Probabilidad

Conceptos básicos

Carlos Gamero Burón
José Luis Iranzo Acosta
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Málaga

Parcialmente financiado a través del PIE13-024 (UMA)

Parcialmente financiado a través
de PIE13-024 (UMA)

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Estadística I
Bloque II

VARIABLE ALEATORIA Y MODELOS PROBABILÍSTICOS

Tema 4. PROBABILIDAD
Tema 5. VARIABLE ALEATORIA
Tema 6. MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS
Tema 7. MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

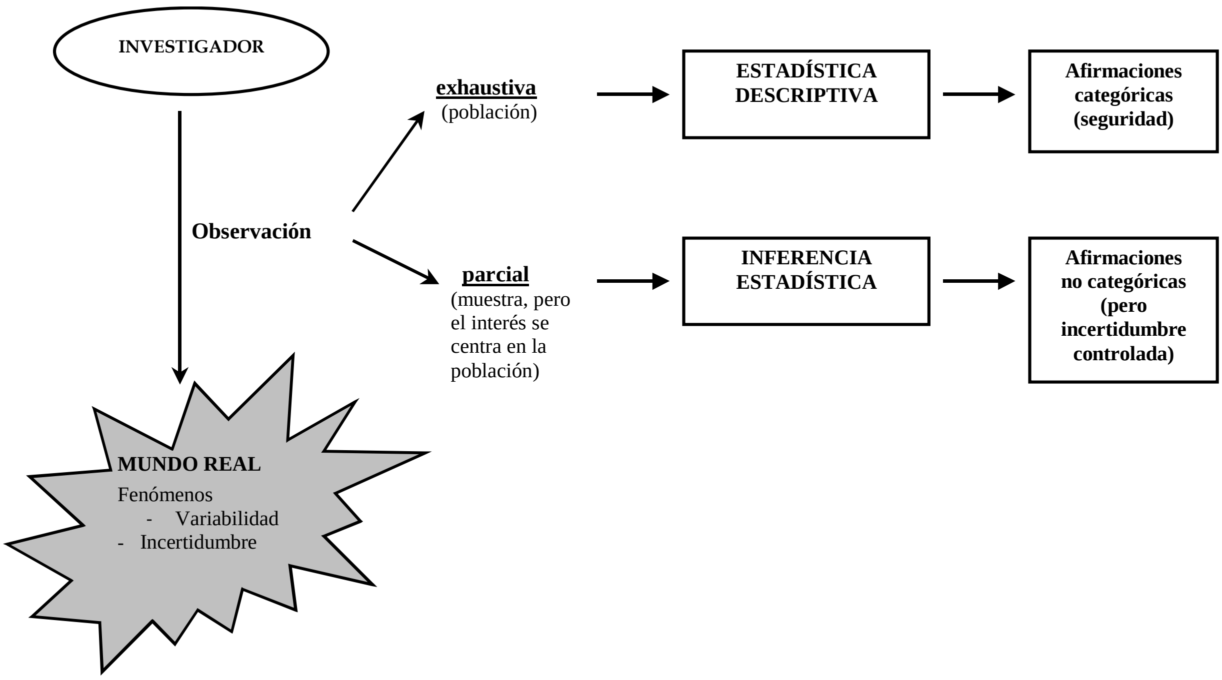
Tema 4: PROBABILIDAD

4.1. Introducción

4.2. Probabilidad. Conceptos fundamentales

4.3. Probabilidad condicional

4.1. INTRODUCCIÓN



Inferencia Estadística

Cuantificar la ***incertidumbre*** respecto a las características poblacionales utilizando para ello la información muestral

Probabilidad es una medida de incertidumbre
Variable aleatoria es una herramienta para el cálculo de probabilidades

Lecciones 4 y 5

4.2. PROBABILIDAD. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- ***Problemas***:

  Ejemplo 1: Un técnico de la Agencia Nacional de Meteorología, basándose en los datos sobre condiciones atmosféricas que recibió hasta las 8 horas de hoy, afirma que la probabilidad de que llueva mañana es alta.

  Ejemplo 2: ¿Cuál es la probabilidad de que resulte premiado un décimo en el próximo sorteo de la Lotería de Navidad?

  Ejemplo 3: Si elijo un asalariado al azar en la ciudad de Málaga, ¿cuál es la probabilidad de que sus ingresos anuales brutos superen los 25000 euros?

  Ejemplo 4: Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo producto, ¿cuál es la probabilidad de que alcance una cuota de mercado superior al 15%?

- Detrás de cada una de estas situaciones hay un *fenómeno aleatorio* o *experimento aleatorio* ξ caracterizado por la incertidumbre en sus resultados.

Un ***fenómeno aleatorio*** es un experimento que verifica las siguientes condiciones:

i) Se conocen previamente todos los ***posibles resultados*** asociados al experimento

ii) No se puede conocer el resultado del mismo antes de realizarlo (***incertidumbre***)

Ejemplos:

- *Lanzamiento de un dado*
- *Lanzamiento de dos monedas al aire*
- *El tiempo que va a hacer mañana*
- *El sorteo de la Lotería de Navidad*
- *La elección de un asalariado al azar en la ciudad de Málaga para observar sus ingresos*
- *El lanzamiento de un nuevo producto para observar su acogida entre los consumidores*

Para caracterizar cualquier experimento aleatorio tenemos que definir un…

espacio probabilístico

$$\left(E, \mathcal{A}, P\right)$$

Espacio muestral

Álgebra de sucesos

Probabilidades de los sucesos

4.2.1. Espacio muestral (E)

Espacio muestral E asociado a ξ es el conjunto de todos los posibles resultados de ξ

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$$

Ejemplo:

$$\xi = \text{"lanzamiento de dos dados"}$$

$$E = \{(1.1), (1.2), (1.3), \ldots\}$$

(El conjunto E contiene 36 elementos)

