



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA



ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

Asignatura: Trabajo Fin de Máster

Curso: 24/25

Simulación Numérica de un Flujo Desprendido sobre una Rampa Redondeada

Autor: Carlos Bernal Mozas

Tutor: Luis Parras Anguita

Tutor: Eduardo Durán Venegas

Titulación: Máster en Ingeniería Industrial

Málaga, 5 de septiembre de 2025

*A mis padres, por acompañarme y apoyarme siempre,
y a todas las personas que me llevo de esta etapa,
con gratitud y cariño.*

Abstract

This Master's Thesis presents a numerical study of flow separation over two-dimensional ramp configurations, focusing on the influence of geometry on the onset and development of separated flows. Two representative geometries are analyzed: a sharp-edged ramp and a smoothly rounded ramp, in order to assess the effect of edge curvature on the location of the separation point, the formation of recirculation bubbles, and the dynamics of reattachment downstream.

The simulations are carried out using Computational Fluid Dynamics (CFD) techniques with the finite element method implemented in FreeFem++, under laminar and incompressible flow conditions. Parametric studies are performed by varying the ramp angle, the Reynolds number, and the rounding radius, allowing for a systematic characterization of their impact on key separation parameters such as the separation position, separation angle, reattachment length, and critical velocity.

The results demonstrate that the ramp geometry plays a decisive role in flow separation. Sharp-edged ramps promote early detachment with strong sensitivity to the Reynolds number, while rounded ramps act as an effective passive control mechanism, delaying separation and stabilizing reattachment, especially at higher inclination angles. These findings provide useful insights into the physical mechanisms that govern separated flows and highlight the relevance of geometric design in applications where flow control and drag reduction are critical.

Resumen

Este Trabajo Fin de Máster presenta un estudio numérico de la separación de flujo sobre configuraciones de rampas bidimensionales, centrándose en la influencia de la geometría en el inicio y desarrollo de los flujos separados. Se analizan dos geometrías representativas: una rampa con arista viva y otra con borde suavemente redondeado, con el fin de evaluar el efecto de la curvatura en la localización del punto de separación, la formación de burbujas de recirculación y la dinámica de la re-adhesión aguas abajo.

Las simulaciones se realizan mediante técnicas de Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) con el método de elementos finitos implementado en FreeFem++, bajo condiciones de flujo laminar e incompresible. Se llevan a cabo estudios paramétricos variando el ángulo de la rampa, el número de Reynolds y el radio de redondeo, lo que permite una caracterización sistemática de su impacto en parámetros clave de la separación, como la posición de separación, el ángulo de desprendimiento, la longitud de re-adhesión y la velocidad crítica.

Los resultados demuestran que la geometría de la rampa desempeña un papel decisivo en la separación del flujo. Las rampas con arista viva favorecen un desprendimiento temprano con gran sensibilidad al número de Reynolds, mientras que las rampas redon-

deadas actúan como un mecanismo de control pasivo eficaz, retrasando la separación y estabilizando la re-adhesión, especialmente a altos ángulos de inclinación. Estos hallazgos aportan información valiosa sobre los mecanismos físicos que gobiernan los flujos separados y destacan la relevancia del diseño geométrico en aplicaciones donde el control del flujo y la reducción del arrastre son factores críticos.

Índice

1. Introducción	13
1.1. Descripción del Problema	13
1.2. Objetivo	13
1.3. Marco Teórico	15
1.3.1. Número de Reynolds	15
1.3.2. Concepto de Capa Límite	16
1.3.3. Introducción General al Flujo alrededor de Cuerpos	17
1.3.4. Separación del Flujo	18
1.3.5. Influencia de la Geometría en la Separación del Flujo: Estudios Experimentales y Numéricos	21
1.3.6. Análisis de la re-adhesión del Flujo	22
1.3.7. Simulación numérica en dinámica de fluidos (CFD)	23
1.3.8. Modelos simplificados y Soluciones Analíticas	25
1.3.9. Síntesis conceptual	26
2. Ecuaciones para Flujos Viscosos, Bidimensionales e Incompresibles	28
2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	28
2.2. Ecuación Vorticidad - Función de Corriente	29
2.3. Flujo Potencial	29
3. Método de Elementos Finitos	31
3.1. Formulación Débil	31
3.1.1. Caso en 2D	31
3.2. Procedimiento de Aplicación del MEF	32
3.3. Set Up Numérico	32
3.4. Verificación Numérica de Problemas Básicos en FreeFem++	34
3.4.1. Perfil de Poiseuille	34
3.4.2. Flujo Potencial alrededor de un Cilindro	36

4. Flujo Laminar sobre una Rampa con Arista Viva	40
4.1. Geometría con Arista Viva	40
4.2. Condiciones de Contorno y Origen de coordenadas	41
4.3. Estudio de Convergencia de Malla	42
5. Flujo Laminar sobre una Rampa con Radio de Acuerdo	47
5.1. Geometría con Radio de Acuerdo	47
5.2. Condiciones de Contorno y Origen de coordenadas	48
5.3. Estudio de Convergencia de Malla	49
6. Resultados	53
6.1. Cálculo de los Parámetros Característicos del Desprendimiento	53
6.2. Influencia del Número de Reynolds y del Radio de Curvatura para α Constante	54
6.2.1. Ángulo de rampa $\alpha = 10^\circ$	54
6.2.2. Ángulo de rampa $\alpha = 15^\circ$	55
6.2.3. Ángulo de rampa $\alpha = 20^\circ$	56
6.2.4. Ángulo de rampa $\alpha = 25^\circ$	57
6.2.5. Ángulo de rampa $\alpha = 30^\circ$	58
6.2.6. Ángulo de rampa $\alpha = 40^\circ$	60
6.2.7. Ángulo de rampa $\alpha = 50^\circ$	61
6.2.8. Síntesis de Resultados sobre la Influencia del Ángulo de Rampa α	62
6.3. Influencia del Radio de Curvatura R sobre s_{LEB} a $Re = 1000$	63
6.4. Influencia del Radio R sobre el Ángulo de Separación θ a $Re = 1000$. .	64
6.5. Evolución de s_{LEB} frente al Ángulo de Rampa α a $Re = 1000$	65
6.6. Evolución de θ frente a α para Distintos R a $Re = 1000$	66
6.7. Influencia del radio de acuerdo (R) y número de Reynolds (Re) en los isocontornos de la función de corriente (ψ)	67
7. Conclusiones y Trabajo Futuro	69
7.1. Conclusiones	69

72. Trabajo Futuro 69

Índice de tablas

1. Convergencia de malla con arista viva usando como referencia la malla con $N_{mesh} = 2.5$ 45
2. Convergencia de malla para el caso con radio de acuerdo usando como referencia la malla con $N_{mesh} = 2.5$ 52

Índice de figuras

1.	Esquema del problema (arista viva)	14
2.	Líneas de corriente alrededor de un monoplaza de Fórmula 1	14
3.	Multiplicidad de soluciones de estela para distintos regímenes de flujo sobre un cilindro bidimensional [2]	16
4.	Capa límite sobre placa plana [1]	17
5.	Desprendimiento por inversión del flujo [1]	19
6.	Recirculación tras desprendimiento en arista viva	21
7.	Comparación de resultados numéricos y solución analítica del campo de velocidades del flujo en la dirección axial dentro de un conducto	36
8.	Malla usada en el problema de flujo potencial sobre cilindro	37
9.	Líneas de corriente del problema de flujo potencial alrededor de un cilindro	38
10.	Comparación de resultados numéricos y solución analítica del coeficiente de presión sobre la superficie del cilindro del problema de flujo potencial alrededor de un cilindro	39
11.	Esquema del problema (arista viva)	40
12.	Geometría con arista viva acotada	41
13.	Contorno y origen de coordenadas del problema (arista viva)	42
14.	Presión dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla	43
15.	Vorticidad dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla	44
16.	Esfuerzos Viscosos dimensionales a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla	44
17.	Malla usada para la resolución del problema (arista viva)	46
18.	Esquema del problema (radio de acuerdo)	47
19.	Geometría con radio de acuerdo acotada	48
20.	Contorno y origen de coordenadas del problema (radio de acuerdo)	49
21.	Presión dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla	50
22.	Vorticidad dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla	51

23.	Esfuerzos Viscosos dimensionales a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla	51
24.	Malla usada para la resolución del problema (radio de acuerdo)	52
25.	Esquema visual donde se muestran los distintos parámetros del desprendimiento que van a ser analizados	54
26.	Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 10^\circ$	55
27.	Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 15^\circ$	56
28.	Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 20^\circ$	57
29.	Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 25^\circ$	58
30.	Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 30^\circ$	59
31.	Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 40^\circ$	61
32.	Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 50^\circ$	62
33.	Influencia de R sobre s_{LEB} para $Re=1000$	64
34.	Influencia de R sobre θ para $Re=1000$	65
35.	Influencia de α sobre s_{LEB} para $Re=1000$	66
36.	Influencia de α sobre θ para $Re=1000$	67
37.	Isocontornos de ψ para $Re = [100, 300, 600, 1000]$, $R = [0, 10]$ y $\alpha = 40^\circ$	68

1. Introducción

1.1. Descripción del Problema

La separación del flujo en presencia de gradientes de presión adversos es un fenómeno complejo que afecta de manera significativa la distribución de esfuerzos y presiones en superficies sólidas expuestas a un fluido en movimiento. En particular, las superficies inclinadas, como rampas, presentan una predisposición natural a generar separación cuando el flujo no puede adaptarse a la curvatura impuesta por la geometría. Este fenómeno es relevante tanto en aplicaciones aerodinámicas como en sistemas de ventilación, turbomáquinas o flujos atmosféricos cercanos al suelo.

El presente trabajo se centra en el estudio de la separación de flujo en configuraciones de rampa bidimensional bajo condiciones estacionarias, considerando dos variantes geométricas fundamentales: una rampa con arista viva y otra con transición suavemente redondeada. La comparación entre ambas configuraciones permite evaluar cómo influye la forma local de la geometría sobre el punto de separación, la posible formación de burbujas de recirculación y la dinámica de la re-adhesión del flujo aguas abajo.

La sensibilidad del flujo a la geometría es especialmente relevante cuando se considera la dependencia del fenómeno con el número de Reynolds y con el ángulo de inclinación de la rampa. Para bajos números de Reynolds, el flujo es más susceptible a separarse tempranamente debido a la baja energía de la capa límite. Por el contrario, a altos Reynolds, la turbulencia incrementa el transporte de cantidad de movimiento hacia la pared, favoreciendo la adherencia del flujo incluso en presencia de gradientes de presión adversos.

Para analizar este comportamiento, se emplearán herramientas de Dinámica de Fluidos Computacional (CFD), que permiten simular numéricamente la evolución del flujo sobre las dos geometrías consideradas. El objetivo es identificar de forma precisa el efecto combinado del ángulo de la rampa, la forma del borde y el régimen del flujo en la aparición, extensión y estructura del flujo separado.

Este planteamiento busca aportar información cuantitativa y cualitativa sobre la sensibilidad del flujo a cambios geométricos locales, así como sobre los mecanismos físicos involucrados en la separación y el reenganche, con vistas a mejorar futuras estrategias de diseño orientadas al control del desprendimiento.

1.2. Objetivo

El objetivo general de este trabajo es analizar numéricamente el comportamiento del flujo separado sobre rampas bidimensionales, comparando configuraciones con arista viva y arista redondeada, con el fin de determinar cómo la geometría del borde, el ángulo de inclinación y el número de Reynolds influyen en la aparición y extensión del flujo separado. En las figuras [1](#) y [2](#) se muestra el esquema de uno de los problemas que van

a ser analizados en el presente Trabajo Fin de Máster y las líneas de corriente alrededor de un monoplaza de fórmula 1, utilizada como motivación visual para el presente trabajo y para mostrar el campo de estudio del mismo.

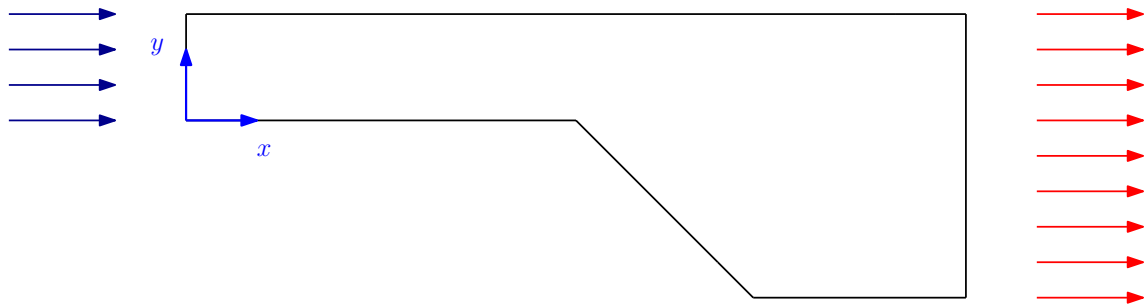


Figura 1: Esquema del problema (arista viva)



Figura 2: Líneas de corriente alrededor de un monoplaza de Fórmula 1

1.3. Marco Teórico

El estudio de los flujos desprendidos sobre superficies sólidas es un área de gran interés en la mecánica de fluidos, debido a su impacto en diversas aplicaciones de ingeniería, como la aerodinámica de vehículos, la optimización de perfiles aerodinámicos y el diseño de conductos industriales. La predicción precisa de la separación del flujo es fundamental para mejorar el rendimiento de estas aplicaciones y reducir efectos adversos como el incremento del arrastre y la inestabilidad aerodinámica.

1.3.1. Número de Reynolds

El número de Reynolds, denotado por Re , es un parámetro adimensional fundamental en mecánica de fluidos que permite caracterizar el tipo de régimen de un flujo: laminar (estacionario o no estacionario) y turbulento. Se define como la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas presentes en un flujo, y está dado por la expresión:

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu},$$

donde:

- ρ es la densidad del fluido
- U es una velocidad característica del flujo
- L es una longitud característica del problema
- μ es la viscosidad dinámica del fluido
- $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática

Esta relación surge de la adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes, y su valor permite establecer una comparación entre los términos convectivos y viscosos en dichas ecuaciones. En otras palabras, el número de Reynolds proporciona una idea del régimen en el que puede encontrarse el flujo. En la figura 3 se muestra la multiplicidad de soluciones de estela para distintos regímenes de flujo sobre un cilindro bidimensional.

Interpretación física

Dependiendo del valor del número de Reynolds, se pueden clasificar varios regímenes de flujo:

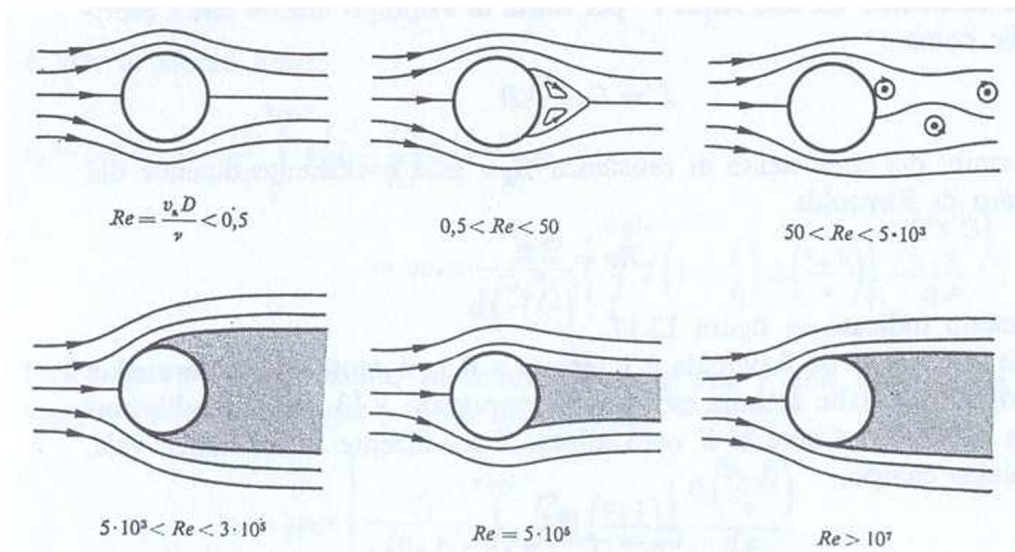


Figura 3: Multiplicidad de soluciones de estela para distintos regímenes de flujo sobre un cilindro bidimensional [2]

- Cuando $Re \ll 1$, las fuerzas viscosas dominan sobre las inerciales. Este es el régimen denominado *creeping flow*, característico de sistemas a pequeña escala o velocidades muy bajas.
- Cuando $Re \gg 1$, las fuerzas inerciales predominan y las viscosas se restringen a una fina región cercana a la pared: la capa límite.
- Para valores intermedios, el flujo puede exhibir transiciones entre régimen laminar y turbulento, dependiendo de la geometría, perturbaciones externas y condiciones de contorno [1].

1.3.2. Concepto de Capa Límite

La capa límite es un concepto introducido por Ludwig Prandtl en 1904, que se refiere a la región delgada del fluido adyacente a una superficie sólida donde los efectos viscosos son significativos, incluso cuando la viscosidad del fluido es pequeña. Dentro de esta capa, el gradiente de velocidad normal a la superficie es muy pronunciado, lo que hace que las fuerzas viscosas sean del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia. Esto ocurre porque el fluido cumple la condición de no deslizamiento en la pared, lo que permite la unificación de las teorías de fluidos ideales y viscosos.

Matemáticamente, la capa límite se define como la región donde la velocidad del fluido varía desde el valor cero en la superficie sólida hasta aproximadamente el 99 % de la velocidad de la corriente libre [1]. Su espesor, denotado como δ , depende de diversos factores como el número de Reynolds, la geometría de la superficie y las condiciones

del flujo. Se puede distinguir entre distintos regímenes de capa límite, como la capa límite laminar, en la que el flujo es ordenado y estable, capa límite transitoria, y la capa límite turbulenta, caracterizada por fluctuaciones caóticas e intensas en la velocidad. En la figura 4 se muestra una capa límite sobre una placa plana.

- **Capa límite laminar:** En esta capa, el flujo es suave y ordenado, con líneas de corriente claramente definidas y paralelas entre sí. Típicamente ocurre cuando el número de Reynolds es relativamente bajo, lo que implica que las fuerzas viscosas predominan sobre las fuerzas inerciales.
- **Capa límite turbulenta:** Esta capa se caracteriza por un flujo irregular, con fluctuaciones de velocidad y remolinos tridimensionales que generan un alto grado de mezcla en la cantidad de movimiento y otras propiedades del fluido. Ocurre para valores más altos del número de Reynolds, donde las fuerzas inerciales predominan.
- **Capa límite transitoria:** Esta capa aparece en el proceso intermedio durante la transición de régimen laminar a turbulento. En ella coexisten regiones laminares y zonas en las que comienzan a desarrollarse perturbaciones que evolucionan hacia un régimen turbulento [1].

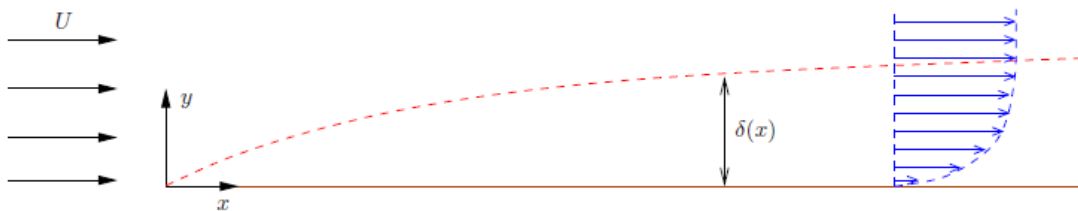


Figura 4: Capa límite sobre placa plana [1]

1.3.3. Introducción General al Flujo alrededor de Cuerpos

Cuando un cuerpo está expuesto a una corriente fluida, se genera un campo de presiones y velocidades que determinan la fuerza resultante sobre el cuerpo. La distribución del flujo depende de la geometría del cuerpo, las propiedades del fluido y las condiciones del flujo incidente (velocidad, presión, viscosidad, etc.).

El comportamiento del flujo sobre un cuerpo puede clasificarse en dos grandes categorías:

- **Flujo Adherido:** Cuando el flujo está adherido, este permanece en contacto con la superficie del cuerpo. Las líneas de corriente siguen de cerca la forma del objeto. La capa límite es estable y se mantiene pegada a la superficie sólida.

