MENU SALIR

Aspectos Locales y Globales de la Teoría de los Sistemas de Jordan

Mª Isabel Tocón Barroso

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Antonio Fernández López, Profesor Titular del área de Álgebra de la Universidad de Málaga informa que ha dirigido la investigación que ha llevado a la conclusión de la memoria titulada *ASPECTOS LOCALES Y GLOBALES DE LA TEORÍA DE LOS SISTEMAS DE JORDAN*, que ha sido realizada por la Licenciada María Isabel Tocón Barroso en el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología de la Universidad de Málaga, y considera que la citada memoria reúne los requisitos formales y científicos legalmente establecidos para la obtención del título de Doctor, por lo que autoriza su presentación para la obtención de dicho título.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Una tesis, se piensa (o al menos así parece que debería entenderse) es la realización de un proyecto que, en lo que respecta a las Matemáticas, consiste en unas cuantas conjeturas que se consideraron dignas de ser contestadas, y que prometían ser ciertas o, en su defecto, una eventual negación resultara también interesante.

Pero las cosas no siempre son de este modo. A veces, como ha ocurrido en nuestro caso, es la propia dinámica del proceso la que lo va esbozando, y el proyecto en sí sólo se percibe del todo al final. Por lo que lo último en decidir puede ser precisamente el título, que probablemente será muy diferente del que por razones burocráticas tuvimos que asignarle inicialmente. Con el que hemos bautizado esta memoria, *Aspectos locales y globales de la teoría de los sistemas de Jordan*, pretendemos, como no podía ser de otra forma, describir su contenido. El lector juzgará por sí mismo si hemos acertado.

Esta memoria consta de cinco partes: cuatro capítulos y un apéndice. El Capítulo I está inspirado en la teoría de los sistemas algebraicos, donde por *sistema algebraico* entendemos cualquier sistema algebraico lineal o cuadrático, asociativo o no, binario o ternario: álgebras no necesariamente asociativas, pares o triples asociativos y alternativos, álgebras, triples y pares de Jordan (cuadráticos) sobre un anillo de escalares arbitrario Φ. Siguiendo el patrón de los anillos asociativos, se puede definir un producto adecuado sobre el retículo de los ideales de cada sistema algebraico, de manera que la información contenida en tal retículo sea más que suficiente para obtener importantes teoremas de descomposición del sistema, especialmente bajo ciertas condiciones de cadena. Trataremos también con sistemas algebraicos en los que hay definida una topología respecto a la cual las operaciones algebraicas son continuas. A tales sistemas los denominaremos *sistemas algebraico-topológicos*.

Comenzamos este primer Capítulo con una sección en la que se describen los sistemas algebraicos con los que trabajaremos en esta memoria, definiendo en cada uno de los casos un producto de ideales, al que siempre denotaremos por $\star$. Si A es un sistema algebraico-topológico, se sigue de la continuidad de las operaciones algebraicas, que el producto $I_1 \star I_2 := \overline{I_1 I_2}$ de dos ideales cerrados de A es un ideal cerrado de A, donde, en este caso, la juxtaposición denota el producto de ideales del sistema algebraico correspondiente, y $S \to \overline{S}$ la operación de clausura. Para cada ideal (respectivamente ideal cerrado) I de un sistema algebraico (respectivamente, de un sistema algebraico-topológico) semiprimo A, se tiene que el usual anulador $I^{\perp} = \mathrm{ann}_A(I)$ de I en A es el máximo ideal (cerrado) K de A con la propiedad de que $I \cap K = 0$. Esto hace que el retículo $\mathcal{I}(A)$ de los ideales (cerrados) de un sistema algebraico(-topológico) semiprimo A sea un ejemplo, y para nosotros el más importante, de retículo seudo-complementado.

—Un *semirretículo seudo-complementado* es un semirretículo con elemento mínimo 0 y una operación unitaria $x \to x^{\perp}$ tal que, para cada $x \in S$,

$$x \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \leq x^{\perp},\ y \in S,$$

lo que es equivalente a decir que, para cada $x \in S$, existe un elemento (su *seudo-complemento*), $x^{\perp} \in S$, que es máximo con respecto a la propiedad $x \wedge x^{\perp} = 0$.

En la segunda sección del Capítulo I se esboza la teoría básica de los semirretículos seudo-complementados y su relación fundamental con las *álgebras de Boole*, esto es, con los retículos complementados y distributivos. En particular, vemos que las seudo-complementaciones retienen, en general, la mayoría de las propiedades de los anuladores de ideales de un sistema algebraico semiprimo **(I.(2.2))**. A pesar de lo que el nombre sugiere, un retículo complementado no es necesariamente seudo-complementado: considérese por ejemplo el retículo de los subespacios de un espacio vectorial de dimensión mayor que 1. Sin embargo, toda álgebra de Boole es seudo-complementada, donde $x^{\perp}$ es el único complemento del elemento x. Por otro lado, todo semirretículo seudo-complementado S lleva asociado el álgebra de Boole $\mathcal{B}(S) := \{x^{\perp} : x \in S\}$; un ejemplo clásico es el álgebra de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$ determinada por los ideales *anuladores* $I = \mathrm{an}_A(I)$, equivalentemente, $I = I^{\perp\perp}$, de un sistema algebraico semiprimo A. Además del material estándar, en esta sección también incluimos algunos resultados, que pensamos son nuevos, y que se inspiran en la teoría de estructura de los anillos topológicos y álgebras de Banach.

La relación entre un semirretículo seudo-complementado S y su álgebra de Boole asociada $\mathcal{B}(S)$ puede iluminarse estudiando los elementos uniformes de S: un elemento no nulo u de S se dice que es *uniforme* si cualquier $0 \neq x \leq u$ es esencial en el subsemirretículo $[0, u]$, donde recordemos que $0 \neq x$ es *esencial* si $y \wedge x \neq 0$ para todo elemento no nulo $y \in S$.

En la tercera sección del Capítulo I repasamos las propiedades de los elementos uniformes, que fueron primeramente consideradas en [34, 3.1] y posteriormente recogidas en [43, 2.8]. Los ideales uniformes de sistemas algebraicos semiprimos aparecen asociados a los productos subdirectos esenciales de sistemas algebraicos: si A es un sistema algebraico semiprimo y satisface la condición de cadena ascendente sobre los ideales anuladores, se tiene que el álgebra de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$ es *atómica*, i.e. para todo elemento no nulo $x \in A$, el ideal principal $[0, x]$ contiene un *átomo* o elemento minimal. Pero los átomos de $\mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$ son los elementos uniformes maximales de $\mathcal{I}(A)$ **(I.(3.1(4)))**, de donde se sigue que A es una suma subdirecta esencial de un número finito de sistemas primos [34, 4.1]. Finalizamos esta sección introduciendo una noción de *dimensión de Goldie* para retículos seudo-complementados completos. Tener dimensión de Goldie finita es equivalente a satisfacer las condiciones de cadena sobre los anuladores.

I.(3.10) Para un retículo seudo-complementado completo L, las siguientes condiciones son equivalentes,

(i) L tiene dimensión de Goldie finita,

(ii) L no posee cadenas infinitas de anuladores,

(iii) $\mathcal{B}(L)$ es finita.

Utilizando la noción de dimensión de Goldie, caracterizamos los retículos seudo-complementados completos que son álgebras de Boole finitas como aquéllos que tienen dimensión de Goldie igual a su longitud (máxima longitud de sus cadenas) **(I.(3.11))**.

Aunque la noción de retículo seudo-complementado no requiere de la existencia de un producto, sí que es verdad que el ejemplo del retículo $\mathcal{I}(A)$ de los ideales (cerrados) de un sistema algebraico(-topológico) semiprimo A deriva de uno, que de hecho satisface

(1) si $I \subseteq J$, entonces $K \star I \subseteq K \star J$ e $I \star K \subseteq J \star K$,

(2) $I \star J \subseteq I \cap J$,

(3) $I \star (\sum_\alpha J_\alpha) = \sum_\alpha (I \star J_\alpha)$,

para cualesquiera ideales (cerrados) I, J, K, J_α de A. Con respecto a la primera variable, y debido a la no linealidad de las operaciones de Jordan $x \mapsto U_x$, $x \mapsto P_x$ y $x \mapsto Q_x$, no podemos asegurar sin embargo que $(\sum_\alpha J_\alpha) \star I = \sum_\alpha (J_\alpha \star I)$. Estas propiedades nos indican los axiomas que debemos tener en cuenta a la hora de definir productos en retículos, si queremos incluir al retículo de los ideales de un sistema de Jordan cuadrático. En las restantes dos secciones del primer capítulo trabajamos con retículos dotados de un producto, a los que denominamos seudo-multiplicativos.

—Un retículo L (con 0) se dice que es *seudo-multiplicativo* si existe una operación binaria $(x, y) \to xy$ definida sobre L que satisface

(1) Si $x \leq y$ entonces $zx \leq zy$ y $xz \leq yz$ para todos $z \in L$,

(2) $xy \leq x \wedge y$ para todos $x, y \in L$,

(3) $x(y \vee z) \leq xy \vee xz$.

Un retículo seudo-multiplicativo L se dirá que es *semiprimo* si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes,

(i) $xy = 0 \Leftrightarrow x \wedge y = 0$, para todos $x, y \in L$,

(ii) $x^2 := xx = 0 \Rightarrow x = 0$, para todo $x \in L$.

En la cuarta sección del Capítulo I nos planteamos y abordamos problemas sobre la existencia y sobre la unicidad de productos en retículos. En particular, damos una demostración elemental de la distributividad de los retículos de ideales de un sistema algebraico que es regular en el sentido de von Neumann y del retículo de los ideales cerrados de un JB*-sistema **(I.(4.6))**. Es bien conocido que un anillo es semiprimo si, y sólo si, la intersección de sus ideales primos es cero. Este hecho se utiliza para descomponer todo anillo semiprimo como un producto subdirecto de anillos primos. Asimismo todo sistema algebraico semiprimo puede ser expresado como producto subdirecto de sistemas primos (véanse algunos casos particulares [80], [99] y [108]). Nosotros nos planteamos establecer este resultado en el contexto más general de los retículos seudo-multiplicativos.

—Un elemento $p \neq 1$ en L se dice que es *primo* si $xy \leq p \Rightarrow x \leq p$ o $y \leq p$, para cualesquiera $x, y \in L$.

Es claro que si el ínfimo de los elementos primos de L es cero, entonces L es semiprimo. Sin embargo, el recíproco no se tiene en general como puede verse considerando el álgebra de Boole de los abiertos regulares de un espacio topológico (X, T), donde $A \in T$ es *regular* si, y sólo si, $A = \text{int}(\overline{A})$ **(I.(4.12))**. Diremos entonces que un retículo seudo-multiplicativo es *fuertemente semiprimo* si el ínfimo de sus elementos primos es cero. En **(I.(4.13))** establecemos una condición suficiente para que un retículo semiprimo completo sea fuertemente semiprimo, que es de hecho un refinamiento de un resultado de I. Kaplansky [64], y como consecuencia obtenemos el siguiente corolario.

I.(4.15) El retículo de los ideales de un sistema algebraico semiprimo A es fuertemente semiprimo y por tanto A es un producto subdirecto de sistemas algebraicos primos.

Es natural preguntarse si para un sistema algebraico-topológico semiprimo A se tiene que la intersección de los ideales cerrados primos es cero. Parece que la respuesta a esta cuestión es desconocida incluso si A es un álgebra de Banach conmutativa, aunque se han dado algunas respuestas afirmativas para casos particulares [98]. En la última sección de este primer capítulo, damos un teorema de descomposición para retículos completos, que es una extensión natural (y, en nuestra opinión, la más general posible) de un teorema de Yood para anillos topológicos [103, 2.6] (nos referimos a [17], [24], [42] y [97] para ver la importancia de este resultado).

I.(5.2) Para un retículo completo L, las siguientes condiciones son equivalentes,

(i) L es seudo-complementado y el mayor elemento 1 es el supremo de los átomos de L,

(ii) L es *anulador* ($x^{\perp} = 0 \Rightarrow x = 1$) y atómico,

(iii) L es anulador y se puede definir un producto sobre él para el cual sea fuertemente semiprimo.

Pasamos ahora a comentar los resultados del segundo capítulo. Asociado a cada elemento a de un sistema algebraico A, existe un álgebra, denotada A_a, a la que llamamos el *álgebra local* de A en a. Esta noción de álgebra local asociada a un elemento constituye una herramienta fundamental para resolver distintas cuestiones a lo largo de esta memoria. El Capítulo II está dedicado a analizar ciertas condiciones locales de finitud de un álgebra asociativa, que proporcionan un nuevo enfoque a toda una generación de teoremas de estructura que va desde el clásico de Wedderburn-Artin hasta algunos relativamente recientes debidos a J. Fountain y V. Gould, y que pasa por el importante teorema de Martindale sobre anillos primos satisfaciendo una *identidad polinómica generalizada* (IPG).

—Dada un álgebra asociativa A y $a \in A$, el álgebra *homótopa* de A en a, denotada $A^{(a)}$, es el álgebra asociativa definida por la misma estructura lineal que A pero con el nuevo producto $x._a y = xay$, para todos $x, y \in A$. El conjunto

$$\ker_A(a) = \{x \in A : axa = 0\}$$

es un ideal de $A^{(a)}$ y se define el *álgebra local* de A en a, denotada A_a, como el álgebra factor

$$A_a := A^{(a)}/\ker_A(a).$$

En la primera sección del Capítulo II, recordamos algunos resultados generales sobre las álgebras locales de un álgebra asociativa. Por un lado, el álgebra local en un elemento permite estudiar las propiedades del mismo: $a \in A$ genera un ideal por la derecha minimal sii A_a es de división **(II.(1.6))**. Por otro lado, permiten ver la influencia que tienen ciertos elementos sobre la estructura global de A. Un subconjunto no vacío $X \subseteq A$ se dice que es *denso* si para todo ideal no nulo I de A, existe un elemento $x \in X$ que no pertenece al anulador de I. Un ejemplo significativo de subconjunto denso viene dado por $E = \{e, 1-e\}$, donde e es un idempotente de un álgebra unitaria A. Otro ejemplo de conjunto denso es el determinado por cada elemento no nulo de un álgebra prima A: todo subconjunto $\{x\}$, $0 \neq x \in A$, es denso puesto que todo ideal no nulo tiene anulador nulo. Se tiene que un álgebra semiprima tiene zócalo esencial si, y sólo si, posee un subconjunto denso de elementos artinianos, esto es, cuya álgebra local asociada sea artiniana **(II.(1.8))**.

En la sección segunda del Capítulo II consideramos elementos $a \in A$ que satisfacen una cierta condición de cadena ascendente, equivalentemente, A_a es un dominio **(II.(2.1))**. A estos elementos los llamamos *seudo-uniformes*. En esta sección también introducimos la noción de par de módulos libres de torsión *duales* sobre un dominio.

II.(2.3)

(1) Si A es prima y $u \in A$ es un elemento seudo-uniforme, entonces se puede construir un par (M, N) de módulos libres de torsión duales sobre el dominio A_u, de manera que A puede verse como un álgebra de operadores lineales y continuos con respecto al par (M, N) conteniendo al ideal de los operadores de rango finito.

(2) Recíprocamente, toda álgebra de operadores lineales y continuos con respecto a un par de módulos libres de torsión duales sobre un dominio, que contenga al ideal de los operadores de rango finito es prima y posee un elemento seudo-uniforme.

Este resultado puede ser considerado como un remoto antecesor del teorema de Wedderburn-Artin para álgebras simples artinianas, puesto que en el caso particular de que A posea zócalo no nulo, el anillo de división Δ asociado a A procede de cualquier elemento de división $u \in A$, de manera que (M, N) es de hecho un par (X, Y) de espacios vectoriales duales sobre $\Delta := A_u$, y obtenemos así el teorema de estructura clásico de las álgebras primas con ideales por la izquierda minimales [57, 1.2.1].

En la sección tercera del segundo capítulo, mostramos otra aplicación importante de II.(2.3), que es cuando A es prima, no singular por la izquierda y u es uniforme por la izquierda. Entonces A_u es un dominio de Ore por la izquierda y A es un orden por la izquierda (en el sentido de Ánh-Márki) en un álgebra prima Q con zócalo **(II.(3.4))**. Por supuesto, si A tiene dimensión uniforme por la izquierda finita, entonces A es un orden *clásico* en un álgebra simple y artiniana Q, y lo que obtenemos es el teorema de Goldie. Como aplicación de estos resultados, vemos que las álgebras semiprimas que tienen bien un subconjunto denso de elementos cuyas locales son dominios o un subconjunto denso de elementos cuyas locales son dominios de Ore, son precisamente los productos subdirectos esenciales de familias de álgebras primas que poseen elementos seudo-uniformes o elementos no nulos de Goldie por la izquierda, respectivamente **(II.(3.6))**.

Finalizamos el Capítulo II con una breve sección dedicada al teorema de Martindale sobre anillos primos que satisfacen una IPG [15]. Tanto este teorema como la definición de IPG hacen uso de la clausura central de un anillo. P.N. Ánh y L. Márki dieron en [6] caracterizaciones internas de estos anillos eliminando la clausura central. En particular, un álgebra prima A satisface una IPG si, y sólo si, A tiene un elemento *de cuadrado cancelable* a tal que el álgebra aAa satisface una *identidad polinómica*, i.e., es *PI*, pero la subálgebra aAa es isomorfa al álgebra local de A en a^2 **(II.(3.2))**. Luego, se tiene que un álgebra prima A satisface una IPG si, y sólo si, contiene un elemento PI no nulo. Con esta terminología, el teorema de Martindale se enuncia como sigue: un álgebra A es prima y contiene un elemento PI no nulo si, y sólo si, A es un orden Ánh-Márki por la izquierda en un álgebra primitiva Q con zócalo no nulo cuya álgebra de división asociada Δ es de dimensión finita sobre su centro **(II.(4.1))**.

A continuación comentamos los resultados del tercer capítulo. La noción de zócalo para álgebras de Jordan fue introducida por J.M. Osborn y M.L. Racine [87] y más tarde extendida por A. Fernández *et al* [39] al contexto de los sistemas triples de Jordan y por O. Loos [71] al de los pares de Jordan. Esta noción ha demostrado ser una herramienta muy útil en la reciente teoría de estructura de Jordan ([14], [27], [83]). Los sistemas de Jordan fuertemente primos con zócalo pueden ser considerados como un eslabón entre la teoría general, sin condiciones de finitud ([25], [27], [82], [106]), y la teoría clásica, con capacidad finita ([61], [70]). En [30] y [40] se determinan los sistemas de Jordan con zócalo no nulo bajo ciertas restricciones en la característica, refinando la clasificación de Zel'manov de los sistemas primos ([104], [105], [106]). Sin ninguna restricción en la característica, las álgebras y los pares de Jordan de capacidad infinita fueron determinados en [35] y [71]. El objetivo del Capítulo III es dar una descripción de los pares de Jordan fuertemente primos con zócalo no nulo sin restricción en la característica, lo que ha sido recogido en [45]. Los pares de Jordan fuertemente primos con zócalo no nulo son o bien simples con capacidad finita (de clifford o albert), o especiales conteniendo un ideal amplio $H_0(A, *)$, donde $(A, *)$ es un par asociativo $*$-simple que coincide con su zócalo y $*$ es una involución polarizada, por lo que su descripción se reduce a la descripción de los pares asociativos simples con zócalo no nulo e involuciones polarizadas, a la descripción de sus pares amplios $H_0(A, *)$ y a la de sus correspondientes sistemas de cocientes de Martindale.

Comenzamos este tercer capítulo con una sección en la que se recuerdan las principales nociones que se utilizan a lo largo del mismo, tales como álgebra local asociada a un elemento de un sistema de Jordan, capacidad de un sistema de Jordan, zócalo de un sistema de Jordan, ideales hermitianos, etc. En la segunda sección, introducimos la noción de par de espacios vectoriales *semi-duales* sobre un álgebra de división con involución y determinamos la estructura de los pares asociativos primos con zócalo no nulo e involución polarizada.

III.(2.8) Sea A un par asociativo primo con zócalo no nulo y una involución polarizada $*$. Entonces

(1) A puede verse como un par de operadores lineales y continuos con respecto a un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución Δ, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$, con zócalo isomorfo al ideal de los operadores de rango finito.

(2) La involución $*$ se corresponde bien con $\#$, o con $-\#$, donde $\#$ es la involución adjunta de operadores. Si se da lo segundo, Δ es de hecho un cuerpo F y $\alpha = \overline{\alpha}$ para todo $\alpha \in F$.

Cuando el par de espacios vectoriales semi-duales en III.(2.8) se define a partir de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces el par de los operadores lineales y continuos con la involución adjunta no es más que el par definido por un álgebra de matrices cuadradas con la involución conjugada traspuesta **(III.(2.9))**. Culminamos esta segunda sección con un teorema **(III.(2.12))** que puede ser considerado como una extensión natural del conocido como teorema $*$-Litoff para anillos asociativos con involución [15, 4.6.15]. En la tercera sección del Capítulo III describimos los pares amplios $H_0(A,*)$, donde A es un par asociativo simple que coincide con su zócalo y $*$ es una involución polarizada y demostramos, de una manera elemental, que tales pares son simples y coinciden con su zócalo **(III.(3.3))** y **(III.(3.6))**. Ya con todos los ingredientes, en la sección cuarta alcanzamos nuestro objetivo de determinar los pares de Jordan fuertemente primos con zócalo no nulo.

III.(4.1) Un par de Jordan es fuertemente primo con zócalo no nulo si, y sólo si, es isomorfo a uno de los siguientes,

(1) un par de Jordan simple y excepcional, que es de dimensión finita sobre su centroide [70, (12.12(v)) y (12.12(vi))],

(2) un par de Jordan simple (especial) de tipo clifford [27, 8.14],

(3) un par de Jordan V de operadores continuos con respecto a dos pares de espacios vectoriales duales sobre la misma álgebra de división, con zócalo isomorfo al ideal de los operadores de rango finito.

(4) un par de Jordan V de operadores continuos antisimétricos con respecto a un par de espacios vectoriales semi-duales y su opuesto sobre un cuerpo F con la identidad como involución, con zócalo isomorfo al ideal de los operadores alternantes, y donde $\#$ es la involución adjunta,

(5) un par de Jordan V de operadores continuos hermíticos con respecto a un par de espacios vectoriales semi-duales y su opuesto sobre un álgebra de división con involución, con zócalo isomorfo a un par amplio no alternante, y donde $\#$ es la involución adjunta.

Como caso particular, describimos las álgebras de Jordan fuertemente primas con zócalo no nulo **(III.(4.2))**.

Pasamos a describir los resultados del cuarto capítulo. El conocido como teorema de Goldie para álgebras de Jordan, debido a E. Zel'manov para el caso lineal [107] y extendido al caso cuadrático por A. Fernández, E. García Rus y F. Montaner en [37], caracteriza las álgebras de Jordan que son órdenes en álgebras de Jordan no degeneradas y artinianas. Sin embargo, la condición natural de finitud en álgebras de Jordan es la tenencia de capacidad finita. Inspirándose en el caso asociativo, los autores de [37] caracterizan los órdenes en álgebras de Jordan no degeneradas con capacidad finita. Tales álgebras son aquéllas que tienen la propiedad de que un ideal interno es esencial si, y sólo si, posee un elemento inyectivo. Para designarlas hemos elegido la denominación de álgebra de *Lesieur-Croisot*, como pequeño homenaje a estos autores cuyo trabajo sobre anillos primos con condiciones de cadena ascendente es con frecuencia ignorado en las referencias.

Siguiendo la filosofía del Capítulo II, en el Capítulo IV estudiamos el conjunto $\mathrm{LC}(J)$ de los elementos de Lesieur-Croisot de un álgebra de Jordan fuertemente prima J, esto es, elementos cuya local asociada es un álgebra de Jordan de Lesieur-Croisot. Nuestra conjetura es que tal conjunto (incluso en el caso no degenerado) es de hecho un ideal, lo que constituiría un primer paso de un proyecto más amplio que busca desarrollar una teoría local de

Goldie para sistemas de Jordan. En este capítulo damos una respuesta parcial a tal conjetura.

El Capítulo IV consta de dos secciones, la primera de introducción, en la que se establece la notación y se recuerdan los resultados fundamentales sobre la teoría de Goldie para álgebras de Jordan obtenidos en [37]. En la segunda, por un lado, se demuestra que el conjunto de los elementos de Lesieur-Croisot de un álgebra de Jordan fuertemente prima J con elementos PI no nulos constituye un ideal de J **(IV.(2.1))**. Por otro lado, se demuestra que para un álgebra de Jordan fuertemente prima sin elementos PI, el conjunto $\mathrm{LC}(J)$ de los elementos de Lesieur-Croisot de J coincide con el conjunto $\mathrm{F}(J)$ de los elementos de J cuyas locales tienen dimensión uniforme finita y el resultado principal de este capítulo es el siguiente.

IV.(2.8) Sea J un álgebra de Jordan fuertemente prima sin elementos PI y R una $*$-envolvente asociativa ajustada de J. Entonces

$$\mathrm{F}(J) = \mathrm{I}_l(R) \cap J,$$

donde $\mathrm{I}_l(R)$ denota al conjunto de elementos de R que tienen dimensión uniforme por la izquierda finita. Además, si R es prima, entonces la dimensión uniforme de J_a coincide con la dimensión uniforme por la izquierda de R_a para todo $a \in \mathrm{F}(J)$.

De donde, se sigue que si $\mathrm{I}_l(R)$ es un ideal de R, entonces $\mathrm{F}(J) = \mathrm{LC}(J)$ es un ideal de J, como queríamos. Esto ocurre por ejemplo, si R es prima o si la involución $*$ es diagonal, pues en esos casos se tendría que R es no singular (porque J es de hecho no singular) y bajo no singularidad es bien conocido que $\mathrm{I}_l(R)$ es un ideal de R [7, Prop. 1]. Sin embargo, el problema, en general, queda abierto y se reduce a probar que para un álgebra asociativa con involución $(R, *)$ que sea $*$-prima y $*$-*no singular* por la izquierda, esto es, $Z_l(R) \cap Z_l(R)^* = 0$, se tiene que el conjunto $I_l(R)$ es un ideal de R.

Esta memoria acaba con un pequeño apéndice en el que se recoge parte del contenido de unos seminarios impartidos por los Profesores J.A. Anquela y T.Cortés durante el otoño de 2000 en la Universidad de Oviedo. En particular, se recogen una serie de resultados en los que se demuestra la existencia de ideales hermitianos del álgebra de Jordan libre especial conteniendo *polinomios de zelmanov* en el caso lineal.

La presentación de esta memoria supone la culminación de unos años de intenso trabajo en los que han sido muchos los momentos de satisfacción personal y profesional, y durante los cuales siempre he contado con la ayuda y el apoyo incondicional de mi familia, de mis amigos y de mis compañeros. Es por ello que quiero dar las gracias a todas aquellas personas que, de una u otra forma, han sido partícipes de este trabajo, especialmente a mis padres, a quienes dedico esta memoria, y a Juan, por participar de la ilusión de hacer realidad este proyecto, así como animarme a emprender otros nuevos.

Aprovecho este momento para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento al Profesor Antonio Fernández López por su constante ayuda en la realización de esta memoria. A lo largo de todos estos años, ha supuesto para mí un modelo a seguir como investigador, como docente y como persona. Quiero extender este agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Álgebra, Geometría y Topología de la Universidad de Málaga por su amable colaboración en multitud de cuestiones.

Deseo también dar las gracias a los Profesores Michel L. Racine y Erhard Neher por su hospitalidad durante el tiempo que pasé en la Universidad de Ottawa, en el que me facilitaron todos los medios necesarios para la realización de mi trabajo.

Muy especialmente, doy las gracias a los Profesores Jose A. Anquela y Teresa Cortés por el excelente trato, tanto personal como científico, que me dispensaron durante mi estancia de investigación en la Universidad de Oviedo. Sus enseñanzas han contribuido decisivamente en mi formación como investigadora.

Quiero también mostrar mi gratitud al Profesor Fernando Montaner por su hospitalidad durante el tiempo que pasé en la Universidad de Zaragoza, de él recibí un valiosísimo apoyo científico y un inestimable trato personal.

Por último, quiero dar las gracias a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, especialmente a los Profesores Ángel Rodríguez y Juan Martínez, por su cálida acogida en los meses que pasé allí que hizo que me sintíera como en casa.

A mis padres.

Capítulo I.

EL RETíCULO DE LOS IDEALES DE UN SISTEMA ALGEBRAICO

Sea R un anillo asociativo. Ignoremos el producto de elementos y concentrémosnos en el producto de ideales (biláteros). En el caso particular de que el anillo R sea semiprimo, el retículo $\mathcal{I}(R)$ de los ideales de R es seudo-complementado, y la información contenida en el mismo es más que suficiente para obtener importantes teoremas de descomposición del anillo R, especialmente bajo ciertas condiciones de cadena.

Nos proponemos en este capítulo, explorar esta idea en estructuras más generales que la de un anillo, y que englobaremos en la denominación de sistema algebraico, o sistema algebraico-topológico, que pasamos a definir.

1. Sistemas algebraicos y algebraico-topológicos.

En esta primera sección mostraremos que para cada ideal (respectivamente, ideal cerrado) I de un sistema algebraico (respectivamente, de un sistema algebraico-topológico) semiprimo A, existe un ideal (respectivamente, ideal cerrado), que denotaremos $I^{\perp}$, que es máximo con respecto a la propiedad $I \cap K = 0$ para todo ideal (respectivamente, ideal cerrado) K de A, y que, como veremos, se corresponde con el usual anulador de I en A.

Siguiendo [34], por *sistema algebraico* entendemos cualquier sistema algebraico *lineal* o *cuadrático*, asociativo o no, binario o ternario: álgebras no necesariamente asociativas, pares o triples asociativos y alternativos, álgebras, triples y pares de Jordan (cuadráticos) sobre un anillo de escalares arbitrario Φ. Adoptamos como referencias generales para resultados básicos, notación y terminología, los libros [61], [70] y [108], aunque destacaremos algunas definiciones y propiedades elementales. Las identidades JPx que aparecen en [70] se citarán con su numeración original sin hacer referencia explícita.

—Si $\mathcal{A}$ es un álgebra no necesariamente asociativa y X, Y son dos subconjuntos no vacios de $\mathcal{A}$, denotamos por $[XY]$ al ideal de $\mathcal{A}$ generado por la expansión lineal de los productos xy, $x \in X$ e $y \in Y$. Entonces el producto de dos ideales I_1 e I_2 de $\mathcal{A}$ viene dado por el ideal

$$I_1 \star I_2 := [I_1 I_2].$$

Nótese que si $\mathcal{A}$ es asociativa o incluso alternativa, se tiene que $I_1 \star I_2 = I_1 I_2$. Por otro lado, un *sistema triple asociativo* es un Φ-módulo $\mathcal{A}$ junto con un producto trilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (x, y, z) & \mapsto & xyz \end{array}$$

satisfaciendo

$$(uvx)yz = u(vxy)z = uv(xyz)$$

cualesquiera que sean $u, v, x, y, z \in \mathcal{A}$, y un *par asociativo* es un par $A = (A^+, A^-)$ de Φ-módulos que actúan sobre cada uno como un sistema triple asociativo a través de dos aplicaciones trilineales

$$\begin{array}{ccc} A^{\sigma} \times A^{-\sigma} \times A^{\sigma} & \to & A^{\sigma} \\ (x, y, z) & \mapsto & xyz \end{array}$$

para $\sigma = \pm$. Nótese que un álgebra asociativa $\mathcal{A}$ es un sistema triple asociativo para el producto triple xyz, y por tanto $A := (\mathcal{A}, \mathcal{A})$ es un par asociativo.

—Si $A = (A^+, A^-)$ es un par asociativo e $I_1 = (I_1^+, I_1^-)$, $I_2 = (I_2^+, I_2^-)$ son ideales de A, entonces el producto de I_1 e I_2 viene dado por el ideal

$$I_1 \star I_2 := (I_1^+ A^- I_2^+ + A^+ I_1^- A^+ I_2^- A^+, I_1^- A^+ I_2^- + A^- I_1^+ A^- I_2^+ A^-)$$

de A. Si $\mathcal{A}$ es un sistema triple e I_1, I_2 son ideales de $\mathcal{A}$, entonces $I_1 \star I_2 := I_1 \mathcal{A} I_2 + \mathcal{A} I_1 \mathcal{A} I_2 \mathcal{A}$.

Como veremos, todo sistema (álgebra, par o sistema triple) algebraico asociativo determina un sistema de Jordan. Recordemos que un *álgebra de Jordan* es un Φ-módulo J junto con dos aplicaciones cuadráticas

$$\begin{array}{cccc} (\ )^2 : & J & \to & J \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{cccc} U : & J & \to & \mathrm{End}_\Phi(J) \\ & x & \mapsto & U_x \end{array}$$

que satisfacen las siguientes identidades en toda extensión escalar de J,

(JA1) $x^2 \circ y = V_{x,x} y$,

(JA2) $x \circ U_x y = U_x(x \circ y)$,

(JA3) $(x^2)^2 = U_x x^2$,

(JA4) $(U_x y)^2 = U_x U_y x^2$,

(JA5) $U_{x^2} = U_x^2$,

(JA6) $U_{U_x y} = U_x U_y U_x$,

donde $x \circ y := (x+y)^2 - x^2 - y^2$ y $V_{x,y} z := U_{x,z} y := (U_{x+z} - U_x - U_z) y$ son sus linealizaciones. Se emplea también la notación $\{x, y, z\} := U_{x,z} y$. La validez de las identidades anteriores en toda extensión escalar de J equivale a que todas sus linealizaciones se cumplan en J.

—Si I_1, I_2 son ideales de un álgebra de Jordan J, entonces su producto viene dado por

$$I_1 \star I_2 := U_{I_1} I_2,$$

que es un ideal de J por [79, p. 221], donde recordemos que un submódulo $I \subseteq J$ se dice que es un *ideal interno* si $U_I J + I^2 \subseteq I$; un *ideal externo* si $U_J I + I \circ J \subseteq I$; y un *ideal* si es interno y externo.

—Un *par de Jordan* V es una pareja de Φ-módulos (V^+, V^-) junto con un par de aplicaciones cuadráticas

$$\begin{array}{rccc} Q^\sigma: & V^\sigma & \to & \mathrm{Hom}_\Phi(V^{-\sigma}, V^\sigma) \\ & x & \mapsto & Q^\sigma_x \end{array}$$

$\sigma = \pm$, tales que las siguientes identidades se satisfacen en toda extensión escalar de V,

(JP1) $D^\sigma_{x,y} Q^\sigma_x = Q^\sigma_x D^{-\sigma}_{y,x}$,

(JP2) $D^\sigma_{Q^\sigma_x y, y} = D^\sigma_{x, Q^{-\sigma}_y x}$,

(JP3) $Q^\sigma_{Q^\sigma_x y} = Q^\sigma_x Q^{-\sigma}_y Q^\sigma_x$,

donde $D^\sigma_{x,y} z := Q^\sigma_{x,z} y := \{x, y, z\} := (Q^\sigma_{x+z} - Q^\sigma_x - Q^\sigma_z) y$ son sus linealizaciones. En adelante omitiremos el superíndice σ que quedará determinado por los elementos sobre los que la aplicación actúa.

La categoría de los pares de Jordan es equivalente a la de los sistemas triples de Jordan polarizados, donde un *sistema triple de Jordan* T es un Φ-módulo sobre el que hay definida una aplicación cuadrática

$$\begin{array}{rccc} P: & T & \to & \mathrm{End}_\Phi(T) \\ & x & \mapsto & P_x \end{array}$$

de modo que si $L_{x,y} z := P_{x,z} y := \{x, y, z\} := (P_{x+z} - P_x - P_z) y$ denota su linealización, las siguientes identidades se cumplen en toda extensión escalar de T,

(JT1) $L_{x,y} P_x = P_x L_{y,x}$,

(JT2) $L_{P_x y, y} = L_{x, P_y x}$,

(JT3) $P_{P_x y} = P_x P_y P_x$.

—Un sistema triple de Jordan T se dice que es *polarizado* si $T = T^+ \oplus T^-$ con $P_{T^\sigma} T^\sigma = 0$ y $P_{T^\sigma} T^{-\sigma} \subseteq T^\sigma$.

Si V es un par de Jordan, entonces $T(V) := V^+ \oplus V^-$ con $P_{(x^+ + x^-)}(y^+ + y^-) = Q_{x^+} y^- + Q_{x^-} y^+$ es un sistema triple polarizado; si T es un sistema triple polarizado, entonces $V := (T^+, T^-)$ con $Q^\sigma_x = P_x$ es un par de Jordan. Por otro lado, duplicando un álgebra o sistema triple de Jordan J, con operación cuadrática U o T, respectivamente, se obtiene el par de Jordan $V(J) = (J, J)$ con $Q_x y = U_x y$ o $Q_x y = T_x y$, respectivamente.

—Si T es un sistema triple de Jordan e I_1, I_2 son ideales de T, su producto se define como

$$I_1 \star I_2 := P_{I_1} I_2 + P_T P_{I_1} I_2$$

que es de nuevo un ideal de T por [79, p. 221], donde recordemos que un submódulo I de T se dice que es un *ideal interno* si $P_I T \subseteq I$; un *ideal externo* si $P_T I + L_{T,T} I \subseteq I$; y un *ideal* si es interno y externo. El producto de ideales de V se define a partir del producto de ideales de sistemas triples (utilizando la equivalencia que existe entre pares de Jordan y sistemas triples polarizados).

A partir de todo sistema asociativo A podemos obtener el sistema de Jordan A^J, sobre el mismo Φ-módulo, con productos construidos a partir del producto asociativo de A. En particular, si A es un álgebra asociativa , entonces determina el álgebra de Jordan A^J mediante las operaciones $x^2 = xx$ y $U_x y = xyx$, para cualesquiera $x, y \in A$. Por otro lado, todo par asociativo $A = (A^+, A^-)$ (sistema triple asociativo) da lugar a un par (sistema triple) de Jordan A^J, definiendo $Q_x y = xyx$, para cualesquiera $x \in A^\sigma$, $y \in A^{-\sigma}$, $\sigma = \pm$ ($P_x y = xyx$, para cualesquiera $x, y \in A$).

—Un sistema de Jordan (álgebra, par o sistema triple) se dice que es *especial* si es un subsistema de A^J para algún sistema asociativo A. Un sistema de Jordan que no es especial se dice que es *excepcional*.

A continuación recogemos una serie de propiedades que son comunes al producto de ideales de los distintos sistemas algebraicos que ha sido definido en cada caso y al que denotaremos por $\star$. Como siempre, si A es un sistema algebraico, la notación $I \triangleleft A$ indicará que I es un ideal de A.

1.1 Si A es un sistema algebraico, entonces es claro que para cualesquiera ideales I, J, K, J_α de A se satisfacen las siguientes propiedades,

(1) Si $I \subseteq J$, entonces $K \star I \subseteq K \star J$ e $I \star K \subseteq J \star K$,

(2) $I \star J \subseteq I \cap J$,

(3) $I \star (\sum_\alpha J_\alpha) = \sum_\alpha (I \star J_\alpha)$.

Con respecto a la primera variable, y debido a la no linealidad de las operaciones de Jordan $x \mapsto U_x$, $x \mapsto P_x$ y $x \mapsto Q_x$, no podemos asegurar sin embargo que $(\sum_\alpha J_\alpha) \star I = \sum_\alpha (J_\alpha \star I)$. Este hecho ha de tenerse en cuenta a la hora de definir productos en retículos.

—Un sistema algebraico A se dice que es *semiprimo* si $I^2 := I \star I = 0 \Rightarrow I = 0$, para todo ideal I de A.

1.2 Si A es un sistema algebraico semiprimo, claramente se tiene que

$$I_1 \star I_2 = 0 \Leftrightarrow I_1 \cap I_2 = 0 \Leftrightarrow I_2 \star I_1 = 0,$$

para todo par de ideales I_1, I_2 de A. De aquí, junto con (1.1(1)) y (1.1(3)), se sigue que para cada ideal I de un sistema algebraico semiprimo A, el ideal $I^\perp := \sum\{K \triangleleft A : K \star I = 0\}$ verifica

$$I \cap K = 0 \Leftrightarrow K \subseteq I^\perp,$$

para todo $K \triangleleft A$. A $I^\perp$ lo llamaremos el *seudo-complemento* de I.

La noción de seudo-complemento de un ideal de un sistema algebraico semiprimo es coherente con la de *anulador*: recordemos que dada un álgebra alternativa $\mathcal{A}$ y $X \subseteq \mathcal{A}$, el *anulador por la izquierda* de X se define como $\mathrm{lan}_\mathcal{A}(X) = \{a \in \mathcal{A} : aX = 0\}$, el *anulador por la derecha* $\mathrm{ran}_\mathcal{A}(X) = \{a \in \mathcal{A} : Xa = 0\}$ y el *anulador* como $\mathrm{an}_\mathcal{A}(X) = \mathrm{lan}_\mathcal{A}(X) \cap \mathrm{ran}_\mathcal{A}(X)$. Si I es un ideal de $\mathcal{A}$, entonces $\mathrm{an}_\mathcal{A}(I)$ es un ideal de $\mathcal{A}$ [108, p. 168] y si además $\mathcal{A}$ es semiprima, entonces $\mathrm{an}_\mathcal{A}(I) = \mathrm{lan}_\mathcal{A}(I) = \mathrm{ran}_\mathcal{A}(I)$.

