómo evolucionan las prestaciones del interpolador al variar cualquiera de estos parámetros, manteniendo los demás constantes. Para todas estas curvas se observa un comportamiento asintótico a medida que crece la variable observada. Con el fin de establecer las relaciones óptimas entre los distintos parámetros interesa determinar aquellos valores de la variable observada a partir del cual el incremento de las prestaciones es tan pequeño que no compensa el aumento del coste computacional que supone.

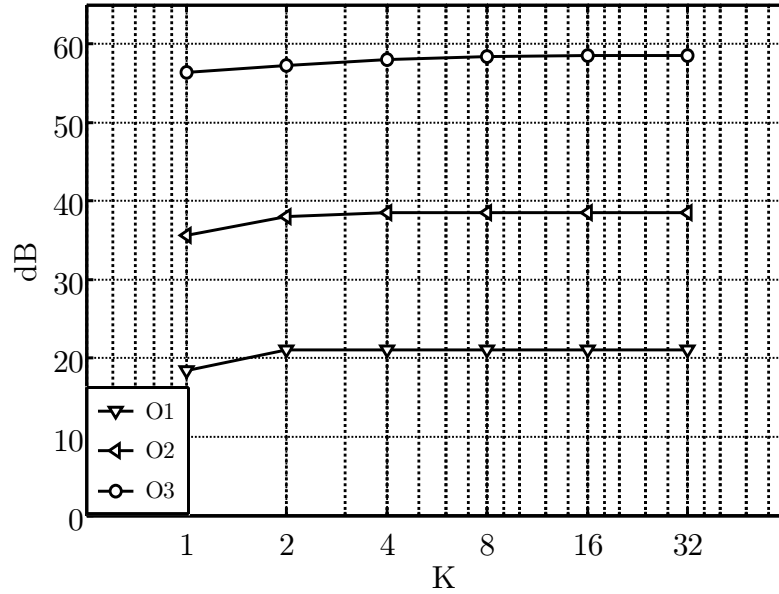


Fig. 5.8: Representación del $\min_k\{SDR_k\}$ en dB en función del factor de sobremuestreo K de la respuesta continua original para realizar el ajuste polinómico de un interpolador diseñado para estructura de coeficientes computados con $M=3$ y $O=1, 2$ y 3

Por otro lado, sería conveniente calcular los límites teóricos de las prestaciones del interpolador para distintos valores de estos parámetros, porque permitiría comprobar si coinciden con las asíntotas observadas en los interpoladores diseñados. De ser así, aunque no se puede afirmar que el método de diseño es óptimo, se puede constatar que no queda muy lejos. Tanto la estrategia utilizada, como los desarrollos matemáticos necesarios para obtener estos límites para algunos tipos de interpoladores se describen en el apéndice 5-A. En este estudio se ha buscado la $\max\{SDR_k\}$ que para un determinado orden O y número de polinomios P se puede obtener independientemente del número de coeficientes M .

Al establecer las relaciones entre los distintos parámetros, conviene separar dos casos distintos en este análisis, según sea la estructura a utilizar: por un lado la estructura de coeficientes almacenados, y por otro las estructuras de coeficientes computados e híbrida. Realmente esta clasificación también puede expresarse en función del parámetro del orden de los polinomios de cada coeficiente del interpolador O , que en el primer caso es $O = 0$ y en el segundo es $O \neq 0$. En el primer caso ($O = 0$) sólo es posible modificar el número de coeficientes M y el número de posibles respuestas del interpolador P , y en el segundo se puede modificar también el orden O .

En la figura 5.9 se representa la $\min\{SDR_k\}$ de interpoladores correspondientes al primer caso, diseñados con distintos valores de P y M . Se puede apreciar que para cualquier valor de M la $\min\{SDR_k\}$ se incrementa aproximadamente en 6dB por cada vez

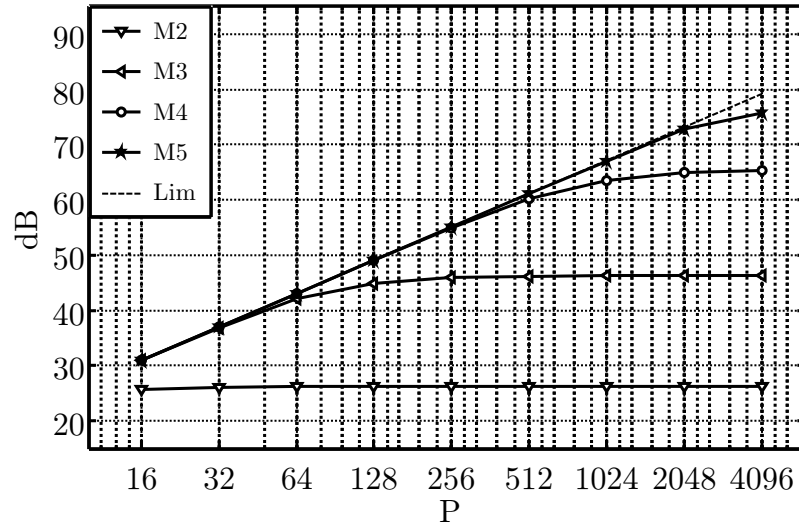


Fig. 5.9: Representación del $\min\{SDR_k\}$ en dB en función del número de posibles respuestas del interpolador P y del número de coeficientes $M=2, 3, 4$ y 5 , así como el límite teórico (Lim) que queda en gran parte oculto por las demás curvas

que se duplica el valor de P , ajustándose al límite teórico, cuyo cálculo se expone en el apartado del apéndice 5-A.1. Sin embargo, a partir de un determinado valor de P este crecimiento se reduce, tendiendo a una asíntota o valor límite, que representa la máxima $\min_k\{SDR_k\}$ que se pueden obtener con un interpolador de este tipo con M coeficientes.

Este comportamiento tiene una sencilla explicación. La expresión del límite máximo de la SDR_k para este tipo de interpoladores obtenida en 5-A.1 es

$$\max\{SDR_k\} = \frac{1}{1 - \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi k}{LNP}\right) \right|^2} \quad (5.10)$$

A partir de la expresión 5.10 se puede extraer el $\min_k\{\max\{SDR_k\}\}$ de un interpolador con un número de respuestas P , representada en la figura 5.9. Como se trata de una función que decrece al incrementar el valor de k , su valor mínimo coincidirá con la última portadora $k = N/2$, por lo que la $\min_k\{\max\{SDR_k\}\}$ es

$$\min_k\{\max\{SDR_k\}\} = \frac{1}{1 - \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2LP}\right) \right|^2} \quad (5.11)$$

En la figura 5.10 se representan las SDR_k de una serie de interpoladores con un número de respuestas distintas $P = 64$ y número de coeficientes $M=2, 3$ y 4 . Además, se ha representado el límite teórico expuesto en la expresión 5.10. Se aprecia claramente que a medida que aumenta el número de coeficientes del interpolador la SDR_k se va aproximando progresivamente al límite teórico, ya que el error predominante es el debido al número finito de posibles respuestas. De hecho no se ha representado la SDR_k de

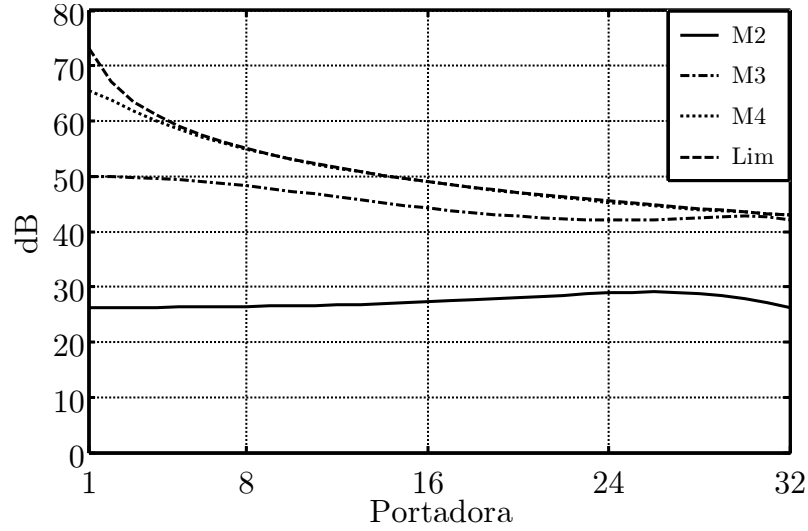


Fig. 5.10: Representación del SDR_k en dB en para interpoladores de coeficientes almacenados, con $P = 64$ y $M = 2, 3$ y 4 , así como su límite teórico (Lím)

interpoladores con un número de coeficientes mayor porque casi no pueden distinguirse del límite teórico.

El otro grupo de interpoladores a analizar es el de los diseñados para estructura de coeficientes computados y estructura híbrida ($O \neq 0$). En este caso los parámetros a diseñar son el número de coeficientes M , el número de polinomios por coeficiente P y el orden de los polinomios O .

Los resultados más significativos del diseño de este tipo de interpoladores se representan en la figura 5.11. En ella pueden observarse las $\min\{SDR_k\}$ de distintos interpoladores con un número de coeficientes $M=2, 3, 4, 5$ y 6 , número de polinomios $P=1$ y 2 y órdenes de polinomios $O=1, 2$ y 3 . Como era de esperar, a medida que aumentan el número de coeficientes, polinomios y órdenes, aumenta la $\min_k\{SDR_k\}$. Sin embargo, para una determinada combinación de número de polinomios P y orden de los polinomios O se observa la existencia de un número de coeficientes M_{max} a partir del cual las prestaciones del interpolador no mejoran, ya que su limitación principal es la imperfección del ajuste polinómico que se realiza. Analizando los resultados se observa una curiosa relación entre el valor de este número de coeficientes M_{max} y el número de polinomios y órdenes

$$M_{max} = \lfloor O + \log_2(P) + 1 \rfloor \quad (5.12)$$

Esta relación obtenida de forma heurística sólo tiene validez para valores de P pequeños. A medida que este valor aumenta el valor de M_{max} se desplaza ligeramente, lo que hace pensar que la relación puede expresarse de forma más general como

$$M_{max} = \lfloor O + R_1 \log_2(P) + R_2 \rfloor \quad (5.13)$$

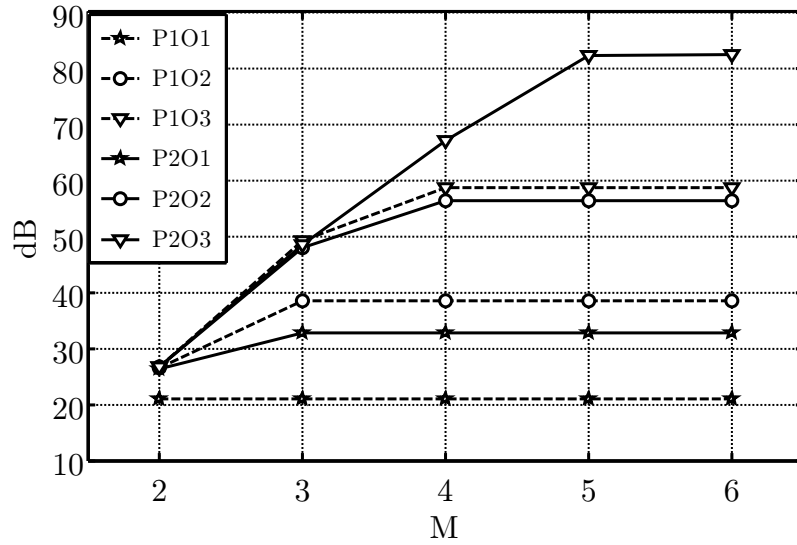


Fig. 5.11: Representación del $\min\{SDR_k\}$ en dB en función del número de coeficientes M , del número de polinomios P y del orden O de los polinomios del interpolador

donde R_1 y R_2 son dos constantes a determinar. De todas formas, para lograr una realización de este tipo de interpoladores con un coste computacional razonable no es lógico incrementar demasiado el número de polinomios P , por lo que no tiene demasiado interés determinar con precisión estas constantes, es decir, que la expresión 5.12 es suficiente para que el diseñador conozca el límite del número de coeficientes del interpolador para los casos de interés práctico.