- **Flujo Separado:** Cuando el flujo está separado, las líneas de corriente dejan de seguir la superficie del cuerpo, generando una zona de recirculación o estela detrás del objeto. Esta zona de separación suele estar asociada con un fuerte incremento en la resistencia aerodinámica y pérdidas de eficiencia [1].

1.34. Separación del Flujo

La separación del flujo es un fenómeno fundamental en la dinámica de fluidos que ocurre cuando el fluido en movimiento deja de seguir el contorno de una superficie sólida. Este desprendimiento es consecuencia directa de la interacción entre el gradiente de presión adverso y la dinámica interna de la capa límite.

Gradiente de Presión Adverso en la Separación

Un gradiente de presión adverso es aquel en que la presión aumenta en la dirección del flujo. Este aumento de presión provoca una disminución en la energía cinética del fluido cerca de la pared. Si la pérdida de energía cinética es suficientemente grande, las partículas del fluido próximas a la pared se detienen y, eventualmente, invierten su movimiento, generando la separación del flujo.

La separación suele ocurrir en regiones donde el cuerpo presenta una superficie curva, como en rampas o perfiles aerodinámicos con ángulos pronunciados. La existencia de este gradiente de presión adverso es, por tanto, un indicador crítico para la ocurrencia de separación [1].

Efectos de la Separación

Desde un punto de vista físico y matemático, existen varios efectos que permiten identificar el inicio de la separación del flujo:

- **Anulación del esfuerzo cortante en la pared:** La separación comienza cuando el esfuerzo cortante ejercido por el fluido sobre la superficie se reduce a cero. Este criterio se basa en que, dentro de la capa límite, el esfuerzo cortante está asociado al gradiente de velocidad en la dirección normal a la pared. Cuando dicho gradiente cambia de signo, el flujo se invierte localmente y se inicia la separación.
- **Aumento del coeficiente de presión (C_p):** En zonas donde el flujo está adherido, el coeficiente de presión suele decrecer en la dirección del flujo. Un incremento de C_p en esa dirección indica un gradiente de presión adverso, lo que puede derivar en separación si la energía del flujo cercano a la pared es insuficiente para superar dicho gradiente.

- **Inversión del flujo junto a la pared:** En condiciones de gradiente adverso suficientemente fuerte, las partículas de fluido cercanas a la superficie pueden detenerse e incluso comenzar a moverse en dirección opuesta al flujo principal. Esta inversión es una manifestación clara del desprendimiento del flujo [1]. En la figura 5 se puede observar una separación del flujo por inversión del flujo frente a la pared.

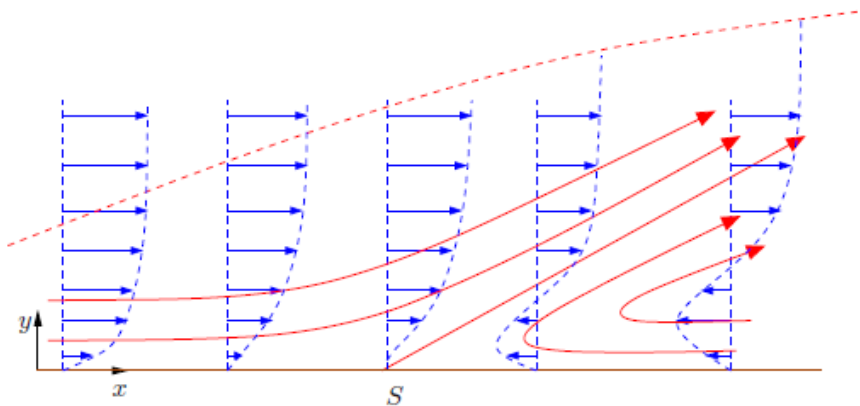


Figura 5: Desprendimiento por inversión del flujo [1]

Diferencias entre Separación Laminar y Turbulenta

El régimen de la capa límite tiene un papel crucial en la forma y el punto de separación:

- **Separación laminar:** Se produce cuando la capa límite es laminar, es decir, con un flujo suave y con poca mezcla de cantidad de movimiento en dirección normal a la pared. Debido a ello, el fluido cercano a la superficie tiene menor capacidad de resistir un gradiente de presión adverso y tiende a separarse antes, generando una burbuja de recirculación más inestable y de menor tamaño.
- **Separación turbulenta:** En este caso, la capa límite está dominada por fluctuaciones tridimensionales que favorecen una mayor difusión de cantidad de movimiento hacia la pared. Esto permite que el fluido más energético del exterior llegue a la zona próxima a la superficie, retrasando la separación y manteniendo el flujo adherido durante más tiempo. La separación turbulenta, por tanto, ocurre más lejos aguas abajo que la laminar y suele ir acompañada de oscilaciones e inestabilidades más intensas en la estela.
- **Transición:** En algunos casos, la capa límite puede separarse antes de volverse turbulenta. Este fenómeno da lugar a una "burbuja de separación laminar" donde el flujo se separa en régimen laminar, transiciona a turbulento en la región separada y luego se re-adhiere. Esta burbuja es característica en ciertas configuraciones aerodinámicas, como perfiles delgados a bajo ángulo de rampa [1].

Influencia del Número de Reynolds sobre el Punto de Separación

El número de Reynolds (Re) es uno de los factores determinantes en el comportamiento de la capa límite y, por tanto, en la ubicación del punto de separación. A medida que aumenta Re :

- Se favorece la transición a régimen turbulento en la capa límite.
- Una capa límite turbulenta, por su mayor energía cinética cerca de la pared, puede resistir un gradiente de presión adverso más fuerte.

Esto provoca un retraso del punto de separación, desplazándolo aguas abajo en comparación con el caso laminar.

En general, para una misma geometría y condiciones de contorno, se observa que:

- A bajos Re (flujo laminar): la separación ocurre tempranamente.
- A Re intermedios: puede formarse una burbuja de separación laminar con una re-adhesión turbulenta.
- A altos Re (flujo turbulento): la separación puede evitarse completamente o retrasarse considerablemente.

Este comportamiento tiene implicaciones directas en la formación de estelas, coeficientes de arrastre y eficiencia aerodinámica [1].

Estructuras Típicas del Flujo Separado

Una vez que el flujo se separa de la superficie, se desarrollan varias estructuras características:

- **Burbuja de recirculación:** Es la zona donde el flujo forma un vórtice pegado a la superficie, fluyendo en dirección opuesta al flujo principal. Su extensión depende de la geometría, del número de Reynolds y del régimen del flujo. En la figura 6 se muestra una burbuja de recirculación.
- **Capa de mezcla (shear layer):** Es la interfaz entre el flujo principal (no separado) y la región de recirculación. En esta zona se generan inestabilidades que pueden dar lugar al desprendimiento periódico de vórtices (como en la calle de vórtices de von Kármán).

- **Punto de re-adhesión:** En algunos casos, el flujo puede readherirse a la superficie tras recorrer cierta distancia separada. La re-adhesión está asociada con una recuperación de presión y suele ser turbulento [1].

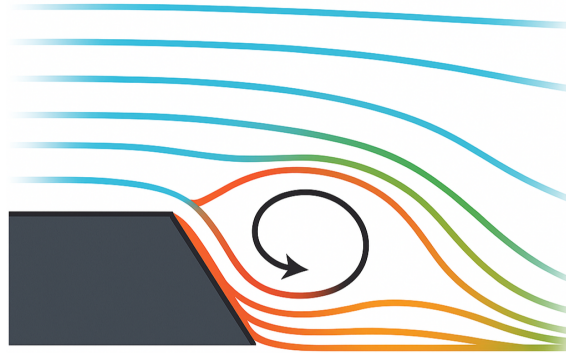


Figura 6: Recirculación tras desprendimiento en arista viva

1.3.5. Influencia de la Geometría en la Separación del Flujo: Estudios Experimentales y Numéricos

La geometría del contorno sobre el que se desarrolla un flujo tiene una influencia directa sobre la dinámica de la capa límite, condicionando la aparición, intensidad y forma de la separación. En particular, la transición entre una arista viva y una superficie suavemente redondeada altera de manera sustancial el desarrollo del gradiente de presión adverso, lo que repercute en la estabilidad del flujo y en la aparición o supresión de zonas de recirculación.

Diversos estudios han demostrado que las aristas vivas tienden a fijar de forma abrupta el punto de separación, generando burbujas de recirculación bien definidas y prolongadas. Thacker et al. (2012) analizaron dos configuraciones del Ahmed body: una con transición aguda y otra redondeada entre el techo y la ventana trasera. El redondeo provocó la desaparición de la burbuja de separación tridimensional sobre la superficie inclinada, resultando en una reducción del arrastre del 10 % sin alterar significativamente la sustentación. Además, aunque la estructura media de los vórtices longitudinales permaneció inalterada en posición, su intensidad disminuyó sensiblemente [3].

Complementariamente, Kourta et al. (2015) mostraron mediante experimentos que variaciones en la curvatura de una rampa modifican de forma apreciable la estructura y extensión de la burbuja separada. Rampas más redondeadas inducen separaciones más difusas y reenganches más tempranos, mientras que rampas con ángulos definidos generan zonas de recirculación más estables y extensas [4].

Desde el punto de vista numérico, Uzun y Malik (2024) realizaron simulaciones DNS sobre una rampa suavemente curvada. En esta configuración, la capa límite turbulenta

atraviesa una región de aceleración leve seguida de una fuerte deceleración, lo que da lugar a una separación prolongada. La geometría suave permite una transición progresiva que genera una capa de mezcla libre a partir de una capa interna acelerada. El reenganche posterior, inducido por la recuperación del gradiente de presión, se produce con un espesor de capa límite ampliado en un factor de diez respecto al inicio de la rampa [5].

A nivel experimental, Simmons et al. (2022) estudiaron el flujo sobre una rampa bidimensional de geometría suave con capa límite turbulenta incidente. Observaron una separación tridimensional compleja, a pesar de la simetría de la geometría, manifestada a través de un patrón superficial característico denominado *owl-face pattern*. Sin embargo, el flujo muestra una re-adhesión bidimensional uniforme aguas abajo, lo que evidencia una reestructuración del campo fluido en el proceso de reenganche [6].

En conjunto, estos estudios confirman que la geometría, especialmente el grado de curvatura en transiciones, no solo determina la localización del punto de separación, sino también la forma y estabilidad de las estructuras generadas en la zona separada. Tanto las observaciones experimentales como las simulaciones numéricas muestran que rampas redondeadas permiten una separación más controlada, favorecen el reenganche y reducen el impacto aerodinámico negativo del flujo separado.

1.36. Análisis de la re-adhesión del Flujo

La re-adhesión del flujo, también denominado *reattachment*, es el proceso mediante el cual un flujo previamente separado vuelve a adherirse a la superficie del cuerpo sobre el cual se desarrolla. Este fenómeno tiene implicaciones importantes en la distribución de presiones, la resistencia aerodinámica y la eficiencia global del sistema. En flujos sobre rampas o superficies curvadas, la aparición y localización del punto de reenganche dependen de factores como el ángulo de inclinación, la curvatura de la superficie, el número de Reynolds y el estado de la capa límite incidente.

En el estudio experimental realizado por Simmons et al. (2022), se observó que, a pesar del carácter tridimensional del flujo en la región de separación sobre una rampa convexa bidimensional, la re-adhesión exhibe un comportamiento notablemente uniforme en el sentido transversal. Este resultado sugiere que, una vez que se desarrolla la capa de mezcla libre entre el flujo principal y la zona recirculada, se alcanza una reestructuración del flujo que permite una recuperación de la simetría espacial al momento de la re-adhesión. El patrón superficial asociado con este proceso muestra líneas de corriente que convergen desde ambos lados de la región separada hacia un punto de unión en la superficie, lo que constituye una firma topológica clara del proceso de re-adhesión del flujo [6].

Por su parte, Uzun y Malik (2024), mediante simulación numérica directa, caracterizan cuantitativamente el proceso de reenganche en una configuración con rampa suave. El flujo se separa debido a un gradiente de presión adverso, dando lugar a una capa de mezcla que delimita una región de recirculación de gran extensión, con una longitud comparable a la de la rampa. A medida que la presión se recupera y el gradiente se sua-

viza en la región descendente de la rampa, el flujo se re-adhiere a la superficie. Uno de los hallazgos más relevantes de este estudio es que, en el punto de reenganche, el espesor de la capa límite viscosa es aproximadamente diez veces mayor que en la entrada de la rampa, lo cual indica un fuerte crecimiento del perfil de velocidades debido a los procesos de mezcla y difusión turbulenta que ocurren en la región separada [5].

Estos resultados concuerdan con las observaciones experimentales de Kourta et al. (2015), quienes mostraron que la re-adhesión del flujo depende no solo del ángulo de la rampa, sino también de su curvatura. En rampas con transición más suave, la re-adhesión ocurre más rápidamente y con una menor extensión de la burbuja de recirculación. Además, las fluctuaciones en la capa de mezcla tienden a estabilizarse en configuraciones redondeadas, lo que favorece una re-adhesión más predecible y menos propensa a inestabilidades tridimensionales [4].

En conjunto, estos estudios evidencian que el reenganche es un fenómeno altamente sensible a la geometría local y al desarrollo previo del flujo. La caracterización precisa de este proceso es esencial no solo para la comprensión fundamental del comportamiento del flujo, sino también para el diseño de superficies optimizadas que minimicen las pérdidas energéticas asociadas con la separación y maximicen la recuperación de presión aguas abajo.

1.3.7. Simulación numérica en dinámica de fluidos (CFD)

La Dinámica de Fluidos Computacional (CFD, por sus siglas en inglés) es una disciplina de la mecánica de fluidos que se encarga del análisis y resolución numérica de los problemas de flujo a partir de la formulación matemática de las ecuaciones gobernantes, principalmente las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones, que derivan de los principios de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía, describen el comportamiento de los fluidos en un entorno continuo.

En términos generales, el CFD permite simular el comportamiento del flujo en dominios complejos sin necesidad de recurrir exclusivamente a ensayos experimentales. Mediante la discretización del dominio físico en una malla de control y la aproximación numérica de las derivadas espaciales y temporales, se resuelven iterativamente los campos de velocidad, presión, temperatura y otras magnitudes relevantes.

Ventajas del CFD: La principal ventaja del CFD es su capacidad para proporcionar una descripción detallada del flujo en cualquier punto del dominio, tanto en geometrías simples como en configuraciones tridimensionales complejas. Permite estudiar escenarios que serían difíciles o imposibles de reproducir experimentalmente, realizar análisis paramétricos y evaluar el efecto de variaciones geométricas o condiciones de contorno. Además, su carácter no invasivo lo convierte en una herramienta ideal para estudios preliminares, optimización de diseño y validación de hipótesis físicas.

Niveles de modelado: Dependiendo del nivel de detalle requerido y de los recursos

computacionales disponibles, existen diferentes enfoques para simular flujos turbulentos. En el caso de flujos laminares, no es necesario emplear modelos de turbulencia, ya que la resolución directa de las ecuaciones de Navier–Stokes es suficiente. Sin embargo, cuando el flujo es turbulento, se recurre a técnicas como RANS, LES o DNS, que difieren en el grado de aproximación y en el coste computacional asociado.

- **RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes):** Este enfoque modela la turbulencia mediante promediado temporal de las ecuaciones, incorporando modelos de cierre para las fluctuaciones. Es el más utilizado en la industria debido a su bajo coste computacional, aunque su precisión es limitada en flujos con separación o geometrías suaves.
- **LES (Large Eddy Simulation):** Resuelve de forma directa las estructuras turbulentas grandes y modela las pequeñas mediante submodelos. Proporciona resultados más detallados que RANS, especialmente en zonas de separación o transición, a cambio de un coste computacional intermedio.
- **DNS (Direct Numerical Simulation):** Resuelve todas las escalas del flujo sin modelos de turbulencia. Es el enfoque más preciso, pero también el más costoso. Su uso se limita a estudios académicos y a geometrías simples o bidimensionales, con números de Reynolds moderados.

Limitaciones del CFD: A pesar de su enorme potencial, el CFD presenta limitaciones que deben ser consideradas en todo análisis riguroso:

- **Dependencia del mallado:** La calidad del resultado está condicionada por la resolución y calidad de la malla. Un mallado inadecuado puede introducir errores numéricos significativos, especialmente cerca de paredes o en zonas con grandes gradientes.
- **Modelado de la turbulencia:** Los modelos de cierre utilizados en RANS y LES introducen hipótesis que pueden no ser válidas en todas las situaciones. En flujos con separación, recirculaciones o geometrías suaves, la predicción del punto de separación y re-adhesión puede ser deficiente si el modelo no reproduce adecuadamente la dinámica del flujo turbulento.
- **Condiciones de contorno y estabilidad numérica:** La definición incorrecta de las condiciones de entrada o salida puede llevar a soluciones no físicas o numéricamente inestables. Además, el tratamiento de condiciones en paredes curvas o zonas de esquina sigue siendo un reto abierto en muchos esquemas numéricos.
- **Coste computacional:** A medida que se incrementa la fidelidad del modelo (por ejemplo, en LES o DNS), los requisitos de hardware, tiempo de simulación y almacenamiento de datos aumentan considerablemente, lo que puede limitar su aplicación práctica.

Importancia del CFD en estudios de flujo separado: En el análisis de flujos con separación, como ocurre sobre rampas redondeadas o superficies con gradientes de presión adverso, el CFD se convierte en una herramienta indispensable. Permite visualizar y cuantificar variables que serían difíciles de medir experimentalmente, como los perfiles de esfuerzo cortante o la evolución de la capa límite. No obstante, su utilización requiere una validación cuidadosa con datos experimentales y un entendimiento profundo de las hipótesis y limitaciones inherentes a cada modelo.

1.3.8. Modelos simplificados y Soluciones Analíticas

Aunque la simulación numérica proporciona herramientas poderosas para el estudio de flujos complejos, los modelos analíticos simplificados siguen desempeñando un papel fundamental tanto en la comprensión de los fenómenos físicos como en la validación de soluciones numéricas. En el contexto del flujo sobre rampas o superficies curvas, las soluciones aproximadas de las ecuaciones de Euler o de la capa límite pueden aportar información valiosa sobre la distribución del campo de velocidades y presiones, especialmente en configuraciones donde los efectos viscosos son secundarios o pueden ser tratados de manera separada.

Una de las formulaciones más clásicas en la teoría de capa límite es la solución de Blasius, la cual describe el desarrollo de una capa límite laminar sobre una placa plana en régimen estacionario. Ahmad y Al-Barakati (2008) proponen una solución analítica aproximada al problema de Blasius utilizando una técnica de Padé modificada, que permite extender la validez de la solución a un dominio más amplio. Este enfoque mejora la representación de la solución en regiones donde las series de potencias originales no convergen y proporciona un valor muy preciso para el gradiente de velocidad en la pared, dato clave en el cálculo del esfuerzo cortante y en la detección de separación laminar [7].

En cuanto al análisis de flujos compresibles sobre rampas, Verhoff (2004) desarrolla una solución asintótica de las ecuaciones de Euler bidimensionales en coordenadas de línea de corriente, aplicable a configuraciones con esquinas geométricas definidas. Esta formulación permite abordar el problema del flujo sobre rampas con ángulo, sin presencia de ondas de choque, dentro del régimen compresible subcrítico. El autor introduce una técnica de mapeo no conforme y deformación de coordenadas que controla las singularidades inducidas por la geometría en los puntos de cambio de dirección. Esta metodología proporciona soluciones válidas en regiones donde las soluciones numéricas pueden presentar problemas de resolución o inestabilidad, y ofrece una herramienta útil para el diseño de condiciones de contorno en simulaciones CFD, especialmente en las cercanías de bordes afilados o esquinas [8].

Ambas aproximaciones, aunque pertenecientes a contextos físicos distintos, una para flujo viscoso incompresible y otra para flujo no viscoso compresible, demuestran la utilidad de los modelos analíticos como base conceptual y como referencia comparativa. En aplicaciones prácticas, estas soluciones permiten anticipar tendencias del comporta-

miento del flujo y detectar inconsistencias en resultados numéricos que podrían derivar de errores de discretización, modelado de turbulencia o configuración geométrica inadecuada.

