CONVERGENCIA DE SERIES E INTEGRALES DE FOURIER: UNA HISTORIA INTERMINABLE

JAVIER DUOANDIKOETXEA

El estudio de la representación de una función por una serie trigonométrica comenzó hace 200 años con los trabajos de Fourier. Los resultados clásicos del siglo XIX establecieron criterios de convergencia (Dirichlet, Lipschitz, Dini, Jordan), pero también se demostró la existencia de funciones continuas con serie de Fourier divergente en un punto. Finalmente, los métodos de sumabilidad (Féjer) mostraron que, aplicados al caso de funciones continuas, la función se recupera como límite uniforme.

Al principio del siglo XX, el análisis matemático sufrió una importante transformación que condujo a plantear el problema en nuevos términos entre los que destacamos la convergencia en la norma de L^p y la convergencia en casi todo punto. Los resultados más notables en una dimensión son debidos a Kolmogorov (una función integrable con serie de Fourier divergente en todo punto), a M. Riesz (convergencia en L^p para $1 < p < \infty$) y a Carleson-Hunt (convergencia en casi todo punto para funciones en L^p con $1 < p \leq \infty$).

El estudio de las mismas cuestiones en dimensiones mayores presenta problemas que aún no están completamente resueltos. Un caso especialmente interesante es el de la convergencia y sumabiidad esféricas.

La cuestión de la convergencia esférica en L^p quedó cerrada por el resultado de Ch. Fefferman (1971) que afirma que el multiplicador de la bola solo está acotado en L^2. Sin embargo, el problema de la convergencia en casi todo punto sigue abierto para p entre 2 y $2n/(n-1)$.

La sumabilidad esférica corresponde a los operadores de Bochner-Riesz, cuyo estudio se inició en los años 1930. Bochner identificó el índice crítico, $(n-1)/2$, por encima del cual la solución es satisfactoria tanto en norma como en casi todo punto. Por debajo del índice crítico aparecieron en los años 1950 un rango de resultados negativos (Herz) y un primer rango de resultados positivos alrededor de $p = 2$, obtenido por Stein a través de la interpolación analítica de operadores.

En dimensión dos la acotación en norma del operador de Bochner-Riesz en todo el rango posible fue probada por Carleson-Sjölin (1972) y, posteriormente, nuevas pruebas fueron dadas por Hörmander, Fefferman y Córdoba. En la misma época se probaron resultados parciales en dimensiones mayores usando el teorema de restricción de la transformada de Fourier.

Durante un tiempo no hubo avances en dimensión superior a dos, hasta que nuevos resultados sobre la función maximal de Kakeya y, posteriormente, estimaciones bilineales condujeron a mejoras del rango debidas a Bourgain, Wolff, Tao-Vargas-Vega, Lee y Bourgain-Guth, aunque en ningún caso se ha conseguido un resultado completo para dimensión 3 o superior.

En cuanto al problema de la convergencia en casi todo punto un resultado importante fue obtenido por Carbery-Rubio de Francia-Vega (1988), quienes lo probaron en el rango óptimo para $p \geq 2$ utilizando desigualdades con pesos potencia. Para $p < 2$ hay que señalar un resultado negativo de Tao, que excluye valores del rango conjeturado hasta entonces, rompiendo la esperada simetría del resultado alrededor de $p = 2$. Por otra parte, Tao también probó ciertos resultados positivos en dos dimensiones para $p < 2$ fuera del rango de Stein, lo que constituye el único resultado de ese tipo actualmente conocido en cualquier dimensión.

Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea