

# Tablas de mortalidad dinámicas con hoja de cálculo en la práctica actuarial

Antonio Fernández Morales

Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)  
Universidad de Málaga, 2016

## Resumen

En este trabajo se presenta la aplicación de procedimientos de obtención de probabilidades de fallecimiento, mediante hoja de cálculo, para generaciones y años de calendario futuros, basadas en la información contenida en tablas de mortalidad dinámicas, desde el punto de vista actuarial.

*Palabras clave*— Actuarial, tabla de mortalidad dinámica, hoja de cálculo.

*Clasificación JEL*— G22, C22, I13.

## 1. Introducción

Las tablas de mortalidad dinámicas tienen una presencia creciente en el ámbito actuarial. Este tipo de tabla de mortalidad permite obtener probabilidades de fallecimiento que varían no sólo con la edad o el sexo, sino también con el paso del tiempo físico o de calendario (habitualmente en sentido decreciente). Las tablas de mortalidad dinámicas ofrecen una alternativa más sencilla al uso de modelos paramétricos más complejos, ya sea predictivos ([1], [2], [3], [4], [5]) o descriptivos ([6], [7]).

Generalmente, las tablas de mortalidad dinámicas se ofrecen en formatos simplificados, que contienen una tabla base y fórmulas de cálculo que permiten la generación de tablas de mortalidad específicas para cada año de calendario futuro o para generaciones de individuos nacidos en un año determinado. Para este objetivo, las hojas de cálculo son una de las herramientas más utilizadas por su flexibilidad y simplicidad.

Dentro de la línea de trabajo que se viene realizando en la Universidad de Málaga sobre recursos tecnológicos para la formación actuarial, con el desarrollo de recursos para dispositivos móviles ([8]) o simuladores interactivos ([9], [10]), se presenta en este trabajo una guía para la elaboración de un generador de tablas de mortalidad basadas en la información contenida en tablas de mortalidad dinámicas, también denominadas generacionales. Se muestra de forma esquemática como elaborar una tabla en hoja de cálculo con las probabilidades anuales de fallecimiento por edades para una generación y para un año de calendario futuro, de forma que se pueda recalcular automáticamente cambiando el año de nacimiento o el año de calendario futuro, según corresponda.

## 2. Conceptos

En una tabla de mortalidad dinámica, la tasa de mortalidad  $q_{x,t}$  depende de

- la edad,  $x$
- el año de calendario,  $t$

Ejemplos de tablas de mortalidad dinámicas para uso actuarial que siguen este enfoque se muestran a continuación:

- Tablas españolas PERM/F [11]
- Tablas españolas PEB 2014 [12]
- Tablas alemanas DAV 2004R [13]
- Tablas austríacas AVÖ 2005R [14]

Una tabla de mortalidad dinámica se puede representar como una matriz (Tabla 1). No obstante, en la práctica actuarial se suele presentar sólo:

- La mortalidad en el año de calendario base, para todas las edades
- Una función o factor de reducción anual, para todas las edades

Tabla 1: Tasas de mortalidad de una tabla dinámica

Edad	Calendario				
	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\dots$
x	$q_{x,t_0}$	$q_{x,t_1}$	$q_{x,t_2}$	$q_{x,t_3}$	$\dots$
0	$q_{0,t_0}$	$q_{0,t_1}$	$q_{0,t_2}$	$q_{0,t_3}$	$\dots$
1	$q_{1,t_0}$	$q_{1,t_1}$	$q_{1,t_2}$	$q_{1,t_3}$	$\dots$
2	$q_{2,t_0}$	$q_{2,t_1}$	$q_{2,t_2}$	$q_{2,t_3}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

### 3. Modelo

El modelo basado en factores de reducción es ampliamente utilizado en tablas de mortalidad dinámicas en el ámbito actuarial[15]. La especificación general consiste en:

$$q_{x,t} = q_{x,t_0} e^{-F(x)(t-t_0)} \quad (1)$$

Las tasas de mortalidad según esta especificación dependen de los dos factores multiplicativos siguientes:

- Tasas base observadas en  $t_0$ ,  $q_{x,t_0}$
- Mejoras de mortalidad multiplicativas (factor de reducción),  $FR(x, t - t_0) = e^{-F(x)(t-t_0)}$ ,

de manera que  $q_{x,t} = q_{x,t_0} FR(x, t - t_0) = q_{x,t_0} e^{-F(x)(t-t_0)}$

#### 3.1. Ejemplo

En las tablas españolas PERM/F 2000, la tasa de mortalidad  $q_{x,t}$  se puede escribir como:

$$q_{x,t} = q_{x,2000} e^{-\lambda_x(t-2000)} \quad (2)$$

donde:

- el año base es 2000
- la función  $F(x)$  está tabulada como  $\lambda_x$

Alternativamente, se puede expresar la tasa de mortalidad  $q_{x,b}$  de este modelo en función de :

- la edad,  $x$
- el año de nacimiento,  $b$

resultando:

$$q_{x,b} = q_{x,2000-x} e^{-\lambda_x(b+x-2000)} \quad (3)$$

## 4. Aplicación con hoja de cálculo

Utilizando la información del modelo especificado en una tabla de mortalidad dinámica, la hoja de cálculo se convierte en un instrumento muy eficaz para obtener las tasas de mortalidad para cualquier año de calendario futuro y/o generación [16]. A continuación se presenta, de forma esquemática el procedimiento para su construcción, distinguiendo entre el caso de la elaboración de una tabla con las probabilidades anuales de fallecimiento para un año de calendario futuro y el caso que corresponde a una generación.

### 4.1. Año de calendario futuro

La obtención de las probabilidades anuales de fallecimiento para un año de calendario futuro se realizará tomando como ejemplo la tabla española PERM/F 2000.

El procedimiento de cálculo de las tasas de mortalidad en un año de calendario  $t$ ,  $q_{x,t}$ , se resume en:

- $q_{x,2000}$  disponibles
- $\lambda_x$  disponibles
- calcular  $e^{-\lambda_x(t-2000)}$
- calcular  $q_{x,t} = q_{x,2000} e^{-\lambda_x(t-2000)}$

#### 4.1.1. Ejemplo

Calcularemos con una hoja de cálculo las tasas de mortalidad previstas según la tabla PERF 2000P para el año  $t=2020$ . Los datos disponibles se muestran en la Tabla 2.

El procedimiento de cálculo se puede esquematizar en las siguientes etapas:

Tabla 2: Datos disponibles

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2020				
2	x	$q_{x,2000}$	$\lambda_x$	$t - 2000$	$e^{-\lambda_x(t-2000)}$	$q_{x,2020}$
3	0	0,003215	0,04			
4	1	0,000264	0,04			
5	2	0,000196	0,04			
6	...	...	...			

- En la columna D calculamos cuántos años se aplica la mejora de mortalidad, usando la celda B1 en la fórmula (Tabla 3).
- En la columna E calculamos el factor de reducción por edad,  $e^{-C \cdot D}$  (Tabla 4).
- Las tasas del año 2020 son el producto de las columnas B y E (Tabla 5).
- Por último, modificando la celda B1 se pueden recalcular automáticamente las tasas para otro año futuro. En la Tabla 6 se muestran los resultados para el año 2025.

Tabla 3: Años de mejora

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2020				
2	x	$q_{x,2000}$	$\lambda_x$	$t - 2000$	$e^{-\lambda_x(t-2000)}$	$q_{x,2020}$
3	0	0,003215	0,04	20		
4	1	0,000264	0,04	20		
5	2	0,000196	0,04	20		
6	...	...	...	...		

Tabla 4: Factor de reducción

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2020				
2	x	$q_{x,2000}$	$\lambda_x$	$t - 2000$	$e^{-\lambda_x(t-2000)}$	$q_{x,2020}$
3	0	0,003215	0,04	20	0,4493	
4	1	0,000264	0,04	20	0,4493	
5	2	0,000196	0,04	20	0,4493	
6	...	...	...	...	...	

Tabla 5: Tasas 2020

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2020				
2	x	$q_{x,2000}$	$\lambda_x$	$t - 2000$	$e^{-\lambda_x(t-2000)}$	$q_{x,2020}$
3	0	0,003215	0,04	20	0,4493	<b>0,001445</b>
4	1	0,000264	0,04	20	0,4493	<b>0,000119</b>
5	2	0,000196	0,04	20	0,4493	<b>0,000088</b>
6	...	...	...	...	...	...

Tabla 6: Tasas 2025

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2025				
2	x	$q_{x,2000}$	$\lambda_x$	$t - 2000$	$e^{-\lambda_x(t-2000)}$	$q_{x,2020}$
3	0	0,003215	0,04	25	0,3679	<b>0,001183</b>
4	1	0,000264	0,04	25	0,3679	<b>0,000097</b>
5	2	0,000196	0,04	25	0,3679	<b>0,000072</b>
6	...	...	...	...	...	...

## 4.2. Generación

De nuevo emplearemos la tabla española PERM/F 2000 para la obtención de las tasas anuales de mortalidad, en este caso para una generación. El proceso de cálculo de las tasas de mortalidad para los nacidos en el año  $b$ ,  $q_{x,b}$ , se resume en:

- $q_{x,2000-x}$  disponibles
- $\lambda_x$  disponibles
- calcular  $e^{-\lambda_x(b+x-2000)}$
- calcular  $q_{x,b} = q_{x,2000-x} e^{-\lambda_x(b+x-2000)}$

### 4.2.1. Ejemplo

Construiremos con una hoja de cálculo las tasas de mortalidad previstas según la tabla PERF 2000P para las mujeres nacidas en el año  $b=1980$ . En la Tabla 7 se presentan los datos disponibles en la tabla original.

Los pasos a seguir para realizar la construcción de la tabla de la generación de 1980 son los siguientes:

- En la columna D calculamos cuántos años se aplica la mejora de mortalidad, usando la celda B1 (Tabla 8).

Tabla 7: Datos disponibles

	A	B	C	D	E	F
1	b =	1980				
2	x	$q_{x,2000-x}$	$\lambda_x$	$b + x - 2000$	$e^{-\lambda_x(b+x-2000)}$	$q_{x,1980}$
...	...	...	...			
53	50	0,001220	0,025			
54	51	0,001385	0,025			
55	52	0,001449	0,025			
...	...	...	...	...		

- En la columna E calculamos el factor de reducción por edad,  $e^{-C \cdot D}$  (Tabla 9).
- Las tasas para una nacida en 1980 son el producto de las columnas B y E (Tabla 10).
- Modificando la celda B1 se puede recalcular automáticamente para otro año de nacimiento, por ejemplo para las nacidas en el año 1985,  $b = 1985$  (Tabla 11).

Tabla 8: Años de mejora

	A	B	C	D	E	F
1	b =	1980				
2	x	$q_{x,2000-x}$	$\lambda_x$	$b + x - 2000$	$e^{-\lambda_x(b+x-2000)}$	$q_{x,1980}$
...	...	...	...	...		
53	50	0,001220	0,025	30		
54	51	0,001385	0,025	31		
55	52	0,001449	0,025	32		
...	...	...	...	...		

Tabla 9: Factor de reducción

	A	B	C	D	E	F
1	b =	1980				
2	x	$q_{x,2000-x}$	$\lambda_x$	$b + x - 2000$	$e^{-\lambda_x(b+x-2000)}$	$q_{x,1980}$
...	...	...	...	...	...	
53	50	0,001220	0,025	30	0,4724	
54	51	0,001385	0,025	31	0,4607	
55	52	0,001449	0,025	32	0,4493	
...	...	...	...	...	...	

Tabla 10: Tasas nacida en 1980

	A	B	C	D	E	F
1	b =	1980				
2	x	$q_{x,2000-x}$	$\lambda_x$	$b + x - 2000$	$e^{-\lambda_x(b+x-2000)}$	$q_{x,1980}$
...	...	...	...	...	...	...
53	50	0,001220	0,025	30	0,4724	<b>0,000576</b>
54	51	0,001385	0,025	31	0,4607	<b>0,000638</b>
55	52	0,001449	0,025	32	0,4493	<b>0,000651</b>
...	...	...	...	...	...	...

Tabla 11: Tasas nacida en 1985

	A	B	C	D	E	F
1	b =	1985				
2	x	$q_{x,2000-x}$	$\lambda_x$	$b + x - 2000$	$e^{-\lambda_x(b+x-2000)}$	$q_{x,1980}$
...	...	...	...	...	...	...
53	50	0,001220	0,025	35	0,4169	<b>0,000509</b>
54	51	0,001385	0,025	36	0,4066	<b>0,000563</b>
55	52	0,001449	0,025	37	0,3965	<b>0,000575</b>
...	...	...	...	...	...	...

## 5. Conclusiones

El uso de hojas de cálculo para la elaboración de tablas de mortalidad se puede considerar como uno de los instrumentos más eficaces y populares en el campo profesional actuarial, especialmente cuando se trata de tablas de mortalidad dinámicas o generacionales. La flexibilidad que aporta la tecnología asociada a las hojas de cálculo para el trabajo con matrices de datos permite maximizar la gestión de la información cuantitativa, al tiempo que simplifica notablemente la mecánica de cálculo para la proyección de probabilidades de fallecimiento anuales.

En este trabajo se ha presentado un mecanismo de generación de tablas de mortalidad, tanto para generaciones nacidas en el mismo año, como para años de calendario futuros, que resulta de una indudable utilidad para la posterior realización de cálculos actuariales. La implementación realizada en los ejemplos se ha elaborado con las tablas españolas PERM/F 2000, aunque dada su flexibilidad puede ser replicada sin dificultad para otras tablas de tipo dinámico o generacional.



## Referencias

- [1] Mitchell, D., Brockett, P., Mendoza-Arriaga, R., Muthuraman, K. (2013). Modeling and forecasting mortality rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2), 275-285.
- [2] Deng, Y., Brockett, P., MacMinn, R. (2012). Longevity/mortality risk modeling and securities pricing. *Journal of Risk and Insurance*, 79(3), 697-721.
- [3] Yang, S., Yue, J., Huang, H. (2010). Modeling longevity risks using a principal component approach: a comparison with existing stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1), 254-270.
- [4] Booth, H., Hyndman, R., Tickle, L., Jong, P.D. (2006). Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, 15, 289-310.
- [5] Renshaw, A., Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 556-570.
- [6] Fernández-Morales, A. (2008). Métodos de graduación paramétrica de la mortalidad en el ámbito actuarial para la población andaluza. *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales. Papeles de trabajo*, 36, 83-100.
- [7] Fernández-Morales, A. (2009). Graduación de la mortalidad en Andalucía con modelos de mortalidad con heterogeneidad inobservable. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 15, 23-50.
- [8] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M.C.(2010). Using iPhone web-apps to enhance learning and teaching in Actuarial education. En Guy, R. (ed.) *Mobile learning: Pilot projects and initiatives*. Informing Science: Santa Rosa, California, USA, 83-104.
- [9] Fernández-Morales, A. (2015). Application of a Discrete-time Markov Chain Simulation in Insurance. *International Journal of Recent Contributions from Engineering, Science and IT*, 3(3), 27-32.
- [10] Fernández-Morales, A. (2011). Learning Survival Models with On-Line Simulation Activities in the Actuarial Science Degree. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 6 (1), 15-19.
- [11] Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (2000). *Resolución de 3 de octubre de 2000*, BOE núm. 244, de 11 de octubre de 2000.

- [12] Instituto de Actuarios Españoles (2014). *Bases Técnicas Actuariales del Sistema para la valoración de los daños y perjuicios causados a las personas en accidentes de circulación*.
- [13] DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit (2005). Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, XXVII(2), 199–313.
- [14] Kainhofer, R., Predota, M. y Schmock, U. (2006). Die neue österreichische Rententafel AVÖ 2005R, *Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs*, 13, 55-136.
- [15] Pitacco, E. (2004). Survival models in a dynamic context: a survey. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35, 279-298.
- [16] Fernández-Morales, A, (2005). *Tutorial para la construcción de tablas de mortalidad dinámicas PERM/F 2000 con hoja de cálculo*. RIUMA, Universidad de Málaga.