Desafortunadamente, a diferencia de los interpoladores para estructura de coeficientes almacenados, no se ha obtenido una expresión general del límite teórico de la SDR_k independiente del número de coeficientes M , para un interpolador de P polinomios de orden O . En el apéndice 5-A.2 se ha realizado un extenso desarrollo para obtener mediante métodos numéricos dicho límite en el caso particular de que el interpolador tenga una respuesta simétrica, el número de polinomios sea $P = 1$ y el orden $O = 1$. En la figura 5.12 se muestra el resultado teórico obtenido y cómo se aproximan a él los diseños con un creciente número de coeficientes, lo que en cierta medida confirma la bondad de resultados alcanzados mediante el proceso de diseño planteado.

5.3.4. Evaluación con coeficientes de precisión reducida

Reducir la precisión de los coeficientes de la estructura puede suponer un ahorro en cuanto al *hardware* necesario para su realización, al poder usar unidades multiplicadoras más simples. Por este motivo interesa estudiar las prestaciones de los interpoladores que se obtienen imponiendo una precisión limitada a sus coeficientes. De nuevo se van a analizar por separado los resultados según la estructura con la que se realice el interpolador.

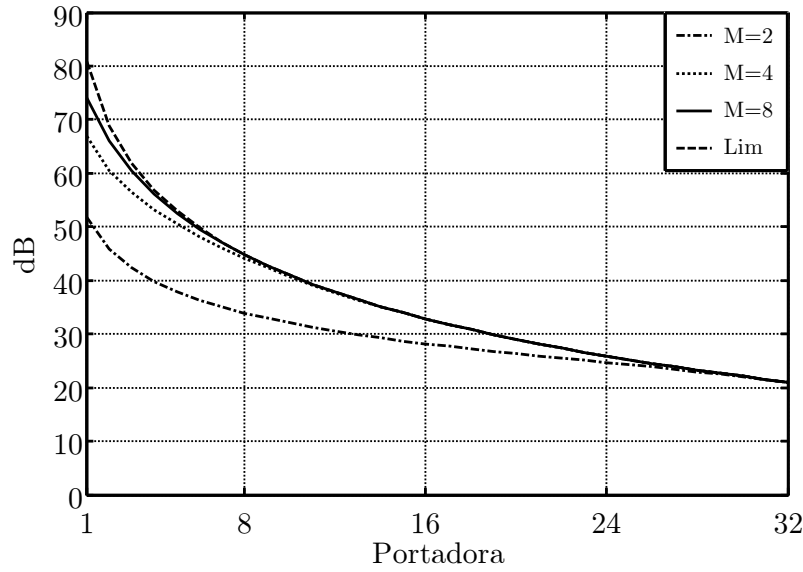


Fig. 5.12: Representación de la SDR_k de interpoladores con $O=1$, $P=1$ y $M=2, 4$ y 8 , así como el límite teórico (Lim)

En el apartado 5.2.3 se expuso que el perjuicio en las prestaciones del interpolador por la cuantificación de los coeficientes de una estructura de coeficientes almacenados es más severo que para otras estructuras. En la figura 5.13 se representa la $\min\{SDR_k\}$ de un interpolador de $M=4$ y $P=256$ en función de la constante de normalización C usada para la cuantificación. Se aprecia que un número de bits reducido (C pequeño) provoca que la $\min\{SDR_k\}$ caiga notablemente con respecto a los mejores resultados, obtenidos sin límite de precisión en los coeficientes. Sin embargo, a partir de 10-bits de cuantificación (C próximo a 512) los resultados son ya muy próximos a los obtenidos sin cuantificación.

La estructura de coeficientes computados y la híbrida, sin embargo, permiten alcanzar altas prestaciones con una precisión muy reducida de los coeficientes. El problema radica en encontrar el valor de la constante de normalización C lo logre. Con este objetivo se puede repetir el proceso de diseño del interpolador para un conjunto de valores de C que permitan simplificar su realización *hardware*. Una vez encontrados los valores de los coeficientes para cada valor de C se trata de buscar el interpolador que conjugue altas prestaciones con la precisión más reducida posible.

En la figura 5.14 se representa la $\min_k\{SDR_k\}$ que se obtienen al diseñar un interpolador con $M=4$, $P=1$, $O=3$ y distintos coeficientes de normalización C . Se observa que a medida que C crece, en términos generales, la $\min\{SDR_k\}$ también crece, con una pendiente mucho mayor que en el caso del interpolador de coeficientes computados de la figura 5.13, aunque de forma mucho más irregular. Con constantes de valor en torno a 64 son suficientes para alcanzar prácticamente las mismas prestaciones que sin cuantificación. Los casos más interesantes son aquellos en los que con un valor de C relativamente

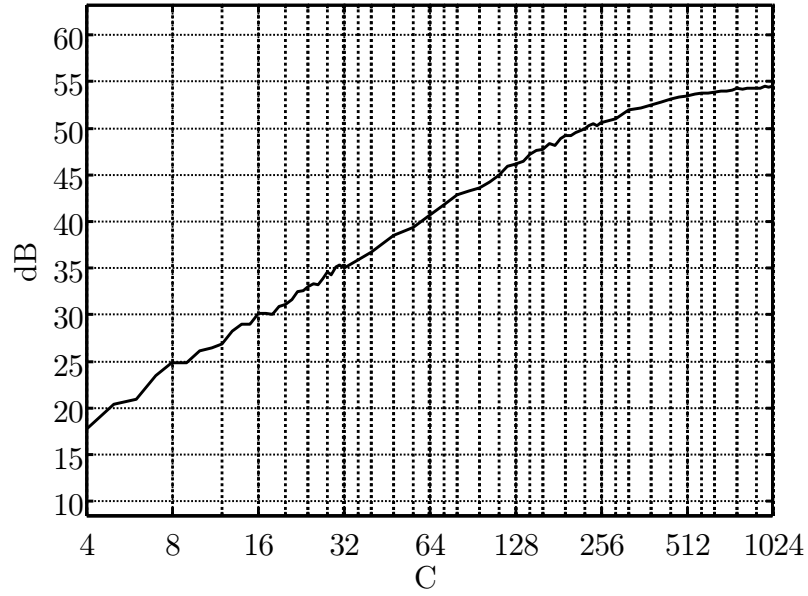


Fig. 5.13: Representación del $\min\{SDR_k\}$ en dB del diseño de un interpolador de $M=4$ y $P=256$ en función de la constante C de normalización para la cuantificación de los coeficientes de la estructura

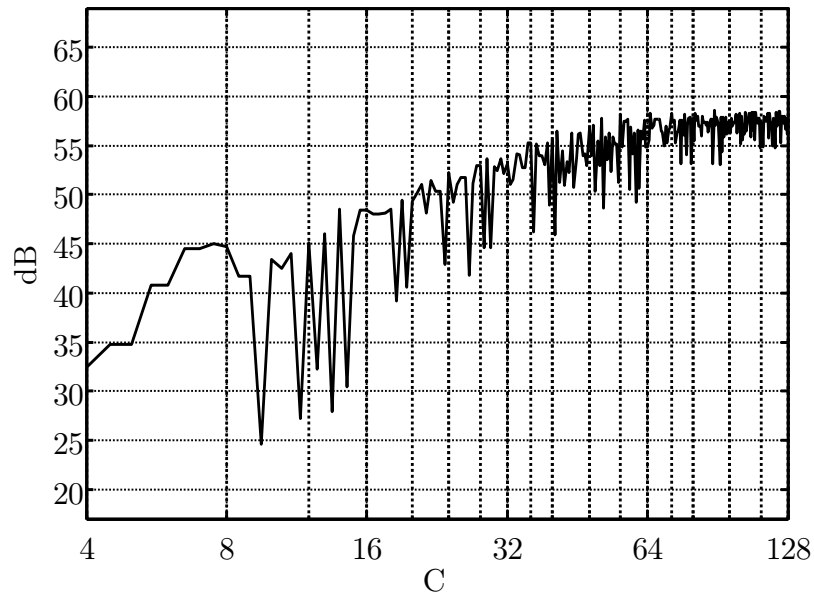


Fig. 5.14: Representación del $\min\{SDR_k\}$ en dB de un interpolador con $M=4$, $O=3$ y $P=1$ en función de la constante C de normalización para la cuantificación de los coeficientes de la estructura

bajo la $\min\{SDR_k\}$ sobresalga especialmente sobre las que le rodean, al conjugar buenas prestaciones con un coste computacional más reducido.

5.4. Simulación

Una vez desarrollado el método de diseño de interpoladores y obtenidos los resultados correspondientes se han contrastado mediante simulaciones con un doble objetivo: comprobar que las prestaciones de los interpoladores coinciden con las estimadas y validar las aproximaciones realizadas en el modelo de análisis teórico.