Por otro lado, si A es un par asociativo, el *anulador por la izquierda* de un conjunto $X \subseteq A^{-\sigma}$ se define como $\mathrm{lan}_A(X) = \{z \in A^\sigma : zXA^\sigma = 0 = A^{-\sigma}zX\}$. De forma análoga se define el *anulador por la derecha* $\mathrm{ran}_A(X)$ de X. Es claro que $\mathrm{lan}_A(X)$ (respectivamente $\mathrm{ran}_A(X)$) es un ideal por la izquierda (respectivamente por la derecha) de A. Finalmente, se define el *anulador* de X como la intersección $\mathrm{an}_A(X) = \mathrm{lan}_A(X) \cap \mathrm{ran}_A(X)$. El *anulador* de un conjunto de un sistema triple asociativo se define de manera similar. Si A es un par asociativo semiprimo e $I = (I^+, I^-)$ es un ideal de A, entonces $\mathrm{an}_A(I) = (\mathrm{an}_A(I^-), \mathrm{an}_A(I^+)) \triangleleft A$, donde $\mathrm{an}_A(I^\sigma) = \{x \in A^{-\sigma} : xI^\sigma x = 0\}$. Quitando el σ, se tiene la caracterización del anulador de un ideal de un sistema triple asociativo semiprimo.

Siguiendo [77], el *anulador* de un subconjunto X de un álgebra de Jordan J es el subconjunto $\mathrm{an}_J(X)$ de todos los elementos $z \in J$ que satisfacen

$$(\mathrm{Ai}) \quad U_z x = 0, \qquad (\mathrm{Aii}) \quad U_x z = 0 \qquad (\mathrm{Aiii}) \quad V_{z,x} J' = 0$$

$$(\mathrm{Aiv}) \quad V_{x,z} J' = 0 \quad (\mathrm{Av}) \quad U_z U_x J' = 0 \quad (\mathrm{Avi}) \quad U_x U_z J' = 0$$

para todo $x \in X$. Las propiedades de los anuladores se pueden encontrar en [77]. En particular, $\mathrm{an}_J(X)$ es un ideal interno de J para cada subconjunto X de J, y si I es un ideal de J, entonces su anulador también lo es. Nótese que las seis condiciones se reducen a cuatro, dado que (Aiii) $\Leftrightarrow$ (Aiv) (por la fórmula $V_{z,x} + V_{x,z} = V_{x \circ z}$) y (en presencia de (Ai) y (Aiii)) (Av) $\Leftrightarrow$ (Avi) (por la fórmula $U_z U_x + U_x U_z = U_{z \circ x} - V_{z,x} V_{x,z} + V_{U_z x^2}$). Si J es *no degenerada*, esto es, $U_x = 0 \Rightarrow x = 0$, en particular si J es semiprima, entonces $\mathrm{an}_J(I) = \{x \in J : U_x I = 0\}$.

—Si T es un sistema triple de Jordan, se sigue de [70, p. 104] que el *anulador* de un conjunto $X \subseteq T$ viene definido por

$$\begin{aligned} \mathrm{an}_T(X) = \{z \in T : P_z X = P_X z = 0 \quad \text{y} \\ P_z P_X = P_X P_z = L_{X,z} = L_{z,X} = 0\}, \end{aligned}$$

donde, al igual que en el caso de álgebras de Jordan, el anulador de un conjunto es siempre un ideal interno, y el anulador de un ideal es también un ideal. Cambiando el U por el Q o por el P en la caracterización del anulador de un ideal de un álgebra de Jordan no degenerada, se tiene la correspondiente caracterización del anulador de un ideal de un par o sistema triple de Jordan no degenerado, respectivamente.

1.3 PROPOSICIÓN. *Si A es un sistema algebraico semiprimo e I es un ideal de A, entonces*

$$I^\perp = \mathrm{an}_A(I),$$

esto es, $I \cap K = 0 \Leftrightarrow K \subseteq \mathrm{an}_A(I)$, para todo $K \triangleleft A$.

DEMOSTRACIÓN: Dado que $I \cap I^\perp = 0$, claramente se tiene que $I^\perp \subseteq \mathrm{an}_A(I)$. Por otro lado, de la definición de anulador en cada caso se sigue que $\mathrm{an}_A(I) \star I = 0$, y por tanto $\mathrm{an}_A(I) = I^\perp$. ∎

—Llamaremos *sistema algebraico-topológico* a todo sistema algebraico A dotado de una topología que haga continuas las operaciones algebraicas de A.

1.4 Sean A un sistema algebraico-topológico e I_1, I_2 ideales cerrados de A. Denotemos por juxtaposición al producto algebraico de ideales tal y como se ha descrito en cada caso y por $S \to \overline{S}$ la operación de clausura. Se sigue de la continuidad de las operaciones algebraicas que, en cada caso, el producto $I_1 \star I_2 := \overline{I_1 I_2}$ es un ideal cerrado de A. Además se satisfacen las condiciones (1), (2) y (3) de (1.1) para cualesquiera ideales cerrados de A: por ejemplo, $I \star (\overline{\sum_\alpha J_\alpha}) \subseteq \overline{I(\sum_\alpha J_\alpha)} = \overline{\sum_\alpha IJ_\alpha} = \overline{\sum_\alpha I \star J_\alpha}$.

Por otro lado, es inmediato comprobar que la semiprimidad algebraico-topológica de A es equivalente a la semiprimidad algebraica. Además, si A es semiprima, entonces

$$IK = 0 \Leftrightarrow I \star K = 0 \Leftrightarrow I \cap K = 0$$

para todo par de ideales cerrados I, K de A. Luego $I^\perp = \mathrm{an}_A(I)$, para cada ideal cerrado I de A, satisface $I \cap K = 0 \Leftrightarrow K \subseteq \mathrm{an}_A(I)$, para todo ideal cerrado K de A.

Como veremos en la sección siguiente, la operación $I \mapsto \mathrm{an}_A(I) = I^\perp$ define una seudo-complementación en el retículo de los ideales (cerrados) de un sistema algebraico (algebraico-topológico) semiprimo A.

2. Retículos seudo-complementados y álgebras de Boole.

Esbozaremos en esta sección la teoría básica de los retículos seudo-complementados y su relación fundamental con las álgebras de Boole. Además del material estándar, incluiremos algunos resultados, que pensamos son nuevos, y que se inspiran en la teoría de estructura de anillos topológicos y álgebras de Banach.

Recordemos que un *semirretículo* es un conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ en el que todo par de elementos a y b de S tiene un *ínfimo*, $a \wedge b$. Si además todo par de elementos a y b de S posee un *supremo*, $a \vee b$, entonces se dice que S es un *retículo*. Un semirretículo en el que todo subconjunto posee un ínfimo es de hecho un retículo *completo*.

Siguiendo [16, p. 125], un *semirretículo seudo-complementado* (a veces denominado s-semirretículo) es un semirretículo con elemento mínimo 0 y una operación unitaria (la *seudo-complementación*) $x \to x^{\perp}$ tal que, para cada $x \in S$,

$$x \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \leq x^{\perp},\ y \in S,$$

lo que es equivalente a que para cada $x \in S$ exista un elemento (su *seudo-complemento*) $x^{\perp} \in S$ máximo con respecto a la propiedad $x \wedge x^{\perp} = 0$. Nótese que todo s-semirretículo tiene un elemento máximo $1 = 0^{\perp}$.

Los semirretículos seudo-complementados que satisfacen la *Condición de Cadena Descendente* (en particular, los s-semirretículos finitos) son de hecho retículos (*retículos seudo-complementados*): todo par de elementos x e y posee la cota superior 1 y de ahí un supremo.

El primer ejemplo de retículo seudo-complementado nos lo proporcionan los sistemas algebraicos: el retículo $\mathcal{I}(A)$ de los ideales (cerrados) de un sistema algebraico (algebraico-topológico) semiprimo es seudo-complementado, siendo el seudo-complemento $I^{\perp}$ de cada $I \in \mathcal{I}(A)$ su usual anulador $\mathrm{an}_A(I)$ (ver (1.3) y (1.4)).

Las seudo-complementaciones en general, retienen la mayoría de las propiedades de los anuladores de ideales de un sistema algebraico semiprimo.

2.1 PROPOSICIÓN. *Sean S un semirretículo seudo-complementado, $x, y \in S$, e $\{y_\alpha\}$ una familia de elementos de S. Entonces*

(1) $x \leq y \Rightarrow y^{\perp} \leq x^{\perp}$,

(2) $x \leq x^{\perp\perp}$,

(3) $x^{\perp} = x^{\perp\perp\perp}$,

(4) $(x \wedge y)^{\perp\perp} = x^{\perp\perp} \wedge y^{\perp\perp}$,

(5) *si ambos* $\bigvee_\alpha y_\alpha$ *y* $\bigwedge_\alpha y_\alpha^{\perp}$ *existen, entonces* $(\bigvee_\alpha y_\alpha)^{\perp} = \bigwedge_\alpha y_\alpha^{\perp}$,

(6) *si ambos* $\bigvee_\alpha y_\alpha^{\perp}$ *y* $\bigvee_\alpha (x^{\perp} \wedge y_\alpha^{\perp})$ *existen, entonces* $x^{\perp} \wedge (\bigvee_\alpha y_\alpha^{\perp})^{\perp\perp} = (\bigvee_\alpha (x^{\perp} \wedge y_\alpha^{\perp}))^{\perp\perp}$.

DEMOSTRACIÓN: (1) y (2) son inmediatos; (3) se sigue de (1) y (2) dando como consecuencia, junto con (1) y (2), que la operación $x \to x^{\perp\perp}$ es una *operación de clausura*; la prueba de (4) no es trivial y puede encontrarse en [49, (18)] mientras que (5) fue probado en [98, 1.1]. Por tanto sólo tenemos que probar (6). Su prueba se basa en la siguiente técnica estándar: $x^\perp = y^\perp$ sii, para todo $a \in S$, $x^\perp \leq a^\perp$ es equivalente a $y^\perp \leq a^\perp$. En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
x^\perp \wedge (\bigvee_\alpha y_\alpha^\perp)^{\perp\perp} &= x^\perp \wedge (\bigwedge_\alpha y_\alpha^{\perp\perp})^\perp \leq a^\perp \\
&\Leftrightarrow x^\perp \wedge (\bigwedge_\alpha y_\alpha^{\perp\perp})^\perp \wedge a^{\perp\perp} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^\perp \wedge a^{\perp\perp} \leq (\bigwedge_\alpha y_\alpha^{\perp\perp})^{\perp\perp} = (\bigvee_\alpha y_\alpha^\perp)^\perp = \bigwedge_\alpha y_\alpha^{\perp\perp} \\
&\Leftrightarrow x^\perp \wedge a^{\perp\perp} \leq y_\alpha^{\perp\perp} \quad \forall \quad \alpha \Leftrightarrow x^\perp \wedge a^{\perp\perp} \wedge y_\alpha^\perp = 0 \quad \forall \quad \alpha \\
&\Leftrightarrow x^\perp \wedge y_\alpha^\perp \leq a^\perp \quad \forall \quad \alpha \Leftrightarrow (\bigvee_\alpha (x^\perp \wedge y_\alpha^\perp))^{\perp\perp} \leq a^{\perp\perp\perp} = a^\perp
\end{aligned}$$

■

Ejemplos de retículos seudo-complementados que no están ligados a estructuras algebraicas son los siguientes.

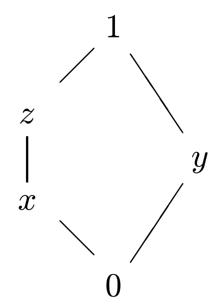
El retículo de los abiertos de un espacio topológico. Sea (X, T) un espacio topológico. Entonces T es un retículo completo donde el supremo viene determinado por la unión, y el ínfimo por el interior de la intersección, i.e., $\bigvee A_\alpha = \bigcup A_\alpha$ y $\bigwedge A_\alpha = \mathrm{int}(\bigcap A_\alpha)$ para toda familia $\{A_\alpha\}$ de abiertos de X. Este retículo es seudo-complementado con el ortogonal de un abierto A de X siendo su exterior: $A^\perp = \mathrm{ext}(A)$.

Retículos distributivos noetherianos. Todo retículo distributivo L que sea finito, o más generalmente, que satisfaga la *Condición de Cadena Ascendente*, es seudo-complementado. Para $x \in L$, tomemos $x^\perp$ maximal entre todos los $y \in L$ tales que $x \wedge y = 0$. Se sigue de la distributividad que $x^\perp$ es de hecho máximo. Entonces, $x \to x^\perp$ define una seudo-complementación en L.

Recordemos que un retículo L se dice que es *complementado* si para cada $a \in L$, existe $a' \in L$ tal que $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$. A pesar de lo que el nombre sugiere, un retículo complementado no es en general seudo-complementado; considérese por ejemplo el retículo de los subespacios de un espacio vectorial de dimensión mayor que 1. Sin embargo, todo retículo complementado y distributivo es seudo-complementado, donde $x^\perp$ es el *único* complemento del elemento x.

2.2 Los retículos distributivos y complementados se conocen como *álgebras de Boole*. Una caracterización de las álgebras de Boole es la siguiente: un semirretículo S con elemento 0 es un álgebra de Boole si, y sólo si, tiene una operación unitaria $x \mapsto x'$ tal que $x \wedge y' = 0 \Leftrightarrow x \leq y$ [48].

Tomando prestada terminología de la teoría de álgebras de Banach [17] (o anillos topológicos [103]), diremos que un s-semirretículo S es *anulador* si $x^\perp \neq 0$ para todo $x \neq 1$ en S. Un s-retículo no es necesariamente anulador, como puede verse considerando la cadena de tres elementos $C_2 = \{0, x, 1\}$. Además, los ideales principales de semirretículos anuladores no heredan, en general, la condición anuladora: consideremos el pentágono no modular L_5



Nótese que $x^\perp = z^\perp = y$ e $y^\perp = z$. Luego L_5 es anulador. Sin embargo, el ideal principal $[\emptyset, z]$ es una cadena de tres elementos y por tanto no es anulador.

—Un semirretículo anulador que sea un retículo, se dice que es un *retículo anulador*. No todo semirretículo anulador es un retículo: consideremos S el conjunto parcialmente ordenado obtenido como la unión disjunta de $S = \mathcal{P}(A) \cup C_\infty$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de las partes de $A = \{a, b, c\}$ y $C_\infty : x_1 > x_2 > \ldots$ es una cadena infinita decreciente satisfaciendo que $\{a, b\} > x_1$, $\{a\} < x_n$ y $\{b\} < x_n$, para todo n. Entonces S es un semirretículo anulador y no es un retículo, porque el par de elementos a y b no posee un supremo en S.

El siguiente resultado, que constituye el objetivo de [69], es de hecho una consecuencia de (2.1(5)).

2.3 PROPOSICIÓN. *Un retículo seudo-complementado L es anulador, si, y sólo si, es complementado.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que L es complementado y sea $x \neq 1$. Tomemos un complemento x' de x. Entonces $1 = x \vee x'$ implica $x' \neq 0$, y $x \wedge x' = 0$ implica que $0 \neq x' \leq x^{\perp}$, luego L es anulador. Recíprocamente, si L es anulador tenemos, por (2.1(5)), que $(x \vee x^{\perp})^{\perp} = x^{\perp} \wedge x^{\perp\perp} = 0$, lo que implica que $x \vee x^{\perp} = 1$. ■

—Un elemento no nulo u de un semirretículo (con 0) S se dice que es un *átomo* si $0 \leq x \leq u$ implica $x = 0$ ó $x = u$, para todo $x \in S$ y S se dice que es *atómico* si, para todo elemento no nulo $x \in S$, el ideal principal $[0, x]$ contiene un átomo. Los semirretículos que satisfacen CCD son claramente atómicos.

Una cuestión importante en relación con los anuladores es cuándo el elemento máximo 1 de un s-retículo completo L es la unión de sus átomos. De hecho, muchos teoremas de estructura de álgebras de Banach o anillos topológicos se pueden establecer en estos términos ([103], [42]).

2.4 PROPOSICIÓN. *Para un retículo seudo-complementado completo L, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *El mayor elemento 1 es la unión del conjunto A de los átomos de L,*

(ii) *L es anulador y atómico.*

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $1 \neq x \in L$. Entonces existe un átomo $a \in A$ tal que a no es menor o igual que x, luego $a \wedge x = 0$ y por tanto $x^{\perp} \neq 0$, lo que prueba que L es anulador. Para ver que L es atómico, sea $0 \neq x \in L$. Entonces $[0, x]$ contiene al menos un átomo, puesto que de lo contrario tendríamos por (2.1(5)) que $x \leq (\bigvee A)^{\perp} = 1^{\perp} = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dado que L es atómico, $(\bigvee A)^{\perp} = 0$. Luego $\bigvee A = 1$ puesto que L es anulador. ■

Siguiendo con la terminología de los anillos topológicos [103], un semirretículo seudo-complementado S se dice que es *dual* si $x^{\perp\perp} = x$ para todo $x \in S$. Por (2.1(3)), un s-semirretículo S es dual si, y sólo si, la seudo-complementación $x \to x^{\perp}$ es inyectiva. Por tanto, es claro que los semirretículos duales son anuladores: $x^{\perp} = 0 = 1^{\perp} \Rightarrow x = 1$. Sin embargo, existen semirretículos anuladores que no son duales: el pentágono no modular L_5 es anulador y no es dual.

Por la caracterización de álgebra de Boole dada en (2.2), es claro que todo semirretículo dual $(L, \wedge, 0, \perp)$ es un álgebra de Boole (tomando $y' = y^\perp$). Sin embargo, no utilizaremos este hecho en la demostración del siguiente resultado que proporciona varias caracterizaciones de las álgebras de Boole.

2.5 Proposición. *Para un semirretículo L, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *L es un retículo anulador que es modular,*

(ii) *L es seudo-complementado y $[0, x]$ es anulador para todo $x \in L$,*

(iii) *L es dual,*

(iv) *L es un retículo seudo-complementado con $a \vee b = (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp$,*

(v) *L es un álgebra de Boole.*

Además, para un retículo completo L, las siguientes condiciones son equivalentes,

(vi) *L es un álgebra de Boole atómica,*

(vii) *L es un retículo seudo-complementado con $x = \bigvee\{a \in A : a \leq x\}$ para cada $x \in L$, donde A denota el conjunto de los átomos de L,*

(viii) *L es isomorfo al conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A.*

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sean $x, y \in L$ con $y \leq x$, e $y^{\perp_x} = y^\perp \wedge x$ el ortogonal de y en $[0, x]$. Si $y^{\perp_x} = 0$, entonces se sigue de (2.3) y modularidad que $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y^\perp) = y$, luego $[0, x]$ es anulador.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea $x \in L$. Dado que $[0, x^{\perp\perp}]$ es anulador y $x \leq x^{\perp\perp}$ por (2.1(2)), $x^\perp \wedge x^{\perp\perp} = 0$ implica $x = x^{\perp\perp}$. Luego, L es dual.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Para $a, b \in L$, $a^\perp \wedge b^\perp \leq a^\perp \Rightarrow a \leq a^{\perp\perp} \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp$, y de manera análoga $b \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp$. Luego $(a^\perp \wedge b^\perp)^\perp$ es una cota superior del par de elementos a y b. Entonces, si $x \in L$ es otra cota superior de a y b, se tiene que $x^\perp \leq a^\perp \wedge b^\perp$ y por tanto $(a^\perp \wedge b^\perp)^\perp \leq x^{\perp\perp} = x$. Luego, $(a^\perp \wedge b^\perp)^\perp$ es el supremo del par a, b.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Tomando $a = b$ en (iv), tenemos que L es dual y entonces anulador, como ya se ha observado. Luego es complementado por (2.3). Se sigue de (2.1(6)) que L es, por tanto, distributivo.

(v) $\Rightarrow$ (i). Dado $x \in L$, escribimos x' para denotar al único complemento de x. Si $x \wedge y = 0$ para algún $y \in L$, entonces $y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee x') = y \wedge x'$ implica $y \leq x'$. Luego, L es seudo-complementado con $x^{\perp} = x'$. Ahora, $x^{\perp} = 0$ implica $x = x \vee x^{\perp} = 1$, y por tanto L es anulador, y modular dado que es distributivo.

Supongamos ahora que L es un retículo completo y sea A el conjunto de sus átomos.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Por (v) $\Rightarrow$ (ii), $[0, x]$ es anulador, y dado que también es completo y atómico, $x = \bigvee\{a \in A : a \leq x\}$ por (2.4).

(vii) $\Rightarrow$ (viii). Consideremos la aplicación $f : \mathcal{P}(A) \to L$ dada por $f(X) := \bigvee X$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de las partes de A. Claramente, f es sobreyectiva. Obsérvese que si $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ son tales que $(\bigvee Y)^{\perp} \leq (\bigvee X)^{\perp}$, entonces $X \subset Y$, en efecto, pues de lo contrario, sea $x \in X$ que no está en Y. Se tendría que $x \leq (\bigvee Y)^{\perp}$ por (2.1(5)). Pero x no es menor o igual que $(\bigvee X)^{\perp}$, dado que $x \leq (\bigvee X)^{\perp} \leq x^{\perp}$, lo que implicaría $x = 0$, que es una contradicción. Como consecuencia se tiene que f es inyectiva, donde f y f^{-1} conservan el orden. Por tanto, f es un isomorfismo de retículos.

(viii) $\Rightarrow$ (vi) es trivial. $\blacksquare$

La equivalencia (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) de (2.5) se debe a B. Yood para el retículo de los ideales cerrados de un anillo topológico [103, 2.9]. Por otro lado, B. E. Johnson dio en [62] un ejemplo de álgebra de Banach semisimple y conmutativa cuyo retículo de los ideales cerrados es anulador y no dual. Luego, por (i) $\Leftrightarrow$ (iii) de (2.5), este retículo no puede ser modular. Por tanto, mientras que los retículos de ideales son modulares, los de ideales cerrados no lo son necesariamente.

—Un anillo topológico semiprimo se dice que es *anulador generalizado* (*dual generalizado*) si el retículo de sus ideales cerrados es anulador (dual). Los anillos topológicos anuladores generalizados y duales generalizados fueron estudiados por B. Yood en [103].

Se sigue de [103, 2.6] (resultado que será extendido al caso más general de los retículos seudo-complementados en la última sección de este capítulo) que el retículo de los ideales cerrados de un anillo dual generalizado cuyos ideales primos cerrados tengan intersección nula es un álgebra de Boole atómica. Otros ejemplos de sistemas algebraico-topológicos semiprimos cuyos retículos de ideales cerrados son álgebras de Boole atómicas son: (1) los anillos duales cuyos ideales primos cerrados tengan intersección nula (ver [63]): las H*-álgebras propias de W. Ambrose [2], las álgebras de Banach duales semiprimitivas de F.F. Bonsall y A.W. Goldie [17], las B*-álgebras compactas de J.C. Alexander [1], las álgebras de Banach complementadas por la derecha y semiprimitivas de B.J. Tomiuk [101]. (2) Las H*-álgebras propias no necesariamente asociativas ([28], [96], [102]); los triples propios de Hilbert hermitianos [86, p. 157]. (3) Las JB-álgebras duales [19]. (4) Los B*-triples asociativos compactos [31]. (5) Los JB*-triples con zócalo denso [18], más generalmente, los JB*-triples compactos [20]. (6) Los JBW*-triples atómicos [86, p. 176].

Veamos que todo semirretículo seudo-complementado S lleva asociado un álgebra de Boole. Denotemos

$$\mathcal{B}(S) = \{x^\perp : x \in S\}.$$

Por (2.1(3)), se tiene que $y \in \mathcal{B}(S) \Leftrightarrow y = y^{\perp\perp}$.

2.6 Teorema. (Frink-Glivenko) *Sea S un semirretículo seudo-complementado. Entonces*

(i) *$\mathcal{B}(S)$ es un álgebra de Boole con la determinación original del ínfimo, el complemento Booleano de un elemento siendo su seudo-complemento, y el supremo de dos elementos x e y dado por $x \nabla y = (x^\perp \wedge y^\perp)^\perp$.*

(ii) *Si S es un retículo completo, entonces el álgebra de Boole $\mathcal{B}(S)$ es también completa.*

(iii) *La aplicación $x \to x^{\perp\perp}$ de S sobre $\mathcal{B}(S)$ conserva el ínfimo, el elemento 0, seudo-complementos, y uniones cuando éstas existen.*

Comentarios sobre la Demostración: El apartado (i) del teorema fue probado para retículos distributivos completos por V. Glivenko y en toda su generalidad por O. Frink en [49, Th. 1]. Ambas pruebas usan axiomatizaciones especiales de las álgebras de Boole (como (2.2)) para superar la dificultad que plantea probar la distributividad. Una prueba directa de (i) se da en [54]. Otra es como sigue: para $x, y \in \mathcal{B}(S)$ tenemos por (2.1(4)) que $x \wedge y = x^{\perp\perp} \wedge y^{\perp\perp} = (x \wedge y)^{\perp\perp} \in \mathcal{B}(S)$. Por tanto, $\mathcal{B}(S)$ es un semirretículo claramente dual por la seudo-complementación heredada de S. Luego, es un álgebra de Boole por (iii) $\Rightarrow$ (v) de (2.5), con el supremo de dos elementos x e y dado por $x \nabla y = (x^{\perp} \wedge y^{\perp})^{\perp}$.

Los apartados (ii) y (iii) fueron primeramente probados por V. Glivenko bajo algunas restricciones (véase [16]) y más tarde extendida por O. Frink [49, Th. 2] a la presente forma. ■

Un ejemplo clásico de álgebra de Boole asociada a un retículo seudo-complementado es el determinado por los ideales *anuladores* $\mathrm{an}_A(I)$, equivalentemente, $I = I^{\perp\perp}$, de un sistema algebraico semiprimo A (véase [68, p. 111]). Como aplicación de (2.5), veámos una demostración en términos reticulares de un conocido teorema debido a J. Dieudonné [95, Th. 2.6].

2.7 TEOREMA. *Sea A un álgebra (no necesariamente asociativa) semiprima de dimensión finita sobre un cuerpo F, con una forma traza, esto es, una forma bilineal simétrica no degenerada $<,>: A \times A \to F$ tal que $< xy, z >=< x, yz >$, para todos x, y, z en A. Entonces A es una suma directa finita $A = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$ de sus ideales simples M_i, $i = 1, \ldots, r$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el álgebra de Boole asociada al retículo $\mathcal{I}(A)$ de los ideales de A. Como A es de dimensión finita, se tiene que $\mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$ satisface ambas condiciones de cadena (CCA y CCD son equivalentes porque el tercer anulador coincide con el primero) y entonces, por (2.5(vi) $\Rightarrow$ (viii)), es finita. Además, para todo ideal $I \in \mathcal{I}(A)$, se tiene que $I = I^{\perp\perp}$, donde $I^{\perp} = \mathrm{an}_A(I) = \{x \in A :< I, x >= 0\}$, esto es, $\mathcal{I}(A) = \mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$. Luego, aplicando (2.4), se tiene que $A = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$, donde los M_i, $i = 1, \ldots, r$ son sus ideales simples. ■

El teorema de Dieudonné en el caso de que A sea un álgebra de Jordan lineal se debe a A. Albert [95, Cor. 4.6]. Por otro lado, si A es un álgebra alternativa semiprimitiva sobre un cuerpo de característica 0, entonces $(x, y) :=$ traza$(\rho_x \rho_y)$, donde ρ_x, ρ_x son los operadores de multiplicación por la derecha de A, es una forma traza de A [95, p. 44]. Si A es un álgebra de Lie sobre un cuerpo de característica 0, la forma *Killing* definida sobre A es también una forma traza [58, p. 21]. En [42, Th. 15], se da una versión infinito-dimensional del teorema de Dieudonné para una H*-álgebra no asociativa semiprima A, donde el álgebra de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$ asociada al retículo $\mathcal{I}(A)$ de los ideales cerrados de A, es atómica y no necesariamente finita.

3. Elementos uniformes y dimensión de Goldie.

La relación entre un s-semirretículo S y su álgebra de Boole asociada $\mathcal{B}(S)$ puede iluminarse estudiando los elementos uniformes de S. En esta sección repasaremos las propiedades de los elementos uniformes e introduciremos la noción de dimensión de Goldie de un s-retículo completo, analizando su aplicación a la obtención de teoremas de descomposición de sistemas algebraicos semiprimos como productos subdirectos esenciales de sistemas primos, bajo ciertas condiciones de cadena. Finalizaremos esta sección caracterizando los s-retículos completos que son álgebras de Boole finitas como aquéllos que tienen dimensión de Goldie igual a su longitud (máxima longitud de sus cadenas).

—Un elemento e de un semirretículo S (con elemento 0) se dice que es *esencial* si $e \wedge x \neq 0$ para todo elemento no nulo $x \in S$. Un elemento no nulo u de S se dice que es *uniforme* si cualquier $0 \neq x \leq u$ es esencial en el subsemirretículo $[0, u]$.

Las propiedades de los elementos uniformes fueron primeramente consideradas en [34, 3.1] y posteriormente recogidas en [43, 2.8]. A continuación recordamos algunas de ellas.

3.1 PROPOSICIÓN. *Sea S un semirretículo seudo-complementado.*

(1) *Si $u \in S$ es uniforme, entonces todo elemento $0 \neq x \leq u$ también lo es,*

(2) *un elemento no nulo u de S es uniforme si, y sólo si, su anulador $u^{\perp}$ es maximal entre todos los anuladores $x^{\perp}$, con $0 \neq x \in S$,*

(3) *para cada elemento uniforme u de S, existe un único elemento uniforme maximal v de S tal que $u \leq v$, a saber, $v = u^{\perp\perp}$,*

(4) *los elementos uniformes maximales de S son los átomos de $\mathcal{B}(S)$,*

(5) *los elementos uniformes maximales son mutuamente ortogonales, i.e., si u y v son elementos uniformes maximales con $u \neq v$, entonces $u \wedge v = 0$,*

(6) *si S es atómico, también lo es $\mathcal{B}(S)$. Además, la aplicación $a \to a^{\perp\perp}$ es una biyección del conjunto A de los átomos de S sobre el conjunto M de sus elementos uniformes maximales.*

Demostración: (1) es inmediato. (2). Supongamos que u es un elemento uniforme de S. Afirmamos que $b^\perp = u^\perp$ para todo elemento no nulo $b \leq u$. Dado que $b \leq u$ se tiene que $u^\perp \leq b^\perp$ por (2.1(1)). Por otro lado, si $b^\perp$ no es menor o igual que $u^\perp$ entonces $b^\perp \wedge u \neq 0$ y por tanto $b \wedge b^\perp = b \wedge (u \wedge b^\perp) \neq 0$ por la uniformidad de u, lo que es una contradicción. Sea ahora c un elemento no nulo de S tal que $u^\perp \leq c^\perp$. Si $c \wedge u = 0$, entonces $c \leq u^\perp \leq c^\perp$ y por tanto $c = 0$, que es de nuevo una contradicción, luego $c \wedge u \neq 0$. Entonces tenemos, por la primera parte de la prueba, que $c^\perp \leq (c \wedge u)^\perp = u^\perp$, y por tanto $c^\perp = u^\perp$, con lo cual $u^\perp$ es maximal.

Supongamos ahora que $u^\perp$ es maximal entre todos los anuladores $d^\perp$, siendo d un elemento no nulo de S. Si b es un elemento no nulo de S tal que $b \leq u$, entonces $u^\perp \leq b^\perp$ y por tanto $u^\perp = b^\perp$ por la maximalidad de $u^\perp$. Para cualquier otro elemento no nulo c de S tal que $c \leq u$, se tiene que $b \wedge c \neq 0$. Porque, si $b \wedge c = 0$ entonces $c \leq b^\perp = u^\perp$, y por tanto $c \leq u^\perp \wedge u = 0$, lo cual es una contradicción.

(3). Sea $u \in S$ un elemento uniforme. Por (2.1(2)), $u \leq u^{\perp\perp}$. Además, $u^{\perp\perp}$ es uniforme porque, por (2.1(3)), $u^{\perp\perp\perp} = u^\perp$ que es maximal por (2). Sea ahora b un elemento uniforme de S tal que $u \leq b$. Entonces, por (2.1(1)), $b^\perp \leq u^\perp$ lo que implica que $b^\perp = u^\perp$ por la maximalidad de $b^\perp$. Entonces, $b \leq b^{\perp\perp} = u^{\perp\perp}$, como se pedía.

(4). Se sigue de (2) y (3) que todo elemento uniforme maximal de S es de la forma $u = u^{\perp\perp}$, donde $u^\perp$ es anulador maximal o, equivalentemente, maximal en $\mathcal{B}(S) \setminus \{1\}$. Ahora, por la dualidad de $\mathcal{B}(S)$, $u^\perp$ es maximal si, y sólo si, $u = u^{\perp\perp}$ es minimal, i.e., un átomo de $\mathcal{B}(S)$.

(5). Se sigue de (4), dado que el ínfimo en S y en $\mathcal{B}(S)$ de dos elementos coinciden, y que átomos distintos son mutuamente ortogonales.

(6). Sea b un elemento no nulo de $\mathcal{B}(S)$. Entonces existe un átomo a de S tal que $a \leq b$. Luego $a^{\perp\perp} \leq b^{\perp\perp}$ con $a^{\perp\perp}$ siendo un elemento uniforme maximal de S por (3) (porque los átomos son claramente uniformes), y por tanto un átomo de $\mathcal{B}(S)$ por (4). Por (3) se tiene que $a^{\perp\perp}$ es uniforme maximal para cada $a \in A$, luego $a \to a^{\perp\perp}$ define una aplicación de A en M. Si $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$ para dos átomos a y b, entonces $a^{\perp} = b^{\perp}$ por (2.1(3)) y entonces $a = b$. Para $a \neq b \Rightarrow a \leq b^{\perp} = a^{\perp}$, lo que es una contradicción. Luego, la aplicación es inyectiva. Finalmente, dado $u \in M$ existe un $a \in A$ tal que $a \leq u$, y por tanto $a^{\perp\perp} \leq u^{\perp\perp} = u$ lo que implica que $a^{\perp\perp} = u$ porque $a^{\perp\perp}$ es uniforme maximal por (3). ■

Los *ideales uniformes* de sistemas algebraicos semiprimos aparecen asociados a los productos subdirectos esenciales, donde recordemos que un *producto subdirecto* de una colección de sistemas algebraicos $\{A_\alpha\}$ es un subsistema A del producto directo (completo) $\prod A_\alpha$ tal que las proyecciones canónicas $\pi_\alpha : A \to A_\alpha$ son sobreyectivas. Un *producto subdirecto esencial* es un producto subdirecto de los A_α que contiene un ideal esencial del producto directo $\prod A_\alpha$. Si A está de hecho contenido en la suma directa $\oplus A_\alpha$, entonces A se dice que es una *suma subdirecta esencial.* Los productos subdirectos esenciales juegan un papel muy importante en la teoría general de anillos de cocientes [51].

Utilizando propiedades de los elementos uniformes, A. Fernández y E. García dieron un teorema de estructura caracterizando los sistemas algebraicos que son productos subdirectos esenciales de sistemas primos, a saber,

3.2 Teorema. [34, 4.1] *Sea A un sistema algebraico.*

(1) *Si A es un producto subdirecto esencial de sistemas algebraicos primos A_α, entonces A es semiprimo y todo ideal no nulo de A contiene un ideal uniforme.*

(2) *Recíprocamente, si A es semiprimo y todo ideal anulador, equivalentemente, $I = I^{\perp\perp}$, no nulo contiene un ideal uniforme, entonces A es un producto subdirecto esencial de los sistemas $A_\alpha = A/M_\alpha^{\perp}$ donde $\{M_\alpha\}$ es la familia de todos los ideales uniformes maximales de A.*

Un caso particular en el que se dan las hipótesis de (3.2(2)) es cuando el sistema algebraico A es semiprimo y satisface la CCA sobre los ideales

MENU SALIR

anuladores (equivalentemente, la CCD sobre los ideales anuladores), puesto que estas condiciones de cadena implican la atomicidad del álgebra de Boole (completa) $\mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$ asociada al retículo $\mathcal{I}(A)$ de los ideales de A, y teniendo en cuenta que los átomos de $\mathcal{B}(\mathcal{I}(A))$ son precisamente los elementos uniformes maximales de $\mathcal{I}(A)$ (3.1(4)), se tiene que todo ideal no nulo $I = I^{\perp\perp}$ de A contiene un ideal uniforme. Las condiciones de cadena sobre los ideales anuladores son importantes porque aparecen en teoría de Goldie y en teoría de Goldie local (véanse [33, Th. 3] y [34, section 5]). Como consecuencia de (3.2) se tiene el siguiente resultado.

3.3 Corolario. [34, 4.2] *Un sistema algebraico semiprimo que satisface las condiciones de cadena sobre los ideales anuladores es una suma subdirecta esencial de un número finito de sistemas primos.*

Es claro que el álgebra de Boole $\mathcal{B}(L)$ asociada a un s-retículo completo L es atómica sii $(\bigvee A)^{\perp} = 0$, donde A es el conjunto de sus átomos. Como, por (3.1(4)), los átomos de $\mathcal{B}(L)$ son los elementos uniformes maximales de L, se tiene que si $\mathcal{B}(L)$ es atómica (por ejemplo si L satisface las condiciones de cadena sobre los anuladores), entonces $(\bigvee M)^{\perp} = 0$ para la familia M de los elementos uniformes maximales de L.

3.4 Proposición. *Para un retículo L seudo-complementado completo, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *el álgebra de Boole $\mathcal{B}(L)$ es atómica,*

(ii) *$\mathcal{B}(L)$ es isomorfa al conjunto de las partes $\mathcal{P}(M)$, donde M es el conjunto de los elementos uniformes maximales de L,*

(iii) *para todo anulador no nulo $x^{\perp}$ existe un elemento uniforme maximal u de L tal que $u \leq x^{\perp}$,*

(iv) *$\bigvee M$ es un elemento esencial en L, equivalentemente, $(\bigvee M)^{\perp} = 0$.*

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Por (2.6(ii)), $\mathcal{B}(L)$ es completa, y dado que es atómica, es isomorfa al conjunto de las partes del conjunto de sus átomos por (2.5). Pero los átomos de $\mathcal{B}(L)$ son precisamente los elementos uniformes maximales de L (3.1(4)).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Claramente $\mathcal{B}(L)$ es atómica, y por tanto se sigue, de nuevo por (3.1(4)), que para todo anulador no nulo $x^{\perp}$ existe $u \in M$ tal que $u \leq x^{\perp}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Si $(\bigvee M)^{\perp} \neq 0$ entonces existe un elemento $u \in M$ tal que $u \leq (\bigvee M)^{\perp}$, lo cual es una contradicción. Luego, $(\bigvee M)^{\perp} = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Sea $0 \neq b \in \mathcal{B}(L)$. Como $(\bigvee M)^{\perp} = 0$, se sigue de (2.1(5)) que $b \wedge u \neq 0$ para algún $u \in M$. Fijemos $v := b \wedge u$. Por (3.1(1)), v es uniforme, con $v^{\perp\perp} \leq b^{\perp\perp} = b$. Pero $v^{\perp\perp}$ es uniforme maximal por (3.1(3)), y por tanto un átomo en $\mathcal{B}(L)$ por (3.1(4)). Luego, $\mathcal{B}(L)$ es atómica. ■

Como ya hemos dicho, un caso particular de (3.4) se da cuando L satisface las condiciones de cadena sobre los anuladores. En este caso se va a tener que $\mathcal{B}(L)$ es, de hecho, finita, y esto, a su vez, va a ser equivalente a que L tenga "dimensión de Goldie" finita en el sentido que a continuación definimos.

—Sea L un retículo completo. Un conjunto X de elementos no nulos de L se dice que es *independiente* si $x \wedge \bigvee(X \setminus \{x\}) = 0$ para todo $x \in X$.

3.5 Proposición. *Sea L un retículo seudo-complementado completo. Para un conjunto X de elementos no nulos de L, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *X es independiente,*

(ii) *X es "finitamente independiente", i.e., todo subconjunto finito X es independiente,*

(iii) *los elementos de X son mutuamente ortogonales.*

En este caso, cualquier subconjunto de n elementos $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de X da lugar a una cadena $0 < x_1 < x_1 \vee x_2 < \cdots < x_1 \vee \cdots \vee x_n$ de longitud n.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) y (ii) $\Rightarrow$ (iii) son triviales. Para probar que (iii) $\Rightarrow$ (i), sea X un conjunto de elementos mutuamente ortogonales de L. Dados x en X, $x \leq y^{\perp}$ para todo $y \in X \setminus \{x\}$, y entonces, por (2.1(5)), $x \leq \bigwedge_{y \neq x} y^{\perp} = (\bigvee_{y \neq x} y)^{\perp} = (\bigvee(X \setminus \{x\}))^{\perp}$, equivalentemente, $x \wedge \bigvee(X \setminus \{x\}) = 0$.

La última parte es una consecuencia directa de (ii). ■

Se sigue de la anterior proposición junto con (3.1(5)) que todo subconjunto de átomos o de elementos uniformes maximales en un retículo seudo-complementado completo es independiente.

—Sea α un cardinal. Un retículo seudo-complementado completo L se dice que tiene *dimensión de Goldie* α, $\dim(L) = \alpha$, si L contiene un subconjunto independiente X de cardinal α y para todo subconjunto independiente Y de L, $\mathrm{card}(Y) \leq \alpha$.

Como L y $\mathcal{B}(L)$ tienen la misma determinación del ínfimo, se sigue de (3.5) que todo subconjunto independiente de $\mathcal{B}(L)$ sigue siendo independiente en L. Por otro lado, la aplicación $x \to x^{\perp\perp}$ conserva la ortogonalidad (2.1(4)), y por tanto también la independencia. De aquí se deduce el siguiente resultado.

3.6 Sea L retículo seudo-complementado completo. Entonces L tiene dimensión de Goldie si, y sólo si, $\mathcal{B}(L)$ tiene también dimensión de Goldie. En este caso,

$$\dim(L) = \dim(\mathcal{B}(L)).$$

El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para que un s-retículo completo tenga dimensión de Goldie.