Asociados a un mismo ξ pueden considerarse ***diferentes espacios muestrales***

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado:

$E_1 = \{\text{"par", "impar"}\}$
$E_2 = \{\text{"menor que 3", "mayor o igual que 3"}\}$
$E_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$

Tipos de espacio muestral:

- ***Discreto***: E tiene un conjunto de elementos finito o infinito numerable
- ***Continuo***: E tiene un conjunto elementos infinito no numerable

Cuadro 4.1
Experimento aleatorio y espacio muestral (ejemplos)

Experimento aleatorio ξ	***Espacio muestral (E)***	***Nº de resultados posibles***	***Tipo de espacio muestral***
Arrojar una moneda al aire	$\{\text{"cara", "cruz"}\}$	2 (finito)	discreto
Observar el sexo de niños recién nacidos	$\{\text{"hombre", "mujer"}\}$	2 (finito)	discreto
Lanzamiento de un dado	$\{1,2,3,4,5,6\}$	6 (finito)	discreto
Estado de un queso curado en bodega	$\{\text{"bueno", "malo"}\}$	2 (finito)	discreto
Predicción sobre lluvia para mañana	$\{\text{"lloverá", "no lloverá"}\}$	2 (finito)	discreto
Lanzar una moneda al aire hasta obtener cara por primera vez	$\{C,\ XC,\ XXC,\ XXXC,...\}$	∞ numerable	discreto
Medición de la vida de una bombilla con duración máxima de 750 horas	$\{0 \le t \le 750\}$	∞ no numerable	continuo

4.2.2. Sucesos y álgebra de sucesos

Necesitamos definir un álgebra para poder asignar probabilidades a sucesos

pero antes…

¿qué es un suceso?

*Un **suceso A** es toda proposición lógica que, una vez realizado el experimento aleatorio, se puede decir si se verifica o no*

Identificación de sucesos con subconjuntos de E:

A todo suceso A asociado al experimento aleatorio ξ se le puede hacer corresponder el subconjunto de E formado por todos los elementos (resultados) que hacen que el suceso se verifique

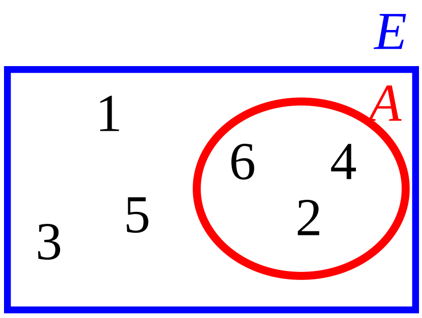
Así, diremos que el suceso A ha ocurrido si al realizar el experimento se obtiene un resultado $e \in A$.

Ejemplo

ξ = "*lanzamiento de un dado*"

$E = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \text{"sacar par"} = \{2,4,6\}$



Tipos de sucesos:

Tomando como ejemplo el lanzamiento de un dado…

- ***Suceso elemental:*** subconjunto unitario de E

$$A_1=\{1\} \quad A_2=\{2\} \quad A_3=\{3\} \quad A_4=\{4\} \quad A_5=\{5\} \quad A_6=\{6\}$$

Distinción entre resultado y suceso elemental:

El resultado $e=2$ es un elemento del espacio muestral asociado al experimento mientras que…

el suceso $A_2=\{2\}$ es el suceso que sólo se verifica si el resultado del experimento es 2

- ***Suceso compuesto:*** subconjunto no unitario de E

$$A=\text{"sacar par"}=\{2,4,6\} \qquad B=\text{"sacar menos de 3"}=\{1,2\}$$

- ***Suceso seguro o universal:*** *suceso que ocurre siempre (E)*

$$C=\text{"sacar menos de 7"}=E$$

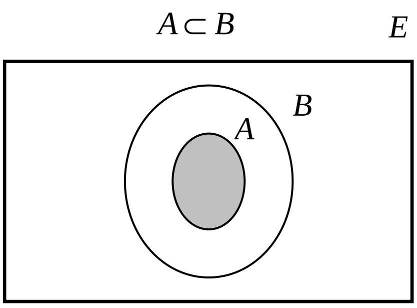
- ***Suceso imposible*****:** es aquél que no ocurre nunca (conjunto vacío $\varnothing$).

$$D=\text{"sacar más de 6"}=\varnothing$$

Relaciones entre sucesos:

- ***Inclusión:*** $A \subset B$ si siempre que ocurre *A* ocurre *B*.

Diagrama 4.1
Suceso A contenido en suceso B



<u>*Ejemplo*</u>: 

$A = \text{"sacar impar"} = \{1, 3, 5\}$

$B = \text{"sacar menos de 6"} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subset B$

- ***Igualdad o equivalencia:*** $A = B$ cuando ocurre uno si y sólo si ocurre el otro, es decir, cuando $A \subset B$ y $B \subset A$.

<u>*Ejemplo*</u>: 

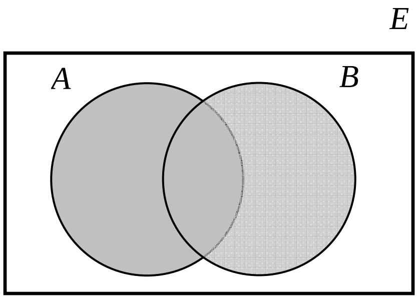
$A = \text{"sacar menos de 7"}$

$B = \text{"sacar menos de 10"}$

$A = B$

Operaciones entre sucesos:

- ***Unión:*** $A \cup B$ ocurre si ocurre A **ó** B



Ejemplo: 