Simular el funcionamiento de un sistema de corrección de sincronismo basado en un interpolador requiere incluir la asincronía entre el transmisor y el receptor. Por este motivo, una vez generados los símbolos DMT transmitidos con un factor de sobremuestreo L y después de atravesar el canal discreto equivalente, se introduce un error en la frecuencia de muestreo $\Delta\Omega[n]$ mediante un convertidor de la frecuencia de muestreo, como se muestra en la figura 5.15 que representa un detalle del diagrama de bloques del sistema de simulación. En el receptor esta asincronía se compensa mediante otro convertidor de la frecuencia de muestreo, que corrige un error de frecuencia $\widehat{\Delta\Omega}[n]$, y que puede expresarse en función del error de frecuencia introducido $\Delta\Omega[n]$ usando la expresión 3.1 como

$$\widehat{\Delta\Omega}[n] = \frac{-\Delta\Omega[n]}{1 + \Delta\Omega[n]} \approx -\Delta\Omega[n] \quad (5.14)$$

Para realizar ambos bloques de conversión de la frecuencia de muestreo se han usado interpoladores diseñados mediante el procedimiento propuesto. Para evitar que el interpolador utilizado para simular la falta de sincronismo interfiera en la medida de las prestaciones del interpolador usado para corregirla, el primero ha sido diseñado con unas prestaciones muy superiores con respecto al segundo. De este modo, el término de distorsión que introduce el primer interpolador en los símbolos QAM será despreciable frente al que introduce el segundo.

En la figuras 5.16 y 5.17 se compara la SDR_k obtenida mediante simulación y la calculada analíticamente usando las expresiones que obtenidas en los apartados 4-A.2 y 4-A.3. En la primera figura, usando interpoladores de estructura de coeficientes almacenados con $M=4$ y $P=16, 128$ y 1024 , y en la segunda con estructura de coeficientes computados con $M=4$ y $O=1, 2$ y 3 . El error de frecuencia simulado es de 50ppm y 100ppm y el receptor DMT usa un factor de sobremuestreo $L=2$ y $N/2=256$ portadoras. El error con respecto a los cálculos analíticos es debido al término residual de interferencia entre portadoras o ICI que la variación de la respuesta del interpolador a lo largo del símbolo DMT introduce, término que se desprecia en los dichos cálculos. De todos modos se aprecia que los resultados de la simulación son muy parecidos a los obtenidos analíticamente, y más aún cuanto menor es el error de frecuencia. Este se debe a que a menor error de frecuencia, menor variación de la respuesta del interpolador a lo largo del símbolo DMT y por tanto menor será el término de ICI residual.

También se han realizado simulaciones con diversos canales de transmisión para comprobar si la respuesta del canal influye de algún modo en las prestaciones del interpolador.

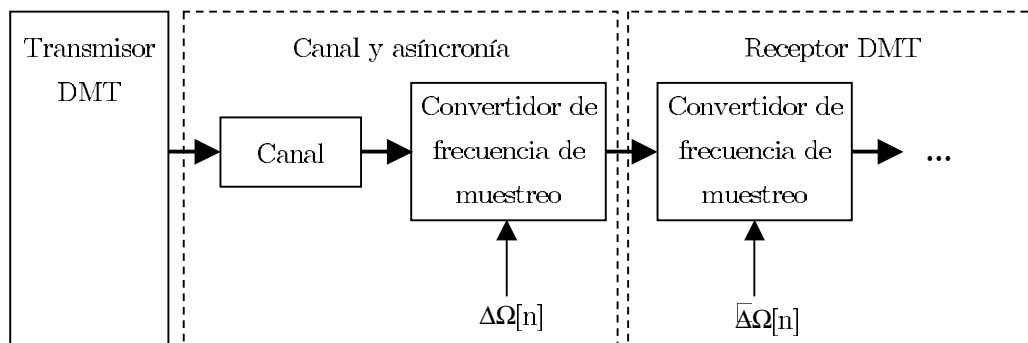


Fig. 5.15: Diagrama de bloques del sistema de simulación de la corrección del sincronismo para transmisión DMT

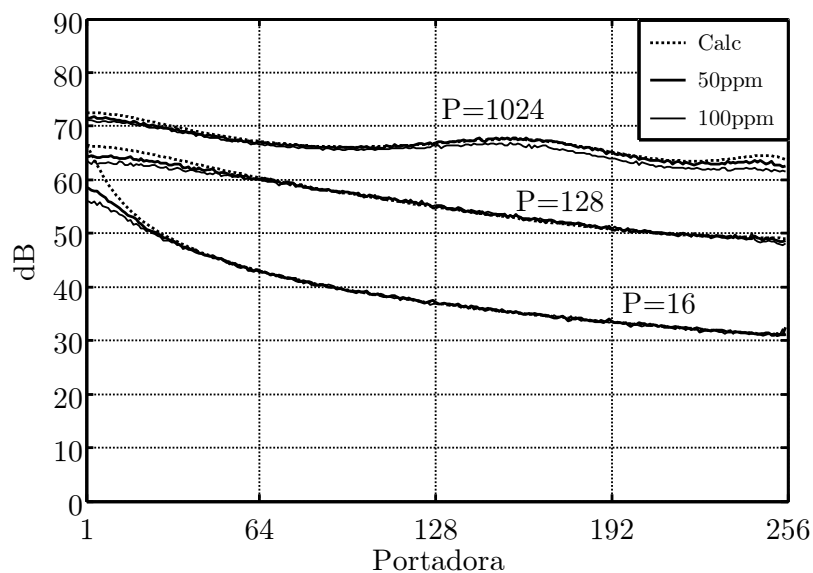


Fig. 5.16: Representación de la SDR_k de interpoladores de estructura de coeficientes almacenados ($M=4$, $P=16$, 128 y 1024) calculada analíticamente (Calc) y mediante simulación con distintos errores de frecuencia de muestreo (50ppm y 100ppm)

En la mayoría de los canales probados no se aprecian cambios sensibles en la SDR, pero en algunos sí se han detectado cambios relevantes. En el caso de que la atenuación del canal sea mucho mayor a unas frecuencias que a otras, las portadoras llegan al receptor con potencias muy distintas y, por tanto, la interferencia de las portadoras con más potencia sobre las de menor potencia puede ser relativamente importante. En la figura 5.18 se representan tres ejemplos de canales en los que la atenuación de las portadoras de más alta frecuencia es mucho mayor que las de baja frecuencia. Se observa cómo, a medida que esta atenuación es mayor, disminuye la SDR en las portadoras de frecuencia más alta, y más

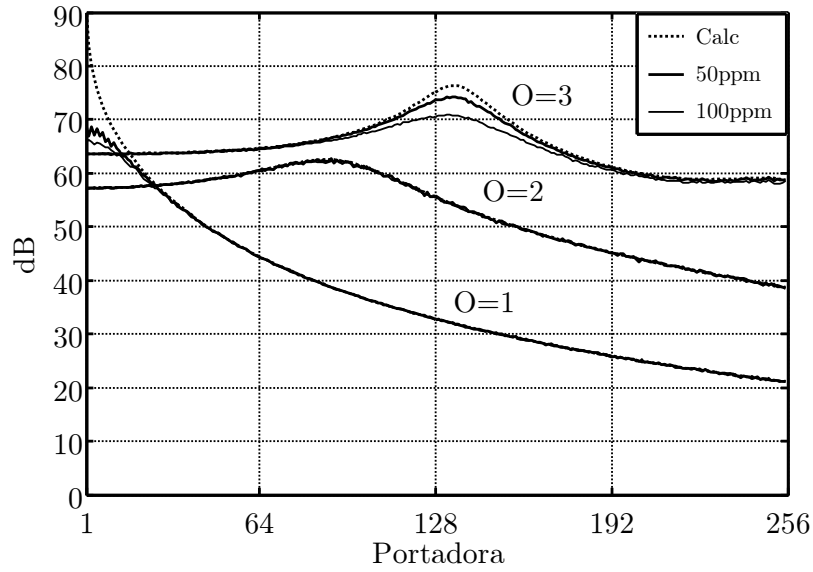


Fig. 5.17: Representación de la SDR_k de interpoladores de estructura de coeficientes computados ($M=4$, $P=1$, $O=1, 2$ y 3) calculada analíticamente (Calc) y mediante simulación con distintos errores de frecuencia de muestreo (50ppm y 100ppm)

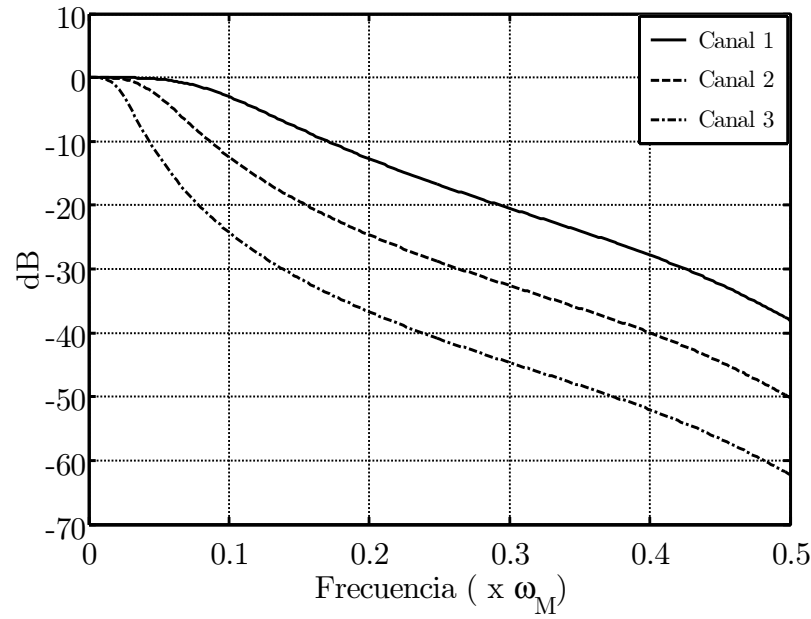
aún cuando el error de frecuencia es mayor, puesto que la interferencia entre portadoras también lo es. De todos modos no se trata de una degradación demasiado preocupante puesto que es más que previsible que unas portadoras tan atenuadas sean las que cuenten con una SNR más baja, por lo que la limitación de la velocidad de transmisión vendrá dada por dicha SNR , más que por la interferencia entre portadoras.

5.5. Comparación con otros sistemas de corrección

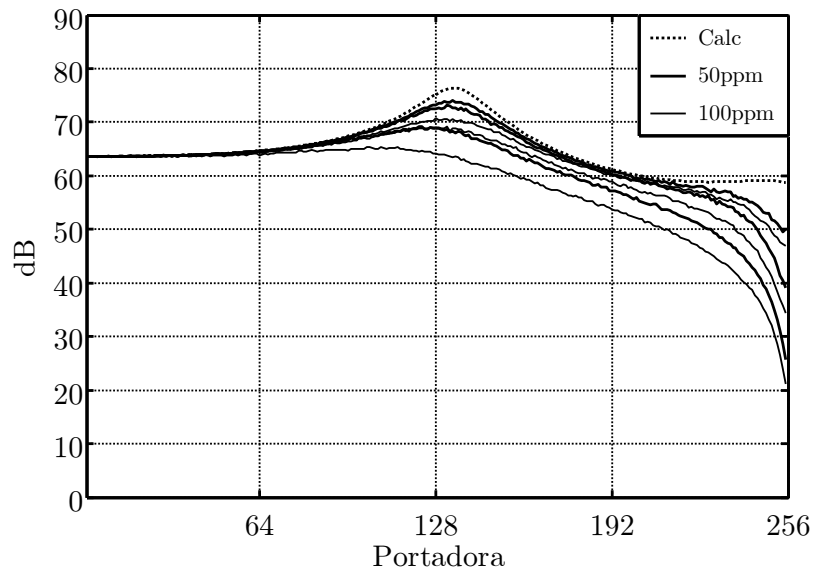
Para comprobar el interés que puede suscitar este nuevo método de diseño de interpoladores usados para la corrección de la sincronización en sistemas DMT, hay que comparar los resultados que se obtienen con los de otros sistemas de corrección.