3.7 PROPOSICIÓN. *Sea L un retículo seudo-complementado completo. Si L contiene un subconjunto independiente U de elementos uniformes cuyo supremo es esencial, entonces L tiene dimensión de Goldie igual a* $\mathrm{card}(U)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea X un subconjunto independiente de L. Dado que $\bigvee U$ es esencial, se tiene por (2.1(5)) que para cada x en X existe un elemento uniforme u en U tal que $u \wedge x \neq 0$. Sea $U_x := \{u \in U : u \wedge x \neq 0\}$. Entonces los U_x son mutuamente disjuntos: si $u \in U_x \cap U_y$ (para $x, y \in X$, $x \neq y$) se tendría que $u \wedge x \neq 0$, $u \wedge y \neq 0$ con $(u \wedge x) \wedge (u \wedge y) \leq x \wedge y = 0$, lo que contradice la uniformidad de u. Sea c una función de elección de la familia de los U_x. Por lo dicho arriba, la aplicación $x \to c(U_x)$ es una inyección de X en U, y por tanto $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(U)$. ■

3.8 COROLARIO. *Sea L un retículo seudo-complementado completo. Si L satisface las condiciones equivalentes de* (3.4)*, entonces L tiene dimensión de Goldie igual al cardinal de M, donde M es el conjunto de los elementos uniformes maximales de L. En particular, si L es atómico, entonces* $\dim(L) = \mathrm{card}(A)$*, donde A es el conjunto de los átomos de L.*

Demostración: El conjunto M es claramente independiente, y dado que L satisface las condiciones equivalentes de (3.4), $\bigvee M$ es esencial. Luego $\dim(L) = \operatorname{card}(M)$ por (3.7). Si L es atómico, por (3.1(6)) se tiene que $\dim(L) = \operatorname{card}(M) = \operatorname{card}(A)$. ■

Sin embargo, la existencia de un subconjunto independiente de elementos uniformes cuya unión sea esencial no es una condición necesaria para que un s-retículo tenga dimensión de Goldie, como vemos en el siguiente contraejemplo.

3.9 Sea E el retículo seudo-complementado completo definido por la topología usual (euclídea) de los números reales $\mathcal{R}$. Nótese que E no posee elementos uniformes. Sin embargo, E tiene dimensión de Goldie, con $\dim(E) = \aleph_0$. Claramente, E posee un conjunto independiente contable. Por otro lado, todo subconjunto independiente de E tiene cardinal $\leq \aleph_0$: sea $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un conjunto independiente de subconjuntos abiertos (no vacíos) de $\mathcal{R}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $O_\lambda \cap Q \neq \emptyset$, donde Q representa a los racionales, y podemos tomar una función de elección de la familia de los $O_\lambda \cap Q$. Entonces la aplicación $\lambda \to c(O_\lambda \cap Q)$ es una inyección de Λ en Q.

Además, la dimensión de Goldie finita es equivalente a las condiciones de cadena sobre los anuladores.

3.10 Teorema. *Para un retículo seudo-complementado completo L, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *L tiene dimensión de Goldie finita,*

(ii) *L no posee cadenas infinitas de anuladores, y*

(iii) *$\mathcal{B}(L)$ es finita.*

En este caso, la dimensión de Goldie de L, digamos $\dim(L) = n$, es igual al número de elementos uniformes maximales de L, coincide con la longitud anuladora de L (longitud de la máxima cadena de anuladores) y $\mathcal{B}(L)$ es el conjunto de las partes de un conjunto de n elementos.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Es suficiente con probar que a toda cadena de anuladores $1 = a_0^\perp > a_1^\perp > \cdots > a_n^\perp$ de longitud n podemos asociar un subconjunto independiente $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de cardinal n. En efecto, para cada

$1 \leq k \leq n$, sea $x_k := a_{k-1}^{\perp} \wedge a_k$. Como $a_{k-1}^{\perp} > a_k^{\perp}$, $x_k \neq 0$. Además, para $x_k \neq x_j$, digamos $1 \leq j < k \leq n$, se tiene

$$x_j \wedge x_k \leq a_j \wedge a_j^{\perp} = 0,$$

lo que prueba que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es un conjunto independiente por (3.5).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). $\mathcal{B}(L)$ satisface ambas condiciones de cadena (CCA y CCD). Luego, por (3.4(i)$\Rightarrow$(ii)), $\mathcal{B}(L)$ es isomorfo al conjunto de las partes de un conjunto finito, y por tanto $\mathcal{B}(L)$ es también finito.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Por (3.6), $\dim(L) = \dim(\mathcal{B}(L))$ es finita.

Supongamos ahora que L tiene dimensión de Goldie finita, digamos $\dim(L) = \dim(\mathcal{B}(L)) = n$. Como hemos visto en la prueba de (i)$\Rightarrow$(ii), cualquier cadena de anuladores tiene longitud $\leq n$. Recíprocamente, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto independiente de L, construimos una cadena de anuladores, $1 = a_0^{\perp} > a_1^{\perp} > \ldots > a_n^{\perp}$, como sigue.

Claramente, $x_1^{\perp} \neq 1$ porque $x_1 \neq 0$, y $x_1^{\perp} \geq (x_1 \vee x_2)^{\perp}$. Pero $x_1^{\perp}$ es de hecho mayor que $(x_1 \vee x_2)^{\perp}$. Puesto que si $(x_1 \vee x_2)^{\perp} = x_1^{\perp}$, entonces $x_1 \wedge x_2 = 0$ implicaría que $x_2 \leq x_1^{\perp} = (x_1 \vee x_2)^{\perp} \leq x_2^{\perp}$, lo que es una contradicción dado que $x_2 \neq 0$. Sean $a_0 = 0$, $a_1 = x_1$ y $a_2 = (x_1 \vee x_2)^{\perp}$. Entonces obtenemos la cadena de anuladores $1 = a_0^{\perp} > a_1^{\perp} > a_2^{\perp}$, y se sigue por recurrencia. ■

—Un semirretículo S se dice que tiene *longitud finita* n ($\mathrm{long}(S) = n$) si posee una cadena de longitud n y toda cadena de S tiene longitud a lo sumo n. Por (3.10), todo s-retículo completo L de longitud finita tiene dimensión de Goldie finita, con $\dim(L) \leq \mathrm{long}(L)$. Sin embargo, el recíproco no es cierto, como puede verse considerando una cadena infinita.

Para un álgebra de Boole finita L, $\dim(L) = \mathrm{long}(L) = n$, donde n es el número de los átomos de L (2.5). Como veremos, esta igualdad caracteriza, de hecho, a las álgebras de Boole finitas dentro de la clase de los retículos seudo-complementados.

3.11 TEOREMA. *Un retículo seudo-complementado completo L es un álgebra de Boole finita si, y sólo si, L tiene longitud finita y* $\mathrm{long}(L) = \dim(L)$.

Demostración: Claramente, un álgebra de Boole finita satisface la condición de arriba. Para el recíproco, es suficiente con probar por (2.5(vii)$\Rightarrow$(viii)), que cada $x \in L$ es una unión de átomos. Sea A el conjunto de los átomos de L y supongamos que $\bigvee\{a \in A : a \leq x\} < x$ para algún $x \in L$. Pongamos $A = \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$, donde $a_i \leq x$ para $1 \leq i \leq m$ y $a_j \wedge x = 0$ para $m < j \leq n$. Se tiene que $\dim(L) = n$ por (3.8) y, por la última parte de (3.5),

$$0 < a_1 < \ldots < a_1 \vee \ldots \vee a_m < x < x \vee a_{m+1} < \ldots < x \vee a_{m+1} \vee \ldots \vee a_n$$

es una cadena de longitud $n+1$, lo que es una contradicción. Luego, L es un álgebra de Boole finita. ■

4. Retículos seudo-multiplicativos.

Aunque la noción de retículo seudo-complementado no requiere de la existencia de un producto, sí que es verdad que los ejemplos de s-retículos más interesantes para nuestros propósitos derivan de uno. Introduciremos en esta sección la noción de producto compatible en un retículo y presentaremos los principales ejemplos. Nos plantearemos y abordaremos problemas sobre la existencia y sobre la unicidad de productos compatibles. Daremos una demostración elemental de la distributividad de los retículos de ideales de un sistema algebraico que es regular en el sentido de von Neumann y del retículo de los ideales cerrados de un JB*-sistema. También veremos un refinamiento de un resultado de I. Kaplansky que establece una condición suficiente para que el ínfimo de los elementos primos de un retículo semiprimo completo sea cero, así como su repercusión en teoremas de estructura de sistemas algebraicos y problemas abiertos en el caso de sistemas algebraico-topológicos. Finalizaremos esta sección demostrando, como consecuencia de la relación que existe entre los elementos primos y los elementos uniformes, que el ínfimo de los elementos primos de un s-retículo semiprimo completo que tenga suficientes elementos uniformes es cero.

4.1 Siguiendo [43], un retículo L con elemento mínimo 0 se dirá que es *seudo-multiplicativo* si existe una operación binaria $(x, y) \to xy$ definida sobre L que satisface

(1) Si $x \leq y$ entonces $zx \leq zy$ y $xz \leq yz$ para todos $z \in L$,

(2) $xy \leq x \wedge y$ para todos $x, y \in L$, y

(3) $x(y \vee z) \leq xy \vee xz$.

Se sigue de (1) y transitividad que

(4) si $x \leq y$ y $z \leq v$, entonces $xz \leq yv$.

Además, por (1), (3) es equivalente a

(5) $x(y \vee z) = xy \vee xz$.

Y por (2), se tiene

(6) $x0 = 0 = 0x$ para todo $x \in L$.

La noción de retículo seudo-multiplicativo es bastante general, aunque nosotros estaremos especialmente interesados en aquéllos en los que el producto sea compatible con el ínfimo.

4.2 Un retículo seudo-multiplicativo L se dirá que es *semiprimo* (o que su producto es *compatible*) si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes,

(1) $xy = 0 \Leftrightarrow x \wedge y = 0$, para todos $x, y \in L$,

(2) $x^2 := xx = 0 \Rightarrow x = 0$, para todo $x \in L$.

De nuevo, el ejemplo de retículo semiprimo más interesante nos lo proporcionan los sistemas algebraicos: el retículo de los ideales (cerrados) de un sistema algebraico (algebraico-topológico) semiprimo con el producto $\star$ es semiprimo ((1.1), (1.2) y (1.4)). Como se comentó en (1.1), el producto de ideales de sistemas algebraicos no es, en general, distributivo sobre sumas arbitrarias: nuestra decisión de adoptar la condición de distributividad no simétrica (4.1(3)) se debe precisamente a la no linealidad de los operadorores cuadráticos de Jordan U, Q y T. Sin embargo, como consecuencia directa de la identidad fundamental (JP3), los sistemas de Jordan satisfacen la siguiente condición débil de distributividad,

4.3 $(y \vee z)x \leq yx \vee zx \vee (y \wedge z \wedge x)$.

Recordemos que la existencia de seudo-complementos en el retículo de los ideales (cerrados) de un sistema algebraico (algebraico-topológico) semiprimo se debe a la distributividad infinita del producto con respecto a la segunda variable, de hecho, en general se tiene que todo retículo semiprimo completo L en el que el producto sea *infinitamente distributivo*, esto es, el producto satisfaga

4.4 $x(\bigvee_\alpha y_\alpha) = \bigvee_\alpha (xy_\alpha)$,

para todo $x \in L$ y toda familia $\{y_\alpha\} \subseteq L$, es seudo-complementado, donde el seudo-complemento $x^\perp$ de un elemento x viene dado por el supremo de todos los $y \in L$ que anulan a x, i.e., $xy = 0$. Los retículos seudo-multiplicativos completos e infinitamente distributivos fueron estudiados en [34] bajo el nombre de *retículos algebraicos* y en este contexto se definió la noción de *anulador* de un elemento x como su seudo-complemento $x^\perp$. Sin embargo, el término de retículo algebraico había sido utilizado previamente en teoría de retículos con otro significado [54, p. 106].

Es natural preguntarse sobre la existencia y sobre la unicidad de productos en un retículo seudo-complementado que lo hagan semiprimo. En lo que sigue, intentaremos contestar a estas cuestiones.

Es claro que todo retículo distributivo L es semiprimo para el producto definido por el ínfimo, esto es, $xy := x \wedge y$, $x, y \in L$. Nótese que este producto es *idempotente*, es decir, $x^2 = x$ para todo $x \in L$. El recíproco también es cierto.

4.5 Proposición.

(1) *Un retículo L es distributivo si, y sólo si, posee un (único) producto idempotente; de hecho, tal producto coincide con el ínfimo. Luego, si L es completo, entonces L es infinitamente distributivo si, y sólo si, el producto satisface* (4.4).

(2) *Un retículo es un álgebra de Boole si, y sólo si, es anulador y tiene un producto idempotente.*

Demostración: (1). Sea L un retículo dotado de un producto idempotente xy. Para todos $x, y \in L$ tenemos, por (4.1(2)) y (4.1(4)), $x \wedge y = (x \wedge y)^2 \leq xy \leq x \wedge y$, luego $xy = x \wedge y$. Por tanto, L es distributivo por (4.1(5)).

(2). Claramente, toda álgebra de Boole satisface estas condiciones, por (2.5). Supongamos entonces que L es un retículo anulador con un producto idempotente. Entonces L es distributivo por (1) y complementado por (2.3). ■

Por un C*-*sistema* nos referimos a cualquiera de las siguientes estructuras algebraicas: una C*-álgebra asociativa o alternativa, una JB*-álgebra, un JB*-triple, o una JB-álgebra (ver [29], [55], [90] y [94] para definiciones y resultados básicos). Es bien conocido que el retículo de los ideales cerrados de una C*-álgebra es infinitamente distributivo (es de hecho el retículo de los abiertos de un espacio topológico [29, 3.2.2]). También es infinitamente distributivo el retículo de los ideales de un álgebra *regular von Neumann* [52, 7.3]. A continuación vamos a ver que ambos resultados se pueden obtener a partir de (4.5).

4.6 COROLARIO. *El retículo de los ideales cerrados de un C*-sistema y el retículo de los ideales de un sistema algebraico regular von Neumann son infinitamente distributivos.*

DEMOSTRACIÓN: La demostración es consecuencia directa del hecho de que el retículo de los ideales cerrados de un C*-sistema y el de los ideales de un sistema algebraico regular von Neumann son idempotentes (incluso algebraicamente idempotente en el primer caso) para el correspondiente producto reticular. Una prueba unificada en el caso del retículo de los ideales cerrados de un C*-sistema se sigue de que todo C*-sistema puede ser considerado como un JB*-triple (real o complejo) y que todo elemento en un JB*-triple posee una raíz cúbica (véase [85, 1.2]). ■

Un retículo seudo-complementado distributivo puede tener dos productos diferentes que lo hagan semiprimo. Por ejemplo, consideremos la cadena de tres elementos $C_2 = \{0, x, 1\}$ con el producto definido por el ínfimo por un lado y con el producto definido mediante $x1 = 1x = x^2 = 1^2 = x$ por otro. En ambos casos C_2 es semiprimo y los productos son distintos. Esta anomalía desaparece si nos restringimos a retículos distributivos complementados, esto es, álgebras de Boole. Necesitamos el siguiente lema.

4.7 LEMA. *Sea S un s-semirretículo semiprimo con producto xy. Entonces se tiene*

(1) $(x^2)^\perp = x^\perp$,

(2) $(xy)^\perp = (x \wedge y)^\perp$.

Demostración: (1). Dado que $x^2 \leq x$ por (4.1(2)), se tiene que $x^\perp \leq (x^2)^\perp$. Por otro lado, de nuevo por (4.1(2)), se tiene que $((x^2)^\perp x)^2 \leq (x^2)^\perp x \leq (x^2)^\perp \wedge x$. Además, de $(x^2)^\perp x \leq x$ se sigue por (4.1(4)) que $((x^2)^\perp x)^2 \leq x^2$. Luego $((x^2)^\perp x)^2 \leq (x^2)^\perp \wedge x^2 = 0$ y de aquí $(x^2)^\perp x = 0$ por la semiprimidad de S. Por tanto $(x^2)^\perp \leq x^\perp$ como queríamos.

(2) es una consecuencia directa de (1). En efecto, $xy \leq x \wedge y$ implica $(x \wedge y)^\perp \leq (xy)^\perp$. Recíprocamente, $(x \wedge y)^2 \leq xy$ implica $(xy)^\perp \leq (x \wedge y)^{2\perp} = (x \wedge y)^\perp$ por (1). ■

Teniendo en cuenta que las álgebras de Boole son duales (2.5), como consecuencia de (4.7(2)) se tiene el siguiente resultado.

4.8 Corolario. *Si L es un álgebra de Boole semiprima, entonces el producto de dos elementos coincide con su ínfimo.*

Con el fin de dar una respuesta parcial al problema de la existencia de productos en retículos s-complementados, necesitamos el siguiente lema.

4.9 Lema. *Sea L un retículo completo y A el conjunto de sus átomos. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} L & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \\ x & \mapsto & \mathrm{sop}(x) \end{array}$$

donde $\mathrm{sop}(x) := \{a \in A : a \leq x\}$ *y* $\mathcal{P}(A)$ *denota al conjunto de las partes de* A*, satisface las siguientes propiedades para todos* $x, y_\alpha, y \in L$,

(1) $\mathrm{sop}(x \wedge y) = \mathrm{sop}(x) \bigcap \mathrm{sop}(y)$,

(2) $\bigcup \mathrm{sop}(y_\alpha) \leq \mathrm{sop}(\bigvee y_\alpha)$,

(3) $\mathrm{sop}(0) = \emptyset$,

(4) $\mathrm{sop}(1) = A$.

Si L es seudo-complementado, entonces

(5) $\bigcup \mathrm{sop}(y_\alpha) = \mathrm{sop}(\bigvee y_\alpha)$,

(6) $\mathrm{sop}(x \wedge (\bigvee y_\alpha)) = \bigcup \mathrm{sop}(x \wedge y_\alpha)$.

Demostración: (1),(2),(3) y (4) son fáciles de comprobar. Por otro lado, sea $a \in A$ tal que a no pertenece a $\bigcup \text{sop}(y_\alpha)$. Entonces $a \wedge y_\alpha = 0$ para todo y_α, luego $\bigvee y_\alpha \leq a^\perp \Rightarrow a \notin \text{sop}(\bigvee y_\alpha)$, lo que prueba (5). Ahora (6) se sigue de (1) y (5). ■

4.10 Teorema. *Sea L un retículo seudo-complementado completo y atómico. Entonces L es semiprimo para el producto definido por $xy = \text{zoc}(x \wedge y)$, donde $\text{zoc}(x) := \bigvee \text{sop}(x)$, para todos $x, y \in L$.*

Demostración: Veamos que el producto xy satisface los axiomas (4.1(1)), (4.1(2)) y (4.1(3)). De hecho, (4.1(1)) y (4.1(2)) se siguen de las siguientes propiedades,

(4.10.1) $\quad x \leq y \Rightarrow \text{zoc}(x) \leq \text{zoc}(y)$,

(4.10.2) $\quad \text{zoc}(x) \leq x$,

respectivamente, y (4.1(3)) es una consecuencia de (4.9(6)). Por otro lado, se sigue de la atomicidad de L que el producto xy satisface las condiciones equivalentes de (4.2), esto es, $xy = 0$ sii $x \wedge y = 0$. ■

Por (4.8), se tiene que para un álgebra de Boole completa atómica L, el producto definido en (4.10) es el único que hace a L semiprimo y por tanto coincide con el ínfimo, i.e., $x \wedge y = \text{zoc}(x \wedge y)$ para todos $x, y \in L$. Si L es simplemente anulador en vez de dual, tenemos aún una unicidad parcial para los productos que hacen que L sea semiprimo.

4.11 Proposición. *Sea L un retículo completo anulador y atómico. Entonces para todo producto xy que haga a L semiprimo, se tiene que $x^2 = \text{zoc}(x)$.*

Demostración: Se sigue de (4.7(1)) que $\text{zoc}(x) = \text{zoc}(x^2) \leq x^2$, y de (2.4) que $1 = \text{zoc}(x) \vee \text{zoc}(x^\perp)$. Luego, $x^2 \leq x1 = x(\text{zoc}(x) \vee \text{zoc}(x^\perp)) = x\text{zoc}(x) \leq \text{zoc}(x)$. Por tanto, $x^2 = \text{zoc}(x)$. ■

La unicidad parcial probada en (4.11) no se mantiene sin la condición anuladora: considérese de nuevo la cadena de tres elementos. Por otro lado, es posible dar un ejemplo de un retículo anulador completo y atómico que tenga dos productos que lo hagan semiprimo: para construir tal ejemplo, añadamos tres nuevos elementos, digamos y, z, v, al conjunto de las partes $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ del conjunto $A = \{a, b, c\}$, satisfaciendo las relaciones (i) $0 < y < \{b\}$,

(ii) $\{a, b\} < z < A$ y (iii) $\{b, c\} < v < A$. Es fácil comprobar que el retículo L así obtenido es anulador, y dado que es finito, es atómico y completo. Por tanto, por (4.10), se tiene que L es semiprimo para el producto definido tomando el supremo del soporte común de dos elementos. Pero también podemos definir un nuevo producto tal que $zv = \{b\} \neq y = \mathrm{zoc}(z \wedge v)$ que dote a L de estructura de retículo semiprimo.

—Sea L un retículo seudo-multiplicativo con elemento máximo 1 y producto xy. Un elemento $p \neq 1$ en L se dice que es *primo* si

$$xy \leq p \quad \text{implica} \quad x \leq p \quad \text{o} \quad y \leq p$$

para cualesquiera $x, y \in L$. Es claro que si el ínfimo de los elementos primos de L es cero, entonces L es semiprimo. Sin embargo, el recíproco no se tiene en general. Para demostrarlo, consideremos el álgebra de Boole de los abiertos regulares de un espacio topológico (X, T), donde $A \in T$ es *regular* si, y sólo si, $A = \mathrm{int}(\overline{A})$. Por [89, p. 60], este álgebra de Boole coincide con el álgebra de Boole $\mathcal{B}(T)$ asociada al retículo seudo-complementado T, siendo el seudo complemento $A^{\perp}$ de un abierto A su exterior.

4.12 PROPOSICIÓN. *El álgebra de Boole completa* $(\mathcal{B}(E), \triangle, \nabla)$ *de los abiertos regulares de los reales* $\mathcal{R}$ *con la topología usual y el producto definido por la intersección* $BC = B \triangle C = B \cap C$, *es un retículo semiprimo que no posee elementos primos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea P un abierto regular de $\mathcal{R}$ con $P \neq \mathcal{R}$. Entonces P no puede ser el complementario de un elemento de $\mathcal{R}$, por lo que deben existir dos números reales x e y, digamos $x < y$, que no están en P. Tomemos $z \in \mathcal{R}$ tal que $x < z < y$ y consideremos los abiertos regulares $B = (-\infty, z)\nabla P$, $C = (z, +\infty)\nabla P$. Por la distributividad de las operaciones Booleanas, $BC = B \triangle C = B \cap C = P$, pero ni B ni C están contenidos en P. Por lo que P no es primo. ■

—Diremos entonces que un retículo seudo-multiplicativo es *fuertemente semiprimo* si el ínfimo de sus elementos primos es 0. Por otro lado, siguiendo [91], un elemento u de un retículo completo L se dice que está *por debajo de* $x \in L$, y lo denotaremos $u \ll x$, si siempre que exista una cadena $\{y_\alpha\}$ con $x \leq \bigvee y_\alpha$, entonces $u \leq y_\alpha$ para algún y_α. Claramente, $u \ll x \Rightarrow u \leq x$. Un elemento $c \in L$ es *compacto* sii $c \ll c$.

Como hemos visto, todo retículo fuertemente semiprimo es semiprimo pero el recíproco no es cierto en general. En [64], I. Kaplansky establecía el siguiente resultado: un retículo semiprimo completo con un producto que satisfaga (4.1(2)), (4.1(5)) y $(y \vee z)x = yx \vee zx$, y en el que para todo elemento no nulo x existe un elemento compacto no nulo c tal que $c \leq x$, es fuertemente semiprimo. Con este resultado, que podía ser aplicado al caso del retículo de los ideales de un anillo no necesariamente asociativo y a otros retículos no ligados a sistemas algebraicos, I. Kaplansky generalizaba un teorema debido a K. Keimel [65] para *retículos multiplicativos* (retículos con un producto que es conmutativo, asociativo, distributivo sobre uniones arbitrarias y en el que el 1 actúa de identidad multiplicativa) completos semiprimos algebraicos (en el sentido clásico). Por otro lado, J. Rosický apuntó en [91, Ex. 1], que el intervalo unidad $[0,1]$ es un retículo multiplicativo completo fuertemente semiprimo que, sin embargo, no es algebraico (de hecho, el único elemento compacto de $[0,1]$ es el 0) y extendió el teorema de Keimel a retículos multiplicativos continuos, cubriendo así el ejemplo del intervalo unidad.

Estos resultados (el de Kaplansky y el de Rosický) siguen siendo ciertos bajo condiciones un poco más generales que nos permiten incluir los retículos de ideales de sistemas algebraicos no necesariamente lineales como los sistemas de Jordan.

4.13 TEOREMA. *Sea L un retículo semiprimo completo cuyo producto satisface* (4.3) *y tal que para todo $0 \neq x \in L$ existe un elemento no nulo $u \in L$ tal que $u \ll x$. Entonces L es fuertemente semiprimo.*

DEMOSTRACIÓN: Únicamente tenemos que demostrar que para todo $0 \neq x \in L$, existe un elemento primo $p \in L$ tal que x no es menor o igual que p. Por hipótesis, existe un elemento no nulo f_1 con $f_1 \ll x$. Teniendo f_n, tomemos f_{n+1} un elemento no nulo tal que $f_{n+1} \ll {f_n}^2$. Usando el lema de Zorn, se tiene que existe $p \in L$ que es maximal con respecto a la propiedad de que f_n no sea menor o igual que p para todo n. Afirmamos que p es primo. Supongamos por el contrario que tenemos $y, z \in L$ tales que $yz \leq p$ con y y z que no sean menores o iguales que p. Tomando $y' = y \vee p$ y $z' = z \vee p$, se tiene que $y' > p$ and $z' > p$, y entonces, por la maximalidad de p, existen $f_n \leq y'$ y $f_m \leq z'$ para ciertos n, m, digamos $m \geq n$. Luego

$f_{m+1} \ll f_m^2 \leq y'z'$. Pero, por (4.1(2)), (4.1(3)) y (4.3),

$$y'z' = (y \vee p)(z \vee p) = (y \vee p)z \vee (y \vee p)p \leq yz \vee p = p,$$

lo cual es una contradicción porque f_n no es menor o igual que p para todo n. Luego p es primo. Además, x no es menor o igual que p, puesto que si lo fuera se tendría que $f_1 \ll x \leq p \Rightarrow f_1 \leq p$, que sería de nuevo una contradicción. ■

Se sigue de (2.1(5)) que todo átomo en un s-retículo completo es compacto, por tanto como consecuencia de (4.13) y (4.10) se tiene el siguiente corolario.

4.14 Corolario. *Todo retículo completo atómico con un producto compatible satisfaciendo* (4.3) *es fuertemente semiprimo. En particular, todo s-retículo completo atómico es fuertemente semiprimo para el producto* $xy = \mathrm{zoc}(x \wedge y)$ *definido en* (4.10).

Sin embargo, la aplicación más importante de (4.13) es el siguiente corolario, que proporciona una prueba unificada del conocido hecho de que un sistema algebraico semiprimo puede ser expresado como producto subdirecto de sistemas primos, permitiendo así reducir cuestiones sobre sistemas semiprimos a las correspondientes para sistemas primos.

4.15 Corolario. *El retículo* $(\mathcal{I}(A), \star)$ *de los ideales de un sistema algebraico semiprimo* A *es fuertemente semiprimo y por tanto* A *es un producto subdirecto de sistemas algebraicos primos.*

Demostración: Claramente $\mathcal{I}(A)$ satisface (4.3). Veamos que para todo $0 \neq I \in \mathcal{I}(A)$ existe $0 \neq K \in \mathcal{I}(A)$ tal que $K \ll I$. Sea $0 \neq x \in I$ y consideremos K el ideal de A generado por x. Sea $\{I_\alpha\}$ una cadena tal que $I \subseteq \bigvee I_\alpha$. En particular $x = x_{\alpha_{i_1}} + \cdots + x_{\alpha_{i_n}}$ con $x_{\alpha_{i_j}} \in I_{\alpha_{i_j}}$, $j = 1, \cdots, n$, y entonces $K \subseteq \bigvee_{j=1}^n I_{\alpha_{i_j}}$, luego $K \ll I$. Por tanto $\mathcal{I}(A)$ satisface las hipótesis de (4.13), por lo que es fuertemente semiprimo. El resto se sigue por un argumento estándar. ■

Se conocen distintas versiones de (4.15) para casos particulares, por ejemplo, para álgebras alternativas [108], para álgebras de Jordan [99] o para sistemas triples de Jordan [80]. Es natural preguntarse si para un sistema algebraico-topológico semiprimo A se tiene que la intersección de los ideales cerrados primos es cero. Parece que la respuesta a esta cuestión es desconocida incluso si A es un álgebra de Banach conmutativa, aunque se han dado algunas respuestas afirmativas para casos particulares [98].

Nuestro siguiente objetivo es estudiar los elementos primos en retículos seudo-complementados semiprimos.

4.16 LEMA. *Sea L un retículo seudo-complementado con un producto compatible, y sea $x \in L$ tal que $x^\perp \neq 1$. Entonces $x^\perp$ es primo si, y sólo si, es anulador maximal. En este caso, $x^\perp$ es primo minimal.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $x^\perp \neq 1$ es primo. Si $x^\perp \leq y^\perp$ para algún $y \in L$, se tiene por la primidad de $x^\perp$ que $0 = yy^\perp \leq x^\perp$ implica $y \leq x^\perp$ o $y^\perp \leq x^\perp$. Si se da lo primero, $y \leq x^\perp \leq y^\perp$ implica $y = 0$, y entonces $y^\perp = 1$; si se da lo segundo, $x^\perp = y^\perp$. Luego $x^\perp$ es anulador maximal. Recíprocamente, supongamos que $x^\perp$ es anulador maximal, y sean $a, b \in L$ tales que $ab \leq x^\perp$. Entonces, por (4.1(1)) y (4.1(2)),

$$a(bx) \leq (ab) \wedge x = 0. \tag{4.16.1}$$

Por otro lado, $bx \leq x$ implica $x^\perp \leq (bx)^\perp$ y entonces, por la maximalidad de $x^\perp$, $x^\perp = (bx)^\perp$ o $(bx)^\perp = 1$. Si se da lo primero, $x^\perp = (bx)^\perp$ implica por (4.16.1) que $a \leq x^\perp$; si se da lo segundo, $(bx)^\perp = 1$ implica $bx \leq (bx)^{\perp\perp} = 1^\perp = 0$, luego $b \leq x^\perp$. Por tanto $x^\perp$ es primo.

Finalmente, supongamos que $x^\perp$ satisface las condiciones equivalentes de arriba, y sea p un elemento primo tal que $p \leq x^\perp$. Como antes, $0 = xx^\perp \leq p$ implica $x \leq p$ o $x^\perp \leq p$. En el primer caso, $x = 0$ lo que es una contradicción porque $x^\perp \neq 1$. Por tanto $x^\perp \leq p$, lo que prueba que $x^\perp$ es primo minimal. ■

La siguiente proposición, que generaliza un conocido resultado para el retículo de los ideales de anillos semiprimos (ver [66, 11.41]), proporciona una manera de producir elementos primos a partir de elementos uniformes. Nótese que además completa el enunciado de (3.1).

4.17 PROPOSICIÓN. *Sea L un retículo seudo-complementado con un producto compatible. Para un elemento no nulo $u \in L$, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) $u^\perp$ *es anulador maximal,*

(ii) $u^\perp$ *es primo minimal,*

(iii) $u^\perp$ *es primo,*

(iv) u *es uniforme.*

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Rightarrow$ (ii) se sigue de (4.16), y (ii) $\Rightarrow$ (iii) es trivial. Finalmente, (iii) $\Rightarrow$ (iv) y (iv) $\Rightarrow$ (i) se siguen de (3.1(2)) y (4.16). ■

4.18 COROLARIO. *Sea L un retículo seudo-complementado completo con un producto compatible. Si L satisface las condiciones equivalentes de* (3.4)*, entonces L es fuertemente semiprimo. En particular, esto es cierto si L tiene dimensión de Goldie finita.*

DEMOSTRACIÓN: Por (2.1(5)), $\bigwedge u_\alpha^\perp = (\bigvee u_\alpha)^\perp = 0$, donde u_α se mueve dentro del conjunto de los elementos uniformes maximales de L; pero cada $u_\alpha^\perp$ es primo por (4.17). La última parte se sigue de (3.10). ■

5. Extensión de un teorema de descomposición de Yood a retículos seudo-complementados.

Culminaremos este primer capítulo con un importante teorema de estructura para retículos, que es la extensión natural (y, en nuestra opinión, la más general posible) de un teorema de Yood para anillos topológicos. Para destacar la importancia de este teorema, recogeremos algunos teoremas de estructura para álgebras completas normadas no necesariamente asociativas.

—Un anillo topológico R se dice que es *descomponible* si es la clausura de la suma directa de sus ideales cerrados minimales (cada uno de los cuales es, en este caso, topológicamente simple).

B. Yood probó [103, 2.6] que R es descomponible si, y sólo si, la intersección de sus ideales cerrados primos es cero y todo ideal cerrado propio de R tiene anulador no nulo. Como consecuencia de este resultado, pudo refinar algunos teoremas estándar de descomposición (ver [17], [97] y [101]). Posteriormente, A. Fernández y A. Rodríguez [42] consideraron esta cuestión de descomponibilidad en el contexto de las álgebras completas normadas no necesariamente asociativas. En términos reticulares, un álgebra completa normada no asociativa es descomponible si, y sólo si, el retículo completo de sus ideales cerrados es fuertemente semiprimo y anulador. Este enfoque permitió a los autores de [42] dar versiones no asociativas del teorema de Yood, obteniendo teoremas de descomposición para álgebras normadas completas alternativas y de Jordan, y una nueva prueba de un teorema de estructura para H*-álgebras no asociativas que había sido previamente probado en [24, Th. 1]. Del punto de vista adoptado en [42], cabe esperar que pueda obtenerse una versión puramente reticular del teorema de Yood, ese es el objetivo de esta sección. La clave está en producir átomos a partir de elementos primos.

5.1 LEMA. *Sea L un retículo anulador semiprimo. Entonces un elemento $c \neq 1$ es primo si, y sólo si, $c = a^{\perp}$ para algún átomo $a \in L$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $c \neq 1$ primo. De hecho, se tiene que c es un *coátomo*, esto es, si $c \leq x$ implica $c = x$ ó $x = 1$, para $x \in L$. En efecto, sea $x \in L$ tal que $c \leq x$. Entonces $x \leq c$ ó $x^{\perp} \leq c$. Si se da lo primero, entonces $x = c$, mientras que si $x^{\perp} \leq c \leq x$, entonces $x^{\perp} = 0$ y como L es anulador, se tendría que $x = 1$. Luego c es un coátomo.

Veamos que $a := (c^{\perp})^2$ es un átomo. Nótese que $a \neq 0$ por ser L semiprimo. Sea $x \leq a \leq c^{\perp}$. Entonces se tiene que $c \vee x = c$ ó $c \vee x = 1$. Si se da lo primero, entonces $x \leq c \wedge c^{\perp} = 0$ y se tendría que $x = 0$; mientras que si $c \vee x = 1$, entonces por (4.1(1)), (4.1(2)) y (4.1(3)), se tiene que

$$a = (c^{\perp})^2 \leq c^{\perp}1 = c^{\perp}(c \vee x) \leq x,$$

de donde se $a = x$ y por tanto $a = (c^{\perp})^2$ es un átomo.

Por otro lado, como $c \neq 1$, se tiene que $c^{\perp} \neq 0$, luego $c \leq c^{\perp\perp} \neq 1$, lo que implica, por ser c un coátomo, que $c = c^{\perp\perp}$ y de aquí, por ser a un átomo, se sigue de (4.7(1)) que $a^{\perp} = ((c^{\perp})^2)^{\perp} = c^{\perp\perp} = c$.

Para el recíproco, sea $c = a^{\perp} \neq 1$ para un cierto átomo $a \in L$. El elemento a es claramente uniforme por ser un átomo. Por (3.1(2)), se tiene que $a^{\perp}$ es maximal entre todos los anuladores $x^{\perp}$, con $0 \neq x \in L$. Veamos que $a^{\perp}$ es primo. Sean $x, y \in L$ tales que $xy \leq a^{\perp}$. Entonces, por (4.1(1)) y (4.1(2)), se tiene que

(5.1.1) $\qquad x(ya) \leq (xy) \wedge a \leq a^{\perp} \wedge a = 0,$

y por la maximalidad de $a^\perp$, dado que $ya \leq a \Rightarrow a^\perp \leq (ya)^\perp$, se tiene que o bien $a^\perp = (ya)^\perp$ o $(ya)^\perp = 1$. En el primer caso, por (5.1.1) se tendría que $x \leq a^\perp$, mientras que si $(ya)^\perp = 1$, entonces $ya \leq (ya)^{\perp\perp} = 1^\perp = 0$, de donde $y \leq a^\perp$. Luego $a^\perp$ es primo. ■

5.2 TEOREMA. *Para un retículo completo L, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *L es seudo-complementado y el mayor elemento* 1 *es el supremo de los átomos de L,*

(ii) *L es anulador y atómico,*

(iii) *L es anulador y se puede definir un producto sobre él para el cual sea fuertemente semiprimo.*

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Rightarrow$ (ii) se sigue de (2.4) y (ii) $\Rightarrow$ (iii) se sigue de (4.14). (iii) $\Rightarrow$ (i). Se sigue de (2.1(5)) y de (5.1) que $0 = \wedge {a_\alpha}^\perp = (\bigvee A)^\perp$, donde $A = \{a_\alpha\}$ es el conjunto de los átomos de L. Como L es anulador, entonces se tiene que $1 = \bigvee A$. ■

Capítulo II.

CONDICIONES DE FINITUD EN ÁLGEBRAS ASOCIATIVAS

Asociado a cada elemento a de un álgebra asociativa A, existe un álgebra A_a, también asociativa, llamada el álgebra local de A en a. Como veremos en los próximos capítulos, esta noción no es exclusiva de las álgebras asociativas, las álgebras locales en elementos se definen en general para todo sistema algebraico de los descritos en el Capítulo I. En este capítulo estudiaremos ciertas condiciones de finitud de un álgebra asociativa, tales como tener zócalo no nulo, o satisfacer las condiciones de cadena sobre los anuladores de elementos, en términos de sus álgebras locales. También se dará un enfoque local a los teoremas de Martindale y Amitsur sobre anillos primos y primitivos, respectivamente, satisfaciendo una identidad polinómica generalizada.

1. Las álgebras locales de un álgebra asociativa. Elementos artinianos.

La noción de álgebra local asociada a un elemento de un sistema algebraico constituirá una herramienta fundamental para resolver diferentes cuestiones a lo largo de toda esta memoria. En este capítulo centraremos nuestra atención en las álgebras locales de un álgebra asociativa. En particular, en esta primera sección recordaremos algunos resultados generales sobre ellas, que son, en su mayoría, bien conocidos. Por otro lado, introduciremos la noción de conjunto denso y demostraremos que un álgebra semiprima tiene zócalo esencial si, y sólo si, posee un subconjunto denso de elementos artinianos. Para finalizar veremos que el álgebra local en un elemento de rango finito de un álgebra prima con zócalo se representa como un álgebra de matrices sobre un álgebra de división.

—Dada un álgebra asociativa A y $a \in A$, el álgebra *homótopa* de A en a, denotada $A^{(a)}$, es el álgebra asociativa definida por la misma estructura lineal que A pero con el nuevo producto $x._a y = xay$, para todos $x, y \in A$. El conjunto

$$\ker_A(a) = \{x \in A : axa = 0\}$$

es un ideal de $A^{(a)}$ y se define el *álgebra local* de A en a, denotada A_a, como el álgebra factor

$$A_a := A^{(a)}/\ker_A(a).$$

Escribiremos $x \mapsto \overline{x}$ para denotar la proyección canónica de $A^{(a)}$ sobre A_a. No es difícil comprobar que la localización en elementos es transitiva, esto es,

$$(A_a)_{\overline{b}} \cong A_{aba}$$

para todos $a, b \in A$.

En todo lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, A denotará un álgebra asociativa (no necesariamente unitaria) sobre un anillo de escalares arbitrario Φ. Para definiciones y propiedades elementales, adoptamos como referencias generales los libros [59], [66], y [67].

Tomando prestadas nociones de la teoría de Jordan, un Φ-submódulo I de A se dice que es un *ideal interno* si $xAx \subseteq I$ para todo $x \in I$. Claramente, todo ideal por la izquierda o por la derecha es interno y la intersección de ideales internos es también interno. Todo elemento $a \in A$ define dos ideales internos: $[a] := aAa$, y $(a) := \Phi a + aAa$, que no necesariamente coinciden, de hecho, $[a] = (a)$ si, y sólo si, a es regular von Neumann.

1.1 Proposición. [44, 1.2] *Si $a = aba$ es regular von Neumann, entonces A_a es isomorfa al álgebra de los endomorfismos $End_A(aA)$, y por tanto A_a es unitaria con $\overline{b}$ como el elemento unidad. En particular, si $a = e$ es un idempotente de A, entonces A_e no es más que el corner eAe. Recíprocamente, si A es semiprima y A_a unitaria, entonces a es regular von Neumann con $a = aba$, donde $\overline{b}$ es el elemento unidad de A_a.*

Además, existe un isomorfismo entre el retículo de los ideales internos de A_a y el de los ideales internos de A contenidos en aAa, a saber,

1.2 Proposición. *Dado $a \in A$, la aplicación $\varphi : A_a \to A$, $\overline{x} \mapsto axa$, es un monomorfismo de Φ-módulos satisfaciendo*

(1) $\varphi(\overline{x} \cdot_a \overline{y} \cdot_a \overline{z}) = \varphi(\overline{x}) y \varphi(\overline{z})$, *para todos $x, y, z \in A$.*

(2) $\overline{I} \mapsto \varphi(\overline{I})$ *es un isomorfismo del retículo de los ideales internos de A_a sobre el de los ideales internos de A contenidos en aAa*

Demostración: Que la aplicación φ está bien definida, es un isomorfismo de Φ-módulos de A_a sobre aAa, y que satisface la identidad (1) es claro.

(2). Usando la identidad (1) en la "forma Jordan" $U_{\varphi(\overline{x})} y = \varphi(U_{\overline{x}} \overline{y})$, obtenemos que $\varphi(\overline{I})$ es un ideal interno de A para todo ideal interno $\overline{I}$ de A_a, claramente contenido en aAa. Recíprocamente, todo ideal interno I de A contenido en aAa es la imagen $\varphi(\overline{I})$ de un único ideal interno $\overline{I}$ de A_a. ∎

Recordemos que el *ideal singular por la izquierda* de A, que se denota por $\mathrm{Z}_l(A)$, consiste en

$$\mathrm{Z}_l(A) = \{z \in A : \mathrm{lan}_A(z) \, \text{es un ideal por la izquierda esencial de} \, A\},$$

y A se dice que es *no singular por la izquierda* si $\mathrm{Z}_l(A) = 0$. De forma análoga se define el *ideal singular por la derecha* $\mathrm{Z}_r(A)$ de A y se dice que A es *no singular por la derecha* si $\mathrm{Z}_r(A) = 0$.

1.3 [44, 1.4(ii)] Si A es semiprima y $a \in A$, entonces se tiene que $\overline{\mathrm{Z}_l(A)} \subseteq \mathrm{Z}_l(A_a)$.

Las propiedades de un álgebra asociativa son heredadas por sus locales y viceversa, hecho que constituye una extensión natural del proceso de paso de información de un álgebra A al corner eAe y vuelta [93, p. 215]. Como veremos, algunas veces, para asegurar que A satisface una cierta propiedad, es suficiente con que algunas (no necesariamente todas) de las álgebras locales de A la satisfagan.

—Un subconjunto no vacío $X \subseteq A$ se dice que es *denso* si para todo ideal no nulo I de A, existe un elemento $x \in X$ que no pertenece al anulador de I. Un ejemplo significativo de subconjunto denso viene dado por $E = \{e, 1-e\}$, donde e es un idempotente en un álgebra unitaria A. Otro ejemplo de conjunto denso es el determinado por cada elemento no nulo de un álgebra prima A: todo subconjunto $\{x\}$, $0 \neq x \in A$, es denso puesto que todo ideal no nulo tiene anulador nulo.

Dada **P** una propiedad concreta de las álgebras asociativas (tal como semiprimidad, primidad, etc.), diremos que un elemento $a \in A$ es **P** si el álgebra local A_a satisface la propiedad **P** y que A es *localmente* **P** si todos sus elementos no nulos son **P**. Por otro lado, el álgebra A se dirá que es *débil localmente* **P** si todo elemento de X es **P**, donde X es un subconjunto denso de A.

Con esta terminología, [93, Prop. 2.7.14] puede ser enunciado como sigue: un anillo semiprimitivo R es artiniano si, y sólo si, es débil localmente artiniano relativo al subconjunto denso $E = \{e, 1-e\}$.

1.4 PROPOSICIÓN. *Sea $0 \neq a \in A$.*

(1) *Si A es (semi)prima, semiprimitiva, primitiva por la izquierda (derecha) o simple, entonces A_a es (semi)prima, semiprimitiva, primitiva por la izquierda (derecha) o simple, respectivamente,*

(2) *si A es semiprima y no singular por la izquierda (derecha), entonces A_a no singular por la izquierda (derecha),*

(3) *si a es regular von Neumann y A es artiniana (noetheriana) por la izquierda, entonces A_a es artiniana (noetheriana) por la izquierda.*

Recíprocamente,

(4) *si A es semiprima y localmente prima, entonces A es prima,*

(5) *si A es semiprima y débil localmente semiprimitiva o débil localmente no singular por la izquierda (derecha), entonces A es semiprimitiva o no singular por la izquierda (derecha), respectivamente,*

(6) *si A es prima y A_a es primitiva por la izquierda (derecha) para algún $0 \neq a \in A$, entonces A es primitiva por la izquierda (derecha).*

Demostración: (1), (2), (4) y (6) son bien conocidos [44, 1.9].

(3). Sean $\overline{L}_1, \overline{L}_2$ ideales por la izquierda de A_a tales que $\overline{L}_1$ está estrictamente contenido en $\overline{L}_2$. Siempre podemos tomar $\ker(a) \subseteq L_1$ estrictamente contenido en L_2, donde los L_i son ideales por la izquierda de $A^{(a)}$. Entonces el ideal por la izquierda AaL_1 de A está estrictamente contenido en el ideal por la izquierda AaL_2 de A. Puesto que si $AaL_1 = AaL_2$, entonces $A_a \cdot_a \overline{L}_1 = A_a \cdot_a \overline{L}_2$ y de aquí $\overline{L}_1 = \overline{L}_2$, dado que A_a es unitaria por (1.1). De donde se sigue que si A es artiniana (noetheriana) por la izquierda, entonces A_a es artiniana (noetheriana) por la izquierda.

(5). Supongamos que A es semiprima y débil localmente no singular por la izquierda, con respecto al conjunto denso $X \subseteq A$. Por (1.3), para cada $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathrm{Z}_l(A)} \subseteq \mathrm{Z}_l(A_x)$; pero A_x es no singular por la izquierda, luego $x\mathrm{Z}_l(A)x = 0$ y por tanto $x \in \mathrm{an}_A(\mathrm{Z}_l(A))$, lo que implica que $\mathrm{Z}_l(A) = 0$ por la densidad de X. El mismo argumento sirve para el caso en que A sea semiprima y débil localmente semiprimitiva. ■

Recordemos que el *zócalo* de un álgebra asociativa semiprima A se define como la suma de sus ideales por la derecha minimales, que coincide con la suma de los ideales por la izquierda minimales de A. Es bien conocido [59, p. 65] que un ideal por la izquierda, respectivamente por la derecha, de un álgebra semiprima es minimal si, y sólo si, está generado por un *idempotente de división*, esto es, un idempotente e tal que eAe es un álgebra de división. Por (1.1) se tiene que e es de división si, y sólo si, el álgebra local en e es de división, donde recordemos la siguiente caracterización.

1.5 Proposición. *A es un álgebra de división si, y sólo si, es semiprima y no posee ideales internos no triviales.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente, si A es un álgebra de división, se tiene que A es semiprima y no posee ideales internos no triviales. Recíprocamente, supongamos que A es semiprima y no posee ideales internos no triviales. Entonces, para cada elemento no nulo x en A y cualquier $y \in A$, existe $a \in A$ tal que $xax = y$. Esto prueba que el semigrupo multiplicativo de los elementos no nulos de A es de hecho un grupo, esto es, A es un álgebra de división. ■

Veamos que la caracterización local de los elementos que generan ideales por la derecha minimales en un álgebra semiprima no es exclusiva de los idempotentes.

1.6 PROPOSICIÓN. *Para todo elemento no nulo u de un álgebra semiprima A, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *uA es un ideal por la derecha minimal,*

(ii) *A_u es un álgebra de división,*

(iii) *uAu es un ideal interno minimal.*

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $uA = eA$ para un idempotente de división $e \in A$. Entonces u es regular von Neumann: $e = ux$ para algún $x \in A$ y $(u - eu)A = 0$, de donde $u = eu = uxu$. Luego, por (1.1), $A_u \cong End_A(uA)$ que es un álgebra de división por el lema de Schur [66, p. 35].

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Se sigue de la correspondencia que existe entre los ideales internos de A_u y los ideales internos de A contenidos en uAu (1.2(2)), y la caracterización de las álgebras de división (1.5).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dado que A_u es unitaria, u es regular von Neumann por (1.1). Ahora, para todo $0 \neq x = ua \in uA$, $xAx \neq 0$ por la semiprimidad de A y entonces $uabu \neq 0$ para algún $b \in A$; pero $u \in uAu = (xbu)A(uabu)$ por la minimalidad de uAu, luego $uA = xA$ y de aquí uA es un ideal por la derecha minimal. ■

—Un elemento no nulo $u \in A$ se dice que es *de división* si satisface las condiciones equivalentes de (1.6). Se tiene entonces que el zócalo de un álgebra semiprima es la expansión lineal de sus elementos de división, equivalentemente, la suma de sus ideales internos minimales. Esta descripción del zócalo permite obtener la siguiente caracterización local de sus elementos.

1.7 PROPOSICIÓN. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces, $a \in A$ está en el zócalo de A si, y sólo si, A_a es artiniana. Por tanto, A coincide con su zócalo si, y sólo si, es localmente artiniana.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A_a es artiniana, equivalentemente, unitaria y coincide con su zócalo, y sea $\overline{b}$ el elemento unidad de A_a. Entonces $\overline{b} = \overline{x}_1 + \ldots + \overline{x}_n$, donde $\overline{x}_i \in \overline{I}_i$ para cada $1 \le i \le n$, y donde los $\overline{I}_i$ son ideales internos minimales de A_a. Por (1.2(2)), se tiene que $a = aba = ax_1a + \ldots + ax_na \in aI_1a + \ldots + aI_na$, donde los aI_ia son ideales internos minimales de A, de donde se sigue que $a \in \mathrm{Zoc}(A)$.

Recíprocamente, sea $a \in \mathrm{Zoc}(A)$. Por la regularidad de los elementos del zócalo, podemos suponer que $a = aba$ con $b \in \mathrm{Zoc}(A)$. Escribimos entonces $a = aba = ax_1a + \ldots + ax_na$, donde $x_i \in I_i$ para ciertos ideales internos minimales I_i de A. Entonces se tiene que $\overline{b} = \overline{x}_1 + \ldots + \overline{x}_n \in \mathrm{Zoc}(A_a)$, con $\overline{b}$ siendo la unidad de A_a (1.1). Por tanto, A_a es unitaria y coincide con su zócalo, equivalentemente, A_a es artiniana. ■

A continuación damos una caracterización local de las álgebras semiprimas con zócalo esencial.

1.8 TEOREMA. *Un álgebra semiprima A posee zócalo esencial, equivalentemente, $\mathrm{an}_A(\mathrm{Zoc}(A)) = 0$, si, y sólo si, A es débil localmente artiniana.*

DEMOSTRACIÓN: Si A tiene zócalo esencial, entonces $\mathrm{Zoc}(A)$ es claramente un subconjunto denso y para cada $x \in \mathrm{Zoc}(A)$, A_x es artiniana (1.7), luego A es débil localmente artiniana.

Recíprocamente, supongamos que A contiene un subconjunto denso X tal que A_x es artiniana para cada $x \in X$. Sea $I := \mathrm{an}_A(\mathrm{Zoc}(A))$. Si I fuera no nulo, existirían $x \in X$ e $y \in I$ tales que $xyx \neq 0$; pero entonces $A_{xyx} \cong (A_x)_{\overline{y}}$ sería artiniana (1.4(3)) y (1.7), luego, $xyx \in \mathrm{Zoc}(A) \cap \mathrm{an}_A(\mathrm{Zoc}(A)) = 0$, que es una contradicción. Por tanto $\mathrm{an}_A(\mathrm{Zoc}(A)) = 0$. ■

Como consecuencia de un resultado en términos reticulares (ver I.(3.2)), un álgebra semiprima tiene zócalo esencial si, y sólo si, es un producto subdirecto esencial de álgebras primas con zócalo no nulo,

$$\bigoplus \mathrm{Zoc}(A_\alpha) \lhd A \leq \prod (A_\alpha).$$

1.9 Por otro lado [57, 1.2.1] y [15, 4.3.8], un álgebra A es prima con zócalo no nulo si, y sólo si, es, salvo isomorfismo, una subálgebra

$$0 \neq \mathcal{F}_Y(X) \lhd A \leq \mathcal{L}_Y(X)$$

de operadores lineales y continuos conteniendo a los operadores de rango finito, con respecto a un par de *espacios vectoriales duales* (X, Y) sobre un álgebra de división Δ. De hecho, el par se puede construir a partir de un idempotente de división e: $\Delta = eAe$, $X = eA$ e $Y = Ae$, con $< x, y >= xy$ [59, p. 77].

Por el teorema de Wedderburn Artin [59, p. 40], toda álgebra semisimple (semiprima y artiniana) B es isomorfa a $M_{n_1}(\Delta_1) \oplus \ldots \oplus M_{n_r}(\Delta_r)$, donde n_i, Δ_i, $i = 1, \ldots, r$, están determinados de forma única, y $n = n_1 + \ldots + n_r$ es la *capacidad* de B, que coincide con el número de idempotentes e_i ortogonales de división tales que $1 = e_1 + \ldots + e_n$. Este hecho nos permite dar una definición intrínseca del rango de un elemento semisimple, esto es, por (1.7), de un elemento del zócalo de un álgebra semiprima.

—Sea A un álgebra semiprima y $a \in \mathrm{Zoc}(A)$. El *rango* de a se define como la capacidad del álgebra local A_a, esto es,

$$\mathrm{rank}(a) = \mathrm{capacidad}(A_a).$$

1.10 Proposición. *Sea A un álgebra prima con zócalo no nulo S y álgebra de división asociada Δ. Si $a \in S$ tiene rango n, entonces $A_a \cong \mathrm{M}_n(\Delta)$.*

Demostración: Dado que $a \in S$ es regular von Neumann, se tiene que $A_a \cong S_a$ y de aquí que es un álgebra simple y artiniana de capacidad n. Sea $aS = e_1S \oplus \ldots \oplus e_nS$, donde los e_i son idempotentes de división. Entonces, por (1.1), $S_a \cong \mathrm{End}_S(aS) = \mathrm{End}_S(e_1S \oplus \ldots \oplus e_nS) \cong \mathrm{M}_n(\Delta)$. ■

2. Elementos casi noetherianos.

En la sección anterior, vimos que los elementos de un álgebra semiprima A que generan ideales por la derecha minimales son aquellos $a \in A$ para los que A_a es un álgebra de división. En esta sección caracterizaremos aquellos elementos $a \in A$ para los que A_a es un dominio, obteniendo como consecuencia inmediata un importante resultado clásico sobre anillos. Al igual que un álgebra prima que posea elementos de división se representa como un álgebra de operadores lineales y continuos (1.9), veremos que un álgebra prima que contenga un elemento cuya local sea un dominio también se puede representar como una subálgebra de operadores lineales y continuos, pero en este caso, con respecto a un par de módulos libres de torsión duales sobre un dominio, noción que será introducida en esta sección. Finalmente, caracterizaremos los elementos cuyas locales son un dominio de Ore por algún lado.

2.1 TEOREMA. *Sea A un álgebra semiprima. Para un elemento no nulo $u \in A$, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) $\mathrm{lan}_A(ua) = \mathrm{lan}_A(u)$ *siempre que* $ua \neq 0$,

(ii) A_u *es un dominio,*

(iii) $\mathrm{ran}_A(au) = \mathrm{ran}_A(u)$ *siempre que* $au \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Por la simetría de la condición (ii), sólo tenemos que probar las implicaciones (i) $\Rightarrow$ (ii) y (ii) $\Rightarrow$ (iii). Nótese además que las inclusiones $\mathrm{lan}_A(u) \subseteq \mathrm{lan}_A(ua)$ y $\mathrm{ran}_A(u) \subseteq \mathrm{ran}_A(au)$ se dan en general.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $\overline{x} \cdot_u \overline{y} = \overline{0}$ con $\overline{x} \neq \overline{0}$. Entonces $uxu \neq 0$ y $ux \in \mathrm{lan}_A(uyu)$. Si $\overline{y} \neq \overline{0}$, entonces $\mathrm{lan}_A(uyu) = \mathrm{lan}_A(u)$ lo que conduce a una contradicción, dado que $ux \notin \mathrm{lan}_A(u)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supongamos que $\mathrm{ran}_A(u) \neq \mathrm{ran}_A(au)$ para algún $au \neq 0$. Sea $x \in A$ tal que $aux = 0$ pero $ux \neq 0$. Por la semiprimidad de A, existen $b, c \in A$ tales que $ubau \neq 0$ y $uxcu \neq 0$. Entonces $\overline{ba}, \overline{xc}$ son elementos no nulos de A_u con $\overline{ba} \cdot_u \overline{xc} = \overline{b(aux)c} = \overline{0}$. ■

—Un elemento no nulo $u \in A$ se dice que es *seudo-uniforme* o *entero* si satisface las condiciones equivalentes de (2.1).

Ntese que las condiciones (i) y (iii) de (2.1) son equivalentes en general. Por otro lado, un álgebra que satisfaga la CCA sobre los anuladores por la izquierda de elementos tiene elementos seudo-uniformes en abundancia, puesto que cada ideal por la izquierda no nulo contiene uno. Este hecho, junto con (2.1), nos permite obtener un importante resultado clásico sobre teoría de anillos.

2.2 Proposición. *Si A es semiprima y satisface la CCA sobre los anuladores por la izquierda de elementos, en particular si A es noetheriana, entonces A no posee ideales por la izquierda ni por la derecha no nulos que sean nil.*

Demostración: Nótese que si A no posee ideales por la izquierda no nulos que sean nil, tampoco posee ideales por la derecha no nulos que sean nil, puesto que $(xa)^n = 0$ para un cierto n, implica que $(ax)^{n+1} = 0$, para $x, a \in A$. Veamos entonces que A no posee ideales por la izquierda no nulos que sean nil.

Si $L \neq 0$ es un ideal por la izquierda nil de A, tomemos $0 \neq u \in L$ tal que $\mathrm{lan}_A(u)$ sea maximal en el conjunto de los $\mathrm{lan}_A(x)$ con $0 \neq x \in L$, esto es, u es seudo-uniforme pero A_u es nil, lo cual es una contradicción. ■

El resultado (2.2) se utiliza para dar una prueba alternativa al conocido teorema debido a J. Levitzki [66, 10.30] que establece que si R es un anillo noetheriano por la derecha, entonces todo ideal por un lado de R que sea nil es nilpotente, en particular los nilradicales superior e inferior coinciden y son, de hecho, el mayor ideal por la derecha (respectivamente, por la izquierda) nilpotente de R.

Por otro lado, los elementos seudo-uniformes juegan un papel muy importante en algunas de las recientes extensiones de los teoremas de Goldie [34], debido principalmente al hecho de que los elementos seudo-uniformes generan ideales uniformes [34, 5.3] y por tanto proporcionan descomposiciones subdirectas esenciales del álgebra. Nuestro siguiente objetivo es el de obtener una representación de las álgebras primas con elementos seudo-uniformes, para ello, necesitamos introducir algunas definiciones.

—Diremos que (M, N) es un *par de D-módulos (libres de torsión) duales* sobre un (dominio) D si M es un módulo por la izquierda libre de torsión sobre D, N es un módulo por la derecha libre de torsión sobre D y $<,>$: $M \times N \to D$ es una forma bilineal no degenerada. En este caso, un operador lineal $a : M \to M$ se dice que es *continuo* (con respecto al par dual (M, N)) si existe un operador lineal (necesariamente único) $a^\sharp : N \to N$ tal que $< xa, y >=< x, a^\sharp y >$, para todos $x \in M, y \in N$. Nótese que escribimos las aplicaciones de un módulo por la izquierda a la derecha (componiéndolas entonces de izquierda a derecha) y las aplicaciones de un módulo por la derecha a la izquierda (componiéndolas de derecha a izquierda).

El conjunto $\mathcal{L}_N(M)$ de los operadores lineales y continuos con respecto al par dual (M, N) es un álgebra asociativa prima que contiene al ideal $N \otimes_D M$ (que hace las veces del ideal de los operadores lineales y continuos de rango finito) que consiste en la expansión lineal de los elementos $y \otimes x$, donde $y \otimes x$ es el operador de $\mathcal{L}_N(M)$ definido por $x'(y \otimes x) =< x', y > x$ para todo $x' \in M$, con adjunto $(y \otimes x)^\sharp y' = y < x, y' >$.

2.3 Teorema.

(1) *Si A es prima y $u \in A$ es un elemento seudo-uniforme, entonces se puede construir un par (M, N) de módulos duales sobre el dominio A_u, de manera que A puede verse como una subálgebra de $\mathcal{L}_N(M)$ que contiene a $N \otimes_D M$.*

(2) *Recíprocamente, toda subálgebra A de $\mathcal{L}_N(M)$ que contenga a $N \otimes_D M$ es prima y posee un elemento seudo-uniforme.*

Demostración: (1). Si A es prima y $u \in A$ es seudo-uniforme, tómese el dominio $D := A_u$, $M := uA$ con la acción por la izquierda sobre A_u dada por $\overline{a} \cdot ux = uaux$, $N := Au$ con $yu \cdot \overline{a} = yuau$, y defínase $<,>$: $M \times N \to D$ como $< ux, yu >= \overline{xy}$, para todos $ux \in M$, $yu \in N, \overline{a} \in A_u$. Claramente (M, N) es un par de módulos duales sobre A_u.

La aplicación $A \to \mathcal{L}_N(M)$ dada por $a \mapsto \rho_a$, donde $x\rho_a = xa$, para todo $x \in M$, es claramente un monomorfismo y dado que $yu \otimes ux = \rho_{yux}$ para todos $x, y \in A$, se tiene que $N \otimes_D M \cong AuA \subseteq A$.

(2). Sean $a, b \in A$ tales que $aAb = 0$ y supongamos que $b \neq 0$, esto es, $xb \neq 0$ para algún $x \in M$. Para todo $y \in N$ se tiene que $a^\sharp y \otimes xb = a(y \otimes x)b = 0$, por lo que $< M, a^\sharp y > xb = 0$, lo que implica que $< M, a^\sharp y >= 0$ porque M es libre de torsión, y entonces $a^\sharp y = 0$ por la no degenerancia de

$<,>$. Dado que $y \in N$ es arbitrario, $a^\sharp = 0$, y entonces $a = 0$. Luego, A es prima. Veamos que $u = y \otimes x$, donde ambos $x \in M$, $y \in N$ son no nulos, es seudo-uniforme, i.e., $\mathrm{lan}(u) = \mathrm{lan}(ua)$ para todo $0 \neq ua \in A$. Si $b \in \mathrm{lan}(ua)$, para $0 \neq ua \in A$, entonces $0 = bua = b^\sharp y \otimes xa$, lo que implica que $b^\sharp y = 0$ puesto que $xa \neq 0$ (porque $ua \neq 0$), entonces $bu = b^\sharp y \otimes x = 0$ y de aquí $b \in \mathrm{lan}(u)$. ■

El teorema (2.3) permite apreciar el papel fundamental que juegan los elementos seudo-uniformes. De hecho, puede ser considerado como un remoto antecesor del teorema de Wedderburn-Artin para álgebras simples artinianas, puesto que en el caso en que A posea zócalo no nulo, el anillo de división Δ asociado a A procede de cualquier elemento de división $u \in A$, de manera que (M, N) es de hecho un par de espacios vectoriales duales (X, Y) sobre $\Delta := A_u$, y obtenemos así el teorema de estructura clásico de las álgebras primas con ideales por la izquierda minimales (1.9).

El motivo por el cual hemos elegido el término “seudo-uniforme” para designar a los elementos enteros de un álgebra semiprima quedará justificado estudiando elementos uniformes por un lado. De hecho, los elementos seudo-uniformes fueron presentados en álgebras de Jordan con el nombre de *elementos uniformes* [33]. En todo lo que sigue, las definiciones y los resultados se establecerán sólo por la izquierda, siendo también válidas sus versiones por la derecha.

—Un elemento $a \in A$ se dice que tiene *dimensión uniforme* por la izquierda *finita*, $\mathrm{udim}_l(a) = n$, si Aa contiene una suma directa esencial $L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ de n ideales por la izquierda *uniformes* no nulos L_i (esto es, cada ideal por la izquierda no nulo contenido en L_i es esencial) de A y toda suma directa de ideales por la izquierda no nulos de A contenida en Aa tiene a lo sumo n sumandos. Por [7, Prop. 1], se tiene que si A es no singular por la izquierda, entonces el conjunto de los elementos de A que tienen dimensión uniforme por la izquierda finita es un ideal de A. Finalmente, si $\mathrm{udim}_l(a) = 1$, entonces a se dice que es *uniforme* por la izquierda. Por otro lado, la *dimensión uniforme por la izquierda* de un anillo R es la dimensión uniforme de R visto como módulo por la izquierda sobre sí mismo, y R se dice que es *uniforme por la izquierda* si tiene dimensión uniforme por la izquierda 1, esto es, $\mathrm{udim}_l(R) = 1$.

2.4 Proposición. *Sea A semiprima y $a \in A$. Entonces*

$$\mathrm{udim}_l(a) = \mathrm{udim}_l(A_a),$$

cuando se tenga que alguna de ellas es finita.

Demostración: Por la semiprimidad de A se tiene que todo ideal por la izquierda no nulo L de A contenido en Aa tiene intersección no nula con aAa. Por tanto, toda suma directa $\bigoplus L_\alpha$ de ideales por la izquierda no nulos de A contenidos en Aa da lugar a la suma directa de ideales por la izquierda *no nulos* $\mathcal{L}_\alpha := \{\overline{x} \in A_a : axa \in L_\alpha\}$ de A_a.

Recíprocamente, si $\{\mathcal{L}_\alpha\}$ es una familia de ideales por la izquierda no nulos de A_a cuya suma es directa. Para cada índice α, tomemos un elemento no nulo $\overline{l}_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$. Entonces la suma de los ideales por la izquierda *no nulos* $Aal_\alpha a \subseteq Aa$ es directa. Pues, si $b_1al_1a + b_2al_2a + \ldots + b_nal_na = 0$ con $b_1al_1a \neq 0$, entonces, por la semiprimidad de A se tiene que $axb_1al_1a \neq 0$ para algún $x \in A$ y de aquí $\overline{0} \neq \overline{xb_1} \cdot_a \overline{l}_1 \in \mathcal{L}_1 \cap \sum_{i=2}^n \mathcal{L}_i$, lo cual es una contradicción. ■

Recordemos que un dominio D se dice que satisface la *condición de Ore* por la izquierda si

$$Da \cap Db \neq 0 \quad \text{para} \quad a, b \in D - \{0\}.$$

—Un dominio que satisface la condición de Ore por la izquierda se dice que es un *dominio de Ore* por la izquierda.

2.5 Lema. *Si A es no singular por la izquierda y uniforme por la izquierda, entonces A es un dominio de Ore por la izquierda.*

Demostración: En efecto, dado que para todo $0 \neq x \in A$ se tiene que $\mathrm{lan}_A(x) = 0$. Pues si $\mathrm{lan}_A(x) \neq 0$, por la uniformidad por la izquierda de A, se tendría que es esencial y entonces $x \in Z_l(A)$, luego $x = 0$ por la no singularidad de A y por tanto A sería un dominio. La condición de Ore se sigue de la uniformidad de A. ■

2.6 Proposición. *Sea A semiprima y no singular por la izquierda. Entonces $u \in A$ es uniforme por la izquierda si, y sólo si, es un elemento de*

Ore por la izquierda, esto es, A_u es un dominio de Ore por la izquierda. En particular, los elementos uniformes por la izquierda en álgebras semiprimas no singulares por la izquierda son seudo-uniformes.

Demostración: La suficiencia de la condición se sigue directamente de (2.4), sin necesidad de pedir no singularidad. Por otro lado, sea $u \in A$ uniforme por la izquierda. Entonces A_u es uniforme por la izquierda de nuevo por (2.4), y no singular por la izquierda por la herencia de la no singularidad de A (1.4(2)). Por tanto A_u es un dominio de Ore por la izquierda por (2.5), y u es seudo-uniforme por (2.1). ■

Nótese que para todo elemento no nulo u del zócalo de un álgebra semiprima A, las siguientes condiciones son equivalentes: (i) u es seudo-uniforme, (ii) u es uniforme por la izquierda y (iii) u es un elemento de división.

3. Teoremas de Goldie locales.

El resultado principal de esta sección es la caracterización de las álgebras primas que poseen elementos de Goldie por la izquierda, equivalentemente las álgebras primas que poseen elementos de Ore por la izquierda. Este resultado, junto con (2.3), permitirá describir las álgebras semiprimas conteniendo un conjunto denso de elementos de Goldie por la izquierda o un conjunto denso de elementos enteros, respectivamente. Comenzamos recordando las nociones que aparecerán en esta sección.

—Un anillo R se dice que es *de Goldie* por la izquierda si tiene dimensión uniforme por la izquierda finita y satisface CCA para los anuladores por la izquierda. Si R es semiprimo, entonces R es de Goldie por la izquierda sii tiene dimensión uniforme por la izquierda finita y es no singular por la izquierda [51, 3.32].

Recordemos además que una subálgebra A de un álgebra asociativa y unitaria Q se dice que es un *orden (clásico) por la izquierda* en Q si

(1) $\mathrm{Reg}(A) \subseteq \mathrm{Inv}(Q)$, y

(2) para cada $q \in Q$, $q = u^{-1}x$,

para ciertos $x \in A$, $u \in \mathrm{Reg}(A)$. El teorema de Goldie [51, 3.35] establece que

3.1 R es semiprimo y de Goldie por la izquierda si, y sólo si, es un orden por la izquierda en un anillo semiprimo y artiniano Q. Además, R es primo sii Q es simple.

En 1990, J. Fountain y V. Gould introducen una noción de orden, llamados “Fountain-Gould”, en anillos que no son necesariamente unitarios y caracterizan los órdenes biláteros en anillos semiprimos que coinciden con su zócalo (posteriormente, P.N. Ánh y L. Márki extienden este resultado a órdenes por un lado).

—Un elemento a en un álgebra A se dice que es de *cuadrado cancelable por la derecha* si

$$xa^2 = 0 \Rightarrow xa = 0$$

para $x \in A'$ (la unitizada de A). Análogamente, a es de *cuadrado cancelable por la izquierda* si $a^2x = 0 \Rightarrow ax = 0$. Si a es ambos, de cuadrado cancelable por la izquierda y por la derecha, entonces a se dice simplemente que es *de cuadrado cancelable*.

Denotemos por $LocInv(A)$ al conjunto de los elementos $a \in A$ que son *localmente inversibles* en el sentido de que existe un idempotente $e \in A$ tal que a es inversible en el anillo unitario eAe. Entonces, el *inverso local* $a^{\#} \in eAe$ de a es precisamente el *inverso de grupo* de a, y viene caracterizado por las siguientes condiciones,

$$aa^{\#} = a^{\#}a, \quad a = aa^{\#}a, \quad a^{\#} = a^{\#}aa^{\#}.$$

El idempotente e es también único, $e = aa^{\#} = a^{\#}a$. Además, a es localmente inversible si, y sólo si, $a \in a^2Aa^2$ (véase [41]). Entonces, si $a \in A$ es localmente inversible en algún álgebra $Q \supset A$, se tiene que a es de cuadrado cancelable en A.

3.2 Si $a \in A$ es de cuadrado cancelable, entonces A_{a^2} es isomorfa a la subalgebra aAa, vía la aplicación $A_{a^2} \to aAa$, $\overline{x} \mapsto axa$.

—Una subálgebra A de un álgebra Q se dice que es un *orden Fountain-Gould por la izquierda* en Q si

(1) todo elemento de cuadrado cancelable en A es localmente inversible en Q, y

(2) para todo $q \in Q$, se tiene que $q = a^\sharp b$ donde $a, b \in A$ y a es localmente inversible en Q.

Se dice que A es un *orden Fountain-Gould por la izquierda débil* en Q cuando la condición (2) de arriba se satisface. Por otro lado, se dice que un álgebra no singular por la izquierda A es un *orden Ánh-Márki por la izquierda* en Q si el ideal $I_l(A)$ de los elementos de A que tienen dimensión uniforme por la izquierda finita es un orden Fountain-Gould por la izquierda en $\mathrm{Zoc}(Q)$.

Dado que toda álgebra semiprima que coincide con su zócalo satisface la CCD sobre los ideales por la izquierda principales (hecho que puede deducirse de (1.7)), se sigue de [47, Prop. 2.6] el siguiente resultado.

3.3 Todo orden Fountain-Gould por la izquierda débil en un álgebra semiprima Q que coincida con su zócalo es de hecho un orden Fountain-Gould por la izquierda en Q.

3.4 TEOREMA. *Para un álgebra A, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *A es prima y contiene un elemento de Goldie por la izquierda no nulo,*

(ii) *A es prima y contiene un elemento de Ore por la izquierda,*

(iii) *A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{L}_N(M)$ que contiene a $N \otimes_D M$, donde (M, N) es un par de módulos duales sobre el dominio de Ore por la izquierda D,*

(iv) *A es un orden Ánh-Márki por la izquierda en un álgebra prima Q con zócalo no nulo. En este caso, el álgebra de división Δ asociada a Q es isomorfa al álgebra de fracciones del dominio de Ore por la izquierda A_u, donde u es cualquier elemento uniforme por la izquierda de A,*

(v) *A es prima, no singular por la izquierda y contiene un elemento uniforme por la izquierda.*

En particular, A es un orden Fountain-Gould por la izquierda en un álgebra simple Q que coincide con su zócalo si, y sólo si, A es prima, no singular por la izquierda y cada uno de sus elementos tiene dimensión uniforme por la izquierda finita.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $a \in A$ un elemento de Goldie por la izquierda no nulo. Entonces A_a es un álgebra de Goldie por la izquierda y por tanto contiene un elemento $\overline{u}$ uniforme por la izquierda. Por la transitividad de la localización y (2.6) se tiene que $A_{aua} \cong (A_a)_{\overline{u}}$ es un dominio de Ore por la izquierda, luego $aua \in A$ es un elemento de Ore por la izquierda.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea A prima con un elemento de Ore por la izquierda u. Por (2.3(1)), existe un par (M, N) de módulos duales sobre el dominio de Ore por la izquierda $D := A_u$ tal que $N \otimes_D M \triangleleft A \leq \mathcal{L}_N(M)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Por (2.3(2)) y (1.4(5)) A es prima y no singular. Además, todo operador de rango uno $u = n \otimes m$ es uniforme por la izquierda en A: si $au = a^\sharp n \otimes m$ y $bu = b^\sharp n \otimes m$ son no nulos para $a, b \in A$, tómese $x_1, x_2 \in M$ tales que $< x_1, a^\sharp n >= \alpha \neq 0$ y $< x_2, b^\sharp n >= \beta \neq 0$. Por la condición de Ore por la izquierda, existen $\lambda, \mu \in D$ tales que $\lambda\alpha = \mu\beta \neq 0$. Entonces para todo $y \in N$ no nulo tenemos

$$(y \otimes \lambda x_1)au = y \otimes \lambda\alpha m = y \otimes \mu\beta m = (y \otimes \mu x_2)bu \neq 0,$$

lo que prueba que $\mathrm{udim}_l(Au) = 1$, esto es, u es uniforme por la izquierda. En este punto de la demostración, podríamos apelar a [7, Th. 1] para concluir que A es una subálgebra de un álgebra prima Q con zócalo no nulo tal que el ideal $I_l(A)$ es un orden Fountain-Gould por la izquierda en $\mathrm{Zoc}(Q)$. Sin embargo, daremos una construcción explícita del álgebra Q y mostraremos cómo $I_l(A)$ puede ser visto como un orden Fountain-Gould por la izquierda en $\mathrm{Zoc}(Q)$.

Sea Δ el álgebra de división de fracciones del dominio de Ore por la izquierda D, y consideremos el par de espacios vectoriales duales (X, Y) sobre Δ, donde $X = \Delta \otimes_D M$ es la localización de M e $Y = \hat{X}$ es el *dual* de ${}_\Delta X$. Entonces $Q := \mathcal{L}_Y(X)$ es un álgebra prima con zócalo $\mathcal{F}_Y(X) = Y \otimes_\Delta X$, y $N \otimes_D M \triangleleft A \leq Q$. Necesitamos probar que $I_l(A)$ es un orden Fountain-Gould por la izquierda en $\mathrm{Zoc}(Q)$, lo que, por (3.3) se reduce a probar que todo $q \in \mathrm{Zoc}(Q)$ se puede expresar como $q = a^\sharp b$, donde $a, b \in I_l(A)$ y a tiene un inverso de grupo en $\mathrm{Zoc}(Q)$.

Escribamos $q = y_1 \otimes \alpha_1^{-1} m_1 + \ldots + y_r \otimes \alpha_r^{-1} m_r$, donde los $\alpha_i^{-1} m_i \in X$, y los $y_j \in Y$ son linealmente independientes. Sea $\{y_i' = \beta_i^{-1} v_i\}$ $(v_i \in M)$ *dual* a $\{y_i\}$, i.e., $< y_i', y_j >= \delta_{ij}$. Entonces, por la condición de Ore por la izquierda, existen $\lambda_i, \mu_i \in D$ tales que $\beta_i \alpha_i^{-1} = \lambda_i^{-1}\mu_i \neq 0$. Tomando $a := n_1\lambda_1 \otimes \beta_1 y_1' + \ldots + n_r\lambda_r \otimes \beta_r y_r'$ para r elementos $n_1, \ldots, n_r$ de N que sean linealmente independientes en Y, se comprueba con un simple cálculo que $q = a^\sharp b$ con $b := aq = \sum_{1\leq i\leq r} n_i \otimes \mu_i m_i$, donde $a, b \in N \otimes_D M \subseteq I_l(A)$. Nótese que por la unicidad de los órdenes Fountain-Gould por la izquierda [53, Th. 5.9], si partimos de un elemento uniforme por la izquierda $u \in A$ (2.3(1)), obtenemos que Δ es isomorfo al álgebra de fracciones del dominio de Ore por la izquierda A_u.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Se sigue de [7, Th. 1].

(v) $\Rightarrow$ (i). Se sigue de (2.6) dado que todo elemento de Ore por la izquierda es en particular un elemento de Goldie por la izquierda. ■

Los anillos que satisfacen las condiciones equivalentes de (3.4) fueron estudiados por S.A. Amitsur [4] en el marco de los contextos de Morita (el papel jugado por el álgebra local en un elemento de Ore en nuestro enfoque es allí jugado por el anillo de los endomorfismos de un módulo por la izquierda uniforme), y por P.N. Ánh y L. Márki, quienes probaron la equivalencia (iv) $\Leftrightarrow$ (v) [7, Th. 1] y obtuvieron la caracterización (ii) $\Leftrightarrow$ (v) [7, Th. 2] en términos de la realización del álgebra local en a^2 dada en (3.2). En particular, los órdenes Fountain-Gould por la izquierda en anillos simples que coinciden con su zócalo habían sido previamente caracterizados por P.N. Ánh y L. Márki [5], así como una extensión del caso bilátero [46]. Para un estudio de los órdenes Fountain-Gould por la izquierda, vía las álgebras locales, nos referimos al reciente artículo debido a M. Gómez y M. Siles [50].

Usando los resultados (2.3) y (3.4), podemos describir la estructura de las álgebras semiprimas que contienen bien un subconjunto denso de elementos enteros o un subconjunto denso de elementos de Ore.

3.5 Lema. *Sea A semiprima e I un ideal de A que contenga un elemento seudo-uniforme (no nulo de Goldie por la izquierda) u. Entonces $\overline{u}$ sigue siendo seudo-uniforme (de Goldie por la izquierda) en el álgebra semiprima $\overline{A} := A/\mathrm{an}_A(I)$.*

Demostración: No es difícil comprobar que $\overline{A}$ es semiprima. Ahora, si $\overline{x} \in \mathrm{lan}_{\overline{A}}(\overline{ua})$ con $\overline{ua} \neq \overline{0}$, entonces $xua \in I \cap \mathrm{an}_A(I) = 0$ implica, por la seudo-uniformidad de u, que $xu = 0$, y por tanto $\overline{xu} = \overline{0}$. El caso en el que u sea de Goldie por la izquierda se sigue de [36, 6.4]. ■

3.6 TEOREMA. *Para un álgebra A, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *A es un producto subdirecto esencial de una familia de álgebras primas A_α cada una de las cuales contiene un elemento seudo-uniforme (no nulo de Goldie por la izquierda),*

(ii) *A es semiprima y débil localmente entera (débil localmente de Goldie por la izquierda).*

En ambos casos, A es no singular (por la izquierda y por la derecha).

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar el *caso seudo-uniforme* y a saltarnos el caso *de Goldie por la izquierda* cuya prueba es similar. (i) $\Rightarrow$ (ii). En general, todo producto subdirecto de álgebras semiprimas es también un álgebra semiprima. Sea entonces $M \lhd A \leq \prod(A_\alpha)$, donde cada A_α es un álgebra prima conteniendo un elemento seudo-uniforme u_α y M un ideal esencial del producto directo. Para cada índice α, existe un elemento $0 \neq u_\alpha x_\alpha \in M$ que sigue siendo seudo-uniforme en A_α, y por tanto también en A. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_\alpha \in M \subseteq A$. Claramente, $X := \{u_\alpha\}$ es un subconjunto denso de A y por tanto A es débil localmente entera. Como las álgebras enteras son no singulares por la izquierda y por la derecha, la no singularidad de A se sigue de (1.3): $\overline{\mathrm{Z}_l(A)} \subseteq \mathrm{Z}_l(A_{u_\alpha}) = \overline{0}$ implica que $u_\alpha \in \mathrm{an}_A(\mathrm{Z}_l(A))$ para todos los índices α, y por tanto $\mathrm{Z}_l(A) = 0$ por la densidad de X.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea X un subconjunto denso de A formado por elementos seudo-uniformes. Para todo ideal no nulo I de A existe $x \in X$ que no anula a I, por lo que I contiene un elemento seudo-uniforme, y por tanto un ideal uniforme [34, 5.3]. Luego se tiene (ver I.(3.2)) que A es un producto subdirecto esencial de álgebras primas $A_\alpha := A/\mathrm{an}_A(M_\alpha)$, donde cada M_α es un ideal de A que contiene un elemento seudo-uniforme. Entonces, por (3.5), cada A_α contiene un elemento seudo-uniforme. ■

Nótese que por (1.4(5)) y (2.4), un álgebra semiprima A es localmente de Goldie por la izquierda si, y sólo si, es no singular por la izquierda y cada uno de sus elementos tiene dimensión uniforme por la izquierda finita. Entonces, por [5, Th. 1], tales álgebras son precisamente los órdenes Fountain-Gould por la izquierda en un álgebra semiprima que coincide con su zócalo.

4. Álgebras primas con elementos PI. Teorema de Martindale.

La definición de *identidad polinómica generalizada* (IPG) y la caracterización de Martindale de los anillos primos que satisfacen una IPG [15] hacen uso de la clausura central de un anillo. P.N. Ánh y L. Márki dieron en [6] caracterizaciones internas de estos anillos eliminando la clausura central. En particular, un álgebra prima A satisface una IPG si, y sólo si, A tiene un elemento de cuadrado cancelable $a \neq 0$ tal que el álgebra aAa satisface una *identidad polinómica*, i.e., es *PI* (véase [92] para resultados básicos en teoría PI). Pero, como observamos en (3.2), la subálgebra aAa es entonces isomorfa al álgebra local de A en a^2. Luego, se tiene que un álgebra prima A satisface una IPG si, y sólo si, contiene un elemento PI no nulo. Con esta terminología, el teorema de Martindale se enuncia como sigue.

4.1 Teorema. *Un álgebra A es prima y contiene un elemento PI no nulo si, y sólo si, A es un orden Ánh-Márki por la izquierda en un álgebra primitiva Q con zócalo no nulo cuya álgebra de división asociada Δ es de dimensión finita sobre su centro.*

Demostración: Si el elemento $0 \neq a \in A$ es PI, entonces el álgebra A_a es PI y por tanto un álgebra de Goldie por los dos lados [56, 7.3.2]: tomemos un elemento de Ore por la izquierda $\overline{u}$ en A_a. Entonces $A_{aua} \cong (A_a)_{\overline{u}}$ es un dominio de Ore PI y por tanto, por (3.4), A es un orden Ánh-Márki bilátero en un álgebra primitiva con zócalo no nulo, cuya álgebra de división asociada Δ es isomorfa a la localización central de A_{aua} que es de dimensión finita sobre su centro por el teorema de Posner [22, p. 420].

Recíprocamente, si A es un orden Ánh-Márki por la izquierda en un álgebra prima Q con zócalo no nulo y cuya álgebra de división asociada Δ sea de dimensión finita sobre su centro, entonces A es prima (3.4) y todo elemento $a \in A$ de dimensión uniforme por la izquierda finita cae en $\mathrm{Zoc}(Q)$. Dado que, por (1.10), $Q_a \cong \mathrm{M}_n(\Delta)$, con $n = \mathrm{rank}(a)$, se tiene que Q_a es de dimensión finita sobre su centro y por tanto PI. Luego, el álgebra $A_a \leq Q_a$ es también PI. ■

Mientras que en [74], el teorema de Posner se obtiene como consecuencia del teorema de Martindale para anillos primos satisfaciendo una IPG, y lo mismo ocurre con el conocido como teorema PI de Kaplansky [22, p. 407], en nuestro enfoque de las álgebras primas satisfaciendo una IPG, hemos seguido el camino opuesto. Ahora, utilizando el teorema PI de Kaplansky en lugar del de Posner, obtenemos el siguiente refinamiento de (4.1) que se debe a Amitsur [3].

4.2 COROLARIO. *Un álgebra es primitiva y contiene un elemento PI no nulo si, y sólo si, tiene zócalo no nulo y su álgebra de división asociada tiene dimensión finita sobre su centro.*

Una de las piezas claves en el artículo de Martindale sobre anillos primos satisfaciendo una IPG es la noción de centroide extendido [15]. No es difícil comprobar que para un álgebra primitiva A con zócalo no nulo, el centroide extendido de A es isomorfo al centro de su álgebra de división asociada. Por otro lado, se prueba en [100, 4.7] que si A es primitiva y $a \in A$ es un elemento PI no nulo, entonces el centro $\mathrm{Z}(A_a)$ de A_a es isomorfo al centro del álgebra de división asociada a A. Si A es simplemente prima en lugar de primitiva, entonces $\mathrm{Z}(A_a)$ es un dominio de integridad cuyo cuerpo de fracciones es entonces isomorfo al centroide extendido de A.

Los elementos PI en el contexto de los sistemas de Jordan han sido estudiados por F. Montaner [83], quien en [84] ha extendido las nociones de Martindale de centroide extendido y de clausura central a los sistemas de Jordan y ha desarrollado una teoría PI local a la que recurriremos en la cuarta sección de esta memoria.

Capítulo III.

SISTEMAS DE JORDAN FUERTEMENTE PRIMOS CON ZÓCALO

En este capítulo describiremos los pares de Jordan fuertemente primos con zócalo no nulo, equivalentemente, conteniendo ideales internos minimales, sin restricción alguna en la característica. Tales pares de Jordan son o bien simples con capacidad finita (de albert o de clifford) o bien especiales conteniendo un ideal amplio $H_0(A,*)$, donde $(A,*)$ es un par asociativo $*$-simple coincidiendo con su zócalo (y $*$ es una involución polarizada). Nuestra principal tarea será la de describir estos ideales amplios.

Como consecuencia obtendremos la descripción de las álgebras de Jordan fuertemente primas con zócalo no nulo. La clasificación de los sistemas triples fuertemente primos con zócalo es una tarea aún por hacer.

1. Nociones generales.

Comenzamos recordando la noción de álgebra local asociada a un elemento de un sistema (algebraico) de Jordan.

—Sea V un par de Jordan y $a \in V^{-\sigma}$. Entonces la *homótopa* de V en a, que denotaremos por $V^{(a)}$, es el álgebra de Jordan definida por la misma estructura de Φ-módulo que V^{σ} y los productos Jordan $U_x^{(a)} := Q_x Q_a$ y $x^{2(a)} := Q_x a$. El conjunto $\ker_V(a) := \{x \in V^{\sigma} : Q_a x = Q_a Q_x a = 0\}$ (donde la segunda condición sobre x es superflua si V es no degenerado) es un ideal de $V^{(a)}$ y el cociente $V_a := V^{(a)}/\ker_V(a)$ es un álgebra de Jordan, a la que se conoce como el *álgebra local* de V en a.

Las álgebras locales de un álgebra de Jordan o de un sistema triple de Jordan J en elementos se definen bien a través del par de Jordan $V(J)$ (obtenido duplicando J) o directamente [26]. Si J es un álgebra de Jordan y el elemento $a \in J$ es *inversible* (esto es, U_a es inversible), entonces $J^{(a)}$ se dice que es la *isótopa* de J en a; las isótopas de un álgebra de Jordan no unitaria se definen a través de un álgebra de Jordan unitaria K que contenga a J como subálgebra y un elemento $a \in K$ que sea inversible en K y satisfaga

$$U_a J = J, \qquad U_J a \subseteq J.$$

Por ejemplo, esta condición se satisface si J es un ideal de K; en particular, si K es la unitizada de J. Entonces la isótopa $J^{(a)}$ es J con la multiplicación inducida por $K^{(a)}$.

Igual que en el caso asociativo (II.(1.4)), las propiedades buenas de un sistema de Jordan son heredadas por sus locales, así como se trasmiten de las álgebras locales a todo el sistema (véanse [9], [13] y [26]). Recordemos que un sistema de Jordan V se dice que es *primo* si $I_1 \star I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 0$ ó $I_2 = 0$ para todo par de ideales I_1, I_2 de V, donde $\star$ es el producto de ideales definido en el Capítulo I. Claramente, todo sistema de Jordan primo es semiprimo, y lo mismo es válido para sistemas de Jordan no degenerados. Pero, a diferencia de los sistemas asociativos, un sistema de Jordan semiprimo (incluso primo) no es necesariamente no degenerado, aunque un contraejemplo ha de buscarse entre los monstruos creados por S. Pchelintsev [88]. Se dice entonces que un sistema de Jordan es *fuertemente primo* si es primo y no degenerado.

La clasificación de las álgebras de Jordan fuertemente primas se debe a E. Zel'manov en el caso lineal ([104],[105]) y a K. McCrimmon y E. Zel'manov ([78],[82]) en el caso cuadrático. La clasificación de los pares y sistemas triples de Jordan fuertemente primos se debe a E. Zel'manov [106] para características distintas de 2 y 3, y a A. D'Amour y K. McCrimmon en el caso cuadrático ([25], [27]). La clave para la clasificación de las álgebras de Jordan fuertemente primas especiales está en la existencia de los llamados *polinomios de zelmanov*, esto es, polinomios en el álgebra de Jordan *libre especial* $\mathrm{FSJ}(X)$ que no se anulan en $H_3(\Phi) := H(M_3(\Phi), t)$ y que pertenecen a un ideal hermitiano, donde recordemos que un ideal $T(X)$ de $\mathrm{FSJ}(X)$ se dice que es *hermitiano* si satisface

(1) si $p(x_1, \cdots, x_n) \in T(X)$, entonces $p(\sigma(x_1), \cdots, \sigma(x_n)) \in T(X)$ para toda permutación σ de los elementos de X, y

(2) es cerrado para las *n-tadas*, esto es, $\{x_1 \cdots x_n\} := x_1 \cdots x_n + x_n \cdots x_1 \in T(X)$ para cualesquiera $x_1, \cdots, x_n \in T(X)$ y todo $n \geq 4$.

Por la propiedad universal de $\mathrm{FSJ}(X)$, todo polinomio *hermitiano*, esto es, todo elemento de un ideal hermitiano $T(X)$, se puede evaluar en cualquier álgebra de Jordan especial J. Los valores que toman los polinomios de $T(X)$ en J constituyen un ideal de J, que denotaremos por $T(J)$, llamado *parte hermitiana de* J.

1.1 Existen ideales hermitianos no nulos $\mathcal{H}(X)$ que poseen polinomios de zelmanov y que satisfacen que para cada natural n, una potencia suficientemente alta de $\mathcal{H}(X)$ es no nula y *come* n-tadas, esto es,

$$\{x_1 \dots x_{n-1}\mathcal{H}(X)^{(n)}\} \subseteq \mathrm{FSJ}(X),$$

para todos $x_1, \cdots, x_{n-1} \in \mathrm{FSJ}(X)$. En particular, $(n) = 1$ para $n \leq 5$.

De ahora en adelante, reservaremos la notación $\mathcal{H}(X)$ para designar exclusivamente a los ideales hermitianos de $\mathrm{FSJ}(X)$ con las propiedades descritas en (1.1). Asimismo reservaremos la notación $\mathcal{G}(X)$ para los ideales hermitianos del par de Jordan *libre especial* $\mathrm{FSJP}(X)$ con propiedades análogas a las de $\mathcal{H}(X)$. En un apéndice al final de esta memoria recogeremos la demostración de (1.1) para el caso lineal.

—Un par de Jordan no degenerado V se dice que tiene *capacidad finita* si satisface ambas CCA y CCD sobre sus ideales internos principales. En este caso, todas las cadenas maximales de ideales internos principales tienen la misma longitud $\kappa(V)$ (llamada la *capacidad* de V). Existen varias condiciones que son equivalentes a tener capacidad finita [73]. Si J es un álgebra de Jordan o sistema triple de Jordan, decimos que J tiene capacidad finita si el par de Jordan $V(J)$ tiene capacidad finita, y escribimos $\kappa(J) = \kappa(V(J))$. Nótese que un álgebra de Jordan no degenerada con capacidad finita es necesariamente unitaria [78, 1.5]. Si V satisface la CCD sobre todos los ideales internos, entonces V se dice que es *artiniano*.

1.2 Se sigue de [70, 12.12] que los pares de Jordan no degenerados artinianos tienen capacidad finita, pero el recíproco no es cierto ni siquiera para álgebras de Jordan [76, corolario del Th. 6].

Siguiendo [71], el *zócalo* de un par de Jordan no degenerado V viene dado por

$$\mathrm{Zoc}(V) = (\mathrm{Zoc}(V^+), \mathrm{Zoc}(V^-)),$$

donde $\mathrm{Zoc}(V^\sigma)$ es la suma de todos los ideales internos minimales de V^σ. El zócalo es una suma directa de ideales simples, y satisface la CCD sobre los ideales internos principales. Las nociones de zócalo de un álgebra o sistema triple de Jordan se definen de manera análoga. Se tiene la siguiente caracterización local de los elementos del zócalo [83, 0.7(b)] de un par de Jordan no degenerado.

1.3 $x \in \mathrm{Zoc}\,(V^\sigma)$ si, y sólo si, el álgebra local V_x tiene capacidad finita.

Como veremos en este capítulo, la descripción de los pares de Jordan fuertemente primos con zócalo no nulo se reduce a la de los pares asociativos simples con zócalo no nulo (e involución polarizada), donde el *zócalo* de un par asociativo semiprimo A se define como

$$\mathrm{Zoc}(A) := \mathrm{Zoc}(A^J),$$

y se tiene que $\mathrm{Zoc}(A)$ es un ideal de A [21]. La caracterización local de los elementos del zócalo (1.3) en el contexto de los pares asociativos generaliza la dada en el de las álgebras asociativas (II.(1.7)), a saber: $x \in \mathrm{Zoc}(A^\sigma)$ sii el álgebra local A_x es semiprima y artiniana. Por otro lado, si A es un par asociativo, una *involución polarizada* de A es un par de aplicaciones lineales involutivas $*: A^\sigma \to A^\sigma$ tales que $(xyz)^* = z^*y^*x^*$, para todos $x, z \in A^\sigma$, $y \in A^{-\sigma}$. Nótese que si $*$ es una involución polarizada, entonces $-*: x \mapsto -x^*$ es de nuevo una involución polarizada.

1.4 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa y unitaria con dos idempotentes no triviales e_1, e_2 tales que $e_1 + e_2 = 1$. Consideremos la *descomposición de Peirce*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{12} \oplus \mathcal{A}_{21} \oplus \mathcal{A}_{22} = e_1\mathcal{A}e_1 \oplus e_1\mathcal{A}e_2 \oplus e_2\mathcal{A}e_1 \oplus e_2\mathcal{A}e_2$$

de $\mathcal{A}$ con respecto a e_1, e_2. Entonces $(\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{21})$ es un par asociativo con el usual producto triple. Recíprocamente, todo par asociativo $A = (A^+, A^-)$ se puede obtener de esta manera [70, 2.3], i.e., existe un álgebra asociativa y unitaria $\mathcal{A}$ con dos idempotentes, $e_1 + e_2 = 1$, tal que A se identifica con el par asociativo $(\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{21})$ definido arriba, donde $\mathcal{A}_{11}$ (respectivamente $\mathcal{A}_{22}$) es la expansión de e_1 y los productos $x_{12}y_{21}$ (respectivamente e_2 y los productos $y_{21}x_{12}$) para $x_{12} \in \mathcal{A}_{12}$, $y_{21} \in \mathcal{A}_{21}$, y tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned} &x_{11}\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21}x_{11} = 0 \quad \text{implica} \quad x_{11} = 0, \quad \text{y} \\ &x_{22}\mathcal{A}_{21} = \mathcal{A}_{12}x_{22} = 0 \quad \text{implica} \quad x_{22} = 0. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

El álgebra $\mathcal{A}$ se llama la *envolvente estándar* de A. Si A es semiprima, entonces (1.4.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} x_{11}\mathcal{A}_{12} = 0 \quad &\text{implica} \quad x_{11} = 0, \quad \text{y} \\ x_{22}\mathcal{A}_{21} = 0 \quad &\text{implica} \quad x_{22} = 0, \end{aligned}$$

o a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{21}x_{11} = 0 \quad &\text{implica} \quad x_{11} = 0, \quad \text{y} \\ \mathcal{A}_{12}x_{22} = 0 \quad &\text{implica} \quad x_{22} = 0, \end{aligned}$$

Los pares asociativos se ajustan bien en sus envolventes estándar.

1.5 PROPOSICIÓN. *Sea A un par asociativo con envolvente estándar $\mathcal{A}$ ($e_1 + e_2 = 1$). Entonces*

(1) *toda involución polarizada de A se extiende de manera única a una involución (de algebras) de $\mathcal{A}$ que satisface $e_1^* = e_2$,*

(2) *A es semiprima (prima) sii $\mathcal{A}$ es semiprima (prima),*

(3) *$A_a \cong \mathcal{A}_a$ para todo $a \in A^\sigma$,*

(4) *si A es semiprima, entonces*

$$\mathrm{Zoc}(A^+) = \mathrm{Zoc}(\mathcal{A}) \cap A^+ = e_1 \mathrm{Zoc}(\mathcal{A}) e_2.$$

Análogamente, Zoc$(A^-) = \mathrm{Zoc}(\mathcal{A}) \cap A^- = e_2 \mathrm{Zoc}(\mathcal{A}) e_1$.

Demostración: (1). Dado $a_{11} = \alpha e_1 + \sum a_{12} a_{21} \in \mathcal{A}_{11}$, definimos $a_{11}^* := \alpha e_2 + \sum a_{21}^* a_{12}^* \in \mathcal{A}_{22}$. Por (1.4.1), $a_{11}^* = 0 \Leftrightarrow a_{11} = 0$. Análogamente, se define a_{22}^* para cada $a_{22} \in \mathcal{A}_{22}$. Se tiene que la aplicación $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por

$$(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})^* := a_{22}^* + a_{12}^* + a_{21}^* + a_{11}^*$$

define una involución de $\mathcal{A}$, que es la única extensión de la original involución polarizada de A que verifica $e_1^* = e_2$.

(2) es [36, 4.2].

(3). Sea $a = a_{12} \in \mathcal{A}_{12}$. La aplicación $\overline{x} \mapsto \overline{x}$ es un isomorfismo de A_a sobre $\mathcal{A}_a$ dado que $a_{12} x a_{12} = a_{12} x_{21} a_{12}$ para todo $x = x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \in \mathcal{A}$. De manera similar se razona para $a \in \mathcal{A}_{21}$.

(4) se sigue de (3) y la caracterización local del zócalo. ∎

Siguiendo [15], denotamos por $Q_s(\mathcal{A})$ al *álgebra de cocientes simétrica de Martindale* de un álgebra semiprima $\mathcal{A}$. Nótese que las involuciones de $\mathcal{A}$ se pueden extender de manera única a $Q_s(\mathcal{A})$. Además, utilizando la caracterización intrínseca de Passman [15, 2.2.3], se demuestra que si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa prima con zócalo no nulo, entonces $Q_s(\mathcal{A})$ es la mayor álgebra prima con el mismo zócalo que $\mathcal{A}$ y que contiene a $\mathcal{A}$ como subálgebra.

Una noción de *sistema triple de cocientes simétricos de Martindale* fue introducido por K. McCrimmon [81] y usado por A. D'Amour [25] en su extensión cuadrática de la parte hermitiana del teorema de estructura de Zel'manov para sistemas triples de Jordan fuertemente primos. Si A es un par asociativo con envolvente estándar $\mathcal{A}$ $(e_1 + e_2 = 1)$, el *par de cocientes simétricos de Martindale* de A viene dado por

$$Q_s(A) = (e_1 Q_s(\mathcal{A}) e_2, e_2 Q_s(\mathcal{A}) e_1).$$

2. Pares asociativos primos con zócalo no nulo e involuciones polarizadas.

El objetivo de esta sección es el de describir los pares asociativos primos con zócalo no nulo que posean una involución polarizada. Para ello introducimos la noción de par de espacios vectoriales semi-duales y la de operador continuo con respecto a un par de espacios vectoriales semi-duales y su opuesto. Prestaremos especial atención al caso finito dimensional, culminando con un teorema que puede ser considerado como una extensión natural del conocido como teorema $*$-Litoff para anillos asociativos con involución [15, 4.6.15]. Comenzamos la sección recordando la estructura de los pares asociativos primos con zócalo no nulo.

2.1 Sean $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ y $\mathcal{P}' = (X', Y', g')$ dos pares de espacios vectoriales duales sobre la misma álgebra de división Δ. Un operador lineal $a : X \to X'$ se dice que es *continuo* (con respecto a los pares $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$) si existe $a^{\#} : Y' \to Y$, necesariamente único, tal que

$$g'(xa, y') = g(x, a^{\#}y') \quad \text{para} \quad \text{todos} \quad x \in X,\, y' \in Y'.$$

Al operador $a^{\#}$ se le llama *el adjunto* de a. Nótese que de nuevo escribimos las aplicaciones de un espacio vectorial por la izquierda a la derecha (componiéndolas entonces de izquierda a derecha), y las aplicaciones de un espacio vectorial por la derecha a la izquierda (componiéndolas entonces de derecha a izquierda). Denotamos por $\mathcal{L}(X, X')$ al conjunto de los operadores continuos de X en X', y por $\mathcal{F}(X, X')$ al subconjunto de aquellos operadores continuos que tienen rango finito. Para $a, c \in \mathcal{L}(X, X')$, $b \in \mathcal{L}(X', X)$ se tiene $abc \in \mathcal{L}(X, X')$, con $(abc)^{\#} = a^{\#}b^{\#}c^{\#}$. Entonces $\mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') := (\mathcal{L}(X, X'), \mathcal{L}(X', X))$, con los productos definidos por la composición de operadores, es un par asociativo. Además, todo subpar de $\mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ que contenga a $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') := (\mathcal{F}(X, X'), \mathcal{F}(X', X))$ es primo con zócalo igual a $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$.

Para $y \in Y$, $x' \in X'$, escribimos $y \otimes x'$ para denotar al operador de X en X' definido por

$$x(y \otimes x') = g(x, y)x', \quad x \in X.$$

Entonces $y \otimes x' \in \mathcal{F}(X, X')$ con adjunto $(y \otimes x')^\#$ dado por $(y \otimes x')^\# y' = yg'(x', y')$, $y' \in Y'$. Además, tenemos que

(2.1.1) $\quad a(y \otimes x')b = a^\# y \otimes x'b$

para todos $a, b \in \mathcal{L}(X', X)$. Por restricción de escalares, los espacios vectoriales X e Y son de hecho Φ-módulos, además

$$\varphi(y \otimes x') = y\varphi \otimes x' = y \otimes \varphi x'$$

para todos $y \in Y$, $x' \in X'$, $\varphi \in \Phi$.

2.2 Todo $a \in \mathcal{F}(X, X')$ se puede expresar como $a = \sum y_i \otimes x'_i$, donde ambos $\{x'_i\} \subseteq X'$ e $\{y_i\} \subseteq Y$ son linealmente independientes, lo que significa que $\mathcal{F}(X, X')$ es isomorfo como Φ-módulo al producto tensorial $Y \otimes_\Delta X'$. Además se tiene que

$$(y_1 \otimes x'_1)(y' \otimes x)(y_2 \otimes x'_2) = y_1 \otimes g'(x'_1, y')g(x, y_2)x'_2, \quad \text{y}$$

$$(y'_1 \otimes x_1)(y \otimes x')(y'_2 \otimes x_2) = y'_1 \otimes g(x_1, y)g'(x', y'_2)x_2.$$

para todos $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$, $x', x'_1, x'_2 \in X'$ e $y', y'_1, y'_2 \in Y'$.

Cuando $\mathcal{P} = \mathcal{P}' = (X, Y, g)$, entonces $\mathcal{L}(X, X)$ es de hecho el álgebra asociativa $\mathcal{L}_Y(X)$, con zócalo $\mathcal{F}_Y(X) = \mathcal{F}(X, X)$ (ver II.(1.9)).

Los pares asociativos primos con zócalo no nulo fueron determinados en [23] y [32]. Nosotros damos aquí una prueba alternativa que incluye el cálculo del par de cocientes simétrico de Martindale.

2.3 TEOREMA. *Un par asociativo A es primo con zócalo no nulo si, y sólo si, es, salvo isomorfismo, un subpar*

$$0 \neq \mathcal{F}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \triangleleft A \leq \mathcal{L}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$$

para dos pares de espacios vectoriales duales $\mathcal{P}_i = (X_i, Y_i, g_i)$, $i = 1, 2$, sobre la misma álgebra de división Δ.

DEMOSTRACIÓN: Sólo demostraremos que la condición es necesaria. Sea A un par asociativo primo con zócalo no nulo y $\mathcal{A}$ $(e_1 + e_2 = 1)$ su envolvente estándar. Por (1.5(2)) y (1.5(4)), $\mathcal{A}$ es un álgebra prima con zócalo no nulo. Entonces (ver II.(1.9)), existe un par de espacios vectoriales duales (X, Y, g) sobre un álgebra de división Δ tal que

$$\mathrm{Zoc}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_Y(X) \triangleleft \mathcal{A} \leq \mathcal{L}_Y(X) = Q_s(\mathcal{A}).$$

Escribamos $X_i = Xe_i$ e $Y_j = e_j^{\#}Y$ $(i, j = 1, 2)$. Para $x_i \in X_i, y_j \in Y_j$ $(i \neq j)$, tenemos

$$g(x_i, y_j) = g(x_i e_i, e_j^{\#} y_j) = g(x_i, e_i^{\#} e_j^{\#} y_j) = g(x_i, (e_i e_j)^{\#} y_j) = 0.$$

Entonces, por restricción del producto interno g, obtenemos dos pares $\mathcal{P}_i = (X_i, Y_i, g_i)$, $i = 1, 2$, de espacios vectoriales duales sobre Δ. Denotemos por $\xi_i : X_i \to X$ y $\pi_j : X \to X_j$ las correspondientes inclusiones y proyecciones $(i, j = 1, 2)$. Claramente $e_i = \pi_i \xi_i$ y el par de aplicaciones $a_{12} \mapsto \xi_1 a_{12} \pi_2$, $a_{21} \mapsto \xi_2 a_{21} \pi_1$, define un isomorfismo de $(e_1 \mathcal{L}_Y(X) e_2, e_2 \mathcal{L}_Y(X) e_1)$ sobre $(\mathcal{L}(X_1, X_2), \mathcal{L}(X_2, X_1))$. Bajo este isomorfismo, $(e_1 \mathcal{F}_Y(X) e_2, e_2 \mathcal{F}_Y(X) e_1) \cong \mathcal{F}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, y de aquí y (1.5(4)), $\mathrm{Zoc}(A) \cong \mathcal{F}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. También, $Q_s(A) = (e_1 Q_s(\mathcal{A}) e_2, e_2 Q_s(\mathcal{A}) e_1) = (e_1 \mathcal{L}_Y(X) e_2, e_2 \mathcal{L}_Y(X) e_1) \cong \mathcal{L}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. ■

2.4 Por [36, 2.4(i)], los ideales internos $I \subseteq \mathcal{F}(X, X')$ de $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ son de la forma $W \otimes_\Delta V'$ donde W, V' son subespacios de Y, X', respectivamente. De donde, $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ tiene capacidad finita sii uno de los pares de espacios vectoriales duales, digamos $\mathcal{P}$, es de dimensión finita. En tal caso, $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \cong A(M, R, \phi)$ [70, 6.4], con $R = M_n(\Delta)$ $(n = dim_\Delta X)$, $M^+ = \mathcal{F}(X, X')$, $M^- = \mathcal{F}(X', X)$, y $\phi(a, b) = ab$. Por tanto, el teorema (2.3) es una extensión del teorema de estructura de los pares asociativos simples que tienen capacidad finita [70, 11.16]. Es más, ambos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ tienen dimensión finita, digamos n and m, sii $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ es artiniano. En este caso, $\mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \cong (M_{m\times n}(\Delta), M_{n\times m}(\Delta))$ [70, 11.17].

Recordemos [57, p. 17] que un producto interno h de un *espacio vectorial autodual* V sobre un álgebra de división con involución Δ, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$, se dice que es *hermítico* si $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$ para todos $x, y \in V$, y *alternado* si $h(x, x) = 0$ para todo $x \in V$. En el caso alternado, Δ es de hecho un cuerpo F y $\alpha = \overline{\alpha}$ para todo $\alpha \in F$. Denotamos por $\mathcal{L}_V(V)$ al álgebra de los operadores continuos $a : V \to V$ y por $a \mapsto a^*$ su involución adjunta: $h(xa, y) = h(x, ya^*)$ para todos $x, y \in V$.

2.5 PROPOSICIÓN. [57, 1.2.2] *Sea $(A,*)$ un álgebra prima con involución. Si A tiene zócalo no nulo, entonces existe un espacio vectorial por la izquierda V sobre un álgebra de división Δ que es autodual con respecto a una forma hermítica o alternada, de manera que, salvo isomorfismo,*

$$\mathrm{Zoc}(A) = \mathcal{F}_V(V) \triangleleft A \subseteq \mathcal{L}_V(V) = Q_s(A),$$

siendo $*$ la involución adjunta de A con respecto a esta forma. Además, los casos hermítico y alternado son mutuamente excluyentes, dependiendo de la existencia o no, de un idempotente de división autoadjunto.

Con objeto de describir las involuciones polarizadas de pares asociativos primos con zócalo, extendemos la noción de espacio vectorial autodual al contexto de pares.

2.6 Un par de espacios vectoriales *semi-duales* sobre un álgebra de división con involución Δ, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$, es un par X, Y de espacios vectoriales por la izquierda sobre Δ junto con una aplicación $g : X \times Y \to \Delta$ tal que $(X, \overline{Y}, g)$ es un par de espacios vectoriales duales sobre Δ, donde $\overline{Y}$ coincide con Y como grupo abeliano pero se considera como espacio vectorial por la derecha sobre Δ definiendo $y.\alpha = \overline{\alpha}y$, para todos $y \in Y, \alpha \in \Delta$.

Sean $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ y $\mathcal{P}' = (X', Y', g')$ pares de espacios vectoriales semi-duales sobre la misma álgebra de división con involución Δ. Un operador $a : X \to X'$ se dice que es *continuo* (con respecto a $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$) si es continuo con respecto a $(X, \overline{Y}, g)$ y $(X', \overline{Y'}, g')$, esto es, existe $a^{\#} : Y' \to Y$, necesariamente único, tal que

$$g'(xa, y') = g(x, y'a^{\#}) \quad \text{para} \quad \text{todos} \quad x \in X,\ y' \in Y'.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(X, X')$ al conjunto de los operadores continuos de X en X' y por $\mathcal{F}(X, X')$ al subconjunto de aquellos operadores que tienen rango finito. Por (2.3), se tiene que $(\mathcal{L}(X, X'), \mathcal{L}(X', X))$ es un par asociativo primo con zócalo

$$(\mathcal{F}(X, X'), \mathcal{F}(X', X)) = (Y \otimes_\Delta X',\ Y' \otimes_\Delta X),$$

donde los productos $Y \otimes_\Delta X'$ e $Y' \otimes_\Delta X$ son *semi-balanceados* en el sentido de que

$$\alpha y \otimes x' = y \otimes \overline{\alpha} x' \quad \text{y} \quad \alpha y' \otimes x = y' \otimes \overline{\alpha} x.$$

Dado un par $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución $(\Delta, -)$, definimos el *opuesto* de $\mathcal{P}$ como el par de espacios vectoriales semi-duales $\mathcal{P}^{op} := (Y, X, g^{op})$, donde

$$g^{op}(y, x) := \overline{g(x, y)}$$

para $x \in X$ e $y \in Y$. Nótese que para el par de los operadores continuos $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$ con respecto a $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^{op}$, tenemos que

$$a \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow a^{\#} \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \text{y} \quad b \in \mathcal{L}(Y, X) \Rightarrow b^{\#} \in \mathcal{L}(Y, X), \quad \text{con}$$

$$(2.6.1) \qquad g^{op}(xa, x') = g(x, x'a^{\#}) \quad \text{y} \quad g(yb, y') = g^{op}(y, y'b^{\#})$$

para todos $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$. En particular, si $a = y_1 \otimes y_2$ y $b = x_1 \otimes x_2$, tenemos

$$(2.6.2) \qquad (y_1 \otimes y_2)^{\#} = y_2 \otimes y_1 \quad \text{y} \quad (x_1 \otimes x_2)^{\#} = x_2 \otimes x_1.$$

Se sigue de (2.6.1) que si $a, c \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $b \in \mathcal{L}(Y, X)$, entonces

$$g^{op}(x(abc), x') = g((xa)b, x'c^{\#}) = g^{op}(xa, (x'c^{\#})b^{\#}) = g(x, x'(c^{\#}b^{\#}a^{\#})),$$

esto es, $(abc)^{\#} = c^{\#}b^{\#}a^{\#}$. En resumen, tenemos

2.7 Sea $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución $(\Delta, -)$. Entonces $\mathcal{L}(\mathcal{P}) := (\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$, con respecto a $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^{op}$, es un par asociativo primo con zócalo $\mathcal{F}(\mathcal{P}) := (\mathcal{F}(X, Y), \mathcal{F}(Y, X))$ e involución polarizada $(a, b) \mapsto (a^{\#}, b^{\#})$. Recíprocamente,

2.8 TEOREMA. *Sea A un par asociativo primo con zócalo no nulo y una involución polarizada $*$. Entonces*

(1) *A es, salvo isomorfismo, un subpar*

$$\mathrm{Zoc}(A) = \mathcal{F}(\mathcal{P}) \triangleleft A \leq \mathcal{L}(\mathcal{P}) = Q_s(A),$$

donde $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ es un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución Δ, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$.

(2) *La involución $*$ se corresponde bien con $\#$, o con $-\#$, donde $\#$ es la involución adjunta de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. Si se da lo segundo, Δ es de hecho un cuerpo F, con $\alpha = \overline{\alpha}$ para todo $\alpha \in F$ si la característica de F no es 2.*

Demostración: Sea $(\mathcal{A}, *)$ $(e_1 + e_2 = 1)$ la envolvente estándar de A con la involución definida a partir de la de A (1.5(1)). Entonces $e_1^* = e_2$ y $\mathcal{A}$ es prima con zócalo (1.5(2) y (1.5(4)). Luego por (2.5) $\mathcal{A}$ es, salvo isomorfismo, una $*$-subálgebra

$$\mathrm{Zoc}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_V(V) \triangleleft \mathcal{A} \leq \mathcal{L}_V(V) = Q_s(\mathcal{A}),$$

para un espacio vectorial (V, h) autodual hermítico o alternado sobre un algebra de división con involución Δ $(\alpha \mapsto \overline{\alpha})$, y donde $*$ se corresponde con la involución adjunta de $\mathcal{L}_V(V)$ con respecto a esta forma.

Pongamos $X := Ve_1$ e $Y := Ve_2$. Es claro que $V = X \oplus Y$ y tenemos que $h(x, x') = h(xe_1, x'e_1) = h(x, x'e_1e_1^*) = h(x, x'e_1e_2) = 0$ para todos $x, x' \in X$; asimismo $h(y, y') = 0$ para todos $y, y' \in Y$. Esto nos permite dotar a (X, Y) de estructura de par de espacios vectoriales semi-duales sobre $(\Delta, -)$ definiendo

$$g(x, y) := h(x, y)$$

para $x \in X$, $y \in Y$. Consideremos ahora la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) : & (e_1\mathcal{L}_V(V)e_2, e_2\mathcal{L}_V(V)e_1) & \to & (\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X)) \\ & (a^+, a^-) & \mapsto & (\xi_1 a^+ \pi_2, \xi_2 a^- \pi_1) \end{array}$$

donde $\xi_1 : X \to V$, $\xi_2 : Y \to V$ son las correspondientes inclusiones, y $\pi_1 : V \to X$, $\pi_2 : V \to Y$ las correspondientes proyecciones: $\xi_1\pi_1 = 1_X$, $\xi_2\pi_2 = 1_Y$, $\pi_i\xi_i = e_i$ para $i, j = 1, 2$, y $\xi_i\pi_j = 0$, $i \neq j$.

Veamos que φ está bien definida: para todo $a^+ \in e_1\mathcal{L}_V(V)e_2$, tenemos

$$g^{op}(x\varphi^+(a^+), x') = \overline{g(x', x\varphi^+(a^+))} = \overline{h(x', xa^+)}, \tag{2.8.1}$$

para todos $x, x' \in X$. Supongamos primero que h es hermítica, i.e., $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$ para todos $v, w \in V$. Entonces, (2.8.1) sigue como

$$\begin{aligned} g^{op}(x\varphi^+(a^+), x') = \overline{h(x', xa^+)} = h(xa^+, x') = h(x, x'(a^+)^*) = \\ = g(x, x'\varphi^+((a^+)^*)), \end{aligned}$$

y por tanto $\varphi^+(a^+) \in \mathcal{L}(X,Y)$ con $\varphi^+(a^+)^\# = \varphi^+((a^+)^*)$. Mientras que si h fuera alternada, i.e., $h(v,v) = 0$ para todo $v \in V$ (Δ sería entonces un cuerpo F, con la identidad como involución si su característica no es 2), (2.8.1) seguiría como

$$g^{op}(x\varphi^+(a^+), x') = h(x', xa^+) = -h(xa^+, x') = -h(x, x'(a^+)^*) = \\ = -g(x, x'\varphi^+((a^+)^*)),$$

luego $\varphi^+(a^+) \in \mathcal{L}(X,Y)$ con $\varphi^+(a^+)^\# = \varphi^+((a^+)^{-*})$. Análogamente se comprueba que $\varphi^-(a^-) \in \mathcal{L}(Y,X)$ para todo $a^- \in e_2\mathcal{L}_V(V)e_1$.

La aplicación $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$ es un isomorfismo de pares asociativos,

$$\varphi^+(a^+b^-c^+) = \xi_1(a^+b^-c^+)\pi_2 = \xi_1 a^+(e_2 b^- e_1)c^+\pi_2 = \\ = (\xi_1 a^+\pi_2)(\xi_2 b^-\pi_1)(\xi_1 c^+\pi_2) = \varphi^+(a^+)\varphi^-(b^-)\varphi^+(c^+)$$

para $a^+, c^+ \in e_1\mathcal{L}_V(V)e_2$, $b^- \in e_2\mathcal{L}_V(V)e_1$, y $\varphi^{-1} = (\psi^+, \psi^-)$ viene dado por

$$\psi^+(b^+) = \pi_1 b^+\xi_2, \quad \psi^-(b^-) = \pi_2 b^-\xi_1,$$

para $b^+ \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $b^- \in \mathcal{L}(Y,X)$.

$$a^+\varphi^+\psi^+ = \pi_1(\xi_1 a^+\pi_2)\xi_2 = (\pi_1\xi_1)a^+(\pi_2\xi_2) = e_1 a^+ e_2 = a^+, \quad \text{y}$$

$$b^+\psi^+\varphi^+ = \xi_1(\pi_1 b^+\xi_2)\pi_2 = (\xi_1\pi_1)b^+(\xi_2\pi_2) = 1_X b^+ 1_Y = b^+,$$

para $a^+ \in e_1\mathcal{L}_V(V)e_2$, $b^+ \in \mathcal{L}(X,Y)$. Bajo este isomorfismo, $\mathrm{Zoc}(A) = (e_1\mathcal{F}_V(V)e_2, e_2\mathcal{F}_V(V)e_1) \cong \mathcal{F}(\mathcal{P})$. Luego A se identifica con un subpar de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ conteniendo a $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, lo que prueba (1). Nótese que (2) ha sido probado implícitamente. ∎

Cuando el par de espacios vectoriales semi-duales en (2.8) se define a partir de un espacio vectorial por la izquierda X (equivalentemente Y) de dimensión finita, entonces el par $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ no es más que el par definido por un álgebra de matrices cuadradas.

2.9 TEOREMA. *Sea $\mathcal{P} = (X,Y,g)$ un par n-dimensional de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución $(\Delta, -)$. Entonces $\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}(\mathcal{P})$ es isomorfo al par $(M_n(\Delta), M_n(\Delta))$ de matrices*

$n \times n$ sobre Δ. Además, la involución adjunta $\#$ de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ se corresponde con la involución conjugada traspuesta $* : M_n(\Delta) \to M_n(\Delta)$, $a \mapsto a^* = \overline{a}^t$.

