



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS  
CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

**TESIS DOCTORAL**

**METODOLOGÍA MULTIMEDIA  
Y EVOLUCIÓN DEL PENSAMIENTO  
MATEMÁTICO ORDINAL  
PRENUMÉRICO  
EN ESCOLARES DE 3 A 7 AÑOS**

Pedro Hernández Hernández

MÁLAGA, 2015



AUTOR: Pedro Hernández Hernández

 <http://orcid.org/0000-0001-8171-1338>

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer obras derivadas.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA): [riuma.uma.es](http://riuma.uma.es)



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS  
CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

**METODOLOGÍA MULTIMEDIA  
Y EVOLUCIÓN DEL PENSAMIENTO  
MATEMÁTICO ORDINAL  
PRENUMÉRICO  
EN ESCOLARES DE 3 A 7 AÑOS**

TESIS DOCTORAL

Presentada por

Pedro Hernández Hernández

Bajo la dirección de

Dr. D. José Luis González Marí

MÁLAGA, 2015





José Luis González Marí, profesor del Departamento de Didáctica de las Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, como director del trabajo de investigación titulado “Metodología Multimedia y Evolución del Pensamiento Matemático Ordinal Preenumérico en Escolares de 3 a 7 años” presentado por D. Pedro Hernández Hernández para la obtención del título de Doctor, me complace informar que reúne las condiciones científicas requeridas en la normativa vigente, por lo cual, autorizo su presentación, lectura y defensa pública.

Málaga a 3 de noviembre de 2015.



Tribunal que juzga la tesis:

---

Dra. D<sup>a</sup>. Manuela Jimero Pérez  
Miembro del Tribunal

---

Dr. D. Lorenzo J. Blanco Nieto  
Miembro del Tribunal

---

Dr. D. Bernardo Gómez Alfonso  
Miembro del Tribunal

---

Dra. D<sup>a</sup>. Catalina M<sup>a</sup> Fernández Escalona  
Secretaria del Tribunal

---

Dra. D<sup>a</sup>. Encarnación Castro Martínez  
Presidenta del Tribunal

Miembros suplentes:

---

Dr. D. Alexander Maz Machado

---

Dr. D. Antonio L. Ortiz Villarejo



*“Hay tres ideas dominantes: tres, por así decirlo, esferas de pensamiento que impregnan la totalidad de la ciencia matemática, a una u otra de las cuales – o a dos o a todas ellas combinadas – toda verdad matemática puede ser referida. Éstas son las tres nociones cardinales de número, espacio y orden”.*

J. J. Sylvester, 4 de diciembre de 1854



*Al Prof. Dr. D. Alfonso V. Ortiz Comas,  
in memoriam.*

*A Carmen y Héctor, mi esposa e hijo,  
por su apoyo y paciencia infinitos  
y por el tiempo que les debo.*

*A la memoria de mis padres.*





## AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar desde aquí mi más emotivo recuerdo del Dr. D. Alfonso V. Ortiz Comas (q.e.p.d.), primero de mis maestros e impulsor de este trabajo que fue el último que dirigió. Gracias Alfonso por tu sincera amistad, valiosa ayuda, constante estímulo y apoyo incondicional.

Agradecer al Dr. D. José Luis Gonzáles Marí la experta dirección de este trabajo así como sus valiosas aportaciones, con las que indudablemente ha ganado en calidad. Gracias por tu comprensión, apoyo, maestría y por asumir desinteresadamente la dirección de este trabajo en un momento especialmente delicado.

A la Dra. D<sup>a</sup> Catalina Fernández Escalona la formación recibida, sus valiosas aportaciones e interés constante.

A los compañeros del Área de Didáctica de la Matemática por su estímulo, interés y los ánimos recibidos.

A las directoras, profesoras y profesores, de los centros que participaron en el estudio, y los padres y madres de los alumnos y alumnas participantes, por ofrecerme todas las facilidades y ayudas.

A los niños y niñas que realizaron las pruebas y tareas, por su enorme entusiasmo y comportamiento ejemplar.

A la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, por la concesión de una licencia por estudios en el curso 2007-2008; sin la cual, este trabajo no habría sido posible.

Finalmente, a Carmen y Héctor, mi esposa e hijo, por todo lo que os debo.

A todos ellos, mi más profundo y sincero agradecimiento.



# Índice general

<i>Índice de tablas</i>	<i>Página</i> XXVII
<i>Índice de figuras</i>	XXXIX
<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN</b>	9
1.1. Introducción	9
1.2. Origen y evolución del problema de investigación	10
1.2.1. Consideraciones generales	10
1.2.2. Estudio exploratorio previo	11
1.2.3. Revisión realizada en el año 2010	15
1.2.4. Continuación de la investigación	16
1.3. Área problemática y marco teórico	17
1.4. Delimitación formal del problema de investigación	22
1.4.1. Fines	22
1.4.2. Supuestos y opciones apriorísticas	23
1.4.3. Objetivos de la investigación	23
1.4.4. Hipótesis	25
1.5. Marco metodológico	26
1.5.1. Estudios teóricos y metodologías no empíricas	26
1.5.2. Estudios empíricos	27
1.5.3. Articulación de las hipótesis en el proceso metodológico	29
1.5.4. Secuenciación, etapas y desarrollo temporal del estudio	32
1.6. Fuentes de información	35

1.6.1.	Principales fuentes consultadas	35
1.6.2.	Contenidos, descriptores, estructura y formatos de la información	36
1.6.3.	Limitaciones	37
1.7.	Principales aportaciones de la investigación	38
1.8.	Racionalidad del estudio	39
1.9.	Modalidad de la investigación	40
1.10.	Criterios de bondad	41
<b>2.</b>	<b>EPISTEMOLOGÍA Y FENOMENOLOGÍA</b>	<b>45</b>
2.1.	Introducción	45
2.2.	Epistemología del orden natural	48
2.2.1.	La estructura ordinal de los números naturales	48
2.2.2.	Corrientes históricas	61
2.2.2.1.	El convencionalismo	61
2.2.2.2.	El logicismo. La polémica entre el cardinal y el ordinal	63
2.2.3.	El número natural en el marco de la epistemología genética	67
2.2.3.1.	La intervención del sujeto como centro de atención de la epistemología genética.	67
2.2.3.2.	La seriación piagetiana	71
2.3.	Fenomenología de la estructura ordinal elemental: la comparación y el orden	75
2.3.1.	Magnitud, cantidad y medida	75
2.3.2.	Las formas conceptuales. Los conceptos clasificatorios, comparativos y métricos	77
2.4.	Conclusiones y algunas consecuencias para la investigación	81
<b>3.</b>	<b>PENSAMIENTO ORDINAL. ANTECEDENTES</b>	<b>85</b>
3.1.	Introducción	85
3.2.	Estudios cognitivos sobre el número natural	86
3.3.	El número y el orden desde la perspectiva neuropsicológica	91
3.4.	Razonamiento inductivo numérico y relaciones lógicas ordinales	97
3.4.1.	Razonamiento inductivo numérico. Descripción y resultados	98

3.4.2.	Relaciones lógicas ordinales.	109
3.5.	Conclusiones para la investigación	120
<b>4.</b>	<b>LA TECNOLOGÍA MULTIMEDIA. ANTECEDENTES</b>	<b>125</b>
4.1.	Introducción	125
4.2.	Multimedia. Componentes multimodales	126
4.3.	Consideraciones epistémicas y ontológicas sobre la interacción sujeto–ordenador	128
4.4.	Teorías del aprendizaje multimedia	135
4.4.1.	Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia de Mayer	136
4.4.2.	Teoría de la Carga Cognitiva de Sweller	140
4.4.3.	Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos de Schnotz y Bannert	146
4.5.	Conclusiones y consecuencias para la investigación	150
4.5.1.	Un análisis comparativo de las teorías del aprendizaje multimedia	150
4.5.2.	Los principios del aprendizaje multimedia	152
4.5.3.	Conclusiones para la investigación	154
<b>5.</b>	<b>ESTUDIO EXPLORATORIO</b>	<b>159</b>
5.1.	Introducción	159
5.2.	Objetivos del estudio	160
5.3.	Marco teórico y metodológico	161
5.3.1.	Modelo de competencias ordinales	162
5.4.	Diseño del estudio empírico exploratorio	164
5.4.1.	Metodología	165
5.4.2.	Recogida y tratamiento de la información.	166
5.4.3.	Materiales: Hardware y software	168
5.5.	Las tareas	169
5.5.1.	Tareas iniciales	170
5.5.1.1.	Objetivos	170
5.5.1.2.	Descripción e interfaces	170
5.5.1.3.	Desarrollo y tareas	173
5.5.2.	Elementos comunes e interfaces de las tareas propias del Estudio	175
5.5.3.	Primer conjunto: Orden lineal	177

5.5.3.1.	Objetivos	178
5.5.3.2.	Descripción y análisis	178
5.5.3.3.	Variables y registros de la información	182
5.5.4.	Segundo conjunto: Orden con cantidades continuas	183
5.5.4.1.	Objetivos	183
5.5.4.2.	Descripción y análisis	184
5.5.4.3.	Variables y registros de la información	186
5.5.5.	Tercer conjunto: Etiquetaje	188
5.5.5.1.	Objetivos	189
5.5.5.2.	Descripción y análisis	189
5.5.5.3.	Registro de la información	191
5.5.6.	Cuarto conjunto: Orden con cantidades discretas	192
5.5.6.1.	Objetivos	192
5.5.6.2.	Descripción y análisis	192
5.5.6.3.	Variables y registros de la información	196
5.6.	Selección de la muestra y desarrollo del estudio	197
5.7.	Resultados y conclusiones del primer conjunto: Orden lineal	200
5.7.1.	Codificación y categorías de respuestas.	200
5.7.2.	Análisis de las respuestas.	201
5.7.3.	Niveles en el orden lineal	205
5.7.3.1.	Conclusiones	208
5.7.4.	Análisis de los tiempos de respuesta.	209
5.7.4.1.	Conclusiones	212
5.7.5.	Número de intentos.	213
5.7.5.1.	Conclusiones	216
5.8.	Resultados y conclusiones del segundo conjunto: Orden con cantidades continuas	217
5.8.1.	Codificación y categorías de respuestas.	217
5.8.2.	Análisis de las respuestas.	217
5.8.2.1.	Estrategias y uso de la pieza sobrante	218
5.8.2.2.	Conclusiones	224
5.8.2.3.	Niveles de resultados	225
5.8.2.4.	Conclusiones	230
5.8.3.	Análisis de los tiempos de respuesta.	231
5.8.3.1.	Conclusiones	233

5.8.4.	Número de intentos.	234
5.8.4.1.	Conclusiones	236
5.9.	Resultados y conclusiones del tercer conjunto: Etiquetaje	237
5.9.1.	Codificación y categorías de respuestas	238
5.9.2.	Análisis de las respuestas	238
5.9.2.1.	Estrategias en Etiquetaje	238
5.9.2.2.	Niveles en Etiquetaje	242
5.9.2.3.	Conclusiones	246
5.9.3.	Análisis de los tiempos de respuesta	248
5.9.3.1.	Conclusiones	250
5.9.4.	Número de intentos	252
5.9.4.1.	Conclusiones	256
5.10.	Resultados y conclusiones del cuarto conjunto: Orden con cantidades discretas	257
5.10.1.	Codificación y categorías de respuestas	257
5.10.2.	Análisis de las respuestas	258
5.10.2.1.	Estrategias y uso de las piezas sobrantes	258
5.10.2.2.	Conclusiones	265
5.10.2.3.	Niveles de resultados	268
5.10.2.4.	Conclusiones	273
5.10.3.	Análisis de los tiempos de respuesta	274
5.10.3.1.	Conclusiones	278
5.10.4.	Número de intentos	279
5.10.4.1.	Conclusiones	283
5.11.	Estudio comparativo de las tareas	284
5.12.	Conclusiones del estudio exploratorio	289
<b>6.</b>	<b>MARCOS TEÓRICO Y METODOLÓGICO</b>	<b>297</b>
6.1.	Introducción	297
6.2.	Dualidad de la investigación: Pensamiento ordinal y tecnología multimedia	298
6.3.	Modelo evolutivo de capacidades ordinales y recursivas	302
6.4.	Modelo general para el diseño del ítem multimedia	308
6.5.	Diseño y construcción del instrumento multimedia. Los conjuntos de tareas	314
6.5.1.	Funciones ontológicas de los conjuntos de tareas	315

6.5.2.	Aplicación del diseño del ítem multimedia a la implementación del instrumento	319
6.6.	Metodología multimedia aplicada al estudio de las competencias ordinales y recursivas	322
6.7.	Una nueva metodología de investigación	325
<b>7.</b>	<b>DISEÑO DEL ESTUDIO EMPÍRICO</b>	<b>329</b>
7.1.	Introducción	329
7.2.	Objetivos del estudio	330
7.3.	Metodología	331
7.3.1.	Metodología general del estudio	331
7.3.2.	Diseño del estudio empírico	332
7.3.3.	Selección de la muestra	334
7.3.4.	Metodología a seguir en las entrevistas individuales	335
7.3.5.	Recogida y tratamiento de la información	338
7.4.	Materiales: Hardware y Software	339
7.5.	Modificaciones y mejoras en los conjuntos de tareas	340
7.6.	El instrumento multimedia: conjuntos y tareas individuales.	344
7.6.1.	Tareas de orden topológico u orden lineal infralógico.	345
7.6.1.1.	Características generales.	346
7.6.1.2.	Descripción de las tareas.	347
7.6.1.3.	Registro de las interacciones sujeto-ordenador en las tareas de orden lineal.	354
7.6.2.	Tareas ordinales con cantidades continuas longitudinales.	357
7.6.2.1.	Características generales	358
7.6.2.2.	Descripción de las tareas.	360
7.6.2.3.	Registro de la interacción sujeto-ordenador en las tareas de orden con cantidades continuas.	366
7.6.3.	Tareas ordinales con cantidades discretas.	377
7.6.3.1.	Características generales.	379
7.6.3.2.	Descripción de las tareas.	382
7.6.3.3.	Registro de la interacción sujeto-ordenador en las tareas de orden con cantidades discretas.	390



7.6.3.4.	Cuestionario sobre las estrategias	398
7.6.4.	Tareas recursivas	399
7.6.4.1.	Características generales	400
7.6.4.2.	Descripción de las tareas	402
7.6.4.3.	Registro de la interacción sujeto-ordenador en las tareas recursivas.	410
7.7.	Tratamiento y análisis de la información. Variables del estudio.	412
7.7.1.	Variables para el estudio de las tareas de orden lineal.	414
7.7.2.	Variables para el estudio de las tareas de orden con cantidades continuas.	415
7.7.3.	Variables para el estudio de las tareas de orden con cantidades discretas	417
7.7.4.	Variables para el estudio de las tareas recursivas	422
7.7.5.	Instrumentos de tratamiento y análisis de datos	424
<b>8.</b>	<b>DESARROLLO Y RESULTADOS</b>	425
8.1.	Introducción	425
8.2.	Primeras etapas del estudio: actividades realizadas	426
8.3.	Muestra sobre la que se realiza el estudio	428
8.4.	Tercera etapa del estudio: las entrevistas individuales.	430
8.5.	Resultados relativos a las tareas de orden lineal.	433
8.5.1.	Valoración de las respuestas globales y niveles	434
8.5.1.1.	Frecuencias de las respuestas.	434
8.5.1.2.	Caracterización y estudio de los niveles.	436
8.5.1.3.	Modelos de ajuste.	440
8.5.2.	Conclusiones del estudio de las tareas de orden lineal infralógico.	442
8.6.	Resultados y conclusiones de las tareas de orden con cantidades continuas.	443
8.6.1.	Análisis y valoración de las respuestas.	444
8.6.1.1.	Distribución de las frecuencias.	444
8.6.1.2.	Análisis y caracterización de los niveles	447
8.6.1.3.	Análisis de las estrategias	452
8.6.1.4.	Uso de las piezas sobrantes	465

8.6.1.5.	Modelos de ajuste	471
8.6.2.	Conclusiones del estudio de las tareas de orden con cantidades continuas	472
8.6.2.1.	En relación con las frecuencias y niveles	473
8.6.2.2.	En relación con las estrategias	474
8.6.2.3.	En relación con las piezas sobrantes	477
8.6.2.4.	En relación con los modelos de ajuste	478
8.7.	Resultados y conclusiones relativos a las tareas de orden con cantidades discretas	479
8.7.1.	Análisis y valoración de las respuestas.	480
8.7.1.1.	Distribuciones de frecuencias en las respuestas	480
8.7.1.2.	Caracterización y estudio de los niveles.	484
8.7.1.3.	Análisis de las estrategias	489
8.7.1.4.	Uso de las piezas sobrantes	507
8.7.1.5.	Modelos de ajuste	512
8.7.2.	Conclusiones del estudio de las tareas de orden con cantidades discretas	514
8.7.2.1.	En relación con las frecuencias y niveles	514
8.7.2.2.	En relación con las estrategias locales	515
8.7.2.3.	En relación con las estrategias globales	518
8.7.2.4.	En relación con las piezas sobrantes	520
8.7.2.5.	En relación con los modelos de ajuste	520
8.8.	Resultados y conclusiones relativos a las tareas de recursivas	521
8.8.1.	Análisis y valoración de las respuestas.	522
8.8.1.1.	Frecuencias de las respuestas.	522
8.8.1.2.	Caracterización y estudio de los niveles.	526
8.8.1.3.	Análisis de las estrategias	531
8.8.1.4.	El etiquetaje y la recursión	535
8.8.1.5.	Modelos de ajuste	536
8.8.2.	Conclusiones del estudio de las tareas recursivas	538
8.8.2.1.	En relación con las frecuencias y niveles	538
8.8.2.2.	En relación con las estrategias	539
8.8.2.3.	Sobre el etiquetaje y la recursión	541
8.8.2.4.	En relación con los modelos de ajuste	541

8.9.	Estudio comparativo de las tareas	542
8.9.1.	Análisis comparativo	542
8.9.1.1.	Ajustes al modelo evolutivo	555
8.9.2.	Sobre la antisimetría	558
8.9.3.	Conclusiones del estudio comparativo de las tareas	559
<b>9.</b>	<b>CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>561</b>
9.1.	Introducción	561
9.2.	El problema de investigación: definición y elementos básicos	562
9.3.	Resultados y conclusiones	568
9.3.1.	Análisis Didáctico de antecedentes	569
9.3.1.1.	Análisis epistemológico y fenomenológico sobre estructura ordinal	569
9.3.1.2.	Análisis de los antecedentes sobre estudios cognitivos relacionados con la línea de investigación	572
9.3.1.3.	Análisis de los antecedentes sobre la Tecnología Multimedia en relación con la cognición y el aprendizaje	574
9.3.2.	Estudio Exploratorio	577
9.3.3.	Resultados y conclusiones de los estudios teóricos y su incidencia en los Marcos teórico y metodológico	582
9.3.4.	Resultados y conclusiones del Estudio Empírico	588
9.4.	Logros y hallazgos	594
9.4.1.	Generales	594
9.4.2.	Validación/verificación de las hipótesis	595
9.4.3.	Consecución de fines y objetivos	598
9.5.	Limitaciones de la investigación	598
9.6.	Perspectivas futuras	599
9.6.1.	En relación con la continuación de la investigación	599
9.6.2.	En relación con otras investigaciones	600
9.6.3.	Aplicabilidad de los resultados	601
	<i>Referencias</i>	603
	<b>Anexo A. ESTUDIO EXPLORATORIO. DATOS COMPLEMENTARIOS</b>	<b>613</b>
A.1.	Tareas iniciales. Ventanas de planteamiento y solución	613

A.2.	Tareas de orden lineal	617
A.2.1.	Ventanas de planteamiento y solución	617
A.2.2.	Codificación y valoración de las respuestas	621
A.2.3.	Análisis temporal	625
A.2.4.	Número de intentos	626
A.3.	Tareas de orden con cantidades continuas	627
A.3.1.	Ventanas de planteamiento y solución	627
A.3.2.	Codificación y valoración de las respuestas	630
A.3.3.	Análisis temporal	637
A.3.4.	Número de intentos	638
A.4.	Tareas de Etiquetaje	639
A.4.1.	Ventanas de planteamiento y solución	639
A.4.2.	Estrategias	641
A.4.3.	Valoración de las respuestas	642
A.4.4.	Análisis temporal	644
A.4.5.	Número de intentos	645
A.5.	Tareas de orden con cantidades discretas	646
A.5.1.	Ventanas de planteamiento y solución	646
A.5.2.	Codificación y valoración de las respuestas	648
A.5.3.	Análisis temporal	656
A.5.4.	Número de intentos	657
A.6.	Estudio comparativo de las tareas	659

<b>Anexo B.</b>	<b>DATOS COMPLEMENTARIOS DE LAS TAREAS DE ORDEN LINEAL</b>	665
B.1.	Valoración de las tareas.	665
B.1.1.	Clasificación de los sujetos según los valores de la variable <i>SumaL</i> .	665
B.1.2.	Información complementaria relativa a los niveles en orden lineal infralógico.	668
B.1.3.	Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad en orden lineal.	671
B.2.	Análisis de los tiempos de respuesta	675
B.2.1.	Conclusiones	678
B.2.2.	Datos complementarios	679
B.2.3.	Datos sobre modelos de ajuste	682

B.3. Estudio sobre el número de intentos	687
B.3.1. Conclusiones	693
B.3.2. Datos complementarios	694
B.3.3. Datos sobre modelos de ajuste	704
<b>Anexo C. DATOS COMPLEMENTARIOS EN ORDEN CON CANTIDADES CONTINUAS</b>	709
C.1. Valoración de las tareas.	709
C.2. Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.	712
C.3. Estrategias de los sujetos en orden con cantidades continuas.	715
C.4. Uso de las piezas sobrantes	722
C.5. Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad	726
<b>Anexo D. DATOS COMPLEMENTARIOS EN ORDEN CON CANTIDADES DISCRETAS</b>	731
D.1. Valoración de las tareas.	731
D.2. Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades discretas.	734
D.3. Estrategias de los sujetos en las tareas de orden con cantidades discretas.	737
D.4. Uso de las piezas sobrantes	759
D.5. Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad	763
<b>Anexo E. DATOS COMPLEMENTARIOS EN LAS TAREAS RECURSIVAS</b>	767
E.1. Definiciones recursivas de las funciones que intervienen en las tareas	767
E.2. Valoración de las tareas	769
E.3. Clasificación de las respuestas por niveles en las tareas recursivas.	771
E.4. Estrategias de los sujetos en las tareas recursivas	774
E.5. Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad en las tareas recursivas.	777
<b>Anexo F. DATOS COMPLEMENTARIOS DEL ESTUDIO COMPARATIVO</b>	781
F.1. Valoraciones totales y niveles en los cuatro conjuntos de tareas	781

F.2. Valoraciones medias por grupos de edad	786
F.3. Niveles por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas	787
F.4. Correlaciones de Pearson entre resultados de los cuatro conjuntos de tareas	790

## Índice de tablas

1.1. Número de ítems en cada conjunto de tareas. Estudio Exploratorio.	14
3.1. Campos y relaciones en los estudios de Ortiz y Fernández.	98
4.1. Modos y componentes del funcionamiento multimodal multimedia.	127
4.2. Supuestos de la TCAM, Mayer(2005b, p.34).	138
4.3. Las cinco formas de representacion en la TCAM.	140
4.4. Principios del Aprendizaje Multimedia.	152
4.4. Principios del Aprendizaje Multimedia.	153
4.4. Principios del Aprendizaje Multimedia (Continuación).	154
5.1. Prefijos a asignar a los sujetos según su grupo de edad. Estudio exploratorio.	167
5.2. Estrategias. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio. (a) Tareas segunda y tercera; (b) Tareas cuarta y quinta; (c) Sexta tarea.	219
5.3. Resumen numérico de las estrategias por tareas. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	221
5.4. Resumen numérico de las estrategias por grupos de edad. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	222
5.5. Uso de la piezas sobrantes. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio. (a) Tareas tercera y cuarta; (b) Tareas quinta y sexta.	223
5.6. Medidas de centralización y dispersión de las valoraciones. Orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	227
5.7. Estrategias en Etiquetaje. Estudio exploratorio. (a) Tareas primera y segunda; (b) Tareas tercera y cuarta; (c) Tareas quinta y sexta.	239
5.8. Número de estrategias utilizadas por los sujetos con edad menor o mayor que 5 años en etiquetaje. Estudio Exploratorio.	240
5.9. Etiquetaje por grupos de edad. Estudio Exploratorio.	241
5.10. Tiempos y valoraciones totales por tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	248

5.11. Estrategias por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades discretas. (a) Tareas primera y segunda; (b) Tareas tercera y cuarta; (c) Tareas quinta y sexta.	259
5.12. Totales numéricos en las estrategias por tareas. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	261
5.13. Resumen numérico de las estrategias por grupos de edad. Tareas de orden con cantidades discretas. Est. exploratorio.	262
5.14. Porcentajes comparativos de uso de estrategias por grupos de edad en las tareas de orden con cantidades continuas y discretas. Estudio exploratorio.	263
5.15. Uso de las piezas sobrantes por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Primer subconjunto: Tareas segunda y tercera; (b) Segundo subconjunto: Tareas cuarta, quinta y sexta.	265
5.16. Medidas de centralización y dispersión de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.	270
5.17. Evolución de los tres niveles en cada uno de los cuatro conjuntos de tareas. Estudio Exploratorio. (a) Edades en las que aparecen por primera vez; (b) Edades a las que se hacen más frecuentes.	290
6.1. Número de ítems en cada conjunto de tareas.	315
6.2. Etapas metodológicas del Estudio Empírico.	323
6.3. Prefijos identificativos asignados sujetos por intervalos de edad.	325
7.1. Coeficientes alfa si se elimina algún ítem de Orden Lineal del estudio exploratorio.	341
7.2. Coeficiente de fiabilidad para los cinco últimos ítems de Orden Lineal del estudio exploratorio.	342
7.3. Ficha técnica 1. Tarea introductoria de orden lineal.	348
7.4. Ficha técnica 2. Segunda tarea de orden lineal.	349
7.5. Ficha técnica 3. Tercera tarea de orden lineal.	350
7.6. Ficha técnica 4. Cuarta tarea de orden lineal.	351
7.7. Ficha técnica 5. Quinta tarea de orden lineal.	352
7.8. Ficha técnica 6. Sexta tarea de orden lineal.	353
7.14. Ficha técnica 7. Tarea introductoria al orden con cantidades continuas.	360
7.15. Ficha técnica 8. Segunda tarea de orden con cantidades continuas.	361
7.16. Ficha técnica 9. Tercera tarea de orden con cantidades continuas.	362
7.17. Ficha técnica 10. Cuarta tarea de orden con cantidades continuas.	363
7.18. Ficha técnica 11. Quinta tarea de orden con cantidades continuas.	364
7.19. Ficha técnica 12. Sexta tarea de orden con cantidades continuas.	365
7.25. Ficha técnica 20. Tarea introductoria al primer subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas.	382
7.26. Ficha técnica 21. Segunda tarea de orden con cantidades discretas.	383
7.27. Ficha técnica 22. Tercera tarea de orden con cantidades discretas.	384



7.28. Ficha técnica 23. Cuarta tarea de orden con cantidades discretas.	385
7.29. Ficha técnica 24. Tarea introductoria al segundo subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas.	386
7.30. Ficha técnica 25. Sexta tarea de orden con cantidades discretas.	387
7.31. Ficha técnica 26. Séptima tarea de orden con cantidades discretas.	388
7.32. Ficha técnica 27. Octava tarea de orden con cantidades discretas.	389
7.39. Ficha técnica 13. Tarea introductoria a las tareas recursivas.	403
7.40. Ficha técnica 14. Primera tarea recursiva.	404
7.41. Ficha técnica 15. Segunda tarea recursiva.	405
7.42. Ficha técnica 16. Tercera tarea recursiva.	406
7.43. Ficha técnica 17. Cuarta tarea recursiva.	407
7.44. Ficha técnica 18. Quinta tarea recursiva.	408
7.45. Ficha técnica 19. Sexta tarea recursiva.	409
8.1. Fechas de realización de las etapas del estudio en los colegios seleccionados.	427
8.2. Datos de la muestra. Estudio empírico definitivo	429
8.3. Test de normalidad de la variable <i>SumaL</i> por grupos de edad.	434
8.4. Estadísticos de la variable <i>SumaL</i> por grupos de edad.	436
8.5. Caracterización de los niveles de orden lineal.	440
8.6. Comparativa de modelos de ajuste de la variable <i>MediaL</i> al variar la edad de los grupos.	441
8.7. Test de normalidad de la variable <i>SumaCC</i> por grupos de edad.	444
8.8. Estadísticos de la variable <i>SumaCC</i> por grupos de edad.	447
8.9. Caracterización de los niveles de dominio del orden con cantidades continuas.	452
8.10. Porcentajes de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades continuas por grupos de edad. (a) Tareas segunda, tercera y cuarta; (b) Quinta tarea; (c) Sexta tarea.	454
8.11. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades continuas por grupos de edad. (a) Tareas segunda, tercera y cuarta; (b) Quinta tarea; (c) Sexta tarea.	457
8.12. Extrapolación lineal de los porcentajes de uso de las estrategias ordinales en las tareas segunda, tercera y cuarta. Orden con cantidades continuas.	460
8.13. Porcentajes de las estrategias utilizadas por niveles en las dos últimas tareas de Orden con cantidades continuas. (a) Quinta tarea; (b) Sexta tarea.	464
8.14. Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según el número de tareas en las que se usa. Orden con cantidades continuas.	466
8.15. Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según las tareas y combinaciones en las que se usa. Orden con cantidades continuas.	467

8.16. Porcentajes totales de uso de la pieza sobrante por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades continuas.	468
8.17. Tareas y grupos de edad en los que se han registrado intentos contradictorios. Orden con cantidades continuas.	470
8.18. Comparativa de modelos de ajuste de la variable <i>MedCC</i> al variar la edad de los grupos.	471
8.19. Test de normalidad de la variable <i>SCCD5</i> por grupos de edad.	482
8.20. Estadísticos de la variable <i>SCCD5</i> por grupos de edad.	483
8.21. Caracterización de los niveles en las tareas de orden con cantidades discretas.	489
8.22. Porcentajes de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Primer subconjunto. (a) Tarea segunda; (b) tercera tarea; (c) cuarta tarea.	491
8.23. Porcentajes de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Segundo subconjunto. (a) Tarea Sexta; (b) séptima tarea; (c) octava tarea.	492
8.24. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Primer subconjunto. (a) segunda tarea; (b) tercera tarea; (c) cuarta tarea.	496
8.25. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Segundo subconjunto. (a) sexta tarea; (b) séptima tarea; (c) octava tarea.	497
8.26. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas por niveles en las tareas de Orden con cantidades discretas. (a) Tareas segunda; (b) tercera tarea; (c) cuarta tarea. (d) séptima tarea; (e) octava tarea.	501
8.27. Frecuencias de las estrategias globales por niveles y grupos de edad en el primer subconjunto de tareas de Orden con cantidades discretas.	503
8.28. Frecuencias de las estrategias globales por niveles y grupos de edad en el segundo subconjunto de tareas de Orden con cantidades discretas.	504
8.29. Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según el número de tareas en las que se usa. Orden con cantidades discretas.	508
8.30. Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según las tareas y combinaciones de tareas en las que se usa. Orden con cantidades discretas.	509
8.31. Porcentajes totales de uso de la pieza sobrante por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades discretas.	511
8.32. Tareas y grupos de edad en los que se han registrado intentos contradictorios. Orden con cantidades discretas.	512
8.33. Modelos de ajuste de los valores de la variable <i>MedCD</i> al variar la edad de los grupos.	513
8.34. Test de normalidad de la variable <i>SCCD5</i> por grupos de edad.	525
8.35. Estadísticos de la variable <i>SR5</i> por grupos de edad.	525
8.36. Caracterización de los niveles recursivos.	530

8.37. Estrategias en las tareas recursivas. (a) Tareas primera y segunda; (b) tercera y cuarta; (c) quinta y sexta.	532
8.38. Porcentajes totales de uso de las estrategias recursivas y no recursivas por grupos de edad. Tareas recursivas. (a) Tareas primera y segunda; (b) tercera y cuarta; (c) quinta y sexta.	534
8.39. Porcentajes de realización de las tareas recursivas segunda y tercera y diferencias entre ellas. (a) Por grupos de edad; (b) Por niveles.	536
8.40. Comparativa de modelos de ajuste de la variable <i>MedREC</i> al variar la edad de los grupos.	537
8.41. Situación de los niveles por grupos de edad según las medidas centrales de las distribuciones respectivas en los cuatro conjuntos de tareas.	549
8.42. Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.	550
8.42. Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.	551
8.42. Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.	552
8.42. Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.	553
8.42. Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.	554
8.42. Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.	555
8.43. (a) Porcentajes de sujetos por grupos de edad cuya valoración es mayor en cada uno de los tres conjuntos de tareas ordinales; (b) porcentajes de sujetos por grupos de edad según la secuencia ordenada obtenida en las valoraciones correspondientes a las tareas ordinales.	556
8.44. Valoraciones en porcentajes por grupos de edad de las tareas con solo dos piezas móviles: segunda tarea de orden con cantidades continuas (EvCC2) y sexta tarea de orden con cantidades discretas (EvCD6).	558
A.1. Codificación. Tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	621
A.1. Codificación. Tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio. (Continuación).	622
A.2. Valoración. Tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	623
A.3. Niveles en las tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	624
A.4. Tiempos en las tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	625
A.5. Intentos en las tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	626
A.6. Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	630
A.6. Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio. (Continuación).	631
A.7. Codificación de las respuestas de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	632
A.8. Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	633
A.9. Uso de las piezas sobrantes. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	634

A.10. Valoración. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	635
A.11. Niveles en orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	636
A.12. Tiempos. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	637
A.13. Intentos totales. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.	638
A.14. Estrategias en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.	641
A.15. Valoración de las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.	642
A.16. Niveles en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.	643
A.17. Tiempos en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.	644
A.18. Intentos de los sujetos en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.	645
A.19. Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	648
A.19. Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (Continuación).	649
A.20. Codificación de los resultados de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	650
A.21. Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	651
A.22. Resumen numérico de las estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	652
A.23. Uso de las piezas sobrantes por los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	653
A.24. Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	654
A.25. Niveles en orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.	655
A.26. Tiempos en minutos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	656
A.27. Intentos totales. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	657
A.28. Promedios de intentos totales por sujetos y grupos de edad según el número de tareas que realizan; y por tareas según los sujetos que las realizan. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.	658
A.29. Medias de las valoraciones de las respuestas de los sujetos por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. Estudio exploratorio.	659
A.30. Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas. Estudio exploratorio.	660
A.31. Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas. Estudio exploratorio.	661
A.32. Correlaciones de Pearson entre resultados de los cuatro conjuntos de tareas. Estudio Exploratorio. (a) Edad y Valoraciones de las respuestas; (b) Edad (EDG) y Valoraciones medias por grupos de edad; (c) Edad y Niveles de los sujetos.	663

B.1. Evaluación de los sujetos en las tareas de orden lineal.	665
B.1. Evaluación de los sujetos en las tareas de orden lineal.	666
B.1. Evaluación de los sujetos en las tareas de orden lineal (Continuación).	667
B.2. Ajuste de <i>MediaL</i> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	671
B.3. ANOVA de los ajustes de <i>MediaL</i> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	672
B.4. Coeficientes del ajuste de <i>MediaL</i> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	672
B.5. Datos del ajuste de <i>MediaL</i> mediante el modelo Inverso	673
B.6. Datos del ajuste de <i>MediaL</i> mediante la curva <i>S</i>	673
B.7. Intervalos temporales por grupos de edad en orden lineal	675
B.8. Estadísticos más relevantes de la variable <i>ttotal</i>	677
B.9. Clasificación de los sujetos por intervalos temporales en orden lineal.	679
B.9. Clasificación de los sujetos por intervalos temporales en orden lineal.	680
B.9. Clasificación de los sujetos por intervalos temporales en orden lineal (Continuación).	681
B.28. Intervalos de intentos erróneos por grupos de edad en orden lineal	690
B.29. Sumas de intentos erróneos por grupos de edad las tareas de orden lineal.	691
B.30. Estadísticos más relevantes de <i>MErrores</i> . Tareas de Orden lineal infralógico.	692
B.31. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.	694
B.31. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.	695
B.31. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.	696
B.31. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.	697
B.32. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.	698
B.32. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.	699
B.32. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.	700
B.32. Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.	701
C.1. Valoración de las respuestas de los sujetos en las tareas de orden con cantidades continuas.	709

C.1. Valoración de las respuestas de los sujetos en las tareas de orden con cantidades continuas.	710
C.1. Valoración de las respuestas de los sujetos en las tareas de orden con cantidades continuas.	711
C.2. Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.	712
C.2. Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.	713
C.2. Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.	714
C.3. Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas.	715
C.3. Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas.	716
C.3. Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas. (Continuación).	717
C.4. Estrategias de los sujetos según los valores de la variable <i>SumaCC</i> . Tareas de orden con cantidades continuas.	717
C.4. Estrategias de los sujetos según los valores de la variable <i>SumaCC</i> . Tareas de orden con cantidades continuas.	718
C.4. Estrategias de los sujetos según los valores de la variable <i>SumaCC</i> . Tareas de orden con cantidades continuas.	719
C.5. Estrategias de los sujetos según los valores de la variable <i>NivelCC</i> . Tareas de orden con cantidades continuas.	719
C.5. Estrategias de los sujetos según los valores de la variable <i>NivelCC</i> . Tareas de orden con cantidades continuas.	720
C.5. Estrategias de los sujetos según los valores de la variable <i>NivelCC</i> . Tareas de orden con cantidades continuas.	721
C.6. Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades continuas.	722
C.6. Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades continuas.	723
C.6. Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades continuas. (Continuación).	724
C.7. Destinos de las piezas sobrantes. Orden con cantidades continuas. Tareas: (a) tercera; (b) cuarta; (c) quinta; (d) sexta.	725
C.8. Ajuste de <i>MedCC</i> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	726
C.9. ANOVA de los ajustes de <i>MedCC</i> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	726
C.10. Coeficientes del ajuste de <i>MedCC</i> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	727
C.11. Datos del ajuste de <i>MedCC</i> mediante el modelo Inverso	727
C.12. Datos del ajuste de <i>MedCC</i> mediante la curva <i>S</i>	728
D.1. Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.	731
D.1. Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.	732
D.1. Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.	733

D.1. Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.	734
D.2. Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas de orden con cantidades discretas.	734
D.2. Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas de orden con cantidades discretas.	735
D.2. Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas de orden con cantidades discretas.	736
D.3. Estrategias locales de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas.	737
D.3. Estrategias locales de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas.	738
D.3. Estrategias locales de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas.	739
D.4. Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable <b>SCCD5</b> . Tareas de orden con cantidades discretas.	739
D.4. Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable <b>SCCD5</b> . Tareas de orden con cantidades discretas.	740
D.4. Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable <b>SCCD5</b> . Tareas de orden con cantidades discretas.	741
D.5. Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable <b>NivelCD</b> . Tareas de orden con cantidades discretas.	742
D.5. Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable <b>NivelCD</b> . Tareas de orden con cantidades discretas.	743
D.5. Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable <b>NivelCD</b> . Tareas de orden con cantidades discretas.	744
D.6. Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 2 a 4 de orden con cantidades discretas.	745
D.6. Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 2 a 4 de orden con cantidades discretas.	746
D.6. Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 2 a 4 de orden con cantidades discretas.	747
D.7. Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.	748
D.7. Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.	749
D.7. Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.	750
D.7. Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.	751
D.8. Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que no reconocen la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas con cantidades discretas (variable <b>CoefCD=0</b> ).	752

D.8. Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que no reconocen la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas con cantidades discretas (variable <b>CoefCD</b> =0).	753
D.8. Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que no reconocen la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas con cantidades discretas (variable <b>CoefCD</b> =0).	754
D.9. Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que reconocen parcial o totalmente la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas (valores de la variable <b>CoefCD</b> iguales a 0,5 ó 1).	755
D.9. Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que reconocen parcial o totalmente la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas (valores de la variable <b>CoefCD</b> iguales a 0,5 ó 1).	756
D.10. Porcentajes de uso de las estrategias globales por niveles en las tareas de Orden con cantidades discretas. (a) Primer subconjunto; (b) Segundo subconjunto.	757
D.11. Porcentajes de uso de las estrategias globales por grupos de edad en las tareas de Orden con cantidades discretas. (a) Primer subconjunto; (b) Segundo subconjunto.	758
D.12. Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades discretas.	759
D.12. Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades discretas.	760
D.12. Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades discretas.	761
D.13. Destinos de las piezas sobrantes. Orden con cantidades discretas. Tareas: (a) tercera; (b) cuarta; (c) octava.	762
D.14. Ajuste de <b>MedCD</b> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	763
D.15. ANOVA de los ajustes de <b>MedCD</b> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	763
D.16. Coeficientes del ajuste de <b>MedCD</b> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	764
D.17. Datos del ajuste de <b>MedCD</b> mediante el modelo Inverso	764
D.18. Datos del ajuste de <b>MedCD</b> mediante la curva <i>S</i>	765
E.1. Definiciones recursivas de las funciones que intervienen en las tareas.	767
E.1. Definiciones recursivas de las funciones que intervienen en las tareas.	768
E.2. Valoración de las respuestas. Tareas recursivas.	769
E.2. Valoración de las respuestas. Tareas recursivas.	770
E.2. Valoración de las respuestas. Tareas recursivas.	771
E.3. Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.	771
E.3. Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.	772
E.3. Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.	773
E.3. Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.	774



E.4. Estrategias de los sujetos por niveles y según los valores de la variable <b>SR5</b> . Tareas recursivas.	774
E.4. Estrategias de los sujetos por niveles y según los valores de la variable <b>SR5</b> . Tareas recursivas.	775
E.4. Estrategias de los sujetos por niveles y según los valores de la variable <b>SR5</b> . Tareas recursivas.	776
E.5. Ajuste de <b>MedREC</b> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	777
E.6. ANOVA de los ajustes de <b>MedREC</b> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	777
E.7. Coeficientes del ajuste de <b>MedREC</b> mediante los modelos Inverso y de la curva <i>S</i>	778
E.8. Datos del ajuste de <b>MedREC</b> mediante el modelo Inverso	778
E.9. Datos del ajuste de <b>MedREC</b> mediante la curva <i>S</i>	779
F.1. Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.	781
F.1. Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.	782
F.1. Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.	783
F.2. Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.	783
F.2. Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.	784
F.2. Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.	785
F.3. Medias de las valoraciones de las respuestas de los sujetos por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas.	786
F.4. Porcentajes de los niveles asignados por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. (a) Orden lineal; (b) orden con cantidades continuas; (c) orden con cantidades discretas; (d) tareas recursivas.	787
F.5. Evolución, en porcentajes, de los tres niveles en cada uno de los cuatro conjuntos de tareas. (a) Edades en las que aparecen por primera vez; (b) Edades a las que se hacen más frecuentes.	788
F.6. Evolución de las medidas centrales de los niveles por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. (a) Medias; (b) medianas; (c) modas;	789
F.7. Correlaciones de Pearson entre resultados de los cuatro conjuntos de tareas. (a) Edad y valoraciones de las respuestas; (b) Edad (EDG) y valoraciones medias por grupos de edad; (c) Edad y niveles de los sujetos.	790



## Índice de figuras

1.1. Proceso metodológico empleado en el Estudio Exploratorio.	13
1.2. Esquema metodológico general de la investigación	29
2.1. La secuencia numérica para el logicismo.	63
2.2. El número natural. Síntesis piagetiana	70
2.3. Sistematización de la secuencia numérica mediante la seriación operatoria.	72
4.1. Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia de Mayer.	136
4.2. Canles representacionales en la comprensión de texto y gráficos según el MICTG.	147
4.3. Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos.	148
5.1. Diagrama de flujo de las tareas de selección de la muestra.	171
5.2. Primera pantalla de las tareas iniciales.	172
5.3. Elementos de navegación 1.	172
5.4. Elementos de navegación 2.	173
5.5. Diagrama de flujo de las tareas propias de los estudios.	176
5.6. Pantalla inicial de uno de los conjuntos de tareas propias.	176
5.7. Situación de la lista desplegable de las tareas en la esquina superior derecha.	177
5.8. Menú de la Lista desplegable.	177
5.9. Pantalla final de uno de los conjuntos de tareas propias.	178
5.10. Octava tarea de orden lineal.	179
5.11. Quinta tarea de orden no numérico.	184
5.12. Alternancia del tipo <i>no-sí-no-no-sí-no...</i> , a etiquetar mediante el color azul.	189
5.13. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Ventana de planteamiento de la tercera tarea. (b) Ventana de planteamiento de la quinta tarea.	193

5.14. Medias de los bloques de tareas de orden lineal. Estudio exploratorio. (a) Bloques del primero al cuarto. (b) Bloques del quinto al séptimo.	202
5.15. Medias globales por grupos de edad, tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	203
5.16. Frecuencias y evolución de los resultados globales por grupos de edad, tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	204
5.17. Frecuencias y evolución de los niveles, orden lineal. Estudio Exploratorio.	206
5.18. Tiempos totales por tarea, orden lineal. Estudio Exploratorio.	210
5.19. Tiempos totales por sujeto, orden lineal. Estudio Exploratorio.	211
5.20. Medias temporales por grupos de edad, orden lineal. Estudio Exploratorio.	211
5.21. Patrones temporales. Estudio exploratorio. (a) Grupo de tres años y medio. (b) Grupo de seis años.	212
5.22. Distribución de patrones de intentos erróneos por sujetos y niveles, orden lineal. Estudio Exploratorio.	214
5.23. Medias de intentos erróneos por grupos de edad, orden lineal. Estudio Exploratorio.	215
5.24. Intentos erróneos totales por tareas, orden lineal. Estudio Exploratorio.	215
5.25. Dispersión de las valoraciones. Orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	226
5.26. Medias de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	227
5.27. Frecuencias y evolución de los niveles, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	229
5.28. Tiempos totales por tarea, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	231
5.29. Tiempos totales por sujeto, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	232
5.30. Medias temporales por grupos de edad, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	233
5.31. Intentos totales por tarea, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	235
5.32. Intentos totales por sujeto, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	236
5.33. Medias de intentos por grupos de edad, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.	237
5.34. Valoraciones de los resultados en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	242
5.35. Medias de las valoraciones en Etiquetaje por grupos de edad. Estudio Exploratorio.	243
5.36. Distribuciones y evolución de los niveles en Etiquetaje por grupos de edad. Estudio Exploratorio.	245

5.37. Promedios temporales por sujeto que las realiza de las tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	249
5.38. Tiempos totales ponderados por tareas de los sujetos en las tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	251
5.39. Medias de tiempos totales ponderados por tareas para los grupos de edad en las tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	252
5.40. Intentos erróneos totales en cada tarea ponderados por sujetos en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	253
5.41. Intentos erróneos totales de los sujetos ponderados por tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	254
5.42. Promedios de intentos erróneos totales por grupos de edad ponderados por tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.	255
5.43. Dispersión de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.	269
5.44. Evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.	270
5.45. Frecuencias y evolución de los niveles, orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.	272
5.46. Tiempos en las tareas de orden con cantidades discretas (en min.). Estudio exploratorio. (a) Tiempos totales. (b) Promedios temporales según el número de sujetos que las realizan.	275
5.47. Tiempos de los sujetos en las tareas de orden con cantidades discretas (en min.). Estudio exploratorio. (a) Tiempos totales. (b) Promedios temporales totales según el número de tareas que realizan.	276
5.48. Medias temporales por grupos de edad en las tareas de orden con cantidades discretas (en min.). Estudio exploratorio. (a) De los tiempos totales. (b) De los promedios temporales según el número de tareas que realizan los sujetos.	277
5.49. Intentos en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Intentos totales e Intentos Mínimos totales. (b) Promedios de intentos según el número de sujetos que las realizan e Intentos Mínimos por tarea.	280
5.50. Intentos de los sujetos en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Intentos totales. (b) Promedios de los intentos totales según el número de tareas que realizan.	281
5.51. Medias de los intentos por grupos de edad en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) De los Intentos totales. (b) De los promedios de intentos según el número de tareas que realizan los sujetos.	282
5.52. Evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad. Estudio exploratorio. (a) Para los cuatro conjuntos de tareas. (b) Excluyendo el conjunto de tareas de Etiquetaje.	285

5.53. Distribuciones de las modas de los niveles por grupos de edad. Estudio exploratorio. (a) Para los cuatro conjuntos de tareas. (b) Excluyendo el conjunto de tareas de Etiquetaje.	286
5.54. Evolución de los valores medios por grupos de edad excluyendo Etiquetaje. Estudio exploratorio. (a) Niveles medios. (b) Valoraciones medias.	286
6.1. El número natural y su aritmética.	300
6.2. Doble problemática ordinal y multimedia de la presente investigación.	302
6.3. Modelo general para el diseño del ítem multimedia.	310
6.4. Funciones onto-epistémica y epistémica del ítem.	311
6.5. Elementos multimodales multimedia por canales	313
6.6. Elementos multimodales que intervienen en cada tipo de ventana.	315
6.7. Estrategia metodológica seguida para la resolución del problema dual.	322
6.8. Metodología multimedia general.	326
7.1. Esquema del proceso metodológico aplicado en el diseño del Estudio Empírico.	333
8.1. Frecuencias de valores de <i>SumaL</i> por grupos de edad	435
8.2. Evolución de los niveles en orden lineal por grupos de edad.	438
8.3. Frecuencias de valores de <i>SumaCC</i> por grupos de edad	445
8.4. Evolución de los niveles en orden con cantidades continuas por grupos de edad.	449
8.5. Frecuencias de valores de <i>SCCD5</i> por grupos de edad	481
8.6. Evolución de los niveles en orden con cantidades discretas por grupos de edad.	486
8.7. Frecuencias de valores de <i>SR5</i> por grupos de edad	523
8.8. Evolución de los niveles en las tareas recursivas por grupos de edad.	528
8.9. Evolución de las medias por grupos de edad para los tres conjuntos de tareas ordinales. (a) Valores obtenidos. (b) Ajustes según los modelos <i>inversos</i> . (c) Ajustes según los modelos más precisos.	544
8.10. Distribuciones de las modas y medianas de los niveles por grupos de edad en los tres conjuntos de tareas ordinales. (a) Modas (b) Medianas.	545
8.11. Evolución de las medias por grupos de edad para los cuatro conjuntos de tareas (incluyendo las recursivas). (a) Valores obtenidos. (b) Ajustes de las medias según los modelos <i>inversos</i> . (c) Ajustes de las medias según los modelos más precisos.	546
8.12. Distribuciones de las modas y medianas de los niveles por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. (a) Modas (b) Medianas.	547
A.1. Tarea Personajes. (a) Ventana de planteamiento de la primera parte; (b) Ventana de solución de la primera parte; (c) Ventanas de planteamiento y solución de la segunda parte.	614

A.2. Tarea Baloo. Ventanas de planteamiento: (a) Primera parte, (b) Segunda parte, (c) Tercera parte. (d) Ventana de solución de la tercera parte.	615
A.3. Tarea Mowgli. Ventanas de planteamiento: (a) Primera parte, (b) Segunda parte, (c) Tercera parte. (d) Ventana de solución de la tercera parte.	616
A.4. Ventana inicial, tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.	617
A.5. Primera tarea de orden lineal. Estudio exploratorio. (a) Ventana de planteamiento. (b) Ventana de solución.	617
A.6. Tareas segunda a cuarta de orden lineal. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	618
A.7. Tareas quinta a séptima de orden lineal. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	619
A.8. Tareas octava a décima de orden lineal. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	620
A.9. Ventana inicial, tareas de orden no numérico. Estudio Exploratorio.	627
A.10. Primeras tres tareas de orden no numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	628
A.11. Tareas cuarta a sexta de orden no numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	629
A.12. Primeras tres tareas de etiquetaje. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	639
A.13. Tareas cuarta a sexta de etiquetaje. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	640
A.14. Primeras tres tareas de orden numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	646
A.15. Tareas cuarta a sexta de orden numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).	647
A.16. Distribuciones de las medias de las valoraciones por grupos de edad. Estudio exploratorio. (a) Para los cuatro conjuntos de tareas. (b) Excluyendo el conjunto de tareas de Etiquetaje.	662
B.1. Ajuste de <i>MediaL</i> mediante el modelo <i>S</i> .	674
B.2. Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva <i>S</i> para <i>MediaL</i> .	674

B.3.	Distribuciones $t_{total}$ -SumaL por grupos de edad en orden lineal.	676
B.4.	Ajuste <i>MediaTL-EDG</i> mediante modelos logarítmico e inverso.	683
B.5.	Ajuste <i>MedianaTL-EDG</i> mediante modelos logarítmico e inverso.	685
B.6.	Ajuste <i>MediaL-MediaTL</i> mediante un modelo lineal.	686
B.7.	Ajuste <i>MediaL-MedianaTL</i> mediante un modelo lineal.	688
B.8.	Distribuciones <i>SumaInt-SumaL</i> por grupos de edad en orden lineal.	689
B.9.	Números medios de intentos erróneos por grupos de edad en las tareas segunda y tercera de orden lineal.	702
B.10.	Números medios de intentos erróneos por grupos de edad en las tareas cuarta, quinta y sexta de orden lineal.	703
B.11.	Ajuste de <i>EDG-MErrores</i> mediante modelos logarítmico e inverso en orden lineal.	705
B.12.	Ajuste de <i>MErrores-MediaL</i> mediante un modelo lineal. Tareas de orden lineal infralógico.	707
B.13.	Ajuste de <i>MErrores-MediaTL</i> mediante un modelo lineal. Tareas de orden lineal infralógico.	708
C.1.	Ajuste de <i>MedCC</i> mediante los modelos Inverso y <i>S</i> .	728
C.2.	Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva <i>S</i> para <i>MedCC</i> .	729
D.1.	Ajuste de <i>MedCD</i> mediante los modelos Inverso y <i>S</i> .	765
D.2.	Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva <i>S</i> para <i>MedCD</i> .	766
E.1.	Ajuste de <i>MedREC</i> mediante los modelos Inverso y <i>S</i> .	779
E.2.	Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva <i>S</i> para <i>MedREC</i> .	780
F.1.	Distribuciones de las medias de las valoraciones por grupos de edad para los tres conjuntos de tareas ordinales.	786



# INTRODUCCIÓN

En la presente memoria de investigación se exponen los aspectos fundamentales de un estudio realizado en el marco general del Programa de Doctorado “Didáctica de la Matemática” de la Universidad de Málaga para el bienio 2002-2004 en el Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga. La investigación se ha desarrollado en el ámbito delimitado por los trabajos de los dos grupos de investigación siguientes: a) El grupo subvencionado por la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”\*, teniendo en cuenta los recientes avances en la línea “Pensamiento Numérico y Algebraico” y en particular en relación con el campo denominado “conocimiento numérico”, considerado como un modo de priorizar y caracterizar determinadas ramas de la matemática mediante uso prioritario de las estructuras numéricas como herramientas conceptuales; b) El grupo de investigación “Pensamiento Numérico Inductivo y Ordinal” en el campo de la Educación Infantil cuyo trabajo se orienta a continuar la labor desarrollada desde hace tiempo en torno a la enseñanza y el aprendizaje en esta etapa inicial de la Educación.

El estudio que se presenta se sitúa plenamente en las coordenadas del enfoque de la línea de investigación “Pensamiento Numérico”, que estudia las estructuras numéricas y los sistemas de representación con los que se expresan conceptos y relaciones en el sistema escolar. En dicho marco general, la finalidad del trabajo es conocer la evolución cognitiva del Pensamiento Numérico y Aritmético así como el dominio de los conocimientos matemáticos relativos a los campos conceptuales métricos y numéricos elementales en los niveles de la Educación Infantil y Primaria, identificar los factores que

---

\*Proyecto PB97-1066, presentado a la Dirección General de Enseñanza Superior en la convocatoria de diciembre de 1997.

intervienen y establecer criterios, técnicas e instrumentos que permitan observar, diagnosticar, interpretar y valorar la evolución de tales conocimientos, capacidades y destrezas.

Más concretamente, el estudio específico se ocupa de indagar sobre la naturaleza y características de las capacidades y destrezas prenuméricas y numéricas elementales relacionadas con la estructura de orden y la recursión y averiguar la evolución de algunos aspectos prenuméricos del Pensamiento Ordinal en escolares de 3 a 7 años mediante la tecnología multimedia como soporte instrumental de una nueva metodología de investigación, a la que denominaremos a partir de ahora “metodología multimedia”, que pretende ser idónea para los estudios de este tipo, adaptada a las características de los sujetos de dichas edades, capaz de mejorar la interacción investigador-sujeto, eliminando la mayor parte de los problemas clásicos de este tipo de estudios, y útil para optimizar la recogida de información sobre la cognición matemática de sujetos de los niveles y edades mencionadas.

Para el desarrollo del estudio se ha empleado una metodología mixta que atiende a las dos componentes principales siguientes:

- a) La componente teórica, dirigida a fundamentar y validar el marco conceptual así como el procedimiento y los resultados obtenidos, cobrando especial importancia el análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, en nuestro caso la estructura de orden de los números naturales y la recursión, el estudio de los antecedentes relacionados y específicos y una aproximación al análisis didáctico de los mismos, el análisis y establecimiento de los principios y características de la tecnología multimedia como recurso fundamental para el desarrollo del estudio empírico, la construcción de una propuesta de modelo evolutivo a contrastar sobre el orden lineal, el orden con cantidades discretas y continuas, el etiquetaje y la recursión como elementos concretos del estudio, el análisis del conjunto de situaciones, tareas y problemas adecuados para poner de manifiesto las capacidades y competencias relacionadas con los elementos anteriores y con la estructura de orden de cantidades, medidas y números en su vertiente elemental y la fundamentación y construcción, a través de la tecnología multimedia y el registro automático de la información, de los instrumentos adecuados para la recogida de datos.
- b) La componente empírica, orientada a obtener información sobre los comportamientos de sujetos en torno a los aspectos fundamentales del problema de investigación, mediante la aplicación de los bloques de tareas multimedia, el análisis e interpretación de las respuestas, la

---

identificación de las estrategias utilizadas y los errores cometidos, la determinación de perfiles y niveles de competencias ordinales y la determinación de las características básicas del desarrollo y la evolución con la edad de dichas capacidades y competencias.

Desde el punto de vista de la fundamentación teórica y los antecedentes se realiza un estudio epistemológico y fenomenológico de la estructura de orden en el que se revisa el papel del orden desde varios puntos de vista, se analizan las distintas construcciones de los números naturales y sus distintas relaciones con la cantidad y la medida y se retoman, a la vista de las consideraciones anteriores, los principios de la epistemología genética de Piaget y las modernas teorías sobre cognición matemática elemental. La fundamentación matemática, epistemológica y fenomenológica se complementa con los antecedentes específicos de los dos campos básicos del estudio: pensamiento ordinal y tecnología multimedia.

En relación con el entorno multimedia se han analizado en profundidad los antecedentes y la situación actual de lo que se conoce como “aprendizaje multimedia” y las implicaciones cognitivas de la utilización de esta tecnología, con especial atención a su aplicación a la investigación sobre el pensamiento ordinal de los sujetos de 3 a 7 años de edad.

Entre los antecedentes relacionados con el pensamiento ordinal se han actualizado las investigaciones relacionadas con la magnitud, la cantidad, la medida y el número abordadas por González (1998), los numerosos estudios específicos de la línea de investigación de Ortiz (1997) y Fernández (2001), los principales resultados de la memoria de tercer ciclo\* sobre el mismo tema “Desarrollo metodológico multimedia para la evaluación del Pensamiento Numérico Ordinal en escolares de 3 a 6 años” (Hernández, 2005) y las publicaciones más recientes en las que se han difundido algunos de los resultados de la investigación que se presenta en revistas especializadas y en Congresos relacionados con la Educación Matemática (SEIEM; PNA) y con el uso de las Nuevas Tecnologías en Educación (Hernández y González, 2011; Hernández y González, 2014).

La culminación del estudio teórico ha consistido en la construcción, a partir de la información indicada en los párrafos anteriores incluidos los datos del estudio exploratorio de la memoria de tercer ciclo, de un modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas y de un modelo general para el diseño del ítem multimedia orientado a la investigación educativa en el área de

---

\*Memoria no publicada correspondiente al Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga en el bienio 2002-2004. En poder del autor y del Departamento.

matemáticas, todo ello incardinado en un procedimiento general que hemos definido y denominado “metodología multimedia” para la investigación en Educación Matemática. Las construcciones anteriores han permitido, como consecuencia, la elaboración de un instrumento metodológico operativo para el estudio de las características del pensamiento ordinal y su evolución en sujetos de 3 a 7 años de edad.

Desde el punto de vista empírico se aplica por primera vez el instrumento multimedia construido en las fases previas de la investigación incluyendo los medios necesarios para el registro automático de todas las interacciones de los sujetos con todas y cada una de las tareas del estudio.

Sobre la racionalidad, justificación y relevancia de la investigación, son diversos los motivos de la elección de las variables y las condiciones concretas de su desarrollo. Entre ellos, podemos destacar: la continuidad de estudios puntuales previos sobre capacidades y contenidos matemáticos relacionados, la necesidad de conocer en profundidad las características del pensamiento matemático de los alumnos de la etapa de Educación Infantil para mejorar el diseño y desarrollo didáctico del proceso formativo en dicha etapa, la imperiosa necesidad de encontrar procedimientos y métodos orientados a disminuir los inconvenientes tradicionales que surgen en las investigaciones con sujetos de tan corta edad, la continuación sobre los estudios realizados en torno al pensamiento prenumérico, el orden lógico de los contenidos matemáticos elementales y, por último, las necesidades de desarrollo del marco teórico de la línea de investigación, entre las que resulta especialmente importante la de completar el análisis sobre la operatividad del modelo utilizado.

Por otra parte creemos que el estudio es relevante, está justificado y es del máximo interés por la novedad de los instrumentos utilizados, la importancia del tema analizado y la proyección que los conocimientos pueden tener sobre nuevas formas de ver y tratar los contenidos matemáticos, nuevos métodos de investigación así como nuevas formas de abordar el diseño y desarrollo didáctico en las etapas de Educación Infantil y Educación Primaria. De hecho, como se pone de manifiesto en los resultados de los estudios empíricos desarrollados, se ha podido constatar la libertad y espontaneidad de las respuestas de los sujetos, la gran variedad de datos obtenidos y la facilidad de análisis de los comportamientos que proporcionan los instrumentos utilizados. Desde el punto de vista de la metodología, consideramos de vital importancia la validación de una metodología que puede aportar información privilegiada sobre el aprendizaje y la cognición de sujetos cuyos comportamientos y respuestas se han caracterizado desde hace tiempo por su enorme dificultad de interpretación y, consecuentemente, por las dudas en

---

cuanto a la validez y fiabilidad de los resultados. En este sentido creemos que estamos ante una de las metodologías que pueden aportar avances notables en el campo de la investigación en Educación Matemática.

La memoria de tesis se presenta organizada en nueve capítulos. En el primero se describe el problema de investigación y las referencias básicas del estudio; en los capítulos 2, 3 y 4 se presenta el estudio de los antecedentes y la fundamentación teórica de la investigación, dedicándose el capítulo 2 a un estudio epistemológico y fenomenológico de la estructura de orden, el capítulo 3 a los antecedentes encontrados sobre la investigación en pensamiento ordinal y el capítulo 4 a los antecedentes sobre aprendizaje y tecnología multimedia en psicología y educación; en el capítulo 5 se expone una síntesis del estudio exploratorio desarrollado a propósito de la memoria de tercer ciclo, mientras que el capítulo 6 se dedica a establecer el marco teórico y metodológico en el que se va a sustentar la parte empírica de la investigación; en el capítulo 7 se establecen los aspectos básicos del diseño del estudio empírico y en el capítulo 8 se detallan los principales resultados del estudio y se discuten las principales conclusiones; en el capítulo 9, por último, se presentan las conclusiones y las perspectivas de futuro, tanto del estudio como de las necesidades inmediatas del estudio y de la línea de investigación. Los capítulos se acompañan de las referencias oportunas y de un bloque amplio de anexos. En lo que sigue se explica brevemente el contenido de cada capítulo.

En el **capítulo 1** se presenta el problema de investigación, señalando como origen la memoria de tercer ciclo de Hernández (2005) y los estudios previos de la línea de investigación “Pensamiento Numérico Inductivo y Ordinal” (Ortiz, 1997; Fernández, 2001), cuya continuación se ha realizado en un marco teórico bastante más avanzado, con nuevos elementos y con un modelo más completo para la recogida de datos y la interpretación de los comportamientos de los sujetos. En este nuevo marco se amplía el estudio al campo de la Tecnología multimedia como fuente de instrumentos que mejoran las pruebas y las entrevistas orales en las investigaciones con sujetos de corta edad y se centra la indagación en los alumnos de las etapa de Educación Infantil y primeros niveles de Educación Primaria con el propósito de conocer más en profundidad las características cognitivas relacionadas con la numeración y la aritmética y extraer consecuencias fundadas para su formación. Después de describir el área problemática y argumentar a favor de la racionalidad del estudio se presenta la caracterización formal del problema de investigación en términos de objetivos e hipótesis, incluyéndose referencias sobre las distintas fases del estudio y la metodología empleada en cada

una de ellas. Para terminar, se exponen algunas reflexiones en torno a las características relevantes de la investigación desarrollada.

En el **capítulo 2** se aborda un análisis sobre la Historia y la Epistemología de la estructura de orden como elemento fundamental en la construcción de los números naturales y algunos aspectos históricos, epistemológicos y matemáticos de los números naturales. Se incluye un análisis sobre la epistemología del orden natural, con especial incidencia en las distintas construcciones matemáticas del conjunto de los números naturales y una discusión sobre el papel de la estructura de orden en cada una de ellas. Igualmente, se aborda la fenomenología de la estructura ordinal elemental y el papel de las funciones recursivas para establecer, posteriormente, las principales consecuencias para la investigación.

En el **capítulo 3** se describen y analizan los principales antecedentes de la línea de investigación sobre pensamiento numérico en la edad infantil, su interpretación y valoración y la parte específica dirigida al pensamiento ordinal. El contenido se estructura aquí en los campos siguientes:

- a) Estudios y teorías generales sobre la cognición del número natural, donde se analizan los principales enfoques conocidos hasta ahora.
- b) Estudios sobre el número y el orden desde la perspectiva neuropsicológica.
- c) Antecedentes propios de la línea de investigación sobre razonamiento inductivo numérico y relaciones lógicas ordinales.

Con la información de los capítulos 2 y 3 se realiza una aproximación al Análisis Didáctico como método que proporciona referencias precisas, específicas y operativas para afrontar con eficacia la fase de selección, análisis y tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática (Gallardo y González, 2013) y como soporte para la fundamentación y construcción del modelo operativo local que sirve de base para la elaboración de los instrumentos de recogida de datos.

En el **capítulo 4** se expone un análisis de los antecedentes sobre la Tecnología Multimedia y su utilización en el campo de la Psicología y la Educación. Después de un estudio amplio y profundo sobre los componentes multimodales, se analizan extensamente consideraciones epistémicas y ontológicas sobre la interacción sujeto–ordenador y se dedica una amplia reflexión a las teorías del aprendizaje multimedia. La última parte del capítulo se dedica a delimitar las principales conclusiones de cara a la metodología multimedia para la investigación en Educación Matemática y las consecuencias específicas para la investigación.

En el **capítulo 5** se expone una síntesis del estudio exploratorio, que se incluye parcialmente en la Memoria de Tercer Ciclo (Hernández, 2005). Se exponen los objetivos, el marco teórico y metodológico del estudio, un modelo de competencias ordinales construido a partir de los resultados de investigaciones previas de la línea de investigación, el diseño del estudio empírico y los recursos utilizados, con especial atención al entorno multimedia, a las tareas multimedia de los diferentes bloques de tareas y a las variables y procedimientos de recogida de datos. El capítulo continúa con una descripción de las muestras utilizadas y un análisis e interpretación de las respuestas de los sujetos. Un estudio de niveles alcanzados, una relación extensa de conclusiones y unos estudios sobre tiempos de respuestas y número de intentos en las interacciones con el ordenador en cada bloque de tareas, completan la amplia descripción del estudio exploratorio.

El marco teórico y metodológico de la investigación se presenta en el **capítulo 6**, en el que, de acuerdo con los planteamientos teóricos de la línea de investigación y los antecedentes analizados en los capítulos 2, 3, 4 y 5, se incide en la dualidad de la investigación centrada en el Pensamiento Ordinal y en la Tecnología Multimedia. En esta confluencia de campos se delimita la construcción del ítem multimedia y se describe un modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas con cuatro estados ordenados modificando el modelo utilizado en el estudio exploratorio de la memoria de tercer ciclo: orden lineal infralógico, orden con cantidades continuas, orden con cantidades discretas y estado recursivo. El modelo sirve, a su vez, de base para el diseño y la construcción de un instrumento para la recogida de datos en el que se delimitan los cuatro conjuntos de tareas que van a servir de punto de partida para el análisis de las respuestas de los sujetos y la comprobación de la bondad de ajuste al modelo propuesto.

El segundo elemento teórico importante de los tratados en el capítulo es el de la metodología multimedia como nueva metodología de investigación en Educación Matemática. Se describen sus características, su aplicabilidad a una amplia gama de problemas y su importancia basada en su enorme capacidad para proporcionar una amplia variedad de datos sobre las interacciones del sujeto con el ordenador.

En el **capítulo 7** se procede a describir el diseño del estudio empírico realizado. Como es usual se comienza por delimitar los objetivos de la investigación y la metodología del estudio, en la que se dedica especial atención a las entrevistas individuales. La exposición continúa con la descripción de la población y las muestras de sujetos que van a ser sometidos a las tareas multimedia y los recursos informáticos que se quieren utilizar. Asimismo, como

consecuencia de las conclusiones del estudio exploratorio, del análisis de los antecedentes y del estudio teórico que se expone en el capítulo 6, se realizan modificaciones en las tareas y en los conjuntos de tareas que se detallan en el capítulo. Dichas modificaciones se trasladan a la construcción definitiva del instrumento multimedia que se analiza y describe extensamente por grupos de actividades ocupando un lugar destacado en el desarrollo del capítulo; las fichas y descripciones de las tareas individuales junto con los tipos de registros, las variables y las posibles acciones de los sujetos constituyen una información relevante de esta parte.

En el **capítulo 8** se describen y analizan los principales resultados y se establecen las conclusiones relevantes del estudio empírico. Junto a la descripción detallada de las muestras se abordan los protocolos de recogida de información que dan pie a un amplio relato sobre el desarrollo de las entrevistas. A continuación se exponen los principales resultados de cada uno de los distintos grupos de tareas, el análisis de los datos obtenidos y la valoración de las respuestas registradas en cada caso. El capítulo finaliza con un estudio comparativo de respuestas en términos de los ajustes realizados a las nubes de datos correspondientes.

El **capítulo 9** se dedica a las conclusiones y perspectivas futuras del estudio. En cuanto a las conclusiones, se incluye una relación extensa y detallada de los resultados más importantes y su vinculación con los objetivos y las hipótesis de la investigación; en este sentido, se analiza la confirmación o el rechazo de cada una de las hipótesis y el grado de consecución de los objetivos planteados. El capítulo finaliza con las limitaciones y debilidades del estudio realizado así como con las perspectivas futuras de la investigación concreta desarrollada y de la línea de estudio iniciada.

La Memoria se completa con las referencias bibliográficas de la investigación y los apéndices o anexos correspondientes a cada uno de los capítulos 2 al 8.



# 1

## EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1 Introducción

En la presente memoria se analiza, por un lado, la evolución de algunos aspectos prenuméricos del Pensamiento Ordinal en escolares de 3 a 7 años y, por otra, si la tecnología multimedia actual ofrece garantías y ventajas sustanciales para el desarrollo de una nueva metodología de investigación en Educación Matemática, en particular cuando intervienen sujetos de corta edad.

El desarrollo de la investigación se centra, por una parte, en la construcción de un instrumento multimedia adaptado al estudio de la evolución de algunas capacidades ordinales y recursivas elementales y, por otra, en la aplicación y evaluación de dicho instrumento como núcleo de una metodología de investigación en Educación Matemática. En dicho desarrollo se abordan las siguientes tareas:

- a) construcción de un modelo evolutivo de capacidades ordinales y recursivas (MECOR) para el intervalo de edad considerado, basado en el análisis epistemológico y fenomenológico del contenido matemático en estudio y en los antecedentes de la línea de investigación Pensamiento Numérico Inductivo y Ordinal iniciada por Ortiz (1997), Fernández (2001) y González (1998);
- b) construcción de un modelo general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM) y su aplicación a la construcción de un instrumento integrado por ítems o tareas multimedia soportadas por una estructura informática destinada a la recogida automática de la información (metodología multimedia) y su adaptación al modelo evolutivo y a las características propias de los sujetos de dichas edades;
- c) aplicación de la metodología resultante al estudio de las capacidades

organizadas en el modelo, configuración de los escenarios de valoración, selección de los sujetos para el estudio empírico, organización de las distintas etapas, desarrollo de la investigación, análisis de los resultados y elaboración de las conclusiones correspondientes.

En los sucesivos epígrafes del capítulo se abordan, por este orden, los orígenes y la evolución del problema de investigación, la delimitación del área problemática, la formulación de los aspectos concretos que se van a investigar, la caracterización formal del problema en términos de objetivos e hipótesis de investigación, las distintas fases del estudio y la metodología empleada en cada una de ellas. Para terminar, se exponen algunas reflexiones en torno a la racionalidad y modalidad del estudio y otras características relevantes de la investigación realizada

## 1.2 Origen y evolución del problema de investigación

El problema de investigación surgió en el ámbito del Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga correspondiente al bienio 2002–2004, en relación con los estudios que se venían realizando en el Departamento sobre el pensamiento prenumérico y numérico en la edad infantil. Pero la investigación y la formulación del problema han pasado por diferentes etapas de un proceso largo cuyas principales vicisitudes se mencionan a continuación en diferentes apartados.

### 1.2.1 Consideraciones generales

A lo largo del proceso se han valorado las siguientes consideraciones:

- a) La conveniencia de utilizar nuevas metodologías de investigación que aporten información válida y fiable, incorporen el registro automático y objetivo de la información, permitan reducir la interacción sujeto–investigador y, en definitiva, que contribuyan a superar las dificultades que suele presentar la investigación con sujetos de corta edad.
- b) La posibilidad de aprovechar las cualidades innegables de la tecnología multimedia actual como base para el diseño y construcción de instrumentos que permitan desarrollar una metodología con las características mencionadas en a).
- c) De ser posible la construcción de una metodología del tipo indicado parece conveniente comprobar la adecuación y utilidad real de dicha

- metodología en investigaciones reales e idóneas con sujetos de corta edad.
- d) Los estudios que se venían realizando en el área Didáctica de la Matemática sobre el Pensamiento Ordinal en las etapas prenumérica y preinductiva ofrecían una ocasión única para contrastar los aspectos mencionados en los apartados anteriores, en particular la continuación del análisis de las características y la evolución de algunos aspectos del Pensamiento Ordinal en entornos virtuales lúdicos, interactivos y adaptados a las características psico-afectivas de los sujetos.
  - e) Los planteamientos anteriores desembocaron en un **estudio exploratorio** que se realizó sobre el “*Desarrollo metodológico multimedia para la evaluación del Pensamiento Numérico Ordinal en escolares de 3 a 6 años*” (Hernández, 2005). De aquél estudio se siguió la necesidad de su extensión y profundización en los términos que se presentan en esta memoria.
  - f) Durante la nueva investigación y en la revisión sobre el estado de la investigación realizada en el año 2010 (Hernández y González, 2011, 2014), surgieron interrogantes que obligaron a realizar algunas modificaciones en los planteamientos iniciales y en la delimitación de algunos aspectos del problema.
  - g) En los orígenes del problema influyó, por último, la cuestión sobre si dichos entornos y metodologías pueden aplicarse y facilitar la investigación en otros dominios del Pensamiento Matemático y hacer posible futuros estudios de masas.

### 1.2.2 Estudio exploratorio previo

El estudio inicial sobre las características y la evolución del Pensamiento Ordinal prenumérico en un entorno multimedia se realizó y se presentó como trabajo de Tercer Ciclo del Programa de Doctorado de partida. Dicho estudio, del que se incluye a continuación un resumen de sus principales características y resultados, se detalla extensamente en el capítulo 5, 159 y siguientes, al que nos remitimos.