Por tanto, la combinación de modelos simplificados y simulación avanzada constituye un enfoque complementario esencial para el estudio riguroso de flujos separados en configuraciones aerodinámicas como las rampas, especialmente cuando se trata de distinguir el papel relativo de la viscosidad, la geometría y las condiciones de contorno en la dinámica global del sistema.

1.3.9. Síntesis conceptual

El análisis detallado de la separación y reenganche del flujo sobre rampas ha permitido identificar un conjunto de variables físicas y geométricas que determinan el comportamiento global del sistema. Estas variables no actúan de forma independiente, sino que están interrelacionadas a través de los mecanismos dinámicos que rigen la evolución de la capa límite y su interacción con el campo de presiones externo.

Número de Reynolds (Re): Esta magnitud adimensional resume la relación entre los efectos inerciales y viscosos en el flujo. En todos los estudios analizados, se ha comprobado que un mayor número de Reynolds tiende a retrasar la separación del flujo debido al mayor contenido energético de la capa límite turbulenta, que es capaz de resistir gradientes de presión adversos más intensos. En el caso específico del estudio de Uzun y Malik (2024), el flujo sobre la rampa se desarrolla con un Re basado en el grosor de la capa límite de entrada del orden de 2000, alcanzando valores mucho más altos en el desarrollo sobre la rampa, donde se observa separación seguida de reenganche con incremento sustancial del espesor de la capa viscosa [5].

Ángulo y curvatura de la rampa: La geometría de la rampa es uno de los factores más influyentes en la dinámica del flujo. Las aristas vivas tienden a fijar la separación en un punto definido, generando zonas de recirculación estables y extensas. En cambio, geometrías suavemente redondeadas permiten una transición progresiva del gradiente de presión, lo cual puede facilitar el retraso de la separación y un reenganche más temprano del flujo. Esto ha sido demostrado experimentalmente por Kourta et al. (2015), quienes observaron cómo modificaciones mínimas en la curvatura de la rampa producen cambios notables en la estructura y estabilidad del flujo separado [4].

Gradiente de presión adverso: Es el principal motor físico de la separación del flujo. Su intensidad y distribución espacial dependen tanto de la forma del contorno como del estado de la capa límite incidente. Según el análisis de Simmons et al. (2022), incluso en configuraciones de rampa nominalmente bidimensionales, el gradiente de presión puede inducir efectos tridimensionales significativos en la separación, manifestados en patrones superficiales característicos como el *owl-face pattern* [6].

Estado de la capa límite: El régimen laminar o turbulento de la capa límite afecta di-

rectamente a su capacidad para soportar un gradiente de presión adverso sin separarse. La capa límite turbulenta, por su mayor tasa de mezcla de momento, tiende a separarse más tarde y a favorecer el reenganche. Este fenómeno es evidente en el estudio DNS de Uzun y Malik (2024), donde se observa una transición clara desde una capa límite turbulenta adherida hacia una región separada y finalmente reenganchada, con crecimiento significativo del espesor de la capa viscosa tras el reenganche [5].

Estructura de la capa de mezcla: Una vez que el flujo se separa, se genera una capa de mezcla entre el flujo principal y la región recirculada. La estabilidad y características de esta capa son determinantes para el comportamiento del flujo aguas abajo, incluyendo la posibilidad de reenganche. Kourta et al. (2015) y Simmons et al. (2022) destacan que la estructura de esta capa está muy influenciada por la geometría local y por el desarrollo tridimensional del flujo en casos reales [4] [6].

2. Ecuaciones para Flujos Viscosos, Bidimensionales e Incompresibles

En este capítulo se recogen las ecuaciones que se van a usar para resolver los distintos problemas del presente trabajo.

2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para flujos viscosos, bidimensionales e incompresibles es la siguiente:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}$$

Desarrollando las ecuaciones y pasando a coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y. \end{aligned}$$

La condición de incompresibilidad se obtiene mediante la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- ρ es la densidad.
- u es la velocidad en el eje x .
- v es la velocidad en el eje y .
- μ es la viscosidad dinámica.
- p es la presión estática.
- f_x y f_y son las fuerzas externas por unidad de volumen en los ejes x e y , respectivamente.

2.2. Ecuación Vorticidad - Función de Corriente

La ecuación que relaciona la vorticidad de un flujo bidimensional con su función de corriente es:

$$\nabla^2\psi = -\xi$$

donde:

- ψ es la función de corriente, definida de modo que

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

siendo u y v las componentes de velocidad en los ejes x e y , respectivamente.

- ξ es la vorticidad, definida como

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Sustituyendo estas definiciones, la ecuación anterior se desarrolla en la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}.$$

2.3. Flujo Potencial

Un flujo se denomina potencial cuando el campo de velocidades puede expresarse como el gradiente de un potencial escalar de velocidad ϕ , es decir:

$$\vec{u} = (u, v) = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right).$$

En este caso, el flujo es irrotacional, ya que la vorticidad se anula:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \vec{0},$$

lo que implica que en dos dimensiones:

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Por tanto, un flujo potencial es siempre irrotacional y puede considerarse un caso particular del planteamiento anterior basado en la función de corriente, en el cual la vorticidad ξ se anula. De esta forma, ψ podría obtenerse imponiendo $\xi = 0$. No obstante, el enfoque más habitual consiste en introducir el potencial de velocidad ϕ , cuyas derivadas definen directamente las componentes de la velocidad.

Si además el flujo se considera incompresible, debe cumplirse la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Sustituyendo la definición de \vec{u} en términos del potencial de velocidad ϕ , la condición de incompresibilidad se convierte en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

En consecuencia, el problema de un flujo potencial incompresible en dos dimensiones se reduce a resolver la ecuación de Laplace para el potencial de velocidad ϕ , a partir de las condiciones de contorno impuestas por la geometría del problema.

3. Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos (MEF) es una técnica numérica usada para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias (EDO) como en derivadas parciales (EDP). Su principal ventaja radica en su capacidad para modelar geometrías complejas y distintas condiciones de contorno.

El MEF se basa en la discretización del dominio del problema en elementos finitos, los cuales se conectan a través de nodos. Cada uno de estos elementos se representa mediante funciones de interpolación que permiten aproximar la solución en todo el dominio.

3.1. Formulación Débil

La formulación débil es un concepto fundamental en el método de elementos finitos, ya que, mediante una función de prueba, permite reformular una ecuación diferencial en términos integrales, facilitando así su resolución.

3.1.1. Caso en 2D

A continuación, se muestra el procedimiento para resolver la ecuación de Poisson:

- 1. Ecuación en forma fuerte:** Se parte de la ecuación en forma fuerte (Formato diferencial):

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi(x, y) = f(x, y) & \text{en } \Omega \\ \psi(x, y) = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- 2. Multiplicación por una función test:** Se multiplica la ecuación por una función " φ " a ambos lados de la ecuación. La función " φ " es una función suave y continua en todo el dominio. El resultado se muestra a continuación:

$$\varphi \cdot \nabla^2 \psi(x, y) = \varphi \cdot f(x, y) \quad \text{en } \Omega$$

- 3. Integración sobre el dominio:** Se integran ambos lados de la ecuación en el dominio Ω , permitiendo así reducir el orden de derivación de los términos diferenciales mediante la integración por partes. Esto permite cumplir con los requisitos de continuidad de la solución. A continuación, se muestra el resultado:

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla^2 \psi(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi f(x, y) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla^2 \psi d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \varphi d\Omega - \int_{\partial\Omega} \nabla \psi \cdot \vec{n} \varphi dS$$

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\psi \cdot \vec{n} \varphi \, dS - \int_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \varphi f(x, y) \, d\Omega$$

4. Aplicación de condiciones de contorno: En la formulación débil aparecen dos tipos de condiciones de contorno:

- **Condiciones esenciales (Dirichlet):** se prescriben imponiendo directamente el valor de la incógnita en la frontera, por ejemplo $\psi = 0$ en $\partial\Omega$. En el método numérico, se aplican eliminando los grados de libertad correspondientes de la matriz y del término independiente.
- **Condiciones naturales (Neumann):** corresponden al valor de la derivada normal $\nabla\psi \cdot \vec{n} \varphi$ en la frontera. Estas aparecen de forma automática en la formulación débil a través del término de contorno:

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\psi \cdot \vec{n} \varphi \, dS.$$

3.2. Procedimiento de Aplicación del MEF

Para aplicar el método de elementos finitos, se aplica el siguiente procedimiento:

1. **Discretización del dominio:** Se divide el dominio en celdas computacionales, formando la malla del problema.
2. **Formulación de ecuaciones:** Se determinan las ecuaciones que gobiernan el problema y se reformulan en forma débil.
3. **Aplicación de las condiciones de contorno:** Se imponen las distintas restricciones del problema.
4. **Resolución del sistema de ecuaciones:** Para resolver el sistema de ecuaciones se usan métodos numéricos. En el caso del presente trabajo, se utiliza el software "FreeFem++", que permite resolver las ecuaciones, además de representar los contornos sobre el dominio.

3.3. Set Up Numérico

Para todas las simulaciones llevadas a cabo en FreeFem++, se ha mantenido el siguiente conjunto de parámetros comunes:

- **Software**
Entorno de programación FreeFem++ (incluyendo la librería `ffmatlib.idp`), resolviendo en 2D las ecuaciones de Navier–Stokes incompresibles en régimen estacionario mediante linealización de Oseen y método de Newton.

■ Inicialización y solución

- Campos iniciales:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad p = 0.$$

- Bucle de Newton:

- Máximo de iteraciones: 15.

- Sistema linealizado resuelto con elementos finitos P2–P1:

En cada iteración se linealiza el sistema no lineal en torno a la aproximación actual $(\mathbf{u}^{(k)}, p^{(k)})$. Siendo F el vector de residuos de la discretización y DF su jacobiana respecto de las incógnitas, el método de Newton se expresa como:

$$DF(\mathbf{u}^{(k)}, p^{(k)}) \delta \mathbf{u}^{(k)} = -F(\mathbf{u}^{(k)}, p^{(k)}),$$

con la actualización

$$(\mathbf{u}^{(k+1)}, p^{(k+1)}) = (\mathbf{u}^{(k)}, p^{(k)}) + \delta \mathbf{u}^{(k)}.$$

De forma compacta, también puede escribirse como:

$$DF(\mathbf{u}^{(k+1)}, p^{(k+1)}) \approx DF(\mathbf{u}^{(k)}, p^{(k)}) + F(\mathbf{u}^{(k)}, p^{(k)}).$$

- Cálculo de error tras cada iteración:

$$\text{err} = \frac{\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_\infty}{\|u^{(k+1)}\|_\infty} + \frac{\|p^{(k+1)} - p^{(k)}\|_\infty}{\|p^{(k+1)}\|_\infty}.$$

■ Criterios de convergencia

- Convergencia: $\text{err} < \varepsilon = 10^{-6}$.
- Corte por *blow-up*: si iteración $k > 3$ y $\text{err} > 10$.

■ Salvado de resultados

- Malla (.msh).
- Campos de velocidad y presión (archivos .dat).
- Funciones de corriente (ψ) y potencial (ψ_{pot}).
- Perfiles en superficie (suelo y rampa) en 100 puntos: presión, vorticidad y esfuerzos viscosos para los casos de rampa con arista viva y rampa con radio de acuerdo.

3.4. Verificación Numérica de Problemas Básicos en FreeFem++

Se van a resolver numéricamente dos problemas básicos con solución analítica mediante el MEF en FreeFem++ para verificar así los resultados, verificar que las ecuaciones usadas en la resolución son las correctas y verificar que se pueden resolver problemas de manera precisa.

Los dos problemas básicos son:

- **Flujo potencial alrededor un cilindro**
- **Obtención del perfil de Poiseuille en un conducto**

3.4.1. Perfil de Poiseuille

El perfil de Poiseuille es la solución analítica del problema de flujo viscoso en conducto con paredes paralelas o conducto cilíndrico bajo un gradiente de presión constante. La solución analítica es la siguiente:

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Donde:

- ΔP es la diferencia de presión entre la entrada y salida del conducto.
- μ es la viscosidad dinámica del fluido.
- L es la longitud del conducto.
- R es el radio del conducto.

El conducto 2D en el que se va a realizar la simulación tiene un diámetro de 1 m y una longitud de 40 m. Tras definir la geometría en FreeFem++, se discretiza el dominio, obteniendo la malla.

Para conseguir el perfil de Poiseuille en FreeFem++, se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible y estacionario en formulación fuerte:

$$\begin{cases} \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{v} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

A continuación, se reformulan en forma débil para poder ser implementadas en FreeFem++, obteniéndose:

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega + \int_{\Omega} ((u_1, u_2) \cdot \nabla) u_1 v_1 d\Omega - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \vec{v}) d\Omega = 0, \quad \forall v_1$$

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega + \int_{\Omega} ((u_1, u_2) \cdot \nabla) u_2 v_2 d\Omega - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \vec{v}) d\Omega = 0, \quad \forall v_2$$

$$\int_{\Omega} q(\nabla \cdot (u_1, u_2)) d\Omega = 0, \quad \forall q$$

Donde:

- u_1 es la componente de la velocidad en el eje x .
- u_2 es la componente de la velocidad en el eje y .
- v_1 es la componente de la función test de la velocidad en el eje x .
- v_2 es la componente de la función test de la velocidad en el eje y .
- p es la presión.
- q es la función test de la presión.
- ν es la viscosidad cinemática.

Como condiciones iniciales se ha impuesto una velocidad de flujo:

$$\vec{u} = (U_{\infty}, 0) = 1 \text{ m/s}$$

Como condiciones de contorno, se han impuesto:

- En la entrada del conducto se ha impuesto una condición tipo Dirichlet de flujo uniforme donde la velocidad del flujo es:

$$\vec{u} = (U_{\infty}, 0) = 1 \text{ m/s}$$

- En la salida del conducto se ha impuesto una condición tipo Dirichlet, estableciendo en esta superficie un valor de presión de referencia $P = 0$.
- En las paredes se ha impuesto una condición de no deslizamiento donde $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

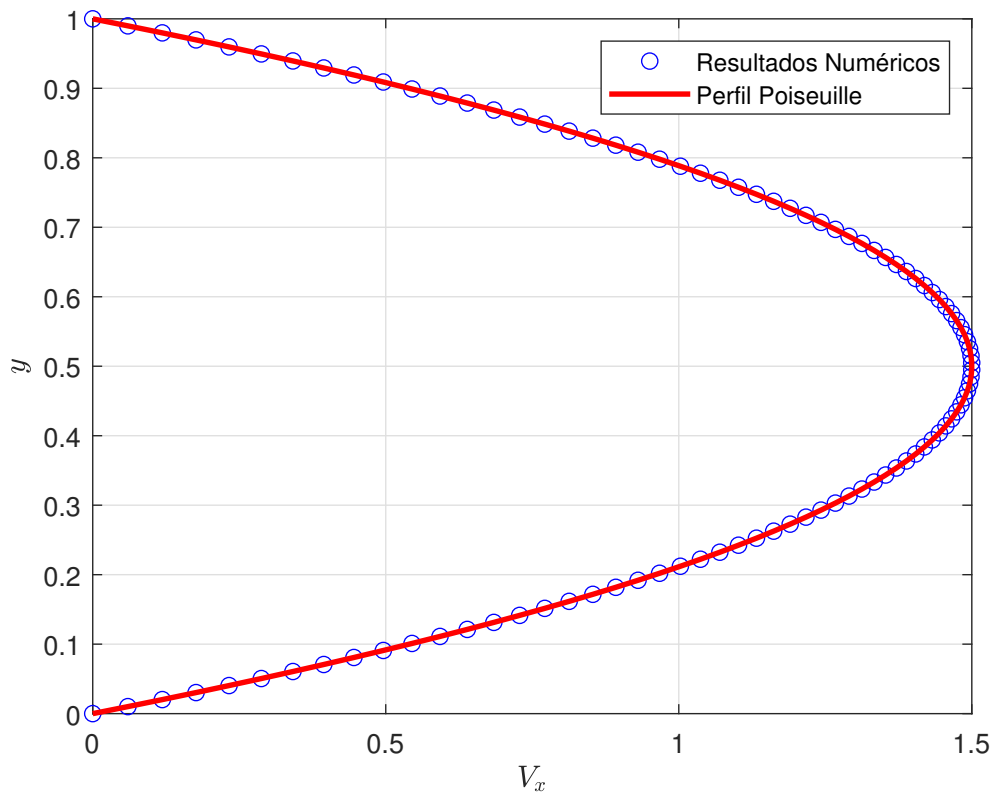


Figura 7: Comparación de resultados numéricos y solución analítica del campo de velocidades del flujo en la dirección axial dentro de un conducto

Una vez impuestas las condiciones iniciales y de contorno, se realiza la simulación. En la figura 7 se muestra tanto la solución analítica como la numérica para el campo de velocidades del flujo en la dirección axial:

Se puede apreciar como las velocidades son menores cuanto más se alejan del eje del conducto y como se ajusta perfectamente la solución numérica a la solución analítica pudiéndose observar perfectamente un perfil de velocidades de Poiseuille.

34.2. Flujo Potencial alrededor de un Cilindro

El problema básico que se va a estudiar es el de flujo potencial alrededor de un cilindro. La geometría del problema mallada se muestra en la figura 8.

La distribución de presiones alrededor del cilindro se puede obtener de forma analítica como:

$$C_p = 1 - 4 \sin^2(\theta)$$

Donde:

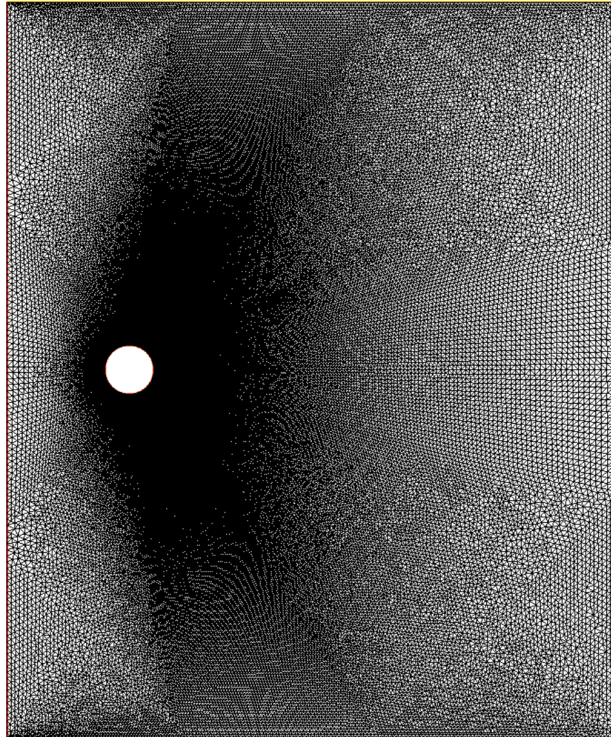


Figura 8: Malla usada en el problema de flujo potencial sobre cilindro

- C_p es el coeficiente de presión.
- θ es el ángulo en coordenadas polares que define el cilindro.

Para resolver numéricamente el problema, se va a resolver la función de corriente del problema para un caso de flujo potencial:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Para poder usar el Método de Elementos Finitos (MEF), se reformula en forma débil, multiplicando por una función test ω a ambos lados de la ecuación e integrando en todo el dominio:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \omega \, d\Omega = 0$$

Llevando a cabo la integración por partes, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \omega \, d\Omega = 0$$

Se van a imponer las siguientes condiciones de contorno:

- **En la entrada:** Se impone una condición tipo Dirichlet de flujo uniforme donde la velocidad del flujo es $\vec{u} = (U_\infty, 0) = 1$ m/s. Sabiendo que $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, se resuelve la ecuación diferencial, obteniendo:

$$\psi = y$$

- **En la parte superior:** Se impone que la función de corriente tiene un valor constante $\psi = H$, siendo H la distancia entre el eje de simetría de la geometría y las paredes superiores e inferiores.
- **En la parte inferior:** Se impone que la función de corriente tiene un valor constante $\psi = -H$.
- **En el cilindro:** Se impone que la función de corriente tiene un valor nulo $\psi = 0$.