Demostración: Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ una base de ${}_\Delta X$. Por dualidad del par $(X, \overline{Y}, g)$ (véase (2.6)), podemos encontrar una base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de Y que sea dual a $\{x_1, \ldots, x_n\}$, esto es, $g(x_i, y_j) = 0$ salvo si $i = j$, en cuyo caso, $g(x_i, y_i) = 1$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, el operador $T : X \to Y$, definido por $x_i \mapsto y_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, es un isomorfismo con $T^\# = T$ dado que

$$g^{op}(x_i T, x_j) = g^{op}(y_i, x_j) = \overline{g(x_j, y_i)} = g(x_i, y_j) = g(x_i, x_j T) \tag{2.9.1}$$

para todos i, j. Por tanto, definiendo

$$h(x, x') := g(x, x'T)$$

para todos $x, x' \in X$, obtenemos un espacio vectorial autodual (X, h) sobre $(\Delta, -)$, que es hermítico dado que, por (2.9.1),

$$h(x, x') = g(x, x'T) = g^{op}(xT, x') = \overline{g(x', xT)} = \overline{h(x', x)}.$$

Afirmamos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & ((\mathcal{F}_X(X), \mathcal{F}_X(X)), *) & \to & ((\mathcal{F}(X,Y), \mathcal{F}(Y,X)), \#) \\ & (a^+, a^-) & \mapsto & (\varphi^+(a^+), \varphi^-(a^-)) \end{array}$$

donde $\varphi^+(a^+) := a^+T$, $\varphi^-(a^-) := T^{-1}a^-$, y $*$ denota la involución adjunta de $\mathcal{F}_X(X)$, es un isomorfismo de pares asociativos con involuciones polarizadas. De hecho, para $a^+ \in \mathcal{F}_X(X)$, tenemos

$$\begin{aligned} g^{op}(x\varphi^+(a^+), x') &= g^{op}(xa^+T, x') = \overline{g(x', xa^+T)} = \overline{h(x', xa^+)} = \\ &= h(xa^+, x') = h(x, x'(a^+)^*) = g(x, x'(a^+)^*T) = \\ &= g(x, x'\varphi^+((a^+)^*)), \end{aligned}$$

lo que prueba que $\varphi^+(a^+) \in \mathcal{F}(X, Y)$, con $\varphi^+(a^+)^\# = \varphi^+((a^+)^*)$. Igualmente, $\varphi^-(a^-) \in \mathcal{F}(Y, X)$, con $\varphi^-(a^-)^\# = \varphi^-((a^-)^*)$. Que φ es un isomorfismo lineal es claro, además

$$\varphi^+(a^+)\varphi^-(b^-)\varphi^+(c^+) = (a^+T)(T^{-1}b^-)(c^+T) = a^+b^-c^+T = \varphi^+(a^+b^-c^+),$$

para todos $a^+, b^-, c^+ \in \mathcal{F}_X(X)$; también tenemos $\varphi^-(a^-)\varphi^+(b^+)\varphi^-(c^-) = \varphi^-(a^-b^+c^-)$, lo que prueba que φ es de hecho un isomorfismo de pares. Finalmente, dado que (X, h) es un espacio vectorial autodual hermítico con una base ortonormal $\{x_1, \ldots, x_n\}$, tenemos que $\mathcal{F}_X(X) \cong M_n(\Delta)$ donde la involución adjunta de $\mathcal{F}_X(X)$ se corresponde con la conjugada traspuesta $a \mapsto a^* = \overline{a}^t$, para todo $a \in M_n(\Delta)$. ■

Por (2.9), el par asociativo con involución polarizada definido por un espacio vectorial de dimensión finita autodual hermítico (V, g) que no posea una base ortonormal, sigue siendo isomorfo a un par de matrices cuadradas con involución hermítica $a^* = \overline{a}^t$. De la misma manera, si (V, g) es alternado, entonces $((\mathcal{F}_V(V), \mathcal{F}_V(V)), \#) \cong ((\mathcal{F}_W(W), \mathcal{F}_W(W)), -\#)$ para algún espacio vectorial autodual hermítico (W, g'), y entonces es isomorfo a un par de matrices cuadradas con involución $a^* = -a^t$.

—Dado un par $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ de espacios vectoriales (semi-)duales sobre un álgebra de división (con involución) Δ, un par $\mathcal{P}_0 = (X_0, Y_0, g_0)$ de espacios vectoriales (semi-)duales sobre Δ se dirá que es un *subpar* de $\mathcal{P}$, si X_0 es un subespacio de X, Y_0 es un subespacio de Y, y $g_0(x, y) = g(x, y)$ para todos $x \in X_0, y \in Y_0$.

Un subpar $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$ se dirá que es *directo* si $X = X_0 \oplus Y_0^{\perp}$, donde $Y_0^{\perp} = \{x \in X : g(x, y) = 0 \,\text{para todo}\, y \in Y_0\}$, e $Y = Y_0 \oplus X_0^{\perp}$, con $X_0^{\perp}$ definido análogamente. Como ejemplos más importantes de subpares directos tenemos a todo subpar finito dimensional $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$. Por otro lado, todo subespacio cerrado H_0 de un espacio de Hilbert H determina el subpar directo (H_0, H_0, g_0) de (H, H, g).

De hecho, en la siguiente proposición mostramos que todo par de subespacios finito dimensionales de un par $\mathcal{P}$ se puede sumergir en un subpar finito dimensional de $\mathcal{P}$.

2.10 PROPOSICIÓN. *Sea $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ un par de espacios vectoriales (semi-)duales sobre un álgebra de división (con involución) Δ. Si $V \leq X$ y $W \leq Y$ son subespacios finito dimensionales de X e Y respectivamente, entonces existe un subpar finito dimensional $\mathcal{P}_0 = (X_0, Y_0, g_0)$ de $\mathcal{P}$ tal que $V \subseteq X_0$ y $W \subseteq Y_0$.*

Demostración: Claramente sólo tenemos que considerar el caso en el que $\mathcal{P}$ sea un par de espacios vectoriales duales. Veamos primero que podemos encontrar un subespacio finito dimensional Y_0 de Y que contenga a W y tal que $g(v, Y_0) = 0$ implique que $v = 0$, para $v \in V$. De hecho, supongamos que $g(v, W) = 0$ para algún elemento no nulo $v \in V$. Entonces tomemos $y_0 \in Y$ tal que $g(v, y_0) \neq 0$. Remplacemos W por $W_0 := W \oplus \Delta y_0$. Nótese que $v \in W^\perp \cap V$ pero $v \notin W_0^\perp$ y entonces

$$\dim_\Delta(W_0^\perp \cap V) < \dim_\Delta(W^\perp \cap V).$$

Dado que V tiene dimensión finita, podemos repetir el argumento hasta obtener un subespacio finito dimensional $Y_0 \supset W$ de Y tal que $g(v, Y_0) \neq 0$ para todo $0 \neq v \in V$, lo que es equivalente a decir que V puede ser considerado como un subespacio de $\hat{Y}_0$ (el dual de Y_0).

Sea ahora $\{x_1, \ldots, x_r\}$ una base de V. Por dualidad, existe una base $\{z_1, \ldots, z_n\}$ de Y_0 tal que $g(x_i, z_j) = 0$ salvo $i = j$, en cuyo caso $g(x_i, z_i) = 1$, para todos $i \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $r \leq n$. Completemos $\{x_1, \ldots, x_r\}$ hasta obtener un sistema $\{x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ dual a $\{z_1, \ldots, z_n\}$ y sea X_0 el subespacio de X generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces $\mathcal{P}_0 = (X_0, Y_0, g_0)$, con $g_0(x, y) := g(x, y)$ para todos $x \in X_0$, $y \in Y_0$, es un subpar finito dimensional de $\mathcal{P}$ tal que $V \subseteq X_0$ y $W \subseteq Y_0$, como queríamos. ■

La importancia de los subpares directos se hace patente en el siguiente resultado.

2.11 Proposición. *Sea $\mathcal{P}_0 = (X_0, Y_0, g_0)$ un subpar directo de un par de espacios vectoriales semi-duales $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ sobre un álgebra de división con involución Δ. Entonces, $(\mathcal{L}(\mathcal{P}_0), \#)$ es isomorfo a un $\#$-subpar de $(\mathcal{L}(\mathcal{P}), \#)$, donde $\#$ es la involución adjunta.*

Demostración: Dado que $\mathcal{P}_0$ es un subpar directo, se tiene que para todo $a^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_0)^+ = \mathcal{L}(X_0, Y_0)$, podemos considerar $\widetilde{a^+} : X \to Y$ la única extensión lineal de a^+ a X tal que $(Y_0^\perp)\widetilde{a^+} = 0$. De la misma manera, todo $a^- \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_0)^-$ puede ser extendido a un único operador lineal $\widetilde{a^-} : Y \to X$ que satisfaga $(X_0^\perp)\widetilde{a^-} = 0$. De hecho $\widetilde{a^+} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})^+$ con $\widetilde{a^+}^\# = \widetilde{(a^+)^\#}$ para todo $a^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_0)^+$. En efecto, sea $x = x_0 + z_0$, $x' = x'_0 + z'_0 \in X_0 \oplus Y_0^\perp$. Dado que $x_0 a^+ \in Y_0$ y $x'_0(a^+)^\# \in Y_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} g^{op}(x\widetilde{a^+}, x') &= g^{op}(x_0a^+, x'_0 + z'_0) = g^{op}(x_0a^+, x'_0) = g_0^{op}(x_0a^+, x'_0) = \\ &= g_0(x_0, x'_0(a^+)^\#) = g(x, x'(\widetilde{a^+})^\#). \end{aligned}$$

Análogamente, $\widetilde{a^-} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})^-$ con $\widetilde{a^-}^\# = (\widetilde{a^-})^\#$ para todo $a^- \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_0)^-$. Por tanto, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{L}(\mathcal{P}_0), \#) & \to & (\mathcal{L}(\mathcal{P}), \#) \\ (a^+, a^-) & \mapsto & (\widetilde{a^+}, \widetilde{a^-}) \end{array}$$

está bien definida y conserva la involución. Además, esta aplicación es claramente un monomorfismo. ■

Como vimos en (2.9), en el caso particular en que $\mathcal{P}_0$ sea un subpar de dimensión finita de un par de espacios vectoriales duales $\mathcal{P}$ sobre un álgebra de división con involución Δ, se tiene que $(\mathcal{L}(\mathcal{P}_0), \#)$ es el par asociado a un álgebra de matrices cuadradas $M_n(\Delta)$ con la involución conjugada traspuesta $a \mapsto a^* = \overline{a}^t$. De hecho, los pares de la forma $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ son *localmente matriciales* en el sentido de que

2.12 Corolario. *Sea $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución Δ. Entonces, para cada número natural $n \leq \dim_\Delta X$, el par $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$, con la involución adjunta $\#$, contiene un $\#$-subpar isomorfo a $((M_n(\Delta), M_n(\Delta)), *)$ con la involución conjugada traspuesta $a \mapsto a^* = \overline{a}^t$. Además, todo conjunto finito $a_1 = (a_1^+, a_1^-), \ldots, a_r = (a_r^+, a_r^-) \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ está contenido en tal subpar.*

Demostración: Para cada natural $n \leq \dim_\Delta X$, consideremos un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ de vectores linealmente independientes y sea X_0 el subespacio de X generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Tomemos $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$ dual a $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y definamos Y_0 como el subespacio de Y generado por $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Entonces $\mathcal{P}_0 = (X_0, Y_0, g_0)$, con $g_0(x, y) := g(x, y)$ para todos $x \in X_0, y \in Y_0$ es un subpar directo n-dimensional de $\mathcal{P}$. Luego, $(\mathcal{F}(\mathcal{P}_0), \#)$ puede ser considerado como un $\#$-subpar de $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ por (2.11), y por (2.9), $(\mathcal{F}(\mathcal{P}_0), \#)$ es isomorfo a un par de matrices $((M_n(\Delta), M_n(\Delta)), *)$.

Para la segunda parte, dados $a_1 = (a_1^+, a_1^-), \ldots, a_r = (a_r^+, a_r^-) \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, sea V el subespacio de X generado por $\{im(a_i^-) \cup im((a_i^-)^\#),\ 1 \leq i \leq r\}$ y W el subespacio de Y generado por $\{im(a_i^+) \cup im((a_i^+)^\#),\ 1 \leq i \leq r\}$. Por (2.10), existe un subpar (directo) finito dimensional, $\mathcal{P}_0 = (X_0, Y_0, g_0)$ de $\mathcal{P}$ tal que $V \subseteq X_0$ y $W \subseteq Y_0$. De nuevo $(\mathcal{F}(\mathcal{P}_0), \#)$ puede ser considerado como un $\#$-subpar de $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$, que claramente contiene a todos los $a_i' s$. ■

El corolario anterior puede ser considerado como una extensión natural del conocido como teorema $*$-Litoff para anillos asociativos con involución [15, 4.6.15], y es de hecho un refinamiento de un resultado de D'Amour y McCrimmon [27, 3.1], que es, a su vez, una extensión natural del *clasico* teorema de Litoff para anillos asociativos [15, 4.3.11]. Un análogo del teorema de Litoff para pares de Jordan fue probado en [71, Th. 3].

3. Sistemas amplios de operadores continuos.

En esta sección, vamos a demostrar que todo par amplio $H_0(A, *)$ de un par asociativo simple A que coincida con su zócalo y que está dotado de una involución polarizada $*$ es simple y coincide con su zócalo. Asimismo describiremos tales pares amplios.

—Si $(A, *)$ es un par asociativo con una involución polarizada, entonces el *par hermitiano*

$$H(A, *) = (H(A^+, *), H(A^-, *)),$$

donde $H(A^\sigma, *) = \{a \in A^\sigma : a^* = a\}$, es un par de Jordan especial. Más generalmente, podemos considerar *pares amplios*, esto es,

$$H_0(A, *) = (H_0(A^+, *), H_0(A^-, *)) \subseteq H(A, *)$$

tales que $a + a^* \in H_0(A^\sigma, *)$ y $aH_0(A^{-\sigma}, *)a^* \subseteq H_0(A^\sigma, *)$, para todo $a \in A^\sigma$ (si $1/2 \in \Phi$, el único par amplio de $(A, *)$ es $H(A, *)$). De manera análoga se definen los *triples amplios* de un triple asociativo con involución. Para el caso de un álgebra asociativa con involución $(A, *)$, las *álgebras amplias* $H_0(A, *)$ deben también contener a todas las *normas* aa^*.

Nótese que el conjunto $T(A,*)$ de todas las *trazas* $a+a^*$ de un sistema asociativo con involución $(A,*)$ es un ideal externo de $H_0(A,*)$, y si A es un par o triple, entonces $T(A,*)$ es el único par o triple, respectivamente, amplio minimal de $(A,*)$.

Los *pares antisimétricos* de un par asociativo A con involución polarizada $*$, esto es,

$$\mathrm{Skew}(A,*) = (\mathrm{Skew}(A^+,*), \mathrm{Skew}(A^-,*)),$$

donde $\mathrm{Skew}(A^\sigma,*) = \{a \in A^\sigma : a^* = -a\}$, constituyen otra familia de pares de Jordan especiales, y más concretamente los *pares alternantes*

$$\mathrm{Alt}(A,*) \subseteq \mathrm{Skew}(A,*)$$

formados por las *trazas antisimétricas* $\mathrm{Alt}(A^\sigma,*) = \{a - a^* : a \in A^\sigma\}$. Los *triples antisimétricos* y *triples alternantes* (*álgebras antisimétricas* y *álgebras alternantes*) de un sistema triple (álgebra) asociativo con involución se definen de manera análoga.

Si $(A,*)$ es un álgebra, triple o par con involución (polarizada en el caso del par), entonces $\mathrm{Alt}(A,*)$ es siempre un ideal externo de $\mathrm{Skew}(A,*)$. Si $1/2 \in \Phi$, se tiene que $\mathrm{Alt}(A,*)$=$\mathrm{Skew}(A,*)$, mientras que si la característica de Φ es 2, entonces $\mathrm{Skew}(A,*) = H(A,*)$ y $\mathrm{Alt}(A,*) = T(A,*)$. Si A es un par o triple, dado que $-* : a \mapsto -a^*$ es de nuevo una involución de A, $\mathrm{Skew}(A,*) = H(A,-*)$ y $\mathrm{Alt}(A,*) = T(A,-*)$ es el único par o triple, respectivamente, amplio minimal de $(A,-*)$.

3.1 PROPOSICIÓN. *Sea $(A,*)$ un álgebra (par) asociativa con involución (polarizada). Entonces*

(1) *para cada $a \in H(A,*)$, el álgebra asociativa A_a hereda la involución de A: $\overline{x}^* = \overline{x^*}$. Además, ${H_0}_a = H_0(A_a,*)$ es un álgebra amplia de $(A_a,*)$ para todo $H_0 = H_0(A,*)$.*

(2) *Si $H_0 = H_0(A,*)$ es no degenerado y A es semiprima, entonces se tiene $\mathrm{Zoc}(H_0) = \mathrm{Zoc}(A) \cap H_0$ es un álgebra (par) amplia de $(\mathrm{Zoc}(A),*)$.*

(3) *Además, si $(A,*)$ es $*$-prima con zócalo no nulo, entonces cualquier álgebra (par) amplia $H_0(\mathrm{Zoc}(A),*)$ es simple y coincide con su zócalo.*

Demostración: La prueba de (1) es inmediata. (2). Sea $(A,*)$ un par asociativo con involución polarizada y $a \in H_0^\sigma$ un elemento de rango uno, i.e., que genera un ideal interno minimal. Por [83, 0.7], H_{0a} es un álgebra de Jordan de división; pero H_{0a} es un álgebra amplia de $(A_a,*)$. Entonces, por [57, 2.1.8], $(A_a,*)$ es una de las siguientes

(i) un anillo conmutativo de característica 2, sin elementos nilpotentes no nulos, en la que $\overline{x}^* = \overline{x}$ para todo $\overline{x} \in A_a$,

(ii) un anillo de división,

(iii) un producto directo de un anillo de división y su opuesto, con respecto a la involución de intercambio,

(iv) el anillo de matrices 2×2 sobre un cuerpo con respecto a la involución simpléctica.

Nótese que en el caso (i) A_a es de hecho un cuerpo, dado que todas las normas $\overline{x}^*\overline{x}$ son inversibles en H_{0a} y entonces en A_a. Luego en todos los casos, A_a es semisimple y artiniana, lo que implica, por la caracterización local del zócalo, que $a \in \mathrm{Zoc}(A^\sigma)$, y entonces que $\mathrm{Zoc}(H_0) \subseteq \mathrm{Zoc}(A)$ por la estructura del zócalo [71].

Recíprocamente, que $a \in \mathrm{Zoc}(A^\sigma) \cap H_0^\sigma$ implica que A_a es semisimple y artiniana; pero H_{0a} es un álgebra amplia de $(A_a,*)$ y por tanto H_{0a} tiene capacidad finita [76, Prop. 4]. Luego $a \in \mathrm{Zoc}(H_0^\sigma)$, de nuevo por la caracterización local del zócalo.

Si $(A,*)$ es un álgebra, la demostración es la misma quitando los superíndices.

(3). Dado que $(A,*)$ es $*$-primo, tenemos que $(\mathrm{Zoc}(A),*)$ es $*$-simple. Por (2), todo álgebra o par amplio $H_0(\mathrm{Zoc}(A),*)$ coincide con su zócalo, y de aquí se tiene que es regular von Neumann [71, Th. 1]. Luego $H_0(\mathrm{Zoc}(A),*)$ es simple por [10, (2.7(ii))] y [10, (3.7(ii))]. ■

Como hemos visto en la sección anterior (2.8), todo par asociativo simple A con involución polarizada $*$ y que coincida con su zócalo es de la forma $(A,*) = (\mathcal{F}(\mathcal{P}),*)$, donde $\mathcal{P}$ es un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución $(\Delta,-)$, y $*$ es bien la involución adjunta $\#$ o $-\#$. Si se da lo último, Δ es de hecho un cuerpo F (con la identidad como involución si la característica no es 2), en este caso, si la característica del cuerpo F es 2, entonces $\# = -\#$, mientras que si la característica de F no es 2, entonces el único par amplio de $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), -\#)$ es $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$.

3.2 *El caso alternante $Alt(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$.*

Sea $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un cuerpo F con la identidad como involución. Consideremos $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ con la involución adjunta $\#$. Es claro, por (2.2) que

$$a^+ \in \mathrm{Skew}(\mathcal{F}(X, Y), \#) \quad \text{sii} \quad a^+ = \sum \alpha_{ij} y_i \otimes y_j,$$

donde los $\{y_i\}$ son linealmente independientes y $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$; de la misma manera tenemos $a^- \in \mathrm{Skew}(\mathcal{F}(Y, X), \#)$ si, y sólo si, $a^- = \sum \alpha_{ij} x_i \otimes x_j$, donde los $\{x_i\}$ son linealmente independientes y $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$.

Sea $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#) =(\mathrm{Alt}^+, \mathrm{Alt}^-)$. De nuevo se sigue de (2.2) que

$$0 \neq a^+ \in \mathrm{Alt}^+ \quad \text{sii} \quad a^+ = \sum_{i<j} [\lambda_{ij} y_i, y_j],$$

donde $[y_i, y_j] := y_i \otimes y_j - y_j \otimes y_i$, los $\{y_i\}$ son linealmente independientes y $\lambda_{ij} \in F$; análogamente, si $a^- \in \mathrm{Alt}^-$, se tiene que $a^- = \sum_{i<j} [\lambda_{ij} x_i, x_j]$ para un conjunto linealmente independiente $\{x_i\}$ y $\lambda_{ij} \in F$. No es difícil comprobar que

(3.2.1) para $a^+ = \sum \alpha_{ij} y_i \otimes y_j \in \mathrm{Skew}(\mathcal{F}(X, Y), \#)$, las siguientes condiciones son equivalentes,

(i) $a^+ \in \mathrm{Alt}^+$,

(ii) $\alpha_{ii} = 0$ para todo i, y

(iii) $g(x, xa^+) = 0$ para todo $x \in X$.

Se tiene una caracterización similar para los $a^- \in \mathrm{Alt}^-$. Veamos que todo elemento no nulo $a^+ \in \mathrm{Alt}^+$ se puede escribir como

(3.2.2) $\quad a^+ = \sum_{k=1}^{n} [y_{2k}, y_{2k-1}]$,

donde $\{y_1, \ldots, y_{2n}\}$ son linealmente independientes, en cuyo caso, es una base de $im(a^+)$ y de manera similar, $a^- = \sum_{k=1}^{m} [x_{2k}, x_{2k-1}]$, donde los vectores $\{x_1, \ldots, x_{2m}\}$ son linealmente independientes, para todo $a^- \in \mathrm{Alt}^-$.

De hecho, si $0 \neq a^+ = \sum_{1\leq i<j\leq n}[\lambda_{ij}y_i, y_j] \in \mathrm{Alt}^+$ para un conjunto linealmente independiente $\{y_i\}$ y $\lambda_{ij} \in F$, podemos suponer que $\lambda_{12} \neq 0$ y escribir

$$a^+ = [y_1, \lambda_{12}y_2] + [y_1, v_1] + [y_2, v_2] + \sum_{3\leq i<j\leq n}[\lambda_{ij}y_i, y_j]$$

donde $v_i = \sum_{3\leq j\leq n}\lambda_{ij}y_j$, para $i = 1, 2$, está en la expansión lineal de $\{y_3, \ldots, y_n\}$ y $b := \sum_{3\leq i<j\leq n}[\lambda_{ij}y_i, y_j] \in \mathrm{Alt}^+$. Entonces,

$$\begin{aligned}a^+ &= [y_1, \lambda_{12}y_2] + [y_1 - \lambda_{12}^{-1}v_2, v_1] + [\lambda_{12}^{-1}v_2, v_1] - [\lambda_{12}^{-1}v_2, \lambda_{12}y_2] + b = \\ &= [y_1 - \lambda_{12}^{-1}v_2, \lambda_{12}y_2] + [y_1 - \lambda_{12}^{-1}v_2, v_1] + [\lambda_{12}^{-1}v_2, v_1] + b = \\ &= [y_1 - \lambda_{12}^{-1}v_2, \lambda_{12}y_2 + v_1] + [\lambda_{12}^{-1}v_2, v_1] + b = \\ &= [z_1, z_2] + [\lambda_{12}^{-1}v_2, v_1] + b,\end{aligned}$$

donde $\{z_1 := y_1 - \lambda_{12}^{-1}v_2, z_2 := \lambda_{12}y_2 + v_1\}$ son linealmente independientes y $[\lambda_{12}^{-1}v_2, v_1] + b \in \mathrm{Alt}^+$. Ahora por inducción se obtiene (3.2.2).

De hecho, la descomposición $a^+ = \sum_{k=1}^{n}[y_{2k}, y_{2k-1}]$ dada en (3.2.2) establece que $a^+ \in \mathrm{Alt}^+$ puede ser extendido a un idempotente $e = (a^+, a^-)$ que es una suma $e = e_1 + \ldots + e_n$ de idempotentes de división mutuamente ortogonales $e_i := ([y_{2i}, y_{2i-1}], [x_{2i}, x_{2i-1}])$, donde $\{x_i\}$ es dual a $\{y_i\}$. En particular, todo $a^+ \in \mathrm{Alt}^+$ es *diagonalizable* [72].

Nótese que por (3.1(3)) se tiene que el par alternante $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ es simple y coincide con su zócalo, sin embargo, este resultado se puede probar de una manera elemental, como muestra la siguiente proposición.

3.3 PROPOSICIÓN. *El par alternante Alt$(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ es simple y coincide con su zócalo.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $0 \neq \mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$. Sea $0 \neq I = (I^+, I^-)$ un ideal de $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$. Observemos primero que I es invariante por F: sean $0 \neq a \in I^+$ y $\alpha \in F$. Por (3.2.2), se tiene que $a = \sum_{k=1}^{n}[y_{2k}, y_{2k-1}] \in I^+$, donde $\{y_1, \cdots, y_{2n}\}$ son linealmente independientes y $1 \leq n$. Sea $\{x_1, \cdots, x_{2n}\}$ un sistema dual a $\{y_1, \cdots, y_{2n}\}$. Entonces

$$a\sum_{k=1}^{n}[\alpha x_{2k-1}, x_{2k}]a = \alpha a \in I^+$$

porque $a \in I^+$ y $\sum_{k=1}^{n}[\alpha x_{2k-1}, x_{2k}] \in \mathrm{Alt}^-$. Por otro lado, para todo $k = 1, \cdots, n$ tenemos que

$$a[x_{2k-1}, x_{2k}]a = [y_{2k}, y_{2k-1}][x_{2k-1}, x_{2k}][y_{2k}, y_{2k-1}] = [y_{2k}, y_{2k-1}] \in I^+.$$

En particular, $[y_1, y_2] \in I^+$ y esto implica que

(3.3.1) $\quad [y_1, y] \in I^+$ y $[y_2, y] \in I^+$ para todo $y \in Y$.

De hecho, dado que I es F-invariante, (3.3.1) es inmediato si y depende de $\{y_1, y_2\}$. Supongamos entonces que $\{y_1, y_2, y\}$ son linealmente independientes. En este caso, tomemos $\{x_1, x_2, x\}$ un sistema dual a $\{y_1, y_2, y\}$ y se tiene que

$$[y_1, y] = \{[y_1, y_2], [x_2, x_1], [y_1, y]\} \in I^+,$$

análogamente, $[y_2, y] \in I^+$ para todo $y \in Y$. Sea ahora $[y_i, y_{i-1}] \in \mathrm{Alt}^+$ con $\{y_i, y_{i-1}\}$ linealmente independientes. Afirmamos que $[y_i, y_{i-1}] \in I^+$.

Usando la F-invarianza de I junto con (3.3.1) podemos suponer que $\{y_1, y_2, y_{i-1}, y_i\}$ son linealmente independientes. En este caso, para un sistema $\{x_1, x_2, x_{i-1}, x_i\}$ dual a $\{y_1, y_2, y_{i-1}, y_i\}$, se tiene que

$$[y_i, y_{i-1}] = \{[y_i, y_1], [x_1, x_i], [y_i, y_{i-1}]\} \in I^+$$

como queríamos, dado que $[y_i, y_1] \in I^+$ por (3.3.1). De aquí y (3.2.2) se concluye que $I^+ = \mathrm{Alt}^+$ (de manera similar $I^- = \mathrm{Alt}^-$) lo que implica que $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ es simple.

Veamos que $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ tiene zócalo no nulo. Sea $0 \neq a = [y_1, y_2] \in \mathrm{Alt}^+$, donde $\{y_1, y_2\}$ son linealmente independientes. Sea $\{x_1, x_2\}$ un sistema dual a $\{y_1, y_2\}$ y definamos la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & F^J & \to & \mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)_a \\ & \alpha & \mapsto & \overline{\alpha[x_2, x_1]} \end{array},$$

donde $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)_a$ es el álgebra local de $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ en a. Afirmamos que φ es un isomorfismo de álgebras de Jordan. Sean $\alpha, \beta \in F$. Dado que

$$a\alpha[x_2, x_1]a\beta[x_2, x_1]a\alpha[x_2, x_1]a = \alpha\beta\alpha[y_1, y_2]$$

se tiene que $U^{(a)}_{\varphi(\alpha)}\varphi(\beta) = \varphi(U_\alpha\beta)$. De manera similar se comprueba que $\varphi(\alpha)^{2(a)} = \varphi(\alpha^2)$. La inyectividad de φ es inmediata; ahora para $b \in \mathrm{Alt}^-$ se tiene por (3.2.1) que

$$\begin{aligned} aba &= (y_1 \otimes y_2 b - y_2 \otimes y_1 b)[y_1, y_2] = y_1 \otimes g(y_2 b, y_1) y_2 + y_2 \otimes g(y_1 b, y_2) y_1 = \\ &= g(y_2 b, y_1)[y_1, y_2] \end{aligned}$$

porque $b^\# = -b$, lo que significa que $b = \varphi(g(y_2 b, y_1))$ y entonces φ es biyectiva. Luego, $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)_a$ es un álgebra de división, y por tanto $a \in \mathrm{Zoc}(\mathrm{Alt}^+)$ por (1.3). ■

3.4 *El caso no alternante $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$.*

Sea $\mathcal{P} = (X, Y, g)$ un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución $(\Delta, -)$. Consideremos $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ con la involución adjunta $\#$. Nótese que

$$a^+ \in H(\mathcal{F}(X, Y), \#) \quad \text{sii} \quad a^+ = \sum \alpha_{ij} y_i \otimes y_j,$$

donde los $\{y_i\}$ son linealmente independientes y $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$; análogamente tenemos $a^- \in H(\mathcal{F}(Y, X), \#)$ si, y sólo si, $a^- = \sum \alpha_{ij} x_i \otimes x_j$, donde los $\{x_i\}$ son linealmente independientes y $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$.

3.5 Proposición. *Existe una correspondencia biunívoca entre los triples amplios de $(\Delta, -)$ y los pares amplios de $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$.*

Demostración: Dado un triple amplio Δ_0 de $(\Delta, -)$, definamos $H_0 = (H_0^+, H_0^-)$, con H_0^+ (respectivamente, H_0^-) siendo la clausura aditiva de todos los operadores continuos de la forma $\alpha y \otimes y$ (respectivamente, $\alpha x \otimes x$) e $y \otimes y' + y' \otimes y$ (respectivamente, $x \otimes x' + x' \otimes x$), para $\alpha \in \Delta_0$. Veamos que H_0 es un par amplio.

Sea $a \in \mathcal{F}(X, Y)$. Por (2.2), $a = \sum_{i=1}^n y_i \otimes y'_i$ y por (2.6.2),

$$a + a^\# = \sum_{i=1}^n y_i \otimes y'_i + \sum_{i=1}^n y'_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n (y_i \otimes y'_i + y'_i \otimes y_i) \in H_0^+.$$

Sea ahora $h = \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j x_j \otimes x_j + (x'_j \otimes x''_j + x''_j \otimes x'_j)) \in H_0^-$ (con $\alpha_j \in \Delta_0$ para todo j). Por (2.1.1),

$$aha^{\#} = \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j x_j a^{\#} \otimes x_j a^{\#} + (x'_j a^{\#} \otimes x''_j a^{\#} + x''_j a^{\#} \otimes x'_j a^{\#})) \in H_0^+,$$

esto es, $aH_0^- a^{\#} \subseteq H_0^+$ para todo $a \in \mathcal{F}(X,Y)$. De manera análoga, se llega a que $b + b^{\#} \in H_0^-$ y $bH_0^+ b^{\#} \subseteq H_0^-$ para todo $b \in \mathcal{F}(Y,X)$, de aquí se concluye que H_0 es un par amplio.

Recíprocamente, para un par amplio $H_0 = (H_0^+, H_0^-)$ de $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$, consideremos

$$\Delta_0 := \{\alpha \in H(\Delta, -) : \alpha y \otimes y \in H_0^+ \quad \text{para} \quad 0 \neq y \in Y\}.$$

Afirmamos que Δ_0 es un triple amplio de $(\Delta, -)$. Nótese primero que si $\alpha \in \Delta_0$ con $\alpha y \otimes y \in H_0^+$, entonces $\alpha x \otimes x \in H_0^-$ para todo $x \in X$ tal que $g(x,y) = 1$, dado que para tal x

$$(x \otimes x)(\alpha y \otimes y)(x \otimes x)^{\#} = x \otimes \alpha x = \alpha x \otimes x \in H_0^-.$$

Además, si $y' \in Y$, entonces para $x \in X$ tal que $g(x,y) = 1$, se tiene que

$$(y' \otimes y)(\alpha x \otimes x)(y' \otimes y)^{\#} = y' \otimes \alpha y' = \alpha y' \otimes y' \in H_0^+,$$

dado que $\alpha x \otimes x \in H_0^-$ por lo visto arriba, y entonces

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\alpha \in H(\Delta, -) : \alpha y \otimes y \in H_0^+ \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad y \in Y\} \\ &= \{\alpha \in H(\Delta, -) : \alpha x \otimes x \in H_0^- \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in X\}. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Claramente Δ_0 es invariante por Φ. Ahora dados $\alpha, \beta \in \Delta_0$, tomemos $0 \neq y \in Y$. Por (3.5.1) se tiene que

$$(\alpha + \beta) y \otimes y = \alpha y \otimes y + \beta y \otimes y \in H_0^+$$

y entonces $\alpha + \beta \in \Delta_0$.

Sea $\mu \in \Delta$. Dado que H_0^+ contiene a todas las trazas,

$$\mu y \otimes y + (\mu y \otimes y)^{\#} = \mu y \otimes y + y \otimes \mu y = (\mu + \overline{\mu}) y \otimes y \in H_0^+,$$

para todo $y \in Y$, lo que implica que $\mu + \overline{\mu} \in \Delta_0$. Ahora, si $\alpha \in \Delta_0$ con $\alpha x \otimes x \in H_0^-$ para algún $0 \neq x \in X$, entonces para cada $y \in Y$ tal que $g(x,y) = 1$ se tiene que

$$(\mu y \otimes y)(\alpha x \otimes x)(\mu y \otimes y)^{\#} = \mu y \otimes \alpha \mu y = \overline{\mu}\alpha\mu y \otimes y \in H_0^+$$

y entonces, $\overline{\mu}\alpha\mu \in \Delta_0$, lo que completa la prueba de que Δ_0 es un triple amplio de $(\Delta, -)$. Finalmente, es fácil comprobar que las correspondencias $\Delta_0 \to H_0$ y $H_0 \to \Delta_0$ son inversas la una de la otra. ■

En la correspondencia dada en (3.5), si $\Delta_0 = 0$, entonces $\alpha + \overline{\alpha} = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$, lo que implica que Δ es un cuerpo de característica 2 y su involución es la identidad. En este caso, $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#) = \mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$. Luego, el caso no alternante ocurre si, y sólo si, $\Delta_0 \neq 0$. Nótese además que en el caso no alternante $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$, cualquier traza $y \otimes y' + y' \otimes y \in H_0^+$ se puede expresar como

$$y \otimes y' + y' \otimes y = (y + \lambda y') \otimes \lambda^{-1}(y + \lambda y') - y \otimes \lambda^{-1} y - \lambda y' \otimes y',$$

para cualquier $0 \neq \lambda \in \Delta_0$. Luego, H_0^+ (respectivamente, H_0^-) es de hecho la clausura aditiva de todos los operadores continuos de la forma $\alpha y \otimes y$ (respectivamente, $\alpha x \otimes x$) para $\alpha \in \Delta_0$.

De nuevo por (3.1(3)) se tiene que los pares amplios (no alternantes) $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ son simples y coinciden con su zócalo, y así como en el caso alternante, este resultado se puede probar de una manera elemental.

3.6 Proposición. *Todo par amplio no alternante $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ es simple y coincide con su zócalo.*

Demostración: Supongamos que $0 \neq H_0$. Sea Δ_0 el triple amplio de $(\Delta, -)$ asociado a H_0 por (3.5). Como $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ es no alternante, se tiene que $\Delta_0 \neq 0$. Sea $0 \neq I = (I^+, I^-)$ un ideal de $H_0 = (H_0^+, H_0^-)$. Entonces

(3.6.1) existe $\alpha y \otimes y \in I^+$ para algún $0 \neq y \in Y$, $0 \neq \alpha \in \Delta_0$.

Sea $0 \neq a = \sum_{i,j=1}^{n,m} \alpha_{ij} y_i \otimes y_j \in I^+$, donde los $\{y_i\}$ son linealmente independientes y $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ y consideremos $\{x_i\}$ un sistema dual a $\{y_i\}$.

Podemos suponer que existe $\alpha_{ii} \neq 0$ para algún i, porque en caso contrario, tomando $\alpha_{i_0 j_0} \neq 0$ para algún i_0, j_0 y $0 \neq \beta \in \Delta_0$, tendríamos

$$a(\beta x_{j_0} \otimes x_{j_0})a = \sum_{i,j=1}^{n,m} \gamma_{ij} y_i \otimes y_j \in I^+,$$

dado que $\beta x_{j_0} \otimes x_{j_0} \in H_0^-$, con $0 \neq \gamma_{i_0 i_0} = \overline{\alpha_{i_0 j_0}} \beta \alpha_{i_0 j_0} \in \Delta_0$. Supongamos entonces que $\alpha_{i_0 i_0} \neq 0$ para algún i_0 y sea $\beta x_{i_0} \otimes x_{i_0} \in H_0^-$. Tenemos que

$$(\beta x_{i_0} \otimes x_{i_0}) a (\beta x_{i_0} \otimes x_{i_0}) = \beta \alpha_{i_0 i_0} \beta x_{i_0} \otimes x_{i_0} \in I^-$$

y entonces, dado que $0 \neq \beta \in \Delta_0 \Rightarrow \beta^{-1} = \beta^{-1}\beta\beta^{-1} \in \Delta_0$, se tiene que $(\beta^{-1} y_{i_0} \otimes y_{i_0})(\beta \alpha_{i_0 i_0} \beta x_{i_0} \otimes x_{i_0})(\beta^{-1} y_{i_0} \otimes y_{i_0}) = \alpha_{i_0 i_0} y_{i_0} \otimes y_{i_0} \in I^+$ con $0 \neq \alpha_{i_0 i_0} \in \Delta_0$, lo que prueba (3.6.1).

Sea $\alpha y \otimes y \in I^+$ para algún $0 \neq y \in Y$, $0 \neq \alpha \in \Delta_0$. Afirmamos

(3.6.2) $\alpha^{-1} y \otimes y \in I^+$,

(3.6.3) $\alpha x \otimes x \in I^-$ para todo $x \in X$ tal que $g(x, y) = 1$,

(3.6.4) $\beta y \otimes y \in I^+$ para todo $\beta \in \Delta_0$,

(3.6.5) $\alpha y' \otimes y' \in I^+$ para todo $y' \in Y$, y

(3.6.6) $y_1 \otimes y_2 + y_2 \otimes y_1 \in I^+$ para todos $y_1, y_2 \in Y$.

De hecho, dado que $\alpha^{-1} \in \Delta_0$, se tiene que $\alpha^{-3} x \otimes x \in H_0^-$, lo que implica que $(\alpha y \otimes y)(\alpha^{-3} x \otimes x)(\alpha y \otimes y) = \alpha^{-1} y \otimes y \in I^+$ probando (3.6.2). De aquí, $(\alpha x \otimes x)(\alpha^{-1} y \otimes y)(\alpha x \otimes x) = \alpha x \otimes x \in I^-$ para todo $x \in X$ tal que $g(x, y) = 1$, lo que prueba (3.6.3).

Sea $\beta \in \Delta_0$. Nótese que $\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1} \in \Delta_0$ y entonces $(\alpha x \otimes x)(\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1} y \otimes y)(\alpha x \otimes x) = \beta x \otimes x \in I^-$ para todo $x \in X$ tal que $g(x, y) = 1$ dado que $\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1} y \otimes y \in H_0^+$ y $\alpha x \otimes x \in I^-$ por (3.6.3). Por la simetría de (3.6.3), se tiene que $\beta y \otimes y \in I^+$ lo que prueba (3.6.4).

Ahora, tomemos $y' \in Y$. Si $y' = \lambda y$ para algún $\lambda \in \Delta$, entonces $\alpha y' \otimes y' = \overline{\lambda} \alpha \lambda y \otimes y \in I^+$ por (3.6.4) dado que $\overline{\lambda} \alpha \lambda \in \Delta_0$ para todo $\lambda \in \Delta$. Si $\{y, y'\}$ son linealmente independientes, consideremos un sistema $\{x, x'\}$ dual a $\{y, y'\}$ y se tiene que $(y \otimes y' + y' \otimes y)(\alpha x \otimes x)(y \otimes y' + y' \otimes y) = \alpha y' \otimes y' \in I^+$

dado que $y \otimes y' + y' \otimes y \in H_0^+$ y $\alpha x \otimes x \in I^-$ por (3.6.3), lo que prueba (3.6.5).

Finalmente, sean $y_1, y_2 \in Y$. Si $y_2 = \lambda y_1$ para algún $\lambda \in \Delta$, entonces $y_1 \otimes y_2 + y_2 \otimes y_1 = (\lambda + \overline{\lambda}) y_1 \otimes y_1 \in I^+$ por (3.6.4) y (3.6.5) dado que $\lambda + \overline{\lambda} \in \Delta_0$ para todo $\lambda \in \Delta$. Ahora, si $\{y_1, y_2\}$ son linealmente independientes, consideremos el sistema $\{x_1, x_2\}$ dual a $\{y_1, y_2\}$ y tenemos que $\{(\alpha y_1 \otimes y_1), (x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_1), (\alpha^{-1} y_2 \otimes y_2)\} = y_1 \otimes y_2 + y_2 \otimes y_1 \in I^+$ porque $x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_1 \in H_0^-$ y $\alpha y_1 \otimes y_1, \alpha^{-1} y_2 \otimes y_2 \in I^+$ por (3.6.5) y (3.6.2).