El problema abordado constaba de dos partes:

- 1<sup>a</sup>. La determinación de un primer modelo evolutivo de competencias ordinales prenuméricas y preinductivas para sujetos de 3 a 6 años.
- 2<sup>a</sup>. La construcción de un instrumento multimedia, adaptado a las características de los sujetos, que aportase información sobre niveles de competencias y capacidades prenuméricas y preinductivas del

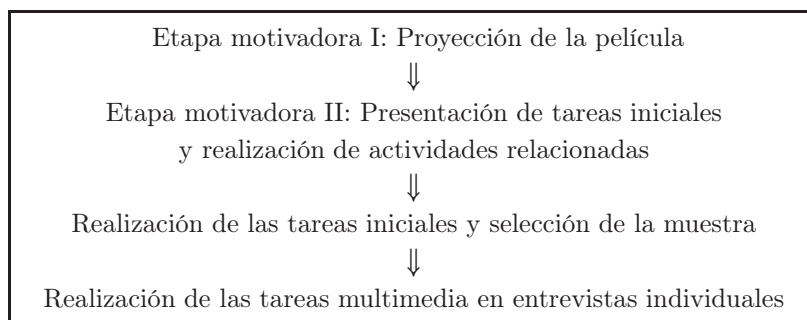
pensamiento ordinal, que permitiera contrastar el modelo establecido, que sirviera para analizar la interacción de los sujetos con el instrumento y con el investigador y que incluyera el registro automático y objetivo de la información.

En la primera parte se realizó un estudio teórico sobre los aspectos prenuméricos del Pensamiento Ordinal, un tema poco tratado en las investigaciones sobre el aprendizaje del número y de la medida. Dicho estudio se basó en los trabajos de Ortiz (1997), Fernández (2001) y Fernández y Ortiz (2008), en los que se utilizan métodos cualitativos y entrevistas clínicas individualizadas para la recogida de información (Claparède, 1976; Inhelder, Sinclair, y Bovet, 1974; Vinh-Bang, 1966). Como consecuencia se construyó un primer modelo evolutivo basado en los cuatro estados siguientes\*:

- **Estado 1:** Orden lineal infralógico.
- **Estado 2:** Orden con cantidades continuas.
- **Estado 3:** Etiquetaje.
- **Estado 4:** Orden con cantidades discretas.

que contemplan una evolución progresiva desde los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores.

En la segunda parte se realizó un estudio de tipo cualitativo y transversal, basado en una prueba integrada por tareas multimedia relacionadas con cada uno de los estados del modelo sometido a examen. Para las tareas se tomó el ambiente y algunos personajes de la película “El libro de la selva” de Walt Disney, obra de alto contenido motivador y excelentes valores. La metodología se desarrolló de acuerdo con las cuatro etapas siguientes†:



El proceso metodológico se muestra en la Figura 1.1, en la que se han sintetizado las dos etapas mencionadas en el cuadro anterior.

\*Véase la página 162 y siguientes.

†Véase la página 164 y siguientes

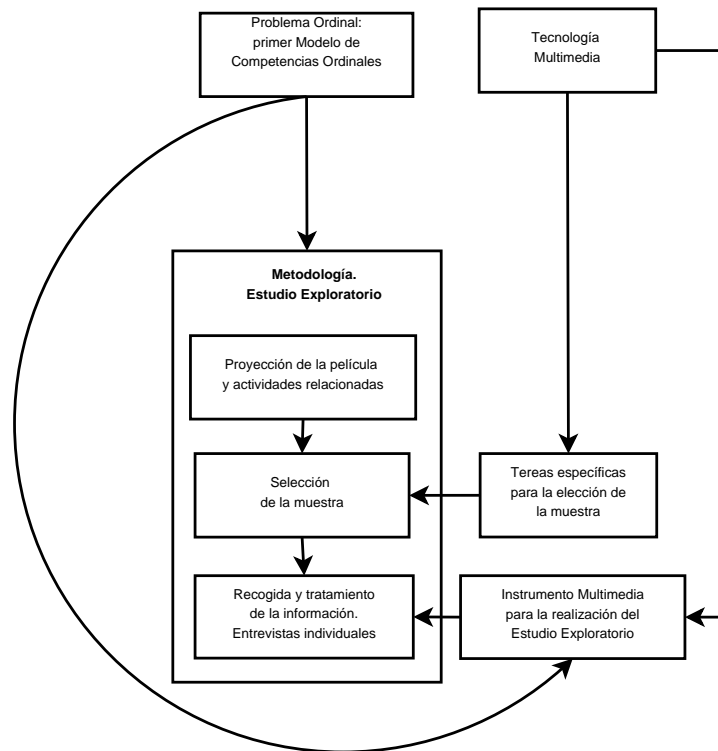


Fig. 1.1. Proceso metodológico empleado en el Estudio Exploratorio.

Se utilizó una muestra inicial de 50 niños y niñas de tres años y medio a 6 años a los que se les proyectó la película y participaron en tareas multimedia iniciales\* destinadas a la selección de la muestra del estudio. Esta muestra la formaron 25 sujetos sin dificultades en el uso del ratón y en las acciones cinestésicas básicas “hacer clic” y “arrastrar y soltar”, de modo que pudieran participar en la etapa siguiente.

En la última etapa, la recogida de la información se realizó mediante entrevistas clínicas individualizadas ((Ortiz, 1997), (Fernández, 2001) y Fernández y Ortiz (2008), Bliss (1987), Cohen y Manion (1990, p. 377) y Blanco y Prieto (2000)), utilizando el instrumento multimedia como mediador en la interacción entre el investigador y el sujeto. En dicho contexto multimedia se plantearon situaciones ordinales organizadas en los cuatro conjuntos de ítems o tareas que se indican en la tabla 1.1, en la que los ítems introducto-

\*Estas tareas se describen con detalle en la sección 5.5.1, página 170 y siguientes, del capítulo 5.

rios servían sólo para facilitar la adaptación al escenario y a las acciones a realizar.

Tareas	Núm. ítems introdutorios	Núm. ítems específicos
Lineales infralógicas	1	9
Con cantidades continuas	1	5
De etiquetaje	1	6
Con cantidades discretas	2	6
Total	5	26

Tabla 1.1: Número de ítems en cada conjunto de tareas. Estudio Exploratorio.

Algunas de las conclusiones que se establecieron en el estudio exploratorio son las siguientes:

**En relación con la metodología:**

- El procedimiento y las tareas ejercen una influencia positiva sobre la motivación y la participación de los sujetos en todas las etapas del proceso.
- Los intervalos de de edad considerados (en tramos de 6 meses) son adecuados al permitir la discriminación de los sujetos en cuanto a capacidades y competencias.
- Se ha comprobado la viabilidad, comodidad y fiabilidad de la recogida y almacenamiento automáticos de la información para su proceso y análisis posterior.

**En relación con el modelo evolutivo propuesto:**

- Las tareas de etiquetaje presentan una evolución singular con respecto a las demás y no siguen el modelo propuesto. La explicación puede estar en la naturaleza recursiva y no propiamente ordinal de este conjunto de tareas, lo que debe contrastarse en estudios posteriores.
- Los tres conjuntos de tareas restantes siguen con notable precisión las líneas generales del modelo evolutivo, tanto a nivel de grupos de edad como a nivel individual.

### En relación con las tareas y su diseño:

- Debe modificarse el sistema de registro de la información en los ítems de las tareas de orden con cantidades continuas y discretas, ya que en su estado actual no discrimina intentos, limitando los resultados.
- Las tareas están, en general, bien adaptadas a las características psicoafectivas y psicomotrices de los sujetos, distinguiendo entre distintos niveles de capacidades y competencias.

### En relación con la continuación del estudio:

- Se observa la necesidad de realizar una ampliación del análisis epistemológico y fenomenológico del orden y la recursión y un estudio sobre su incidencia en la formación de las ideas de cantidad y número\*.
- Es necesario estudiar la interacción ordenador–sujeto y los conceptos e ideas implicados en la tecnología multimedia, tanto desde el punto de vista de su utilización por los sujetos como desde el punto de vista del propio diseño y construcción de los ítems multimedia †.
- Debe estudiarse el posible carácter no lineal de los patrones evolutivos con la edad de las competencias tratadas y decidir si esa no linealidad es debida al azar o es intrínseca a dicha evolución.

### 1.2.3 Revisión realizada en el año 2010

La participación en el congreso‡ TIME 2010 (Technology and its Integration into Mathematics Education), celebrado en Málaga del 6 al 10 de julio de 2010, dio lugar a la realización de una revisión del estado de la investigación y a un avance de sus primeros resultados que se concretó en una primera publicación, “*Application of Multimedia Technology to Study the Ordinal Competences of Children from 3 to 7 years old*” (Hernández y González, 2011). Posteriormente se presentó una segunda publicación más extensa, “*Pensamiento Ordinal elemental con Multimedia*” (Hernández y González, 2014), en la que se incluyen los siguientes resultados:

\*Ver los capítulos 2 y 3 de la presente memoria.

†Véase el capítulo 4

‡Conference On Mathematics Education Technology Oriented

- 1º. Un análisis epistemológico, fenomenológico y cognitivo del orden y su relación con las nociones de cantidad y número.
- 2º. El modelo evolutivo de competencias ordinales establecido en el estudio exploratorio aún sin revisar.
- 3º. Un análisis de los conceptos e ideas relacionados con las teorías sobre el aprendizaje multimedia (Mayer, 2005a) así como sobre la interacción ordenador–sujeto (Brey, 2005). A partir de dicho análisis se configuró una versión avanzada del modelo general para el diseño del ítem multimedia\*, iniciado en la Memoria de Tercer Ciclo (Hernández, 2005, p. 15), y un instrumento multimedia renovado†, diseñado y desarrollado conforme al modelo.
- 4º. La configuración de una nueva metodología de investigación adaptada al problema ordinal en estudio‡ y su puesta en práctica en un nuevo estudio empírico con 76 sujetos. En dicho estudio se constata la bondad del modelo evolutivo para las categorías: Orden Lineal, Orden con Cantidades Continuas y Orden con Cantidades Discretas, la discordancia de las tareas de “etiquetaje”, en las que intervienen capacidades recursivas§ y la pertinencia y potencialidad de los escenarios virtuales lúdicos adaptados a las características cognitivas y psicoafectivas de los sujetos¶ y basados en componentes visuoespaciales, sensoriomotrices, sonoros y afectivo–emocionales que proporcionan una elevada motivación y un alto grado de atención en la realización de las tareas||.
- 5º. Los primeros resultados sobre el carácter no lineal de los patrones evolutivos con la edad en todas las competencias tratadas, así como sus consecuencias en relación con el modelo evolutivo de competencias ordinales en revisión.

#### 1.2.4 Continuación de la investigación

Los resultados y conclusiones de las etapas descritas han sido fundamentales para completar la definición del problema, determinar los objetivos,

\*Ver la página 308, capítulo 6.

†Véanse las modificaciones y mejoras efectuadas en la sección 7.5, página 340 y siguientes, capítulo 7.

‡Véase la sección 6.6, capítulo 6, página 322 y siguientes.

§Identificar un patrón recursivo y aplicarlo para continuar una serie.

¶Según Vigotsky la importancia del juego reside en que la acción y el significado se pueden separar para dar origen al pensamiento abstracto, (Bishop, 1999). También Hirsch (1996, p. 11), argumenta a favor de este tipo de tareas.

||En estos escenarios los sujetos pueden expresar las capacidades correspondientes, relacionadas con las habilidades innatas o primarias en el sentido de Geary (1995), citado en Geary (2006, p. 802).



plantear las hipótesis y orientar la continuación del estudio en los siguientes términos:

- Profundizar en el análisis epistemológico y fenomenológico del orden y la recursión en la formación de las ideas de cantidad y número, tanto desde el punto de vista matemático como desde el de la formación de dichas ideas en los sujetos.
- Analizar las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo, determinar y someter a contraste el modelo evolutivo de capacidades ordinales y recursivas y completar su aplicación al problema ordinal en estudio.
- Precisar la nueva metodología utilizada como metodología general de investigación en Educación Matemática.
- Obtener conclusiones sobre la evolución del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años así como sobre la metodología empleada y extraer consecuencias fundadas para la continuación de estudios cuantitativos y cualitativos posteriores que puedan completar los resultados de la línea de investigación.

### 1.3 Área problemática y marco teórico

La investigación se fundamenta en los siguientes campos y núcleos de interés que delimitan el marco teórico que se desarrolla en el capítulo 6 de la memoria. Dicho marco teórico se ha construido a partir de la revisión y análisis de los antecedentes primarios y secundarios\* (capítulo 2), de los estudios teóricos específicos que se mencionan a continuación y que se incluyen en los capítulos 3 y 4 y de los resultados del estudio empírico exploratorio (capítulo 5).

#### Epistemología y fenomenología del orden y la recursión:

El interés se centra en el papel de las relaciones de orden y de la recursión en la construcción del número natural en tres ámbitos epistemológicos: el ámbito matemático, el histórico y el psicogenético; así como en el papel de las relaciones de orden en la construcción de los conceptos comparativos y métricos (González, 1998).

En el *ámbito matemático* se toman en consideración cuatro construcciones, dos de ellas desde el punto de vista ordinal y otras dos desde el cardinal. Las tres primeras se basan en la axiomática NBG

---

\*Terminología propia de la metodología de investigación denominada Análisis Didáctico (Gallardo y González, 2013; González, 1998).

(Von Neumann, Bernays, Gödel) de la teoría de conjuntos (Ivorra, 2008) y la cuarta en la axiomática de Bourbaki (1970) resumida en Godement (1974).

En las dos primeras, se construye recursivamente el número natural desde el punto de vista ordinal. La tercera precisa la definición previa del número ordinal para definir el número cardinal, a partir del cual se define el número natural como cardinal finito. Por su parte, Bourbaki construye recursivamente el número natural desde el punto de vista cardinal en un intento por reducir al mínimo la intervención de la lógica y de la teoría de conjuntos. Todas las construcciones se apoyan en la relación de orden, poniendo de manifiesto que *el número natural es, esencialmente, una estructura ordinal que se construye recursivamente y en la que el principio de inducción desempeña un papel central como herramienta demostrativa\**.

Las relaciones de orden se consideran en su sentido habitual, es decir, como relaciones definidas en conjuntos dados y que cumplen las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva; aunque en el estudio evolutivo que planteamos solamente tomaremos en cuenta posiciones ordinales, correspondencias seriales ordenadas y ordenaciones basadas en la antisimetría y la transitividad en su sentido más elemental.

Tomaremos en cuenta el orden desde dos puntos de vista:

- *Infralógico*: el orden no estará definido por una relación de orden explícita, sino que lo estará implícitamente por la posición espacio-temporal de algunos objetos dispuestos a lo largo de una línea como soporte infralógico. La terminología ordinal implícita o explícita asociada será: *siguiente, anterior, posterior, primero, último, entre, antes que, después que*.
- *Lógico*: el orden estará definido por una relación de orden explícita referida a cantidades progresivas continuas o discretas, sin referirse explícitamente a números. La terminología ordinal asociada será la correspondiente, según el contexto, a la cantidad continua o discreta: *más que, menos que, mayor que, menor que*; esta terminología no se mencionará explícitamente en los ítems o tareas a resolver por los sujetos.

En cuanto a la *recursividad*, entenderemos que vendrá definida por *funciones recursivas o algorítmicas*; entendiéndose por ello a su vez, en sentido restringido, funciones de variable natural (sin el cero)

---

\*Véanse Manin y Panchishkin (2005, p. 95) y Kneebone (1963, p. 260).

cuyas imágenes se determinan por la acción del *operador siguiente* (o *función sucesor*) un número finito de veces\*.

Premisas como las enunciadas anteriormente constituyen el soporte para la construcción de un modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas que se presenta con detalle en el apartado 6.3 del capítulo 6.

En el ámbito histórico se toma en consideración el papel del orden desde los enfoques convencionalista y logicista. El primero considera los números naturales como una sucesión ordenada de naturaleza convencional ligada al conteo; un enfoque de interés en nuestra investigación al ser la acción de contar la vía para pasar de los términos verbales a los objetos, deducir relaciones y establecer correspondencias ordenadas.

En el segundo enfoque aparecen dos posturas epistemológicas: las atribuidas a Dedekind y Peano, por una parte, y a Russell y Frege por otra. Los primeros fundamentan la aritmética en la lógica, la axiomática y el aspecto ordinal; por su parte, Russell va más allá y, al igual que Frege, pretende la reducción de la aritmética a la lógica mediante las clases y la interpretación cardinal del número.

En el ámbito psicogenético se toma en consideración el papel del orden en la génesis del número en el marco piagetiano, en el que se asocia el éxito operatorio de la serie numérica al dominio de la *estructura de seriación*, de la que son parte fundamental los aspectos ordinales y recursivos.

Por último, las relaciones ordinales se revelan como componente esencial en la formación de los conceptos comparativos y métricos (González, 1998), lo que significa que la magnitud posee, esencialmente, una estructura ordinal y que es pertinente la distinción entre cantidad, número y medida, tanto a nivel epistémico como, sobre todo, a nivel didáctico.

### **Cognición del número natural y antecedentes específicos de la línea de investigación:**

Las investigaciones cognitivas enfatizan los aspectos operativos y heurísticos del número, tomando como referencia su aspecto cardinal y proponiendo el conteo como herramienta dirigida a la adquisición del número por medio de la cardinalidad y en detrimento de los aspectos ordinales (Gelman y Gallistel, 1978). Incluso los trabajos que

\*Véase Manin y Panchishkin (2005), página 103 y siguientes.

estudian el carácter funcional ordinal del conteo tienen como soporte teórico la cardinalidad y establecen comparaciones ordinales cuantitativas (Fernández, 2001), dirigiéndose más a la detección de la precocidad en aspectos numéricos concretos que a la determinación de las condiciones que hagan posible la adquisición del número natural integrando el carácter recursivo y los aspectos cardinal y ordinal. Esta integración, que aparece en la estructura de seriación piagetiana y cuyos elementos constituyen la base de la sistematización de la secuencia numérica y del éxito operatorio individual, es necesaria para la síntesis cardinal-ordinal que da lugar al número natural desde el punto de vista matemático.

Por otra parte, los resultados obtenidos por la neurociencia y la neuropsicología (Alonso y Fuentes, 2001; Cohen y Dehaene, 1996; Dehaene, 1997) indican que el conocimiento numérico es una forma compleja de conocimiento que requiere la participación de diversas áreas cerebrales localizadas en ambos hemisferios y que la información visual y espacial está íntimamente relacionada con dicho conocimiento. Este hecho sugiere la adecuación de la tecnología multimedia y su aplicación en el tratamiento de la información numérica y lógico-matemática, en parte debido a las grandes facilidades que ofrece para implementar correspondencias y relaciones visuales, espaciales y numéricas, así como representaciones virtuales de cantidades reales con las que el sujeto puede interactuar.

Desde el punto de vista de la investigación didáctica partimos de las consideraciones y resultados de los trabajos de Ortiz (1997) y de Fernández (2001), que atienden a la faceta evolutiva de las relaciones lógicas ordinales, a las destrezas ordinales y recursivas y a las características del razonamiento inductivo numérico en escolares de los niveles de Infantil y Primaria. En estas investigaciones se estudian los procesos ordinales y recursivos en el establecimiento de relaciones numéricas y se pone de manifiesto la utilidad de los modelos evolutivos, no sólo como fuentes de tareas destinadas a contrastar las capacidades de los sujetos, sino también como marcos interpretativos de las acciones de los mismos. Por el contrario, en la presente investigación se abordan aspectos que aún no han sido estudiados, como es el caso del desarrollo de las capacidades ordinales y recursivas en los niveles prenumérico y preinductivo, es decir, niveles en los que las relaciones se establecen entre cantidades y no entre números, como se indica en González (1998) y en el estudio fenomenológico que se detalla en el capítulo 2 de la memoria.

## Tecnologías multimedia en el campo del aprendizaje y la cognición:

La aplicación de las tecnologías multimedia\* al campo del aprendizaje y la cognición han propiciado la discusión sobre aspectos tan distintos como las componentes multimodales multimedia (Way, 2003), la interacción sujeto–ordenador (Brey, 2005) y las teorías sobre el aprendizaje multimedia (Mayer, 2001, 2005b), aspectos que se desarrollan extensamente en el capítulo 4 de la memoria.

En relación con la interacción sujeto–ordenador, coincidimos con la posición de Brey (2005) en que:

- Los sistemas informáticos actuales son *dispositivos cognitivos* y también *dispositivos de simulación* (Turkle, 1995).
- Realizan dos clases de funciones:
  - *Funciones epistémicas*: el sistema informático actúa como un dispositivo cognitivo que extiende o complementa las funciones cognitivas humanas.
  - *Funciones ontológicas*: el sistema informático simula escenarios o entornos virtuales y proporciona herramientas para utilizar dichos escenarios.

Por otra parte, los ordenadores actuales presentan interfaces que se basan en las habilidades sensoriomotoras y visuoespaciales de los sujetos antes que en el pensamiento abstracto, lo que los hace particularmente útiles para su uso por los sujetos de corta edad.

En relación con las teorías sobre el aprendizaje multimedia, nos centraremos en las de segundo nivel según la clasificación de Van Merriënboer y Kester (2005) mencionada en Mayer (2005a), es decir, en las teorías del diseño de los mensajes que identifican principios multimedia y proporcionan directrices para la elaboración de mensajes multimedia que contienen, por ejemplo, gráficos y texto escrito, texto hablado, animaciones, etc. Ejemplos de tales teorías son la *Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia* (Mayer, 2001, 2005b), el *Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos* (Schnotz, 2005) y la *Teoría de la Carga Cognitiva* (Sweller, 2005).

---

\*El término *multimedia* se referirá a un *escenario o entorno virtual creado y ejecutado por un ordenador que incluye todos o algunos de los siguientes componentes multimodales (tabla 4.1, 127, capítulo 4): espacial y visual, lingüístico, audio, y gestual y de movimiento*. Dicho entorno se encontrará dotado, además, de un sistema automático de registro y almacenamiento de la interacción del sujeto–entorno.

Los principios del aprendizaje nos interesan, de acuerdo con Mayer (2001), como principios fundamentales para la construcción de tareas e ítems multimedia. A pesar de todo, creemos que las teorías y principios anteriores descuidan los aspectos atencionales, afectivos y emocionales implicados en el aprendizaje y la cognición, aspectos que incluimos en nuestro estudio a través de las dos aproximaciones siguientes (Mayer, 2001):

- Centrada en el sujeto: tiene el propósito de construir tareas con formato de juego en un escenario multimedia adaptadas a las características cognitivas y psicoafectivas de los sujetos.
- Centrada en la tecnología: pretende conseguir registrar la información de la interacción ordenador–sujeto con objetividad y minimizando la interacción investigador–sujeto.

Por otra parte está claro que la determinación de una nueva metodología multimedia aplicada a un modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas, dependerá de la construcción del instrumento multimedia, lo que lleva directamente a la cuestión fundamental de cómo diseñar y construir un ítem multimedia\* con las características adecuadas. En la sección 6.4 del capítulo 6 damos respuesta al problema mediante un protocolo o modelo general específico para el diseño y la construcción del ítem multimedia para lo que se tienen en cuenta los principios del aprendizaje multimedia no como principios de aprendizaje en sí, sino como principios del diseño multimedia (Mayer, 2001, 2005a).

#### 1.4 Delimitación formal del problema de investigación

El problema se define formalmente mediante la formulación de los fines generales, los supuestos y las opciones apriorísticas que se consideran, los objetivos concretos que se persiguen y las conjeturas o hipótesis cuya confirmación va a permitir asegurar la consecución de los objetivos. Veamos a continuación la formulación precisa de cada uno de dichos elementos.

##### 1.4.1 Fines

La investigación pretende comprobar si la utilización de una metodología de investigación basada en la tecnología multimedia (metodología multimedia) proporciona información válida y relevante sobre la evolución del Pen-

\*Véase la figura 6.2 en la página 302.

samiento Ordinal prenumérico y recursivo en escolares de 3 a 7 años. En particular, el estudio se orienta a alcanzar los siguientes fines:

- 1<sup>o</sup>. Configurar y someter a prueba una nueva metodología multimedia para la investigación en Educación Matemática.
- 2<sup>o</sup>. Continuar la línea de investigación sobre la evolución del Pensamiento Numérico entre 3 y 7 años en las etapas prenumérica y preinductiva.
- 3<sup>o</sup>. Iniciar una línea de investigación sobre el uso de la tecnología multimedia en Educación Matemática.

#### 1.4.2 Supuestos y opciones apriorísticas

La presente investigación parte de los siguientes supuestos y opciones a priori:

- S1:** *Con respecto a la Epistemología y Fenomenología de la Matemática:* Un enfoque constructivista del orden y la recursión como aspectos fundamentales del número natural.
- S2:** *Con respecto a la Cognición Matemática:* Un enfoque basado en los fundamentos de la Epistemología Genética y los principios del procesamiento de la información como referencias básicas para explicar la construcción cognitiva del número natural.
- S3:** *Con respecto al uso de la Tecnología en Educación Matemática:* Un enfoque pragmático basado en los resultados y teorías más recientes sobre la contribución de las tecnologías multimedia y de las TIC,s al campo del aprendizaje y la cognición matemática.
- S4:** *Con respecto a la línea de investigación:* Un enfoque específico basado en los resultados previos de los trabajos de Ortiz (1997) sobre razonamiento inductivo numérico y en los planteamientos y resultados de Fernández (2001) y Fernández y Ortiz (2008), sobre la existencia de una construcción cognitiva ordinal del número natural, paralela a la construcción cardinal, en sujetos de 3 a 6 años de edad.

#### 1.4.3 Objetivos de la investigación

Con el estudio se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

- O1:** Clarificar los fundamentos matemáticos, epistemológicos y fenomenológicos del orden y la recursión como elementos básicos en la construcción del número natural.

- O2:** Construir y validar una nueva metodología de investigación en Educación Matemática basada en la tecnología multimedia (Metodología Multimedia).
- O3:** Comprobar la idoneidad, eficacia y validez de la metodología multimedia para el registro y análisis de las respuestas de sujetos de 3 a 7 años ante la realización de tareas lógico–matemáticas relacionadas con el orden y la recursión.
- O4:** Configurar y contrastar la validez, mediante la metodología multimedia, de un modelo evolutivo sobre el Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años de edad, constituido por estados de desarrollo caracterizados por capacidades ordinales y recursivas empleadas en la realización de actividades específicas.
- O5:** Construir un instrumento multimedia adaptado a las características de los sujetos y a los estados del modelo evolutivo propuesto, que permita observar, registrar y analizar las regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo y contrastar la bondad del modelo en los siguientes términos:
- O5.1:** Identificar y caracterizar niveles de competencia y/o de desarrollo.
  - O5.2:** Identificar y caracterizar las estrategias de resolución y las regularidades existentes.
  - O5.3:** Describir la evolución con la edad de las estrategias, capacidades y competencias que intervienen; en particular
    - O5.3.1:** Determinar las edades a las que se produce el uso espontáneo de las capacidades recursivas frente al mero etiquetaje.
    - O5.3.2:** Identificar el intervalo de edad y las circunstancias en las que se produce la diferenciación entre cantidad continua y discreta.
    - O5.3.3:** Identificar el intervalo de edad y las circunstancias en las que se produce el uso espontáneo del conteo ordinal frente a otras estrategias.
  - O5.4:** Construir distintos modelos funcionales de ajuste para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas y analizar su grado de precisión y su adecuación a los fenómenos observados.



### 1.4.4 Hipótesis

La formulación de las hipótesis condiciona la metodología de investigación y, a su vez, se encuentra condicionada por los siguientes aspectos:

- El estado de los conocimientos previos de la línea de investigación.
- El planteamiento del problema de investigación y las conjeturas iniciales.
- Los supuestos y opciones a priori.
- Los objetivos de la investigación, cuya consecución depende de la confirmación de las hipótesis.
- El análisis epistemológico y fenomenológico del orden y la recursión y su papel en la construcción del número natural así como de los conceptos comparativos y métricos.
- Las teorías actuales sobre la cognición en entornos multimedia.

Teniendo en cuenta los condicionantes mencionados, se pretende examinar/someter a prueba la bondad de las siguientes hipótesis:

**H1:** El orden y la recursión se encuentran estrechamente relacionados con la construcción matemática del número natural y de los conceptos comparativos y métricos.

**H2:** Las capacidades ordinales y recursivas propias del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años se desarrollan de acuerdo a un modelo evolutivo con tres estados ordinales: orden lineal, orden con cantidades continuas y orden con cantidades discretas, y un estado recursivo.

**H3:** La tecnología multimedia permite crear escenarios o entornos virtuales multimedia:

**H3.1:** adaptados a las características psicoafectivas y psicomotrices de niños y niñas de 3 a 7 años.

**H3.2:** que favorecen la motivación y la participación activa de los sujetos.

**H4:** Los entornos virtuales multimedia:

**H4.1:** son idóneos para la construcción de tareas centradas en un contenido lógico-matemático concreto.

**H4.2:** permiten analizar la interacción de los sujetos con el entorno mediante la recogida y el tratamiento automático de informaciones puntuales sobre dichas interacciones, maximizando la objetividad de los datos recogidos.

**H4.3:** permiten minimizar la interacción investigador-sujeto.

- H5:** El entorno multimedia permite configurar una metodología de investigación, Metodología Multimedia, centrada en los dos elementos siguientes: a) un modelo general para el diseño del ítem o tarea multimedia que optimiza las características del entorno virtual; b) un instrumento multimedia constituido por ítems o tareas graduadas en dificultad y organizadas en conjuntos y subconjuntos ordenados.
- H6:** La Metodología Multimedia es idónea para el estudio de las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y, por tanto, para el contraste del modelo evolutivo correspondiente mediante un instrumento constituido por cuatro conjuntos de tareas que se corresponden con los estados del modelo. En particular, la Metodología Multimedia hace posible:
- H6.1:** Identificar y caracterizar las estrategias de resolución y los niveles de competencia y/o de desarrollo para cada estado del modelo.
- H6.2:** Detectar las edades a las que aparece el uso de capacidades recursivas frente al mero etiquetaje, la distinción entre cantidad continua y discreta en tareas ordinales y la aparición del conteo ordinal frente a otras estrategias en tareas ordinales con cantidades discretas.
- H6.3:** Determinar y describir la evolución general de las capacidades, competencias y estrategias asociadas a los estados del modelo.
- H6.4:** Establecer modelos de ajuste no lineales para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas, de mayor precisión y adecuación que los lineales.

## 1.5 Marco metodológico

El estudio se desarrolla mediante una metodología mixta integrada por los métodos no empíricos y empíricos cuantitativos y cualitativos que describimos a continuación.

### 1.5.1 Estudios teóricos y metodologías no empíricas

Los estudios teóricos se iniciaron en el estudio exploratorio recogido en la memoria de tercer ciclo (Hernández, 2005), se desarrollaron posteriormente entre los años 2006 y 2008, y se completaron a partir del año 2010. A lo largo del proceso seguido se han llevado a cabo los siguientes estudios, cuyos resultados se incluyen en los capítulos del segundo al sexto de la memoria:

- Revisión inicial de los antecedentes de la línea de investigación y del papel de la tecnología multimedia en los procesos cognitivos y en el desarrollo del Pensamiento Matemático (Hernández, 2005) (Memoria del Tercer Ciclo, capítulo 1).
- Construcción de los instrumentos multimedia para selección de la muestra y la observación y recogida de los datos correspondientes al estudio exploratorio (capítulo 5).
- Estudio de las relaciones entre la tecnología multimedia y los procesos cognitivos, las teorías y principios del aprendizaje multimedia y la interacción ordenador–sujeto (capítulo 4).
- Estudio epistemológico de la estructura ordinal desde los puntos de vista matemático, histórico y psicogenético y estudio fenomenológico de la estructura ordinal en relación con los conceptos de magnitud, cantidad y medida (capítulo 2).
- Análisis Didáctico (Gallardo y González, 2013; González, 1998) de los antecedentes relativos a las investigaciones cognitivas sobre el aprendizaje del número y el orden y su desarrollo desde la perspectiva neuropsicológica (capítulo 3).
- Configuración del marco teórico de la investigación (capítulo 6), incluyendo:
  - La determinación del Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR).
  - La construcción del Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM).
  - La definición de una nueva metodología de investigación en Educación Matemática que denominamos *Metodología Multimedia*.
  - El diseño y construcción del instrumento multimedia definitivo para la observación y recogida de datos.
  - La adaptación de la metodología multimedia al problema evolutivo ordinal y recursivo.
- Diseño y construcción de interfaces y programación orientada a objetos en entornos multimedia.

### 1.5.2 Estudios empíricos

Los estudios empíricos se iniciaron durante el desarrollo del estudio exploratorio (Hernández, 2005), continuaron con el trabajo de campo en 2007 y 2008 y se completaron a partir del año 2010. Se han realizado los estudios

empíricos que se describen extensamente en los capítulos 5, 7 y 8 de esta memoria y en los que se han aplicado:

- Métodos y técnicas cuantitativas:
  - Estudio de la escalabilidad de Cronbach aplicada a la selección de ítems (capítulo 7).
  - Análisis descriptivo global, puntual y comparativo de las valoraciones de las respuestas de los cuatro conjuntos de tareas (capítulo 8).
  - Tests de Kolmogorov–Smirnov y Shapiro–Wilk para estudiar la normalidad de las distribuciones de las valoraciones de las respuestas por grupos de edad en cada uno de los cuatro conjuntos de tareas (capítulo 8).
  - Análisis de modelos de ajuste lineales y no lineales en el estudio de la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad en cada conjunto de tareas (capítulo 8).
  - Análisis descriptivo global, puntual y comparativo de respuestas, tiempos e intentos de los cuatro conjuntos de tareas, correlaciones entre muestras, coeficientes de variación (Estudio Exploratorio, capítulo 5).
  - Validez y fiabilidad de los instrumentos: análisis de la varianza, coeficientes de determinación, escalabilidad, correlaciones entre muestras, contrastes de hipótesis.
- Métodos y técnicas cualitativas (Segundo Estudio Empírico (capítulo 8)):
  - Análisis cualitativo de las valoraciones de las respuestas de los cuatro conjuntos de tareas: análisis evolutivo y caracterización de niveles.
  - Análisis cualitativo de las estrategias y su evolución, de los errores cometidos y del uso de determinados elementos singulares.
  - Análisis de las respuestas sobre el reconocimiento de la intervención de la cantidad discreta en el tercer conjunto de tareas: análisis de estrategias y errores.
  - Análisis comparativo de las valoraciones de las respuestas de los cuatro conjuntos de tareas multimedia, contraste/validación del modelo evolutivo de capacidades ordinales y recursivas (MECOR) y descripción de dichas capacidades por grupos de edad según los estados y niveles del MECOR.

### 1.5.3 Articulación de las hipótesis en el proceso metodológico

En la Figura 1.2 se detallan las relaciones que intervienen en el proceso metodológico. En dicho esquema se pueden situar las evidencias que justifican o confirman, en su caso, la bondad de cada una de las hipótesis. Veamos cómo se articulan las hipótesis en dicho esquema.

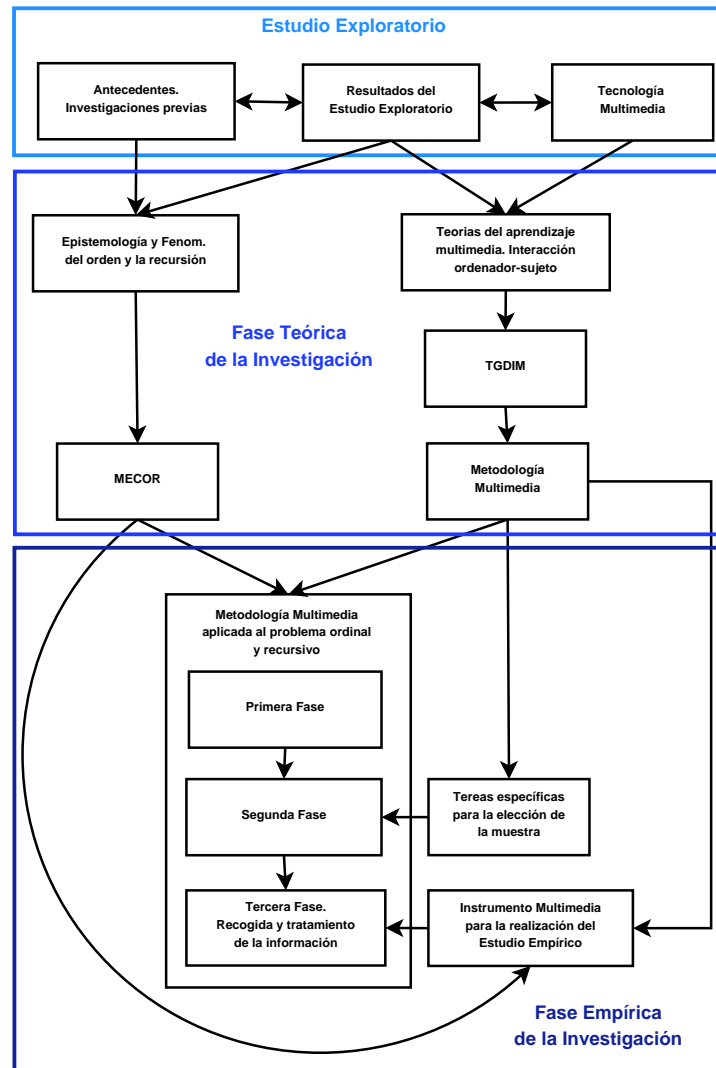


Fig. 1.2. Esquema metodológico general de la investigación

**H1:** *El orden y la recursión se encuentran estrechamente relacionados con la construcción matemática del número natural y de los conceptos*

*comparativos y métricos.*

La confirmación de esta hipótesis vendrá por medio del análisis de información de tipo documental y la reflexión epistemológica, y se debe llevar a cabo dentro del proceso de análisis didáctico. Los resultados y conclusiones del capítulo 2, basados en análisis epistemológicos y fenomenológicos serán fuente de evidencias para sostener **H1**.

**H2:** *Las capacidades ordinales y recursivas propias del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años se desarrollan de acuerdo a un modelo evolutivo con tres estados ordinales: orden lineal, orden con cantidades continuas y orden con cantidades discretas, y un estado recursivo.*

En el proceso de validación de esta hipótesis se distinguirán dos etapas desde el punto de vista metodológico: una primera de construcción del modelo y una segunda de valoración empírica del mismo.

- **Primera etapa.** El estudio exploratorio (Hernández, 2005) pone en evidencia la existencia de regularidades y la posibilidad de escalonamiento de las capacidades ordinales en tres estados: orden lineal, orden con cantidades continuas y orden con cantidades discretas, revelando además la distinción del estado recursivo, lo que se confirma en los estudios realizados en 2010.