Resolviendo la ecuación en todo el dominio computacional, se obtienen los resultados mostrados en la figura 9:

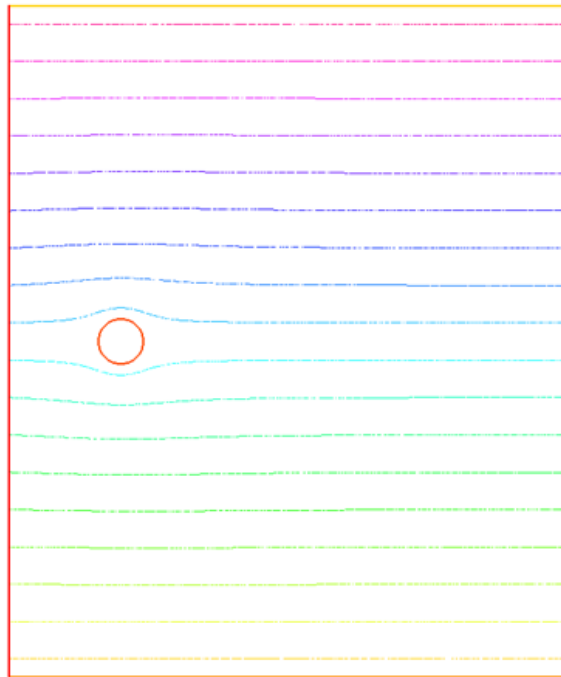


Figura 9 Líneas de corriente del problema de flujo potencial alrededor de un cilindro

Se define la velocidad como:

$$\vec{u} = (u_x, u_y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Teniendo definidas las velocidades en todo el dominio, se usa la siguiente expresión, que representa el coeficiente de presión adimensional C_p en un flujo 2D incompresible, para determinar el coeficiente de presión a lo largo de las líneas de corriente:

$$C_p = 1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$$

Se obtienen los coeficientes de presión de las líneas de corriente que coinciden con la superficie del cilindro y se comparan con la solución analítica. La comparación de los resultados numéricos con la solución analítica se muestra en la ilustración 10:

Se puede apreciar que existe una pequeña discrepancia entre los resultados numéricos y la solución analítica. Se calcula el error relativo máximo, el cual se da para $\theta = \pi/2$ y se obtiene un valor de 6.67 %

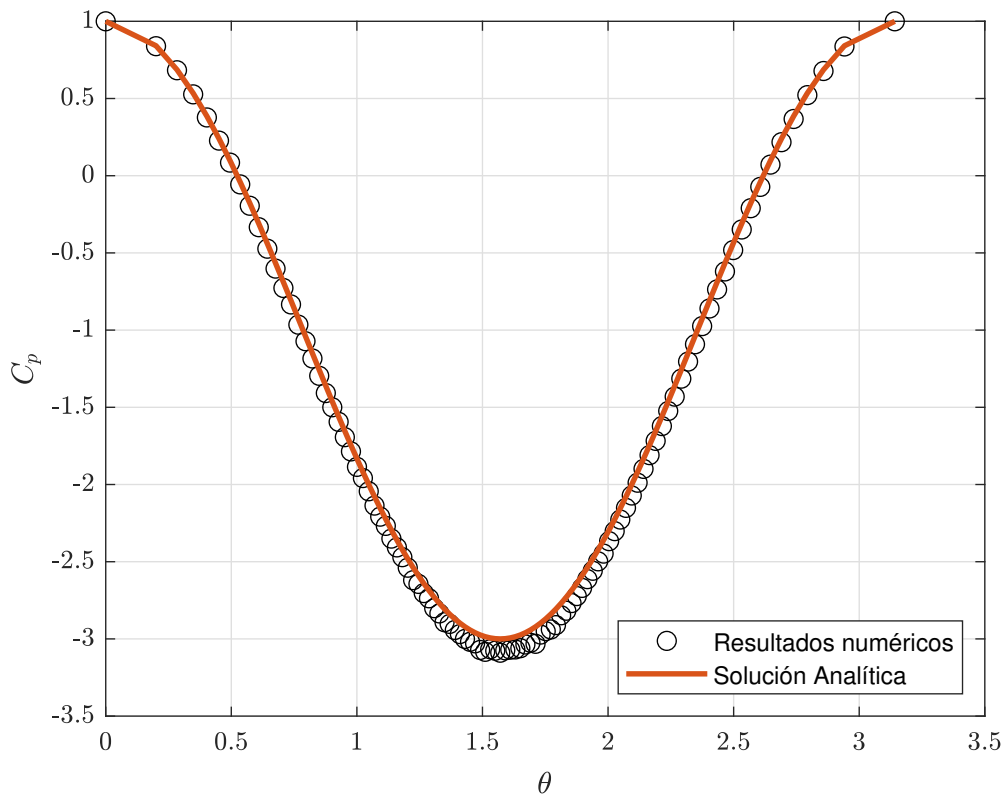


Figura 10: Comparación de resultados numéricos y solución analítica del coeficiente de presión sobre la superficie del cilindro del problema de flujo potencial alrededor de un cilindro

4. Flujo Laminar sobre una Rampa con Arista Viva

En este capítulo se va a presentar el problema y se va a realizar un estudio de convergencia de malla para el caso con arista viva. La discusión física de los resultados será llevada a cabo en el capítulo 6.

Una arista viva (*sharp edge*) es una discontinuidad geométrica brusca donde dos superficies planas o curvas se encuentran formando un ángulo definido, generando un vértice. Es decir, no existe transición suavizada ni redondeada entre ambas superficies. Este tipo de geometrías es una de las dos geometrías que van a ser analizadas en este Trabajo Fin de Máster.

En este problema se va a analizar el desprendimiento de un flujo bidimensional, viscoso e incompresible en una arista viva. El fluido de trabajo tendrá una densidad ρ , una viscosidad dinámica μ y una viscosidad cinemática ν . El flujo tendrá una velocidad v y la longitud característica del problema será D . Con todos estos parámetros se puede caracterizar el Reynolds como:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu},$$

Además, se ha adimensionalizado el flujo para que, manteniendo la velocidad a un metro por segundo y la longitud característica a un metro, se pueda variar y obtener los distintos regímenes de Reynolds como:

$$Re = \frac{1}{\nu}$$

Una vez descrito el problema, el esquema del problema se muestra en la figura 11:

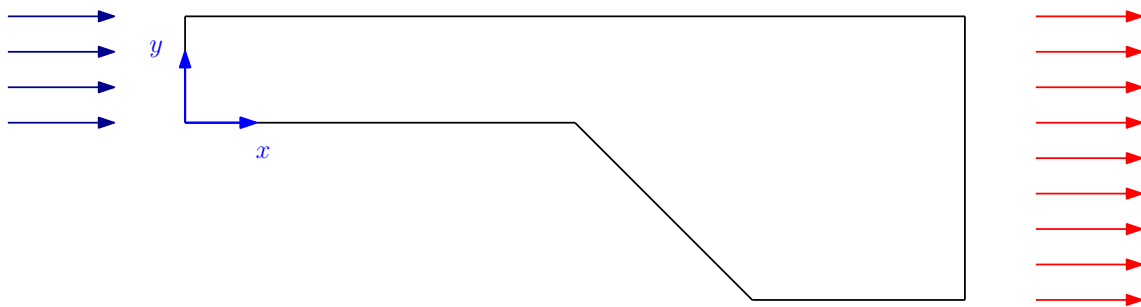


Figura 11: Esquema del problema (arista viva)

4.1. Geometría con Arista Viva

Para poder definir la geometría, es necesario conocer los distintos parámetros que la definen, los cuales se muestran a continuación:

- **Longitud inicial:** $L_i = 70uds$
- **Longitud de salida:** $L_o = 40uds$
- **Longitud de la rampa:** $L_f = 30uds$
- **Altura inicial:** $H_i = 20uds$
- **Ángulo de la rampa:** α
- **Altura de salida:** $H_o = H_i + L_f \tan \alpha$

La geometría acotada se muestra en la figura 12:

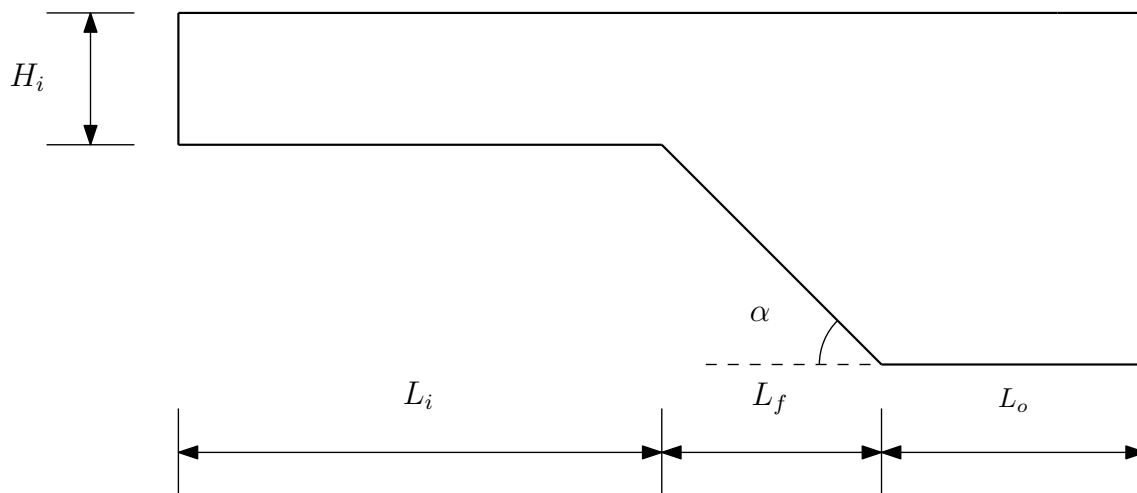


Figura 12: Geometría con arista viva acotada

4.2. Condiciones de Contorno y Origen de coordenadas

El origen de coordenadas del problema se ha situado en el vértice que forman la entrada (inlet) y el suelo (floor). Además, se ha definido el nombre de los contornos. Tanto el origen de coordenadas como los contornos se pueden apreciar en la figura 13:

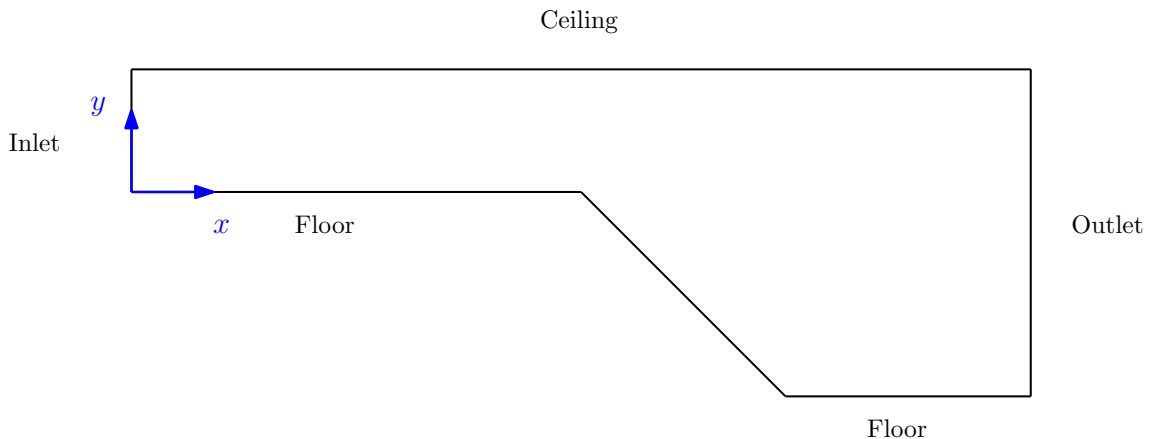


Figura 13: Contorno y origen de coordenadas del problema (arista viva)

Las condiciones de contorno impuestas en el problema son las siguientes:

- **Entrada (inlet):** Dirichlet en ambas componentes de velocidad. Se ha impuesto un perfil de Blasius de velocidades en x .

$$u_1 = \tanh\left(\frac{y}{e}\right), \quad u_2 = 0,$$

- **Techo (ceiling):** Dirichlet (simetría, velocidad normal nula).

$$u_2 = 0,$$

- **Suelo y rampa (floor):** Dirichlet (no deslizamiento).

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0,$$

- **Salida (outlet):** Dirichlet en la componente normal de la velocidad; la presión queda libre (condición natural, equivalente a $\partial_n p = 0$).

$$u_2 = 0,$$

4.3. Estudio de Convergencia de Malla

El estudio de convergencia de malla es fundamental en simulaciones numéricas para asegurar que los resultados obtenidos no dependen del tamaño de la malla utilizada. Si la malla es demasiado gruesa, pueden aparecer errores importantes en la predicción de variables como la velocidad o la presión, sobre todo en zonas con fuertes gradientes como cerca de la arista viva.

Realizar este estudio consiste en comparar los resultados obtenidos con diferentes refinamientos de malla. Si al refinar la malla los resultados apenas varían, se puede

considerar que la solución es independiente de la malla y, por tanto, fiable. De este modo, también se optimizan los recursos computacionales, evitando usar una malla más fina de lo necesario.

Para poder definir el refinamiento que va a tener la malla, se ha definido en FreeFem++ una variable N_{mesh} que indica el número de divisiones por unidad de longitud que tendrá cada uno de los contornos. Además, en las zonas críticas del problema donde se quieren capturar los resultados, es decir, en *floor*, se ha añadido un refinamiento mayor e igual a dos veces el valor de N_{mesh} . Gracias a esto y al mallado automático de FreeFem++, se puede obtener la malla del problema en función de la variable N_{mesh} . Las distintas mallas sometidas al estudio de convergencia de malla son las siguientes.

- **$N_{mesh}=1.5$:** Consta de un total de 36734 triángulos y 18723 vértices.
- **$N_{mesh}=1.75$:** Consta de un total de 51578 triángulos y 26205 vértices.
- **$N_{mesh}=2.25$:** Consta de un total de 83209 triángulos y 42139 vértices.
- **$N_{mesh}=2.5$:** Consta de un total de 101746 triángulos y 51466 vértices.

Para cada una de mallas, se ha calculado la presión, vorticidad y esfuerzos viscosos dimensionales a lo largo de todo el contorno *floor*. Representando los distintos resultados en función de la posición para cada uno de los valores de N_{mesh} se obtienen las figuras 14, 15 y 16:

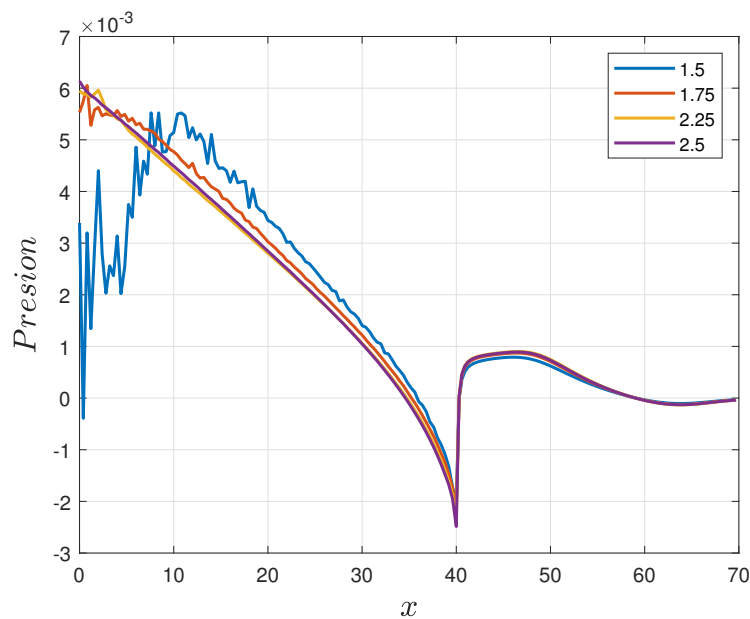


Figura 14: Presión dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla

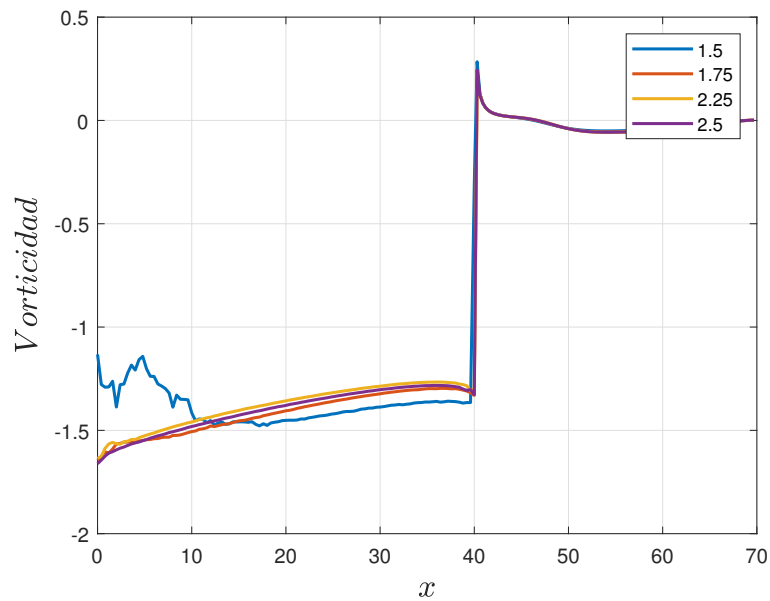


Figura 15: Vorticidad dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla

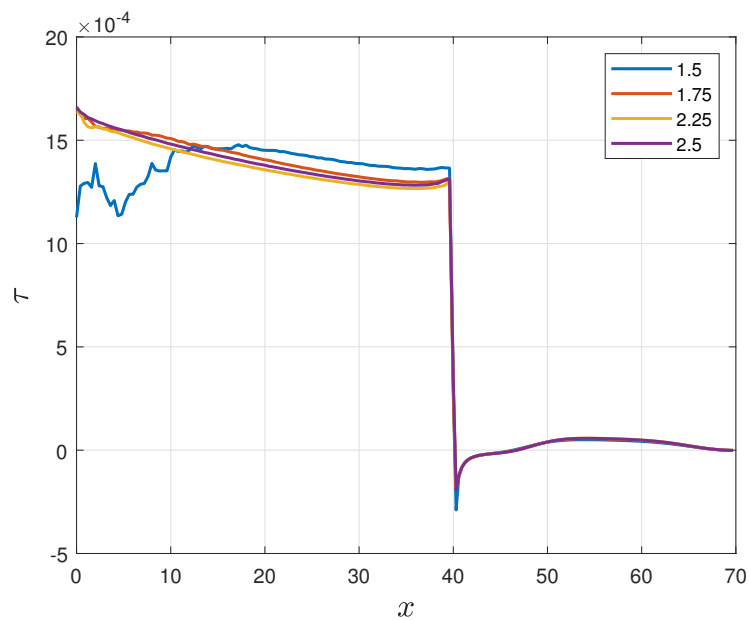


Figura 16: Esfuerzos Viscosos dimensionales a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla

Se puede apreciar que los resultados obtenidos son bastante similares en todos los casos salvo al principio. Esto se debe a que el flujo entra sin estar desarrollado, lo que

provoca gradientes de presión y velocidad altos mientras este se desarrolla. Una malla poco fina no captará bien estos gradientes y tendrá un alto error.

El criterio de aceptación es que el error relativo del punto de desprendimiento, calculado respecto de la malla de referencia, sea

$$\varepsilon_{\text{rel}} < 1 \times 10^{-2} \% (= 0.01 \%).$$

Para calcular el punto de desprendimiento, se obtienen los valores de x para los que los esfuerzos viscosos (τ) se anulan para cada uno de los refinamientos de mallas. Este punto corresponde con el punto de desprendimiento del flujo.

Denotando por $x_{\text{sep}}^{(r)}$ el valor en la malla de referencia y por $x_{\text{sep}}^{(h)}$ el obtenido con una malla genérica, el error relativo (expresado en porcentaje) se define como

$$\varepsilon_{\text{rel}} [\%] = 100 \frac{|x_{\text{sep}}^{(h)} - x_{\text{sep}}^{(r)}|}{|x_{\text{sep}}^{(r)}|}.$$

La tabla 1 recoge los errores relativos medidos (ya en %), habiéndose considerado como malla de referencia la malla con $N_{\text{mesh}} = 2.5$:

Nmesh	$\varepsilon_{\text{rel}} [\%]$	¿Cumple?
1.50	0.0908 %	No
1.75	0.0423 %	No
2.25	0.0006 %	Sí

Tabla 1: Convergencia de malla con arista viva usando como referencia la malla con $N_{\text{mesh}} = 2.5$.