Se sigue de (3.6.4),(3.6.5) y (3.6.6) que $I^+ = H_0^+$ (análogamente $I^- = H_0^-$), y entonces que H_0 es simple. No es difícil comprobar que H_0 tiene zócalo no nulo: considérese el isomorfismo de álgebras de Jordan

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\Delta_0)_\alpha & \to & \underline{(H_0)_a} \\ & \overline{\beta} & \mapsto & \beta x \otimes x \end{array}$$

donde $0 \neq a = \alpha y \otimes y = y \otimes \alpha y \in H_0^+$ y $x \in X$ es tal que $g(x, y) = 1$. ■

4. Pares de Jordan fuertemente primos con zócalo no nulo.

En esta sección alcanzamos nuestro objetivo de refinar la clasificación de los pares de Jordan fuertemente primos (que se debe en su caso más general cuadrático a A. D'Amour y K. McCrimmon) al caso en que el par tenga zócalo no nulo. Como caso particular, describiremos también las álgebras de Jordan fuertemente primas con zócalo no nulo.

4.1 TEOREMA. *Un par de Jordan es fuertemente primo con zócalo no nulo si, y sólo si, es isomorfo a uno de los siguientes,*

(1) *un par de Jordan simple y excepcional, que es de dimensión finita sobre su centroide* [70, (12.12(v)) y (12.12(vi))],

(2) *un par de Jordan simple (especial) de tipo clifford* [27, 8.14],

(3) *un par de Jordan V de operadores continuos*

$$0 \neq \mathcal{F}(P, P')^J \triangleleft V \leq \mathcal{L}(P, P')^J,$$

donde $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ son pares de espacios vectoriales duales sobre la misma álgebra de división,

(4) *un par de Jordan V de operadores continuos antisimétricos*

$$0 \neq \mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#) \triangleleft V \leq \mathrm{Skew}(\mathcal{L}(\mathcal{P}), \#),$$

donde $\mathcal{P}$ es un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un cuerpo F con la identidad como involución, y donde $\#$ es la involución adjunta,

(5) *un par de Jordan V de operadores continuos hermitianos*

$$0 \neq H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#) \triangleleft V \leq H(\mathcal{L}(\mathcal{P}), \#),$$

donde $\mathcal{P}$ es un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución, $\#$ es la involución adjunta, y $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ es no alternante.

Demostración: Sea V un par de Jordan fuertemente primo con zócalo no nulo M. Entonces V es primitivo por [83, 4.4(i)]. Por otro lado, por el teorema de dicotomía primo de Zel'manov ([25],[106]) se tiene que o bien V posee una extensión escalar que es un par de Jordan simple y excepcional de dimensión finita, o V es especial. En el primer caso, V satisface una identidad polinómica homótopa y entonces, él mismo es un par de Jordan simple y excepcional de dimensión finita sobre su centroide [83, 4.10(ii)], como en (1) del enunciado.

Supongamos ahora que V es especial. Entonces M también lo es y, para un ideal hermitiano $\mathcal{G}(X) \triangleleft \mathrm{FSJP}(X)$, donde $\mathrm{FSJP}(X)$ denota al par de Jordan libre especial (véase (1.1)), $\mathcal{G}(M) = 0$ ó $\mathcal{G}(M) = M$, por la simplicidad de M. Si se da lo primero, M es de tipo clifford y entonces $V = M$ es simple (especial) de tipo clifford por [27, 7.1 (2)], como en (2) del enunciado. Si se da lo segundo, tenemos por el teorema de estructura para pares de Jordan simples [25, 5.5] que o bien

(I) $\quad M = A^J \triangleleft V \leq Q_s(A)^J, \quad$ o

(II) $\quad M = H_0(A, *) \triangleleft V \leq H(Q_s(A), *),$

para un par asociativo simple A (con involución polarizada $*$ en el segundo caso), donde $Q_s(A)$ denota al par asociativo de cocientes simétricos de Martindale de A. En ambos casos A coincide con su zócalo por la herencia del zócalo [71] y (3.1(2)). Apliquemos (2.3) si V es como en (I) para obtener que

V es como en (3) del enunciado; mientras que si V es como en (II), aplicando (2.8) se obtiene que

$$M = H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), *) \triangleleft V \leq H(\mathcal{L}(\mathcal{P}), *),$$

donde $\mathcal{P}$ es un par de espacios vectoriales semi-duales sobre un álgebra de división con involución $(\Delta, -)$, y $*$ es bien la adjunta $\#$ o $-\#$. Si se da lo segundo, Δ es de hecho un cuerpo F, con la identidad como involución si su característica no es 2. Si $* = -\#$ y la característica del cuerpo F no es 2, entonces el único par amplio de $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), -\#)$ es $\mathrm{Alt}(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ y V es entonces como en (4) del enunciado. Cuando $* = -\#$ y la característica de F es 2 (en cuyo caso $\# = -\#$) o $* = \#$, consideremos Δ_0 el triple amplio asociado a $H_0(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \#)$ por (3.5). Si $\Delta_0 = 0$, entonces el par V es de nuevo como en (4), mientras que si $\Delta_0 \neq 0$, estamos en el caso no alternante (5).

El recíproco es bien conocido si V es como en (1) o (2). Si V es como en (3), entonces V es fuertemente primo con zócalo no nulo por (2.3) y [10, 1.7(i)]. Finalmente, si V es como en (4) o (5), V es fuertemente primo por [11, Th. 4.3] y tiene zócalo no nulo por (3.1(3)). ∎

Los pares de Jordan V del tipo (1) o (2) del teorema previo son simples de capacidad finita. Como observamos en (2.4), si V es como en (3), entonces V tiene capacidad finita si, y sólo si, uno de los pares de espacios vectoriales duales $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ es de dimensión finita. En este caso, $V \cong A(M, R, \phi)^J$, [70, 12.12(I)], y V es de hecho artiniano sii ambos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son finito dimensionales, esto es, $V \cong (M_{m\times n}(\Delta), M_{n\times m}(\Delta))^J$ [70, 12.13(b)]. Finalmente, si V es como en (4) o (5), entonces V tiene capacidad finita, equivalentemente, es artiniano, sii el par de espacios vectoriales semi-duales $\mathcal{P}$ es de dimensión finita y V es como en [70, (12.12(II))] y [70, (12.12(III))].

Las álgebras de Jordan fuertemente primas con zócalo no nulo fueron clasificadas en el caso lineal por J.M. Osborn y M.L. Racine [87], sin hacer uso del teorema de Zel'manov (una prueba diferente utilizando dicho teorema fue dada en [30]). Sin restricción en la característica, las álgebras de Jordan simples con zócalo han sido descritas en [35]. A continuación, damos una descripción de las álgebras de Jordan fuertemente primas con zócalo no nulo en característica arbitraria, omitiendo la demostración que es análoga a la de (4.1) con los obvios cambios de referencias.

4.2 Teorema. *Un álgebra de Jordan es fuertemente prima con zócalo no nulo si, y sólo si, es isomorfa a una de las siguientes,*

(1) *un álgebra de albert y por tanto simple y excepcional de dimensión 27,*

(2) *un álgebra simple (especial) de clifford,*

(3) *un álgebra de Jordan J de operadores continuos*

$$0 \neq \mathcal{F}_Y(X)^J \triangleleft J \leq \mathcal{L}_Y(X)^J$$

con respecto a un par de espacios vectoriales duales (X, Y) sobre un álgebra de división,

(4) *un álgebra de Jordan J del tipo*

$$0 \neq H_0(\mathcal{F}_V(V), \#) \triangleleft J \leq H(\mathcal{L}_V(V), \#),$$

donde V es un espacio vectorial autodual sobre un álgebra de división con involución $(\Delta, -)$.

4.3 Por [35], si J es un álgebra de Jordan simple con zócalo no nulo como en (4) de (4.2), entonces J es, salvo isotopía, un álgebra amplia $J = H_0(\mathcal{F}_V(V), \#)$, donde V es un espacio vectorial autodual con respecto a una forma hermítica y no alternada sobre un álgebra de división con involución $(\Delta, -)$, o $J = \mathrm{Alt}(\mathcal{F}_V(V), \#)$, donde V es un espacio vectorial autodual con respecto a una forma alternada sobre un cuerpo F con la identidad como involución. Como consecuencia, obtenemos la clasificación de las álgebras de Jordan simples con capacidad finita [61, 6.4.1]: J es simple con capacidad finita si, y sólo si, J es como en (4.2(1)), (4.2(2)), $M_n(\Delta)^J$ (donde Δ es un álgebra de división) o (4.2(4)) para un espacio finito dimensional V.

MENU SALIR

Capítulo IV.

ELEMENTOS DE LESIEUR-CROISOT DE UN ÁLGEBRA DE JORDAN

El conocido como teorema de Goldie para álgebras de Jordan, debido a E. Zel'manov para el caso lineal [107] y extendido al caso cuadrático por A. Fernández, E. García Rus y F. Montaner en [37], caracteriza las álgebras de Jordan que son órdenes en álgebras de Jordan no degeneradas y artinianas. Sin embargo, la condición natural de finitud en álgebras de Jordan es la tenencia de capacidad finita. Inspirándose en el caso asociativo, los autores de [37] caracterizan los órdenes en álgebras de Jordan no degeneradas con capacidad finita. Tales álgebras son aquéllas que tienen la propiedad de que un ideal interno es esencial si, y sólo si, posee un elemento inyectivo. Para designarlas hemos elegido la denominación de álgebra de "Lesieur-Croisot", como un pequeño homenaje a estos autores cuyo trabajo sobre anillos primos con condiciones de cadena ascendente es con frecuencia ignorado en las referencias.

Siguiendo la filosofía del Capítulo II, estudiaremos aquí el conjunto de los elementos de un álgebra de Jordan fuertemente prima cuya local asociada es un álgebra de Jordan de Lesieur-Croisot. Nuestra conjetura es que tal conjunto (incluso en el caso no degenerado) es de hecho un ideal, lo que constituiría un primer paso de un proyecto más amplio que busca desarrollar una teoría local de Goldie para sistemas de Jordan. En este capítulo damos una respuesta parcial a tal conjetura.

1. Álgebras de Jordan de Lesieur-Croisot.

En esta sección definiremos la noción de álgebra de Jordan de Lesieur-Croisot y daremos algunos ejemplos. Antes de eso y con el objetivo de fijar notación y hacer a este capítulo autosuficiente, recordaremos los resultados fundamentales sobre la teoría de Goldie para álgebras de Jordan obtenidos en [37], así como los conceptos que aparecen en tales resultados.

El problema de encontrar resultados tipo Goldie para álgebras de Jordan fue planteado por N. Jacobson [60, p. 426] en relación a la construcción de álgebras de Jordan como *localizaciones de Ore* de dominios de Jordan. Una respuesta definitiva fue dada por E. Zel'manov en [107], donde establece un análogo del teorema de Goldie para álgebras de Jordan lineales, usando sus resultados fundamentales sobre teoría de estructura. Respuesta que ha sido extendida al caso general cuadrático por A. Fernández, E. García Rus y F. Montaner en [37]. Las condiciones de Ore necesarias y suficientes para que exista el álgebra de fracciones de un álgebra de Jordan arbitraria en características distintas de 2 y 3 han sido establecidas en [75], lo que podría hacer esperable la obtención del teorema de Goldie en el caso lineal sin hacer uso de la teoría de estructura. A continuación recordamos algunas definiciones.

—Un elemento $x \in J$ se dice que es un *J-denominador* de $\tilde{a} \in \widetilde{J}$ en el álgebra $\widetilde{J} \geq J$ si los siguientes seis productos llevan $\tilde{a}$ a J,

$$\text{(Di)}\quad U_x\tilde{a}, \qquad \text{(Dii)}\quad U_{\tilde{a}}x \qquad \text{(Diii)}\quad U_{\tilde{a}}U_xJ'$$

$$\text{(Diii}'\text{)}\quad U_xU_{\tilde{a}}J \qquad \text{(Div)}\quad V_{x,\tilde{a}}J' \qquad \text{(Div}'\text{)}\quad V_{\tilde{a},x}J'.$$

Un subconjunto no vacio $S \subseteq J$ se dice que es una *mónada* si U_st y s^2 están en S, para todos $s, t \in S$. No es difícil comprobar que $Iny(J) =$

$\{x \in J \,\text{tal que}\, U_x : J \to J \,\text{es inyectivo}\}$ es una mónada de J. Sea J una subálgebra de un álgebra de Jordan unitaria Q, y $S \subseteq J$ una mónada de J. Decimos que J es un *orden* en $Q \geq J$ relativo a S, y lo denotamos por $J <<_S Q$, si se satisfacen las siguientes condiciones,

(1) todo elemento $s \in S$ es inversible en Q,

(2) todo elemento $q \in Q$ tiene un J-denominador en S, y

(3) para todos $s, t \in S$, $U_s S \cap U_t S \neq \emptyset$.

Nótese que (1) implica $S \subseteq Inv(Q) \cap J \subseteq Iny(J)$. Un *orden clásico* es un orden relativo al total $S = Iny(J)$ (entonces Q se dice que es un álgebra *clásica* de cocientes de J). De hecho, los órdenes en álgebras de Jordan no degeneradas de capacidad finita son todos clásicos [37, 2.10].

—Sea J un álgebra de Jordan. Para un subconjunto $X \subseteq J$, denotamos por $[X]_J$ al ideal interno de J generado por X. Siguiendo [37], decimos que una familia $\{K_i\}_{i\in I}$ de ideales internos no nulos de J constituyen una *suma directa* si $K_i \cap [\sum_{j\neq i} K_j]_J = 0$ para cada $i \in I$. Un álgebra de Jordan se dice que es *de Goldie* si satisface la CCA sobre los anuladores (equivalentemente, CCD), y no posee sumas directas infinitas de ideales internos no nulos (lo que denotaremos por CCA($\oplus$)).

Análogamente al caso de las álgebras asociativas, si J es un álgebra de Jordan, se define la *dimensión uniforme* de J, $udim(J)$, como el supremo de los $n \geq 1$ tales que existen ideales internos no nulos $K_1, \dots, K_n$ de J que forman una suma directa.

1.1 Si J es no degenerada, entonces J tiene dimensión uniforme finita si, y sólo si, satisface la CCA($\oplus$) [37, 7.3].

Ya tenemos todos los ingredientes para enunciar el teorema de Goldie para álgebras de Jordan.

1.2 TEOREMA. [37, 9.3] *Para un álgebra de Jordan J, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *J es un orden (clásico) en un álgebra de Jordan no degenerada y artiniana Q,*

(ii) *J es no degenerada y de Goldie,* *Además, J es prima si, y sólo si, Q es simple.*

Volviendo a la teoría de Goldie asociativa (véase II.(3.1)), es bien conocido que existen distintas caracterizaciones de los órdenes por la izquierda en anillos semiprimos y artinianos, una, en particular, es que R satisfaga la propiedad de que "un ideal por la izquierda $L \triangleleft_l R$ es esencial si, y sólo si, posee un elemento regular" [51, 3.34]. La natural versión Jordan de esta propiedad sería que J satisfaga que "un ideal interno es esencial sii contiene un elemento inyectivo". Pero esta propiedad, en general, no implica que J sea un orden en un álgebra de Jordan no degenerada y artiniana, como muestra el ejemplo del álgebra de Jordan definida por una forma cuadrática no degenerada sobre un espacio vectorial que contenga un subespacio totalmente isotrópico de dimensión infinita. Sin embargo, estas álgebras aunque no son artinianas, tienen capacidad finita (véase III.(1.2)), lo que nos da una idea de qué tipo de álgebra de cocientes puede esperarse para J.

1.3 Teorema. [37, 10.1] *Para un álgebra de Jordan J, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(i) *J es un orden (clásico) en un álgebra de Jordan no degenerada de capacidad finita Q,*

(ii) *J es no degenerada y satisface la propiedad de que "un ideal interno de J es esencial si, y sólo si, contiene un elemento inyectivo".*

Además, J es prima si, y sólo si, Q es simple.

Diremos que un álgebra de Jordan J es *de Lesieur-Croisot*, abreviado *LC*, si satisface las condiciones equivalentes de (1.3). Finalizamos esta sección, mostrando algunos ejemplos.

1.4 Si J no degenerada y de Goldie, entonces J es de Lesieur-Croisot. En efecto, porque J es un orden en un álgebra de Jordan Q que es no degenerada y artiniana y por tanto con capacidad finita, luego satisface las condiciones equivalentes de (1.3).

1.5 Si J es fuertemente prima y satisface una identidad polinómica, entonces J es de Lesieur-Croisot. Pues por [84, 0.13] su clausura central $\Gamma^{-1}J$ es simple con capacidad finita, luego J satisface las condiciones equivalentes de (1.3).

2. Elementos de Lesieur-Croisot de un álgebra de Jordan fuertemente prima.

Para tratar problemas relacionados con la teoría de Goldie en ambiente Jordan, la dicotomía *PI local*, esto es, considerar por un lado las álgebras que tienen PI elementos no nulos y por otro las que no los tienen, parece ser más adecuada que la clásica dicotomía de ser PI o no PI, debido, en parte, a los recientes avances en la teoría PI local ([83], [84]). Recordemos que un elemento a de un álgebra de Jordan J se dice que es PI (respectivamente LC) si el álgebra local J_a es PI (respectivamente LC). De especial importancia para las aplicaciones es el hecho de que el conjunto $\mathrm{PI}(J) = \{x \in J : J_x \,\mathrm{es\,PI}\}$ de los elementos PI de un sistema de Jordan no degenerado constituye un ideal [83, 5.4]. Hecho que se aplica para obtener análogos de teoremas debidos a S.A. Amitsur y a W.S. Martindale en ambiente Jordan (véanse II.(4.1) y II.(4.2)).

En esta sección vamos a reducir el problema de demostrar que el conjunto de los elementos de Lesieur-Croisot de un álgebra de Jordan fuertemente prima J constituye un ideal al caso en que J sea especial de tipo hermitiano sin elementos PI. En este caso, utilizaremos métodos zelmanovianos para reducir el problema a una cuestión puramente asociativa, en particular, a demostrar que para un álgebra asociativa con involución $(R, *)$ que sea $*$-prima y $*$-*no singular por la izquierda*, esto es, $Z_l(R) \cap Z_l(R)^* = 0$, se tenga que el conjunto $I_l(R)$ de los elementos de R que tienen dimensión uniforme por la izquierda finita, es un ideal de R. Esto es cierto por ejemplo si R es de hecho prima, pues entonces es no singular por la izquierda y es bien conocido que bajo no singularidad $I_l(R)$ es un ideal de R [7, Prop. 1]. Pero en general, esta cuestión quedará pendiente para trabajos posteriores así como el caso no degenerado.

—Sea J un álgebra de Jordan. Denotaremos por $\mathrm{LC}(J)$ al conjunto

$$\mathrm{LC}(J) = \{x \in J : J_x \,\mathrm{es\,LC}\}$$

de los elementos de Lesieur-Croisot de J.

2.1 PROPOSICIÓN. *Sea J un álgebra de Jordan fuertemente prima con elementos* PI *no nulos, esto es,* $\mathrm{PI}(J) \neq 0$. *Entonces* $\mathrm{LC}(J) = \mathrm{PI}(J)$ *y por tanto es un ideal de J.*

Demostración: Sea $x \in \mathrm{PI}(J)$. Entonces J_x es fuertemente prima [13, 4.1(iii)] y PI, luego J_x es LC por (1.5), esto es, $x \in \mathrm{LC}(J)$, y por tanto $\mathrm{PI}(J) \subseteq \mathrm{LC}(J)$.

Sea ahora $x \in \mathrm{LC}(J)$. Si $x = 0$, entonces $x \in \mathrm{PI}(J)$ trivialmente. Supongamos que $x \neq 0$. Como $\mathrm{PI}(J)$ es un ideal de J [83, 5.4] no nulo en este caso, y J es fuertemente prima, se tiene que $\mathrm{an}_J(\mathrm{PI}(J)) = 0$ y por tanto $U_x(\mathrm{PI}(J)) \neq 0$. Tomemos $z \in \mathrm{PI}(J)$ tal que $U_x z \neq 0$. En particular $U_x z \in \mathrm{PI}(J)$ por ser éste un ideal de J, y entonces por la transitividad de la localización, se tiene que $(J_x)_{\overline{z}} \cong J_{U_x z}$ es PI, luego $\overline{0} \neq \overline{z} \in \mathrm{PI}(J_x)$ que es un ideal esencial de J_x porque J_x es fuertemente prima. Como J_x es LC y $\mathrm{PI}(J_x)$ es un ideal esencial de J_x, se tiene que $\mathrm{PI}(J_x)$ contiene un elemento inyectivo, esto es,

$$\mathrm{PI}(J_x) \cap \mathrm{Iny}(J_x) \neq \emptyset,$$

pero esto implica por [37, 4.4] que J_x es ella misma PI y por tanto $x \in \mathrm{PI}(J)$. Luego $\mathrm{LC}(J) = \mathrm{PI}(J) \triangleleft J$. ■

Nótese que si J es fuertemente prima y $\mathrm{PI}(J) = 0$, entonces J es especial de tipo hermitiano, pues si no, sería de clifford o albert (por [82, 15.2]) y en ambos casos, la clausura central $\Gamma^{-1}J$ es PI. Luego $\mathrm{PI}(J) = \mathrm{PI}(\Gamma^{-1}J) \cap J = \Gamma^{-1}J \cap J = J$, lo que contradice que J no posea elementos PI.

2.2 Proposición. *Si J es fuertemente prima y $\mathrm{PI}(J) = 0$, entonces $\mathrm{LC}(J) = \mathrm{Gol}(J)$, donde $\mathrm{Gol}(J) = \{x \in J : J_x \,\text{es de Goldie}\}$.*

Demostración: Sea $x \in \mathrm{Gol}(J)$. Entonces J_x es fuertemente prima y de Goldie, luego J_x es LC por (1.4), esto es, $x \in \mathrm{LC}(J)$, y por tanto $\mathrm{Gol}(J) \subseteq \mathrm{LC}(J)$.

Sea ahora $x \in \mathrm{LC}(J)$. Si $x = 0$, entonces $x \in \mathrm{Gol}(J)$ trivialmente. Supongamos entonces que $x \neq 0$. Por ser J_x LC, se tiene que J_x es un orden en un álgebra de Jordan simple Q de capacidad finita. Si Q no fuera artiniana, entonces Q sería un álgebra de clifford y por tanto PI, pero entonces J_x sería también PI y tendríamos que $0 \neq x \in \mathrm{PI}(J)$, lo que contradice nuestra hipótesis. Luego Q es artiniana y por tanto J_x es de Goldie, esto es, $x \in \mathrm{Gol}(J)$. ■

Siguiendo [37], el conjunto *singular* de J se define como

$$\Theta(J) = \{x \in J : \mathrm{an}_J(x) \,\text{es esencial en}\, J\}$$

Recordemos que un álgebra de Jordan J se dice que es *no singular* si $\Theta(J) = 0$. Dado que para todos $x, y \in J$, $an_J(x+y) \supset an_J(x) \cap an_J(y)$ y $an_J(U_x J') \supset an_J(x)$, donde J' es la unitizada de J, el conjunto singular es de hecho un ideal interno de J. Si J es no degenerada, entonces $\Theta(J)$ es un ideal de J [37, 6.1]. Además,

2.3 [38, 3.6(i))] Si J es no degenerada con $\Theta(J) = 0$, entonces $\Theta(J_a) = 0$ para todo $a \in J$.

Al igual que para álgebras asociativas [51, 3.32], se tiene la siguiente caracterización, que nos va a permitir afinar un poco más el resultado (2.2).

2.4 Un álgebra de Jordan no degenerada J es de Goldie si, y sólo si, es no singular y tiene dimensión uniforme finita [37, 9.3 ((ii)$\Leftrightarrow$(v))].

2.5 PROPOSICIÓN. *Sea J fuertemente prima tal que PI(J) $= 0$. Si J posee elementos de Lesieur-Croisot no nulos, entonces J es no singular y* $\mathrm{LC}(J) = \mathrm{F}(J)$, *donde* $\mathrm{F}(J) = \{x \in J : \mathrm{udim}(J_x) < \infty\}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $0 \neq z \in \mathrm{LC}(J) = \mathrm{Gol}(J)$ (ver (2.2)). Entonces, por (2.4), $\Theta(J_z) = 0$, de donde, por [37, 6.4], $0 \neq z \in \mathrm{an}_J(\Theta(J))$ lo que implica, por ser $\Theta(J)$ un ideal de J y J fuertemente prima, que $\Theta(J) = 0$. Por la herencia de la no singularidad (2.3), se tiene que todas las locales de J son no singulares, en particular $\Theta(J_x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{F}(J)$, de donde de nuevo por (2.4) se sigue que $\mathrm{F}(J) = \mathrm{Gol}(J) = \mathrm{LC}(J)$ como queríamos. ■

—Sea J un álgebra de Jordan especial. Diremos que un álgebra asociativa con involución $(R, *)$ es $*$-*ajustada* a J si $J \subseteq H(R, *)$ y todo $*$-ideal I de R corta a J, esto es, $I \cap J \neq 0$. Por otro lado, recordemos que $(R, *)$ se dice que es una $*$-*envolvente asociativa* de J si está generada por $J \subseteq H(R, *)$, y una $*$-*envolvente asociativa ajustada* si es una $*$-envolvente asociativa $*$-ajustada. Nótese que una $*$-envolvente asociativa ajustada R de un álgebra de Jordan semiprima J es semiprima: si $I^3 = 0$ para algún $*$-ideal I de R, entonces $(I \cap J)^2 \subseteq I^3 = 0 \Rightarrow I \cap J = 0$ (por la semiprimidad de J) $\Rightarrow I = 0$ (por lo $*$-ajustado).

Como principio general utilizaremos el siguiente resultado.

2.6 TEOREMA. [37, 5.11] *Sea J un álgebra de Jordan fuertemente prima sin elementos PI no nulos (por tanto especial de tipo hermitiano) y*

R una $*$-envolvente asociativa ajustada de J. Entonces J tiene dimensión uniforme finita si, y sólo si, R tiene dimensión uniforme por la izquierda finita. Además, en tal caso, la dimensión uniforme de J coincide con la dimensión uniforme por la izquierda de R si R es prima.

Para demostrar el resultado principal de este capítulo, utilizaremos una estrategia que aparece en la demostración de [83, 6.5] y que merece la pena ser destacada por su posible aplicación a otras cuestiones. Lo enunciamos como lema.

2.7 LEMA. *Sea J un álgebra de Jordan fuertemente prima sin elementos PI no nulos y R una $*$-envolvente asociativa ajustada de J. Entonces, para cada $0 \neq a \in J$, la subálgebra S de J generada por el derivado de un ideal hermitiano no nulo $\mathcal{H}(J)$ de J y el elemento a, es fuertemente prima de tipo hermitiano. De hecho, $S = H_0(A, *)$, donde A es una $*$-envolvente asociativa ajustada de S.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $\mathcal{H}(J) \neq 0$, donde $\mathcal{H}(X)$ es un ideal hermitiano de FSJ(X) (ver III.(1.1)), y sea $I := \mathcal{H}(J)^{(1)} = U_{\mathcal{H}(J)}\mathcal{H}(J)$, el ideal derivado de $\mathcal{H}(J)$. Denotemos por S la subálgebra de J generada por I y el elemento a, por A la $*$-subálgebra de R generada por S y por B la $*$-subálgebra de R generada por I.

Nótese que S es fuertemente prima porque contiene a I que es un ideal no nulo de J [13, 2.4]. Además S es de tipo hermitiano porque no es PI: si S fuera PI, entonces I también sería PI y dado que el cociente J/I es PI (cualquier polinomio de $U_{\mathcal{H}(X)}\mathcal{H}(X)$ se anula en J/I), tendríamos que J también sería PI [12, p. 190], lo cual es una contradicción.

En [13] se demuestra que $S = H_0(A, *)$ es un álgebra amplia de $(A, *)$: la clave está en observar que todas las trazas y las normas de elementos de A, así como los elementos de la forma xtx^*, $x \in A$, $t \in S$, son, módulo S, sumas de n-tadas de elementos de $I \cup \{a\}$ (A está generada como álgebra asociativa por $I \cup \{a\}$). Nótese ahora que utilizando la fórmula $aI \subseteq a \circ I + Ia \subseteq I + Ia$ podemos expresar toda n-tada de elementos de $I \cup \{a\}$ como una n-tada de la forma $\{I \dots Ia^i\}$, sólo hay que *pasear* al elemento a hasta el final de la n-tada, pero $\{I \dots Ib\} \subseteq I$, para todo $b \in J$, y cualquiera que sea el n por el carácter hermitiano de I [13, 2.2]. De hecho, de la fórmula $aI \subseteq I + Ia$

se sigue que $A = \sum_{k\geq 0} Ba^k$. Nótese que $AI^{(1)} \subseteq B$ puesto que para todos $x, y \in I$, se tiene que $Ba^k U_x y \subseteq B\{a^k, x, y\}x + ByU_x a^k \subseteq BII \subseteq B$.

Veamos que A es $*$-ajustada a S. Sea $0 \neq L$ un $*$-ideal de A, entonces $LI^{(1)} \subseteq B$ (porque $AI^{(1)} \subseteq B$) y es un ideal: $ILI^{(1)} + LI^{(1)}I \subseteq LI^{(1)} + L(I^{(1)} \circ I) + LII^{(1)} \subseteq LI^{(1)}$. Como B es *ajustada* a I (la demostración es análoga a la de [82, Lem. 1.5]), entonces o bien $LI^{(1)} = 0$ ó $0 \neq LI^{(1)} \cap I \subseteq L \cap S$. Si $LI^{(1)} = 0$, entonces $L \subseteq \mathrm{an}_R(I^{(1)}R')$ (donde $I^{(1)}R' = R'I^{(1)}$ es el ideal de R generado por $I^{(1)}$ [37, 1.12(i)]). Como $0 \neq I^{(1)}R'$ es un $*$-ideal de R y R es $*$-prima (por ser $*$-ajustada a un álgebra de Jordan fuertemente prima), se tiene que $L = 0$, lo cual es una contradicción. Luego A es $*$-ajustada a S y por tanto una $*$-envolvente asociativa ajustada de S. ■

2.8 Teorema. *Sea J un álgebra de Jordan fuertemente prima sin elementos PI no nulos y R una $*$-envolvente asociativa ajustada de J. Entonces*

$$\mathrm{F}(J) = \mathrm{I}_l(R) \cap J,$$

donde $\mathrm{I}_l(R)$ denota al conjunto de los elementos de R que tienen dimensión uniforme por la izquierda finita. Además, si R es prima, entonces se tiene que $\mathrm{udim}(J_a) = \mathrm{udim}_l(R_a)$ para todo $a \in \mathrm{F}(J)$.

Demostración: Es claro que lo que tenemos que demostrar es que para todo $0 \neq a \in J$, la dimensión uniforme de J_a es finita si, y sólo si, lo es la dimensión uniforme por la izquierda de R_a (ver II.(2.4)), y que de hecho coinciden cuando R es prima.

Obsérvese que $J_a \subseteq H(R_a, *)$, sin embargo, al localizar no se tiene, en general, que R_a sea una $*$-envolvente asociativa ajustada de J_a a pesar de que R lo fuera de J, por lo que no se puede aplicar directamente el principio general (2.6). La estrategia de la demostración va a consistir precisamente en ir reduciendo el problema hasta llegar a una situación en la que podamos aplicar nuestro principio general.

Por (2.7) se tiene que la subálgebra S de J generada por el derivado I de un ideal hermitiano no nulo $\mathcal{H}(J)$ de J y el elemento a, es fuertemente prima de tipo hermitiano y es de la forma $S = H_0(A, *)$, donde A es una

$*$-envolvente asociativa ajustada de S y por tanto $*$-prima.

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, dash] \arrow[d] & H(R,*) \arrow[d] \\ S \arrow[r, dash] & H(A,*) \end{tikzcd}$$

Veamos que la demostración se reduce a establecer la relación entre la dimensión uniforme de S_a y la dimensión uniforme por la izquierda de A_a. Por un lado, se tiene que

$$\mathrm{udim}(J_a) = \mathrm{udim}(S_a),$$

lo cual es una consecuencia directa del hecho de que S_a contiene al ideal $\overline{0} \neq \overline{I}$ de J_a, que es esencial porque J_a es fuertemente prima por la herencia de la primidad fuerte de J [13, 4.1(iii)]. Por otro lado, tenemos que

$$\mathrm{udim}_l(R_a) = \mathrm{udim}_l(A_a),$$

lo que se debe a que $A_a \subseteq R_a \subseteq Q_s(A_a)$, donde A_a es $*$-prima porque $a \in H(A,*)$ y A es $*$-prima, y $Q_s(A_a)$ denota al anillo de cocientes simétrico de Martindale de A_a. Que $A_a \subseteq R_a$ es claro, por otro lado, $R \subseteq Q_s(A)$ porque A contiene a la $*$-subálgebra de R generada por I. Luego, si $\overline{0} \neq \overline{x} \in R_a$, entonces $axa \neq 0$, en particular, existe un $*$-ideal no nulo K de A tal que $xK + Kx \subseteq A$. Claramente $\overline{K}$ es un ideal de A_a, con $\overline{K} \neq \overline{0}$ porque $\mathrm{an}_A(K) = 0$, y dado que $xaK + Kax \subseteq A$, se tiene que $\overline{x}._a\overline{K} + \overline{K}._a\overline{x} \subseteq A_a$, esto es, $R_a \subseteq Q_s(A_a)$ como queríamos.

Nótese que $\mathrm{PI}(S) = 0$. En efecto, pues si $\mathrm{PI}(S) \neq 0$ se tendría por [83, 6.5] que $\mathrm{PI}(A) \neq 0$, de donde se sigue que A satisfacería una IPG [83, 1.1] y entonces $Q_s(A)$ satisfacería la misma IPG (ver [15]) y por tanto también $R \subseteq Q_s(A)$, de aquí, de nuevo por [83, 1.1], se tendría que $\mathrm{PI}(R) \neq 0$, lo cual es una contradicción porque $\mathrm{PI}(R) \cap J = \mathrm{PI}(J) = 0$

La demostración de (2.8) se reduce entonces a probar que la dimensión uniforme de S_a es finita si, y sólo si, lo es la dimensión uniforme por la izquierda de A_a y que de hecho coinciden si R es prima, donde por III.(3.1(1)), se tiene que

$$S_a = H_0(A_a, *),$$

con S_a fuertemente prima por serlo S y tal que $\mathrm{PI}(S_a) = \overline{0}$ por la transitividad de la localización y el hecho de que $\mathrm{PI}(S) = 0$.

Como no tenemos en general que A_a sea una $*$-envolvente asociativa de S_a, consideremos la $*$-subálgebra de A_a generada por S_a, a la que denotaremos por $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$. Veamos que

$$\mathrm{udim}_l(A_a) = \mathrm{udim}_l(\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)).$$

De nuevo, esto va a ser consecuencia directa del hecho de que existe un $*$-ideal no nulo de A_a contenido en $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$. Ésta es la parte más técnica de la prueba y se basa en el siguiente resultado [57, Th. 6.4.2]: si $x\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)x^* \subseteq \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ para todo $x \in A_a$ y A_a no es PI, entonces $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ contiene un $*$-ideal no nulo de A_a. En un razonamiento anterior vimos que $\mathrm{PI}(A) = 0$, de donde se tiene que A_a no es PI. Comprobemos que

$$x\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)x^* \subseteq \mathrm{alg}_{A_a}(S_a),$$

para todo $x \in A_a$. Para ello, es claro que basta comprobar que $xs_1 \cdots s_n x^* \in \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ para cualesquiera $s_i \in S_a$, $i = 1, \cdots, n$, y todo n. Nótese que

$$\begin{aligned} xs_1 \cdots s_n x^* = {} & [x, s_1][s_2 \cdots s_n, x^*] + xs_1x^*s_2 \cdots s_n \\ & + s_1xs_2 \cdots s_nx^* - s_1xx^*s_2 \cdots s_n, \end{aligned}$$

donde $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$, para cualesquiera $x_1, x_2 \in A_a$. Por otro lado se tiene que

$$[s, x] = (sx + (sx)^*) - (x + x^*)s,$$

para todos $s \in S_a$, $x \in A_a$. Entonces, dado que $[\,, x]$, $x \in A_a$, es una derivación asociativa, se tiene que $[\mathrm{alg}_{A_a}(S_a), x] \subseteq \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$. Ahora, utilizando este hecho junto con las fórmulas de arriba y teniendo en cuenta que S_a es un álgebra amplia de $(A_a, *)$, se tiene que el problema de ver que $xs_1 \cdots s_nx^* \in \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ para $s_i \in S_a$, $i = 1, \cdots n$, se reduce a ver que

$xs_2\cdots s_nx^* \in \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ para $s_i \in S_a$, $i = 2, \cdots, n$. Procediendo por recursión, llegamos a reducir el problema a ver que $xs_nx^* \in \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ para $s_n \in S_a$, $x \in A_a$, lo cual es de nuevo una consecuencia de que S_a es un álgebra amplia de $(A_a, *)$.

Luego la demostración de (2.8) se reduce a probar que la dimensión uniforme de S_a es finita si, y sólo si, lo es la dimensión uniforme por la izquierda de $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$, y que de hecho coinciden si R es prima, donde

$$S_a \subseteq H(\mathrm{alg}_{A_a}(S_a), *),$$

con S_a fuertemente prima sin elementos PI no nulos, y, por lo que acabamos de demostrar, $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ conteniendo a un $*$-ideal no nulo T de A_a. Veamos finalmente que $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ es $*$-ajustada a S_a.

Sea K un $*$-ideal de $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ y supongamos que $K \cap S_a = 0$. Dado que S_a es un álgebra amplia de A_a se tiene que $x + x^* = 0$ y $xx^* = 0$ para todo $x \in K$, de donde para todo $x \in K$ y todo $y \in \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ se tiene que $(xy)x = -(xy)^*x = -y^*x^*x = 0$. Luego, en particular, $K \subseteq \mathrm{an}_{A_a}(T) = 0$ y entonces $K = 0$.

Por tanto S_a es fuertemente prima sin elementos PI no nulos y $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ es una $*$-envolvente asociativa ajustada de S_a. Aplicando ahora el principio general (2.6) se tiene que S_a tiene dimensión uniforme finita si, y sólo si, $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ tiene dimensión uniforme por la izquierda finita, y que coinciden si $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ es prima. Obsérvese que si R es prima, entonces $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ también tiene que ser prima, porque de lo contrario existiría un $0 \neq b \in \mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ tal que el ideal de $\mathrm{alg}_{A_a}(S_a)$ generado por b y el generado por b^* tendrían intersección nula, de donde en particular, se seguiría que $bIb^* = 0$ y por tanto R no sería prima por [37, 5.2(ii)], lo que concluye la demostración. ■

2.9 COROLARIO. *Sea J un álgebra de Jordan fuertemente prima.*

(1) *Si* $\mathrm{PI}(J) \neq 0$, *entonces* $\mathrm{LC}(J)$ *es un ideal de* J.

(2) *Si* $\mathrm{PI}(J) = 0$, *entonces* $\mathrm{LC}(J)$ *es un ideal de* J *si* $\mathrm{I}_l(R)$ *es un ideal de* R, *para una* $*$*-envolvente asociativa ajustada* R *de* J.

DEMOSTRACIÓN: (1) es (2.1). (2). Si $\mathrm{LC}(J) = 0$, entonces $\mathrm{LC}(J)$ es trivialmente un ideal de J sin ninguna restricción. Supongamos entonces que $\mathrm{LC}(J) \neq 0$. Por (2.5) se tiene que J es no singular y que $\mathrm{LC}(J) = \mathrm{F}(J)$, de donde, por (2.8), tenemos que $\mathrm{LC}(J) = \mathrm{I}_l(R) \cap J$. Luego si $\mathrm{I}_l(R)$ es un ideal de R, entonces $\mathrm{LC}(J)$ es un ideal de J. ■

2.10 Si J es fuertemente prima y $\mathrm{PI}(J) = 0$, entonces para una $*$-envolvente asociativa ajustada R de J se tiene que $Z_l(R) \cap J = \Theta(J)$ [37, 6.14]. Si J es no singular (por ejemplo si $\mathrm{LC}(J) \neq 0$), entonces $Z_l(R) \cap Z_r(R) = Z_l(R) \cap Z_l(R)^* = 0$ por ser R $*$-ajustada a J, esto es, R es $*$-no singular por la izquierda. En general, no sabemos si bajo estas condiciones se tiene que $\mathrm{I}_l(R)$ es un ideal de R. Sin embargo, si R es prima o la involución es diagonal ($aH_0a^* = 0 \Rightarrow a = 0$ para toda álgebra amplia H_0), entonces R es no singular [37, 6.15] y de aquí se sigue que el conjunto $\mathrm{I}_l(R)$ es un ideal de R [7, Prop. 1], luego $\mathrm{LC}(J)$ es un ideal de J por (2.9).

Apéndice.

POLINOMIOS DE ZELMANOV

El objetivo de este apéndice es demostrar el resultado 1.1 del Capítulo III de esta memoria para el caso lineal, esto es, para el caso en que $1/2 \in \Phi$. La estrategia en el caso cuadrático es la misma pero los cálculos son mucho más complicados. Hemos de aclarar que los resultados que expondremos en este apéndice no son nuevos, aunque tampoco conocemos una referencia explícita para la mayoría de ellos.