$A =$ "sacar par" $= \{2,4,6\}$

$B =$ "sacar menos de 3" $= \{1,2\}$

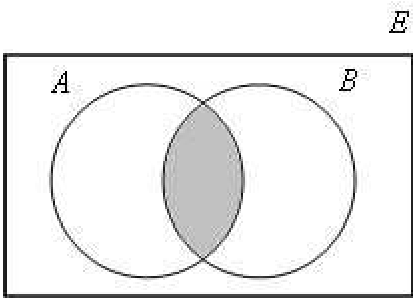
$C =$ "sacar impar" $= \{1,3,5\}$

$A \cup B = \{1,2,4,6\}$

$A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

$B \cup C = \{1,2,3,5\}$

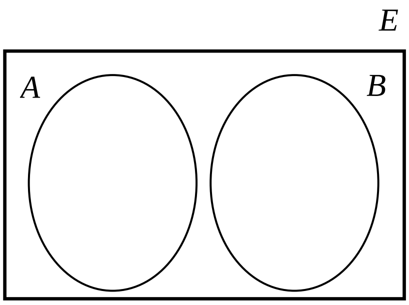
- ***Intersección:*** $A \cap B$ ocurre si ocurre A **y** B



Ejemplo: 

$A \cap B = \{2\}$ $\qquad$ $B \cap C = \{1\}$

A y B son ***sucesos disjuntos*** *(incompatibles o mutuamente excluyentes) si:* $A \cap B = \varnothing$



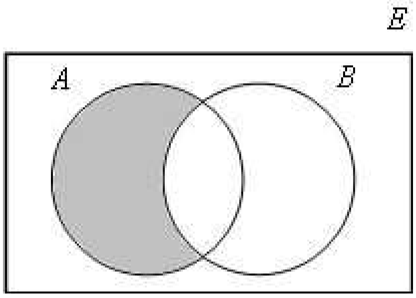
Ejemplo: 

$A =$ "sacar par" $= \{2,4,6\}$

$C =$ "sacar impar" $= \{1,3,5\}$ $\qquad$ $A \cap C = \varnothing$

- ***Diferencia:*** $A-B$ ocurre si ocurre A **pero no** B

$A-B=A\bigcap\overline{B}$



Ejemplo: 

$A=\text{"sacar par"}=\{2,4,6\}$

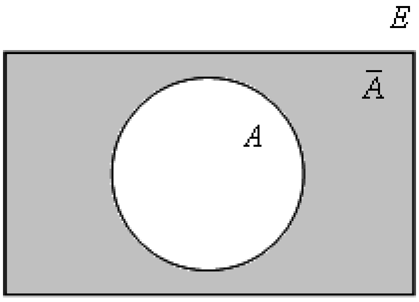
$B=\text{"sacar menos de 3"}=\{1,2\}$

$A-B=\{4,6\}$

- ***Complementariedad:*** $\overline{A}$ ocurre si no ocurre A

Se cumple que:

$\overline{A}=E-A$



Ejemplo: 

$A=\text{"sacar par"}=\{2,4,6\}$

$C=\text{"sacar impar"}=\{1,3,5\}$

$\overline{A}=C$

Propiedades de operaciones y relaciones entre sucesos

Estas propiedades son útiles para calcular probabilidades

Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociatividad	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributividad	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Elementos neutros	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Contradicción y tercero excluido	$A \cup \bar{A} = E$	$A \cap \bar{A} = \varnothing$
Involución	$\overline{\left(\bar{A}\right)} = A$	
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Ya sabemos qué es E y qué son los sucesos pero…

¿qué es un álgebra de sucesos $\mathcal{A}$ y por qué la definimos?

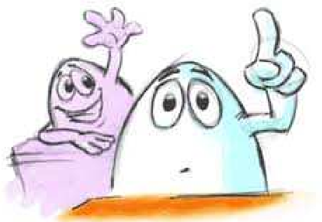
Ejemplo:

$E = \{a,b,c\}$

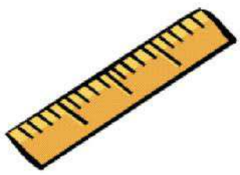
$\wp(E) = \{\varnothing,\{a,b,c\},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

$\wp(E)$ ***es el mayor álgebra de sucesos que podemos definir***

¿Qué perseguimos al enfrentarnos a una situación con incertidumbre?

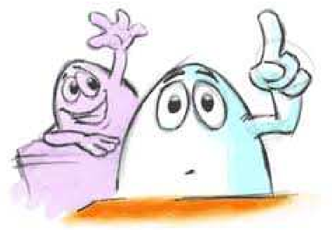


medir la incertidumbre asociada a los sucesos



Un instrumento para medirla: probabilidad

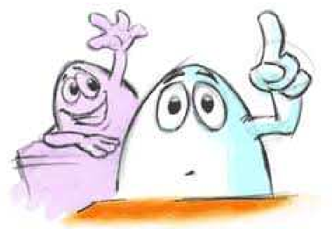
¿Por qué necesitamos definir un ***álgebra de sucesos****?*



No siempre nos interesa calcular probabilidades para todos los posibles sucesos (subconjuntos de E)

Ej: En el lanzamiento de un dado nos puede interesar sólo los sucesos "sacar par" o "sacar impar"

Sea el conjunto $\mathcal{A}$ la colección de sucesos de que nos interesa.
Parece razonable a la hora de definir una probabilidad sobre $\mathcal{A}$ que:



1. Además, dados dos sucesos de interés, A y B, podremos estar interesados en su unión (o su intersección), de manera que estos sucesos también deben estar contenidos en $\mathcal{A}$.
   (*cerrada respecto a la unión*)

2. Si el suceso A de interés le pertenece, también lo haga su complementario.
   (*colección cerrada respecto a la complementación*)

3. También parece razonable que el suceso seguro E (y su complementario, $\emptyset$) pertenezca a ese conjunto $\mathcal{A}$.
   (*El espacio muestral pertenece al álgebra*)

Pues bien, si $\mathcal{A}$ cumple estos tres requisitos se dice que $\mathcal{A}$ es un ***álgebra de Boole***