Para realizar con rigor la comparación habrá que contemplar dos aspectos fundamentales: las prestaciones del interpolador y el coste computacional.

En primer lugar se van a comparar los interpoladores diseñados mediante el método propuesto en este capítulo con interpoladores polinómicos clásicos de Lagrange y *B-Spline*. Posteriormente se cotejarán con un sistema de corrección descrito en el capítulo 3, basado en el sistema rotor.



(a)



(b)

Fig. 5.18: Análisis del efecto del canal en la SDR_k que se obtiene con un interpolador diseñado con el método propuesto y $M=4$, $P=1$, $O=3$: (a) representación de la respuesta en frecuencia de los tres canales usados en la simulación; (b) SDR_k calculada analíticamente (Calc) y la que se ha obtenido mediante simulación con cada uno de los tres canales anteriores y un error de frecuencia de 50 y 100 ppm

5.5.1. Comparación con interpoladores polinómicos clásicos

Entre los diseños de interpoladores que han sido propuestos para la corrección de la frecuencia de muestreo cabe destacar dos ejemplos dentro de los interpoladores polinómi-

Tabla 5.1: Coeficientes $a'_{k,m}$ del interpolador cúbico de Lagrange

k	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$m=0$
1	8	-12	-2	3
2	24	12	-54	-27
3	-24	12	54	-27
4	-8	-12	2	3

Tabla 5.2: Coeficientes $a'_{k,m}$ del interpolador *B-Spline* cúbico

k	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$m=0$
1	8	12	6	1
2	-24	-12	30	23
3	24	-12	-30	23
4	-8	12	-6	1

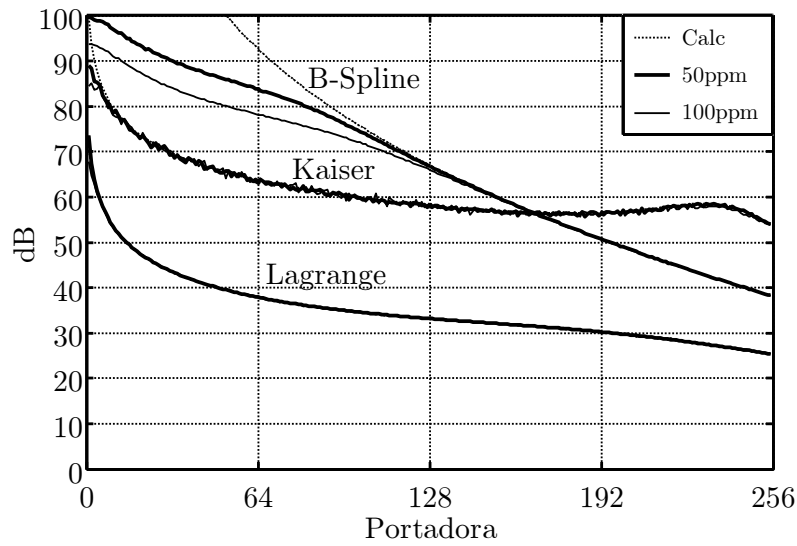
cos: los interpoladores de Lagrange y los interpoladores *B-spline*. Ambas son familias de interpoladores cuyos coeficientes son calculados mediante polinomios, es decir, que usan la estructura de coeficientes computados. Sin embargo, a diferencia de los interpoladores diseñados con el método propuesto en esta tesis, el orden O y los coeficientes de los polinomios están definidos para cada valor de M , por lo que no cabe la posibilidad de optimizar sus coeficientes.

Para realizar la comparación entre estos interpoladores y los que se pueden diseñar mediante el método expuesto en esta tesis, se han escogido interpoladores cúbicos, que son los más habituales en este tipo de aplicaciones [Gard93]. La comparación se ha realizado evaluando las prestaciones de interpoladores de uno y otro tipo de un coste computacional similar. Además, hay que considerar que los coeficientes de la estructura de Farrow que se obtienen para estos interpoladores polinómicos, que aparecen en las tablas 5.1 y 5.2, se pueden expresar con un número de bits reducido. Por este motivo la comparación se ha realizado con un diseño cuyos coeficientes se han cuantificado con un factor de normalización que permita obtener valores representables en el mismo rango de números enteros, como se observa en la tabla 5.3.

En la figura 5.19 se representa la SDR_k , calculada analíticamente y obtenida mediante simulación, de los tres interpoladores: el interpolador de Lagrange, el *B-Spline* y el diseñado con el método propuesto. En ella se observa que las SDR_k de los interpoladores polinómicos calculada analíticamente, a partir de cierta portadora quedan por debajo de las que se obtienen con el interpolador propuesto. Aunque a frecuencias más bajas las

Tabla 5.3: Coeficientes $a'_{k,m}$ del interpolador de diseño optimizado con ventana de Kaiser, $M=4$, $O=3$

k	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$m=0$
1	7	14	9	2
2	-23	-14	-29	26
3	23	-14	29	26
4	-7	14	-9	2

**Fig. 5.19:** Representación de la SDR_k para un canal plano calculada analíticamente (Calc) y mediante simulación con distintos errores de frecuencia de muestreo (50ppm y 100ppm) corregidos mediante tres interpoladores de $M=4$ y $O=3$: un interpolador *B-Spline* cúbico (B-Spline), un interpolador cúbico de Lagrange (Lagrange) y un interpolador diseñado con el método propuesto (Kaiser)

prestaciones del interpolador diseñado con el método propuesto (designado como Kaiser) sean más modestas, el valor mínimo de SDR_k , usado como criterio de diseño, se mantiene muy por encima de los valores que presentan los interpoladores polinómicos B-Spline y de Lagrange, en concreto una diferencia de 15dB y 26dB respectivamente. De hecho, la SDR_k de la última cuarta parte de las portadoras es al menos 6dB y 20dB superior respectivamente. Además, las buenas prestaciones para portadoras más bajas se ven mermadas por la aparición del término de error asociado a la ICI, que es más notorio en estas portadoras.

Otra de las ventajas del método de diseño propuesto es que, a diferencia de los interpoladores clásicos cuyos coeficientes no requieren más precisión, es posible incrementar el rango de cuantificación de los coeficientes (de 6 a 8 bits) y, a costa de cierto incremento

Tabla 5.4: Coeficientes $a'_{k,m}$ del interpolador propuesto en [Poll00] para la corrección de la sincronización usando sistema rotor, con $M=5$, $O=1$

k	$m=1$	$m=0$
1	-4	0
2	3	0
3	0	4
4	-3	0
5	4	0

Tabla 5.5: Coeficientes $a'_{k,m}$ del interpolador de diseño optimizado con ventana de Kaiser, $M=5$, $O=3$

k	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$m=0$
1	4	6	4	1
2	-9	4	22	14
3	0	-21	0	30
4	9	4	-22	14
5	-4	6	-4	1

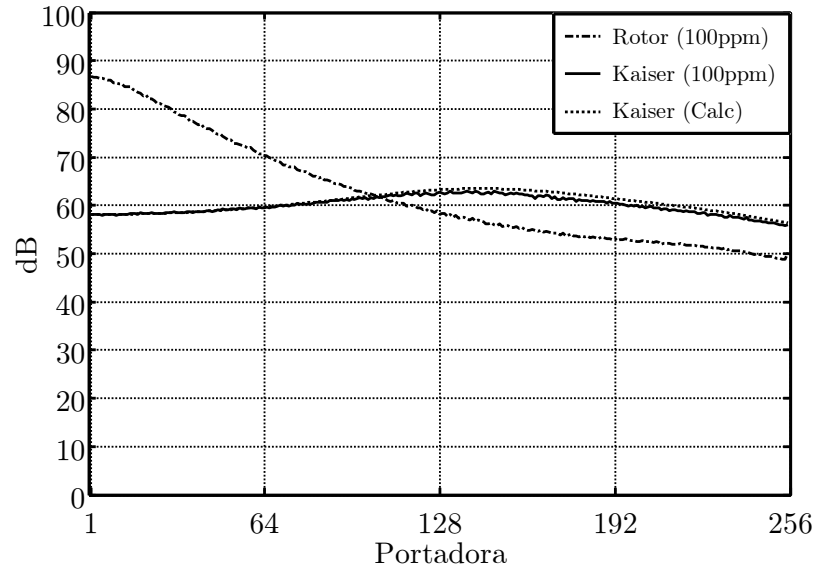
en el coste computacional, mejorar aún más las prestaciones obtenidas (hasta 5 dB en el caso analizado).

5.5.2. Comparación con la *solución rotor*

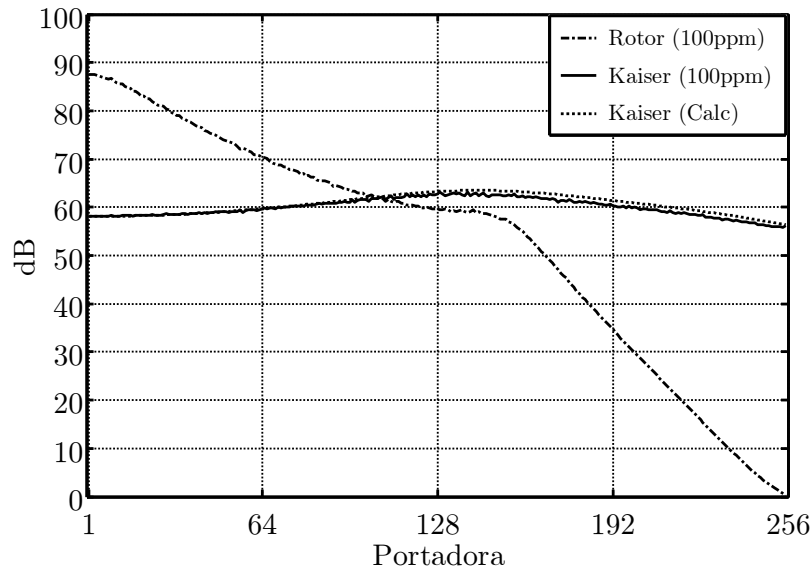
El otro sistema de corrección de la sincronización propuesto en [Poll99] es más difícil de comparar en igualdad de condiciones con la solución basada únicamente en un interpolador, debido a las diferencias entre ambos sistemas, sobre todo teniendo en cuenta que los autores de esta propuesta no han especificado con detalle el coste computacional que supone el sistema rotor.