Por otra parte, de las conclusiones de dichos estudios (capítulo 5) (Hernández y González (2011, 2014)) se sigue la necesidad de realizar un análisis didáctico, epistemológico y fenomenológico de la estructura de orden y la recursión (capítulo 2). Asimismo, de los diversos antecedentes, incluida la información sobre modelos evolutivos en Educación Matemática (Ortiz, 1997), se fundamenta y justifica el significado y la racionalidad del modelo construido (MECOR) (capítulo 3).

La confirmación de la bondad de la primera parte de la hipótesis **H2** dependerá, por tanto, de los resultados y conclusiones de los capítulos 5, 2 y 3.

- **Segunda etapa.** Se orienta al contraste empírico del modelo mediante una metodología adaptada a las características de los sujetos. La confirmación de la bondad de esta segunda parte de la hipótesis **H2** dependerá de la confirmación de la bondad de la hipótesis **H6**.

**H3:** *La tecnología multimedia permite crear escenarios o entornos virtuales multimedia:*

**H3.1:** *adaptados a las características psicoafectivas y psicomotrices de niños y niñas de 3 a 7 años.*

**H3.2:** *que favorecen la motivación y la participación activa de los sujetos.*

**H4:** *Los entornos virtuales multimedia:*

**H4.1:** *son idóneos para la construcción de tareas centradas en un contenido lógico-matemático concreto..*

**H4.2:** *permiten analizar la interacción de los sujetos con el entorno mediante la recogida y el tratamiento automático de informaciones puntuales sobre dichas interacciones, maximizando la objetividad de los datos recogidos.*

**H4.3:** *permiten minimizar la interacción investigador-sujeto.*

La validez de las hipótesis **H3** y **H4** se examinará tanto por resultados teóricos, como es el caso del Modelo General para el Diseño del ítem Multimedia (MGDIM) y el diseño y construcción del instrumento multimedia (capítulos 6 y 7), como por los resultados de los estudios empíricos (capítulos 5, 8 y 9).

**H5:** *El entorno multimedia permite configurar una metodología de investigación, Metodología Multimedia, centrada en los dos elementos siguientes: a) un modelo general para el diseño del ítem o tarea multimedia que optimiza las características del entorno virtual; b) un instrumento multimedia constituido por ítems o tareas graduadas en dificultad y organizadas en conjuntos y subconjuntos ordenados.*

La bondad de esta hipótesis se espera contrastar a través de los resultados de las reflexiones teóricas basadas en la definición del Modelo General para el Diseño del ítem Multimedia (MGDIM) y el diseño y construcción del instrumento multimedia; ambos aspectos permitirán, a su vez, la determinación de la metodología mencionada (capítulo 6).

**H6:** *La Metodología Multimedia es idónea para el estudio de las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y, por tanto, para el contraste del modelo evolutivo correspondiente mediante un instrumento constituido por cuatro conjuntos de tareas que se corresponden con los estados del modelo. En particular, la Metodología Multimedia hace posible:*

- H6.1:** *Identificar y caracterizar las estrategias de resolución y los niveles de competencia y/o de desarrollo para cada estado del modelo.*
- H6.2:** *Detectar las edades a las que aparece el uso de capacidades recursivas frente al mero etiquetaje, la distinción entre cantidad continua y discreta en tareas ordinales y la aparición del conteo ordinal frente a otras estrategias en tareas ordinales con cantidades discretas.*
- H6.3:** *Determinar y describir la evolución general de las capacidades, competencias y estrategias asociadas a los estados del modelo.*
- H6.4:** *Establecer modelos de ajuste no lineales para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas, de mayor precisión y adecuación que los lineales.*

En el proceso de validación de la hipótesis **H6** hay que distinguir dos etapas:

- **Primera etapa:** Diseño y construcción efectiva del instrumento asociado al modelo (MECOR) y su integración en la Metodología Multimedia (capítulos 6 y 7). Por tanto, la confirmación de la primera parte de la hipótesis **H6** estará sujeta a la validación de los constructos teórico-prácticos correspondientes (capítulos 6 y 7).
- **Segunda etapa:** Aplicación de los constructos mencionados al estudio de las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y al contraste del modelo evolutivo (MECOR) (capítulo 8).

La confirmación de la bondad de la segunda parte de la hipótesis **H6** y de las sub-hipótesis **H6.1** a **H6.4**, dependerá de los resultados del Estudio Empírico (capítulo 8).

#### 1.5.4 *Secuenciación, etapas y desarrollo temporal del estudio*

En el desarrollo de la investigación se pueden distinguir las siguientes fases temporales:

**Años 2004–2008.** Se realizaron las siguientes actividades:

- a) Revisión inicial de los antecedentes y primera versión del modelo evolutivo de competencias ordinales en niños de 3 a 6 años .



- b) Estudios exploratorios sobre el impacto y la relevancia de la tecnología multimedia en los procesos cognitivos y en el desarrollo del Pensamiento Matemático.
- c) Estudios específicos sobre el diseño y la construcción de interfaces y programación orientada a objetos en entornos multimedia.
- d) Diseño de un estudio exploratorio, construcción de los instrumentos multimedia, desarrollo del estudio, análisis de resultados y culminación de la Memoria del Tercer Ciclo (Hernández, 2005).
- e) Confirmación de la viabilidad del estudio y de la adaptación de la metodología y el instrumento a las características psicomotrices y afectivas de los sujetos de la muestra así como de la conveniencia de ampliar el estudio hasta la edad de 7 años.
- f) Realización de búsquedas bibliográficas sobre las relaciones entre la tecnología multimedia y los procesos cognitivos y la interacción ordenador–sujeto (ver apartado en este capítulo).
- g) Análisis de las relaciones entre la tecnología multimedia y los procesos cognitivos, las teorías y principios del aprendizaje multimedia y la interacción ordenador–sujeto (capítulo 4). Configuración del Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM).
- h) Elaboración de un nuevo marco metodológico basado en la tecnología multimedia, en el Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM) y en las entrevistas individuales (capítulo 6).
- i) Diseño del nuevo instrumento multimedia y del nuevo estudio empírico cualitativo, determinando los objetivos, los criterios de selección de la muestra y de la construcción de los protocolos, el diseño de las entrevistas y el contenido del cuestionario, el proceso de recogida de datos y las variables del estudio (capítulos 6 y 7).
- j) Realización del trabajo de campo correspondiente al estudio empírico, incluyendo la selección de los centros, la preparación y puesta a punto del material y la aplicación del proceso metodológico completo (capítulos 7 y 8). Análisis de los resultados de las tareas de orden lineal, incluyendo la caracterización de los niveles, el estudio de los modelos de ajuste y la elaboración de las conclusiones (capítulo 8).

**Años 2009–2010.** Se realizaron las actividades siguientes:

- a) Análisis parcial de resultados de los cuatro conjuntos de tareas orientado al estudio de los modelos de ajuste para las medias de las valoraciones por grupos de edad y al estudio de la singularidad del “etiquetaje” (recursividad) en relación con la evolución de las capacidades ordinales.
- b) Revisión del estado de la investigación y avance de los primeros resultados (Hernández y González, 2010, 2011).
- c) Reflexión sobre la necesidad de realizar estudios epistemológicos y fenomenológicos sobre la estructura de orden y la recursión como componentes básicos de la construcción del número natural y de los conceptos de magnitud, cantidad y medida.
- d) Reflexión sobre la necesidad de elaborar un marco teórico e interpretativo definitivo para analizar y estudiar en profundidad la información obtenida.

**Años 2011–2015.** Se realizaron las siguientes actividades:

- a) Elaboración y divulgación de un informe sobre el estado de la investigación hasta 2010 (Hernández y González, 2014).
- b) Realización de nuevas búsquedas bibliográficas para el estudio de la estructura ordinal y los conceptos de magnitud, cantidad y medida desde los puntos de vista matemático, histórico y psicogenético y desarrollo de dichos estudios (capítulo 2).
- c) Análisis Didáctico de los antecedentes propios de la línea de investigación así como de los relativos a las investigaciones cognitivas sobre el aprendizaje del número y el orden desde la perspectiva neuropsicológica (capítulo 3).
- d) Síntesis de los estudios y desarrollo de los marcos teórico y metodológico definitivos de la investigación (capítulo 6).
- e) Análisis e interpretación de los datos completos de los cuatro conjuntos de tareas (capítulo 8), incluyendo:
  - Análisis descriptivo global, puntual y comparativo de las respuestas, incluyendo el análisis evolutivo, el estudio de la normalidad de las distribuciones y la caracterización de niveles.
  - Análisis cualitativo de las estrategias y su evolución, los errores cometidos y el uso de determinados elementos singulares (piezas sobrantes).

- Estudio de modelos de ajuste, análisis de respuestas, estrategias y errores y otros estudios estadísticos.
  - Elaboración de las conclusiones de los estudios anteriores para cada conjunto de tareas así como del análisis comparativo global de los cuatro conjuntos.
- f) Elaboración de las conclusiones generales, revisión del sistema de edición  $\text{\LaTeX}$ , revisión de documentos y redacción del Informe de la investigación.

## 1.6 Fuentes de información

El proceso seguido en la búsqueda y selección de la información ha sido progresivo y cíclico, es decir, se han completado las referencias básicas con sucesivas búsquedas llevadas a cabo con regularidad a lo largo del desarrollo de la investigación. Para el tratamiento de la información se adopta un esquema básico de análisis constituido por las dos partes siguientes:

- *Resumen neutro del contenido del documento*, destacando los supuestos teóricos adoptados, la metodología empleada, los resultados y conclusiones, las propuestas didácticas y las recomendaciones curriculares sugeridas.
- *Análisis crítico de la información*, centrando la atención en las características de los resultados, las potencialidades y limitaciones, las analogías y divergencias con nuestros planteamientos y los aspectos relevantes para los propósitos de la investigación.

### 1.6.1 Principales fuentes consultadas

La documentación utilizada en el desarrollo de la investigación procede de las siguientes fuentes de información:

- a) *Bibliotecas, hemerotecas y librerías*. Se han realizado consultas periódicas en los fondos bibliográficos de la Universidad de Málaga a través de la Facultad de Ciencias de la Educación.
- b) *Bases de datos especializadas en Educación Matemática*. Se han consultado las bases siguientes: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), tanto en versión escrita como digital, *Educational Resources Information Center* (ERIC) y otras bases documentales, como la del

grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), Dialnet y arXiv (secciones de Matemáticas, Ciencias Computacionales y Estadística).

- c) *Otras fuentes*. Se ha hecho uso intensivo de otros recursos ofrecidos por departamentos universitarios y grupos de investigación nacionales e internacionales y se han considerado las referencias bibliográficas incluidas en los documentos y obras revisados como fuente para la localización de nueva información.

### 1.6.2 *Contenidos, descriptores, estructura y formatos de la información*

Se ha obtenido información de las siguientes *áreas de conocimiento*:

Lógica, Matemática, Educación Matemática, Historia y Epistemología de la Matemática, Psicología Cognitiva, Psicología de la Educación, Neurociencia, Informática y Didáctica de la Matemática.

Los descriptores más utilizados han sido los siguientes:

*multimedia test, multimedia learning, epistemology of orderings, phenomenology of orderings, orderings in mathematics education, order and recursion, orderings in educational research, similares descriptores relativos a la recursión, math skills and neuroscience, numbers and neuroscience, human-computer interaction.*

La información recopilada se ha presentado en los siguientes formatos:

- *Libros y tesis doctorales*, en papel o en formato electrónico. En este grupo destacamos: González (1998), Mayer (2001), Mayer (2005a), Hrbacek y Jech (1999), Ivorra (2008), Bourbaki (1970), Kneebone (1963), Hardy y Jackson (1998), Manin y Panchishkin (2005), Ortiz (1997) y Fernández (2001).
- *Artículos de revistas especializadas*, nacionales e internacionales. Entre las primeras son dignas de mención: *PNA, Enseñanza de las Ciencias, Infancia y Aprendizaje, Gaceta de la RSME, Revista de Neurología, Cuadernos de Pedagogía y Comunicar*. De las segundas: *Educational Studies in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, International Journal of Science and Mathematics Education, Journal of Mathematical Behavior, Mathematics Teacher, Recherches en Didactique des Mathématiques, For the Learning of Mathematics, Hiroshima Journal of Mathematics Education, Scienti-*

*fic American, Science, Cognitive Science, Minds and Machines, Cognition and Instruction, Educational Psychology Review, NeuroCase, Journal of Educational Psychology, Journal of Experimental Child Psychology, Mathematical Cognition, American Psychologist, Journal of Experimental Child Psychology, Cognitive Psychology, Cognition, Nature, Psychological Review, Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS), Memory and Cognition, Child Development, Learning and Instruction, International Journal of Psychology, Development Psychology, Educational Psychologist, Trends in Cognitive Sciences, Science, International Journal of Educational Telecommunications (IJET), International Journal on E-Learning, Information Technology in Childhood Education Annual (ITCE), Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching (JCMST), Journal of Educational Multimedia and Hypermedia (JEMH), Journal of Interactive Learning Research (JILR), Journal of Technology and Teacher Education (JTATE), Contemporary Issues in Technology & Teacher Education (CITE), Educational Technology Review (ETR) e International Journal for Technology in Mathematics Education (IJTME).*

- Actas de Simposios y Congresos, de las que cabe señalar las correspondientes a los Simposios de la SEIEM, las conferencias de los grupos *Psychology of Mathematics Education* (PME), *Technology and its Integration into Mathematics Education* (TIME), *Society for Information Technology and Teacher Education* (SITE) y *World Conference on Educational Media & Technology* (EdMedia), en sus sucesivas ediciones.

En la sección de referencias bibliográficas del informe se recogen los detalles de cada una de las reseñas consideradas.

### 1.6.3 Limitaciones

Durante el proceso de búsqueda de antecedentes se ha encontrado numerosa documentación cuya utilidad ha resultado ser escasa o nula. Asimismo, somos conscientes de que se ha podido obviar alguna información relevante, sobre todo si tenemos en cuenta que las referencias consideradas se han limitado a las escritas en los idiomas español, inglés y francés, descartando el resto de la documentación por considerar que es en dichos idiomas en los que se puede acceder a la mayor parte de la información relevante existente.

### 1.7 Principales aportaciones de la investigación

La investigación realiza las siguientes aportaciones relevantes:

1. Un Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR), que proporciona un marco interpretativo de las características, regularidades y evolución del Pensamiento Ordinal Preinductivo en escolares de 3 a 7 años en un entorno multimedia.
2. Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM).
3. Una Metodología de investigación en Educación Matemática (Metodología Multimedia), idónea para su utilización en Educación Infantil y Primaria y en estudios de masas.
4. Una explicación detallada de la evolución de una parte de las capacidades ordinales y recursivas en escolares de 3 a 7 años mediante la aplicación de la metodología multimedia.
5. Caracterización de niveles de competencia y determinación de las edades más frecuentes en las que tienen lugar los cambios de nivel.
6. Detección y clasificación de los errores cometidos y las estrategias utilizadas.
7. Identificación de las edades a las que aparece: a) el uso de capacidades recursivas frente al mero etiquetaje, b) la distinción entre cantidad continua y discreta en la resolución de tareas ordinales, c) el conteo ordinal frente a otras estrategias en la resolución de tareas ordinales con cantidades discretas.
8. Descripción general de las capacidades, competencias y estrategias asociadas a los estados del modelo por grupos de edad.
9. Determinación de modelos de ajuste no lineales para la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad para cada una de las capacidades tratadas y comprobación de que dichos modelos son más precisos que los ajustes lineales correspondientes.
10. Ejemplos prácticos de ítems multimedia para el desarrollo de investigaciones futuras.
11. Recomendaciones para la consideración curricular de estas capacidades, tanto en Educación Infantil como en Educación Primaria y en el Plan de estudios del Grado de Maestro.

## 1.8 Racionalidad del estudio

El estado actual de desarrollo de las tecnologías multimedia y de las TICs (Mayer, 2001, 2005a; Pescador, 2000; Rosenzweig, 2002), permite crear escenarios o entornos virtuales adaptados a las características psicoafectivas y psicomotrices de niños y niñas de 3 a 7 años, que favorecen la motivación y la participación activa de los sujetos y que son idóneos para la construcción de tareas centradas en un contenido lógico-matemático concreto, permitiendo analizar la interacción de los sujetos con el entorno mediante la recogida y el tratamiento automático de la información, asegurando la objetividad de los datos y minimizando la interacción investigador-sujeto. Esto supone que existen suficientes garantías para afirmar lo que se expresa en las hipótesis **H3** a **H6** de la investigación.

Por otra parte, de acuerdo con el trabajo de Fernández (2001), una finalidad básica de los estudios sobre desarrollo cognitivo en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática consiste en describir el desarrollo de los conceptos matemáticos en los niños y explicar los procesos mediante los que estos conceptos se adquieren y aplican (Carpenter, 1980).

Para abordar este tipo de estudios se suelen emplear, básicamente, dos modelos explicativos: el modelo orgánico u organicista, representado por Piaget y su escuela, y el modelo mecánico, que se considera como una extensión del conductismo (Bermejo y Lago, 1994). Nuestro trabajo se sitúa en el modelo organicista.

Para la obtención de datos empíricos útiles y fiables en un estudio de desarrollo cognitivo con sujetos de tres a siete años, hemos elegido trabajar con métodos cualitativos y entrevistas individualizadas como técnicas adecuadas de recogida de información (Claparède, 1976; Inhelder y cols., 1974; Vinh-Bang, 1966), aunque sin renunciar a técnicas cuantitativas complementarias.

Por otra parte, hemos considerado necesario dilucidar primero las pautas generales del desarrollo y los aspectos básicos del comportamiento antes de entrar en estudios de tipo longitudinal o cuantitativos y de masas, lo que nos ha llevado a realizar una investigación de tipo transversal que ponga en evidencia las competencias ordinales y recursivas en sujetos de tres a siete años y permita averiguar las estrategias empleadas, los errores cometidos y la existencia de niveles de desarrollo diferenciados.

Asimismo, consideramos que los comportamientos de los sujetos tienen connotaciones que manifiestan la naturaleza de las nociones aprendidas y el contexto didáctico, familiar y social en el que se han adquirido. En este sentido somos conscientes de la influencia de múltiples factores sobre la si-

tuación real de los conocimientos, lo que aconseja construir un marco teórico y establecer un modelo manejable basado preferentemente en acciones de naturaleza no verbal, que permita interpretar y justificar racionalmente los resultados obtenidos.

En consecuencia, los contenidos tratados en las entrevistas individualizadas están integrados en un instrumento multimedia que es la base de la interacción investigador–sujeto. Mediante dicho procedimiento se plantean situaciones problemáticas ordinales y recursivas que, aunque no forman parte de los contenidos curriculares, el sujeto tiene que resolver. Se persigue enfrentar al sujeto a problemas elementales auténticos para analizar su comportamiento espontáneo, aunque no podemos asegurar que carezca de experiencias previas al respecto.

Por tanto, la investigación que se presenta tiene, entre otras, las siguientes características:

- Es de naturaleza organicista.
- Se realiza mediante esquemas globales integradores de los diferentes aspectos.
- Su objeto no son las estructuras sino los procesos de razonamiento, a los que nos aproximamos desde un enfoque transversal.

### 1.9 Modalidad de la investigación

De acuerdo con la taxonomía que propone Bisquerra (1989, p. 60 y ss.), el trabajo realizado se corresponde con las siguientes modalidades:

- Según el proceso formal, se utiliza fundamentalmente el método hipotético deductivo, sin renunciar en ocasiones al método inductivo.
- Según el grado de abstracción, se trata de una investigación a la vez pura o básica, dado que se pretende aumentar el conocimiento teórico sobre los campos de estudio, y aplicada, dado que también se aporta información que tiene una finalidad y utilidad práctica.
- Según la naturaleza de los datos, se trata de una investigación cualitativa interpretativa en la que no se pretende generalizar los resultados.
- Según la orientación, está orientada a conclusiones y no a decisiones.
- Según la manipulación de variables, es una investigación no experimental de tipo descriptivo.
- Según la dimensión cronológica y desde el punto de vista de los estudios empíricos realizados se trata de una investigación descriptiva con enfoque de presente.



- Según las fuentes se trata de una investigación documental y metaanalítica, que utiliza el análisis didáctico, y de una investigación empírica.
- Según la temporalización, la fase empírica es transversal ya que supone un corte transversal en la situación de los sujetos ante el problema investigado.

Por otra parte, la aproximación adoptada en el estudio es:

- *Operativa*: Las afirmaciones vendrán respaldadas por datos y resultados empíricos. No tiene sentido construir modelos descriptivos sobre algo inobservable y cuya bondad no puede ser contrastada empíricamente. Además, se busca expresamente la facilidad para realizar valoraciones objetivas y para realizar comparaciones.
- *Indirecta*: Reconocemos las limitaciones del investigador para observar de manera directa el conocimiento o la comprensión que tiene, emplea o manifiesta un sujeto acerca de un conocimiento matemático. No obstante, ésta puede ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas.
- *Fenomenológica*: El carácter indirecto de la aproximación remite a los fenómenos, tareas y situaciones que dan sentido al conocimiento lógico-matemático en juego, lo que obliga a fundamentar todos los estudios de esta clase en el análisis epistemológico y fenomenológico (Puig, 1997) del conocimiento matemático.
- *Positiva*: Nos interesa determinar, por ahora, lo que los sujetos realizan y no lo que no realizan o porqué lo realizan o no. Por tanto, el interés por la identificación de obstáculos epistemológicos, por ejemplo, queda relegado en esta aproximación a un segundo plano.
- *Provisional y limitada*: Las conclusiones se consideran provisionales y relativas a la muestra que se estudia, si bien existen ciertas garantías de que dichas conclusiones serán similares en estudios con muestras más amplias de sujetos de las mismas características.

### 1.10 Criterios de bondad

La investigación ha tomado como referencia los siguientes criterios de bondad (Bisquerra, 1989; Cohen y Manion, 1990; Fernández, 1995):

- *Replicabilidad*. Pensamos que la investigación realizada es replicable desde los puntos de vista:

- Teórico, mediante la revisión crítica del análisis didáctico realizado y del proceso metodológico empleado.
  - Empírico, mediante la utilización de instrumentos multimedia diferentes con tareas homologables y eligiendo muestras de tamaño y composición diferente.
- *Originalidad.* Consideramos originales en el estudio los siguientes aspectos: una nueva metodología útil y adecuada para la investigación en Educación Matemática (Metodología Multimedia), su aplicación al estudio evolutivo de las capacidades ordinales y recursivas en sujetos de 3 a 7 años, el Modelo General para el Diseño del ítem Multimedia (MGDIM), el propio Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR), el cuadro evolutivo general de las capacidades ordinales y recursivas y los modelos de ajuste no lineal para las medias de las valoraciones por grupos de edad de las capacidades que se estudian.
  - *Rigurosidad.* Se ha dedicado atención especial al hecho de que las afirmaciones realizadas y las conclusiones obtenidas estén respaldadas por argumentos teóricos sólidos y bien establecidos y por datos y resultados empíricos.
  - *Imparcialidad.* En este aspecto, recordamos que uno de los objetivos de la investigación consiste en minimizar la interacción investigador–sujeto de modo que se maximice la objetividad de los datos recogidos. En lo referente al análisis e interpretación de los mismos, las conclusiones obtenidas tienen el alcance que se puede atribuir a las evidencias que se presentan; de todos modos se ha procurado ser objetivo considerando que se aportan datos y argumentos novedosos y nuevas formas de afrontar el problema.
  - *Fiabilidad.* La fiabilidad de nuestra investigación viene avalada por los siguientes aspectos:
    - El registro y almacenamiento automáticos de la información que hemos logrado.
    - El análisis imparcial, riguroso y detallado de la misma que hemos procurado realizar.
    - Los resultados de dos estudios empíricos realizados en los que han participado un total de 101 sujetos de distintos centros educativos.
  - *Consistencia empírica.* No hay contradicción entre el Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR) y la evidencia empírica obtenida a nivel del *sujeto epistémico*, siendo también válido

para describir la evolución individual de los sujetos; las desviaciones observadas ofrecen casos que pueden resultar interesantes en relación con el diagnóstico de ciertos retrasos individuales.

- *Validez.* La validez de esta investigación está avalada por sus resultados así como por los respectivos grados de rigor, imparcialidad, fiabilidad y consistencia empírica logrados.
- *Posibilidad de desarrollo posterior.* Estas posibilidades son muy amplias y pueden desarrollarse en dos planos no excluyentes:
  - La *Metodología Multimedia* desarrollada puede aplicarse a la investigación del mismo u otros dominios del Pensamiento Matemático y a un amplio intervalo de edades, que abarca, al menos, las etapas de Educación Infantil y Primaria; incluso, mediante pantallas táctiles, que hacen innecesario el uso del ratón, puede aplicarse investigaciones con sujetos de edad inferior a 3 años. Bastaría para ello diseñar y construir instrumentos multimedia adecuados.
  - Mediante esta metodología es posible realizar estudios cuantitativos de masas, para ello, desde el punto de vista técnico, basta adaptar el instrumento multimedia apropiado a un formato de páginas web conectadas a bases de datos e instalarlo en un servidor en Internet o en cualquier otra red pública, privada o corporativa, lo que es perfectamente factible. En particular, la siguiente etapa de la presente investigación podría consistir en un estudio de masas destinado a contrastar con todos los requerimientos de un estudio estadístico válido los resultados de la misma.



## 2

# EPISTEMOLOGÍA Y FENOMENOLOGÍA DE LA ESTRUCTURA ORDINAL

### 2.1 Introducción

Las relaciones de orden desempeñan un papel esencial en la construcción del número natural y en la constitución de los conceptos de cantidad, número y medida, aspectos que se hallan en plena evolución en los sujetos del intervalo de edad considerado en la investigación que se presenta en esta tesis doctoral. Es evidente, por tanto, el interés que puede tener un análisis pormenorizado de la naturaleza, modo de existencia y relaciones de estos conocimientos con otros conceptos matemáticos y con las situaciones que les dan sentido.

El papel de las relaciones de orden en la construcción del número natural se analiza en tres ámbitos epistemológicos: el ámbito matemático, el histórico y el psicogenético.

En el ámbito matemático se describen cuatro construcciones del número natural, dos desde el punto de vista ordinal y otras dos desde el cardinal. Las tres primeras se basan en la axiomática NBG (von Neumann, Bernays, Gödel) de la teoría de conjuntos, y la cuarta en la axiomática propia de Bourbaki.

Las dos primeras siguen las ideas de von Neumann y de Dedekind, las cuales siguen respectivamente, el punto de vista de la extensión y el de la comprensión en la definición del número natural. En la primera de ellas, el número natural se construye recursivamente mientras que, en la segunda, tras definirse el conjunto, se procede a posteriori a definir recursivamente el número. En ambas se demuestran los axiomas de Peano, incluido el principio de inducción como teoremas.

La tercera construcción, la primera desde el punto de vista cardinal, precisa

la definición previa del número ordinal para definir el número cardinal y, a partir de él, define el número natural como cardinal finito. Usa el punto de vista de la extensión y es técnicamente bastante más complicada que las construcciones ordinales.

La construcción de Bourbaki, que consideramos aquí por su notable influencia en la formación matemática contemporánea, utiliza una axiomática basada en ideas propias así como en ideas y resultados de Hilbert, y representa una postura epistémica distinta a las anteriores. Construye recursivamente el número natural desde el punto de vista cardinal, en un intento por reducir al mínimo la intervención de la lógica y de la teoría de conjuntos en la fundamentación de su sistema matemático, en el marco de su filosofía estructuralista de la matemática.

*De modo inmediato se observa que todas estas construcciones se apoyan de modo esencial en las relaciones de orden, de manera que, sin dicho apoyo, no es posible definir siquiera el número natural, el cual se manifiesta, esencialmente, como una estructura ordinal que se construye recursivamente y en la que el principio de inducción desempeña un papel central como herramienta demostrativa.*

En el ámbito histórico se revisa el papel del orden desde los enfoques convencionalista y logicista.

El primer enfoque considera los números naturales como una sucesión ordenada de naturaleza puramente convencional, íntimamente ligada a la experiencia temporal y al conteo. En este enfoque, la aritmética se reduce a la enumeración ordinal pura\*.

El enfoque convencionalista es de consideración obligada en nuestra investigación ya que la acción de contar es la vía para pasar de una serie de términos verbales a una serie de objetos tangibles y concretos sobre los cuales los sujetos pueden actuar, deducir relaciones y establecer correspondencias ordenadas. No obstante, consideramos que esta tendencia explica sólo una pequeña parte de la estructura y naturaleza del número natural, obviando las evidentes relaciones con la cantidad y la medida.

En el segundo enfoque aparecen dos posturas epistemológicas diferenciadas, una de ellas representada por Dedekind y Peano y la otra por Russell y Frege.

Los primeros están convencidos de la importancia de la lógica y de la

---

\* Así, en este contexto  $a+b$  es el término de la serie que se obtiene al contar  $b$  unidades a partir de  $a$ .

axiomática en la aclaración y en el establecimiento de los fundamentos de la aritmética.

La segunda construcción ordinal, sigue en un lenguaje moderno las ideas de Dedekind mediante un método recursivo.

No obstante, Russell va más allá y, al igual que Frege, pretende la reducción de la aritmética a la lógica mediante las clases, la interpretación cardinal del número y, para salvar las célebres antinomias, el desarrollo de la teoría de los tipos. Su impacto en los fundamentos de la matemática es bien conocido.

La postura de Bourbaki es más próxima a la de Dedekind aunque es más restrictiva\*. Prescinde de las ideas de von Neumann y de los ordinales en su construcción cardinal, usando “segmentos ordenados” y utilizando de modo esencial la relación de orden en la demostración de la existencia del conjunto  $\mathbb{N}$ , sin la cual no es posible definir propiamente el número natural en su sistema.

En el ámbito psicogenético, se toma en consideración el marco epistemológico piagetiano y, en particular, la génesis del número en los sujetos; con el fin de identificar el papel que juegan las relaciones de orden en dicha génesis.

Piaget es un logicista que presta más atención al aspecto cardinal del número, infravalorando el conteo (aspecto ordinal). Sin embargo afirma que la aparición y el desarrollo de los aspectos cardinales y ordinales es simultánea en la génesis del número en los sujetos y que el éxito operatorio debe integrar necesariamente ambos aspectos.

Por otra parte, Piaget asocia el éxito operatorio al dominio de la *estructura de seriación*, de la que son parte fundamental los aspectos ordinales y recursivos. Por tanto, de acuerdo con estos planteamientos, el sujeto no podrá alcanzar el éxito operatorio en el uso de la secuencia numérica si no desarrolla conocimientos y destrezas sobre la estructura de seriación, conclusión sumamente relevante para nuestra investigación.

En la segunda parte del capítulo se aborda la fenomenología del orden en relación con la magnitud, la cantidad y la medida.

El análisis sigue el trabajo de González (1998) sobre la obra de Stegmüller (1979), acerca de la naturaleza y formación de los conceptos científicos mediante su teoría de las formas conceptuales. En él se observa que la magnitud es esencialmente una estructura ordinal y que es pertinente la distinción en-

---

\* Sorprendentemente, la teoría de Topos iniciada por Grothendieck revela íntimas conexiones con las lógicas intuicionistas, viniendo a renovar el debate de las relaciones entre la lógica y la matemática. Véase Cartier (2000)

tre cantidad, número y medida tanto a nivel epistémico como, sobre todo, a nivel didáctico.

Se observa también que las relaciones ordinales son un componente esencial en la formación de los conceptos comparativos, en la que se sustenta la de los conceptos métricos.

El capítulo finaliza con la obtención de las conclusiones relevantes para la misma.

## 2.2 Epistemología del orden natural

En este apartado se aborda un análisis de los conceptos ordinales y recursivos que intervienen en el estudio en relación con la estructura del número natural, en primer lugar, y en relación con los conceptos de cantidad y medida, en segundo lugar.

Los conceptos ordinales se derivan de las correspondientes relaciones de orden, las cuales constituyen un elemento esencial en las estructuras numéricas y métricas; relaciones, estructuras y conceptos que desempeñan un papel esencial en la formación del pensamiento matemático en escolares de 3 a 7 años. Dentro de este campo de conocimientos, hemos de destacar el papel de la recursión como la herramienta constructiva fundamental del número natural y de su aritmética.

### 2.2.1 La estructura ordinal de los números naturales

Un resultado matemático básico conocido, partiendo de la axiomática conjuntista y de las definiciones al uso, es la *numerabilidad* de los números enteros ( $\mathbb{Z}$ ), y de los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ).

Este resultado tiene como consecuencia, Hrbacek y Jech (1999), la imposibilidad de distinguir los conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$  desde un punto de vista exclusivamente cardinal.

Sin embargo, estos conjuntos tienen propiedades ordinales que los distinguen claramente. Los tres son conjuntos inductivos y pueden ordenarse linealmente\* mediante los órdenes habituales, respecto de los cuales,  $\mathbb{N}$  admite un *buen orden*,  $\mathbb{Z}$  queda ordenado linealmente y  $\mathbb{Q}$ , además de quedar linealmente ordenado, es *denso*†. Es decir, los tres conjuntos tienen el mis-

\*Entendemos por orden lineal aquel para el cual todos los elementos del conjunto en el que está definido son comparables

†En el sentido de que *entre* dos números racionales cualesquiera hay infinitos números racionales.



mo cardinal pero tienen estructuras ordinales lineales no equivalentes, y por tanto ordinales distintos, lo que singulariza la estructura y propiedades de cada uno de ellos, Hrbacek y Jech (1999, p. 79 y ss.).

De hecho, salvo isomorfismos,  $\mathbb{N}$  es el “menor” conjunto inductivo que admite un buen orden, lo que caracteriza tanto al conjunto como, mediante las funciones recursivas, a la propia aritmética natural, Hrbacek y Jech (1999, p. 49 y ss). Además, según los mismos autores\*, se concluye que para conjuntos finitos los distintos tipos de órdenes lineales, es decir, los ordinales finitos, se corresponden biunívocamente con los números cardinales, por lo que se identifican ambos tipos de números, lo que no sucede, en general, como ya se ha indicado, para conjuntos infinitos. En consecuencia se puede definir  $\mathbb{N}$ , indistintamente, como el conjunto de todos los ordinales finitos, o bien como el conjunto de todos los cardinales finitos.

Estas últimas conclusiones informales quedan formalizadas en las construcciones de los números naturales basadas en las axiomáticas de Zermelo–Fraenkel (ZF) y en la de von Neumann–Bernays–Gödel (NBG) de la teoría de conjuntos†, las cuales aclaran las ideas iniciales de Cantor sobre los ordinales y los cardinales finitos y transfinitos. (Véase Ivorra (2008, p. 215 y ss.)).

En esta última referencia se detallan tres construcciones de los números naturales partiendo de la axiomática NBG. Dos de ellas son puramente ordinales, una de las cuales no requiere el axioma de infinitud (AI), y en la tercera se usa el punto de vista cardinal. Es también relevante para el estudio la construcción cardinal de Bourbaki (1970) resumida en Godement (1974). Veámos brevemente estas construcciones y el papel que juegan en ellas las relaciones de orden.

### Primera construcción ordinal

Se trata de una construcción en la que no se usa (AI) y se define un *ordinal* como una clase *transitiva*, *conexa* y *bien fundada*‡, (op. cit. p. 302).

Seguidamente se demuestran los resultados siguientes:

- 1º. Si  $X$  es una clase bien fundada  $X \notin X$ .
- 2º. Los elementos de los ordinales son ordinales.

\*Véase la definición de p. 79 de la misma referencia.

†“Las primeras teorías razonables fueron diseñadas por Skolem y Fraenkel en los años veinte a partir de unos axiomas publicados por Zermelo en 1908”, Ivorra (2008, p. 220).

‡En esta definición general no se usa el *axioma de regularidad*, que afirma que todo conjunto no vacío tiene un elemento minimal. Si se admite este axioma, podría decirse que un conjunto es un ordinal si y solo si es transitivo y conexo.

- 3º. Todo ordinal está bien ordenado por inclusión.  
 4º. Si  $X$  e  $Y$  son ordinales entonces  $X \in Y \vee Y \in X \vee X = Y$ .  
 5º. Si es  $\Omega \equiv \{x|x \text{ es un ordinal}\}$ , la relación  $\text{si } \alpha, \beta \in \Omega \text{ es } \alpha < \beta \equiv \alpha \subset \beta \vee \alpha < \beta \equiv \alpha \in \beta$ , es un buen orden en  $\Omega$  y, por tanto,  $\Omega$  es un ordinal.

Nótese que  $\Omega$  es una clase en NBG, no un conjunto, de manera que resulta ser el único ordinal que no es un conjunto. Por otra parte, los números ordinales son los elementos de  $\Omega$ , es decir, los conjuntos ordinales.

Con las notaciones  $0 \equiv \emptyset$ ,  $x' = x \cup \{x\}$ , se deducen los principios con los que Cantor introdujo los ordinales:

- a) 0 es el mínimo ordinal.  
 b) Si  $\alpha$  es un ordinal  $\alpha'$  también lo es, y es el mínimo ordinal mayor que  $\alpha$ .  
 c) Todo conjunto de ordinales  $X \subset \Omega$  tiene supremo, y éste es:  

$$\sigma = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha.$$

Con ello, se define un *número natural* de la forma:

$\text{Nat } x \equiv x \in \Omega \wedge \bigwedge \alpha (\alpha \in \alpha' \rightarrow \alpha = 0 \vee \bigvee \beta \in \alpha \alpha = \beta')$ , es decir, que un número natural es un número ordinal tal que tanto él como sus antecesores no nulos tienen un inmediato anterior. De esta manera,  $\omega \equiv \mathbb{N} = \{x \mid \text{Nat } x\}$  es la clase de todos los números naturales y se define un *conjunto finito* como aquél que se corresponde biunívocamente con algún  $\alpha \in \omega^*$ .

Los números naturales, por tanto, se pueden escribir recursivamente en la forma:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \emptyset \\ 1 &\equiv 0' = 0 \cup \{0\} = \{0\} \\ 2 &\equiv 1' = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} \\ 3 &\equiv 2' = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

A partir de aquí se demuestra que  $\omega \equiv \mathbb{N}$  es un ordinal, es decir  $\omega \in \Omega$ , y los axiomas de Peano:

- 1º.  $0 \in \omega$ .  
 2º.  $\bigwedge n \in \omega n' \in \omega$ .  
 3º.  $\bigwedge n \in \omega n' \neq 0$ .

\*Un conjunto *numerable* (contable) es cualquiera que se corresponda biunívocamente con  $\omega$  o con algún número natural. Por tanto, puede interpretarse el conteo como el establecimiento de una correspondencia biunívoca entre algún conjunto y algún  $\alpha \in \omega$ .