1. *Para un mismo experimento aleatorio, siempre es posible definir* ***diferentes álgebras****. Dependerá de cuál es nuestro objetivo.*

2. *La colección más completa de subconjuntos del espacio muestral, es decir, el álgebra de Boole más completa, es el conjunto $\wp(E)$ de partes de E.*

<u>*Ejemplo*</u>:

Consideremos $E=\{1,2\}$. Veamos qué colecciones de entre las indicadas seguidamente son álgebra de Boole y cuáles no:

- $\{\varnothing, E\}$ es álgebra de Boole ya que satisface las tres condiciones anteriormente señaladas. Es el álgebra más pequeña que podemos definir
- $\{\varnothing,\{1\},E\}$ no es álgebra dado que no cumple la segunda condición (el complementario de $\{1\}$ no pertenece a la colección).
- $\{\varnothing,\{1\},\{2\},E\}$ es la mayor álgebra posible: $\wp(E)$.

Cuando ***E es continuo*** *necesitamos añadir una nueva condición para que $\mathscr{A}$ ser álgebra: la* ***unión de colecciones infinitas numerables de subconjuntos de la colección también pertenezca a $\mathscr{A}$****.*

El álgebra que cumple esta propiedad añadida se denomina ***$\sigma -$álgebra****.*

Espacio medible o espacio probabilizable

$$\left(E, \mathcal{A}\right)$$

Conjuntos probabilizables (medibles)

$$A \in \mathcal{A}$$

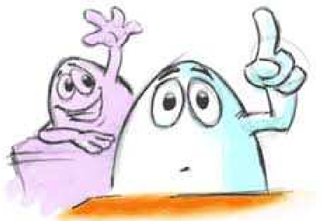
Se llaman así porque podemos asignarles una probabilidad (medida)

Ya sabemos todo esto pero… ¿y de la probabilidad P qué?

Concepto de probabilidad

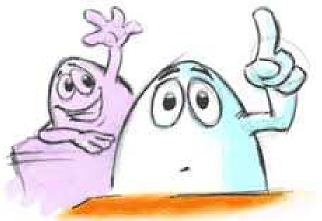
Nuestro ***objetivo*** *es*
medir la ***incertidumbre***
de los sucesos incluidos en $\mathcal{A}$

¿Cómo lo vamos a hacer?



Mediante la probabilidad

Pero, ***¿qué es la probabilidad?***



Es un ***tipo especial de medida***

¿Y qué es una medida?
(concepto matemático)

Pensemos en este ***ejemplo de medida****:*
área de polígonos
(subconjuntos del plano)

(1) Al conjunto vacío (a un punto) le asignamos área 0
(2) A la unión de dos subconjuntos (dos polígonos) disjuntos le asignamos la suma de las áreas
(3) Todo subconjunto (polígono) debe tener área no negativa

Una ***medida*** *es una regla que asigna un número a un subconjunto (****función de conjunto****) y que cumple esas tres propiedades*

Además, la ***probabilidad*** *es una medida especial porque cumple además que* ***la medida del conjunto completo es la unidad***

Definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov, 1933):

Una ***probabilidad*** *asociada a* $(E,\mathcal{A})$ *es una* ***función de conjunto*** *P que es una aplicación de* $\mathcal{A}$ *en el intervalo* $[0,1]$ *de* $\mathbb{R}$, *es decir*

$$\begin{array}{rcl} P: \quad \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A\in\mathcal{A} & \to & P(A) \end{array}$$

de tal manera que a cada suceso A del $\sigma-$*álgebra le hace corresponder un número en el intervalo* $[0,1]$ *cumpliéndose los siguientes axiomas:*

Axioma 1 (no negatividad): $P(A)\geq 0$, *para todo* $A\in$ A.

Axioma 2 (certeza): $P(E)=1.$

Axioma 3 (aditividad): Si $A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots$ *es una sucesión numerable de sucesos pertenecientes a* $\mathcal{A}$, *tales que entre sí son mutuamente excluyentes, es decir,* $A_i\cap A_j=\varnothing$ *para todo* $i\neq j$, *entonces:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{i=\infty} P(A_i)$$

Propiedades o consecuencias de los axiomas:

Son de gran utilidad para el cálculo de probabilidades

Propiedad 1: $P(\bar{A})=1-P(A)$ lo que implica, a su vez, que $P(\varnothing)=0.$

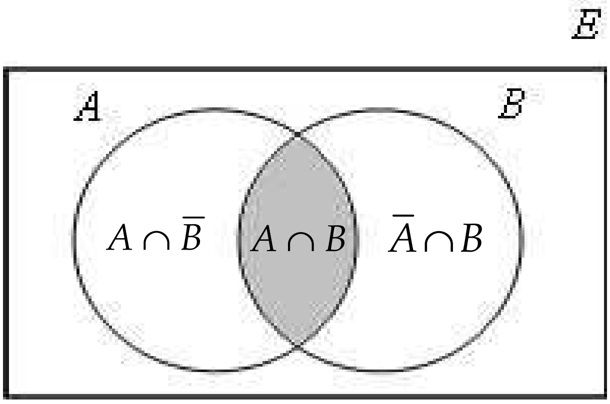
Propiedad 2: $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$ lo que implica que $0\leq P(A)\leq 1$

Propiedad 3: $A\subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

Propiedad 4: $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

Propiedad 5 (Regla de la adición): $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Propiedad 5: Regla de la adición $\boxed{P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)}$



Vemos que $A\bigcup B=(A\bigcap\overline{B})\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(\overline{A}\bigcap B)$. Dado que son sucesos disjuntos, podemos aplicar el Axioma 3º de la probabilidad (aditividad), de manera que:

$$P\left(A\bigcup B\right)=P\left(A\bigcap\overline{B}\right)+P\left(A\bigcap B\right)+P\left(\overline{A}\bigcap B\right).$$