En las tablas 5.4 y 5.5 se presentan los coeficientes de dos interpoladores de estructura de coeficientes computados. El primero es el propuesto por Pollet en [Poll00] y el segundo, la alternativa diseñada mediante las técnicas propuestas en esta tesis para obtener prestaciones similares.

Mientras que con la solución rotor el interpolador esta formado por polinomios de primer orden, el interpolador propuesto es de tercer orden. Si se mide el grueso del coste computacional mediante el número de multiplicaciones en las que los dos factores son variables, como se propone en [Poll00], mientras que el interpolador del sistema rotor requiere N multiplicaciones reales por cada símbolo DMT, el basado únicamente en un



(a)



(b)

Fig. 5.20: Representación de la SDR_k (simulación y calculada) de un sistema de corrección mediante interpolador y rotor en presencia de un error de frecuencia de 100ppm, y la obtenida con un único interpolador diseñado con el método propuesto, en dos escenarios distintos: a) señal transmitida sin exceso de ancho de banda; b) señal transmitida con exceso de ancho de banda (filtros transmisor y receptor de Butterworth de 4 orden)

interpolador requiere $3N$ multiplicaciones reales, siendo $N/2$ el número de portadoras del sistema DMT. No obstante, si al sistema rotor se le suma las $N/2$ multiplicaciones complejas que requiere el sistema rotor, que equivalen a $2N$ multiplicaciones reales, el

coste total es similar al del sistema propuesto en esta tesis. Además, en este cómputo se ha excluido el cálculo de los factores complejos necesarios para multiplicar cada portadora, suponiendo que están almacenados en una tabla. Además de la complejidad del sistema de control para el acceso a dicha tabla, el tamaño de la tabla debiera ser bastante considerable para acotar lo bastante el error de dichos factores complejos.

En cuanto a las prestaciones, en la figura 5.20(a) se observa que el sistema propuesto alcanza una $\min_k\{SDR_k\}$ ligeramente superior a la del sistema rotor. Sin embargo, la diferencia es mucho más importante en presencia de un exceso de ancho de banda como se muestra en la figura 5.20(b). Esto se debe a la imperfección de los filtros del transmisor y receptor, que no logran conformar el espectro de la señal recibida de forma ideal. En concreto, para obtener los resultados de la simulación representados, se han usado como filtros transmisor y receptor dos filtros de Butterworth de orden 4. Como ya se advirtió en el apartado 3.5, en dichos casos, el solapamiento tiene efectos muy perjudiciales si se diezma la señal antes de sincronizarla, como ocurre en los sistemas que usan rotor. Se aprecia claramente que las portadoras de frecuencias más elevadas sufren una importante reducción de la SDR , al ser las que sufren en mayor medida el solapamiento. En el caso de la figura se observa que más de la cuarta parte de las portadoras se ven notoriamente deterioradas.

En conclusión se puede afirmar que, para un coste computacional similar de ambas soluciones, los resultados del uso de un único interpolador son en general muy superiores a los obtenidos mediante la solución basada en el sistema rotor, al requerir filtros transmisores y receptores de ordenes demasiado elevados para que el solapamiento espectral no suponga una importante desventaja en cuanto a sus prestaciones. Además, el uso de estos filtros supondrían un alargamiento excesivo de la respuesta al impulso del canal equivalente, complicando en exceso el diseño del TEQ.

5.6. Conclusiones

Gracias al análisis del efecto del interpolador en sistemas DMT realizado en el capítulo 4, se ha podido desarrollar un método de diseño a priori de los coeficientes de los interpoladores. Este método se adapta a cualquiera de las distintas estructuras propuestas en el capítulo anterior para su realización.

Los resultados obtenidos aseguran unos niveles de distorsión suficientemente bajos para las velocidades de transmisión habituales, con un coste computacional bastante reducido. Se ha analizado cómo dependen sus prestaciones de los parámetros de diseño para las distintas estructuras propuestas, lo que facilita la tarea del diseño del interpolador sobre cualquier plataforma *hardware*. Además, se ha comprobado la validez de los modelos de análisis mediante simulación, obteniéndose resultados muy próximos a los esperados en la mayoría de los casos.

También se han realizado comparativas para contrastar el interés de este nuevo método

de diseño mediante simulación. Por un lado, se han comparado los resultados de los interpoladores diseñados con este método con otros interpoladores de diseño clásico de similar coste computacional, frente a los que presentan mejores prestaciones y mayor flexibilidad para adaptarse al *hardware* disponible. Por otro, se ha cotejado con otro sistema de corrección del sincronismo basado en el sistema rotor. Se ha dejado patente que, aunque su coste computacional es similar para alcanzar prestaciones aceptables en condiciones ideales, la corrección con rotor tiene importantes problemas relacionados con el solapamiento espectral de la señal recibida.

5-A. Apéndice: Límites de la SDR

Las expresiones de la *SDR* obtenidas para cada tipo interpolador son en general bastante complejas, por lo que la tarea de encontrar sus límites teóricos es muy complicada. A pesar de todo en esta tesis se ha logrado obtener dichos límites para un par de tipos de interpoladores: los de coeficientes almacenados, y los de coeficientes computados con polinomios de primer orden. En ambos casos, aunque por caminos muy distintos, es posible obtener los valores máximos de la *SDR* independientemente del número de coeficientes que tenga el interpolador, lo que sirve de referencia para evaluar las prestaciones de los métodos de diseño propuestos.

5-A.1. Cálculo del límite teórico de la SDR para interpoladores de coeficientes almacenados

La *SDR* de un interpolador de coeficientes almacenados tiene una expresión más sencilla que el resto de interpoladores, lo que facilita notablemente la búsqueda de su límite teórico.

Si se analiza la expresión de la SDR_k para este tipo de interpoladores

$$SDR_k = \frac{\frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} |H_{l,k}|^2}{\frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} |H_{l,k}|^2 - \left| \frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} H_{l,k} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} \frac{2l+1}{2P}} \right|^2 \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi k}{LNP} \right) \right|^2} \quad (5-A.1)$$

y se dividen numerador y denominador por el término $\frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} |H_{l,k}|^2$ se obtiene

$$SDR_k = \frac{1}{1 - \frac{\left| \frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} H_{l,k} e^{-j \frac{2\pi k}{LN} \frac{2l+1}{2P}} \right|^2}{\frac{1}{P} \sum_{l=0}^{P-1} |H_{l,k}|^2} \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi k}{LNP} \right) \right|^2} \quad (5-A.2)$$

donde se pueden identificar claramente dos factores de distinta naturaleza que influyen en la *SDR*. Por un lado el término $\left| \text{sinc} \left(\frac{\pi k}{LNP} \right) \right|^2$ directamente relacionado con el número de posibles respuestas del interpolador P . Por otro el cociente entre el valor medio al cuadrado y el valor cuadrático medio de las respuestas de retardo compensado de los coeficientes almacenados, relacionado con la bondad su diseño. Ambos términos son menores que 1 y cuanto más próximos a 1 mayor es la *SDR*. No obstante, mientras el primer término sólo depende del número de posibles respuestas del interpolador, el segundo dependerá del método de diseño escogido. Como la desigualdad de Schwarz asegura que el cociente entre el promedio al cuadrado y el valor cuadrático medio de cualquier variable distinta de cero tiene como cota máxima la unidad, es sencillo llegar a la expresión del límite de

la SDR_k sin más que sustituir el cociente correspondiente a dicho término por su valor máximo, la unidad, obteniéndose

$$\max\{SDR_k\} = \frac{1}{1 - \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi k}{LNP}\right) \right|^2} \quad (5-A.3)$$

De esta expresión se deduce que existe un límite teórico de la SDR y que viene dado por el error intrínseco debido al número finito de posibles respuestas del interpolador. Además, se comprueba que la limitación es mayor cuanto mayor es el índice k , es decir, cuanto mayor sea la frecuencia de portadora. Esta característica parece lógica, puesto que el error que produce un pequeño error en la fase de muestreo, debido a las limitaciones en cuanto al número de posibles valores de retardos a compensar P , afectan en mayor medida a las frecuencias más elevadas.

5-A.2. Cálculo del límite teórico de la SDR para interpoladores de coeficientes computados mediante polinomios de primer orden

El cálculo del límite teórico de la SDR que se puede obtener con un interpolador diseñado para una estructura de coeficientes computados es muy complejo. En este apartado se presenta la forma de lograrlo únicamente para el caso en que los polinomios sean de primer orden, y con la limitación adicional de que la respuesta continua original $h(t)$ sea simétrica. A continuación se mostrarán paso a paso las modificaciones que hay que hacer en el cálculo de la SDR , que facilitarán la búsqueda de dicho límite.

En primer lugar hay que expresar los polinomios de primer orden $F_k(\mu)$ de una forma alternativa, de modo que

$$F_n(\mu) = a_{n,0} + a_{n,1}\mu = a'_{n,0}p_0(\mu) + a'_{n,1}p_1(\mu) \quad (5-A.4)$$

donde los polinomios $p_0(\mu)$ y $p_1(\mu)$ se definen de la forma

$$\begin{aligned} p_0(\mu) &= \mu \\ p_1(\mu) &= 1 - \mu \end{aligned} \quad (5-A.5)$$

Sabiendo que existe simetría en la respuesta, que se traduce en la simetría de los polinomios, se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} F_n(\mu) &= a'_{n,0}p_0(\mu) + a'_{n,1}p_1(\mu) = a'_{M-1-n,0}p_0(1-\mu) + a'_{M-1-n,1}p_1(1-\mu) = \\ &= a'_{M-1-n,0}p_1(\mu) + a'_{M-1-n,1}p_0(\mu) = F_{M-1-n}(1-\mu) \end{aligned} \quad (5-A.6)$$

de donde se deduce que

$$a'_{n,0} = a'_{M-1-n,1}$$

$$a'_{n,1} = a'_{M-1-n,0} \quad (5-A.7)$$

Haciendo estas consideraciones se puede reescribir la ecuación 4-A.18 como

$$H_{\mu,k} = \sum_{n=0}^{M-1} F_n(\mu) e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^1 a'_{n,m} p_m(\mu) e^{-j \frac{2\pi k n}{LN}} = \sum_{m=0}^1 \widetilde{H}'_{m,k} p_m(\mu) \quad (5-A.8)$$

donde $\widetilde{H}'_{m,k}$ es la transformada de Fourier de los nuevos subfiltros definidos por los coeficientes $a'_{n,m}$. Gracias a la simetría que presentan dichos coeficientes se puede afirmar que

$$\widetilde{H}'_{1,k} = \widetilde{H}'_{0,k}^* e^{-j \frac{2\pi k M}{LN}} \quad (5-A.9)$$