4<sup>o</sup>.  $\bigwedge n, m \in \omega (m' = n' \rightarrow m = n)$ .

5<sup>o</sup>.  $\bigwedge Y (Y \subset \omega \wedge 0 \in Y \wedge \bigwedge n \in Y n' \in Y \rightarrow Y = \omega)$ , que es el principio de inducción completa.

Así pues, la construcción de los números naturales no requiere el uso del AI, solamente es necesario para probar que  $\mathbb{N}$  es un conjunto. De hecho, son equivalentes:

- a) El axioma de infinitud.
- b)  $\omega$  es un conjunto.
- c)  $\omega \neq \Omega$ .
- d)  $\omega \in \Omega$ .

Finalmente, (op. cit., pág. 307 y ss.), se demuestran los teoremas de *recursión e inducción transfinita* y, con ellos, se construye la aritmética ordinal, que en  $\mathbb{N}$  cumple los axiomas de la aritmética ordinaria\*, aún cuando para ordinales arbitrarios se pierde la conmutatividad de la suma y del producto<sup>†</sup>.

### Segunda construcción ordinal

La segunda construcción, (op. cit., pág. 246 y ss.), sigue las ideas de Dedekind y parte del axioma de infinitud. Dado un conjunto  $X$  y una aplicación  $s : X \rightarrow X$  inyectiva y no suprayectiva, se toma un elemento  $0 \in X - s(X)$  y se define *conjunto inductivo* como un conjunto  $Y$  que cumpla:  $0 \in Y \wedge \bigwedge u \in Y s(u) \in Y$ .

Es claro que existen conjuntos inductivos, el propio  $X$  lo es. A partir de aquí, se define el conjunto

$$\mathbb{N} \equiv \{x \in X \mid \bigwedge Y (Y \text{ inductivo} \rightarrow x \in Y)\}$$

es decir,  $\mathbb{N}$  es la intersección de todos los conjuntos inductivos. A continuación se demuestran los axiomas de Peano:

1<sup>o</sup>.  $0 \in \mathbb{N}$ .

2<sup>o</sup>.  $\bigwedge x \in \mathbb{N} s(x) \in \mathbb{N}$ .

3<sup>o</sup>.  $\bigwedge x \in \mathbb{N} s(x) \neq 0$ .

4<sup>o</sup>.  $\bigwedge x, y \in \mathbb{N} (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$ .

5<sup>o</sup>.  $\bigwedge Y (Y \subset \mathbb{N} \wedge 0 \in Y \wedge \bigwedge x \in Y s(x) \in Y \rightarrow Y = \mathbb{N})$ , que es de nuevo el principio de inducción completa.

\*En este contexto, la suma y el producto deben interpretarse de modo ordinal:  $n+m$  es contar  $m$  a partir de  $n$  y  $n \cdot m$  es contar  $m$  veces  $n$ , y tomar en cada caso como resultado el ordinal que se obtiene.

<sup>†</sup>Nótese que en la obtención de todos estos resultados no se ha usado el axioma de elección.

Nótese que lo anterior y lo que sigue, es válido para cualquier conjunto  $\mathbb{N}$  que cumpla los axiomas, es decir, que el conjunto  $\mathbb{N}$  depende de dos elecciones arbitrarias:  $0$  y  $s(x)$ .

Seguidamente, (op. cit., p. 247), se definen las *secciones iniciales*  $I_n = \{0, 1, \dots, n\}$  y se demuestra por inducción que cada  $n \in \mathbb{N}$  tiene una única *sección inicial*  $I_n$ . De ahí se deduce que  $I_0 = \{0\}$  y que  $\bigwedge n \in \mathbb{N} I_{s(n)} = I_n \cup \{s(n)\}$ . Se demuestra que si  $m \in I_n$  es  $I_m \subset I_n$  y también que si  $m \in \mathbb{N} \wedge m \notin I_n$  es  $I_n \subset I_m$ .

Con esto se define la relación  $m \leq n \leftrightarrow I_m \subset I_n$ , que es un orden total y un buen orden en  $\mathbb{N}$ . Además, teniendo en cuenta que  $I_{s(n)} = I_n \cup \{s(n)\}$ , se demuestra que  $s(n)$  es *el siguiente* de  $n$  en el sentido del orden\*, es decir, que es el menor número natural mayor que  $n$ .

A continuación, se asigna  $\emptyset$  a  $0$ , se elige  $\tilde{s}(n) = n \cup \{n\}$  y se demuestra que tales elecciones están bien definidas. A continuación, se demuestra que existe un conjunto  $\tilde{\mathbb{N}}$ , inductivo para las elecciones realizadas, que cumple los axiomas de Peano, y que coincide con el conjunto  $\mathbb{N}$  definido inicialmente. En concreto:

$$\tilde{\mathbb{N}} \equiv \mathbb{N} \equiv X | (X \text{ es inductivo} \wedge \bigwedge Y (Y \text{ inductivo} \rightarrow X \subset Y))$$

Con ello, los *números naturales* son los elementos de este conjunto y se construyen recursivamente de la forma<sup>†</sup>:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \emptyset \\ 1 &\equiv s(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\} \\ 2 &\equiv s(1) = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} \\ 3 &\equiv s(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Finalmente, (op. cit., p. 250), usando la inducción se definen en  $\mathbb{N}$  la suma y el producto de números ordinales ordinales, que cumplen los axiomas conocidos: conmutatividad y asociatividad de la suma y el producto, distributividad del producto respecto de la suma, etcétera.

Para referirnos a estas construcciones, diremos que la primera se ha realizado por *extensión*, ya que el conjunto  $\mathbb{N}$  se construye caracterizando sus elementos, mientras que la segunda se ha realizado por *comprensión*, ya que los elementos de  $\mathbb{N}$  se obtienen a partir de la caracterización del propio conjunto mediante la propiedad que lo define.

\*Esto es, si  $m \in \mathbb{N} \wedge n \leq m \leq s(n)$  es  $m = n \vee m = s(n)$ .

†Aquí, es  $\tilde{s} \equiv s$

### Primera construcción cardinal

El estudio de los cardinales infinitos, Ivorra (2008), presenta mayor complejidad que el de los ordinales y requiere, de un modo u otro, el uso de todos los axiomas de la teoría de conjuntos. La intervención del *axioma de elección* simplifica notablemente este estudio y hace posible el uso de enunciados equivalentes, por ejemplo el teorema de buena ordenación o el lema de Zorn, con aplicaciones fundamentales en matemáticas.

Siguiendo la referencia citada, (Op. cit. p. 341 y ss.), dos conjuntos son *equipotentes*,  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ , si y solo si existe una biyección  $f : X \rightarrow Y$ ; se dirá que  $X$  es *minuspotente* a  $Y$ ,  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ , si existe una inyección  $f : X \rightarrow Y$ ; y se dirá que  $X$  es *estrictamente minuspotente* a  $Y$ ,  $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$ , si es  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$  y no es  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ .

Nótese que las anteriores “igualdades” y “desigualdades” son notaciones o abreviaturas de las definiciones correspondientes y no son realmente igualdades o desigualdades entre términos bien definidos.

Los resultados siguientes ponen de manifiesto que las definiciones dadas contienen una noción razonable de “número de elementos” de un conjunto. Si  $X, Y, Z$  y  $W$  son conjuntos cualesquiera, se cumple:

- a)  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}}$
- b)  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$  si y solo si  $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X}}$
- c) Si  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$  e  $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Z}}$ , entonces es  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Z}}$
- d)  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{X}}$
- e) Si  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$  e  $\overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$ , entonces es  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$
- f) Si  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$  e  $\overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{Z}}$ , entonces es  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Z}}$
- g) Si  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$  y  $\overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{W}}$ , entonces es  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Z}}$  si y solo si  $\overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{W}}$

Todos ellos son consecuencia directa de los resultados básicos sobre aplicaciones entre conjuntos excepto el enunciado e), que es llamado *teorema de Cantor–Bernstein*.

El teorema afirma que si existen aplicaciones inyectivas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  entonces existe una aplicación biyectiva  $h : X \rightarrow Y$ . La construcción de  $h$  a partir de  $f$  y  $g$  no es evidente ni inmediata. Cantor demostró este enunciado para conjuntos bien ordenados, luego su prueba sólo vale en general si se acepta el axioma de elección. La primera demostración válida, sin recurrir a ese axioma, la publicó Bernstein en 1897.

Con el siguiente teorema, Cantor demostró la existencia de infinitas potencias infinitas: Si  $X$  es un conjunto,  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}X}}$  ( $\mathcal{P}X$  denota el conjunto de las partes de  $X$ ).

Nótese que hasta ahora se ha definido lo que significa que un conjunto tenga mayor, menor o igual “número de elementos” que otro, pero no se ha definido lo que debe entenderse concretamente por el *número de elementos de un conjunto*. Más explícitamente, es necesario reinterpretar las fórmulas  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$  como auténticas igualdades, de modo que podamos leerlas realmente como “el cardinal de  $X$  es igual al cardinal de  $Y$ ”, para lo cual se ha de asociar a todo conjunto  $X$  un cardinal  $\overline{\overline{X}}$ , de modo que dos conjuntos tengan el mismo cardinal si y sólo si son equipotentes.

Es teóricamente posible definir el cardinal de un conjunto  $x$  como la clase de todos los conjunto equipotentes a  $x$ , sin embargo esta definición no es conveniente, ya que si así se hiciera, los cardinales serían clases propias en el sistema axiomático y no podría hablarse de la clase de todos los cardinales\*.

Es posible evitar este problema en cualquiera de las dos situaciones siguientes: sin utilizar el axioma de elección, o bien utilizándolo. Veámos ambas posibilidades.

La primera posibilidad requiere los axiomas de partes y de regularidad. En este caso, Ivorra (2008, p. 337), resulta que todo conjunto puede pensarse como construido a partir de  $\emptyset$  en una cantidad transfinita de pasos, de modo que la clase universal (de todos los conjuntos) queda estructurada según la jerarquía transfinita creciente de conjuntos dada por:

$$V_0 = \emptyset \wedge \bigwedge \alpha V_{\alpha+1} = \mathcal{P}V_\alpha \wedge \bigwedge \lambda V_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta \wedge V = \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$$

Además, todo conjunto  $x$  tiene definido un rango, que es el menor ordinal  $\alpha$  tal que  $x \subset V_\alpha$  o, equivalentemente,  $x \in V_{\alpha+1}$ . El rango de un conjunto es una medida de su complejidad o, equivalentemente, de la cantidad de pasos que deben darse para construirlo a partir del  $\emptyset$ . Véase también Ferreirós (2000, p. 375).

Con ello, se define el *cardinal* de un conjunto  $x$  como el conjunto de todos los conjuntos equipotentes a  $x$  de *rango mínimo*. Es decir, que se toma el mínimo ordinal  $\alpha$  tal que existe  $y \in V_\alpha$  con  $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$  y se define el cardinal de  $x$ , que se representa por  $\overline{\overline{x}}$  por abuso de

\*Las clases de clases están prohibidas por el sistema axiomático, so pena de reproducir las antinomias de Russel.

notación, como el conjunto de todos los  $y \in V_\alpha$  equipotentes a  $x$  (que es un conjunto por serlo  $V_\alpha$ ). Esto es:

$$\overline{\overline{x}} = \{y \mid \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \wedge \neg \bigvee z (\text{rang } z < \text{rang } y \wedge \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{z}})\}$$

Así pues, se define un *cardinal* como un conjunto  $\mathfrak{p}$  que cumple:

- $\bigwedge xy \in \mathfrak{p} (\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$
- $\bigvee \alpha \bigwedge x \in \mathfrak{p} \text{rang } x = \alpha$
- $\bigwedge xy (x \in \mathfrak{p} \wedge \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \wedge \text{rang } x = \text{rang } y \rightarrow y \in \mathfrak{p})$
- $\neg \bigvee xy (y \in \mathfrak{p} \wedge \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \wedge \text{rang } x < \text{rang } y)$

Se llamará  $\mathfrak{C}$  a la clase de todos los cardinales. De lo anterior se deducen inmediatamente los resultados:

- Para cada conjunto  $x$  se ha definido  $\overline{\overline{x}} \in \mathfrak{C}$  y para todo  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}$  existe un conjunto  $x$  tal que  $\overline{\overline{x}} = \mathfrak{p}$ .
- Dados dos conjuntos  $x$  e  $y$  se cumple  $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$  si y solo si  $x$  e  $y$  son equipotentes.

Ahora, las abreviaturas del tipo  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ , escritas al comienzo de esta construcción, son auténticas igualdades y pueden utilizarse como tales. Lo mismo sucede con las desigualdades, para ello se define

$$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q} \text{ si } \mathfrak{p} = \overline{\overline{x}} \wedge \mathfrak{q} = \overline{\overline{y}} \wedge x \text{ es minuspotente a } y$$

Es claro, por los resultados de la página 53, que la definición anterior no depende de los representantes  $x$  e  $y$  elegidos y, además, que para cualesquiera conjuntos  $x$  e  $y$ , se cumple

$$\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}} \text{ si y solo si } x \text{ es minuspotente a } y,$$

por lo que las fórmulas  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$  anteriores, son ahora desigualdades auténticas entre cardinales.

Dichos resultados muestran también que la relación que acaba de definirse es una relación de orden en la clase  $\mathfrak{C}$  de todos los cardinales.

En consecuencia, se define *conjunto finito* como cualquier conjunto equipotente a un número natural (en el sentido ordinal). Una clase es *infinita* si no es finita.

También es claro que si  $n \in \mathbb{N} = \omega$  es  $\overline{\overline{n}} = n$ , es decir que el cardinal de un conjunto finito es un número natural en el sentido de su definición ordinal. Lo que pone de manifiesto la equivalencia entre cardinales y ordinales finitos.

Nótese, sin embargo, que el aspecto ordinal es más básico que el cardinal en las axiomáticas ZF y NBG, ya que, como se ha visto, la

construcción de los cardinales requiere como condición previa la de los ordinales.

Si, como segunda posibilidad, se admite el axioma de elección, se cumple el teorema de buena ordenación, por lo que todo conjunto es equipotente a un ordinal, lo cual permite definir el cardinal de un conjunto como el mínimo ordinal equipotente a él. Se define la clase de los *cardinales de von Neumann*\*:

$$K = \{\alpha \in \Omega \mid \neg \bigvee \beta < \alpha \ \overline{\beta} = \overline{\alpha}\}$$

Para cada conjunto  $x$  que admite un buen orden el menor ordinal equipotente a  $x$  no puede ser equipotente a ningún ordinal anterior, luego es un cardinal de von Neumann. Por tanto, si se define

$$|x| = \kappa \mid (\kappa \in K \wedge \overline{\kappa} = \overline{x})$$

para cada conjunto  $x$  que admite un buen orden es  $|x| \in K$  y si  $x$  e  $y$  admiten un buen orden es  $|x| = |y|$  si y solo si  $x$  e  $y$  son equipotentes. También es obvio que dos cardinales de von Neumann distintos no pueden ser equipotentes (si lo fuesen uno de ellos sería equipotente a un ordinal anterior, luego no sería un cardinal).

Es decir, que si se acepta el axioma de elección, *todo conjunto tiene asociado un cardinal de von Neumann*, por lo que se podría olvidar  $\mathfrak{C}$  y trabajar exclusivamente en  $K$ , teniendo en cuenta además que no sería necesario asumir el axioma de partes ni el de regularidad.

Ahora es sencillo demostrar que todo número natural es un cardinal, es decir,  $\omega \in K$  y el conjunto de los números naturales también lo es ( $\omega \in K$ ).

Dado un ordinal  $\alpha$ , se define el *cardinal siguiente* a  $\alpha$  como el *mínimo* cardinal mayor que  $\alpha$  (en el sentido de la relación de orden entre ordinales) y se representará por  $\alpha^+$ .

Como es sabido,  $\bigwedge n \in \omega \ n^+ = n + 1$  (suma ordinal), resultado que deja de cumplirse si  $\alpha$  es infinito.

*Ello permite dar una caracterización cardinal de los números naturales como los cardinales de von Neumann que cumplen la relación anterior, y del propio conjunto  $\mathbb{N}$  como el conjunto de todos ellos.*

La suma y el producto de cardinales se apoya en el siguiente hecho, (Ivorra, 2008): si  $X, Y, X', Y'$  son conjuntos cualesquiera y  $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X'}}$ ,  $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Y'}}$  entonces  $\overline{\overline{X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}}} = \overline{\overline{X' \times \{0\} \cup Y' \times \{1\}}}$ ,  $\overline{\overline{X \times Y \times}} = \overline{\overline{X' \times Y'}}$ .

\*Se escribirá  $\overline{\alpha}$  en lugar de  $\overline{\overline{\alpha}}$  cuando  $\alpha$  sea un ordinal.



Con lo que dados dos cardinales  $\mathfrak{p} = \overline{\overline{X}}$ ,  $\mathfrak{q} = \overline{\overline{Y}}$ , se definen

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \overline{\overline{X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}}}, \quad \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \overline{\overline{X \times Y}}$$

Operaciones que no dependen de los conjuntos  $X$  e  $Y$  elegidos. Además, es sencillo probar:

- a) Si  $X$  e  $Y$  son conjuntos disjuntos, es  $\overline{\overline{X \cup Y}} = \overline{\overline{X}} + \overline{\overline{Y}}$   
 b) Si  $X$  e  $Y$  son conjuntos cualesquiera, es  $\overline{\overline{X \times Y}} = \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}}$

Así como las siguientes propiedades básicas de la suma y el producto de cardinales:

- a)  $(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) + \mathfrak{r} = \mathfrak{p} + (\mathfrak{q} + \mathfrak{r})$   
 b)  $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}$   
 c)  $\mathfrak{p} + 0 = \mathfrak{p}$   
 d)  $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})\mathfrak{r} = \mathfrak{p}(\mathfrak{q}\mathfrak{r})$   
 e)  $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$   
 f)  $\mathfrak{p} \cdot 0 = 0 \wedge \mathfrak{p} \cdot 1 = \mathfrak{p}$   
 g)  $\mathfrak{p}(\mathfrak{q} + \mathfrak{r}) = \mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\mathfrak{r}$

para todos los cardinales  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{q}$ ,  $\mathfrak{r}$ .

Finalmente, tomaremos en consideración la construcción de Bourbaki.

Esta construcción se dirige de modo fundamental a las necesidades estrictas de la práctica de las matemáticas y no utiliza explícitamente los ordinales aunque lo hace implícitamente. Pensamos que ello se debe, no solo a razones de economía conceptual, sino a una mejor adaptación de la aritmética cardinal a las estructuras sobre las que Bourbaki construye las matemáticas\*.

Sin embargo, a pesar de que Bourbaki considera las estructuras ordinales como una de las tres *estructuras madre o básicas* de la Matemáticas<sup>†</sup>, su construcción basada en los cardinales ha eclipsado la construcción e interpretación más sencilla y más “natural” de los números naturales, que es la ordinal.

Los fundamentos de la segunda construcción cardinal y, en general, de la obra de Bourbaki *Éléments de Mathématique*, están formados por dos pilares básicos: el cálculo restringido de predicados, completado con algunas innovaciones técnicas debidas a David Hilbert, y la teoría de conjuntos. Elección que apoya la opinión de Bernays en el sentido de que el fundamento adecuado para la matemática pura es una combinación de la lógica simbólica y

\*Nótese, por ejemplo, la conmutatividad de la suma y del producto cardinales frente a la no conmutatividad de las respectivas operaciones ordinales.

<sup>†</sup>The Architecture of Mathematics, Bourbaki (1950, pp. 226-227)

de la teoría axiomática de conjuntos, (Kneebone, 1963, p. 303). Según este autor,

“Today there are in existence two major systems of mathematical logic, differing somewhat in the manner of their presentation though closely allied in ultimate purpose, in which the restricted calculus of predicates is supplemented by the abstract theory of sets in the construction of what is believed to be an adequate logical foundation for a comprehensive system of the whole of pure mathematics. One of these logical instruments is the system of Bernays . . . and the other is that of Bourbaki.”. Kneebone (1963, p. 118).

El cálculo lógico presentado en Bourbaki (1970) constituye una simplificación sustancial del que presentan Hilbert y Bernays en la obra *Grundlagen der Mathematik*, recurriendo a un uso intensivo de las innovaciones de Hilbert y colaboradores, y en especial del símbolo  $\tau$ . Se eliminan los cuantificadores como tales y se redefinen usando este símbolo, mediante el cual se incorpora también el axioma de elección a su teoría de conjuntos sin necesidad de incorporarlo por separado.

El significado intuitivo de  $\tau_x(B)$  es el siguiente\*. Considérese la afirmación  $B$  como descriptiva de una propiedad del objeto  $x$ ; entonces, si existe un objeto que posee la propiedad en cuestión,  $\tau_x(B)$  representa un objeto privilegiado que posee dicha propiedad; si no existe tal objeto,  $\tau_x(B)$  representa un objeto del cual no puede decirse nada.

La teoría de conjuntos, que se desarrolla en los tres capítulos siguientes de dicha obra, incorpora una axiomática propia que contiene, además del axioma ya citado, la axiomática  $ZF^\dagger$  (Kneebone, 1963, p. 203) y los axiomas de infinitud y de partes, entre otros.

### Segunda construcción cardinal (Bourbaki)

Esta construcción comienza definiendo la relación de equipotencia: dos conjuntos  $X$  e  $Y$  son *equipotentes* si existe una biyección de  $X$  en  $Y$ , relación que se denota mediante  $\text{Eq}(X, Y)$ .

A continuación se deduce que si  $X$  e  $Y$  son equipotentes, el esquema axiomático  $S7$  (Bourbaki, 1970, EI, p. 38) proporciona el siguiente axioma

$$((\forall Z)(\text{Eq}(X, Z) \Leftrightarrow \text{Eq}(Y, Z))) \Rightarrow (\tau_Z(\text{Eq}(X, Z)) = \tau_Z(\text{Eq}(Y, Z)))$$

\*Bourbaki (1970, EI., p. 18)

†La axiomática de Bourbaki se refiere exclusivamente a conjuntos, sin hacer referencia a clases. Es, por tanto, alternativa a otras axiomáticas como NBG o Morse–Kelly

Por tanto, si  $X$  e  $Y$  son equipotentes, se tiene

$$\tau_Z(\text{Eq}(X, Z)) = \tau_Z(\text{Eq}(Y, Z))$$

Al conjunto  $\tau_Z(\text{Eq}(X, Z))$  se le llama *cardinal\** de  $X$  (o *potencia* de  $X$ ) y se denota  $\text{Card}(X)$ .

Por tanto, se dice que un objeto matemático  $x$  es un *número cardinal* si existe un conjunto  $X$  tal que  $x = \text{Card}(X)$ .

Como  $\text{Eq}(X, X)$  es verdadera,  $\text{Card}(X)$  es equipotente a  $X$  y se demuestra, (Bourbaki, 1970, EI, p. 33), esquema *S5*), que para que dos conjuntos  $X$  e  $Y$  sean equipotentes, es necesario y suficiente que sus cardinales sean iguales.

Con ello, se denotan:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Card}(\emptyset) \\ 1 &= \text{Card}(\{\emptyset\}) \\ 2 &= \text{Card}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seguidamente se define la relación  $\mathbf{R}(\mathfrak{r}, \mathfrak{n})$ :

« $\mathfrak{r}$  y  $\mathfrak{n}$  son dos cardinales y  $\mathfrak{r}$  es equipotente a una parte de  $\mathfrak{n}$ »

y se demuestra<sup>†</sup> que **es un buen orden para todo conjunto  $E$  de cardinales.**

Se demuestra también que dados dos conjuntos, uno es equipotente a una parte del otro, y si ambos son equipotentes a una parte del otro, entonces son equipotentes. Resultados que son equivalentes al teorema de Cantor–Bernstein.

A continuación, se definen la suma y el producto de cardinales, respectivamente, como el cardinal de la unión disjunta y del producto cartesiano de conjuntos, y se demuestran las propiedades básicas de ambas operaciones, (véase op. cit., pág. 57).

Con ello se demuestra que la anterior relación de orden admite una interpretación “aritmética”: dados dos cardinales  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$ , para que  $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$  es condición necesaria y suficiente que exista un cardinal  $\mathfrak{c}$ , no único en general<sup>‡</sup>, tal que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ .

\*Si existiese un conjunto  $\Omega$  cuyos elementos fuesen todos los conjuntos, bastaría tomar como  $\text{Card}(X)$  la clase de  $X$  respecto de la relación de equivalencia  $\text{Eq}(X, Y)$ , (Godement, 1974, p. 99). Tal conjunto  $\Omega$  no existe, de manera que no es posible considerar  $\text{Eq}(X, Y)$  como relación de equivalencia y no es posible definir de este modo  $\text{Card}(X)$ .

<sup>†</sup>La demostración recurre al teorema de Zermelo, relativo a que todo conjunto admite un buen orden, que como sabemos es equivalente al axioma de elección en NBG. La demostración recurre también a los “segmentos de los conjuntos bien ordenados”, concepto que se corresponde con los ordinales en NBG.

<sup>‡</sup>Existen múltiples cardinales  $\mathfrak{c}$ , en general, tales que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ , por lo que no es posible definir una diferencia  $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$  de cardinales, (Bourbaki, 1970, E3, p. 37).

Se demuestra también el teorema de Cantor (para todo cardinal  $\alpha$ , es  $2^\alpha > \alpha$ ) y que no existe el conjunto de todos los cardinales.

Se definen los cardinales finitos y los números naturales de la siguiente forma: un cardinal  $\alpha$  es *finito* si  $\alpha \neq \alpha + 1$ ; un cardinal finito se llama también *entero natural*. Se definen los *conjuntos finitos* como aquellos conjuntos cuyos cardinales son finitos, en cuyo caso, a su cardinal se le llama *número de elementos* del conjunto. En particular  $0 \neq 1$ , por lo que 0 es un entero natural; de modo inmediato se deduce que 1 y 2 también lo son, al igual que  $2 + 1$  y  $(2 + 1) + 1$ , que se denotan 3 y 4 respectivamente, etcétera.

Seguidamente se demuestran varias proposiciones equivalentes a los axiomas de Peano y el principio de inducción completa que se enuncia de la siguiente manera, acorde con sus sistemas lógico y axiomático:

«Sea  $R(n)$  una relación en una teoría  $\mathfrak{T}$  (no siendo  $n$  una constante de la teoría). Se supone que la relación

$$R(0) \text{ y } (\forall n) ((n \text{ es un entero y } R(n)) \Rightarrow R(n + 1))$$

sea un teorema de  $\mathfrak{T}$ . En estas condiciones, la relación

$$(\forall n) ((n \text{ es un entero}) \Rightarrow R(n))$$

es un teorema de  $\mathfrak{T}$ .»

Con ello se demuestra que todo conjunto finito totalmente ordenado está bien ordenado y admite un elemento maximal (lo que viene a decir que es un ordinal finito, sin definir este concepto explícitamente), que las operaciones con números naturales están bien definidas y que se cumplen las propiedades aritméticas y ordinales usuales, incluyendo la interpretación aritmética de la relación de orden.

Por otra parte, se definen los conjuntos infinitos como aquellos que no son finitos, es decir como aquellos para los que se cumple la relación  $\alpha = \alpha + 1$ , siendo  $\alpha$  su cardinal.

Finalmente, admitiendo el axioma de infinitud, se demuestra que los enteros naturales forman un conjunto infinito, denotado por  $\mathbb{N}$ , utilizando la relación de orden definida, (Bourbaki, 1970, E3, p. 45), con lo que resultan equivalentes el axioma de infinitud y la existencia del conjunto  $\mathbb{N}$ .

Como puede observarse, son claras las diferencias epistemológicas existentes entre esta última construcción y las anteriores; diferencias que pudieran tener su origen, como argumenta Mathias (2004), en la adscripción formalista y la postura estructuralista y en la intención de reducir al mínimo imprescindible el papel de la lógica y de la teoría de conjuntos en la fundamentación

de la Matemática. Hay que enmarcarlas, también, en las diferentes posturas epistémicas que, desde un principio, existieron en el seno de la corriente logicista y que se refieren precisamente al papel que deben desempeñar la lógica y la teoría de conjuntos en los fundamentos del Análisis Matemático y, en general, de toda la Matemática.

### 2.2.2 Corrientes históricas

En relación con este trabajo y desde el punto de vista del desarrollo histórico, tomaremos en consideración las siguientes líneas de pensamiento en epistemología del número natural: el convencionalismo y el logicismo.

#### 2.2.2.1 El convencionalismo

Según Helmholtz (1887), (citado en en Brunshvicg (1945, p. 398)),

“Podemos considerar los números como una serie de signos arbitrarios elegidos, pero a los cuales le aplicamos un modo determinado de sucesión a título de sucesión regular o, conforme a la expresión habitual, de sucesión natural. El orden de los signos numéricos es tan convencional como el orden de las letras en las diversas lenguas; orden que, una vez adoptado y empleado de una manera constante, toma igualmente una apariencia normal y regular”.

“Se evita la noción de numero cardinal y la idea de unidad. La serie ordinal basta para constituir el número”.

Para los convencionalistas, la adición entra en el marco de la enumeración puramente ordinal, por ejemplo por  $a + b$  se designa el termino de la serie al que se llega si, partiendo de  $a$ , se cuenta uno para  $a + 1$ , dos para  $a + 2$ , ..., hasta que se hayan contado  $b$  términos. Según Brunshvicg (op. cit.), Helmholtz fundamenta la teoría de las operaciones aritméticas sin recurrir a la intuición, sin tener en cuenta las teorías lógicas de las construcciones numéricas y sin hacer alusión a la idea de colección de unidades homogéneas.

Según estos planteamientos, podemos hacer corresponder un signo de nuestra serie ordinal a cada uno de los términos de una colección. Siempre que no haya laguna ni repetición obtendremos el mismo número, sea cual sea el orden que se le asigne a los términos de la colección. El orden de los signos numéricos se puede considerar como una serie de signos arbitrarios con un orden tan convencional como el de las letras en los abecedarios de las distintas lenguas. La acción de contar es la base de todos los cálculos (Ortiz, 1997).

Para los convencionalistas, en lo que coinciden Fernández y Ortiz (2008), el número no es solo cantidad o medida de una magnitud (aspecto cardinal), sino también repetición o combinación (aspecto ordinal) (Helmholtz, 1887). La repetición, por ejemplo, es temporal y secuencial; podemos hablar de momentos distintos, de cantidades de tiempo y de frecuencias, de tal manera que, aunque sean idénticas, podemos diferenciar en el tiempo, por ejemplo, las oscilaciones de un péndulo y contarlas; la repetición nos lleva a contar, las unidades son idénticas y solo hay diferencia en cuanto a su distribución temporal. Aquí podemos decir que la repetición y la acción de contar están en íntima relación. Así mismo, en lo que se refiere a la combinación, no hay duda de que las posibles combinaciones de ciertos dígitos representan un número.

Helmholtz (Op. cit.) alude a un parentesco genético directo entre el número y el tiempo, idea compartida por otros grandes pensadores como Kant o Brouwer\*:

“Contar es un procedimiento que descansa en nuestra facultad de recordar el orden de sucesión de nuestros estados de conciencia”. (Cita referenciada en Piaget (1987, p. 76)).

Basta entonces “numerar” los términos de esta serie mediante un procedimiento verbal convencional para obtener una sucesión de “números de orden” que permiten definir la suma ordinal por su simple sucesión y la igualdad de dos números ordinales por su posición.

La importancia de la consideración epistemológica del convencionalismo en nuestra investigación es relevante por una razón obvia: la acción de contar es la vía para relacionar una serie de términos verbales con otra serie de objetos tangibles y concretos sobre los cuales los niños pueden actuar, deducir relaciones ordinales y establecer correspondencias ordenadas.

En relación con la percepción y la estimación, se podrá apreciar el “tamaño” de las colecciones por la longitud y por la duración del conteo, (González, 1998).

Por lo tanto, hay una relación clara entre los supuestos y principios del marco epistemológico convencionalista y el conocimiento lógico que el niño debe imponer a los objetos para inferir que uno es anterior al otro o viceversa.

---

\*Téngase en cuenta la importancia que desde la antigüedad tuvo la medida del tiempo en Astronomía, en la realización de calendarios y en relación con los ciclos agrícolas y naturales.

### 2.2.2.2 El logicismo. La polémica entre el cardinal y el ordinal

Esta línea epistemológica tiene interés en nuestro trabajo ya que en su seno se desarrollaron los conceptos de relación de orden así como los conceptos asociados: primer elemento, último elemento, siguiente inmediato, etcétera.

Como parte del estudio sobre los fundamentos de la matemática llevado a cabo por los matemáticos y los lógicos más importantes de finales del siglo XIX y principios del siglo XX, nos detendremos en el problema fundamental que consiste en establecer y determinar qué es la secuencia numérica. Revisaremos para ello las concepciones de Dedekind, Peano y Russell, cuya contribución al desarrollo del concepto moderno de número natural fué especialmente relevante.

En relación con esta línea de pensamiento y con el tratamiento que hace de la secuencia numérica, presentamos en la figura 2.1 un cuadro explicativo sobre la secuencia numérica desde el punto de vista del logicismo, tomado de Fernández (2001).

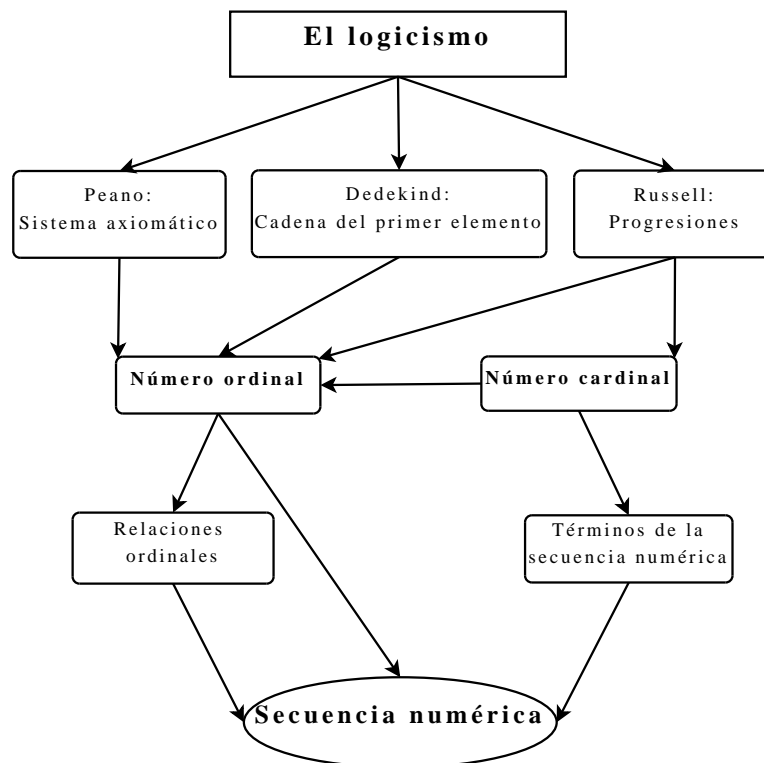


Fig. 2.1. La secuencia numérica para el logicismo.

En el seno del logicismo se distinguen dos líneas de pensamiento diferenciadas (Kneebone, 1963, p. 330): la primera, representada por Dedekind y Peano, recurre a la lógica para mejorar el nivel de claridad y rigor en las matemáticas y en sus fundamentos, sin pretender una justificación específica de las matemáticas como un todo; la segunda, representada por Frege y Russell, pretende la reducción sin concesiones de la matemática a la lógica.

En consecuencia, ni Dedekind ni Peano están interesados en definir la naturaleza de los términos numéricos, no ocurriendo lo mismo con Russell.

Tanto Russell como Peano y Dedekind, usando diferentes métodos, identifican la secuencia numérica (los números naturales) con una progresión generada por una relación biunívoca, véase anexo I en Fernandez (2001). En lo único que difieren es en la naturaleza de los términos que se ponen en relación.

En este sentido, para Peano y Dedekind ésta no es una cuestión de importancia intrínseca, no ocurriendo lo mismo para Russell, quien insiste en definir los términos que componen una progresión y, en particular, la progresión de los números naturales mediante los números cardinales.

Por su parte, Dedekind empieza su construcción de los números naturales definiendo los números ordinales:

“Si en la contemplación de un sistema singularmente infinito  $N$  ordenado por una representación  $\varphi$  no tenemos en cuenta por completo la naturaleza peculiar de sus elementos, reteniendo solamente la posibilidad de distinguirlos, y **considerando solamente las relaciones en que se hallan colocados por la representación ordenatriz  $\varphi$**  entonces esos elementos se llaman números naturales o números ordinales o simplemente número”. Dedekind (1887), § 73, cita referenciada en Russell (1982, p. 290).

La definición de Dedekind de sistema singularmente infinito se recoge en el anexo 3.1 de Fernández (2001), así como en la segunda construcción ordinal anteriormente expuesta\*.

La crítica de Russell a esa construcción, quien la considera por otro lado lógicamente correcta, se basa fundamentalmente en el hecho de la no definición explícita de los términos que componen el sistema:

“Los ordinales de Dedekind no son elementos. Si no deben ser nada en absoluto deben ser intrínsecamente algo deben diferir de otras entidades como los puntos de los instantes o los colores de los sonidos”.

“Una definición formulada de ese modo indica siempre alguna clase de

\*Véase también Ferreirós (2000)



entidades que tiene una naturaleza genuina propia y que no depende lógicamente del modo en que han sido definidas”.

“Debe recordarse que con la teoría lógica de los cardinales se pueden demostrar tanto los Axiomas de Peano como los de Dedekind”. Russell (1982, p. 290).

Por otra parte, la teoría de Peano puede ser considerada como una axiomatización de la noción de progresión de Russell. Los conceptos indefinidos de Peano son “cero”, “entero finito” y “sucesor de”, entendiendo por éste último el concepto de “siguiente inmediato”. Russell (1982).

La primera teoría de Peano apareció en la edición de 1899 de *Formulaire de Mathématiques*, donde probó también dos resultados importantes:

- 1<sup>o</sup>. Hay interpretaciones de los tres conceptos indefinidos, que hacen verdaderos los cinco axiomas (el sistema de Peano fundamenta la Aritmética).
- 2<sup>o</sup>. Los cinco axiomas son necesarios para elaborar o hacer posible la aritmética. Peano y Padoa lo demostraron por muestreo, cogiendo grupos de cuatro axiomas elegidos entre los cinco propuestos.