De acuerdo con el criterio, se adopta $N_{\text{mesh}} = 2.25$ para el caso de Arista Viva. Es la única que satisface $\varepsilon_{\text{rel}} < 0.01 \%$ (presenta un error de $6 \times 10^{-4} \%$), mientras que las mallas más gruesas (1.50 y 1.75) exceden el criterio de selección por casi un orden de magnitud. Esta elección reduce considerablemente el gasto computacional, con una influencia casi nula en los resultados.

La malla con $N_{\text{mesh}}=2.25$ usada para las simulaciones se muestra en la figura 17:

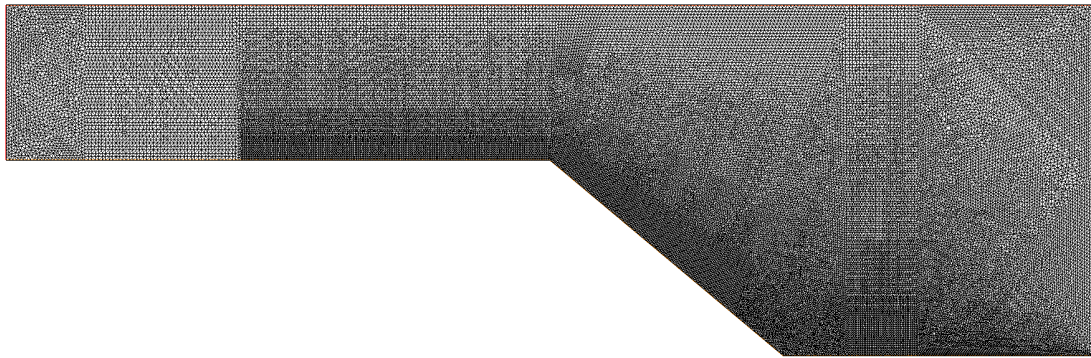


Figura 17: Malla usada para la resolución del problema (arista viva)

5. Flujo Laminar sobre una Rampa con Radio de Acuerdo

En este capítulo se va a presentar el problema y se va a realizar un estudio de convergencia de malla para el caso con radio de acuerdo. La discusión física de los resultados será llevada a cabo en el capítulo 6.

En este problema se va a analizar el desprendimiento de un flujo bidimensional, viscoso e incompresible en una rampa con radio de acuerdo. El fluido de trabajo tendrá una densidad ρ , una viscosidad dinámica μ y una viscosidad cinemática ν . El flujo tendrá una velocidad v y la longitud característica del problema será D . Con todos estos parámetros se puede caracterizar el Reynolds como:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu},$$

De igual manera que en el problema con geometría con arista viva, se ha adimensionalizado el flujo para que, manteniendo la velocidad a un metro por segundo y la longitud característica a un metro, se pueda variar y obtener los distintos regímenes de Reynolds como:

$$Re = \frac{1}{\nu}$$

Una vez descrito el problema, el esquema del problema se muestra en la figura 18:

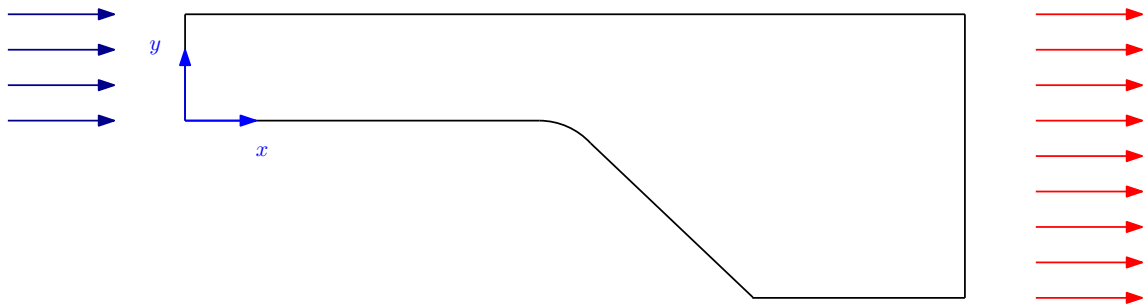


Figura 18: Esquema del problema (radio de acuerdo)

5.1. Geometría con Radio de Acuerdo

Para poder definir la geometría, es necesario conocer los distintos parámetros que la definen, los cuales se muestran a continuación:

- Longitud inicial: $L_i = 70uds$
- Longitud de salida: $L_o = 40uds$
- Longitud de la rampa: $L_f = 30uds$
- Radio de acuerdo: R
- Altura inicial: $H_i = 20uds$
- Ángulo de la rampa: α
- Altura de salida: $H_o = H_i + L_f \tan \alpha$

La geometría acotada se muestra en la figura 19:

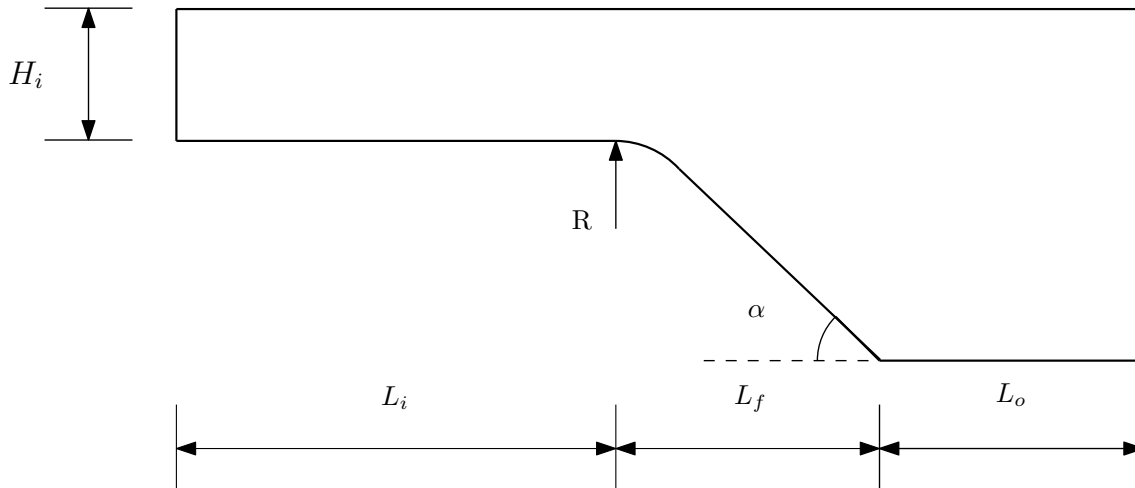


Figura 19: Geometría con radio de acuerdo acotada

5.2. Condiciones de Contorno y Origen de coordenadas

El origen de coordenadas del problema se ha situado en el vértice que forman la entrada (inlet) y el suelo (floor). Además, se ha definido el nombre de los contornos. Tanto el origen de coordenadas como los contornos se pueden apreciar en la figura 20:

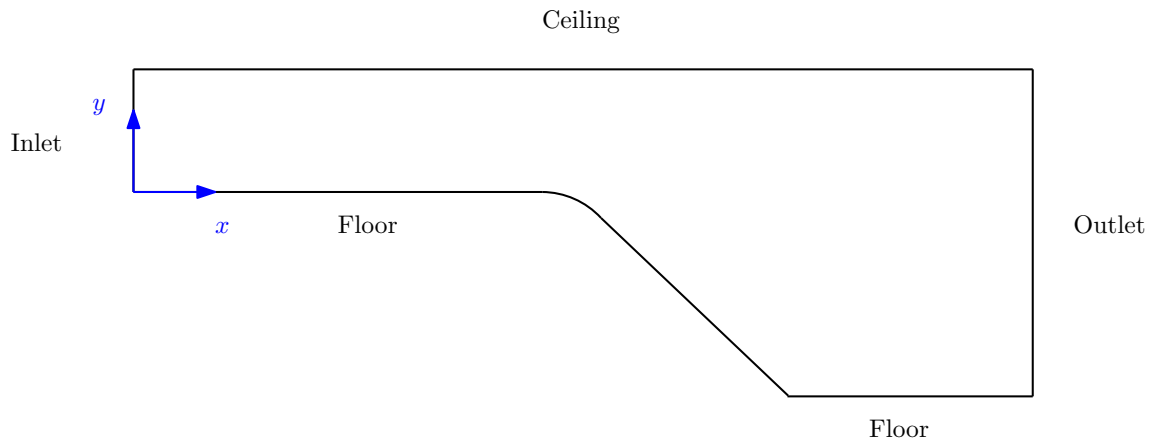


Figura 20: Contorno y origen de coordenadas del problema (radio de acuerdo)

Las condiciones de contorno impuestas en el problema son las siguientes:

- **Entrada (inlet):** Dirichlet en ambas componentes de velocidad. Se ha impuesto un perfil de Blasius de velocidades en x .

$$u_1 = \tanh\left(\frac{y}{e}\right), \quad u_2 = 0,$$

- **Techo (ceiling):** Dirichlet (simetría, velocidad normal nula).

$$u_2 = 0,$$

- **Suelo y rampa (floor):** Dirichlet (no deslizamiento).

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0,$$

- **Salida (outlet):** Dirichlet en la componente normal de la velocidad; la presión queda libre (condición natural, equivalente a $\partial_n p = 0$).

$$u_2 = 0,$$

5.3. Estudio de Convergencia de Malla

De igual manera que para el caso con arista viva, se realiza la convergencia de malla para el caso con radio de acuerdo. Las distintas mallas que se han estudiado son las siguientes:

- **Nmesh=1.5:** Consta de un total de 39263 triángulos y 19998 vértices.
- **Nmesh=1.75:** Consta de un total de 51489 triángulos y 26160 vértices.
- **Nmesh=2.25:** Consta de un total de 86968 triángulos y 44034 vértices.
- **Nmesh=2.5:** Consta de un total de 110419 triángulos y 55820 vértices.

Para cada una de mallas, se ha calculado la presión, vorticidad y esfuerzos viscosos dimensionales a lo largo de todo el contorno *floor*. Representando los distintos resultados en función de la posición para cada uno de los valores de *Nmesh* se obtienen las figuras 21, 22 y 23:

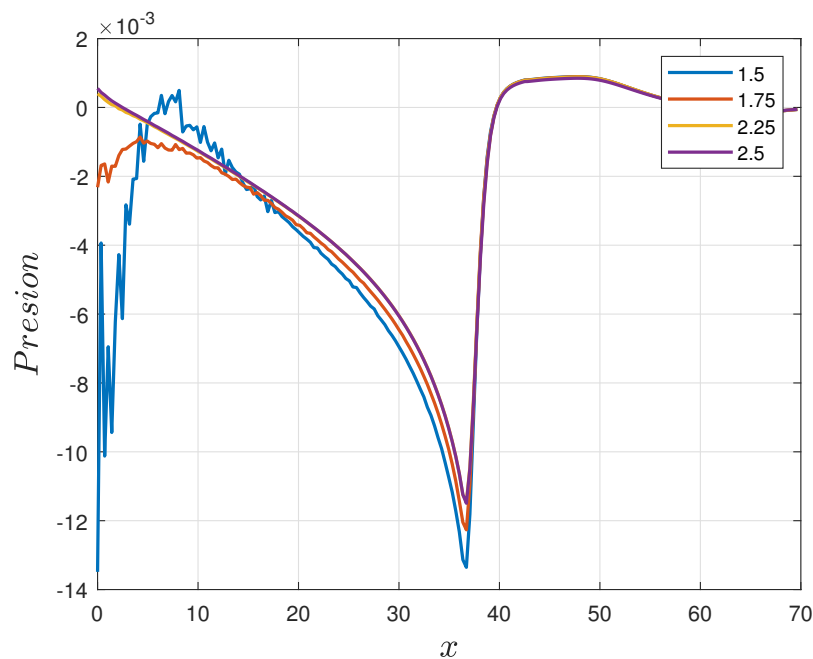


Figura 21: Presión dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla

Se puede apreciar que los resultados obtenidos son bastante similares en todos los casos salvo al principio. Esto se debe a que el flujo entra sin estar desarrollado, lo que provoca gradientes de presión y velocidad altos mientras este se desarrolla. Una malla poco fina no captará bien estos gradientes y tendrá un alto error.

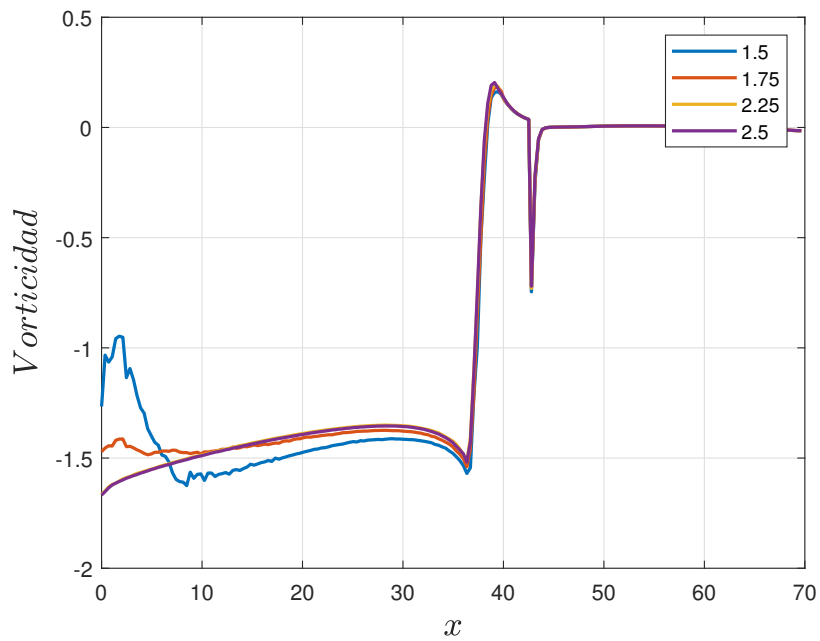


Figura 22: Vorticidad dimensional a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla

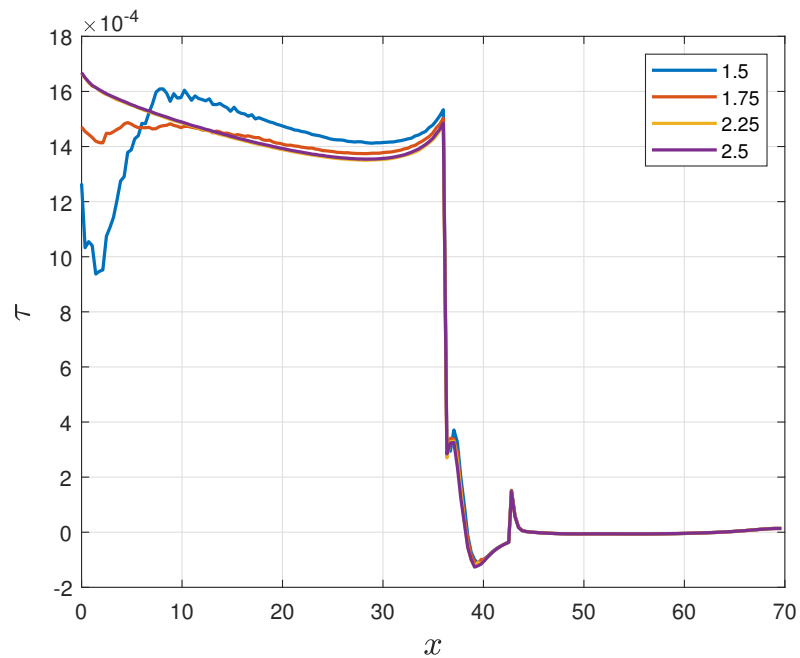


Figura 23: Esfuerzos Viscosos dimensionales a lo largo del contorno floor para distintos refinamientos de malla

El mismo procedimiento de verificación se repite para el caso de con radio de redondeo. Se consideran de nuevo las discretizaciones caracterizadas por $N_{mesh} = [1.50, 1.75, 2.25]$, tomando como referencia la más refinada ($N_{mesh} = 2.5$).

El criterio de aceptación se mantiene: el error relativo debe ser

$$\varepsilon_{rel} < 1 \times 10^{-2} \% (= 0.01 \%).$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2:

Nmesh	ε_{rel}	¿Cumple?
1.50	0.0471 %	No
1.75	0.0275 %	No
2.25	0.0065 %	Sí

Tabla 2: Convergencia de malla para el caso con radio de acuerdo usando como referencia la malla con $N_{mesh} = 2.5$.

Selección de malla. Al igual que en el caso de Arista Viva, únicamente la malla más refinada ($N_{mesh} = 2.25$) satisface el criterio de convergencia, con un error relativo de $6.5 \times 10^{-3} \%$, claramente por debajo del umbral exigido de 0.01 %. Las mallas de menor resolución (1.50 y 1.75) superan dicho límite por más de un orden de magnitud. De nuevo, esta elección reduce considerablemente el gasto computacional, con una influencia casi nula en los resultados.

La malla con $N_{mesh}=2.25$ usada para las simulaciones se muestra en la figura 24:

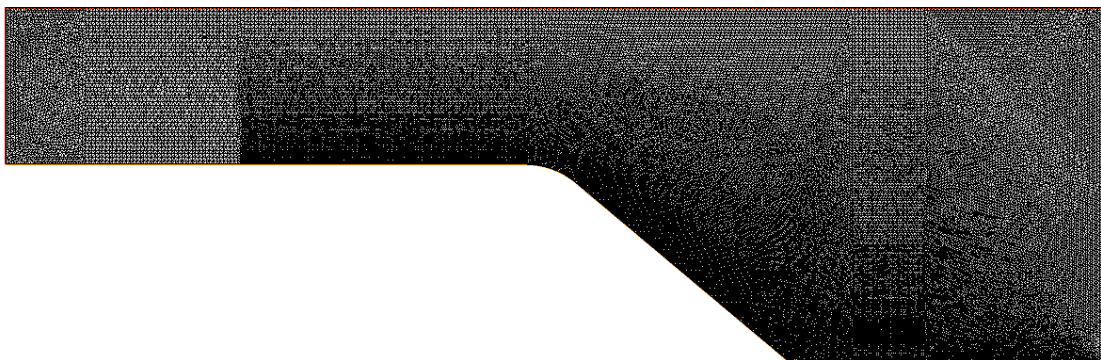


Figura 24: Malla usada para la resolución del problema (radio de acuerdo)

6. Resultados

6.1. Cálculo de los Parámetros Característicos del Desprendimiento

A partir de los resultados numéricos obtenidos con FreeFem++, se han calculado varios parámetros representativos del fenómeno de desprendimiento, incluyendo la posición del punto de separación, el ángulo geométrico de desprendimiento γ , el ángulo de salida β , el ángulo de separación θ y la velocidad crítica u_{cp} . A continuación se describe el procedimiento seguido para su determinación:

- **Punto de desprendimiento** (x_c, y_c) : Se localiza evaluando el esfuerzo cortante tangencial τ a lo largo de la pared inferior del dominio. El punto de separación se identifica como el primer cruce por cero de τ , es decir, el punto donde cambia de signo. La coordenada x_c se obtiene por interpolación lineal en el intervalo en el que se anula τ , mientras que y_c se deduce directamente de la geometría de la rampa.
- **Ángulo geométrico de desprendimiento** γ : Una vez localizada la posición del desprendimiento, se calcula γ como el ángulo entre la tangente a la pared en dicho punto y la horizontal. Para rampas rectas, este ángulo coincide con el de inclinación geométrica local; en zonas curvas, se obtiene a partir de la derivada de la superficie.
- **Ángulo de salida del flujo** β : Se estima como el ángulo formado entre la dirección de la línea de corriente que emerge desde el punto de separación y el vector velocidad local. Para ello, se realiza una interpolación de segundo orden de las componentes de velocidad (u_x, u_y) y de la geometría de la línea de corriente extraída a partir de $\psi = 0$.
- **Ángulo de separación** θ : Se define como el ángulo entre la tangente a la superficie en el punto de separación y el vector de velocidad incidente sobre la pared. En configuraciones con rampa recta, este ángulo puede relacionarse con la diferencia angular entre la orientación de la rampa y la dirección del flujo.
- **Velocidad crítica** u_{cp} : Se calcula como $u_{cp} = \sqrt{-dp/ds}$, donde dp/ds es el gradiente de presión evaluado a lo largo de la línea de corriente que pasa por el punto de separación. Este valor se interpola a partir del campo de presión simulado, utilizando un ajuste cúbico suavizado (splines).