Por otra parte, se tiene que $A=\left(A\bigcap\overline{B}\right)\bigcup\left(A\bigcap B\right)$ y $B=(A\bigcap B)\bigcup\left(\overline{A}\bigcap B\right)$. Dado que son sucesos disjuntos, podemos aplicar el Axioma 3º, de la siguiente manera:

$$P(A)=P\left(A\bigcap\overline{B}\right)+P\left(A\bigcap B\right)$$

$$P(B)=P\left(A\bigcap B\right)\bigcup P\left(\overline{A}\bigcap B\right)$$

Sumando esas dos expresiones resulta:

$$P(A)+P(B)=P\left(A\bigcap\overline{B}\right)+P\left(A\bigcap B\right)+P\left(A\bigcap B\right)+P(\overline{A}\bigcap B)$$

Reordenando apropiadamente se llega a:

$$P(A)+P(B)-P\left(A\bigcap B\right)=P\left(A\bigcap\overline{B}\right)+P\left(A\bigcap B\right)+P\left(\overline{A}\bigcap B\right)$$

y puesto que $P\left(A\bigcup B\right)=P\left(A\bigcap\overline{B}\right)+P\left(A\bigcap B\right)+P\left(\overline{A}\bigcap B\right)$ se tiene que:

$$\boxed{P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)\quad\forall A,B\in \mathrm{A}}$$

Asignación de probabilidades a sucesos

La **definición axiomática establece los requisitos indispensables** exigibles a cualquier asignación de probabilidades y constituye la base de todos los desarrollos teóricos sobre esta materia…

pero **no proporciona un método para llevar a cabo la asignación de probabilidades** básicas a los sucesos contenidos en el álgebra.

Las definiciones clásica, frecuentista y subjetiva sí resultan apropiadas, en determinadas circunstancias

a) Definición clásica de probabilidad (probabilidad a priori o Regla de Laplace)

Contexto: ξ tiene E finito y resultados equiprobables.

Definición:

$$P(A)=\frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de casos favorables a suceso }A}{\text{n}^{\text{o}}\text{ de casos posibles}}=\frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de elementos de }A}{\text{n}^{\text{o}}\text{ de elementos de }E}$$

¿Esto es una probabilidad? Sí, satisface los tres axiomas de probabilidad.

Ejemplo:

Cálculo de la probabilidad de extraer un as de una baraja de 40 naipes:

$\xi =$ "*extracción de una carta de una baraja (40 naipes)*"
$A=\{\text{extracción de un as}\}$
Aplicación de la Regla de Laplace:

$$P(A)=\frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de casos favorables a suceso }A}{\text{n}^{\text{o}}\text{ de casos posibles}}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

Imposibilidad de aplicación:

- cuando E es infinito
- cuando los posibles resultados no son equiprobables

b) Probabilidad frecuentista o a posteriori

Contexto: ξ es repetible

Definición:

$$P(A) = \lim_{i \to \infty} \frac{n_i(A)}{i} = \lim_{i \to \infty} f_i(A)$$

donde $n_i(A)$ es el número de veces que ocurre A en i repeticiones del experimento y $f_i(A)$ es, por tanto, la frecuencia relativa.

¿Esto es una probabilidad? Sí, satisface los tres axiomas de probabilidad.

Inconvenientes:

- Necesidad de realizar un gran número de pruebas.
- El cálculo exacto de este tipo de probabilidades resulta inviable.

c) Probabilidad subjetiva

Contexto: Experimento aleatorio no puede repetirse muchas veces, no es controlable y sus resultados no son equiprobables

Ejemplos:

- Probabilidad de robo de un cuadro en el Museo del Prado.

- Probabilidad de que ocurra una Tercera Guerra Mundial antes del año 2020

Definición: Asignación subjetiva de probabilidades. Se trata de un juicio personal sobre el resultado de un experimento aleatorio.

¿Esto es una probabilidad? Sí, bajo la hipótesis de coherencia en el razonamiento.

Limitación: debemos admitir la posibilidad de que distintos sujetos asignen probabilidades diferentes al mismo suceso.

Recapitulemos…

Una modelización completa de un experimento aleatorio pasa por la identificación de los tres elementos siguientes:

- El ***espacio muestral E***, que sirve para representar todos los resultados posibles del experimento aleatorio en cuestión.
- El ***álgebra*** $\mathcal{A}$, formada por todos o parte de los posibles subconjuntos de E.
- La ***función de conjunto P***, que proporciona la medida de probabilidad.

Dado el ***espacio probabilizable*** $(E,\mathcal{A})$, una vez definida la medida de probabilidad P sobre $\mathcal{A}$ se obtiene el trío $(E,\mathcal{A},P)$, que se denomina ***espacio probabilístico***.

4.3. PROBABILIDAD CONDICIONAL

En ocasiones se dispone de ***información adicional*** que puede (quizás no) condicionar nuestro grado de creencia en la ocurrencia de un suceso

Ejemplos:

- Una pareja tiene dos hijos. Se sabe que al menos uno es varón. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean varones?

- En el lanzamiento de un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un 2 sabiendo de antemano que se ha obtenido un número par?

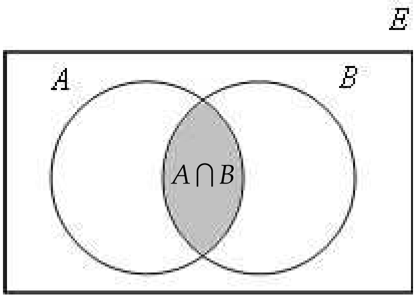
- ¿Cuál es la probabilidad de que los ingresos laborales anuales de un asalariado sean superior a 30.000 euros, sabiendo que ese asalariado es mujer?

- En meteorología, ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana sabiendo que hoy ha llovido?

La probabilidad condicional permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios cuando adquirimos nueva información.