A partir de estas expresiones se puede recalcular $\overline{H}_k^c$ como

$$\overline{H}_k^c = \int_0^1 H_{\mu,k} e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu = \sum_{m=0}^1 \widetilde{H}'_{m,k} C'_{m,k} \quad (5-A.10)$$

donde los términos $C'_{m,k}$ se calculan como

$$C'_{m,k} = \int_0^1 p_m(\mu) e^{-j \frac{2\pi k \mu}{LN}} d\mu \quad (5-A.11)$$

Por la peculiar simetría con la que cuentan los polinomios $p_o(\mu)$ y $p_1(\mu)$, estos coeficientes se relacionan de la forma

$$C'_{1,k} = C'_{0,k}^* e^{-j \frac{2\pi k M}{LN}} \quad (5-A.12)$$

Igualmente se puede recalcular $|\overline{H}_k^c|^2$ como

$$\begin{aligned} |\overline{H}_k^c|^2 &= \sum_{m=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \widetilde{H}'_{m,k} \widetilde{H}'_{m',k}^* \int_0^1 p_m(\mu) p_{m'}(\mu) d\mu = \\ &= \frac{2|\widetilde{H}'_{0,k}|^2}{3} + \frac{Re\{(\widetilde{H}'_{0,k})^2 e^{-j \frac{2\pi k M}{LN}}\}}{3} \end{aligned} \quad (5-A.13)$$

Usando las ecuaciones anteriores la SDR_k se puede expresar como

$$SDR_k = \frac{2|\widetilde{H}'_{0,k}|^2 + Re\{(\widetilde{H}'_{0,k})^2 e^{-j \frac{2\pi k M}{LN}}\}}{|\widetilde{H}'_{0,k}|^2 (2 - 3|C'_{0,k}|^2) + Re\{(\widetilde{H}'_{0,k})^2 e^{-j \frac{2\pi k M}{LN}} (1 - 6(C'_{0,k})^2 e^{-j \frac{2\pi k M}{LN}})\}} \quad (5-A.14)$$

Expresando la respuesta en frecuencia del subfiltro $\widetilde{H}'_{0,k}$ mediante su módulo y fase

$$\widetilde{H}'_{0,k} = |\widetilde{H}'_{0,k}| e^{j \angle \widetilde{H}'_{0,k}} \quad (5-A.15)$$

se puede dividir numerador y denominador de la ecuación 5-A.14 por $|\widetilde{H}'_{0,k}|$, obteniéndose

$$SDR_k = \frac{2 + \cos(2\angle\widetilde{H}'_{0,k} - \frac{2\pi kM}{LN})}{2 + \cos(2\angle\widetilde{H}'_{0,k} - \frac{2\pi kM}{LN}) - 6|C'_{0,k}|^2(1 + \cos(2\angle\widetilde{H}'_{0,k} + 2\angle C'_{0,k} - \frac{2\pi k(M+1)}{LN}))} \quad (5-A.16)$$

Para calcular la $\max\{SDR_k\}$ sólo es necesario derivar la SDR_k con respecto a la única variable restante, $\angle\widetilde{H}'_{0,k}$, e igualar a cero. El resultado es

$$\frac{\partial SDR_k}{\partial \angle\widetilde{H}'_{0,k}} = \frac{12|C'_{0,k}|^2(\sin(2\angle\widetilde{H}'_{0,k} - \frac{2\pi kM}{LN}) + \sin(2\angle C'_{0,k} + \frac{2\pi k}{LN}) - 2\sin(2\angle\widetilde{H}'_{0,k} - 2\angle C'_{0,k} - \frac{2\pi k(M+1)}{LN}))}{(2 + \cos(2\angle\widetilde{H}'_{0,k} - \frac{2\pi kM}{LN}) - 6|C'_{0,k}|^2(1 + \cos(2\angle\widetilde{H}'_{0,k} + 2\angle C'_{0,k} - \frac{2\pi k(M+1)}{LN})))^2} = 0 \quad (5-A.17)$$

Si esta se compara con las expresiones anteriores se comprueba que el denominador es el cuadrado de la varianza de las respuestas de retardo compensado del interpolador. Esta claro que el máximo absoluto se obtendría si dicha varianza es igual a cero, con lo que la SDR_k sería infinita. A tenor de lo expuesto en el apartado 4.3 dicha varianza sólo podría ser cero en el caso de que la respuesta en frecuencia del filtro original $H(\omega)$ tuviera un ancho de banda finito, ya que de esta forma se evitara el solapamiento espectral al tomar muestras de su respuesta al impulso $h(t)$. Sin embargo, como consecuencia de esta limitación de la banda, la respuesta al impulso $h(t)$ sería de longitud infinita, por lo que el interpolador tendría infinitos coeficientes. Por tanto se puede considerar que se trata de una singularidad de la función a estudiar cuando el número de coeficientes M no es finito. Como en la práctica el número de coeficientes si es finito esta cota no tiene interés, por lo que conviene evitar este caso en el análisis.

Excluyendo dicha posibilidad y usando la variable ψ_k que se define como

$$\psi_k = 2\angle\widetilde{H}'_{0,k} - \frac{2\pi kM}{LN} \quad (5-A.18)$$

la ecuación 5-A.17 equivale a

$$\sin(\psi_k) + \sin(2\angle C'_{0,k} + \frac{2\pi k}{LN}) - 2\sin(\psi_k - 2\angle C'_{0,k} - \frac{2\pi k}{LN}) = 0 \quad (5-A.19)$$

Es fácil demostrar que en cualquier caso esta ecuación trigonométrica tiene infinitas soluciones periódicas, entre las que se encuentran tanto máximos como mínimos de función $SDR_k(\psi_k)$. Mediante cualquier algoritmo simple para resolver ecuaciones no lineales es posible encontrar una solución que corresponda con un máximo, y que en adelante se denominará $\psi_{k,max}$. Por tanto la $\max\{SDR_k\}$ máxima se calcula sustituyendo dicho valor en 5-A.16, obteniéndose

$$\max\{SDR_k(\psi_k)\} = \frac{2 + \cos(\psi_{k,max})}{2 + \cos(\psi_{k,max}) - 6|C'_{0,k}|^2(1 + \cos(\psi_{k,max} + 2\angle C'_{0,k} + \frac{2\pi k}{LN}))} \quad (5-A.20)$$

Es evidente que tanto la ecuación 5-A.19 como esta última expresión no dependen en absoluto del número de coeficientes del interpolador M . De este hecho se deduce que el valor máximo obtenido representa la cota máxima teórica que puede alcanzar un interpolador de coeficientes computados mediante polinomios de primer orden, independientemente del número finito de coeficientes. El resultado obtenido se representa en la figura 5.12 junto a los resultados de distintos interpoladores diseñados con los métodos expuestos en esta tesis.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones generales

En esta tesis se ha profundizado en diversas técnicas relacionadas con la sincronización en sistemas DMT. A continuación se recopilan brevemente las principales conclusiones y aportaciones descritas en capítulos anteriores.

- **Estimación del error de sincronización.** Se ha realizado un estudio sobre los métodos para la estimación del error de fase de muestreo, comparando el estimador MMSE propuesto en [Sands02] con un par de estimadores desarrollados en esta tesis basados en la estimación ML, de un coste computacional mucho más reducido. Se ha obtenido el límite de Cramer-Rao de la varianza del estimador de fase y se ha contrastado con los resultados de los estimadores analizados, obteniendo mejores resultados los estimadores propuestos, muy próximos al límite teórico calculado.
- **Corrección del error de muestreo.** Se ha aportado una nuevo enfoque para el estudio del sistema convertidor de la frecuencia de muestreo que se basa en un modelo continuo. Se ha desarrollado una nueva formulación que permite analizar con precisión el funcionamiento de cada uno de los subsistemas que lo componen. Además, se han descrito las particularidades de dicho análisis para sistemas cuyo receptor aplica sobremuestreo a la señal recibida.
- **Estructuras para la realización del interpolador.** Se ha propuesto una nueva estructura, denominada estructura híbrida, que engloba las las estructuras clásicas de coeficientes computados o almacenados y proporciona nuevas opciones intermedias que dan mayor flexibilidad a la realización del interpolador sobre distintas plataformas *hardware*. También se han estudiado las posibles configuraciones de cada estructura para reducir su coste computacional, aprovechando la simetría que en la mayoría de las ocasiones tiene la respuesta del filtro continuo original o la precisión reducida de los coeficientes de la estructura.

- **Análisis de las prestaciones del interpolador.** Se ha realizado un análisis de la distorsión introducida por el interpolador en los símbolos igualados con el FEQ MMSE en sistemas DMT. Gracias a este análisis se ha podido concluir que la distorsión en cada portadora no es debida a que la respuesta en frecuencia del interpolador no es plana, si no a la variación relativa de la respuesta de retardo compensado, idea clave para el diseño de interpoladores para sistemas DMT. Además, se ha concluido que dicha variación depende básicamente de la atenuación de la banda de rechazo con respecto a la banda de paso de la respuesta en frecuencia del filtro continuo original.
- **Método de diseño de interpoladores.** Se ha desarrollado un nuevo criterio de diseño que tiende a maximizar la mínima variación relativa de las respuestas a cada portadora. Para poder aplicar este criterio y evitar un problema de optimización muy difícil de solventar, se ha propuesto un método para el diseño del del filtro continuo original del interpolador basado en el enventanado de la respuesta al impulso ideal. De este modo se reducen parámetros a optimizar y se pueden encontrar con más facilidad interpoladores de altas prestaciones. Se ha adaptado el método de diseño a las distintas estructuras descritas y se han propuesto pequeñas variaciones que permiten limitar la precisión de los coeficientes de la estructura o aprovechar sus simetrías.
- **Evaluación del método de diseño.** Usando el método descrito se han diseñado diversos interpoladores y se ha analizado cómo varían sus prestaciones dependiendo de múltiples factores: tipo de enventanado, número de puntos de ajuste de los polinomios, número de coeficientes, orden de los polinomios, número de coeficientes por polinomio, etc. En algunos casos se han obtenido expresiones que especifican relaciones entre parámetros para alcanzar las máximas prestaciones. También se han obtenido, para un par de casos sencillos, los límites analíticos de las prestaciones de un interpolador sin limitación en el número de coeficientes, comprobándose la bondad de los diseños obtenidos por su proximidad a estos resultados. Además, se han diseñado interpoladores que suponen un costo computacional similar a los interpoladores de diseño clásico y tienen prestaciones muy superiores.
- **Comparación con otros sistemas de corrección.** Se han presentado simulaciones que confirman los resultados analíticos y permiten comparar los interpoladores diseñados con interpoladores clásicos (Lagrange, B-Spline) y con sistemas de corrección distintos. En todos los casos los nuevos diseños mejoran en prestaciones a los demás sistemas. La conclusión más interesantes obtenida de estas simulaciones es la ventaja que presenta este método respecto al sistema basado en rotor. A diferencia de estos sistemas, la solución basada únicamente en el interpolador no provoca

pérdida de prestaciones apreciable debidas al solapamiento espectral que se produce durante el muestreo de la señal recibida, difícil de evitar con señales DMT.