En la figura 25 se muestra un esquema visual con todos los parámetros característicos de flujo que se van a calcular a continuación:

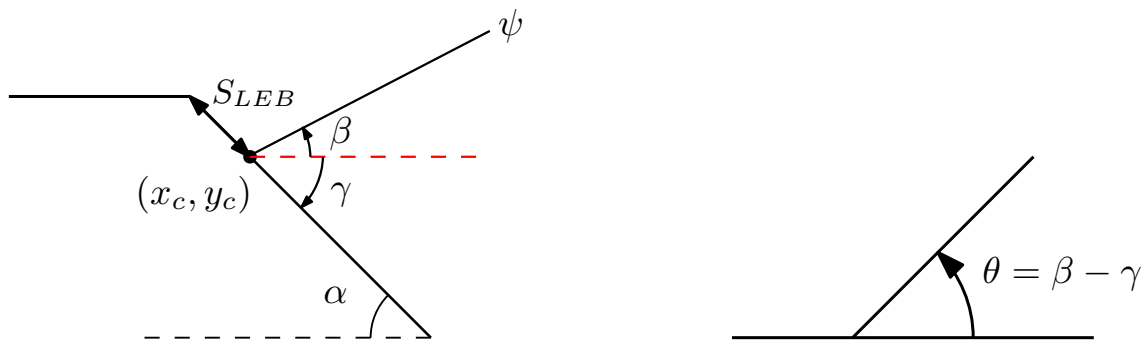


Figura 25: Esquema visual donde se muestran los distintos parámetros del desprendimiento que van a ser analizados

6.2. Influencia del Número de Reynolds y del Radio de Curvatura para α Constante

6.2.1. Ángulo de rampa $\alpha = 10^\circ$

En la figura 26 se muestran los resultados correspondientes a $\alpha = 10^\circ$, donde identifican las siguientes tendencias:

1. **Posición de separación s_{LEB}** : Disminuye de forma clara con Re para todos los valores de R y tiende a estabilizarse a partir de $Re \gtrsim 700$. La estabilización ocurre en torno a $s_{LEB} \approx 0.2$ para todos los casos.
2. **Ángulo geométrico de desprendimiento γ** : Se mantiene prácticamente constante en -10° a lo largo de todo el intervalo de Reynolds, independientemente del valor de R . Este valor coincide con el ángulo de inclinación de la rampa, α , lo que sugiere desprendimiento tangente a la geometría.
3. **Ángulo de salida relativo β** : Presenta una tendencia ascendente continua en todos los casos, con una pendiente suave pero clara. A mayor R , se observa un valor de β ligeramente más alto para un mismo Re , especialmente notable a partir de $Re \approx 500$.
4. **Ángulo de separación θ** : Crece con el número de Reynolds en todos los casos, alcanzando valores próximos a 15° para $Re = 1000$. Las diferencias entre los distintos radios R son leves pero persistentes.
5. **Velocidad crítica u_{cp}** : Muestra una fase inicial de crecimiento más marcado para bajos Re ($Re \lesssim 300$) y posteriormente tiende a oscilar mínimamente. Para $Re \gtrsim 700$, las variaciones son menores a 0.005 en todos los casos.

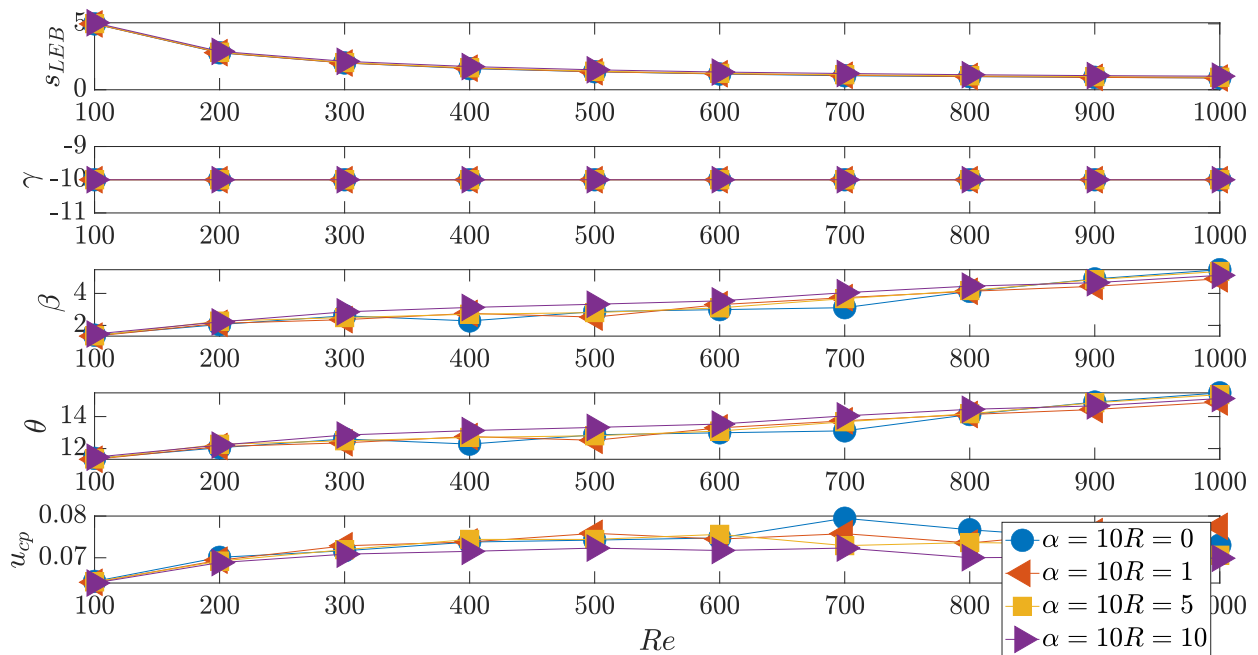


Figura 26: Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 10^\circ$

6.2.2. Ángulo de rampa $\alpha = 15^\circ$

En la figura 27 se muestran los resultados correspondientes a $\alpha = 15^\circ$, donde identifican las siguientes tendencias:

1. **Posición de separación s_{LEB}** : Disminuye sistemáticamente con Re en todos los valores de R , con una estabilización progresiva a partir de $Re \gtrsim 700$. Las diferencias entre curvas son pequeñas y el comportamiento es muy similar al caso de $\alpha = 10^\circ$.
2. **Ángulo geométrico de desprendimiento γ** : Permanece constante en torno a -15° para $R = 0, 1, 5$, coincidiendo con el ángulo geométrico de la rampa. Para $R = 10$, sin embargo, γ comienza a aumentar a partir de $Re \gtrsim 200$, lo que indica un cambio significativo en el régimen de separación en este caso.
3. **Ángulo de salida relativo β** : Presenta un comportamiento ligeramente oscilante en todo el rango de Reynolds. A pesar de ello, se observa una tendencia general creciente, más evidente para $R = 0$ y $R = 5$, mientras que para $R = 10$ el crecimiento es menos acusado.
4. **Ángulo de separación θ** : Se comporta de forma similar a β , con una oscilación leve en función de Re , especialmente para $R = 10$. Para el resto de radios, θ crece moderadamente y muestra indicios de estabilización para $Re \gtrsim 700$.

5. **Velocidad crítica** u_{cp} : Muestra oscilaciones significativas a lo largo de todo el intervalo de Reynolds, sin una tendencia clara de crecimiento o estabilización. La dispersión entre curvas es mayor en comparación con otros parámetros, especialmente en los casos de $R = 5$ y $R = 10$, donde se observa una mayor sensibilidad al número de Reynolds.

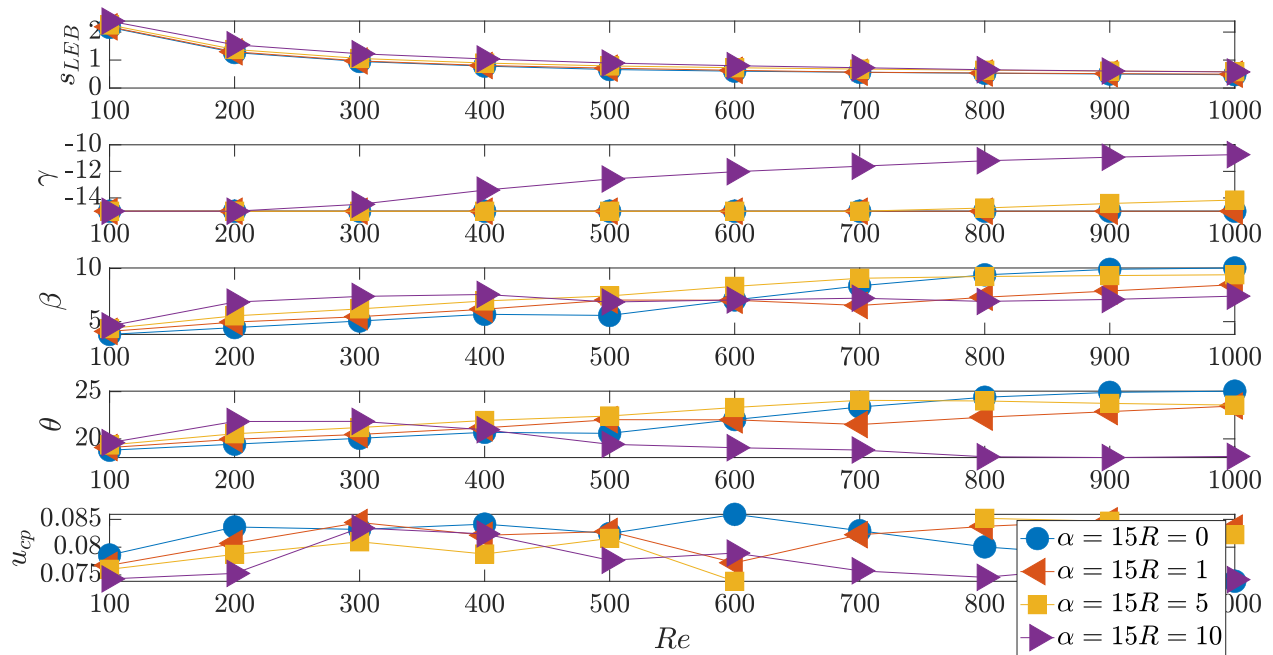


Figura 27: Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 15^\circ$

6.2.3. Ángulo de rampa $\alpha = 20^\circ$

En la figura 28 se muestran los resultados correspondientes a $\alpha = 20^\circ$, donde identifican las siguientes tendencias:

1. **Posición de separación** s_{LEB} : Disminuye con Re en todos los casos, alcanzando una estabilización progresiva para $Re \gtrsim 700$. El comportamiento es análogo al observado en los casos con $\alpha = 10^\circ$ y 15° .
2. **Ángulo geométrico de desprendimiento** γ : Permanece constante e igual a -20° para $R = 0$ y $R = 1$, en correspondencia con el ángulo de la rampa. En cambio, para $R = 5$ y $R = 10$, γ comienza a incrementarse a partir de $Re \gtrsim 200$ y $Re \gtrsim 100$, respectivamente, reflejando una desviación progresiva del punto de desprendimiento respecto a la geometría.

3. **Ángulo de salida relativo β** : Presenta un comportamiento oscilante en los primeros valores de Re , con una tendencia hacia la estabilización para $Re \gtrsim 600$. Las diferencias entre los distintos valores de R tienden a reducirse a medida que Re aumenta.
4. **Ángulo de separación θ** : Experimenta ligeras oscilaciones en régimen bajo, y una evolución suavemente creciente en Re , con signos de estabilización a partir de $Re \gtrsim 500$. Las curvas correspondientes a $R = 0, 1$ y 5 muestran una mayor coherencia entre sí que la de $R = 10$, la cual se mantiene en valores más bajos.
5. **Velocidad crítica u_{cp}** : Exhibe un patrón oscilante en todo el intervalo de Re , con una amplitud más reducida para $Re \gtrsim 700$, lo cual indica una estabilización parcial. No obstante, las curvas para distintos valores de R siguen mostrando cierta dispersión incluso a Reynolds elevados.

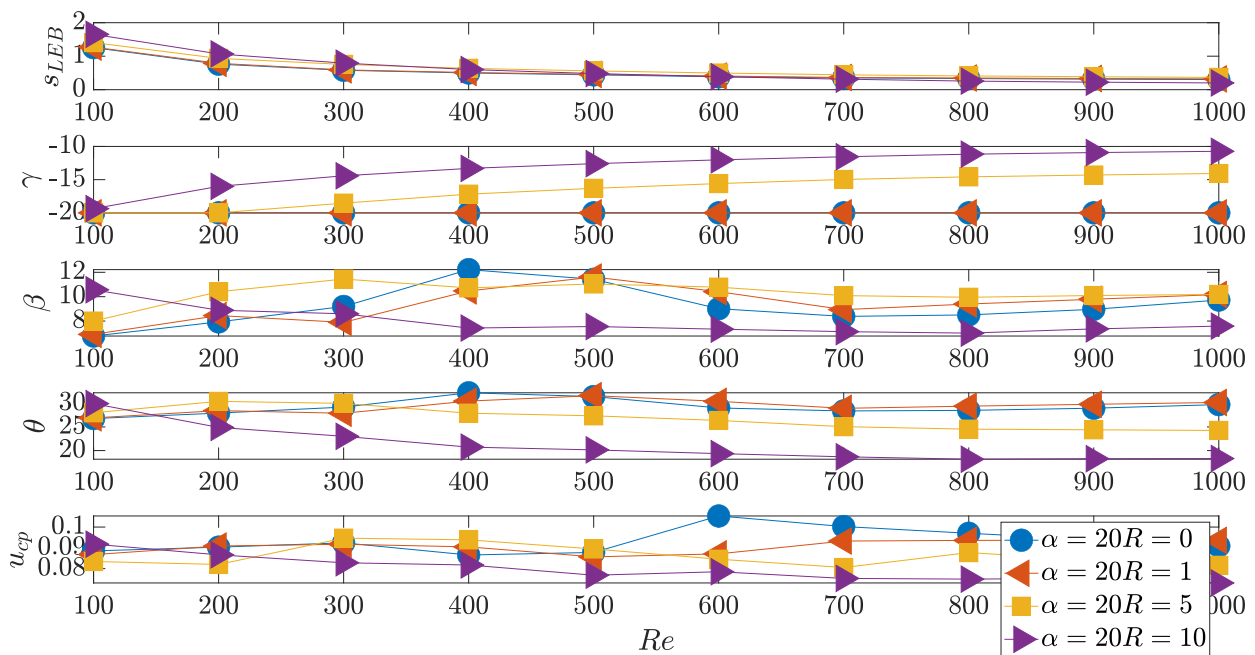


Figura 28: Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 20^\circ$

6.2.4. Ángulo de rampa $\alpha = 25^\circ$

En la figura 29 se muestran los resultados correspondientes a $\alpha = 25^\circ$, donde identifican las siguientes tendencias:

1. **Posición de separación s_{LEB}** : Disminuye claramente con el número de Reynolds para todos los valores de R , estabilizándose a partir de $Re \gtrsim 700$. El comportamiento es análogo al observado en los ángulos de rampa menores.

2. **Ángulo geométrico de desprendimiento γ** : Se mantiene constante e igual a -25° para $R = 0$ y $R = 1$, en concordancia con el ángulo de la rampa. Sin embargo, para $R = 5$ y $R = 10$, γ aumenta progresivamente desde $Re \gtrsim 100$, estabilizándose en valores menos negativos para $Re \gtrsim 700$.
3. **Ángulo de salida relativo β** : Presenta oscilaciones visibles para $Re \lesssim 500$, especialmente en $R = 0$ y $R = 1$, pero tiende a estabilizarse para $Re \gtrsim 600$. El valor de β es significativamente mayor que en los casos con ángulos más bajos.
4. **Ángulo de separación θ** : Para $R = 5$ y $R = 10$, se observa un decrecimiento progresivo que se estabiliza hacia $Re \gtrsim 400$. En cambio, para $R = 0$ y $R = 1$, θ oscila en régimen bajo y tiende a valores constantes a partir de $Re \gtrsim 600$.
5. **Velocidad crítica u_{cp}** : En los casos de $R = 5$ y $R = 10$, se observa una disminución continua sin una clara estabilización. Para $R = 0$, tras una oscilación inicial, u_{cp} se estabiliza a partir de $Re \gtrsim 600$, mientras que en $R = 1$ las oscilaciones se mantienen a lo largo de todo el rango.

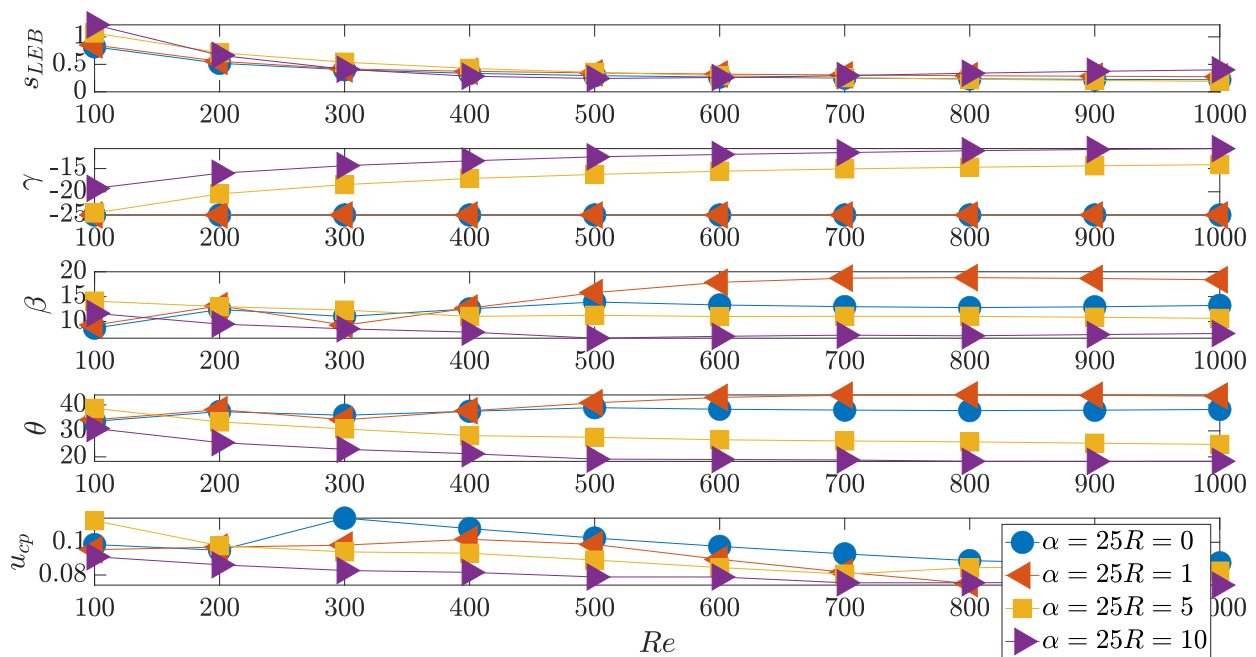


Figura 29. Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 25^\circ$

6.2.5. Ángulo de rampa $\alpha = 30^\circ$

En la figura 30 se muestran los resultados correspondientes a $\alpha = 30^\circ$, donde identifican las siguientes tendencias:

1. **Posición de separación** s_{LEB} : Presenta una disminución clara con Re para $R = 0, 1, 5$, tendiendo a estabilizarse a partir de $Re \gtrsim 600$. Sin embargo, en el caso de $R = 10$, se observa un crecimiento progresivo de s_{LEB} hasta $Re \approx 700$, donde comienza a estabilizarse.
2. **Ángulo geométrico de desprendimiento** γ : Para $R = 0$ y $R = 1$, γ permanece constante en -30° , coincidiendo con el ángulo de la rampa. En cambio, para $R = 5$ y $R = 10$, γ crece con Re , estabilizándose hacia $Re \gtrsim 400-500$.
3. **Ángulo de salida relativo** β : Se observan oscilaciones a bajos Reynolds para $R = 0$ y $R = 1$, pero tiende a estabilizarse a partir de $Re \gtrsim 600$. Para $R = 5$ y $R = 10$, β decrece de forma gradual con Re y muestra signos de estabilización a altos valores de Reynolds.
4. **Ángulo de separación** θ : En todos los casos, θ tiende hacia valores constantes para $Re \gtrsim 600$, aunque presenta oscilaciones moderadas en el régimen de bajos Reynolds. La separación angular es mayor en los casos con $R = 0$ y $R = 1$.
5. **Velocidad crítica** u_{cp} : Permanece relativamente constante en función de Re en todos los casos, salvo por oscilaciones iniciales para $R = 0$. El caso de $R = 1$ muestra un comportamiento menos uniforme, con cierta variabilidad incluso a Reynolds altos.