Intuición

Supongamos que estamos interesados en la realización de un suceso *A*, sabiendo que un suceso *B* se ha realizado.



Si *A* y *B* son incompatibles la cuestión está zanjada ya que *A* no se realizará, pero si $A \cap B \neq \emptyset$, es posible que *A* se realice.

Sin embargo, el espacio muestral no será ya todo *E*, sino que se restringirá a *B*. De hecho, sólo nos interesará la realización de *A* en el interior de *B*, es decir, $A \cap B$ en relación con *B*.

Esto nos lleva a la siguiente definición de *probabilidad condicional*:

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y sea el suceso $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$. Para otro suceso $A \in \mathcal{A}$ se define la ***probabilidad de A condicionada a B*** como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad condicional cumple los tres axiomas de la probabilidad.

El triple $(E, \mathcal{A}, P(A/B))$ con $A, B \in \mathcal{A}$ y $P(B) > 0$ constituye un espacio probabilístico.

***Ejemplo 1*:**

150 personas clasificadas según su estado civil y su situación de actividad:

Tabla 4.1
Frecuencias absolutas

	Activos (A)	*No Activos* $(\bar{A})$	
Solteros (B)	30	40	70
No Solteros $(\bar{B})$	60	20	80
	90	60	150

$\xi =$"Selección de una persona al azar para observar sus características"

Tabla 4.2
Aplicación de la Regla de Laplace
para el cálculo de probabilidades

	Activos (A)	*No Activos* $(\bar{A})$	
Solteros (B)	$P(A \cap B) = \frac{30}{150}$	$P(\bar{A} \cap B) = \frac{40}{150}$	$P(B) = \frac{70}{150}$
No Solteros $(\bar{B})$	$P(A \cap \bar{B}) = \frac{60}{150}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{20}{150}$	$P(\bar{B}) = \frac{80}{150}$
	$P(A) = \frac{90}{150}$	$P(\bar{A}) = \frac{60}{150}$	$P(E) = 1$

¿Cuál es la probabilidad de ser activo?

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}.$$

Supongamos ahora que sabemos que esa persona seleccionada al azar es soltera y nos planteamos calcular la probabilidad de que sea activa.

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

Esto es equivalente a aplicar la definición de probabilidad condicional:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{30}{150}}{\frac{70}{150}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

Regla del producto:

Se deduce de la definición de probabilidad condicional:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A) \\ \text{ó} \\ P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \end{array}}$$

Puede generalizarse al caso de *n* sucesos:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

Independencia estocástica de sucesos:

Diremos que dos sucesos A y B pertenecientes al álgebra $\mathcal{A}$ son *sucesos independientes* si se cumple que:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

Por tanto, dos sucesos son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no modifica la probabilidad del otro.

Esto es equivalente a decir que: $\boxed{P(A/B)=P(A)}$

$$\boxed{P(B/A)=P(B),}$$

de manera que si se cumple cualquiera de las tres condiciones anteriores, se cumplen las otras dos.

Independencia e incompatibilidad son dos cosas distintas

Teoremas de la probabilidad condicional

Teorema 1: Teorema de la probabilidad total

Sea $\{A_i\}_{i=1,\dots,k}$ *un sistema completo de k sucesos pertenecientes al álgebra* $\mathscr{A}$*. Por ser completo cumple que:*

a) $\bigcup_{i=1}^{i=k} A_i = E$*, es decir, la unión de todos ellos es el suceso seguro. El sistema de sucesos es, por tanto, un sistema exhaustivo.*

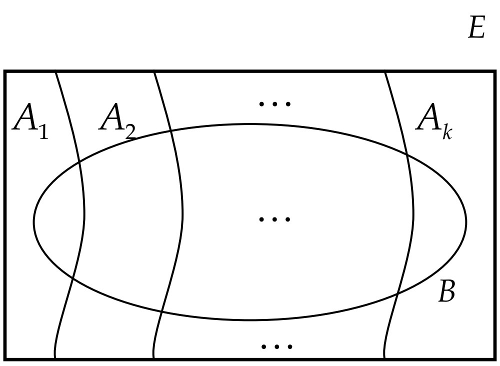
b) $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j; \quad i, j = 1,\dots,k$*. Esto implica que los sucesos son disjuntos dos a dos.*

c) $P(A_i) > 0, \quad \forall i$.

Sea B otro suceso perteneciente al álgebra $\mathscr{A}$*. En estas condiciones, el Teorema de la Probabilidad Total establece que:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Interpretación:



Si el suceso *B* puede ocurrir por alguna de las causas A_i, la probabilidad de que ocurra *B* es la suma de los productos de las probabilidades de las causas por la probabilidad del suceso *B* condicionado a la causa A_i.

Teorema 2: Teorema de Bayes

Se deduce del Teorema de la Probabilidad Total y de la fórmula de las probabilidades condicionadas:

Sea $\{A_i\}_{i=1,\dots,k}$ *un sistema completo de k sucesos pertenecientes al álgebra* $\mathcal{A}$*. Sea* $B \in \mathcal{A}$ *tal que* $P(B) > 0$*. En estas condiciones, el Teorema de Bayes establece que:*

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^{i=k} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Interpretación:

Habiendo sido observado el suceso *B*, nos preguntamos por la probabilidad de que su causa sea el suceso A_j.

Ahora, el objetivo es obtener las *probabilidades a posteriori* $P\left(A_j / B\right)$, contando con información sobre las *probabilidades a priori*, $P\left(A_i\right)$, y las *verosimilitudes*, $P(B/A_i)$ (situación contraria al Teorema de la probabilidad total)

***Ejemplo 1*:**

Las probabilidades a priori de los eventos A_1 y A_2 son $P(A_1)=0,40$ y $P(A_2)=0,60$. Se sabe además que $P(A_1\cap A_2)=0$. Suponga también que $P(B/A_1)=0,20$ y que $P(B/A_2)=0,50$. Calcule:

a) $P(A_1\cup A_2)$,

b) $P(A_1\cap B)$ y $P(A_2\cap B)$,

c) $P(B)$,

d) $P(A_1/B)$ y $P(A_2/B)$.