Peano reconoce que cualquier colección de términos que cumpla las condiciones:

- 1<sup>a</sup>. Tiene un primer elemento.
- 2<sup>a</sup>. No tiene último término.
- 3<sup>a</sup>. No repite término alguno.
- 4<sup>a</sup>. Es tal que cualquier término puede ser alcanzado desde el primero en un número finito de pasos.

haría verdaderos todos los axiomas. Un sistema constituido por una colección de términos que cumple estas propiedades es lo que llamaremos *progresión*.

El resultado general de la teoría de Peano es el mismo que la de Dedekind, primer matemático moderno que propuso una teoría completa de las relaciones numéricas en “Was sind und was sollen die Zahlen?” en 1888 (Ferreirós, 2007). Este autor identificó los números naturales con los números ordinales, definiéndolos como una abstracción de términos a partir de lo que todas las progresiones tienen en común: “Estos elementos se llaman números naturales o números ordinales, o simplemente números”. Dedekind (1887).

Históricamente existen objeciones contra la caracterización precedente de los números naturales, la más popular fue dada por Russell, para el que cualquier progresión puede ser tomada como base de la Matemática, es decir, es posible dar el nombre “0” a su primer término, el nombre “numero” a todo

término de la serie y el nombre “sucesor” al próximo en la progresión. Cada progresión diferente dará una interpretación diferente de todas las matemáticas. En el sistema de Peano no hay nada que nos permita distinguir entre estas interpretaciones diferentes, es decir, que la aritmética de Peano está determinada salvo isomorfismos.

La teoría de las progresiones de Russell está estrechamente ligada a la Aritmética de Peano. Tratar la secuencia numérica como una progresión supone que todos los términos están entrelazados por relaciones asimétricas transitivas obtenidas a partir de relaciones asimétricas biunívocas, véanse los Anéxos al capítulo 3 en Fernández (2001), y todo estaría fundamentado en términos de “posición relativa”, sin entrar a formar parte del sistema la noción de cantidad o cardinalidad de los números; de esta forma, todo lo relacionado con la Aritmética finita se puede deducir de tales progresiones\*, siendo:

Suma

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \\ a + s_i(n) &= s_i(a + n) \end{aligned}$$

Multiplicación

$$\begin{aligned} a \times 0 &= 0 \\ a \times s_i(n) &= (a \times n) + a \end{aligned}$$

Y la sustracción, la división, los términos positivos y negativos y las fracciones racionales se deducen de lo anterior y se demuestra fácilmente que entre dos fracciones racionales cualesquiera existe siempre una tercera. Desde este punto es sencillo continuar con los irracionales y con los números reales.

Basándose en los planteamientos anteriores, algunos matemáticos como Helmholtz, Dedekind y Kronecker han mantenido que los números ordinales son previos a los cardinales. De hecho, en la teoría de Dedekind se sugiere que el número natural es, ante todo, una progresión.

Sin embargo, esta opinión no es compartida por Russell, quien defiende que se puede deducir toda la Aritmética natural a partir de los cardinales o de los ordinales sin necesidad de mencionar al otro, siendo las proposiciones simbólicamente idénticas aunque con distinto significado; además, considera, que no hay ninguna prioridad entre uno y otro, ya que ambos pueden definirse independientemente implicándose mutuamente.

---

\*Mediante  $s_i(n)$  se denota el sucesor o siguiente de un número natural  $n$  dado

De todos modos, Russell es defensor de que todas las propiedades ordinales o las de las series de números finitos sólo se emplean en la Matemática común, donde a través de un procedimiento de abstracción inductiva se llega a deducir toda la Aritmética. Para Russell los números forman una progresión, pero éstos no son los números que se usan en la vida diaria, donde el aspecto cardinal es el que los hace verdaderamente importantes.

Es claro, como se puede inferir de los apartados anteriores, que estas diferentes posiciones epistemológicas, lejos de resolverse, se han mantenido hasta la actualidad más allá de los importantes trabajos sobre los fundamentos de la Matemática realizados por Zermelo, Fraenkel, Skolem, Von Neumann, Gödel, Bernays, Hilbert y otros lógicos y matemáticos del siglo XX.

### 2.2.3 *El número natural en el marco de la epistemología genética*

En este apartado se verá el tratamiento del número natural y de sus aspectos ordinales en el contexto de la epistemología genética y, en particular, el papel del sujeto en la construcción psicogenética del número. Se revisará también la estructura de seriación piagetiana, por ser parte fundamental de dicha construcción y por su íntima conexión con las relaciones ordinales entre los números naturales.

#### 2.2.3.1 *La intervención del sujeto como centro de atención de la epistemología genética.*

Piaget admite la importancia de la inducción en la construcción de los números naturales, basándose en las consideraciones al respecto de Russell:

“definimos los números naturales como aquellos que se pueden establecer gracias a la inducción matemática, es decir, que poseen todas las propiedades inductivas”. (Cita referenciada por Piaget (1987, p. 272)).

Las posturas empiristas, aprioristas o convencionalistas sobre la naturaleza del número no satisfacen a Piaget:

“Desde las acciones iniciales, las relaciones entre el sujeto y los objetos son testimonio de un fenómeno mucho más complicado de lo que dejan suponer las interpretaciones empiristas, aprioristas o convencionalistas. La acción de enumerar no puede estar determinada únicamente por los objetos, puesto que ella los estructura en función de un esquema operatorio, que es asimilación de las cosas al doble acto de reunir y ordenar, y puesto que asimilar significa agregar a los objetos caracteres nuevos que no estaban incluidos anteriormente a la acción del sujeto: así la reunión elemental  $1 + 1 = 2$  añade a cada uno de los objetos contados como unidades 1, 1, la nueva propiedad de constituir un todo 2”. (Piaget, 1987, p. 128).

Para este autor, las acciones intencionadas que realiza el sujeto sobre los objetos son importantes en la evolución de los conocimientos aritméticos. Estas acciones presentan la doble vertiente de la adaptación cognitiva: asimilación y acomodación. Igualmente importante es captar en sus raíces las conexiones de las construcciones matemáticas nacientes con las estructuras operatorias del sujeto.

La epistemología genética considera que las ideas lógicas sirven de punto de partida eficaz para la construcción de los números por los sujetos. Igualmente, considera que la matemática es un sistema de construcciones que se apoya en sus inicios en la coordinación de las acciones y las operaciones del sujeto, las cuales avanzan mediante una sucesión de abstracciones reflexivas de niveles cada vez más elevados.

Piaget considera que el número es una síntesis de las dos estructuras lógicas de clasificación y de seriación. Desde el punto de vista de la clasificación, el aspecto cardinal queda desligado de las posibles diferencias entre los elementos del conjunto concreto para el que se determina. Y desde el punto de vista de la seriación, al realizar el recuento de los elementos de un conjunto todos se consideran iguales pero distinguibles.

En el proceso de determinar el valor cardinal por medio de la enumeración, debemos ordenar los objetos: contar primero un objeto, luego el siguiente, y así sucesivamente. Es evidente que el orden de la enumeración es irrelevante, a la hora de contar para determinar el cardinal, pero está claro que debe haber algún orden en el momento que se realiza el recuento. Es preciso contar los objetos en alguna forma de sucesión y tener en cuenta cuáles fueron enumerados en un momento determinado con el fin de no contar más de una vez un mismo objeto. Este proceso de ordenación no es una componente de clase, sino que se vincula con la estructura lógica de seriación.

De esta concepción del número se obtiene la interrelación existente entre los aspectos cardinal y ordinal:

“Los números finitos son necesariamente cardinales y ordinales al mismo tiempo, y ello resulta de la naturaleza misma del número, que es ser un sistema de clases y relaciones asimétricas fusionadas en un mismo todo operatorio. Los cardinales resultan así de una abstracción de la relación y esa abstracción no modifica la naturaleza de sus operaciones, puesto que todos los órdenes posibles que pueden atribuirse a  $n$  términos se resuelven en la misma suma cardinal  $n$ . Por su parte, los ordinales resultan de una abstracción de la clase, abstracción que es también legítima, y por esta misma razón el  $n$ -ésimo término finito corresponderá siempre a un conjunto cardinal  $n$ . Pero esta doble abstracción de ninguna manera impide

que el número entero finito siga siendo uno ni que implique la indisociable solidaridad de las totalidades y del orden”. Piaget y Szeminska (1982, p. 187).

Ambos aspectos del número natural, cardinal y ordinal, se desarrollan paralelamente:

“A la primera etapa de la seriación, que es pre-ordinal puesto que el niño no comprende espontáneamente el orden progresivo de los elementos, corresponde (tanto por el promedio de edad en que se efectúa como desde el punto de vista estructural) la primera etapa de la cardinación, o sea, aquella en que no hay ninguna conservación de las cantidades, y en que el niño cuando debe reproducir una hilera o una figura, no establece una correspondencia término a término sino que se limita a construir otra hilera de la misma longitud u otra de conjunto semejante globalmente a la primera”. Piaget y Szeminska (1982, p. 176).

La convergencia entre el aspecto cardinal y ordinal del número natural se establece atendiendo, fundamentalmente, a las dos cuestiones siguientes:

- 1<sup>a</sup>. La serie numérica (aspecto ordinal) se aplica a una colección de objetos para obtener el número cardinal. Para ello se establece una serie con los objetos de la colección y una correspondencia serial entre la secuencia numérica y la serie de los objetos de la que se quiere conocer el número de elementos que posee.
- 2<sup>a</sup>. La relación entre el cardinal y el ordinal se fundamenta en que cualquier serie está constituida por un encadenamiento de unidades de la forma:

$$1, (1 + 1), (1 + 1 + 1), \dots$$

lo cual implica que avanzar una posición (aspecto ordinal) supone aumentar en uno la cantidad (aspecto cardinal) y recíprocamente, al aumentar en uno la cantidad se avanza una posición en la enumeración o recuento.

En los estudios de Piaget se pone a prueba la capacidad del niño para distinguir la posición ordinal en una serie y los valores cardinales determinantes de esta posición y determinados por ella, así como la relación entre esos valores y esa posición.

En dichos estudios, según Fernández y Ortiz (2008), las correspondencias como instrumentos de construcción de conocimientos juegan un papel elaborador tanto en la conservación de las cantidades como en la construcción de los aspectos cardinales y ordinales del número natural.

Por otra parte, la recurrencia y la construcción ordinal del número natural deben estar implícitas en la acción de contar, la cual hace posible computar el cardinal de una colección y, a la vez, la posterior adquisición de las estrategias de cálculo aritmético. Por ello, la aparición espontánea del conteo en los sujetos como estrategia de resolución de tareas ordinales basadas en correspondencias seriales centradas en la transición entre los estados prenuméricos y numéricos del modelo evolutivo de Ortiz (1987, p.183) y la detección y evolución con la edad de dicha estrategia son metas importantes de esta investigación. No en vano la aparición y consolidación de dicha estrategia indica el comienzo de la construcción psicogenética del concepto de número natural.

En el cuadro de la figura 2.2 se recogen los diferentes aspectos de la construcción del número natural desde el enfoque de la epistemología genética y se destaca la situación del estudio de la secuencia numérica como parte de la seriación y el orden.

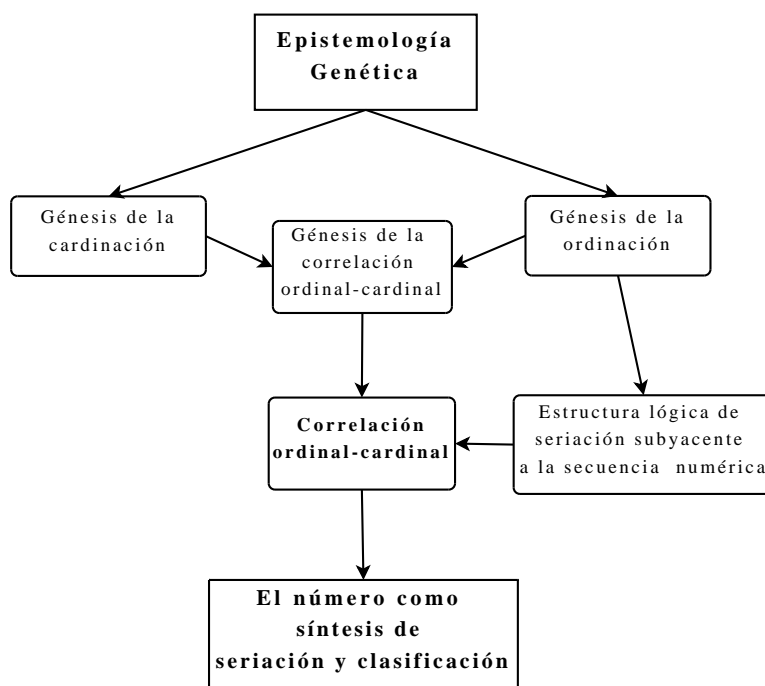


Fig. 2.2. El número natural. Síntesis piagetiana

Finalizamos esta sección poniendo de manifiesto que se han producido respuestas de otras líneas de investigación relevantes a la correlación evolutiva piagetiana de los aspectos cardinal y ordinal del número natural. Incluso hay

autores que admiten la aparición y evolución separada de tales aspectos en los sujetos (véase Dehaene (1997, p. 63), citado más adelante en la página 97). Trataremos, entre otras, esta cuestión en el capítulo siguiente.

### 2.2.3.2 La seriación piagetiana

La estructura lógica de seriación constituye un elemento del análisis genético, por lo que el tratamiento de la secuencia numérica, como serie en el sentido piagetiano, lleva consigo el estudio de las capacidades necesarias que el niño debe manifestar para llegar al establecimiento de las relaciones intrínsecas de un elemento de la secuencia con todos los demás.

Los conceptos teóricos por medio de los cuales se analiza la expresión de dichas capacidades son los siguientes:

- ❖ Anticipación.
- ❖ Primer elemento.
- ❖ Último elemento.
- ❖ Un elemento en una serie es diferente en un sentido al anterior y diferente en otro sentido al posterior.
- ❖ Alternancia.
- ❖ Seriación cíclica.
- ❖ Intercalar un elemento en una serie.
- ❖ Encadenamiento aditivo.
- ❖ Seriación operatoria.
- ❖ Sistematización de la serie.

En la figura 2.3, tomada de Fernández (2001), se esquematiza el paso de la seriación a la sistematización de la secuencia numérica. Se entenderá que las casillas que aparecen en las partes intermedias son capacidades seriales que el niño debe aplicar para llegar a la sistematización.

La expresión *sistematización de la secuencia* se traduce en la terminología piagetiana como alcanzar el éxito operatorio de la serie, lo que supone tener adquiridas (dominar) las capacidades seriales siguientes:

**La propiedad asimétrica de las relaciones de orden.** Se refiere a la comparación a través de la terminología ordinal: anterior, siguiente, predecesor, posterior, consecutivos, antes que, después que, anteriores, siguientes, etc. . . , de términos de la serie.

Se trata de distinguir las diferencias existentes entre los elementos de la serie, relativas a su posición ordinal en la misma.

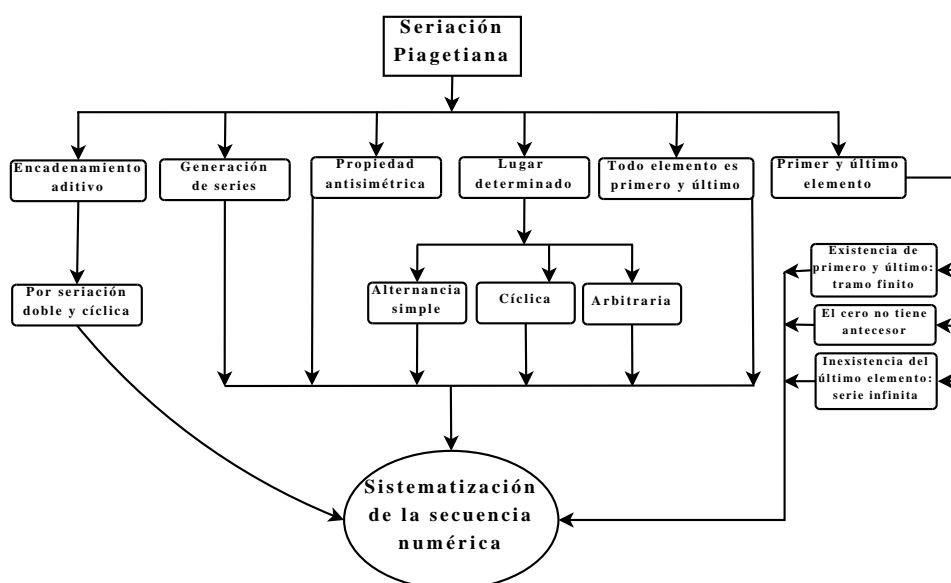


Fig. 2.3. Sistematización de la secuencia numérica mediante la seriación operatoria.

**El primer y el último elemento.** Mediante esta capacidad se manifiesta que en algunas series finitas existen primer y último elemento. El “primero es anterior a todos” y el “último es posterior a todos los demás”.

La asimilación de estos dos elementos distinguidos en cualquier serie finita ordenada linealmente, manifiesta el inicio del éxito operatorio, puesto que identificar dos términos  $a$  y  $b$  como primero y último exige:

- ◆ Advertir las diferencias existentes entre cada uno de esos elementos con todos los demás.
- ◆ Usar los términos de una serie en sentido comparativo frente al uso de esos mismos términos en un sentido puramente nominal o de etiquetaje, y así indicar que  $a$  es *anterior* a todos y que  $b$  es *posterior* a todos.
- ◆ Usar la comparación en los dos sentidos: si un niño identifica el último elemento  $b$  de una serie debe reconocer el término anterior a  $b$  para saber que el posterior a aquel es precisamente el último, lo exige usar a su vez los conceptos *anterior* y *posterior* en la identificación.

Por tanto, la capacidad para identificar el primer y el último elemento en series finitas supone desarrollar la lógica ordinal subyacente



a la seriación, cuyo éxito operatorio es la descripción de las series en los dos sentidos.

**El encadenamiento aditivo.** Esta capacidad se refiere al proceso de construcción de la *sucesión de siguientes*: a un elemento le continua otro y a éste otro y así sucesivamente hasta completar toda la serie.

Las actividades del encadenamiento aditivo plantean cuestiones tales como: continuar una serie dada, encadenar elementos, averiguar el siguiente, etc, es decir, la realización de tareas recursivas.

Para la planificación de las mismas debe tenerse en cuenta la génesis del conocimiento y la evolución que presentan los niños ante tareas de seriación. En este sentido se distinguen las siguientes fases:

- 1<sup>a</sup>. Tener éxito operatorio en las tareas de realizar series sencillas en las que no hay relación de orden en sentido numérico.
- 2<sup>a</sup>. Tener éxito operatorio en las tareas de reconstrucción de una serie usando las propiedades antisimétrica y transitiva, como por ejemplo ordenar bastones de diferentes tamaños en orden creciente.

Esto significa que los niños consiguen dominar antes las series en las que el criterio es sencillo y no numérico frente a las series que se construyen a partir de una relación de orden numérico, aspecto este que enlaza directamente con nuestra investigación.

**Todo elemento es primero y último.** Un término en una serie lineal es el último elemento de todos los que le anteceden y el primero de los que le suceden.

Este esquema puede generalizarse a cualquier tipo de serie lineal usando una terminología ordinal o de posición relativa, es decir, mediante relaciones de orden numéricas o no, y haciendo uso de las definiciones del primer y último elemento.

La identificación de términos en este sentido supone el éxito operatorio en la realización de series, puesto que ello determina un método sistemático para la construcción de las mismas; el método consiste en colocar, en primer lugar, el primer elemento, a continuación se coloca el primero de los restantes, etc. En cada paso, el elemento que se coloca es tratado simultáneamente como primero y último, es decir, primero de los restantes y último de los que ya han sido colocados.

**Lugar determinado.** Cada elemento ocupa un lugar determinado en la serie. Se refiere a la capacidad de averiguar la posición que ocupa un elemento dado aplicando distintos esquemas seriales:

**Alternancia.** Sucede cuando un elemento determinado se encuentra

entre dos elementos de la clase contraria. Con ello se descubren algunas propiedades importantes de la secuencia numérica, como por ejemplo, que cada número par está entre dos impares.

**Cíclicas.** Se produce cuando, conociendo la posición de cada uno de los elementos que componen el ciclo, se puede determinar el anterior y el siguiente de todos los demás, y esto no depende del número de objetos que lo integran. Cuando se repite un término de forma cíclica en una serie, a éste siempre le anteceden y suceden los mismos elementos (de forma recursiva).

**Arbitrarias.** Se trata de averiguar el lugar que ocupa un término cualquiera y observar cómo se realiza la descripción de dicha posición. En este caso se pueden aplicar distintas estrategias:

- 1<sup>a</sup>. *Número ordinal.* Se describe la posición relativa de un número usando la posición ordinal.
- 2<sup>a</sup>. *Localización del anterior y el posterior.* Se describe la posición relativa de un número indicando el anterior y el posterior.
- 3<sup>a</sup>. *Otros esquemas.* Se describe la posición de un número usando otro número dado como referencia.

**La generación de series.** Se refiere a la capacidad de generar series aditivas numéricas usando criterios ordinales (recursivos). Así, teniendo en cuenta los apartados anteriores se pueden generar las tablas de multiplicar:

- ◆ Partimos de la secuencia de números naturales 1, 2, 3, 4, 5,...
- ◆ **Tabla del 2**, contar dos lugares con el dos como primer elemento: 2, 4, 6, 8, ...
- ◆ **Tabla del 3**, contar tres lugares con el tres como primer elemento: 3, 6, 9, 12, ...
- ◆ **Tabla del 4**, contar cuatro lugares con el cuatro como primer elemento: 4, 8, 12, 16, .... Y así sucesivamente.

Por tanto, todas las series numéricas aditivas se pueden generar a partir de la secuencia de números naturales usando un método de generación de carácter ordinal (recursivo). Para más detalles véase Fernández (2001), anexo 3.8.

## 2.3 Fenomenología de la estructura ordinal elemental: la comparación y el orden

A continuación se revisa el papel clave de las relaciones de orden en la formación de los conceptos comparativos, que, a su vez, se hallan en la base de los conceptos de cantidad y medida. Estos últimos, más refinados y precisos, organizan la fenomenología de los primeros.

### 2.3.1 Magnitud, cantidad y medida

Las relaciones ordinales desempeñan también un papel central en la definición de los conceptos de cantidad y medida. Así, el concepto matemático de magnitud escalar extensiva se define como un *semigrupo conmutativo con elemento neutro, totalmente ordenado*, cuyos elementos se denominan *cantidades de magnitud* (Chamorro y Belmonte, 1988, p. 135), citado en González (1998, p. 172).

La existencia de elemento neutro no es imprescindible en la definición de tales magnitudes, que reciben el nombre de *magnitudes absolutas*. Si el semigrupo llega a ser grupo, la magnitud recibe el nombre de *relativa*.

Si a las anteriores se añade la condición de ser arquimediana, la *magnitud escalar extensiva absoluta* se define como un *semimódulo monógeno arquimediano, con un orden compatible con su ley de composición, sobre un semianillo formado por números reales* (Chamorro y Belmonte, 1988, p. 143).

Si el semianillo se restringe a los números naturales o enteros, la magnitud se llama *discreta*. En caso contrario, la magnitud se llama *continua*.

En esta investigación intervendrán ambos tipos de magnitudes, aún cuando la magnitud continua que interviene se referirá a un conjunto finito de objetos, a cuyas cantidades podrán aplicarse los conceptos ordinales presentados anteriormente.

Para un tratamiento general del concepto de magnitud en relación con los números naturales relativos y del papel fundamental de éstos en el campo aditivo véase González (1998).

Como ya se ha dicho, en este trabajo llamaremos *cantidad* o *cantidad de magnitud* a cada uno de los elementos del semimódulo (o módulo) que constituye la magnitud.

“...cada cantidad es, por tanto, una clase de equivalencia formada por todos los elementos de un conjunto homogéneo que verifican la identidad

respecto de la característica sobre la que se define la relación de equivalencia". González (1998, p. 174).

Por otra parte, en matemáticas, *la medida es un isomorfismo de semi-módulos que conserva el orden* (Chamorro y Belmonte, 1988, p. 145). La medida establece, por tanto, una identificación entre el conjunto de cantidades y un subconjunto de los números reales. Según que el subconjunto sea  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$ , la medida será natural, entera, racional o real.

En lo sucesivo distinguiremos, por tanto:

- ❖ *Cantidad*, como manifestación perceptible del estado o modalidad de una magnitud discreta o continua.
- ❖ *Número*, como objeto matemático que permite, mediante la metrización, trascender las limitaciones de las manipulaciones o experiencias empíricas meramente cualitativas.
- ❖ *Medida*, como combinación o integración de los dos conceptos anteriores en el campo de aplicación concreta del conteo y de la asignación de números naturales a cantidades discretas.

Los tres intervienen en estructuras ordenadas, en las que la relación de orden desempeña un papel esencial, y en las que intervienen, según el contexto, todos o algunos de los conceptos ordinales descritos en el apartado anterior.

En lo sucesivo utilizaremos estos conceptos ordinales, en los contextos adecuados, para estudiar la evolución del Pensamiento Ordinal en escolares de 3 a 7 años, en la que creemos que son relevantes, además de los aspectos ordinales, recursivos e inductivos propios de la serie natural, los aspectos ordinales implicados en el tratamiento de las cantidades continuas y discretas, y de su medida. De acuerdo con González (1998, p. 184),

“debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos comparativos, los conceptos numéricos y los conceptos métricos. Las relaciones entre los tres son muy estrechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás.”

La evolución individual en tales aspectos debe estar estrechamente vinculada a la de las relaciones ordinales subyacentes. De ahí que en esta investigación centremos nuestro interés no solo en los conceptos ordinales numéricos, sino también en los relativos a los conceptos comparativos y métricos.

Estos conceptos se tratan en la obra de Stegmüller (1979), en la que se desarrolla una teoría filosófica sobre la naturaleza y el proceso de formación de los conceptos científicos. Las ideas fundamentales se analizan en González *ibíd.*, p. 175 y siguientes, análisis del que tomamos las reflexiones que siguen.

### 2.3.2 Las formas conceptuales. Los conceptos clasificatorios, comparativos y métricos

Para Stegmüller, la formación de los conceptos científicos está determinada no sólo por convencionalismos sino también por la observación sistemática, la generalización empírico-hipotética, la confirmación empírica así como por consideraciones intuitivas de fertilidad y simplicidad. El punto de partida lo constituye la idea de que lo cualitativo y lo cuantitativo no expresan una separación o diferencia ontológica de la realidad, sino una diferencia en el lenguaje. En la realidad no existen dos tipos de fenómenos: cualitativos y cuantitativos, sino que estas expresiones se refieren al modo lingüístico que se utiliza para hacer referencia a ellos.

La evolución histórica de los conceptos científicos suele ir desde las formas lingüísticas más primitivas (cualitativas/clasificadorias) hasta las más avanzadas (cuantitativas/métricas), pasando por una fase de transición en la que se utilizan conceptos comparativos o topológicos. El autor establece tres tipos de lenguaje y tres sistemas conceptuales científicos: clasificatorios (cualitativos), comparativos o topológicos y métricos (cuantitativos).

#### Conceptos cualitativos o clasificatorios

Los conceptos clasificatorios científicos deben ser relaciones de equivalencia definidas en dominios determinados, es decir, que deben dar lugar a clases delimitadas con exactitud, mutuamente excluyentes, y que la partición sea completa en el sentido de que la unión de clases sea el dominio sobre el que se define la relación (exhaustividad).

Las formas conceptuales clasificatorias, en la medida en que son un medio para describir fenómenos con la intención de llegar a establecer leyes generales, proporcionan un contenido informativo escaso. En este sentido podemos hablar de formas conceptuales *inferiores o primitivas* por oposición a las métricas o cuantitativas, que, por su mayor complejidad, nivel de información, precisión y rigor, pueden denominarse formas conceptuales *superiores*.

#### Conceptos comparativos o topológicos

La necesidad de precisar más la información y de enriquecer el sistema conceptual clasificatorio conduce a la introducción de conceptos topológicos o comparativos y conceptos métricos, lo que supone, como veremos, afinar la clasificación y establecer un orden,

“El paso a las formas conceptuales superiores discurre paralela-

mente a un aumento del contenido informativo. Los conceptos comparativos o topológicos son conceptos relacionales que permiten hacer comparaciones en el sentido de *más o menos* y se encuentran relacionados desde el punto de vista lingüístico con los comparativos gramaticales.” Stegmüller (1979), citado en González *ibíd.*, p. 177.

Los conceptos comparativos o topológicos:

- 1º. Permiten emprender diferenciaciones conceptuales mediante el establecimiento de un orden jerárquico que conduce a una *cuasi-serie* (en una misma posición puede haber más de un elemento).
- 2º. Constituyen un importante término intermedio entre los conceptos cualitativos y los cuantitativos. Mediante ellos se introduce un determinado tipo de orden en el dominio de objetos, que facilita el paso a conceptos cuantitativos o métricos mediante una simple metrización del orden en cuestión.

Estos conceptos se definen de la siguiente manera.

Un *concepto comparativo\**, *cuasi-serie* o *cuasi-orden* es una terna  $Q = (A, C, P)$  donde  $A$  es un conjunto,  $C$  una relación de coindendencia y  $P$  una relación de precedencia, que cumple las siguientes condiciones:

- a)  $C$  es relación de equivalencia
- b)  $C$  y  $P$  deben excluirse mutuamente, es decir,  $P$  es  $C$ -irreflexiva: ningún elemento del conjunto debe precederse a sí mismo y ningún elemento puede preceder a otro que se halle en su misma  $C$ -clase.
- c)  $P$  es transitiva
- d) Para  $x$  e  $y$  cualesquiera del conjunto  $A$ , debe cumplirse una, y solo una, de las afirmaciones:  $xCy$ ,  $xPy$ ,  $yPx$ .

La introducción de la relación de orden no se basa en procedimientos puramente convencionales. Por el contrario, se han de utilizar resultados empíricos; las relaciones concretas son empíricas y las condiciones o propiedades formales que deben cumplir las relaciones  $P$  y  $C$  se convierten, en cada caso particular, en hipótesis empíricas.

Todo concepto comparativo conlleva una operación que permite establecer la *cuasi-serie*, es decir, un medio práctico que evalúa cualita-

\*Alternativamente pueden definirse los conceptos comparativos como pares  $Q = (A/C, P)$  siendo  $A/C$  un concepto clasificatorio, definido por la relación de equivalencia  $C$  en el conjunto  $A$ , y  $P$  una relación de precedencia tal que que se cumplan las condiciones b, c y d de la definición dada.

tivamente la acción de comparar. Se puede decir, también, que el par de relaciones  $(C, P)$  constituye el instrumento básico para implantar una estructura relacional comparativa en el dominio o conjunto  $A$ .

Además, en cada caso concreto, algunas de las condiciones anteriores pueden corresponder a hechos empíricos y no a verdades lógicas (no se pueden verificar en todos los casos, sino sólo en un número finito de ellos; no se puede deducir su validez al ser generalizaciones hipotéticas inverificables). En este nivel comparativo se mezclan la formación de conceptos, las experiencias y la formación de hipótesis, siendo necesarios tanto los resultados empíricos como las generalizaciones hipotéticas.

### Conceptos cuantitativos o métricos

Según Stegmüller (1979), citado en González *ibíd.*, p. 180,

“Todos los conceptos cuantitativos o métricos, llamados también conceptos de magnitud, se introducen mediante funciones numéricas y se representan formalmente mediante funtores.”

Distinguiremos entre: metrización (introducción de un concepto métrico) y medición (proceso empírico de determinación de un valor de una magnitud).

Dada una cuasi-serie  $Q = (A, C, P)$ , las condiciones necesarias para su metrización son las siguientes:

- ❖ Existe una función  $f$  entre  $Q$ , cuasi-serie o concepto comparativo, valorada en  $\mathbb{R}$  (números reales) o en un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , tal que:
  - ◆ A cada  $x \in Q$  se le asigna un número real  $f(x)$ .
  - ◆ Para todo  $x \in Q$  y para todo  $y \in Q$ ,  $xCy \Rightarrow f(x) = f(y)$ .
  - ◆ Para todo  $x, y \in Q$ ,  $xPy \Rightarrow f(x) < f(y)$ .
- ❖ Existe una operación de combinación en  $Q$  (que se puede denotar por  $\oplus$ ), semejante a la adición en  $\mathbb{R}$ , de manera que  $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$ .

En este estudio trataremos solamente magnitudes extensivas, por lo que nos referiremos a ellas exclusivamente. Por tanto, las reglas para la introducción de un concepto métrico extensivo son:

- ❖ Regla de igualdad:  $xCy \Rightarrow f(x) = f(y)$ .
- ❖ Regla de conservación del orden:  $xPy \Rightarrow f(x) < f(y)$ .
- ❖ Regla del valor unidad: elección de la unidad estándar arbitraria, motivada por el propio proceso de metrización.

❖ Principio de aditividad:  $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$ .

Con ello “La metrización fundamental de una magnitud extensiva se reduce al proceso de contar” y los elementos fundamentales son: el conjunto básico  $A$ , las relaciones  $C$  y  $P$ , la operación de composición *aditiva* y el objeto estándar o unidad  $k$ .

La teoría de las formas conceptuales científicas, al mismo tiempo que clasifica los conceptos en las tres grandes categorías, establece implícitamente que los conceptos métricos se sustentan en los conceptos clasificatorios y comparativos correspondientes, que son los que sirven de soportes para la metrización.

Según González *ibíd.*, p. 183, formalmente, un concepto métrico extensivo aparece cuando se establece un isomorfismo entre el dominio de estados de un concepto comparativo (conjunto de cantidades) y una parte del conjunto de los números reales que asigna un número a cada uno de los elementos (clases) de la serie ordenada. Pero la comparación, por sí sola, lo único que aporta es el establecimiento de series ordenadas. Para que sea posible la metrización es necesario, como hemos visto, que, además del orden, exista una ley de composición aditiva y la elección de una unidad que completen la estructura del concepto comparativo y permitan establecer el correspondiente isomorfismo. Con ello diremos que el concepto comparativo es metrizable extensivamente, adquiriendo el estatuto de concepto métrico desde el mismo momento en que se establece el isomorfismo. La ley aditiva entre los elementos de la serie ordenada permitirá, por tanto, utilizar el término *magnitud* en su sentido matemático usual, en lugar del de concepto comparativo, y llamar *cantidades* a los elementos de la serie ordenada o estados del concepto comparativo.

Ese isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo, y es aquí donde reside toda la potencialidad de la metrización. Pero no es menos cierto que dicho proceso de abstracción constituye sólo una parte del estudio de los conceptos métricos (la que corresponde al campo propiamente matemático), requiere un estado avanzado de los conocimientos y un grado de separación de la realidad que sobrepasan los límites de nuestra investigación didáctica.

De acuerdo con González, podemos decir que, en el ámbito de los fenómenos reales, los conjuntos numéricos constituyen modelos matemáticos para determinadas cualidades metrizables y que, al mismo tiempo, las series ordenadas de estados de cualidades metrizables (conjuntos de cantidades) constituyen modelos cualitativos (experimentales y manipulativos en términos



didácticos) de ejemplificación de los conjuntos numéricos. Ambos sistemas son isomorfos y se sustentan mutuamente a nivel de la acción práctica y, posiblemente, a nivel de la construcción de dichos conceptos por parte del sujeto individual.

## 2.4 Conclusiones y algunas consecuencias para la investigación

En el marco epistemológico elegido, las consideraciones realizadas se circunscriben al problema de la naturaleza, origen y modo de existencia del número natural, así como a la naturaleza y proceso de formación de los conceptos científicos según la teoría de las formas conceptuales de Stegmüller, centrando nuestro interés en el papel fundamental que desempeñan los aspectos ordinales en ambos dominios.

Como hemos visto existen varias construcciones del número natural y del conjunto  $\mathbb{N}$ :

- ❖ Las que se basan en la axiomática NBG o ZF de la teoría de conjuntos, en las que se construyen primero los números ordinales y se definen los números naturales como los ordinales finitos, o bien, se construye ordinalmente el conjunto  $\mathbb{N}$  y se definen los números naturales como los elementos de este conjunto. La construcción cardinal, en esta axiomática, requiere el concepto previo de número ordinal, simplificándose notablemente si se admite el axioma de elección. En ella se hace patente la identidad de los ordinales y de los cardinales finitos, así como la doble interpretación cardinal–ordinal del número natural. En cualquier caso, en todas estas construcciones, el concepto primario desde el punto de vista del significado matemático es el de número ordinal y, consecuentemente, la aritmética básica es también la ordinal, que se basa, a su vez, en la existencia y en el uso de las funciones recursivas y del principio de inducción, que son teoremas de la teoría.
- ❖ La basada en la axiomática de Bourbaki, que toma como concepto básico el número cardinal. No se construyen explícitamente los números ordinales, aunque al admitir el axioma de elección se usan sus propiedades implícitamente. Para definir los números naturales como cardinales finitos, se admite el axioma de infinitud y se usa de modo esencial la relación de orden definida sobre los cardinales. La aritmética natural se establece haciendo uso de los teoremas de recursión y del principio de inducción, que es también un teorema de la teoría.

- ❖ En todas ellas, así como en las aritméticas correspondientes, las relaciones de orden desempeñan un papel esencial. La recursión es la herramienta constructiva y el principio de inducción es la principal herramienta demostrativa.
- ❖ Desde el punto de vista matemático, dependiendo del problema a tratar, es posible adoptar cualquiera de las axiomáticas, siendo los resultados obtenidos válidos en el sistema adoptado.
- ❖ Desde el punto de vista epistemológico las diferencias entre ambos sistemas son claras; parten de la tradición logicista y se consolidan en el estudio del problema de los fundamentos de la Matemática durante la primera mitad del siglo XX.
- ❖ Desde el punto de vista didáctico, la ausencia del estudio de los fundamentos en las licenciaturas de matemáticas y el predominio de la interpretación cardinal, pueden haber ocasionado cierto desconocimiento de la relevancia didáctica de la interpretación ordinal del número natural y de la aritmética correspondiente. Como veremos en el capítulo siguiente, el predominio de la interpretación cardinal se extiende también a las investigaciones cognitivas sobre la adquisición del número por parte de los sujetos, por lo que las investigaciones centradas en los aspectos ordinales del número son fragmentarias y muy escasas.