—Un polinomio $p \in \mathrm{FSJ}(X)$ se dice que es un *comedor de n-tadas asociativas* si

$$a_1 \cdots a_{n-1} p \in \mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)$$

para cualesquiera $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathrm{FSJ}(X)$, donde $\mathrm{FSJ}(X)$ denota al álgebra de Jordan libre especial (generada por $X \cup \{1\}$ en la simetrizada $\mathrm{As}[X]^J$ de la unitizada del álgebra libre asociativa $\mathrm{As}[X]$ con conjunto de generadores arbitrario X). A los elementos de $\mathrm{FSJ}(X)$ los llamamos *polinomios de Jordan* y a los elementos de $\mathrm{As}[X]$ *polinomios asociativos.*

Denotaremos por $\mathrm{AE}_n(X)$ al conjunto de los comedores de n-tadas asociativas; es claro que $\mathrm{AE}_n(X) \subseteq \mathrm{AE}_{n-1}(X)$. Aunque no se sabe si, en general, los comedores de n-tadas asociativas comen desde cualquier posición, sí que se tiene para casos particulares: si $p \in \mathrm{AE}_4(X)$, entonces $a_1a_2pa_3 = a_1a_2(p \circ a_3) - a_1a_2a_3p \in (\mathrm{FSJ}(X))^3$, puesto que ambos sumandos pertenecen a $(\mathrm{FSJ}(X))^3$; análogamente se ve que p come desde cualquier otra posición en la tetrada y a partir de aquí es fácil comprobar que p es un comedor de tetradas asociativas si y sólo si come tetradas asociativas desde cualquier posición. En [8] se demuestra que un comedor de n-tadas asociativas es, en particular, un comedor de n-tadas. Combinando resultados de [82] y [8], se tiene

0.1 Teorema. *Todo ideal de FSJ(X) contenido en el conjunto de los comedores de tetradas asociativas $AE_4(X)$ es hermitiano.*

Nuestro objetivo va a consistir en encontrar un ideal de $\mathrm{FSJ}(X)$ contenido en $\mathrm{AE}_4(X)$ que posea polinomios de zelmanov y que satisfaga que para cada natural n, una potencia suya suficiente alta sea no nula y coma n-tadas asociativas. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FSJ}(X) \times \mathrm{FSJ}(X) \times \mathrm{FSJ}(X) \times \mathrm{FSJ}(X) & \to & \mathrm{As}[X] \\ (a_1, a_2, a_3, a_4) & \mapsto & a_1a_2a_3a_4, \end{array}$$

Diremos que $q_1 \equiv q_2$ si $q_1 - q_2 \in \mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)$ para $q_1, q_2 \in \mathrm{As}[X]$. Es claro que $p \in \mathrm{AE}_4(X) \Leftrightarrow F(p, \mathrm{FSJ}(X), \mathrm{FSJ}(X), \mathrm{FSJ}(X)) \equiv 0$. Veamos algunas de las propiedades de F.

0.2 Lema. *La aplicación F satisface*

(1) *es multilineal,*

(2) *es alternada,*

(3) *los cuadrados se reparten, i.e., $F(a_1^2, a_2, a_3, a_4) \equiv F(a_1, a_1 \circ a_2, a_3, a_4)$ y análogamente en cualquier otra posición. Linealizando se obtiene*

(3') $F(b_1 \circ b_2, a_2, a_3, a_4) \equiv F(b_1, b_2 \circ a_2, a_3, a_4) + F(b_2, b_1 \circ a_2, a_3, a_4)$.

Demostración: (1) es claro. (2) es consecuencia de que si $a_i = a_j$ para $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, 4$, entonces $F(a_1, a_2, a_3, a_4) \equiv 0$. En efecto, pues $a_i^2 \in \mathrm{FSJ}(X)$, $a_ia_ja_i = U_{a_i}a_j \in \mathrm{FSJ}(X)$ y también $a_ia_ja_ka_i = a_ia_j(a_k \circ a_i) - (a_ia_ja_i)a_k \in (\mathrm{FSJ}(X))^3$ por el caso anterior. Para (3) obsérvese que $a_1^2a_2a_3a_4 = a_1(a_1 \circ a_2)a_3a_4 - a_1a_2a_1a_3a_4$, donde $a_1a_2a_1a_3a_4 \equiv 0$ y utilícese la alternancia de F para repartir el cuadrado en cualquier otra posición. ■

Por simplificación, en lo que sigue vamos a utilizar variables $x, y, z, \cdots$ (en lugar de $a_1, a_2, a_3, \cdots$) para denotar a los polinomios de Jordan; a menos que se indique lo contrario, siempre nos referiremos a elementos genéricos de $\mathrm{FSJ}(X)$.

Utilizando (0.2)(3), se tiene que $F(x, y^2, z^2, t) \equiv F(x \circ y, y, z^2, t) \equiv F((x \circ y) \circ z, y, z, t)$ y también que $F(x, y^2, z^2, t) \equiv F((x \circ z) \circ y, y, z, t)$. Por tanto, $F((x \circ y) \circ z - (x \circ z) \circ y, y, z, t) \equiv 0$. Definimos entonces el polinomio de Jordan (lineal en todas sus variables)

$$D_{y,z}(x) := (x \circ y) \circ z - (x \circ z) \circ y$$

y lo que se tiene es que $F(D_{y,z}(x), y, z, t) \equiv 0$ para todos $x, y, z, t \in \mathrm{FSJ}(X)$.

Es fácil comprobar que $D_{y,z}(x) = [x, [y, z]]$, donde $[x, y] = xy - yx$, y que $D_{y,z}$ actúa como una derivación de Jordan, esto es, $D_{y,z}(x \circ t) = D_{y,z}(x) \circ t + x \circ D_{y,z}(t)$. Nótese que $[x, -]$ es una derivación asociativa y una derivación del *álgebra de Lie* A^- para un álgebra asociativa A. Pero en general $[x, y] \notin \mathrm{FSJ}(X)$, mientras que $[x, [y, z]] \in \mathrm{FSJ}(X)$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathrm{FSJ}(X)$. Estos dobles conmutadores son la clave para construir los polinomios hermitianos.

—Sean $y, z \in \mathrm{FSJ}(X)$ fijos. Consideremos la subálgebra de $\mathrm{FSJ}(X)$ generada por todas estas derivaciones, esto es,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{y,z}(X) := < D_{y,z}(x), x \in \mathrm{FSJ}(X) > .$$

Como consecuencia de (0.2) y de que $F(D_{y,z}(x), y, z, t) \equiv 0$ para todos $x, t \in \mathrm{FSJ}(X)$, se tiene que $F(\mathcal{D}, y, z, t) \equiv 0$. Por otro lado, obsérvese que la variable t es *independiente* de $\{y, z\}$ y por tanto de $\mathcal{D}$. De hecho, se tiene

0.3 LEMA. *$F(\mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, t) \equiv 0$ para todo $t \in \mathrm{FSJ}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (I) $F(D_{y,z}(x), y, z, t) \equiv 0$. Si sustituimos y por $y+c$ en (I), lo que se obtiene es: (I') $F(D_{y,z}(x), c, z, t) \equiv -F(D_{c,z}(x), y, z, t)$. Por otro lado, $F(D_{y,z}(x_1), D_{y,z}(x_2), z, t) \equiv -F(D_{y,z}(x_1), D_{t,z}(x_2), z, y)$ por (I') y también $F(D_{y,z}(x_1), D_{t,z}(x_2), z, y) \equiv 0$ por (I). Por tanto se tiene (II) $F(D_{y,z}(x_1), D_{y,z}(x_2), z, t) \equiv 0$. De nuevo linealizamos $z \mapsto z + c$ y obtenemos (II') $F(D_{y,z}(x_1), D_{y,z}(x_2), c, t) \equiv -F(D_{y,c}(x_1), D_{y,z}(x_2), z, t) -$

$F(D_{y,z}(x_1), D_{y,c}(x_2), z, t)$. Finalmente, $F(D_{y,z}(x_1), D_{y,z}(x_2), D_{y,z}(x_3), t) \equiv -F(D_{y,t}(x_1), D_{y,z}(x_2), D_{y,z}(x_3), z) - F(D_{y,z}(x_1), D_{y,t}(x_2), D_{y,z}(x_3), z)$ por (II'), y esto a su vez es $\equiv 0$ por (II).

Luego $F(D_{y,z}(x_1), D_{y,z}(x_2), D_{y,z}(x_3), t) \equiv 0$, para cualesquiera $x_i, t \in \mathrm{FSJ}(X)$, lo que implica que $F(\mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, t) \equiv 0$ para todo $t \in \mathrm{FSJ}(X)$ por (0.2). ■

Lo que nos interesa para obtener un comedor de tetradas asociativas es ir "liberalizando" variables en la fórmula de arriba.

0.4 Lema. *$F(\mathcal{D}, (D_{y,z}(\mathcal{D}))^2, p, q) \equiv 0$ para todos $p, q \in \mathrm{FSJ}(X)$, donde $(D_{y,z}(\mathcal{D}))^2$ es el Φ-módulo generado por $c_1 \circ c_2$, para $c_1, c_2 \in D_{y,z}(\mathcal{D}) = \{D_{y,z}(u), u \in \mathcal{D}\}$ (nótese que $c^2 = 1/2(c \circ c)$).*

Demostración: Sea $c = D_{y,z}(u)$, $u \in \mathcal{D}$. Veamos que $c \circ \mathrm{FSJ}(X) \subseteq \mathcal{D}$: si $x \in \mathrm{FSJ}(X)$, entonces por ser $D_{y,z}$ una derivación, se tiene $c \circ x = D_{y,z}(u \circ x) - u \circ D_{y,z}(x) \in \mathcal{D}$. En particular, $c \circ p \in \mathcal{D}$, lo que implica por (0.2)(3) y (0.3) que $F(\mathcal{D}, c^2, p, q) \equiv F(\mathcal{D}, c, c \circ p, q) \equiv 0$. Por tanto, si $c_1, c_2 \in D_{y,z}(\mathcal{D})$, entonces $F(\mathcal{D}, c_1 \circ c_2, p, q) = F(\mathcal{D}, (c_1 + c_2)^2, p, q) - F(\mathcal{D}, c_1^2, p, q) - F(\mathcal{D}, c_2^2, p, q) \equiv 0$ por el caso anterior. El resto se sigue por linealidad (0.2)(1). ■

0.5 Proposcición. *Sea $S(X) := (D_{y,z}((D_{y,z}(\mathcal{D}))^2))^2$ el Φ-módulo generado por $c_1 \circ c_2$, con $c_1, c_2 \in \{D_{y,z}(u) : u \in (D_{y,z}(\mathcal{D}))^2\}$, siendo $(D_{y,z}(\mathcal{D}))^2$ el Φ-módulo definido en (0.4). Entonces $S(X) \subseteq \mathrm{AE}_4(X)$.*

Demostración: Hay que comprobar que $F(S(X), p, q, r) \equiv 0$ para cualesquiera $p, q, r \in \mathrm{FSJ}(X)$. Sea $c \in D_{y,z}((D_{y,z}(\mathcal{D}))^2)$. Como $D_{y,z}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es una subálgebra de $\mathrm{FSJ}(X)$, se tiene que $(D_{y,z}(\mathcal{D}))^2 \subseteq \mathcal{D}$, y consecuentemente $D_{y,z}((D_{y,z}(\mathcal{D}))^2) \subseteq D_{y,z}(\mathcal{D})$. Luego $c \in D_{y,z}(\mathcal{D})$ y por lo demostrado en (0.4), se tiene que $c \circ \mathrm{FSJ}(X) \subseteq \mathcal{D}$. Por otro lado, veamos que $c \in (D_{y,z}(\mathcal{D}))^2$: dado que $D_{y,z}$ es lineal y $(D_{y,z}(\mathcal{D}))^2$ es un Φ-módulo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c = D_{y,z}(c_1 \circ c_2)$ con $c_1, c_2 \in D_{y,z}(\mathcal{D})$, y en este caso se tiene que $c = D_{y,z}(c_1) \circ c_2 + c_1 \circ D_{y,z}(c_2) \in (D_{y,z}(\mathcal{D}))^2$. Entonces, por (0.2)(3) $F(c^2, p, q, r) \equiv F(c, c \circ p, q, r) \equiv 0$ por (0.4), puesto que $c \in (D_{y,z}(\mathcal{D}))^2$ y $c \circ p \in \mathcal{D}$ y por un razonamiento análogo al hecho en (0.4) se tiene que $F(c_1 \circ c_2, p, q, r) \equiv 0$, para $c_1, c_2 \in D_{y,z}((D_{y,z}(\mathcal{D}))^2)$. De nuevo el resto se sigue de (0.2)(1). ■

0.6 LEMA. *$S(H_3(\Phi)) = H_3(\Phi)$, donde $H_3(\Phi) = H(M_3(\Phi), t)$ es el álgebra de Jordan especial de las matrices 3×3 sobre Φ simétricas con respecto a la transposición, y $S(H_3(\Phi))$ es la evaluación de $S(X)$ en $H_3(\Phi)$.*

DEMOSTRACIÓN: $H_3(\Phi)$ está generado como Φ-módulo por los elementos $\{e_{11}, e_{22}, e_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\}$, donde e_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, es la matriz que tiene todos sus términos cero salvo el del lugar ij que es 1, y $u_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Sean $y = u_{13}$, $z = u_{12}$. Es un simple cálculo comprobar que $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{u_{13},u_{12}}(H_3(\Phi)) =< D_{u_{13},u_{12}}(m) : m \in H_3(\Phi) >=< u_{12}, u_{13}, u_{23}, e_{22} - e_{33} >$, luego en $\mathcal{D}$ están todos los productos Jordan de estos elementos, en particular, $u_{12}^2 = 2(e_{11} + e_{22}) \in \mathcal{D} \Rightarrow U_{(e_{11}+e_{22})}(e_{22} - e_{33}) = e_{22} \in \mathcal{D} \Rightarrow e_{33} \in \mathcal{D}$ y $e_{11} \in \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ contiene a todos los generadores de $H_3(\Phi)$, se tiene que $\mathcal{D} = H_3(\Phi)$. Lo siguiente es calcular $(D_{u_{13},u_{12}}(\mathcal{D}))^2 = (D_{u_{13},u_{12}}(\mathrm{H}_3(\Phi)))^2$. Tras completar los cálculos se obtiene que $(D_{u_{13},u_{12}}(\mathcal{D}))^2$ es el Φ-módulo generado por $\{e_{11} + e_{22}, e_{11} + e_{33}, e_{22} + e_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\}$. De nuevo, se calcula $D_{u_{13},u_{12}}((D_{u_{13},u_{12}}(\mathcal{D}))^2)$ que resulta ser el Φ-módulo generado por $\{e_{22} - e_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\}$ y finalmente el cuadrado de éste, quedando que $S(H_3(\Phi))$ es el Φ-módulo generado por $\{e_{11} + e_{22}, e_{11} + e_{33}, e_{22} + e_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\}$. De nuevo, $S(H_3(\Phi))$ contiene a todos los generadores de $H_3(\Phi))$, y por tanto $S(H_3(\Phi)) = H_3(\Phi)$. ■

0.7 $\mathrm{AE}_4(H_3(\Phi)) = H_3(\Phi)$ (dado que $S(X) \subseteq \mathrm{AE}_4(X)$ y $S(H_3(\Phi)) = H_3(\Phi)$, se tiene que $H_3(\Phi) \subseteq \mathrm{AE}_4(H_3(\Phi)))$.

0.8 PROPOSICIÓN. *$S(X) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: El lema (0.6) implica que $S(H_3(\Phi)) \neq 0$ y por tanto que en $S(X)$ existen polinomios que no son *s-identidades*, esto es, que no se anulan en todas las álgebras de Jordan especiales (puesto que $H_3(\Phi) = H(M_3(\Phi), t)$ es especial). Teniendo en cuenta que $\mathrm{FSJ}(X)$ hace de objeto libre en la variedad de las álgebras de Jordan *i-especiales* (aquéllas que son cocientes de una especial, equivalentemente, que satisfacen todas las s-identidades), el hecho de que en $S(X)$ existan polinomios que no son s-identidades implica que $S(X) \neq 0$. ■

—Un polinomio $p \in \mathrm{FSJ}(X)$ se dice que es *de clifford* si no se anula en el álgebra de Jordan especial $H_3(\Phi) = H(M_3(\Phi), t)$. Si p es un polinomio de clifford, no sólo no se anula en $H_3(\Phi)$ sino que tampoco se anula en cualquier álgebra que contenga una copia de $H_3(\Phi)$ o que tenga una extensión que a su vez contenga una copia de $H_3(\Phi)$. Como consecuencia, un polinomio de clifford no se anula en un álgebra de Jordan que tenga tres o más idempotentes "interconectados" (dos idempotentes $e_1, e_2 \in J$ ortogonales, esto es, $e_1 \circ e_2 = 0 = U_{e_1}e_2$, se dice que están *interconectados* si existe $u_{12} \in U_{e_1,e_2}J$ que es inversible en el álgebra de Jordan $U_{e_1+e_2}J$).

Como hemos visto en (0.6), en $S(X)$ existen polinomios de clifford. Por otro lado, si $S(X)$ fuera un ideal de $\mathrm{FSJ}(X)$, se tendría por (0.1) que $S(X)$ sería un ideal hermitiano. Por tanto en $S(X)$ existirían polinomios hermitianos que además serían de clifford, esto es, polinomios de zelmanov. El problema es que en principio ni siquiera se puede asegurar que $\mathrm{AE}_4(X)$ contenga algún ideal no nulo de $\mathrm{FSJ}(X)$. La situación se restablece considerando comedores de pentadas asociativas. Recordemos que si $p \in \mathrm{AE}_5(X)$, entonces $p \in \mathrm{AE}_4(X)$ y además come tetradas asociativas desde cualquier posición.

0.9 PROPOSICIÓN. $\mathrm{AE}_5(X)$ *es un ideal de* $\mathrm{FSJ}(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Para ver que $\mathrm{AE}_5(X) \triangleleft \mathrm{FSJ}(X)$ basta comprobar que $\mathrm{AE}_5(X) \circ \mathrm{FSJ}(X) \subseteq \mathrm{AE}_5(X)$. Recordemos que dos polinomios asociativos $q_1 \equiv q_2$ si $q_1 - q_2 \in \mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)$. Sean $p \in \mathrm{AE}_5(X)$, $y \in \mathrm{FSJ}(X)$. Entonces para cualesquiera $y_1, \cdots, y_4 \in \mathrm{FSJ}(X)$ se tiene que $y_1y_2y_3y_4yp = y_1y_2y_3(y_4 \circ y)p - y_1y_2y_3yy_4p \equiv -y_1y_2y_3yy_4p$ pues $y_1y_2y_3(y_4 \circ y)p \equiv 0$ dado que $p \in \mathrm{AE}_5(X)$. Repitiendo este mismo razonamiento, se tiene $-y_1y_2y_3yy_4p \equiv y_1y_2yy_3y_4p \equiv -y_1yy_2y_3y_4p \equiv yy_1y_2y_3y_4p$. Por otro lado se tiene $yy_1y_2y_3y_4p = y\{y_1y_2y_3y_4p\} - ypy_4y_3y_2y_1 \equiv -ypy_4y_3y_2y_1 = -\{ypy_4y_3\}y_2y_1 + y_3y_4pyy_2y_1 \equiv y_3y_4pyy_2y_1 = y_3\{y_4pyy_2\}y_1 - y_3y_2ypy_4y_1 \equiv -y_3y_2ypy_4y_1 = -y_3y_2\{ypy_4y_1\} + y_3y_2y_1y_4py \equiv y_3y_2y_1y_4py = \{y_3y_2y_1\}y_4py$ $-y_1y_2y_3y_4py \equiv -y_1y_2y_3y_4py$. Luego $y_1y_2y_3y_4yp \equiv -y_1y_2y_3y_4py$, esto es, $y_1y_2y_3y_4(p \circ y) \equiv 0$, y por tanto $p \circ y \in \mathrm{AE}_5(X)$. ■

0.10 De hecho, se tiene que en general $\mathrm{AE}_n(X) \triangleleft \mathrm{FSJ}(X)$ para todo n impar [8, 2.7]. Como consecuencia, un comedor de n-tadas asociativas para n impar come desde cualquier posición. Veámoslo para $n = 5$: sean $p \in \mathrm{AE}_5(X)$, $y_1, \cdots, y_4 \in \mathrm{FSJ}(X)$ cualesquiera. Entonces $y_1y_2y_3py_4 = y_1y_2y_3(p \circ y_4) - y_1y_2y_3y_4p \equiv 0$ puesto que $p \circ y_4 \in \mathrm{AE}_5(X) \subseteq \mathrm{AE}_4(X)$ (porque $p \in \mathrm{AE}_5(X) \triangleleft \mathrm{FSJ}(X)$). Análogamente se comprueba para cualquier otra posición de p en la pentada. La demostración en el caso $n > 5$ impar es similar.

Luego $\mathrm{AE}_5(X)$ es un ideal de $\mathrm{FSJ}(X)$ contenido en $\mathrm{AE}_4(X)$, lo que implica por (0.1) que todo comedor de pentadas asociativas va a ser un polinomio hermitiano. Veamos que también se tiene que $\mathrm{AE}_5(X) \neq 0$.

0.11 Proposición. $0 \neq [[AE_4(X),AE_4(X)],AE_4(X)] \subseteq AE_5(X)$, *donde* $[a,b] = ab - ba$, $a, b \in \mathrm{As}[X]$ *y en* $[[AE_4(X),AE_4(X)],AE_4(X)]$ *existen polinomios de clifford.*

Demostración: Sean $a, b \in \mathrm{AE}_4(X)$. Veamos que para cualesquiera $y_1, \cdots, y_4 \in \mathrm{FSJ}(X)$, se tiene que $y_1y_2y_3y_4ab \equiv y_1y_2y_3y_4ba$. En efecto, pues $y_1y_2y_3y_4ab = y_1\{y_2y_3y_4ab\} - y_1bay_4y_3y_2 \equiv -y_1bay_4y_3y_2$ (puesto que $a, b \in \mathrm{AE}_4(X)$ implica que $y_2y_3y_4a \equiv 0$ y $(y_2y_3y_4a)b \equiv 0$ y entonces $y_1\{y_2y_3y_4ab\} \in \mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)$ por lo que $y_1\{y_2y_3y_4ab\} \equiv 0$). Repitiendo el mismo proceso sucesivas veces se tiene que $-y_1bay_4y_3y_2 = -y_1b\{ay_4y_3y_2\}$ $+y_1by_2y_3y_4a \equiv y_1by_2y_3y_4a = y_1\{by_2y_3y_4\}a - y_1y_4y_3y_2ba \equiv -y_1y_4y_3y_2ba = -y_1\{y_4y_3y_2\}ba + y_1y_2y_3y_4ba \equiv y_1y_2y_3y_4ba$. Luego $y_1y_2y_3y_4ab \equiv y_1y_2y_3y_4ba$. En general, aunque $[a,b] = ab - ba \notin \mathrm{FSJ}(X)$, se tiene que $[[a,b],c] = (c \circ b) \circ a - (c \circ a) \circ b \in \mathrm{FSJ}(X)$ para todos $a, b, c \in \mathrm{FSJ}(X)$. Entonces, por lo que acabamos de ver $y_1y_2y_3y_4[[a,b],c] \equiv 0$ para todos $a, b, c \in \mathrm{AE}_4(X)$, esto es, $[[\mathrm{AE}_4(X),\mathrm{AE}_4(X)],\mathrm{AE}_4(X)] \subseteq \mathrm{AE}_5(X)$.

Por otro lado, dado que $\mathrm{AE}_4(H_3(\Phi)) = H_3(\Phi)$ (0.7), se tiene que $u_{12}, u_{13} \in \mathrm{AE}_4(H_3(\Phi))$ (donde u_{12}, u_{13} son los definidos en (0.6)). Haciendo los cálculos, resulta $[[u_{12}, u_{13}], u_{13}] = u_{12} \neq 0$ lo que implica que $[[\mathrm{AE}_4(X),\mathrm{AE}_4(X)],\mathrm{AE}_4(X)] \neq 0$ (por el mismo razonamiento que en (0.8)) y que $[[\mathrm{AE}_4(X),\mathrm{AE}_4(X)],\mathrm{AE}_4(X)]$ posee polinomios de clifford. $\blacksquare$

0.12 De hecho se tiene que $\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi)) = H_3(\Phi)$: dado que $u_{12} = [[u_{12}, u_{13}], u_{13}] \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))$ y que $\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))$ es un ideal de $H_3(\Phi)$ (0.9), se tienen las siguientes series de implicaciones: $u_{12}^2 = e_{11} + e_{22} \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi)) \Rightarrow U_{e_{11}}(e_{11} + e_{22}) = e_{11} \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi)) \Rightarrow e_{22} \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))$; $u_{12} \circ u_{13} = u_{23} \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi)) \Rightarrow u_{23}^2 = e_{22} + e_{33} \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi)) \Rightarrow e_{33} \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi)) \Rightarrow 1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} \in \mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))$, y esto finalmente implica que $\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi)) = H_3(\Phi)$. Nótese que si Φ fuera un cuerpo, el resultado sería inmediato puesto que $\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))$ sería un ideal no nulo del álgebra simple $H_3(\Phi)$.

0.13 Corolario. *$0 \neq \mathcal{H}(X) := \mathrm{AE}_5(X)$ es un ideal hermitiano de $\mathrm{FSJ}(X)$ que posee polinomios de zelmanov.*

Demostración: Es consecuencia de (0.1), (0.9) y (0.11). ■

En general, la noción de comedor de n-tadas asociativas para un cierto $n > 5$ puede ser una herramienta clave para resolver problemas técnicos (véase [14]). Veamos a continuación como, para cada n, una potencia suficientemente alta de $\mathrm{AE}_5(X)$ no se anula y come n-tadas asociativas.

0.14 Proposición. *$0 \neq \mathrm{AE}_5(X)^n \subseteq \mathrm{AE}_{n+4}(X)$ para todo n impar.*

Demostración: Veamos primero que $\mathrm{AE}_5(X)^n \subseteq \mathrm{AE}_{n+4}(X)$ para n impar. Lo haremos por inducción sobre n: es trivial para $n = 1$ (pues lo único que dice es $\mathrm{AE}_5(X) \subseteq \mathrm{AE}_5(X)$). Supongamos el resultado cierto para $n-2$ y demostrémoslo para n, con $n \geq 3$. Nótese que para $n \geq 3$, claramente se tiene que $\mathrm{AE}_5(X)^n = U_{\mathrm{AE}_5(X)}\mathrm{AE}_5(X)^{n-2}$, luego basta demostrar que $U_c d \in \mathrm{AE}_{n+4}(X)$ para cualesquiera $c \in \mathrm{AE}_5(X)$ y $d \in \mathrm{AE}_5(X)^{n-2}$. Sean entonces $c \in \mathrm{AE}_5(X)$, $d \in \mathrm{AE}_5(X)^{n-2}$ y cualesquiera $y_1, \cdots, y_{n+3} \in \mathrm{FSJ}(X)$. Se tiene que $y_1 y_2 \cdots y_n y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3} cdc \subseteq y_1 \cdots y_{n-1}\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)dc$. Por nuestra hipótesis de inducción se tiene que $d \in \mathrm{AE}_{n+2}(X)$, de donde se sigue que $y_1 \cdots y_{n-1}\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)dc \subseteq y_1\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)c$ y esto a su vez está contenido en $\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)\mathrm{FSJ}(X)$ porque $c \in \mathrm{AE}_5(X)$. Luego $U_c d \in \mathrm{AE}_{n+4}(X)$ como queríamos.

Veamos ahora que $\mathrm{AE}_5(X)^n \neq 0$ para todo n impar. De hecho esto es una consecuencia de que

$$\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))^n = H_3(\Phi)$$

para n impar. De nuevo lo demostramos por inducción sobre n: para $n = 1$, se ha demostrado en (0.12). Supongamos que $\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))^{n-2} = H_3(\Phi)$, $n \geq 3$. Entonces $\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))^n = U_{\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))}\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))^{n-2} = U_{H_3(\Phi)}H_3(\Phi)$. En particular, puede comprobarse que $e_{11} = U_{u_{12}}e_{22}$, $e_{22} = U_{u_{12}}e_{11}$ y $e_{33} = U_{u_{13}}e_{11}$ por lo que $1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} \in U_{H_3(\Phi)}H_3(\Phi) = H_3(\Phi) \star H_3(\Phi) \triangleleft H_3(\Phi)$, luego $U_{H_3(\Phi)}H_3(\Phi) = H_3(\Phi)$, y por tanto $\mathrm{AE}_5(H_3(\Phi))^n = H_3(\Phi)$. ■

MENU SALIR

REFERENCIAS

[1] J.C. Alexander, *Compact Banach algebras*, Proc. London Math. Soc. **18** (1968) 1-18.

[2] W. Ambrose, *Structure theorems for a special class of Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945) 364-386.

[3] S.A. Amitsur, *Generalized polynomial identities and pivotal monomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965) 210-226.

[4] S.A. Amitsur, *Rings of quotients and Morita contexts*, J. Algebra **17** (1971) 273-298.

[5] P.N. Ánh and L. Márki, *Left orders in regular rings with minimum condition for principal one-sided ideals*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109** (1991) 323-333.

[6] P.N. Ánh and L. Márki, *On Martindale's theorem*, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996) 481-483.

[7] P.N. Ánh and L. Márki, *Orders in primitive rings with non-zero socle and Posner's theorem*, Comm. Algebra **24** (1996) 289-294.

[8] J.A. Anquela, M. Cabrera and A. Moreno, *Eater ideals in Jordan algebras*, J. Pure and Applied Algebra **125** (1998) 1-17.

[9] J.A. Anquela and T. Cortés, *Primitive Jordan pairs and triple systems*, J. Algebra **184** (1996) 632-678.

[10] J.A. Anquela, T. Cortés and E. García, *Herstein's theorems and simplicity of hermitian Jordan systems*, J. Algebra **246** (2001) 193-214.

[11] J.A. Anquela, T. Cortés, K. McCrimmon and F. Montaner, *Strong primeness of Hermitian Jordan Systems*, J. Algebra **198** (1997) 311-326.

[12] J.A. Anquela, T. Cortés, K. McCrimmon and F. Montaner, *On maximal modular inner ideals in Quadratic Jordan algebras*, Nova J. Algebra and Geometry (2) **2** (1993) 181-199.

[13] J.A. Anquela, T. Cortés and F. Montaner, *Local inheritance in Jordan algebras*, Arch. Math. **64** (1995) 393-401.

[14] J.A. Anquela, T. Cortés and F. Montaner, *The structure of primitive quadratic Jordan algebras*, J. Algebra **172** (1995) 530-553.

MENU SALIR

[15] K.I. Beidar, W.I. Martindale, A.V. Mikhalev, *Rings with generalized identities*, Marcel Dekker, New York Basel Hong Kong, 1976.

[16] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, AMS colloq. Publ., vol. 25, Third ed., New York, 1967.

[17] F.F. Bonsall and A.W. Goldie, *Annihilator algebras*, Proc. London Math. Soc. **4** (1954) 154-167.

[18] K. Bouhya and A. Fernández López, *Jordan *-triples with minimal inner ideals and compact JB*-triples*, Proc. London Math. Soc. **68** (1994) 380-398.

[19] L. Bunce, *The theory and structure of Dual JB-algebras*, Math. Z. **180** (1982) 525-534.

[20] L. Bunce and C.H. Chu, *Compact operations, multipliers and Radon-Nikodym property in JB*-triples*, Pacific. J. Math. **153** (1992) 249-265.

[21] A. Castellón, A. Fernández López, A. García Martín and C. Martín González, *Strongly prime alternative pairs with minimal inner ideals*, Manus. Math. **90** (1996) 479-487.

[22] P.M. Cohn, *Algebra (Volume 3)*, John Wiley and Sons, 1991.

[23] J.A. Cuenca Mira, A. García Martín and C. Martín González, *Jacobson density for associative pairs and its applications*, Comm. Algebra **17** (1989) 2595-2610.

[24] J.A. Cuenca and A. Rodríguez Palacios, *Structure theory for noncommutative Jordan H*-álgebras*, J. Algebra **106** (1987) 1-14.

[25] A. D'Amour, *Quadratic Jordan systems of Hermitian type*, J. Algebra **149** (1992) 197-233.

[26] A. D'Amour and K. McCrimmon, *The local algebras of Jordan systems*, J. Algebra **177** (1995) 199-239.

[27] A. D'Amour and K. McCrimmon, *Jordan systems of Clifford type*, J. Algebra **234** (2000) 31-89.

[28] I.P. De Guzmán, *Structure theorems for alternative H*-álgebras*, Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc. **94** (1983) 437-446.

[29] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland Math. Library, vol.15, 1982.

MENU SALIR

[30] A. Fernández López, *Prime nondegenerate Jordan algebras with nonzero socle and the symmetric Martindale algebra of quotients*, Collect. Math. **39** (1988) 249-256.

[31] A. Fernández López and E. García Rus, *Compact associative B^*-triple systems*, Quart. J. Math. Oxford **41** (1990) 61-69.

[32] A. Fernández López and E. García Rus, *Prime associative triple systems with non-zero socle*, Comm. Algebra **18** (1990) 1-13.

[33] A. Fernández López and E. García Rus, *Prime Jordan algebras satisfying local Goldie conditions*, J. Algebra **174** (1995) 1024-1048.

[34] A. Fernández López and E. García Rus, *Algebraic lattices and nonassociative structures*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998) 3211-3221.

[35] A. Fernández López and E. García Rus, *Inner ideals in quadratic Jordan algebras of infinite capacity*, Int. J. Math. Game Theory Algebra **9** (1999) 35-54.

[36] A. Fernández López, E. García Rus, M. Gómez and M. Siles, *Goldie theorems for associative pairs*, Comm. Algebra **26** (1998) 2987-3020.

[37] A. Fernández López, E. García Rus and F. Montaner, *Goldie theory for Jordan algebras*, J. Algebra **248** (2002) 397-471.

[38] A. Fernández López, E. García Rus and F. Montaner, *Goldie theory for Jordan pairs* (en preparación).

[39] A. Fernández López, E. García Rus and E. Sánchez Campos, *Von Neumann regular Jordan Banach triple systems*, J. London Math. Soc. **42** (1990) 32-48.

[40] A. Fernández López, E. García Rus and E. Sánchez Campos, *Prime nondegenerate Jordan triple systems with minimal inner ideals*, En “Nonassociative Algebraic Models”, S. González and H.C. Myung (Ed.), Nova science (1999) 143-163.

[41] A. Fernández López, E. García Rus, E. Sánchez and M. Siles, *Strong regularity and generalized inverses in Jordan systems*, Comm. Algebra **20** (1992) 1917-1936.

[42] A. Fernández López and A. Rodríguez Palacios, *A Wedderburn theorem for nonassociative complete normed algebras*, J. London Math. Soc. **33** (1986) 328-338.

[43] A. Fernández López and M.I. Tocón Barroso, *Pseudocomplemented semilattices, Boolean algebras, and compatible products*, J. Algebra **242** (2001) 60-91.

[44] A. Fernández López and M.I. Tocón Barroso, *The local algebras of an associative algebra and their applications*, En "Applicable Mathematics in the Golden age", J.C. Misra (Ed.), Narosa (2002) 254-275.

[45] A. Fernández López and M.I. Tocón Barroso, *Strongly prime Jordan pairs with nonzero socle* (preprint).

[46] J. Fountain and V. Gould, *Orders in rings without identity*, Comm. Algebra **18** (1990) 3085-3110.

[47] J. Fountain and V. Gould, *Orders in regular rings with minimal condition for principal right ideals*, Comm. Algebra **19** (1991) 1501-1527.

[48] O. Frink, *Representations of Boolean algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 755-756.

[49] O. Frink, *Pseudo-complements in semilattices*, Duke Math. **29** (1962) 505-514.

[50] M. Gómez and M. Siles, *Quotient rings and Fountain-Gould left orders by the local approach*, Acta Math. Hungar. (en prensa).

[51] K.R. Goodearl, *Ring theory: Nonsingular rings and modules*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1976.

[52] K. R. Goodearl and F. Wehrung, *Representations of distributive semilattices in ideal lattices of various algebraic structures*, Algebra Universalis (1) **45** (2001) 71-102.

[53] V. Gould, *Semigroups of left quotients-the uniqueness problem*, Proc. Edimburgh Math. Soc. (2) **35** (1992) 213-226.

[54] G. Grätzer, *General lattice theory*, Birkhäuser Verlag, 1991.

[55] H. Hanche-Olsen and E. Stormer, *Jordan operators algebras*, Pitman Publishing, 1984.

MENU SALIR

[56] I.N. Herstein, *Noncommutative Rings*, The Carus Mathematical Monographs, vol. 15, The Amer. Math. Ass., 1968.

[57] I.N. Herstein, *Rings with involution*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1976.

[58] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[59] N. Jacobson, *Structure of rings*, AMS colloq. Publ., vol. 37, Providence R.I., 1964.

[60] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, AMS colloq. Publ., vol. 34, Providence R.I., 1968.

[61] N. Jacobson, *Structure theory of Jordan algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, University of Arkansas, Fayetteville, 1981.

[62] B. E. Johnson, *A commutative semi-simple Banach algebra which is not dual*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 407-409.

[63] I. Kaplansky, *Dual rings*, Ann. Math. **49** (1948) 689-711.

[64] I. Kaplansky, *Selected papers and other writings*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[65] K. Keimel, *A unified theory of minimal prime ideals*, Acta Math. Acad. Sci. **23** (1972) 51-69.

[66] T.Y. Lam, *A first course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 131, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[67] T.Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 189, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999.

[68] J. Lambeck, *Lectures on Rings and Modules*, Chealsea Publishing Company, New York, 1976.

[69] M.S. Lambrou, *Nontrivially pseudocomplemented lattices are complemented*, Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1979) 55-56.

[70] O. Loos, *Jordan pairs*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 460, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1975.

[71] O. Loos, *On the socle of a Jordan pair*, Collect. Math. **40** (1989) 109-125.

MENU SALIR

[72] O. Loos, *Diagonalization in Jordan pairs*, J. Algebra **143** (1991) 252-268.

[73] O. Loos, *Finiteness conditions in Jordan pairs*, Math. Z. **206** (1991) 577-587.

[74] W.S. Martindale, *Prime rings satisfying a generalized polinomial identity*, J. Algebra **12** (1969) 576-584.

[75] C. Martínez, *The ring of fractions of a Jordan algebra*, J. Algebra **237** (2001) 798-812.

[76] K. McCrimmon, *Inner ideals in quadratic Jordan algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **159** (1971) 445-468.

[77] K. McCrimmon, *The Zelmanov annihilator and nilpotence of the nil radical in quadratic Jordan algebras with chain conditions*, J. Algebra **67** (1980) 230-253.

[78] K. McCrimmon, *Zelmanov's Prime Theorem for Quadratic Jordan Algebras*, J. Algebra **76** (1982) 297-326.

[79] K. McCrimmon, *Strong prime inheritance in Jordan systems*, Algebra, Groups and Geometries **1** (1984) 217-234.

[80] K. McCrimmon, *A characterization of the nondegenerate radical in quadratic Jordan triple systems*, Algebra, Groups and Geometries **4** (1987) 145-146.

[81] K. McCrimmon, *Martindale systems of symmetric quotients*, Algebra, Groups and Geometries **6** (1989) 153-237.

[82] K. McCrimmon and E. Zel'manov, *The structure of strongly prime Quadratic Jordan Algebras*, Advances in Math. **69** (1988) 133-222.

[83] F. Montaner, *Local PI theory of Jordan systems*, J. Algebra **216** (1999) 302-327.

[84] F. Montaner, *Local PI theory of Jordan systems II*, J. Algebra **241** (2001) 473-514.

[85] A. Moreno Galindo and A. Rodríguez Palacios, *On the zelmanovian classification of prime JB^*-triples*, J. Algebra **226** (2000) 577-613.

[86] E. Neher, *Jordan triple systems by the Grid approach*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1280, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

MENU SALIR

[87] J.M. Osborn and M.L. Racine, *Jordan rings with non-zero socle*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979) 375-387.

[88] S. Pchelintsev, *An example of a prime Jordan algebra generated by absolute zero divisors*, En Proc. 17th All-Union Algebra Conference (1983) 158.

[89] D. Ponasse and J. C. Carrega, *Algèbre et topologie Boolèennes*, Masson, Paris, 1979.

[90] A. Rodríguez Palacios, *Jordan structures in Analysis*, En "Jordan algebras" (Oberwolfach, 1992), Walter de Gruyter, Berlin-New York (1994) 97-186.

[91] J. Rosický, *Multiplicative lattices and frames*, Acta Math. Hung. **49** (1987) 391-395.

[92] L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York, 1980.

[93] L.H. Rowen, *Ring Theory*, Academic Press, New York, 1988.

[94] B. Russo, *Structure of JB^*-triples*, En "Jordan algebras" (Oberwolfach, 1992), Walter de Gruyter, Berlin-New York (1994) 209-280.

[95] R.D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1966.

[96] J.R. Schue, *Hilbert space methods in the theory of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960) 69-80.

[97] M.F. Smiley, *Right annihilator algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955) 698-701.

[98] D.W.B. Somerset, *Minimal primal ideals in rings and Banach algebras*, J. Pure Appl. Algebra **144** (1999) 67-89.

[99] A. Thedy, *Z-closed ideals of quadratic Jordan algebras*, Comm. Algebra **13** (1985) 2537-2565.

[100] M.I. Tocón Barroso, *Álgebras locales en la teoría de pares asociativos*, Memoria de Licenciatura, Universidad de Málaga, 2000.

[101] B.J. Tomiuk, *Structure theory of complemented Banach algebras*, Canad. J. Math. **14** (1962) 651-659.

[102] C. Viola Devapakkiam, *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras I*, Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc. **78** (1975) 293-300.

[103] B. Yood, *Closed prime ideals in topological rings*, Proc. London Math. Soc. **24** (1972) 307-323.

[104] E. Zel'manov, *On Prime Jordan Algebras*, Algebra i Logika **18** (1979) 162-175.

[105] E. Zel'manov, *On Prime Jordan Algebras II*, Siberian Math. J. **24** (1983) 89-104.

[106] E. Zel'manov, *On Prime Jordan triple systems I; II; III*, Siberian Math. J. **24** (1983) 23-67; **25** (1984) 42-49; **26** (1985) 71-82.

[107] E. Zel'manov, *Goldie's theorem for Jordan algebras; II*, Siberian Math. J. **28** (1987) 44-52; **29** (1988) 68-74.

[108] K.A. Zhevlakov, A.M. Slinko, I.P. Shestakov and A.I. Shirshov, *Rings that are Nearly Associative*, Academic Press, New York, 1982.

GLOSARIO