6.2. Líneas futuras de continuación

Seguidamente se resumen las líneas futuras de continuación de la investigación de esta tesis que pueden considerarse de mayor interés.

Un posible objetivo podría ser el de ahondar más en el análisis del impacto de los interpoladores, profundizando en el estudio sobre los límites de sus prestaciones. Ya se han analizado dos casos sencillos, pero se podría tratar de buscar soluciones generales para así conocer el margen de mejora del método de diseño.

También se podría mejorar el método de diseño probando otros algoritmos para realizar los ajustes polinómicos o usando distintos números y distribuciones de los puntos de ajuste. Además, se podrían probar otras ventanas y buscar otros métodos para la optimización con coeficientes de precisión limitada.

Otra línea de interés sería generalizar el análisis del impacto del interpolador en los símbolos demodulados a cualquier tipo de modulación multipulso, no únicamente para DMT. En los últimos años se ha despertado un creciente interés por este tipo de modulaciones, como ocurre con los sistemas basados en bancos de filtros, especialmente en canales invariantes en el tiempo como los canales para transmisión por cable. Si se realiza el análisis independiente de la modulación sería posible obtener un criterio de diseño más genérico. Por tanto, se podría generalizar también el método de diseño del interpolador, con lo que aumentaría su versatilidad.

Además, se podrían buscar otras aplicaciones a las estructuras presentadas para los interpoladores. Cabe la posibilidad de incluir estas estructuras en los convertidores/analógicos digitales para dotarlos de corrección digital de la frecuencia de muestreo. Sería de especial interés en convertidores $\Sigma\Delta$, que ya usan filtros FIR previos al diezmado para reconstruir la señal. Si se intercambian estos filtros por interpoladores de estructura híbrida con polinomios de primer orden, con un incremento del coste computacional muy razonable, se podría obtener un convertidor con corrección digital del instante de muestreo.

Otra aplicación relacionada con la conversión analógica/digital es la realización de convertidores de frecuencia de muestreo usando filtros analógicos de respuesta al impulso infinita mediante interpoladores polinómicos digitales IIR, que permitirían reducir en mayor medida el solapamiento espectral de la señal fuera de banda.

Referencias

- [ADSL95] American National Standard for Telecommunications, "Network and Customer Installation Interfaces; Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL) Metallic Interfac", ANSI T1.413-1995, New York, Agosto 1995.
- [Akan98] A.N.Akansu, P. Duhamel, X. Lin y M. de Courville, " Orthogonal Transmultiplexers in Communication: A Review", *IEEE Trans. on Sign. Proc.*, vol. 46, pp. 979-995, Abril 1998.
- [Alte03] Altera Corporation, *Stratix Device Handbook*, Noviembre 2003.
- [Asch89] G.Ascheid, M. Oerder, J.Stahl y H. Meyr, "An All Digital Receiver Architecture for Bandwidth Efficient Transmission at High Data Rates," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 37, pp. 804-813, Agosto 1989.
- [Babic02] D. Babic, J. Vesma, T. Saramaki and M. Rensfors, "Implementation of the Transposed Farrow Structure," *IEEE Symp. on Circ. and Syst.*, vol. 4, pp. 26-29, Mayo 2002
- [Babic04] D. Babic, A.S.H. Ghadam, M. Renfors, " Polynomial-based Filters with Odd Number of Polynomial Segments for Interpolation," *IEEE Sign. Proc. Letters*, vol. 2, pp. 171-174, Febrero 2004.
- [Bing90] J.A.C. Bingham, "Multicarrier Modulation for Data Transmission: An Idea Whose Time Has Come," *IEEE Comm. Magazine*, vol. 1, pp. 5-14, Mayo 1990
- [Bing00] J.A.C. Bingham, "ADSL, VDSL and Multicarrier Modulation," John Willey & Sons, New York, 2000.
- [Brai97] G. Braileanu, "Digital Filters with Implicit Interpolated Output," *IEEE Trans. on Sign. Proc.*, vol. 45, pp. 2551-2560, Octubre 1997
- [Burd85] R.L. Burden y J.D. Faires, *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1985.

- [Pun03] C.K.S. Pun, Y.C. Wu, S.C. Chan and K. L. Ho, "On the Design and Efficient Implementation of the Farrow Structure," *IEEE Sign. Proc. Letters*, vol. 10, pp. 189-192, Julio 2003
- [Chow91] J.S. Chow, J.C. Tu, J.M. Cioffi "A Discrete Multitone Transceiver System for HDSL Applications," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 9, pp. 895-908, Agosto 1991.
- [Ciof91] J.M. Cioffi, "A Multicarrier Primer," T1E1.4/91-157, Clearfield (Florida), Noviembre 1991.
- [Chow93] J.S. Chow, J.M. Cioffi y J.A.C. Bingham, "Equalizer training algorithms for Multicarrier Modulation Systems," *IEEE Int. Conf. Comm.*, vol. 2, pp. 761-765, Mayo 1993.
- [Cort04] J.A. Cortés, "Análisis y Modelado de las Inestabilidades en Oscilaciones: *Jitter* y Ruido de Fase," Documento interno del Departamento de Ingeniería de Comunicaciones, Octubre 2004.
- [Croch75] R.E. Crochiere, L.R. Rabinier, R.R. Shively, "A Novel Implementation of Digital Phase Shifters," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 54, pp. 1497-1502, Octubre 1975
- [Croch83] R.E. Crochiere y L.R. Rabinier, *Multirate Digital Signal Processing*, pp. 39-41, Prentice Hall, Nueva York 1983.
- [C6x98] Texas Instruments, *TMS320C62x/C67x CPU and Instructions Set Reference Guide*, Febrero 1998.
- [DAB95] European Telecommunication Standard Institute, "Radio Broadcasting Systems; Digital Audio Broadcasting to Mobile Portable and Fixed Receivers", ETSI 300-401, Valbonne (Francia), Febrero 1995.
- [Demir00] A. Demir, A. Mehrotra and J. Roychowdhury, "Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization," *IEEE Trans. on Circ. Syst.*, vol. 47, pp. 655-674, Mayo 2000.
- [Demp00] A.G. Dempster and N. P. Murphy, "Efficient Interpolators and Filter Banks using Multiplier Blocks," *IEEE Trans. on Sign. Proc.*, vol. 48, pp. 257-261, Enero 2000.
- [Deng01] T.B. Deng, "Discretization-free Design of Variable Fractional-Delay FIR Digital Filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II : Analog. and Digit. Sign. Proces.*, vol. 48, pp 637-644, Junio 2001.

- [Dhah97] N. Al Dhahir, J.M. Cioffi, "Optimum Finite-Length Equalization for Multicarrier Transceivers," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 45, pp. 948-956, Agosto 1996.
- [Doel57] M.L. Doelz, E.T. Heald y D.L. Martin, "Binary Data Transmission Techniques for Linear Systems," *Proc. IRE*, vol. 44, pp. 656-661, Mayo 1957.
- [Dool99] S.R. Dooley, R.W. Stewart y T.S. Durrani, "Fast On-line B-Spline Interpolation," *Electronics Letters*, vol. 35, pp 1130-1131, Julio 1999.
- [DVBT97] European Telecommunication Standard Institute, "Digital Video Broadcasting (DVB); Framing Structure, Channel Coding and Modulation for Digital Terrestrial Television (DVB-T)", ETSI 300-744, Valbonne (Francia), Marzo 1997.
- [Edfo96] O. Edfords, M. Sandell, J.J. van de Beek, D. Landström, F. Sjöberg "An Introduction to Orthogonal Frequency-Division Multiplexing," *Research report - Luleå University of Technology, Division of signal processing*, Septiembre 1996.
- [Els97] L.Elsoltz, *Ecuaciones diferenciales y Cálculo Variacional*, MIR, Moscú 1977.
- [Erup93] L. Erup, F.M. Gardner, R.A. Harris, "Interpolation in Digital Modems - Part II: Implementation and Performance," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 41, pp. 998-1008, Junio 1993.
- [Farr88] C.W. Farrow, "A Continuously Variable Digital Delay Element," *IEEE Int. Symp. on Circ. Syst.*, vol. 3, pp. 2641-2645, Junio 1988.
- [Fuch01] J.J Fuchs y B. Delyon, "Min-max Interpolators and Lagrange Interpolation Formula," *IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst.*, vol. 4, pp. 429-432, Mayo 2001.
- [Fu00] D. Fu y A.N. Willson, "Optimal Interpolator using a Trigonometric Polynomial," *Proc. IEEE Midw. Symp. on Circ. and Syst.*, vol. 1, pp. 1206-1209, Agosto 2000.
- [Gard93] F.M. Gardner, "Interpolation in Digital Modems - Part I: Fundamentals," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 41, pp. 501-507, Marzo 1993.
- [Harr01] F.J.Harris, M.Rice, "Multirate Digital Filters for Symbol Timing Synchronization in Software Defined Radios," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 19, pp. 2346-2357, Diciembre 2001.