Desde el punto de vista histórico hay también distintos planteamientos epistemológicos del número natural que inciden en su significado:

- ❖ La postura convencionalista basa en los aspectos ordinales la construcción del número natural. El soporte inicial es la acción de contar y la verbalización de la secuencia numérica. Los numerales y los signos numéricos son convenciones que actúan mediante criterios determinados. La acción de contar es el mecanismo para pasar de una serie de términos verbales a una serie de objetos tangibles y concretos sobre los cuales pueden actuar los sujetos y establecer relaciones ordinales. Por lo tanto, *“hay una relación clara entre los supuestos y principios del marco epistemológico convencionalista y el conocimiento lógico que el niño debe imponer a los objetos para inferir que uno es anterior/siguiente a otro”*.
- ❖ En la corriente logicista, los trabajos de Dedekind, Peano y Russell fueron fundamentales para aclarar la esencia recursiva e inductiva y el doble carácter, cardinal y ordinal, del número natural. Hay construcciones del número natural que no precisan de la definición previa

de los términos numéricos en el sentido de Russell y son, por tanto, independientes del número cardinal. Es decir, que hay construcciones puramente ordinales, recursivas e inductivas del número natural y de su aritmética.

- ❖ Para la epistemología genética el número natural es síntesis de dos estructuras operatorias: clasificación y seriación. Como consecuencia el número natural es cardinal y ordinal, *“produciéndose la psicogénesis de ambos aspectos en los sujetos simultáneamente”*. La estructura operatoria de seriación se basa en la ordenación y en la recursión, por lo que la secuencia numérica en este modelo se trata como una serie, es decir como una sucesión en los términos matemáticos actuales.

Por otra parte, las formas conceptuales de Stegmüller, teoría compatible con la piagetiana, ayudan a aclarar las relaciones existentes entre cantidades, números y medidas:

- ❖ Los conceptos métricos se generan en una síntesis entre los conceptos comparativos y los números. *Las medidas constituyen así elementos nuevos que integran los aspectos cualitativos y cuantitativos de la realidad*. Los primeros son consustanciales a los segundos, previos y necesarios para la existencia de estos e independientes de ellos.
- ❖ La separación entre las cantidades (dominio de las experiencias físicas), las medidas elementales y los números (dominio de las matemáticas), aunque formal, conceptual y epistemológicamente correcta, no puede plantearse en términos analíticos en los inicios de la educación del pensamiento numérico. De hecho, a un nivel formal y una vez establecido un concepto métrico, el isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo; pero ello ocurre en un nivel de abstracción superior al del propio proceso de formación de dicho concepto métrico.
- ❖ Desde el punto de vista del aprendizaje matemático cabría interpretar, en virtud de los isomorfismos existentes, que *debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos comparativos, los conceptos numéricos y los conceptos métricos*. Las relaciones entre los tres son muy estrechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás.

Además:

- ❖ Los conceptos ordinales se hallan en la base de los conceptos comparativos, de los conceptos numéricos y, por tanto de los conceptos

métricos, por lo que la evolución individual de aquellos debe influir en la de estos.

- ❖ En el ámbito de los fenómenos reales, los conjuntos numéricos constituyen modelos matemáticos para determinadas cualidades metrizable y, al mismo tiempo, las series ordenadas de estados de cantidades constituyen modelos cualitativos, experimentales y manipulativos en términos didácticos, de ejemplificación de los conjuntos numéricos. Ambos sistemas son isomorfos y se sustentan mutuamente a nivel de la acción práctica y, posiblemente, a nivel de la construcción de dichos conceptos por parte del sujeto individual.
- ❖ *Tiene interés, desde el punto de vista didáctico, estudiar el problema de la evolución de los conceptos ordinales en los sujetos individuales, en relación con los conceptos numéricos y métricos, incluyendo en el estudio cantidades ordenadas.*
- ❖ En tal estudio, por simplicidad, en los conceptos comparativos que intervengan, el *cuasi-orden* será un *orden* y, por tanto, podrán aplicarse los conceptos ordinales derivados de dicha relación. Las relaciones de equivalencia se entenderán como coincidencias en algún atributo de los elementos de los conjuntos finitos que intervengan.
- ❖ Estudiaremos el inicio del uso por los sujetos de los conceptos métricos por lo que, para las cantidades discretas que intervengan, la función  $f$  valorará en  $\mathbb{N}$ , es decir, que trataremos solamente conceptos métricos naturales, y no tendremos en cuenta la aditividad de las medidas. Por el mismo motivo, las magnitudes continuas se entenderán, restrictivamente, como conceptos comparativos, centrándonos, para ambos tipos de magnitudes en la aplicación y en la evolución del uso de la conservación del orden por los sujetos en la práctica.

Por tanto, el estudio de los conceptos ordinales y el problema de su evolución en los sujetos individuales plantean su integración en un sistema conceptual e interpretativo coherente, lo que, a su vez, exige la consideración tanto de aspectos psicológicos como didácticos. Ambos aspectos serán abordados en el capítulo siguiente.

## 3

# PENSAMIENTO ORDINAL ELEMENTAL. ANTECEDENTES

### 3.1 Introducción

La adquisición individual del número natural ha sido ampliamente estudiada, tanto desde el punto de vista del aprendizaje como del desarrollo cognitivo, por distintas corrientes psicológicas con diferentes concepciones del proceso.

En la investigación que presentamos tomaremos en consideración, de acuerdo con las conclusiones del estudio epistemológico realizado, los puntos de vista de la psicología cognitiva (procesamiento de la información), del constructivismo y, más concretamente, de la estructura de seriación piagetiana así como de resultados recientes obtenidos en la neurociencia y en la neuropsicología como extensiones de la psicología cognitiva.

Las investigaciones cognitivas enfatizan los aspectos operativos y heurísticos del número, tomando como referencia su aspecto cardinal en detrimento del ordinal. Incluso las investigaciones dedicadas a la ordinalidad tienen como soporte teórico la cardinalidad, centrándose, por ejemplo, en conceptos tales como *más que* o *menos que* en lugar de hacerlo en los de *anterior* o *siguiente*. Estas investigaciones se dirigen más a la detección de la precocidad de aspectos numéricos concretos que a la determinación de las condiciones que hagan posible la adquisición del número natural desde un punto de vista matemático, es decir, integrando el carácter recursivo y los aspectos cardinal y ordinal. Esta integración, que aparece en la estructura de seriación piagetiana y cuyos elementos constituyen la base de la sistematización de la secuencia numérica y del éxito operatorio individual, es necesaria para la síntesis cardinal–ordinal que da lugar al número natural desde el punto de vista matemático.

Por su parte, los resultados obtenidos por la neurociencia y la neuropsico-

logía indican que el conocimiento numérico es una forma compleja de conocimiento que requiere la participación de diversas áreas cerebrales localizadas en ambos hemisferios y que la información visual y espacial están íntimamente relacionadas con dicho conocimiento. Este hecho vendría a avalar la adecuación y la validez de la metodología multimedia en el tratamiento de la información numérica, en parte debido a las grandes facilidades que ofrece para implementar correspondencias y relaciones visuales, espaciales y numéricas, así como representaciones virtuales de cantidades reales con las que el sujeto puede interactuar.

Por último, desde el punto de vista de la investigación didáctica específica, tendremos en cuenta los trabajos de Ortiz (1997), sobre razonamiento inductivo numérico, y de Fernández (2001) sobre relaciones lógicas ordinales en la secuencia numérica. Ambos trabajos constituyen los antecedentes específicos propios de la línea de investigación en la que se sitúa el estudio que aquí se presenta. El trabajo de Ortiz plantea la importancia de los procesos ordinales y recursivos en el establecimiento de las relaciones numéricas por parte de los sujetos de corta edad así como la necesidad de su estudio, mientras que el trabajo de Fernández inicia tal estudio en sus aspectos numéricos, abordándose la faceta prenumérica en la presente investigación.

### 3.2 Estudios cognitivos sobre el número natural

Las investigaciones que se describen a continuación tratan tres aspectos básicos:

- 1º. La adquisición y la conceptualización de la secuencia numérica.
- 2º. El papel que juega la secuencia numérica en el conteo.
- 3º. La función y la utilidad del aprendizaje memorístico de la secuencia numérica.

Veamos a continuación una breve síntesis de los principales antecedentes sobre cada uno de los aspectos mencionados.

#### La adquisición y la conceptualización de la secuencia numérica

Numerosas investigaciones ponen de manifiesto que los niños manejan la secuencia de numerales desde edades muy tempranas, Gelman y Gallistel (1978), Fuson, Richards, y Briars (1982); incluso algunas de ellas, en contra de las concepciones piagetianas, avalan la tesis innatista radical de la génesis del número, Dehaene (1997), Wynn (1998), Kobayashi, Hiraki, Mugitani, y Hasegawa (2004).

Sin embargo es posible que los niños distinguan solamente que la secuencia de conteo se compone de numerales que deben repetirse siempre en el mismo orden, veáse por ejemplo Baroody (1988) o Fuson (1988), sin que de ello pueda deducirse cierta comprensión conceptual como, por ejemplo, que el orden de emisión de los términos de la secuencia se mantiene constante a lo largo de sucesivas aplicaciones de la misma, o que cada elemento de la lista es único, es decir, aparece una y sólo una vez a lo largo de la emisión de la secuencia (Fuson, 1988).

El dominio de la secuencia numérica supone, en primer lugar, un conocimiento memorístico: la secuencia numérica se compone de términos que se repiten siempre en el mismo orden en el cual deben recitarse, y, en segundo lugar, una comprensión conceptual de la misma que incluye dos aspectos:

- 1<sup>o</sup>. Los términos como se usan en el recitado están ordenados, es decir, que a partir del primero están enlazados por el “siguiente a uno dado”.
- 2<sup>o</sup>. Los elementos de la secuencia numérica no se repiten en el recitado, lo que es avalado por la antisimetría.

La adquisición y elaboración de la secuencia de numerales se aborda por Fuson et al. (1982) en un estudio longitudinal y transversal en niños de dos a ocho años. En dicho estudio se pone de manifiesto que las dos fases mencionadas pueden solaparse, puesto que puede comenzar el proceso de establecimiento de relaciones entre los primeros términos de la secuencia mientras que se está alargando el tamaño de la misma; en otras palabras, el primer fragmento de la secuencia puede estar en fase de elaboración, mientras que el extremo final esté en plena fase de adquisición, ya que se precisa un largo período para adquirir y consolidar la secuencia estándar de numerales.

En la fase de adquisición se realiza el aprendizaje de la secuencia convencional y el niño comienza a aplicarla en situaciones de conteo. En la fase de elaboración los vínculos entre los elementos de la secuencia se fortalecen y los términos contiguos, junto a la relación que los enlaza, pueden emitirse al margen de la secuencia global. De este modo, cada término de la secuencia puede emplearse como elemento de apoyo para recordar el término inmediatamente anterior o posterior.

Esta última fase la subdividen los autores en cinco niveles:

- 1<sup>o</sup>. Nivel cuerda: los numerales (verbales) pueden emitirse ordena-

damente, pero la falta de diferenciación hace que los términos sean considerados como etiquetas, sin nexo comparativo entre ellos. En este nivel aparecen errores por falta de coordinación entre la correspondencia uno a uno y la secuencia de numerales.

- 2<sup>o</sup>. Nivel cadena irrompible: inicio de la diferenciación entre los términos de la secuencia, se superan los errores anteriores pudiendo establecerse correspondencias seriales entre los términos de la secuencia y los objetos de una colección finita, comenzando siempre por el primer elemento.
- 3<sup>o</sup>. Nivel cadena fragmentable: la enumeración puede comenzar en un punto cualquiera de la secuencia de numerales y no necesariamente por el primero.
- 4<sup>o</sup>. Nivel cadena numerable: los numerales se transforman en unidades que pueden contarse, por ejemplo, desde un término cualquiera  $a$  hasta otro  $b$ , apareciendo las conexiones “anterior” y “siguiente” a un término.
- 5<sup>o</sup>. Nivel cadena bidireccional: los numerales pueden emitirse en ambos sentidos, creciente y decreciente, cada término en la secuencia ocupa un lugar determinado porque es posterior a todos los que le anteceden y anterior a todos los que le suceden.

### La secuencia numérica en el conteo

En relación con el papel que juega la secuencia numérica en el conteo, encontramos diferentes posturas desde el convencionalismo epistemológico y desde una perspectiva ordinal del número natural. Así, Gelman y Gallistel (1978) establecen el principio de orden estable, mientras que Wagner y Walters (1982) distinguen una forma *fuerte* y otra *débil* del mismo principio y Saxe (1979) considera que cualquier lista vale para contar. Por otra parte, autores como Song y Ginsburg (1988) o Fuson (1988) defienden que la secuencia de numerales es insustituible. Saxe, Guberman, y Gearhart (1987), en un trabajo en el que se estudian las diferencias evolutivas en la comprensión mostrada por los niños acerca de la naturaleza arbitraria de los numerales, en tanto que símbolos culturales, revelan que la mayoría de los niños de seis años son capaces de apreciar la necesidad de la correspondencia uno a uno y la arbitrariedad de los símbolos numéricos. De hecho, los niños advierten progresivamente que, en tanto se



preserve el principio de correspondencia uno a uno, cualquier lista de símbolos puede servir para realizar el conteo.

Por su parte, Fuson (1988) justifica que la secuencia de numerales es insustituible por las razones siguientes:

- 1<sup>a</sup>. Los niños conciben la lista convencional de numerales como un instrumento que ninguna otra lista puede sustituir.
- 2<sup>a</sup>. Los niños juzgan como erróneos los conteos en los que una marioneta no aplica debidamente la secuencia.
- 3<sup>a</sup>. Los niños emiten el segmento estable convencional que encabeza todas las secuencias incluso a partir de los dos años y medio, lo que refleja sus intentos de aprender “la lista especial” de conteo.
- 4<sup>a</sup>. La emisión las secuencias estables es anterior a la comprensión de la cardinalidad.

Por nuestra parte, pensamos que es preferible uso de la secuencia numérica frente a cualquier otra lista por dos razones:

- 1<sup>a</sup>. Por razones socioculturales evidentes se trata de un aprendizaje temprano.
- 2<sup>a</sup>. La serie numérica tiene características estructurales intrínsecas que no tienen las otras series salvo que apliquemos un isomorfismo estructural a otra secuencia de diez dígitos. Pero con ello nos alejaríamos del conocimiento incipiente en el niño del recitado de la secuencia ordinaria, no ganando nada y dificultando el proceso aprendizaje de la misma.

### **El aprendizaje memorístico de la secuencia numérica**

Algunos autores como Song y Ginsburg (1988) o Fuson y Hall (1983), defienden el aprendizaje memorístico de al menos los diez primeros dígitos de la secuencia. Estos autores consideran que la habilidad numérica temprana de los niños se debe a la creación de hábitos y postulan que la aplicación mecánica del procedimiento de conteo va siendo paulatinamente modificada por la comprensión del mismo, lo que conlleva la coordinación e integración de todos los principios del conteo.

Otras posturas son las de Gelman y Gallistel (1978), Gelman y Meck (1986) o Wagner y Walters (1982), para los que no hay aprendizaje exclusivamente memorístico sino que éste va acompañado de una

cierta comprensión previa. Concretamente Gelman y Meck (1986) defienden que si los niños no dispusieran del principio de orden estable, el aprendizaje de la secuencia sería memorístico y carente de sentido, lo que no sólo dificultaría el aprendizaje, sino que lo convertiría en una tarea altamente lenta y costosa.

Por otra parte, la acción de contar es un comportamiento instrumental o funcional, es decir, que se trata de una estrategia muy potente en el desarrollo matemático del niño.

En este sentido, Cowan (1987), Fuson y Hall (1983), Geary, Hoard, Byrd-Craven, y DeSoto (2004), Sophian (1988), han investigado la capacidad de los niños para resolver problemas en los que el conteo se usa como procedimiento.

La funcionalidad del conteo para determinar el cardinal de un conjunto ha sido objeto de estudio por Gelman y Gallistel (1978), quienes establecen del principio de cardinalidad, o Klarhr y Wallace (1973), en la que se usa el conteo como “operador cuantificador”.

En cualquier caso, según se detalla en el trabajo de Fernández (2001), las investigaciones en las teorías procesuales sobre el número natural tratan en profundidad el aspecto cardinal en detrimento del aspecto ordinal. Así, los trabajos que estudian el carácter funcional del conteo en cuanto a la ordinalidad llevan como soporte mental la cardinalidad y establecen comparaciones ordinales cuantitativas: cada número de la secuencia representa, a priori, el cardinal de un conjunto, para después realizar la comparación entre los términos, por tanto, dicha comparación se da entre cantidades de magnitud y no en relación con las posiciones de los mismos en la secuencia numérica. Se trata de una concepción que está basada en la construcción lógica de Russell del número natural (Russell, 1982).

Por otra parte, de acuerdo con Fernández y Ortiz (2008) y Serrano y Dénia (1987), el conteo es una estrategia de cuantificación aritmética que está vinculada a la construcción del concepto de número, pero que es insuficiente para su conceptualización *desde un punto de vista matemático* y en un sentido próximo a las ideas piagetianas que se han expuesto en las secciones anteriores de este capítulo y se completan a continuación.

En el ámbito cognitivo se ponen de manifiesto las diferentes concepciones epistémicas del número que se encuentran en la base de las interpretaciones piagetianas y del procesamiento de la información.

Como se expone en la subsección 2.2.1 del capítulo 2, pág. 48, el número natural como concepto matemático incluye de modo esencial ambos aspectos cardinal y ordinal: “. . . a cada tipo de orden lineal le corresponde un cardinal

y recíprocamente, es decir que los números cardinales se identifican con los tipos de orden lineal para conjuntos finitos.” (Hrbacek y Jech, 1999).

En la misma subsección se incluye también que desde el punto de vista cardinal los tres conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$ , son indistinguibles y son las relaciones ordinales definidas en cada uno, precisamente, las que los singularizan otorgándoles propiedades matemáticas muy diferentes. Con las consideraciones anteriores queremos poner de manifiesto tanto la insuficiencia didáctica del número cardinal como concepto matemático exclusivo sobre el que fundamentar la aritmética, como el hecho esencial de que el número natural reúne necesariamente los aspectos cardinal y ordinal.

El aspecto cardinal es necesario para definir la medida o cuantificación de las magnitudes que, entre otras cosas, permite la contrastación empírica de las teorías científicas, pero es insuficiente por sí solo para establecer algunas verdades matemáticas fundamentales como, por ejemplo, que el conjunto  $\mathbb{N}$  admite un buen orden.

Por otra parte, el concepto de número natural piagetiano, basado en las construcciones logicistas como síntesis de estructuras cardinales y ordinales, coincide con la estructura epistemológica del número natural matemático. En consecuencia, de acuerdo con la propuesta de Piaget sobre el estudio de la génesis de éste concepto en los sujetos consideramos que la comprensión e incorporación en el proceso ontogenético debe ser un objetivo didáctico y cultural de primer orden, dejando al margen consideraciones finalistas o teleológicas del desarrollo que carecen de sentido.

En las teorías procesuales, sin embargo, el tratamiento del número enfatiza los aspectos cardinales, operativos y heurísticos del número, proponiendo el conteo como herramienta dirigida a la adquisición del número por medio de la cardinalidad (véanse los principios de conteo en Gelman y Gallistel (1978)).

### 3.3 El número y el orden desde la perspectiva neuropsicológica

La neuropsicología moderna integra fundamentalmente tres campos y métodos de investigación, a saber: cognitivo-conductuales, estudio de lesiones cerebrales y técnicas de imagen cerebral o neuroimagen, como la tomografía por emisión de positrones (PET), la resonancia magnética funcional (fMRI) y la electro y magneto encefalografía, estando los dos primeros apoyados por el tercero.

La componente cognitivo-conductual, desde el punto de vista teórico, se basa en modelos híbridos de los modelos conexionista y del sistema simbólico

de la mente humana en el aprendizaje y la cognición, dentro del paradigma del procesamiento de la información, Bechtel y Abrahamsen (1991) y Clark (1990), citados en Hardy y Jackson (1998, p. 320).

Según estos modelos el aprendizaje y la cognición deben llevarse a cabo, al nivel neuronal, mediante procesos de tipo conexionista, ya que el cerebro es un conjunto de “unidades sencillas” masivamente interconectadas, las neuronas. Sin embargo, los aspectos racionales y conscientes deben ejecutarse por un procesador en serie virtual implementado sobre la arquitectura neuronal conexionista que funciona en paralelo.

Los aspectos automáticos e inconscientes y el pensamiento intuitivo no lineal ni simbólico serían de naturaleza conexionista y, por tanto, procesados en paralelo, mientras que la consciencia y el pensamiento racional que sigue reglas serían procesados en serie según modelos del sistema de símbolos\*.

Estos modelos duales simbólico–conexionistas se complementan con las ideas, también duales, del procesamiento y conversión analógico–digital de las señales a nivel cerebral y del sistema nervioso propuestas por von Neumann (1958).

Dada la profunda relación de la neuropsicología con las teorías del procesamiento de la información, el concepto de número utilizado por aquella coincide fundamentalmente con el manejado por éstas.

Como hemos visto, esta concepción del número natural es limitada desde un punto de vista didáctico. Sin embargo, considerada como componente de la síntesis cardinal–ordinal necesaria para el establecimiento del número como objeto matemático, presenta un enorme interés, hasta el punto de que se están llevando a cabo en la actualidad un gran número de investigaciones en relación con el origen de las capacidades *protonuméricas* en niños de muy corta edad así como en las funciones cerebrales y en la localización de estas y otras habilidades implicadas en la génesis del número.

Desde este punto de vista, siguiendo la revisión de Alonso y Fuentes (2001), los estudios de *disociaciones* y *dobles disociaciones* en pacientes con distintas lesiones cerebrales permiten conocer, por inferencia, las redes y circuitos neuronales que subyacen a los distintos procesos cognitivos.

Por su parte, Gerstmann (1940) citado en Alonso y Fuentes (2001, p. 570), descubrió en pacientes con lesión cerebral en la región parietal inferior

---

\*Frente a esta concepción del cerebro humano como máquina que procesa algoritmos se halla otra muy controvertida y original, propuesta por Penrose y Hameroff, sobre el funcionamiento no algorítmico de la mente y la consciencia humana. Hipótesis que, si resultase cierta, imposibilitaría la construcción de máquinas conscientes equivalentes a la mente humana. Véase: Penrose, Roger, *Las sombras de la mente: hacia una comprensión científica de la consciencia*, Editorial Crítica, 1996, ISBN 84-7423-771-8.

izquierda la tétrada de déficit, también llamada síndrome de Gerstmann: acalculia o discalculia, agrafía o disgrafía, incapacidad para nombrar los dedos de la mano o señalar uno de ellos cuando se le indica al sujeto (agnosia digital) e imposibilidad de distinguir entre izquierda y derecha. Con ello se establece una primera relación entre dicha región cerebral y algunas habilidades numéricas en sujetos humanos.

Así mismo se ha observado que los cuatro síntomas de este síndrome pueden disociarse. Algunos pacientes padecen acalculia sin deterioro de la capacidad para distinguir sus dedos o viceversa, indicando que dicha región cerebral se subdivide probablemente en microregiones altamente especializadas para números, escritura, espacio y dedos.

En particular Dehaene (1997), aporta numerosos datos que apoyan la hipótesis de la existencia de una relación profunda entre números y espacio. Por ejemplo:

- ❖ Las personas adultas tendemos a representar mentalmente los números naturales en una línea recta orientada de izquierda a derecha, desempeñando esta representación un papel importante en la intuición numérica.
- ❖ Existe una fuerte correlación entre el talento matemático y las habilidades espaciales.

De esta relación el autor infiere la existencia de circuitos neuronales en la región parietal inferior dedicados a la representación de información espacial continua adecuada para la codificación de la *línea numérica*, metáfora utilizada por Dehaene para indicar la forma en la que el cerebro humano representa los números naturales: éstos se representan en una línea, no como símbolos, sino como magnitudes analógicas obedeciendo a la ley de Weber–Fechner\*. De acuerdo con Alonso y Fuentes (2001), la relación entre números y dedos resulta relativamente obvia teniendo en cuenta que los niños de diferentes culturas aprenden a contar con los dedos, por lo que a lo largo del desarrollo es probable que las representaciones de los números y de los dedos ocupen zonas cerebrales cercanas e íntimamente relacionadas.

---

\*Esta ley perceptiva, establecida por Ernst Heinrich Weber (1795-1878) y elaborada en su forma actual por Gustav Theodor Fechner (1801-1887), inauguró la psicofísica. Relaciona la intensidad de un estímulo y la sensación producida por el mismo. Su enunciado es: *el menor cambio discernible en la magnitud de un estímulo es proporcional a la magnitud del estímulo*. Matemáticamente  $dp = k \frac{dS}{S}$ , donde  $dp$  corresponde al cambio percibido en el estímulo,  $dS$  corresponde a cambio de magnitud del estímulo,  $S$  corresponde a la magnitud del estímulo y  $k$  es un factor de escala. Integrando la ecuación se obtiene:  $p = k \ln \frac{S}{S_0}$ , siendo  $S_0$  el umbral perceptivo y  $\ln$  el logaritmo natural. Es claro, pues, que la relación entre el estímulo y la percepción corresponde a una escala logarítmica.

Por otra parte la implicación del lóbulo parietal inferior izquierdo en el cálculo mental está avalada por los resultados de numerosos trabajos sobre acalculia y discalculia (Gitelman, 2003).

En el mismo trabajo Alonso y Fuentes (op. cit.) informan de numerosas investigaciones dedicadas al estudio de dobles disociaciones que sugieren una relativa independencia, a nivel cerebral, de las habilidades numéricas respecto al lenguaje, al razonamiento lógico general y a la memoria.

En cuanto a la especialización hemisférica, diversos estudios indican que el hemisferio derecho se encarga de las tareas aproximadas mientras que el izquierdo lo hace de las exactas.

Así, en pacientes con deconexión interhemisférica producida por lesión o por sección deliberada, Cohen y Dehaene (1996), concluyen que ambos hemisferios pueden reconocer dígitos arábigos (codificación numérica), convertirlos en cantidades y compararlos. La conversión en cantidades puede transferirse entre los hemisferios a través de la parte anterior del cuerpo calloso. Sin embargo, solo el hemisferio izquierdo es capaz de nombrar los números y de ejecutar cálculos exactos.

También Cohen y Dehaene (1991) ([30] en Alonso y Fuentes) informan de un paciente con una lesión extensa en la mitad posterior del hemisferio izquierdo, que padecía acalculia grave pero conservaba las capacidades de comparar números pequeños y de realizar aproximaciones.

Por otra parte se sabe que los daños en hemisferio derecho no causan problemas graves de cálculo (Jackson y Warrington, 1986, [32] en Alonso y Fuentes), pero la capacidad de repentinización (subitizing), aún cuando puede representarse en ambos hemisferios, puede sufrir deterioro en algunos de estos casos (Warrington y James, 1967, [33] en Alonso y Fuentes (op. cit.)).

Del mismo modo, en un estudio realizado por Dehaene y otros (1996, [36] en Alonso y Fuentes (op. cit.)), sobre multiplicación y comparación de números, apareció activación bilateral en la región intraparietal con implicación asimétrica de los dos hemisferios; el nivel de activación fue mayor en la multiplicación en el hemisferio izquierdo, mientras que en la tarea de comparación de números la activación estaba más equilibrada entre los dos hemisferios. En nuestra opinión, este resultado que apoya la idea de que la tabla de multiplicar se relaciona más con las capacidades verbales del hemisferio izquierdo, mientras que la comparación de números ni está ligada al lenguaje ni se aprende de memoria. En el estudio realizado por Izard (2006) sobre la independencia del lenguaje, mediante la técnica de los potenciales evocados (ERPs), se muestra que bebés de tres meses de edad son sensibles a la numerosidad. Igualmente, se incluye un estudio transcultural realizado con indios

Mundurucús brasileños el el que se muestra que, en ausencia de un léxico para números mayores que 5, los sujetos manifiestan las mismas habilidades que los sujetos occidentales en tareas sobre la numerosidad siempre que se exija sólo una respuesta aproximada. Además, parece que los Mundurucús poseen un concepto de igualdad exacta que trasciende sus representaciones no verbales aproximadas de la numerosidad, pero se encuentran limitados en la inmensa mayoría de las tareas de aritmética exacta ante la ausencia de un instrumento cognoscitivo (análogo a nuestro procedimiento de conteo) para evaluar la numerosidad exacta de un conjunto.

Los resultados anteriores se hallan en consonancia con los obtenidos por Wynn (1998), en cuanto a que las habilidades protonuméricas no requieren de lenguaje hablado, por Bishop (1997) y Hirsch (1996), en cuanto a la transculturalidad, y por Nieder y Miller (2004) en cuanto a que trasciende a nuestra especie. El conocimiento del conteo parece pues emerger de una combinación de factores innatos y experienciales, lo que está de acuerdo con lo establecido a tal respecto por Gelman y Gallistel (2004).

El origen innato de la numerosidad está apoyado también por los resultados obtenidos sobre el desarrollo del cálculo aritmético en primates no humanos (Boysen y Hallbert, 2000; Matsuzawa, 1985); en bebés preverbales (Kobayashi y cols., 2004; Wynn, 1998; Wynn, Bloom, y Chiang, 2002) y sobre la transculturalidad de la noción de número (Bishop, 1997).

Un resultado bien establecido en este campo es la fuerte relación del sentido cuantitativo de la información numérica con la región inferior del lóbulo parietal y, particularmente, con el izquierdo. Por otra parte, numerosas investigaciones dedicadas al estudio de esta relación (Alonso y Fuentes, 2001, p. 572 y ss.) indican que existe doble disociación entre la aritmética verbal rutinaria en relación con el aprendizaje de las tablas de sumar y multiplicar y los procedimientos aritméticos con conocimiento del sentido numérico. Incluso en la aritmética verbal rutinaria se ha encontrado doble disociación entre adición y multiplicación.

En esta línea, Dehaene y otros (1999, 2000), [42] y [43] en Alonso y Fuentes (op. cit.), utilizan técnicas conductales y de imagen cerebral (RM) para concluir que algunas operaciones aritméticas, como las de las tablas de multiplicar, son codificadas verbalmente, mientras que las aproximaciones o estimaciones son independientes del lenguaje. De ello se infiere la existencia de sistemas neurales distintos subyacentes a la aritmética elemental exacta y aproximada, es decir, el cerebro usa procesos diferentes dependiendo de que el cómputo implique una respuesta exacta o una estimación o aproximación. En el primer caso se observó un incremento en la activación de la



región inferior izquierda del lóbulo frontal, circuito que se halla implicado en la asociación de palabras y en la recuperación de material verbal bien aprendido, mientras que en el segundo, con tareas aritméticas aproximadas, aumentó la activación de ambos lóbulos parietales, regiones implicadas en tareas visuoespaciales. Estos resultados se hallan en consonancia con el papel de las imágenes mentales tanto en la comprensión como en la creación matemática (Hadamard, 1954) y sugieren que las estimaciones utilizan una representación cuantitativa implementada en la red neural visuoespacial de los lóbulos parietales, es decir, que la representación de los números parece que se relaciona estrechamente, a nivel de la actividad cerebral, con la representación del espacio.

En relación con la topografía cerebral implicada en el procesado de la información numérica, (Dehaene y Cohen, 1995) hacen las siguientes consideraciones:

- ❖ El sistema visual, córtex occipitotemporal inferior del hemisferio izquierdo, se asocia con el reconocimiento de cifras arábigas, codificación de signos y palabras escritas y nombre de los numerales, mientras que la misma región del hemisferio derecho reconoce solo cifras arábigas.
- ❖ En la identificación y producción de palabras habladas está implicada la región perisilvana del hemisferio izquierdo, que participa también en un circuito córtico-subcortical que comprende los gánglios basales del hemisferio izquierdo y que se activa en tareas aritméticas rutinarias y en uso de las tablas de sumar y multiplicar.
- ❖ El córtex parietal inferior, principalmente el interior del surco intraparietal, desempeña un papel fundamental en la representación del sentido cuantitativo de los números.
- ❖ Los circuitos dedicados a coordinar las intervenciones de los demás se ubican posiblemente en el córtex prefrontal y en el córtex cingulado anterior, que se asocian con la supervisión de conductas no automatizadas tales como: planificación, ordenación secuencial, toma de decisiones, corrección de errores, mantenimiento de resultados intermedios, etc.

Resulta claro, pues, que las actividades numéricas, por no hablar de las actividades matemáticas en general, son formas de conocimiento superior cuya realización requiere la colaboración, entre otras, de las áreas visuoespacial, lingüística, cuantitativa y lógica, además de las implicadas en los distintos



tipos de memoria, en su coordinación y en la interacción de éstas con las atencionales y motivacionales.

Dependiendo del tipo de tarea la información será procesada por los circuitos neuronales adecuados, por lo que el cuadro resultante se halla muy alejado del antiguo reduccionismo frenológico.

Por otra parte, en relación con las capacidades ordinales en niños de corta edad, Dehaene (1997, p. 63), reconoce la escasez de trabajos al respecto y añade:

“Si estos datos preliminares pueden verificarse, entonces los conceptos del *menor* y del *mayor* están entre los más lentos en aparecer en la mente del bebé (en torno a los quince meses de edad). ¿De dónde provendrían? Probablemente de una observación de las propiedades de adición y sustracción. El número *mayor* sería el número que puede alcanzar añadiendo, y el *menor* sería el número que puede alcanzar restando. Los bebés descubrirían que la misma relación *mayor que* existe tanto entre 2 y 1 como entre 3 y 2 porque la misma operación de adición, +1, permite moverse de 1 a 2 y de 2 a 3. Practicando adiciones sucesivas, los niños verían que los detectores para 1, 2, y 3 se encienden en una orden reproducible en su mente y así aprenderían sobre su posición en la serie de números.”

En relación con esta concepción aritmética u operativa del origen de las relaciones ordinales numéricas, nos proponemos estudiar en el trabajo que se presenta la evolución de dichas relaciones desde los conceptos topológicos o infralógicos de proximidad, seriales desde el punto de vista espacio-temporal y analógicos (tamaños o alturas), hasta alcanzar las relaciones ordinales con cantidades numéricas propiamente dichas. El estudio se realiza en entornos virtuales multimedia con una relación visuoespacial muy significativa con los conceptos en estudio.

Por tanto, aceptando las metáforas de la *línea numérica* y del *acumulador numérico* analógico de Dehaene en adultos, nos proponemos estudiar la evolución en niños de 3 a 7 años de su organización ordinal partiendo de los conceptos anteriores .

### 3.4 Razonamiento inductivo numérico y relaciones lógicas ordinales en la secuencia numérica

En esta sección se presentan los aspectos fundamentales de los trabajos de Ortiz (1997) y Fernández (2001), los cuales se han desarrollado de acuerdo con el esquema de la tabla 3.1 y constituyen los antecedentes específicos de la línea de estudio en la que se sitúa la investigación que presentamos.

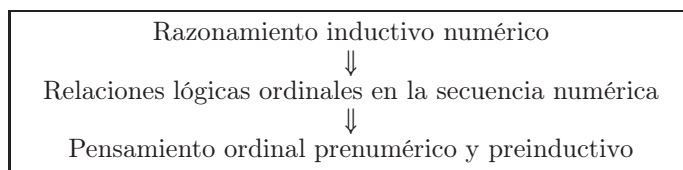


Tabla 3.1. Campos y relaciones en los estudios de Ortiz y Fernández.

Veamos a continuación un desarrollo más detallado de cada uno de estos apartados.

### 3.4.1 Razonamiento inductivo numérico. Descripción y resultados

El problema que se aborda consiste en “*explicar y describir el desarrollo del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria\**” (Ortiz, 1997, p. 32), entendiendo por *razonamiento inductivo numérico* aquel en el que intervienen:

- 1º. Procesos mentales, lógicos o aritméticos, implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en sucesiones numéricas.
- 2º. Conceptos y propiedades del número que se utilizan en dichos procesos.

Nótese que este tipo de razonamiento se refiere, en general, a la inferencia inductiva y no propiamente a la inducción completa matemática. Por otra parte, el problema de investigación se enmarca en el estudio de los conocimientos, procesos y estructuras cognitivas que posibilitan a los sujetos de 6 a 12 años el descubrimiento de regularidades numéricas y, en particular, de aquellas regularidades que definen sucesiones numéricas y que se determinan utilizando las operaciones de la aritmética elemental.

El estudio se orienta a alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- 1º. Delimitar el razonamiento inductivo numérico dentro del marco general de la inducción.
- 2º. Caracterizar las interpretaciones inductivistas sobre el origen del número natural.
- 3º. Reconocer las interpretaciones inductivistas y convencionalistas en la transmisión escolar de la aritmética del número natural, determinando estrategias y procedimientos inductivos utilizados.

\*Etapa educativa en la que participan sujetos de 6 a 12 años de edad.

- 4<sup>o</sup>. Establecer un modelo teórico evolutivo de razonamiento inductivo numérico y comprobar con escolares de 6 a 12 años la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real en razonamiento inductivo numérico.
- 5<sup>o</sup>. Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos inductivos propios de la aritmética escolar.
- 6<sup>o</sup>. Establecer la relación existente entre el desarrollo del currículum en aritmética y la evolución del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria.
- 7<sup>o</sup>. Confirmar resultados obtenidos en investigaciones anteriores.

La consecución de los objetivos se realiza mediante el contraste y validación de las siguientes hipótesis:

- 1<sup>a</sup>. Existe una corriente epistemológica y matemática que considera que la aritmética tiene un origen exclusivamente inductivo. Los planteamientos didácticos y curriculares de la aritmética escolar en España han participado de esta tendencia al tener un marcado signo inductivista.
- 2<sup>a</sup>. Las diferentes estrategias inductivas que permiten completar con éxito tareas de continuar series de número naturales se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe, en seis niveles diferenciados, la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de 6 a 12 años.
- 3<sup>a</sup>. El dominio del algoritmo de una operación no se traduce de manera inmediata en una nueva competencia en razonamiento inductivo numérico. En los escolares de Educación Primaria existe un desfase de al menos dos años desde que aprenden un procedimiento, propiedad o concepto aritmético hasta que lo integran en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico.

En relación con nuestra investigación, tienen especial relevancia los objetivos 2<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup>, 5<sup>o</sup> y 6<sup>o</sup> anteriores así como la confirmación de las hipótesis 1<sup>a</sup> y 2<sup>a</sup>.

La validación de la 1<sup>a</sup> hipótesis se realiza a dos niveles:

**Nivel 1** Confirmación de la existencia del inductivismo aritmético y de su influencia en la enseñanza de la aritmética elemental.