Resolución:

Datos:

$$P(A_1)=0,40 \quad P(A_2)=0,60 \quad P(A_1\cap A_2)=0 \quad P(B/A_1)=0,20 \quad P(B/A_2)=0,50$$

a) $$P(A_1\cup A_2)\underbrace{=}_{\substack{\text{Por la Regla}\\ \text{de la Adición}}}P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)\underbrace{=}_{P(A_1\cap A_2)=0}1$$

b) $$P(A_1\cap B)\underbrace{=}_{\substack{\text{Por la Regla}\\ \text{del Producto}}}P(A_1)P(B/A_1)=0,40\cdot 0,20=0,08$$

$$P(A_2\cap B)\underbrace{=}_{\substack{\text{Por la Regla}\\ \text{del Producto}}}P(A_2)P(B/A_2)=0,60\cdot 0,50=0,30$$

c) $$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)=0,08+0,30=0,38$$

d) $$P(A_1/B)\underbrace{=}_{\substack{\text{Por el Teorema}\\ \text{de Bayes}}}\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{0,08}{0,38}\simeq 0,211$$

$$P(A_2/B)\underbrace{=}_{\substack{\text{Por el Teorema}\\ \text{de Bayes}}}\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=\frac{0,30}{0,38}\simeq 0,789=1-P(A_1/B)$$

***Ejemplo 2*:**

En unos grandes almacenes se tomó una muestra aleatoria de 10.000 compras a lo largo de un año. Esas compras se clasificaron según la forma de pago y el importe de las mismas. Se diferenciaron dos formas de pago: Contado (A_1) y Crédito (A_2). Los importes se agruparon en tres categorías: menos de 6 euros (B_1), entre 6 y 60 euros (B_2) y más de 60 euros. (B_3). Para estos sucesos se sabe que:

$$P(B_1) = 0,3 \qquad P(B_3) = 0,32$$

$$P(A_1 / B_1) = \frac{2}{3} \qquad P(A_1 / B_2) = \frac{2}{19} \qquad P(A_1 / B_3) = \frac{1}{32}.$$

Se pide:

a) Si se elige una compra al azar y su importe se ha abonado al contado, ¿cuál es la probabilidad de que el valor de la misma sea inferior a 6 euros?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una compra se abone al contado?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se abone al contado y el importe sea superior a 60 euros?
d) Los sucesos forma de pago e importe de la compra, ¿son independientes?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el importe no se abone al contado?

Resolución:

Definición de sucesos:

$$A_1 = \{\text{pago contado}\} \quad A_2 = \{\text{pago crédito}\}$$
$$B_1 = \{\text{menos de 6 euros}\} \quad B_2 = \{\text{entre 6 y 60 euros}\} \quad B_3 = \{\text{más de 60 euros}\}$$

Datos:

$$P(B_1) = 0,3 \qquad P(B_3) = 0,32$$

$$P(A_1 / B_1) = \frac{2}{3} \quad P(A_1 / B_2) = \frac{2}{19} \quad P(A_1 / B_3) = \frac{1}{32}$$

a) $P(B_1/A_1)=\dfrac{P(B_1\cap A_1)}{P(A_1)}\underbrace{=}_{\text{Por el Teorema de Bayes}}$

$$=\frac{P(B_1)\cdot P(A_1/B_1)}{P(B_1)\cdot P(A_1/B_1)+P(B_2)\cdot P(A_1/B_2)+P(B_3)\cdot P(A_1/B_3)}=$$

$$=\frac{0,3\cdot\frac{2}{3}}{0,3\cdot\frac{2}{3}+(1-0,3-0,32)\cdot\frac{2}{19}+0,32\cdot\frac{1}{32}}=\frac{0,2}{0,25}=0,8$$

b) $P(A_1)=0,25$ (Teorema de la Probabilidad Total aplicado en apartado anterior)

c) $P(A_1\cap B_3)=P(B_3)\cdot P(A_1/B_3)=0,32\cdot\dfrac{1}{32}=0,01$

d) $P(A_1/B_1)=\dfrac{2}{3}\neq 0,25=P(A_1)$, por lo que no son independientes.

e) $P(A_2)=1-P(A_1)=1\text{-}0,25=0,75.$

***Ejemplo 3*:**

Dos máquinas A y B producen el mismo tipo de artículo, que pasa a una cinta transportadora. El rendimiento de la máquina A es el doble que el de la máquina B. De la producción de A, el 60% de las piezas son de "calidad óptima", y de la de B lo son el 84%. Se selecciona una pieza al azar de la cinta transportadora y resulta ser de "calidad óptima". Halle la probabilidad de que la pieza haya sido producida por la máquina A.

Resolución:

Definición previa de sucesos:

$A=\{\text{artic. extraido producido por A}\}$ $B=\{\text{artic. extraido producido por B}\}$

$O=\{\text{artículo extraido de calidad óptima}\}$

Datos: $P(O/A)=0,60$ $P(O/B)=0,84$

Máquina A produce el doble que máquina $B \Rightarrow P(A)=2P(B)$

Dado que $P(A)+P(B)=1$, se tiene que: $P(A)=\dfrac{2}{3}$ y $P(B)=\dfrac{1}{3}$

$$P(A/O)=\frac{P(A\cap O)}{P(O)}=\frac{P(A)\cdot P(O/A)}{P(A)\cdot P(O/A)+P(B)\cdot P(O/B)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0,60}{\frac{2}{3}\cdot 0,60+\frac{1}{3}\cdot 0,84}=\frac{0,4}{0,4+0,28}\simeq 0,588.$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una gran empresa se encuentra dividida en tres divisiones: administración, operación de planta y ventas. La siguiente tabla indica el número de empleados en cada uno de esos sectores, clasificados por sexo:

Sector	Mujer	Hombre
Administración	80	180
Operación de planta	200	260
Ventas	120	160

a) Se elige aleatoriamente un empleado. Calcule la probabilidad de que trabaje en ventas sabiendo que es hombre. Calcule también la probabilidad de que sea hombre sabiendo que trabaja en ventas.

b) Decida si el sexo del empleado y el tipo de trabajo que realiza son sucesos independientes.