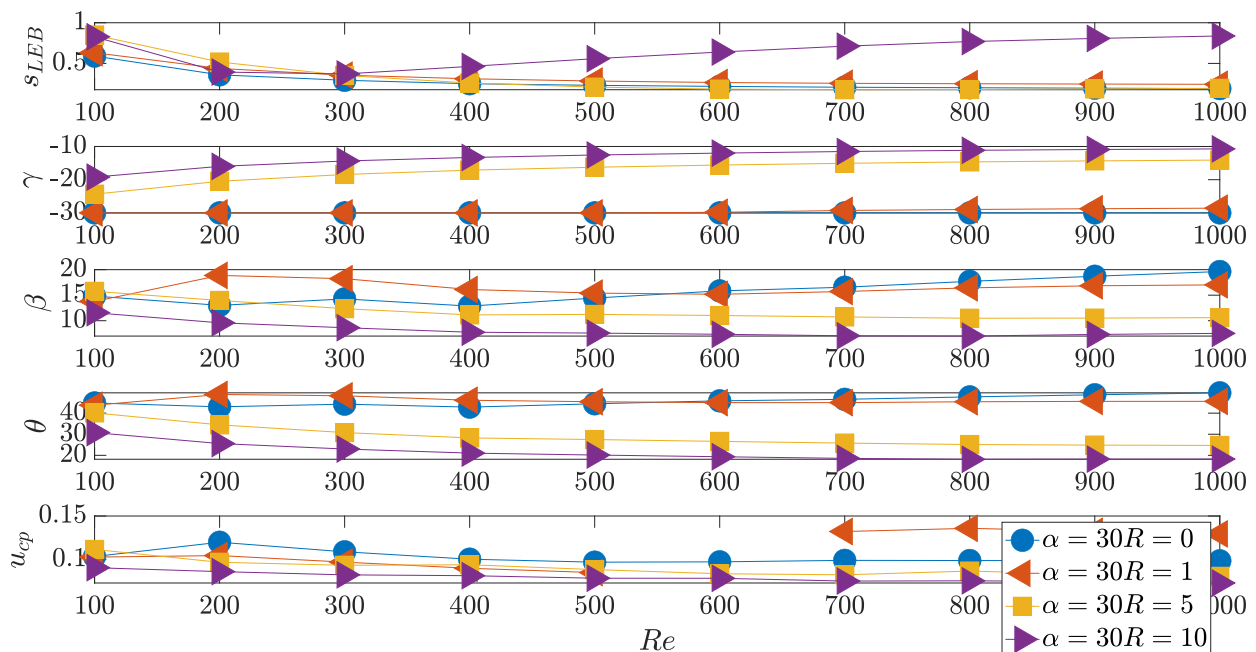


Figura 30: Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 30^\circ$

6.2.6. Ángulo de rampa $\alpha = 40^\circ$

En la figura 31 se muestran los resultados correspondientes a $\alpha = 40^\circ$, donde identifican las siguientes tendencias:

1. **Posición de separación** s_{LEB} : Permanecen prácticamente constantes para $R = 0$, $R = 1$ y $R = 5$ a lo largo de todo el rango de Reynolds. En cambio, para $R = 10$ se observa un crecimiento progresivo de s_{LEB} hasta aproximadamente $Re \approx 600-700$, donde comienza a estabilizarse.
2. **Ángulo geométrico de desprendimiento** γ : Para $R = 0$, γ permanece constante en -40° , en correspondencia con el ángulo geométrico de la rampa. Para $R = 1$ y $R = 5$, γ crece ligeramente hasta $Re \approx 600$, donde se estabiliza. El caso de $R = 10$ presenta un valor significativamente menos negativo desde el inicio y muestra un crecimiento más sostenido.
3. **Ángulo de salida relativo** β : Muestra oscilaciones en todo el intervalo de Re para $R = 0$ y $R = 1$. En cambio, para $R = 5$ y $R = 10$, β se mantiene prácticamente constante, con un leve decrecimiento inicial que se estabiliza rápidamente.
4. **Ángulo de separación** θ : Se observa una oscilación moderada en $R = 1$, mientras que en $R = 0$ hay un ligero crecimiento que se estabiliza a partir de $Re \gtrsim 500$. Para $R = 5$ y $R = 10$, θ presenta un decrecimiento paulatino seguido de estabilización hacia $Re \approx 400-500$.
5. **Velocidad crítica** u_{cp} : Muestra una tendencia decreciente en todos los casos. Este descenso es más pronunciado para $R = 1$, mientras que los otros radios presentan una caída más gradual. La estabilización comienza en torno a $Re \gtrsim 700$.

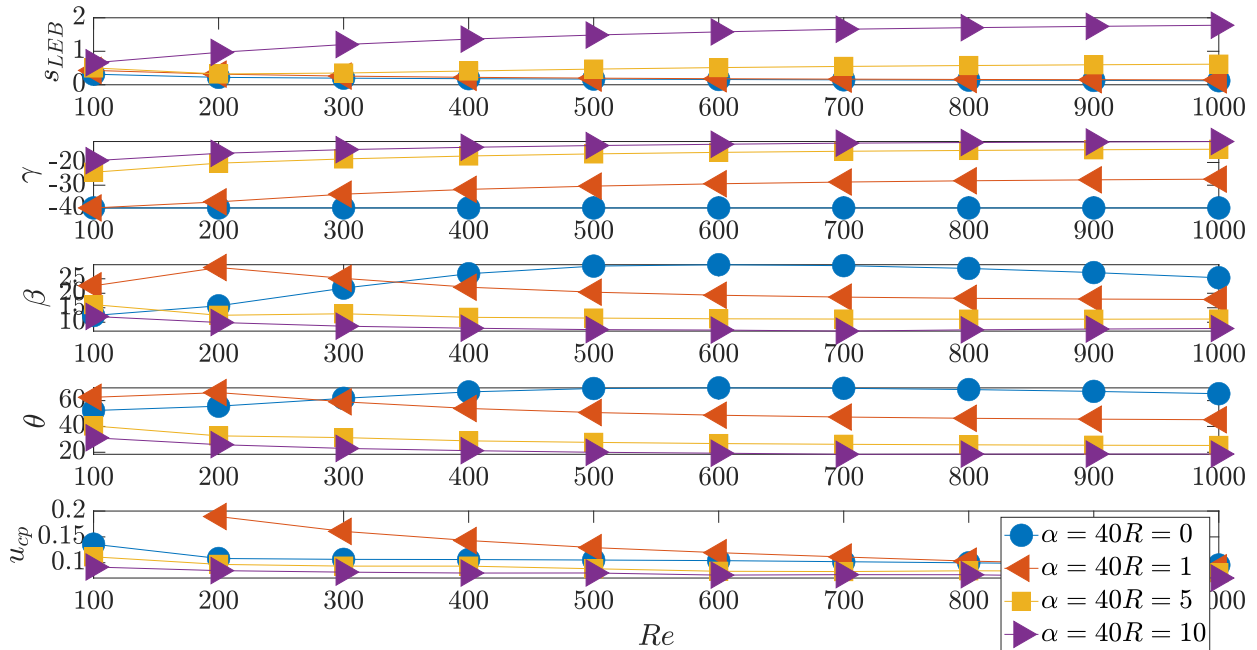


Figura 31: Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 40^\circ$

6.2.7. Ángulo de rampa $\alpha = 50^\circ$

En la figura 32 se muestran los resultados correspondientes a $\alpha = 50^\circ$, donde identifican las siguientes tendencias:

1. **Posición de separación s_{LEB} :** Permanece constante a lo largo de todo el rango de Re para $R = 0$ y $R = 1$. En el caso de $R = 5$, se observa un leve crecimiento seguido de estabilización. Para $R = 10$, el crecimiento con Re es más acusado y la estabilización se alcanza hacia $Re \approx 600$.
2. **Ángulo geométrico de desprendimiento γ :** Para $R = 0$, γ permanece constante e igual a -50° , coincidiendo con el ángulo de la rampa. Para $R = 1, 5$ y 10 , se aprecia un crecimiento suave con Re que se estabiliza rápidamente alrededor de $Re \approx 400$.
3. **Ángulo de salida relativo β :** Presenta oscilaciones marcadas para $R = 0$ y $R = 1$ hasta $Re \approx 600$, a partir de donde tiende a estabilizarse. En cambio, para $R = 5$ y $R = 10$, β se mantiene prácticamente constante a lo largo de todo el rango.
4. **Ángulo de separación θ :** En $R = 0$, se observan pequeñas oscilaciones con una ligera tendencia decreciente que se estabiliza a partir de $Re \approx 500$. Para $R = 1, 5$ y 10 , θ permanece prácticamente constante, con un decrecimiento leve solo en el caso de $R = 1$.

5. **Velocidad crítica u_{cp}** : Para $R = 1$, se produce un decrecimiento notable hasta $Re \approx 400-500$, seguido de estabilización. En los casos de $R = 0, 5$ y 10 , u_{cp} permanece prácticamente constante en todo el intervalo de Reynolds.

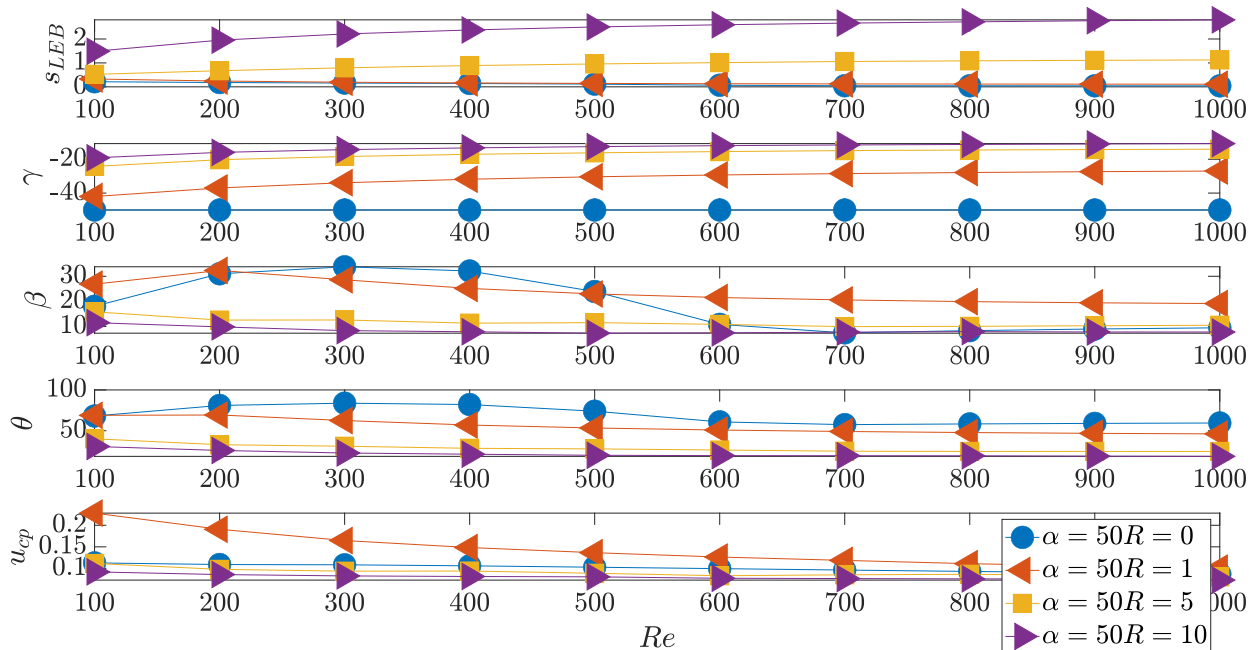


Figura 32: Influencia del número de Reynolds y del radio de curvatura sobre los distintos parámetros del desprendimiento para $\alpha = 50^\circ$

6.2.8. Síntesis de Resultados sobre la Influencia del Ángulo de Rampa α

A partir del análisis realizado para cada valor de α , se pueden extraer las siguientes conclusiones generales sobre la influencia de este parámetro en las variables estudiadas:

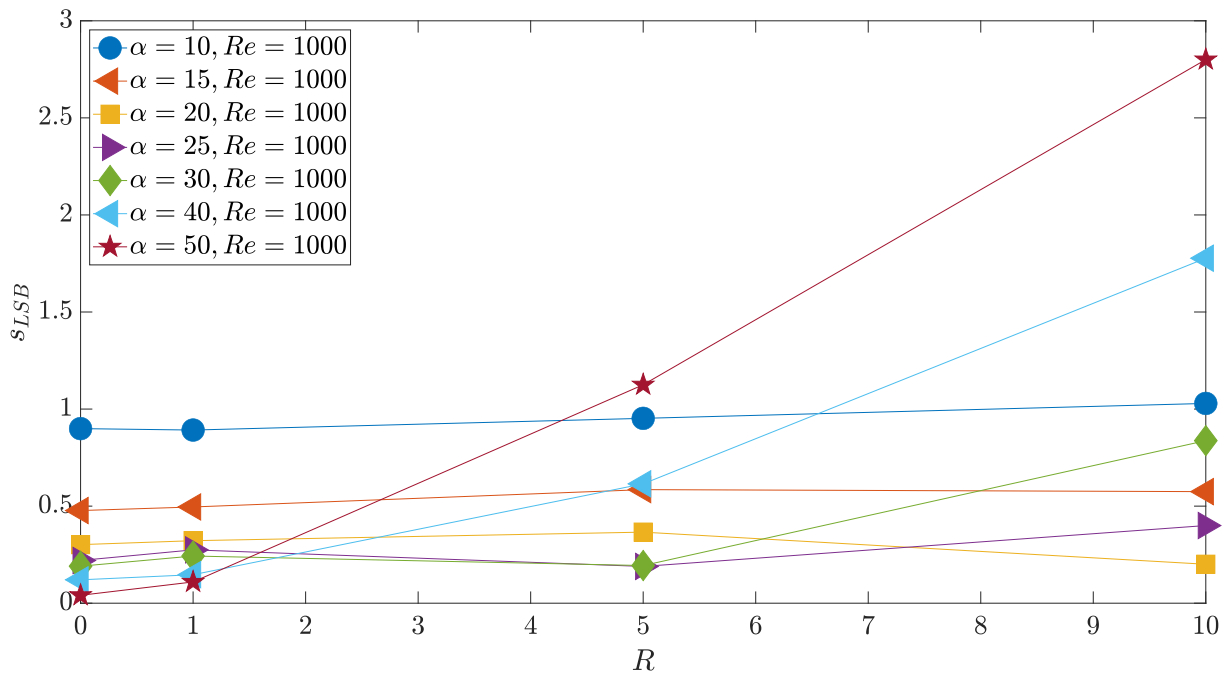
- **Posición de separación s_{LEB}** : Para ángulos bajos ($\alpha \leq 20^\circ$), la separación se produce de forma temprana y la variación de s_{LEB} con R es poco significativa. A medida que α aumenta, el redondeo adquiere un mayor efecto, permitiendo retrasar el punto de separación. Este efecto es especialmente evidente para $\alpha \geq 30^\circ$, donde el aumento de R conduce a un desplazamiento claro de s_{LEB} hacia aguas abajo.
- **Ángulo geométrico de desprendimiento γ** : Para bajos valores de α , γ coincide con el ángulo de la rampa y no muestra sensibilidad frente a Re ni a R . Sin embargo, para ángulos mayores, especialmente con rampas redondeadas, γ se desvía de la pendiente geométrica, disminuyendo su valor absoluto con el incremento del radio. Este fenómeno refleja una transición hacia un desprendimiento menos agresivo.

- **Ángulo de salida relativo β** : La sensibilidad de β frente a α depende del valor de R . En geometrías afiladas, β crece notablemente con el ángulo de rampa, reflejando un flujo más divergente. En cambio, en configuraciones suavizadas ($R = 5, 10$), β se mantiene más estable, e incluso decrece con α en ciertos regímenes.
- **Ángulo de separación θ** : Para radios bajos, θ crece con α , indicando una separación cada vez más oblicua respecto a la superficie. En cambio, para rampas redondeadas, θ se estabiliza con α , lo que sugiere un desprendimiento más controlado y menos dependiente de la inclinación de la rampa.
- **Velocidad crítica u_{cp}** : La influencia de α sobre u_{cp} es menos directa, pero puede observarse una ligera disminución con el ángulo de rampa, especialmente para radios intermedios. Este comportamiento se debe a la intensificación del gradiente de presión adverso con el aumento de α , que acentúa el carácter inestable del flujo en la región de separación.

6.3. Influencia del Radio de Curvatura R sobre s_{LEB} a $Re = 1000$

En la Figura 33 se representa la evolución de la posición de separación s_{LEB} en función del radio de redondeo R para distintos ángulos de inclinación α , manteniendo fijo el número de Reynolds en $Re = 1000$. Se identifican las siguientes observaciones:

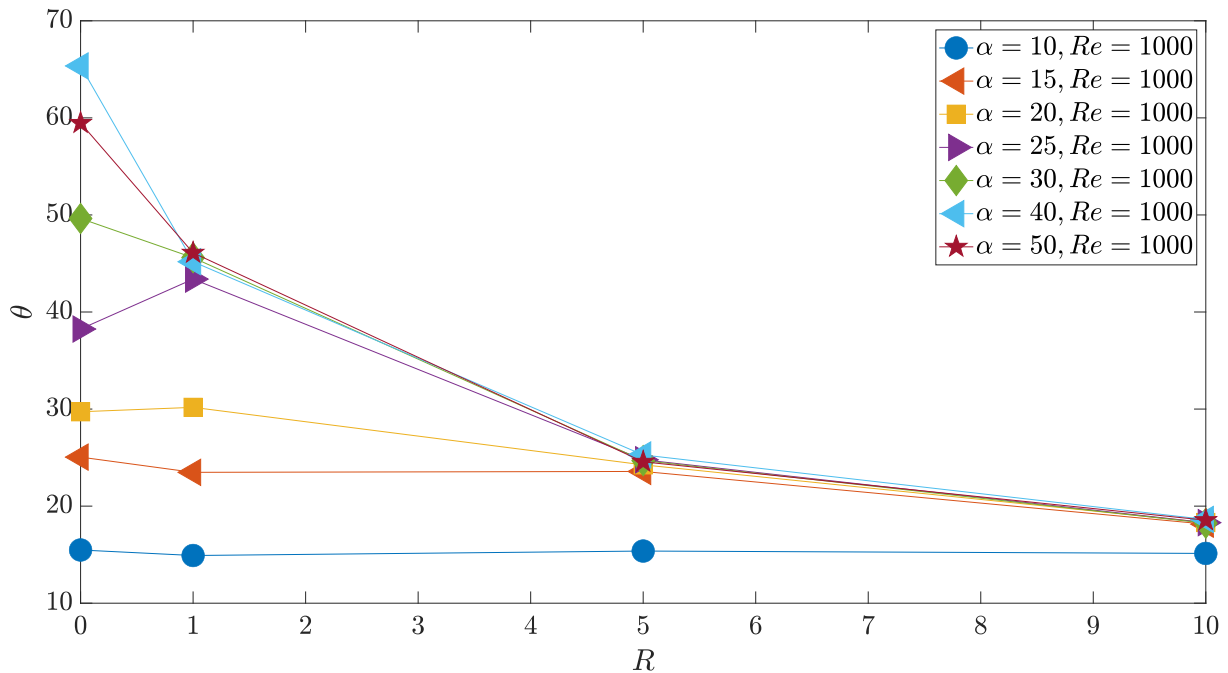
- Para ángulos bajos ($\alpha = 10^\circ, 15^\circ$), el valor de s_{LEB} muestra una débil dependencia con respecto a R . La separación se produce aproximadamente en la misma región para todos los radios analizados.
- A partir de $\alpha = 30^\circ$, el efecto del radio comienza a ser significativo. Se observa una tendencia creciente de s_{LEB} con R , lo que indica un desplazamiento del punto de separación hacia aguas abajo.
- Esta tendencia se acentúa conforme se incrementa el ángulo. Para $\alpha = 50^\circ$, el valor de s_{LEB} aumenta de forma pronunciada con el radio, alcanzando un valor cercano a $s_{LEB} \approx 3$ para $R = 10$, lo que implica un retraso sustancial del desprendimiento.
- Se concluye que el redondeo de la rampa actúa como un mecanismo de control pasivo eficaz, especialmente en configuraciones con inclinaciones pronunciadas, mitigando la separación temprana de la capa límite.