- [Hiro81] B. Hirosaki "An Orthogonally Multiplexed QAM System using the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 29, pp. 982-989, Julio 1981.
- [Hiro86] B. Hirosaki, S. Hasegawa y A. Sabato "Advanced Groupband Data Modem using Orthogonally Multiplexed QAM technique," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 34, pp. 587-592, Junio 1986
- [Kais80] J.F. Kaiser, R.W. Schafer, "On the Use of the Io-sinh Window for Spectrum Analysis," *IEEE Trans. on Acous., Speech and Sign. Proc.*, vol. 28, pp. 105-107, Febrero 1980.
- [Kay89] S. Kay, "A fast an accurate single frequency estimator," *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Sign. Proc.*, vol. 37, pp. 1987-1990, Diciembre 1989.
- [Kell01] T. Keller, L. Piaazo, P. Mandarini, L. Hanzo, "Orthogonal Frequency Division Multiplex Synchronization Techniques for Frequency-Selective Fading Channels," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 19, pp. 999-1008, Junio 2001.
- [Kim97] D. Kim, M.J. Narasimha, y D.C. Cox "Design of Optimal Interpolation Filter for Symbol Timing Recovery," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 45, pp. 877-884, Julio 1997
- [Laak01] T.I. Laakso, V. Valimaki, M. Karjalainen, y U.K. Laine, "Splitting the Unit Delay," *IEEE Sign. Proc. Mag.*, vol. 13, pp. 30-60, Enero 1996.
- [Lag98] Lagarias, J.C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions," *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, pp. 112-147, Enero 1998.
- [Lee94] E.A. Lee, D.G. Messerschmitt, "Digital Communication", Kluwer Academics Publishers, Boston 1994.
- [Lee95] I. Lee, J.S. Chow, J.M. Cioffi, "Performance Evaluation of a Fast Computation Algorithm for the DMT in High-speed Subscriber Loop," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 13, pp. 1564-1570, Diciembre 1995
- [Lee97] D.Lee y K. Cheun, "A New Timing Recovery Algorithm for OFDM Systems," *IEEE Trans. on Consum. Elect.*, vol. 43, pp. 767 - 775, Agosto 1997.
- [Leke98] A. Leke y J.M. Cioffi, "Impact of Imperfect Channel Knowledge on the Performance of Multicarrier Systems," *IEEE Glob. Telec. Conf*, vol. 2, pp. 951-955, Noviembre 1998.
- [Liu90] G.S. Liu and C.H. Wei, "Programmable Fractional Sample Delay Filter with Lagrange Interpolation", *Electronics Letters*, vol. 26, pp. 1608-1610, Septiembre 1990.

- [López01] J.López Fernández, "Procedimiento de Igualación, Sincronización y Medida para la Transmisión Digital Asimétrica de Alta Velocidad por Bucles de Abonado," Tesis Doctoral, ETSIT, Málaga 2001.
- [Louv01] J. Louveaux, L. Vandendorpe, L. Cuvelier y T. Pollet, "Bit-Rate Sensitivity of Filter-Bank-Based VDSL Transmission to Timing Errors," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 49, pp. 375-384, Febrero 2001.
- [Luise96] M. Luise, R. Reggiannini, "Carrier Frequency Acquisition and Tracking for OFDM System," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 44, pp. 1590-1598, Noviembre 1996.
- [Mart99] E. Martos-Naya, J. López-Fernández, L. Díez, J.T. Entrambasaguas, "Synchronization method in a DMT-ADSL system," *International Baiona Workshop. Proceedings*, pp. 42-48, Septiembre 1999.
- [Mart01] E. Martos-Naya, J. López-Fernández, L. Díez, M.C. Aguayo, J.T. Entrambasaguas "Optimized Interpolator Filters for Timing Error Correction in DMT System for xDSL Application," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 19, pp. 2477-2485, Diciembre 2001.
- [Mart05] E. Martos-Naya, J. López-Fernández, L. Díez, J.T. Entrambasaguas "Timing Error Estimator for Baseband Multicarrier Modulation," Enviado a *IEEE Comm. Letters*, Junio 2005.
- [Meij99] E.H.W. Meijering, W.J. Niessen, M. A. Viergever, "The Sinc-approximating Kernels of Classical Polynomial Interpolation," *IEEE Inter. Conf. on Image Proc.*, vol. 3, pp. 652-656, Octubre 1999.
- [Melsa96] P. Melsa, R. Younce, C. Rohrs, "Impulse Response Shortening for Discrete Multitone Transceivers," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 44, pp. 1662-1672, Diciembre 1996.
- [Meng97] U. Mengali y A.N. D'Andrea, *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Plenum Press, New York 1997.
- [Meyr97] H. Meyr, M. Moeneclaey, and S. Fechtel, *Digital Communication Receivers: Synchronization and Channel Estimation Algorithms*, Wiley, New York 1997.
- [Negi02] R. Negi y J.M. Cioffi, "Blind OFDM Symbol Synchronization in ISI Channels," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 50, pp. 1525-1534, Septiembre 2002.
- [Oppe89] A.V. Oppenheim, *Discrete-Time Signal Processing* Prentice-Hall, New Jersey 1989.

- [Peled80] A. Peled y A. Ruíz, "Frequency Domain Data Transmission using Reduced Computacional Complexity Algorithms," *IEEE Trans. on Acous., Speech and Sign. Proc.*, vol. 1, pp. 964-967, Abril 1980.
- [Poll94] T. Pollet, P. Spruyt y M. Moeneclaey, "The BER Performance of OFDM System using Non-Synchronized Sampling," *IEEE Global Telecom. Conf.*, vol. 1, pp. 253 - 257, Noviembre 1994.
- [Poll99] T. Pollet y M. Peeters, "Synchronization with DMT Modulation," *IEEE Comm. Magaz.*, vol. 37, pp. 80-86, Abril 1999.
- [Poll00] T. Pollet y M. Peeters, "A new Digital Timing Correction Scheme for DMT Systems combining Temporal and Frequential Signal Properties," *IEEE Inter. Confer. on Comm.*, vol. 3, pp. 1805-1808, Junio 2000.
- [Poll00b] T. Pollet y M. Peeters, "Equalization for DMT-Based Broadband modems," *IEEE Comm. Mag.*, vol. 1, pp. 106-113, Mayo 2000.
- [Rams84] T. A. Ramstad, "Digital Methods for Conversion Between Arbitrary Sampling Frequencies," *IEEE Trans. on Acoust. Speech. Signal Proccessing*, vol. ASSP-32, pp. 577-591, Junio 1984.
- [Saram91] T. Saramaki "Adjustable window for the design of the FIR filters - A tutorial," *Proc. Electrotechnical Conference*, vol. 1, pp. 295-298, Mayo 1991.
- [Sand95] S.D. Sandberg, M.A. Tzannes, "Overlapped Discrete Multitone Modulation for High Speed Coper Wire Communication," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 13, pp. 1571-1585, Diciembre 1995.
- [Sands02] N.P. Sands, K.S. Jacobsen, "Pilotless Timing Recovery for Baseband Multi-carrier Modulation," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 20, pp. 1047-1054, Junio 2002.
- [Scag99] A. Scaglione, G.B. Giannakis, S. Barbarossa, "Redundant Filterbank Precoders and Equalizers Part I: Unification and Optimal Designs," *IEEE Trans. on Sign. Procc.*, vol. 47, pp. 1988-2006, Julio 1999.
- [Schmi97] T.M. Schmidl y D.C. Cox, "Robust Frequency and Timing Synchronization for OFDM," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 45, pp. 1613-1621, Diciembre 1997.
- [Speth01] M. Speth, S. Fechtel, G. Fock y H. Meyr, "Optimum Receiver Design for OFDM-Based Broadband Transmission - Part II: A Case Study," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 49, pp. 571-578, Abril 2001.

- [Taka87] F.Takahata, M. Yasunaga et al., "A PSK Group Modem for Satellite Communication," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 5, pp. 648-661, Mayo 1987.
- [Unse93] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden, "B-Spline Signal Processing: Part I - Theory," *IEEE Trans. Sign. Proc.*, vol. 41, pp. 821-832, Febrero 1993.
- [Unse93b] M. Unser, "B-Spline Signal Processing: Part II - Efficient Design and Applications," *IEEE Trans. Sign. Proc.*, vol. 41, pp. 834-848, Febrero 1993.
- [Unse99] M. Unser, "Splines: A perfect fit for Signal and Image Processing," *IEEE Sign. Proc. Mag.*, vol. 16, pp. 22-38, Noviembre 1999.
- [Vali98] V. Valimaki y T.I. Laakso "Suppression of Transients in Variable Recursive Digital Filters with a Novel and Efficient Cancellation Method," *IEEE Trans. on Sign. Proc.*, vol. 46, pp. 3408-3414, Diciembre 1998.
- [VanAc03] K. Van Acker, G. Leus, M. Moonen y T. Pollet, "RLS-Based Initialization for Per-Tone Equalizers in DMT Receivers," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 51, pp. 885-889, Junio 2003.
- [VanB95] J.J. Van de Beek, O. Edford, M. Sandell, S.K. Wilson, P.O. Borjesson, "On Channel Estimation in OFDM Systems," *IEEE Vehic. Tech. Conf.*, vol. 2, pp. 815-819, Julio 1995.
- [VanB97] J.J. Van de Beek, M. Sandell, P.O. Börjesson, "ML Estimation of Time and Frequency Offset in OFDM System," *IEEE Trans. on Sign. Procc.*, vol. 45, pp. 1800-1805, Julio 1997.
- [Vayd92] P.P. Vaydyanathan, "Multirate System and Filters Banks," Prentice Hall, New Jersey 1992.
- [Watk01] G. Watkins "Optimal Farrow Coefficients for Symbol Timing Recovery," *IEEE Comm. Letters*, vol. 5, pp. 381-383, Septiembre 2001.
- [Wein71] S.B. Weinstein, P.M. Ebert, "Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing using the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Comm.*, vol. COM-19, pp. 628-634, Octubre 1971.
- [WLAN99] Institute of Electrical and Electronics Engineers, "Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY); High-Speed Physical Layer in the 5GHz band", IEEE Std 802.11a, New York, Septiembre 1999.
- [WMAN02] Institute of Electrical and Electronics Engineers, "IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks - Part 16: Air Interface for Fixed Broad-band", IEEE Std 802.16, New York, Abril 2002.

- [Xili03] Xilinx, *Virtex-II Pro X Platform FPGAs: Introduction and Overview*, Noviembre 2003.
- [Yang00] B. Yang, K.B. Letaief, R.S. Cheng, Z. Cao, "Timing Recovery for OFDM Transmission," *IEEE J. Sel. Areas in Comm.*, vol. 18, pp. 2278-2291, Noviembre 2000.
- [Zerv89] N.A. Zervos y I. Kalet, "Optimized Decision Feedback Equalization versus Optimized Orthogonal Frequency Division Multiplexing for High-Speed Data Transmission Over the Local Cable Network," *IEEE Int. Conf. Commun. Rec.*, vol. 1, pp. 1080-1085, Septiembre 1989.
- [Zett88] Lars H. Zetterberg y Q. Zhang, "Elimination of Transient in LPC based Vocoder," *IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst.*, vol. 2, pp. 1079-1082, Junio 1988.
- [Zivo93] V. Zivojnovic y H. Meyr, "Design of Optimum Interpolation Filters for Digital Demodulators," *Proc. IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst.*, vol. 1, pp. 140-143, Mayo 1993.
- [Zoga96] T.N. Zogakis, J.M. Cioffi, "The Effect of Timing Jitter on the Performance of a Discrete Multitone System," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 44, pp. 799-808, Julio 1996.