<u>*Resolución*</u>*:*

Definición previa de sucesos y tabla de probabilidades (regla de Laplace):

Sector	Mujer (M)	Hombre (H)	
Administración (A)	0,08	0,18	0,26
Operación de planta (O)	0,20	0,26	0,46
Ventas (V)	0,12	0,16	0,28
	0,40	0,60	1

a) $$P(V/H)=\frac{P(V\cap H)}{P(H)}=\frac{0{,}16}{0{,}6}\simeq 0{,}267$$

$$P(H/V)=\frac{P(V\cap H)}{P(V)}=\frac{0{,}16}{0{,}28}\simeq 0{,}571$$

b) ¿Son sexo y tipo de trabajo independientes?

$P(M\cap V)=0{,}12\neq 0{,}4\cdot 0{,}28=P(M)\cdot P(V)$, por lo que no son independientes.

2. Una fábrica produce de forma independiente tres productos, 1, 2 y 3, cada uno de ellos en calidad extra y comercial. La probabilidad de producir una unidad de calidad extra en cada uno de esos productos es: 0,75, 0,5 y 0,8, respectivamente. A su vez esos productos se fabrican en las siguientes proporciones: 45%, 35% y 20%, respectivamente. Con esa información responda a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué porcentaje de productos de calidad comercial se producen?
b) Si se selecciona al azar una unidad producida y es de calidad comercial, ¿de qué producto es más probable que sea?
c) Si en un día se han producido 200 unidades de calidad comercial, ¿cuántas son de cada tipo de producto?
d) Decida qué cantidad debe producir de cada producto si quiere tener en total 269 unidades de calidad extra.

<u>*Resolución*</u>:

Definición de sucesos:

$Q_1 = \{\text{producto 1}\} \qquad Q_2 = \{\text{producto 2}\} \qquad Q_3 = \{\text{producto 3}\}$

$X = \{\text{calidad extra}\} \qquad C = \{\text{calidad comercial}\}$

Datos del problema:

$$P(X/Q_1) = 0,75 \quad P(X/Q_2) = 0,5 \quad P(X/Q_3) = 0,8$$
$$P(Q_1) = 0,45 \quad P(Q_2) = 0,35 \quad P(Q_3) = 0,2$$

a) El porcentaje que se pide es igual a $P(C)\cdot 100$:

$$P(C) = 1 - P(X)$$

Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(X) = P(Q_1)\cdot P(X/Q_1) + P(Q_2)\cdot P(X/Q_2) + P(Q_3)\cdot P(X/Q_3)$$

$$P(X) = 0,45\cdot 0,75 + 0,35\cdot 0,5 + 0,20\cdot 0,8 = 0,6725$$

Por tanto:

$$P(C) = 1 - P(X) = 1 - 0,6725 = 0,3275$$

Es decir, se fabrica un 32,75% de productos de calidad comercial.

b) Debemos identificar el producto que presenta la mayor probabilidad del tipo $P(Q_i / C)$ (probabilidades de Bayes):

- $P(Q_1 / C) = \dfrac{P(Q_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(Q_1) \cdot P(C / Q_1)}{P(C)} = \dfrac{P(Q_1) \cdot [1 - P(X / Q_1)]}{P(C)}$

$$P(Q_1 / C) = \frac{0,45 \cdot [1 - 0,75]}{0,3275} = \frac{0,1125}{0,3275} \simeq 0,344$$

- $P(Q_2 / C) = \dfrac{P(Q_2 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(Q_2) \cdot P(C / Q_2)}{P(C)} = \dfrac{P(Q_2) \cdot [1 - P(X / Q_2)]}{P(C)}$

$$P(Q_2 / C) = \frac{0,35 \cdot [1 - 0,5]}{0,3275} = \frac{0,175}{0,3275} \cong 0,534$$

- $P(Q_3 / C) = 1 - P(Q_1 / C) - P(Q_2 / C) = 1 - 0,344 - 0,534 \cong 0,122$

Por tanto, es más probable que la unidad de calidad comercial seleccionada sea del producto 2.

c) Llamando n_i al número de unidades del producto i presentes en el lote de 200 unidades de calidad comercial, con $N = n_1 + n_2 + n_3 = 200$, se tendrá que:

$n_1 = N \cdot P(Q_1 / C) = 200 \cdot 0,344 \simeq 69$ unidades del producto 1.

$n_2 = N \cdot P(Q_2 / C) = 200 \cdot 0,534 \simeq 107$ unidades del producto 2.

$n_3 = N \cdot P(Q_3 / C) = N - n_1 - n_2 \simeq 24$ unidades del producto 3.

d) Llamemos N al tamaño de lote solicitado con $N = n_C + n_X$ y $n_X = 269$:

Sabemos que $P(X) = \dfrac{n_X}{N}$ de donde $N = \dfrac{n_X}{P(X)} = \dfrac{269}{0,6725} = 400$ unidades

Unidades del producto $1 = 400 \cdot P(Q_1) = 400 \cdot 0,45 = 180$

Unidades del producto $2 = 400 \cdot P(Q_2) = 400 \cdot 0,35 = 140$

Unidades del producto $3 = 400 \cdot P(Q_3) = 400 \cdot 0,20 = 80$.