Figura 33: Influencia de R sobre s_{LEB} para $Re=1000$

6.4. Influencia del Radio R sobre el Ángulo de Separación θ a $Re = 1000$

La Figura 34 muestra la evolución del ángulo de separación θ en función del radio de redondeo R para diferentes valores del ángulo de rampa α , con número de Reynolds fijo en $Re = 1000$. Se observan las siguientes tendencias:

- Para ángulos bajos ($\alpha = 10^\circ, 15^\circ$), el ángulo θ se mantiene prácticamente constante para todos los valores de R , lo que indica una débil dependencia del desprendimiento respecto al redondeo geométrico.
- A partir de $\alpha = 25^\circ$, comienza a observarse una disminución progresiva de θ conforme se incrementa el radio R , aunque el cambio inicial es todavía moderado.
- Para ángulos más altos ($\alpha = 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$), la disminución de θ con R se vuelve mucho más pronunciada. Esta reducción indica que el redondeo suaviza la separación, permitiendo una transición más progresiva y retrasando la reorientación del flujo.
- En todos los casos con $\alpha \geq 25^\circ$, los valores de θ tienden a converger hacia un valor común para $R = 10$, lo que sugiere un efecto limitante del redondeo a altos radios.

Figura 34: Influencia de R sobre θ para $Re=1000$

6.5. Evolución de s_{LEB} frente al Ángulo de Rampa α a $Re = 1000$

En la Figura 35 se presenta la evolución de la posición de separación s_{LEB} con el ángulo de rampa α , para distintos valores del radio de redondeo R , con número de Reynolds constante $Re = 1000$. Se aprecian las siguientes tendencias:

- Para todos los radios analizados, s_{LEB} decrece con α en el intervalo $10^\circ \leq \alpha \leq 25^\circ$. Este comportamiento es consistente con un aumento de la intensidad del gradiente de presión adverso que adelanta el punto de separación.
- A partir de $\alpha \approx 25^\circ$, la tendencia se bifurca en función del radio:
 - Para $R = 0$ y $R = 1$, el valor de s_{LEB} continúa disminuyendo de forma progresiva hasta $\alpha = 50^\circ$, alcanzando valores mínimos.
 - Para $R = 5$ y, más acentuadamente, para $R = 10$, se observa un cambio de tendencia: s_{LEB} comienza a aumentar con α , alcanzando valores significativamente mayores a partir de $\alpha = 30^\circ$.
- Esta inversión en la tendencia para radios mayores indica que el redondeo actúa de forma más eficaz cuanto más pronunciado es el ángulo, aliviando la intensidad del gradiente de presión local y desplazando el punto de separación hacia aguas abajo.

- En particular, para $R = 10$, el incremento de s_{LEB} es especialmente marcado, superando los valores de 2.5 a $\alpha = 50^\circ$, lo que demuestra un efecto de control pasivo muy notable.

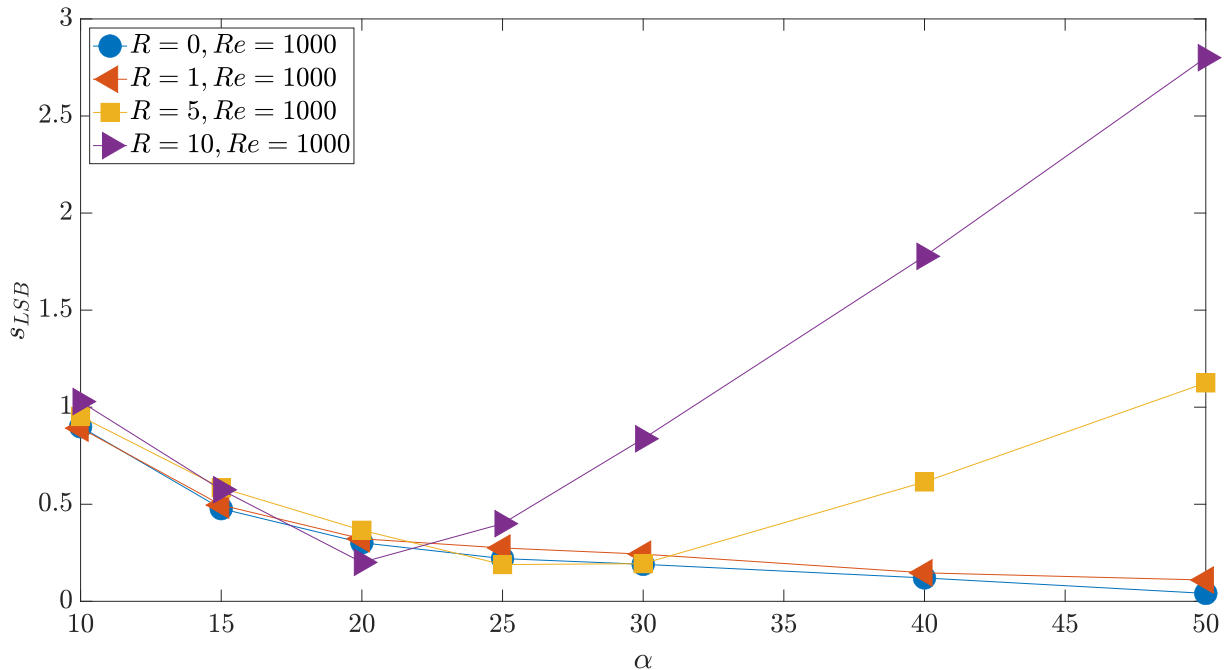


Figura 35: Influencia de α sobre s_{LEB} para $Re=1000$

6.6. Evolución de θ frente a α para Distintos R a $Re = 1000$

En la Figura 36 se muestra la evolución del ángulo de separación θ en función del ángulo de rampa α , para diferentes valores de radio R , con número de Reynolds constante $Re = 1000$. Se extraen las siguientes observaciones:

- Para radios elevados ($R = 5$ y $R = 10$), θ se mantiene prácticamente constante a lo largo de todo el intervalo de α , con un leve incremento inicial entre $\alpha = 10^\circ$ y 15° , seguido de una clara estabilización.
- Para radios más pequeños, el comportamiento es sensiblemente distinto:
 - Para $R = 0$, θ crece de forma continua hasta alcanzar un valor máximo en torno a $\alpha = 40^\circ$, tras lo cual decrece ligeramente.
 - Para $R = 1$, se observa un crecimiento progresivo de θ hasta $\alpha \approx 25^\circ-30^\circ$, a partir de donde se estabiliza en valores próximos a 45° .

- Estos resultados sugieren que el redondeo geométrico tiene un efecto estabilizador sobre θ , limitando su crecimiento con α . A medida que el radio aumenta, la separación se vuelve menos sensible a la pendiente de la rampa.
- En contraste, para configuraciones sin redondeo ($R = 0$) o con redondeo leve ($R = 1$), el ángulo de separación varía significativamente con el ángulo de rampa, reflejando una mayor agresividad del desprendimiento.

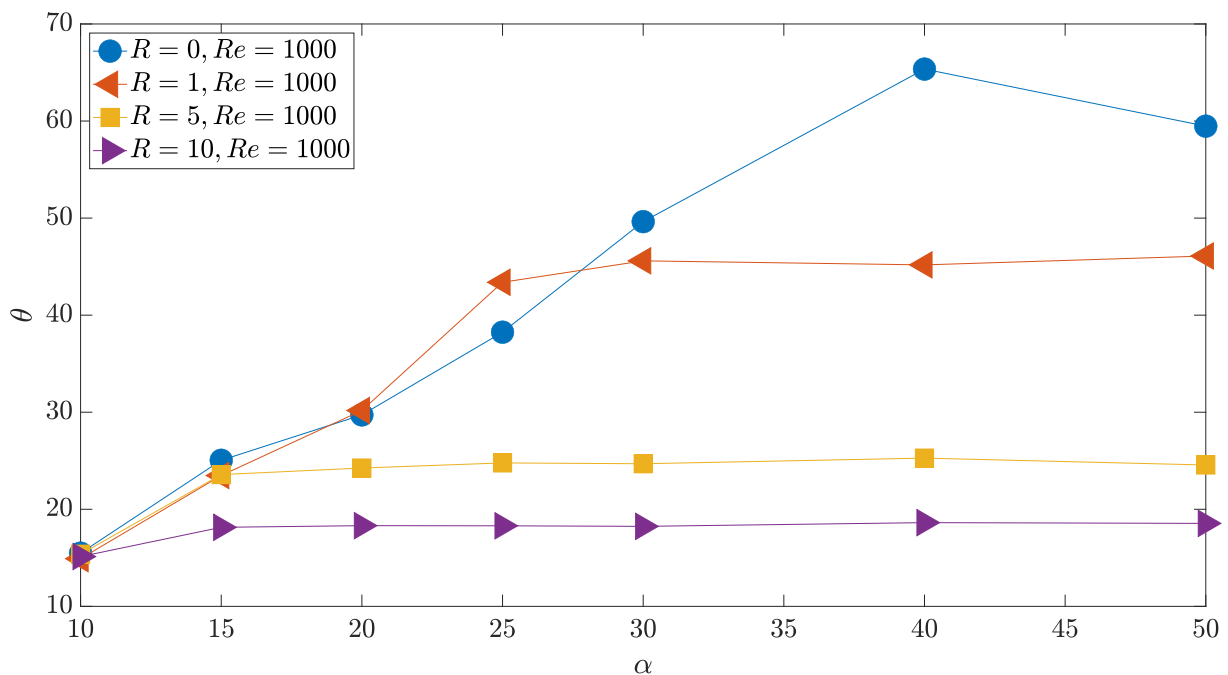


Figura 36: Influencia de α sobre θ para $Re=1000$

6.7. Influencia del radio de acuerdo (R) y número de Reynolds (Re) en los isocontornos de la función de corriente (ψ)

En la figura 37 se comparan los contornos de la función de corriente ψ para $R = 0$ (arista viva) y $R = 10$ (borde redondeado) en $Re = 100, 300, 600, 1000$ y $\alpha = 40^\circ$.

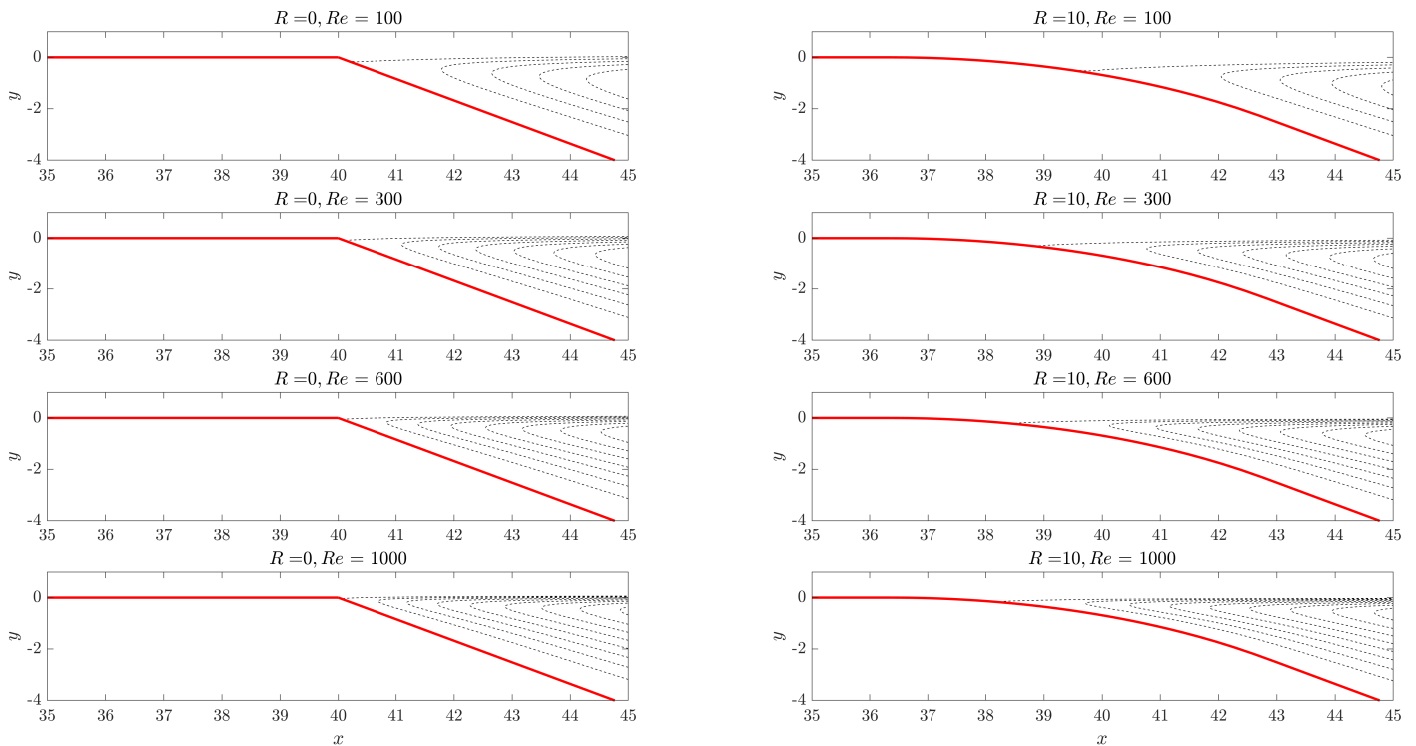


Figura 37: Isocontornos de ψ para $Re = [100, 300, 600, 1000]$, $R = [0, 10]$ y $\alpha = 40^\circ$

Tal y como se anticipaba en los resultados anteriores, se observa que para la configuración con arista viva la separación se produce de manera inmediata en el borde, generando una burbuja de recirculación más extensa y con un ángulo de separación θ más pronunciado. En cambio, para la geometría con radio de acuerdo, el desprendimiento se retrasa, lo que se traduce en un desplazamiento aguas abajo de la posición de separación s_{LEB} , una reducción del ángulo de separación y un flujo más adherido a la superficie.

Asimismo, el efecto del número de Reynolds coincide con lo ya descrito: a bajos valores de Re la zona recirculada es más amplia y las oscilaciones en β y θ son más visibles, mientras que para $Re \gtrsim 600$ el patrón tiende a estabilizarse, mostrando una estructura más compacta y definida. En los casos con redondeo, esta estabilización se alcanza de forma más temprana, en línea con el comportamiento de γ y de la velocidad crítica u_{cp} .

7. Conclusiones y Trabajo Futuro

7.1. Conclusiones

Del análisis realizado en este Trabajo Fin de Máster se extraen las siguientes conclusiones principales:

1. **El ángulo de rampa α es el parámetro más influyente en el comportamiento del flujo.**

A bajos valores de α , la separación ocurre de manera temprana y apenas depende del radio de redondeo. Sin embargo, para $\alpha \geq 30^\circ$, el incremento de α intensifica el gradiente de presión adverso, modificando de forma significativa la posición de separación, el ángulo de desprendimiento y la estabilidad del flujo.

2. **El redondeo de la rampa actúa como un mecanismo de control pasivo eficaz.**

Un aumento en el radio de curvatura R retrasa el punto de separación y suaviza el ángulo de desprendimiento, especialmente en rampas con alta inclinación. De este modo, el redondeo permite un flujo más estable y menos sensible a la pendiente geométrica.

3. **Existe un efecto umbral asociado a radios elevados.**

Aunque incrementar R mejora el control de la separación, para valores altos del radio el beneficio adicional se atenúa, indicando la presencia de un límite a partir del cual el redondeo deja de aportar mejoras sustanciales.

4. **El conjunto de resultados confirma la relevancia de la geometría como herramienta de control pasivo del flujo.**

La elección del ángulo de rampa y del radio de curvatura condiciona directamente la dinámica de separación y re-adhesión, lo que demuestra la importancia del diseño geométrico en aplicaciones donde se busca reducir la separación temprana y estabilizar el flujo sin recurrir a mecanismos activos.

7.2. Trabajo Futuro

El presente trabajo ha permitido caracterizar de forma detallada el comportamiento del flujo desprendido sobre una rampa redondeada, evaluando la influencia de parámetros geométricos y del número de Reynolds sobre los principales indicadores de separación. No obstante, se identifican diversas líneas de desarrollo que podrían complementar y ampliar este estudio:

- **Extensión a geometrías tridimensionales:** Todos los resultados obtenidos se han basado en simulaciones bidimensionales. La incorporación de efectos tridimensionales permitiría evaluar fenómenos como la aparición de estructuras longitudi-

nales, vórtices secundarios o separación asimétrica, los cuales son especialmente relevantes en flujos reales.

- **Análisis del campo no estacionario:** En este trabajo se ha asumido un régimen estacionario. El análisis transitorio permitiría estudiar la dinámica del desprendimiento, la frecuencia de oscilación del punto de separación y la posible aparición de modos inestables o autogenerados.
- **Validación experimental:** Sería de gran interés contrastar los resultados numéricos con datos experimentales obtenidos mediante técnicas como PIV (Particle Image Velocimetry) o LDV (Laser Doppler Velocimetry), especialmente en configuraciones con redondeo pronunciado o a Reynolds intermedios.
- **Estudio de estrategias de control pasivo y activo:** El redondeo de la geometría actúa como un mecanismo pasivo de control del desprendimiento. Sería interesante estudiar su combinación con dispositivos activos (inyección/succión, generadores de vórtices, etc.) para mejorar aún más el retraso de la separación.
- **Comparación con modelos de turbulencia avanzados:** Finalmente, se propone la comparación de estos resultados con simulaciones RANS y LES utilizando modelos de turbulencia más complejos, con el fin de evaluar su capacidad para capturar con precisión la separación en configuraciones suavemente curvadas.

Referencias

- [1] R. F. Feria y J. O. Casanova, *Mecánica de Fluidos: Notas de clase: Teoría, problemas y prácticas*. Málaga, España: Universidad de Málaga, 2019.
- [2] E. G. Ramírez, *Flujo alrededor de un cilindro*. Universidad de Sevilla, 2005, cap. 4, Estudio experimental y numérico del flujo alrededor de un cilindro utilizando técnicas PIV y análisis teórico.
- [3] A. Thacker, S. Aubrun, A. Leroy y P. Devinant, "Effects of suppressing the 3D separation on the rear slant on the flow structures around an Ahmed body," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 107-108, págs. 237-243, 2012. DOI: 10.1016/j.jweia.2012.04.022.
- [4] A. Kourta, A. Thacker y R. Jousot, "Analysis and characterization of ramp flow separation," *Experiments in Fluids*, vol. 56, 2015. DOI: 10.1007/s00348-015-1968-9.
- [5] A. Uzun y M. R. Malik, "Direct Numerical Simulation of Smooth-Body Flow Separation Around a Ramp," NASA Langley Research Center, inf. téc. NASA/TM-2024000025, 2024.
- [6] D. Simmons, F. Thomas, T. Corke y F. Hussain, "Experimental characterization of smooth body flow separation topography and topology on a two-dimensional geometry of finite span," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 944, 2022. DOI: 10.1017/jfm.2022.465.
- [7] F. Ahmad y W. Al-Barakati, "An approximate analytic solution of the Blasius problem," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 13, págs. 804-810, 2008. DOI: 10.1016/j.cnsns.2006.06.001.
- [8] A. Verhoff, "Analytical Euler Solution for Two Dimensional Compressible Ramp Flow with Experimental Comparison," *AIAA Journal*, vol. 42, n.º 5, págs. 997-1006, 2004. DOI: 10.2514/1.9592.