Se basa en tres estudios diferenciados:

- a) Un estudio histórico epistemológico con evidencia documental y reflexión epistemológica, basado en citas originales de autores de reconocido prestigio científico.
- b) Un estudio histórico matemático con evidencia documental y reflexión epistemológica a partir de publicaciones editadas en España.
- c) Un estudio *didáctico histórico* con dos subestudios:
  - Análisis de documentos de autores de reconocido prestigio.
  - Revisión histórica y contemporánea de libros de texto publicados en España en el periodo 1900–1990.

**Nivel 2** Obtención de evidencia empírica a partir de estudios muestrales y de casos.

Se realizaron dos estudios:

- ❖ Estudio de respuestas verbales obtenidas a partir de la aplicación de una prueba escrita a una muestra grande de sujetos.
- ❖ Realización de entrevistas semiestructuradas a una muestra de 28 sujetos.

La confirmación de la 2ª hipótesis se consigue en dos etapas: construcción del modelo y evaluación del mismo. La metodología seguida se aproxima a lo que se conoce como P.E.R.T. (Planned Evaluation and Review Technique) (Bisquerra, 1989, pág.32), y se resume en tres pasos:

#### **Paso 1** Construcción del modelo

La construcción del modelo evolutivo de razonamiento inductivo numérico se lleva a cabo como consecuencia de los siguientes elementos básicos:

- a) Realización de un estudio exploratorio en el que se confirma estadísticamente una escala acumulativa para escolares de 9 a 12 años (Escala de Mokken). Esta escala pone en evidencia la existencia de diferencias significativas en razonamiento inductivo numérico entre los sujetos según las puntuaciones obtenidas.
- b) Análisis de las respuestas verbales dadas por los mismos sujetos. Las respuestas manifiestan competencias y estrategias concretas en razonamiento inductivo numérico.
- c) Realización de un análisis didáctico que fundamenta el significado del modelo y su estructuración así como la racionalidad del mismo.

- d) Los conocimientos sobre modelos evolutivos en el ámbito de la educación matemática, que sirven de referentes para la construcción de uno nuevo.

**Paso 2** Construcción de una escala acumulativa asociada al modelo Se llevan a cabo en este punto los siguientes trabajos:

- ❖ Determinación de tareas posibles de razonamiento inductivo numérico y de variables de acuerdo con el modelo teórico.
- ❖ Preparación de una prueba sobre el universo de tareas.
- ❖ Aplicación de la prueba a una muestra intencional controlada de escolares de 6 a 12 años.
- ❖ Replicación positiva de la escala de Mokken.
- ❖ Determinación de los ítems que forman una escala acumulativa.
- ❖ Estudio de la fiabilidad de la prueba.
- ❖ Establecimiento de niveles de acuerdo con los resultados de la escala.

**Paso 3** Estudio de casos que confirma la bondad del modelo A partir de un análisis estadístico de los resultados obtenidos con la muestra intencional se seleccionan los casos de interés para la realización de unas entrevistas clínicas semiestructuradas. Este estudio cualitativo se desarrolla con los siguientes propósitos:

- 1º. Confirmar el ajuste de los escolares elegidos al nivel que han manifestado en la prueba objetiva. En actividades distintas a las de la prueba realizada, graduadas en orden evolutivo de acuerdo con el modelo teórico, los escolares deben alcanzar exactamente el grado de dificultad correspondiente a su nivel.
- 2º. Probar diferencias concretas entre escolares a los que les corresponden niveles distintos, independientemente de la edad o curso. Alumnos del mismo curso (o edad) con niveles diferentes tienen que manifestar competencias diferentes en razonamiento inductivo numérico.
- 3º. Probar que alumnos del mismo nivel, independientemente de la edad o curso, consiguen superar exactamente el mismo grado de dificultad en las actividades que se les proponen y manifiestan exactamente las mismas competencias.

Las conclusiones de los estudios indicados en el **Paso 1** avalan la propuesta del siguiente modelo, que consta de nueve estados de dominio progresivo de la inducción en series numéricas agrupados en cinco bloques diferenciados:

**Bloque general.** No inductivo desde el punto de vista numérico, formado por los estados:

Estado 1 : Topológico

Estado 2 : Etiquetaje

*Caracterización:* regularidades generales (alternancia, ritmo o cualquier regularidad visual o memorística), para las que no es necesario aplicar conocimientos numéricos.

**Bloque prenumérico.** Constituido por los estados:

Estado 3 : Infralógico-simbólico

Estado 4 : Simbólico-cuantitativo

*Caracterización:* descubrimiento de patrones.

**Bloque numérico.** Formado por los estados:

Estado 5 : Representacional

Estado 6 : Sintáctico-numeral

*Caracterización:* descubrimiento de patrones, dominio de la serie numérica básica y del sistema de representación decimal.

**Bloque aritmético.** Constituido por los estados:

Estado 7 : Aritmético aditivo

Estado 8 : Aritmético multiplicativo

*Caracterización:* descubrimiento de patrones, dominio de las operaciones de la aritmética elemental.

**Bloque algebraico.** Formado por el estado:

Estado 9 : Algebraico

*Caracterización:* formalización del razonamiento inductivo.

En la primera exploración empírica (Ortiz, 19993) y en el tercer capítulo de Ortiz (1997), se estudiaron los estados aritméticos 7 y 8, para los que se construyó y validó una escala acumulativa de Mokken formada por cuatro niveles: dos para el estado 7 y dos para el estado 8. En la continuación del estudio se amplían los cuatro niveles de los estados 7 y 8 con niveles correspondientes a los estados previos 5 y 6 (véase el capítulo 5 de Ortiz (1997)). Con todo ello, en el trabajo de Ortiz y en consonancia con la 2<sup>a</sup> hipótesis, se estudian seis niveles: dos numéricos y cuatro aritméticos, posponiéndose el estudio del estado algebraico así como el de los estados preinductivos y prenuméricos a trabajos futuros.

Por su relación directa con nuestro trabajo, resumimos a continuación la fundamentación de los 5 primeros estados del modelo descrito (Ortiz, 1997, p. 177–181).

### Estado 1. Linealidad y orden topológico

De acuerdo con el análisis de los orígenes de la noción de número (Ortiz, 1997) la aprehensión de una numerosidad de objetos como una totalidad invariante requiere de su comparación con otras totalidades y del dominio de la reorganización espacial. El dominio del espacio, al menos parcialmente, es una de las primeras destrezas para poder establecer comparaciones que permitan determinar las analogías y diferencias necesarias para ordenar cantidades. Pero no sólo es necesaria esta destreza para poder comparar cantidades; también alcanza, como es evidente, al sistema numérico posicional.

El aspecto más elemental involucrado es el orden de los puntos sobre una línea, el cual hace posible la construcción de referencias ordinales (anterior, posterior, para adelante, para atrás, etc) que se transfieren a la recta numérica y a las series. Asimismo, el orden lineal está en relación directa con la acción de contar, tan importante en las primeras adquisiciones numéricas desde un punto de vista convencionalista. Así,

“La idea de *orden* de los puntos sobre una recta (o la noción de punto *entre* otros dos) es una de las nociones geométricas primitivas. Es un *modelo* matemático de la concepción intuitiva de comparación de *magnitudes* o de números enteros” (Dieudonné, 1989, p. 194).

Por consiguiente se establece que el primer soporte intuitivo común a todas las series numéricas está relacionado con el concepto espacial de línea y, en particular, con el concepto de orden topológico de un conjunto finito de puntos pertenecientes a una línea. Este soporte intuitivo se caracteriza por diferenciar los puntos unos de otros y por la aparición de un lenguaje específico (siguiente, anterior, posterior, primero, último, entre, etc). No es necesaria la verbalización ni el conocimiento memorístico. No intervienen las distancias y la línea no tiene porqué ser recta.

### Estado 2. Etiquetaje

Se entiende por etiquetaje la asignación de un objeto, símbolo, palabra o concepto a cada punto incluido en un soporte lineal como el descrito en el apartado anterior. Se trata de un proceso de diferenciación y localización en un contexto ya ordenado por la anterior aproximación.

Esta segunda aproximación se puede interpretar como el paso de los objetos a su simbolización y de las colecciones de puntos a las

colecciones de significantes. La simbolización puede establecerse bien por experiencia, por convenio o por utilidad.

El sujeto puede hacer referencias para determinar un lugar o término de la serie: el siguiente a... , el anterior a... , el que sigue a... , el que está antes, el que está después, etc. Para ello debe conocer, al menos memorísticamente, alguna serie finita, que si es la de los primeros numerales podemos decir que estamos ante una iniciación en la acción de contar. No es necesario dominar el aspecto cardinal del número, puesto que no es lo mismo pronunciar las palabras uno, dos, tres, a medida que se indican sucesivos objetos, que pronunciar las palabras uno, dos, tres, cuando se tiene una torre de un objeto, otra de dos objetos, otra de tres objetos, etc (acumulatividad en el conteo).

### Estado 3. Regularidades infralógico-simbólicas

El etiquetaje y la identificación de los objetos por sus significantes (a partir de conceptos clasificatorios) permite acceder a una tercera aproximación. Es el caso, por ejemplo, de la alternancia por colores, en la que es posible inferir la regla y predecir los siguientes elementos sin necesidad de una previa memorización. Se trata, por tanto, de una regularidad infralógica, ya que depende de como estén situados los objetos en el espacio. No hay orden en el sentido de la antisimetría, salvo que apliquemos las condiciones de las aproximaciones anteriores, asignando un lugar fijo a los objetos. Sin embargo se pueden permutar dos objetos del mismo color para modificar la apariencia (son objetos distintos) sin que se modifique la regularidad (ya que la regularidad se refiere a los colores y no a los objetos que se han coloreado). Este cambio de apariencia no se produce, por el contrario, en el caso de los numerales, en el que el intercambio de dos signos iguales no modifica nada (1 , 2, 3, 1 , 2, 3, 1 ,...) (ahora la alternancia se refiere a objetos que son signos numéricos).

Este estado, a diferencia de los anteriores, se caracteriza por una competencia inductiva básica que hace posible determinar imaginativamente el término siguiente en una serie no memorizada (se distinguen los dígitos y se identifican los iguales y los diferentes con independencia de los significados atribuidos a los signos). Podemos decir que es el primer paso serial dentro de la numeración escrita.

### Estado 4. Regularidades simbólico-cuantitativas (comparar y añadir–quitar signos numéricos)



Si los signos (en nuestro caso, los signos numéricos) se encuentran ya organizados dentro de un sistema con su propia sintáxis, se pueden establecer nuevas relaciones entre ellos de acuerdo con las características de dicha estructura sintáctica relaciones que trascienden la mera clasificación o identidad lógica de la aproximación anterior.

Del mismo modo, el sistema de representación numérica presenta unas regularidades implícitas en su construcción, en su estructura lógica interna y en su sintáxis. Dicha estructura, que incluye un sistema comparativo jerárquico además del orden posicional de la primera aproximación, hace posible la existencia y construcción de series numéricas con regularidades exclusivamente sintácticas (aún sin significado numérico completo). La más elemental de estas regularidades es la que se puede apreciar por simple comparación entre términos que se diferencian entre sí por la repetición de signos, su cantidad y colocación; por ejemplo: 1, 1 1, 1 1 1, ... o 22, 202, 2002, ..., series construidas añadiendo, cada vez, un dígito concreto. En definitiva, el dominio de estos aspectos primarios de la sintáxis del sistema (signos perceptivamente iguales o distintos, su cantidad y colocación) y de su funcionamiento suponen una competencia en el aumento disminución de cantidades discretas (uno más, dos más, etc) y permiten realizar inducciones sintáctico-estructurales e interpretar series del tipo indicado sin necesidad de usar una aproximación anterior.

#### **Estado 5. Representacional o simbólico–ordinal** (dominio de la serie numérica básica)

Un paso más en el dominio sintáctico supone superar la mera distinción entre los numerales escritos de una cifra y su diferenciación cuantitativa para considerarlos, además, ordenados en una serie básica. El dominio de esta serie, en lo que se refiere a su estructura ordinal, permite identificar las regularidades implícitas en series del tipo: 10, 20, 30, ...; 21, 22, 23, ...; etc, lo que conlleva, además, el dominio más elemental de la acción de contar, como es contar de uno en uno, de dos en dos, etc.

#### *Algunas relaciones con la investigación que presentamos*

El modelo teórico evolutivo de razonamiento inductivo numérico que constituye la base del estudio descrito está avalado, a nivel teórico, por las conclusiones del análisis didáctico y, a nivel empírico, por las del estudio explo-

ratorio y el estudio empírico posterior (Ortiz, 1997, p. 296 y ss.). A nivel teórico el Análisis Didáctico permitió elaborar las siguientes conclusiones:

- Desde un punto de vista curricular se distinguen tres periodos en la transmisión de la aritmética en el Siglo XX en España: un primer periodo *aritmética*, con fundamentación inductivista pero con un planteamiento didáctico convencionalista; un segundo periodo *conjuntista* con origen estructuralista, que es deductivista; y un tercer período *post-conjuntista* con intenciones constructivistas. En el período aritmética se considera la naturaleza inductiva del número natural, primando el aspecto ordinal y en el periodo conjuntista, la naturaleza lógica del número natural primando las clases y el aspecto cardinal.
- La acción de contar se resalta en los periodos estudiados como fundamental en la construcción escolar del número natural, siendo más patente en el periodo aritmética.

Se distinguen tres interpretaciones básicas de la acción de contar: repetición de la serie convencional de los números naturales; la asignación de los términos de la serie a los elementos de una colección, en la que el último término determina el cardinal de la colección; verbalización de la serie memorística sin significación aritmética.

El cálculo aritmético elemental se puede conseguir a partir de la acción de contar y por tanto, en tales casos, la acción de contar es el fundamento en la enseñanza de los algoritmos de las operaciones elementales.

- El papel de la inducción en la construcción del número natural y de la aritmética es incuestionable. La interpretación del papel elaborador de la inducción depende de la concepción epistemológica del número natural que se considere.
- Las distintas interpretaciones epistemológicas sobre los orígenes del número natural se han reflejado en la enseñanza del número en la escuela.
- Un planteamiento cognitivo ha de considerar las referencias espaciales y temporales para establecer relaciones entre números. El orden numérico y la linealidad quedan patentes en las representaciones gráficas de las relaciones numéricas.
- Desde un punto de vista evolutivo el sujeto puede llegar, mediante inducción y antes de pasar a la formalización, al descubrimiento, interpretación y significación de los conocimientos aritméticos.

El estudio empírico, por su parte, permitió construir una nueva escala acumulativa de Guttman como prolongación de la escala de Mokken obtenida en el estudio exploratorio previo; a esta nueva escala se la denominó *Escala inductiva numérica* (EIN) y se estableció en los seis niveles que permitieron validar los estados numéricos y aritméticos del modelo.

Por otro lado, el estudio empírico cualitativo permitió constatar que los diferentes niveles obtenidos a partir de la EIN determinan distintos subestados de conocimiento numérico y aritmético en los sujetos analizados, resultados que avalan la fiabilidad de la escala desde un punto de vista evolutivo. El análisis de las respuestas verbales del estudio exploratorio conduce a las siguientes conclusiones:

- En los sujetos de menor edad se observan esquemas arraigados que indican el origen de sus rutinas aritméticas y, por tanto, de sus estrategias de resolución de tareas de continuación de series numéricas. En concreto nos referimos a los siguientes esquemas:
  - *Esquemas infralógicos* subyacentes a la propia construcción del número natural, tales como los que se refieren a aspectos topológicos intuitivos que incluyen, entre otros, la orientación en la recta numérica (atrás, bajando, saltarse números, hacia abajo, etc).
  - *Esquemas de aprendizaje memorístico* de la serie de los números naturales, considerada como una lista almacenada en la memoria. Aquí incluimos la acción denominada *contar ordinal*\* como uno de los orígenes de esta consideración de los números por parte de una amplia mayoría de los sujetos de menor edad.
- Las respuestas consideradas más frecuentes son las que señalan la tendencia general en las distintas edades y niveles del currículo, lo cual significa que la evolución que estudiamos se puede caracterizar en términos de los esquemas subyacentes a dichas respuestas.

El análisis de las respuestas de los estudios empíricos cuantitativo y cualitativo conduce a las siguientes conclusiones:

---

\*Se refiere a la interpretación por los sujetos de las progresiones numéricas usando el conteo o el recuento acumulativo, considerando como equivalentes *sumar  $n$*  y *contar de  $n$  en  $n$* . Esta interpretación permite a algunos sujetos, para determinados tipos de progresiones, descubrir la regla generatriz y generarizarla, produciéndose para los mismos un predominio del aspecto ordinal con respecto al cardinal en tareas de continuar progresiones de números naturales, así como en la interpretación de las operaciones aritméticas.

- Los sujetos de distintos niveles manifiestan competencias diferenciadas y los sujetos de un mismo nivel manifiestan las mismas competencias en razonamiento inductivo numérico, produciéndose un ajuste de las observaciones a los niveles de la EIN.
- En las respuestas obtenidas hay un predominio de las interpretaciones ordinales frente a las cardinales.
- Puede hablarse de tres fases en razonamiento inductivo en Educación Primaria: una primera fase “ordinal” con estrategias inductivas basadas en la serie numérica base y en la acción de contar, una segunda fase “aditiva” con estrategias inductivas basadas en la adición y sustracción y una tercera fase “multiplicativa” con estrategias inductivas basadas en la multiplicación.

Finalmente, en la sección de perspectivas futuras se pone de manifiesto que:

*“De acuerdo con los resultados expuestos anteriormente reconocemos un problema abierto: el nivel N2 parece desempeñar en términos numerativos lo que el nivel N4\* supone en términos aritméticos: las estrategias inductivas que corresponden a este nivel se basan en el dominio de la acción de contar de n en n (...) hemos comprobado que la acción de contar perdura largo tiempo en los escolares como estrategia inductiva en tareas de continuar series antes de pasar a estrategias aditivas (...)*

*Todo ello nos plantea para otras investigaciones futuras mostrar que, en relación con la acción de contar, hay un nivel inductivo numerativo duradero y persistente, anterior al nivel aditivo, cuyo inicio debe situarse en Educación Infantil y cuya culminación se produce en Educación Primaria. Este problema debe abordarse estudiando el origen del número en sus aspectos preinductivos no justificados por el inductivismo, los inicios de la acción de contar y el estudio de tareas propias de los dos estados preinductivos de nuestro modelo teórico.” (Ortiz Ibid., pp. 312–313).*

Este trabajo tiene un enorme interés desde múltiples puntos de vista, en particular, para la enseñanza de la aritmética, ya que la toma en consideración de sus resultados permite elaborar un currículum realmente adaptado al estado y a las necesidades del alumnado de 6 a 12 años de edad. En relación con la investigación que presentamos, los resultados y conclusiones que se han descrito ponen de manifiesto la importancia de la acción de contar y el predominio de la interpretación ordinal en la adquisición de los primeros conceptos aritméticos. Por otra parte, el estudio subraya la importancia de la acción denominada “contar ordinal” o “contar de n en n” y conjetura la

\*Véanse las páginas 307–309 del trabajo de Ortiz.

existencia de un nivel “inductivo numerativo”, anterior al nivel aditivo, cuyo inicio debe producirse a edades anteriores a los 6 años\*.

### 3.4.2 Relaciones lógicas ordinales.

En Fernández (2001) se abordan los aspectos mencionados en el apartado anterior por medio de un “*un estudio que pretende explicar y describir el desarrollo de las relaciones lógicas-ordinales de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*” (Fernández, 2001, p. 36). La autora concibe la *secuencia numérica* como una “*una progresión dada por la relación generatriz de Bolzano, es decir es una progresión en el sentido de Bertrand Russell*” y las *relaciones lógicas ordinales* como “*las relaciones generatrices de las progresiones de Bertrand Russell, la función sucesor de Peano, o la representación ordenatriz de Dedekind*”. (Véanse las páginas 22–25 de Fernández *Ibid.* y el anexo I, pág 263–267, en las que se demuestra la equivalencia de las relaciones asimétricas y biunívocas de Bolzano y las relaciones asimétricas transitivas de Vivanti\*).

Una *progresión* en el sentido de Russell es una sucesión  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  en la cual hay un primer término, un sucesor para cada término, no se repiten términos y cada término puede obtenerse a partir del primero *en un número finito de pasos*. En estas condiciones puede demostrarse que las progresiones de Russell cumplen los axiomas de Peano y, recíprocamente, que cualquier sistema que cumpla los axiomas de Peano es una progresión.

Por otra parte, construidos recursivamente los números naturales y su estructura ordinal (véase por ejemplo la primera construcción ordinal expuesta en el capítulo 2, p. 49 y ss.), las progresiones de Russell pueden interpretarse como imágenes de funciones recursivas definidas en todo el conjunto  $\mathbb{N}^\dagger$ . En particular el propio conjunto  $\mathbb{N}$  es imagen de una de tales funciones recursivas: la función sucesor de Peano.

De acuerdo con Kneebone (1963, p. 260), cada teoría matemática tiene dos aspectos, uno constructivo y otro demostrativo. En el caso de la aritmética el aspecto constructivo viene dado, precisamente, por la recursión mientras que el aspecto demostrativo viene dado por la inducción. Ambos se sustentan,

\*En otras palabras, subraya la importancia de los aspectos ordinal y recursivo en la adquisición por los sujetos de los primeros conceptos numéricos y aritméticos.

\*Estas relaciones de Vivanti son las actualmente denominadas relaciones de orden estricto o no reflexivo ( $<$ ) en la literatura matemática, para distinguirlas de las relaciones de orden ordinarias o reflexivas ( $\leq$ ).

†La progresión será finita si se prescinde de la condición de que cada término tenga un sucesor, es decir, si la función se define en un subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ .

como se pone de manifiesto en el capítulo 2, en la estructura ordinal del número natural como estructura recursiva e inductiva básica.

En el trabajo de Fernández se estudia el desarrollo, en sujetos de 3 a 6 años, de capacidades recursivas y seriales que intervienen en la adquisición de los conceptos numéricos y aritméticos elementales en situaciones en las que el conteo se utiliza como herramienta funcional, a diferencia del trabajo de Ortiz (1997) en el que se estudia el desarrollo de la inferencia inductiva como capacidad que hace posible el descubrimiento, interpretación y significación de los conocimientos numéricos y aritméticos como estadio previo al uso de la inducción como herramienta demostrativa de propiedades y relaciones numéricas.

Los objetivos específicos de la investigación de Fernández (2001) son los siguientes:

- 1º. Delimitar el conocimiento lógico de la secuencia numérica dentro del marco general del número natural.
- 2º. Delimitar el aspecto ordinal en la transmisión escolar del número natural.
- 3º. Caracterizar las relaciones lógicas existente entre los terminos de la secuencia numérica en la acción de contar.
- 4º. Caracterizar la estructura lógica de seriación subyacente a la secuencia numérica.
- 5º. Establecer un modelo teórico evolutivo del conocimiento lógico-ordinal de la secuencia numérica y comprobar, con escolares de Educación Infantil (3-6 años), la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real en el establecimiento de relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.
- 6º. Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en terminos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento ordinal.

La consecución de los objetivos anteriores se realiza mediante el contraste y validación de las siguientes hipótesis:

- 1ª. Existen corrientes epistemológicas que consideran las relaciones lógicas ordinales del número natural como el origen de toda la construcción matemática.
- 2ª. Existen líneas en Educación Matemática que priman el aspecto ordinal del número natural frente a su aspecto cardinal.
- 3ª. Los elementos básicos característicos de la estructura lógica de seriación de Piaget son aplicables a la secuencia numérica y por tanto podemos tenerla en cuenta en la didáctica del número natural.

- 4<sup>a</sup>. Existen tareas exclusivamente ordinales para evaluar las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.
- 5<sup>a</sup>. Es posible determinar pruebas para niños de 3 a 6 años que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos-ordinales implicados en cada una de ellas.
- 6<sup>a</sup>. Las diferentes estrategias lógicas-ordinales que permiten establecer relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento lógico ordinal de la secuencia.

El procedimiento seguido para la confirmación de las cuatro primeras hipótesis es teórico reflexivo a partir de información documental y se lleva a cabo dentro del proceso de análisis didáctico (González, 1998). (Véase el capítulo 3 de Fernández (*Ibid.*)).

Al igual que en el trabajo de Ortiz (1997), la metodología seguida para la validación de las hipótesis 5<sup>a</sup> y 6<sup>a</sup> se aproxima a lo que se conoce como P.E.R.T.\* (Bisquerra, 1989, p. 32), y se resume también en tres pasos:

#### **Paso 1** Construcción del modelo.

La construcción del modelo evolutivo se lleva a cabo como consecuencia de los siguientes elementos básicos:

- a) Realización de un análisis didáctico que fundamenta el significado del modelo y su estructuración así como la racionalidad del mismo.
- b) Realización de un estudio exploratorio con una muestra de 27 sujetos en el que se confirma la existencia de regularidades en el comportamiento real y efectivo de los niños al enfrentarse a tareas exclusivamente ordinales. Este estudio pone en evidencia que las competencias lógicas ordinales pueden escalonarse, desde el punto de vista evolutivo, de menor a mayor complejidad.
- c) Los conocimientos sobre modelos evolutivos en el ámbito de la educación matemática, que sirven de referentes para la construcción de uno nuevo (Ortiz, 1997).

#### **Paso 2** Construcción de una prueba asociada al modelo.

Se lleva a cabo mediante la determinación de tareas asociadas a los

---

\*Planned Evaluation and Review Technique

estados del modelo evolutivo. En cada una de estas tareas se dan los esquemas lógico–matemáticos propios del estado que corresponda en cada caso. Según el modelo evolutivo, estas tareas representan una serie acumulativa en cuanto al orden creciente de dificultad de los esquemas lógico–matemáticos implicados.

### **Paso 3** Confirmación de la bondad del modelo.

Se realizan entrevistas clínicas semiestructuradas con los siguientes propósitos:

- 1º. Los niños que superan una tarea asociada a un estado dado del modelo evolutivo, superan, también, todas las tareas de los estados anteriores.
- 2º. Probar que niños del mismo curso de Educación Infantil pueden manifestar competencias lógicas ordinales distintas según los estados del modelo evolutivo.
- 3º. Los niños se pueden organizar y categorizar en niveles evolutivos, asociados, cada uno de ellos, a un estado del modelo teórico. En cada nivel se darían las características propias del estado del modelo asociado.

Las conclusiones de los estudios indicados en el **Paso 1** avalan la propuesta del siguiente modelo evolutivo constituido por seis estados de dominio progresivo del conocimiento lógico–ordinal de la secuencia numérica:

- Estado I: Etiquetaje.
- Estado II: Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando esquemas infralógicos.
- Estado III: Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando la alternancia como instrumento secuencial.
- Estado IV: Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando el conteo como instrumento de comparación.
- Estado V: Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica usando la alternancia como instrumento de comparación.
- Estado VI: Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.

Por su relación directa con nuestro trabajo, resumimos a continuación la fundamentación de los estados del modelo anterior (Fernández, 2001, pp. 163–169).



### Estado I. Etiquetaje

La primera aproximación para alcanzar las relaciones lógicas ordinales en cualquier serie es la *diferenciación* de sus elementos, para lo cual se debe indicar, bien de manera motora con el señalamiento, o bien mediante el lenguaje con una etiqueta o palabra, cada elemento de la serie; es decir, a cada elemento le corresponde un único señalamiento o ser etiquetado una sola vez. Los niños que hacen un gesto rasante para describir la serie estarán por debajo de este estado.

### Estado II. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando esquemas infralógicos.

Una vez diferenciados los términos de una serie mediante el etiquetaje puede aplicarse una interpretación espacial o temporal a la misma y pueden manifestarse con ello los primeros esquemas comparativos entre sus términos.

Se establece, por tanto, que el primer soporte intuitivo-espacial del que el niño dispone para organizar e interpretar una realidad ordinal está relacionado con el concepto de línea y, en particular, con el concepto de orden topológico\* de un conjunto finito de puntos pertenecientes a una línea.

Análogamente, el orden temporal, como conocimiento igualmente infralógico (según taxonomía piagetiana), constituye un soporte intuitivo importante de referencias ordinales que se transfieren a las series.

### Estado III. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando la alternancia.

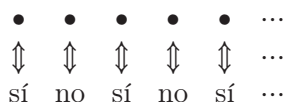
Se utiliza una secuencia para etiquetar los elementos de una serie. Dicha secuencia (definida por alternancia) es la que permite el estudio de la comparación ordinal (infralógica) entre los elementos de la misma.

---

\*Dado por la posición de los puntos sobre la línea. Fundamentalmente, se trata de la identificación perceptiva e intuitiva de los conceptos *antes que* y *después que* y de su significación espacio-temporal.

En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de comparación era la línea topológica en la que no era necesaria la verbalización ni el conocimiento memorístico. En este estado es necesario que el niño aplique esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales\* tales como:

- ❖ Correspondencia serial entre línea y alternancia



- ❖ Encadenamiento aditivo para la construcción de la alterancia que se usa como instrumento, basado en esquemas infralógicos temporales: “y después, y después, ...”
- ❖ Cada elemento ocupa un lugar determinado: se empieza a caracterizar cada elemento de la serie como único al compararlo con el anterior inmediato y el siguiente inmediato.

#### Estado IV. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de una serie cualquiera usando el conteo.

En el estado anterior la secuencia que se usaba como instrumento de etiquetación y comparación era la alterancia en la que el esquema lógico-matemático subyacente era la dicotomía, mientras que en este estado es necesario que el niño disponga de una secuencia estable y convencional (principio de orden estable según Gelman y Gallistel (1978)) y del principio de correspondencia uno a uno de la acción de contar.

Además de aplicar los mismos esquemas secuenciales que en el estado anterior (cambiando el instrumento secuencial), será necesario que el niño aplique esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales propias del conteo tales como:

- ❖ *Relación antisimétrica*: alude a la comparación a través de la terminología ordinal de dos términos cualesquiera de la serie usando el isomorfismo con el orden secuencial de la secuencia numérica que se establece en la acción de contar. Por lo tanto, con la acción de contar se establece una relación de orden total, que además es orden completo y buena ordenación, entre los elementos de la serie<sup>†</sup>.

\*Nótese que estas relaciones son esquemas de construcción recursiva de una serie, a la que, después de ser generada, puede aplicarse un orden posicional intuitivo (infralógico). Véase también el anexo III, pág. 282-283, de Fernández (2001).

<sup>†</sup>Se refiere a la capacidad del sujeto para establecer correspondencias biyectivas *que conservan*

- ❖ *Todo elemento es primero y último.* El elemento contado es tratado simultáneamente como primero y último: primero de los que quedan por contar y último de los que ya han sido contados.

#### Estado V. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica usando la alternancia como instrumento de comparación.

Deben relacionarse dos términos cualesquiera de la secuencia numérica, a la que se ha sometido previamente a una correspondencia serial con la alternancia.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
sí	no	sí	no	sí	no	sí	no	sí	no

En los estados anteriores se comparaban dos elementos de una serie lineal discreta usando como instrumento de comparación la alternancia (Estado 3) o el conteo (Estado 4). En este estado se sustituye la serie lineal por la secuencia numérica y se trata de comparar sus términos a través de la alternancia.

En este estado el niño aplicaría esquemas secuenciales y relaciones lógicas ordinales tales como:

- ❖ *Primer y último elemento:* se dan las relaciones inversas *anterior* y *posterior* mediante un método sistemático (obviamente recursivo) de construcción de la secuencia numérica vía la correspondencia serial.
- ❖ *Generación de Series:* tomando los términos correspondientes a los *síes* se da la secuencia (recursiva) “contar de dos en dos empezando por uno”, es decir, la serie de los números impares; y tomando los correspondientes a los *noes* se genera la serie de los números pares.

#### Estado VI. Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.

Se relacionan ordinalmente dos términos cualesquiera de la secuencia numérica, en ella cada término puede ser considerado en sí mismo en cuanto a sus relaciones lógicas-ordinales con todos los demás.

En este estado los niños alcanzan la sistematización de la secuencia *el orden*, entre los elementos de la secuencia numérica con el orden habitual (o de un intervalo finito de la misma), y los términos de la serie dada.

numérica según la estructura lógica de seriación y actúan sobre ella con estrategias ligadas a la estructura serial (seriación cíclica y doble), lo que hace que los sean capaces de razonar ordinalmente sobre la secuencia numérica y tengan un dominio de la misma pudiendo:

- ❖ Contar de  $n$  en  $n$ .
- ❖ Solucionar ordinalmente  $a + b$  con el llamado *recuento progresivo*\*.
- ❖ Solucionar ordinalmente  $a - b$  con el llamado *recuento regresivo*†.
- ❖ Estar en disposición de interpretar las tablas de multiplicar como correspondencias seriales entre los términos de la secuencia numérica y las series generadas a partir de ellas como contar de  $n$  en  $n$ .
- ❖ Afrontar toda la aritmética a partir del dominio ordinal de la secuencia numérica.

El desarrollo completo de los estudios, así como la construcción de las pruebas y las tareas pueden consultarse en los capítulos 4, 5 y 6 de Fernández (op. cit.).

#### *Algunas relaciones con la investigación que presentamos.*

##### **En relación con las conclusiones del análisis didáctico:**

- Que los números naturales están dados en secuencia es el único punto incuestionable en todas las teorías explicativas del origen del número. La interpretación de su papel elaborador depende de la concepción epistemológica del número natural.
- Para el convencionalismo epistemológico, el principio del número radica en la secuencia numérica y en la acción de contar: la serie ordinal es suficiente para construir el número.
- Para los logicistas existen conceptos primarios que determinan la secuencia numérica y por tanto el número. Estos tienen como referencia relaciones seriales como son relaciones las asimétricas biunívocas de Bolzano o las asimétricas transitivas de Vivanti.
- Desde la epistemología genética, el problema de la construcción de la secuencia numérica sólo puede ser resuelto en función de su desarrollo.
- Las distintas interpretaciones epistemológicas sobre la secuencia numérica se han reflejado en la enseñanza del número en la escuela.

\*Contar  $b$  unidades a partir de  $a$ .

†Descontar  $b$  unidades a partir de  $a$

- Desde el modelo piagetiano se puede analizar la estructura lógica de seriación subyacente a la secuencia numérica.
- Desde el procesamiento de la información, la secuencia numérica se analiza como componente del conteo pero sin tener en cuenta las relaciones lógicas ordinales que existen entre sus términos. En este modelo, las investigaciones sobre la funcionalidad del conteo apuntan hacia el “Operador Cuantificador”, comparando los números cardinales para posteriormente localizarlos en la secuencia.
- Las relaciones lógicas ordinales no han sido objeto específico de estudio ni en el modelo piagetiano ni en el modelo de integración de habilidades (procesamiento de la información).
- Es posible determinar tareas específicas del número ordinal que reflejen las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica sin tener que tratar estos términos como magnitudes.

#### En relación con las conclusiones del estudio exploratorio:

- La realización correcta de la acción de contar no garantiza que se use como estrategia para resolver problemas ordinales.
- Los niños mayores (5 años) usan preferentemente estrategias de *siguiente inmediato* teniendo en cuenta una posición dada como dato para obtener otra; mientras que niños más pequeños (4 años) usan preferentemente el conteo como estrategia para determinar una posición lógica-ordinal.
- Los niños más pequeños (3 años) resuelven mejor las cuestiones de *siguiente inmediato* relativos a la alternancia que las relativas al conteo. A los 4 años les ocurre lo contrario. Los de 5 llegan a trasladar mentalmente las relaciones lógicas ordinales presentes entre los términos de la secuencia numérica a otro tipo de secuencia, como la alternancia, para la resolución de problemas ordinales usando como herramienta dicha secuencia.
- La comparación de términos numéricos mediante la alternancia denota la capacidad de establecer las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica. Los niños que establecen dichas relaciones son los que describen una posición lógica-ordinal mediante la correspondencia serial secuencia numérica-alternancia.
- El éxito en la construcción de la correspondencia serial secuencia numérica-alternancia no garantiza su uso como herramienta para la determinación de una posición lógica-ordinal, y por tanto no se ga-

rantiza el éxito en el establecimiento de relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.

- Las respuestas que manifiestan relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica están presentes en los tres cursos que intervienen en el estudio, con un aumento considerable al pasar de 4 a 5 años. Estos niños son capaces de usar la alternancia como instrumento de comparación entre los términos de la secuencia numérica.
- En general, a partir de los cuatro años y medio los niños tienen un dominio del conteo que les permite determinar posiciones ordinales y lógicas-ordinales.

En este estudio se observa también que,

“La dispersión de respuestas presente antes de los cuatro años y medio, manifiesta que los niños están construyendo esquemas mentales secuenciales (relaciones lógicas ordinales) que se manifiestan más claramente en series no numéricas como la alternancia antes que en la propia secuencia numérica, y es que no han alcanzado, aún, el dominio del conteo que es el determinante de las dos clases de niños. Ello justifica el que los niños de tres años respondan mejor a las cuestiones sobre *siguiente* o *siguiente inmediato* usando la alternancia como instrumento secuencial que a las mismas cuestiones pero con el conteo como instrumento”, Fernández (2001, p. 238).

#### **En relación con las conclusiones del estudio empírico cualitativo:**

En este estudio se toman las pautas de las tres tareas del estudio empírico exploratorio para establecer algunos estados del modelo teórico expuesto anteriormente, concretamente los estados I, IV y V.

Por otra parte, el propio estudio empírico cualitativo se basa en una prueba que consta, a su vez, de seis tareas, cada una de las cuales está asociada a un estado del modelo en el sentido de que cada tarea comporta las características lógicas y matemáticas propias del estado correspondiente; se comprueba también que las tareas se realizan con éxito de una manera acumulativa, es decir, que si un niño hace una tarea determinada entonces ha realizado todas las tareas asociadas a los estados anteriores a la misma. En este sentido son compatibles los resultados del estudio exploratorio con los de este nuevo estudio, no existiendo diferencias en las respuestas verbales de tareas homólogas en ambos estudios. Por otra parte, la utilización de muestras distintas corrobora la consistencia interna del método seguido.

En definitiva, con los estudios mencionados se logró establecer la siguiente categorización de los sujetos según sus competencias lógicas ordinales:

**Nivel I**

Los sujetos son capaces de etiquetar los elementos de una serie diferenciándolos entre sí, pero sin establecer comparaciones entre ellos.

**Nivel II**

Además de diferenciar los elementos de una serie, los sujetos de este nivel son capaces de compararlos mediante el orden temporal o topológico utilizando un instrumento secuencial sencillo como es la alternancia.

**Nivel III**

El sujeto es capaz de: diferenciar los elementos de una serie, comparar dichos elementos mediante el orden temporal o topológico y además establecer relaciones lógicas ordinales entre los elementos de la serie usando la alternancia como instrumento secuencial, pero no logran hacer esas comparaciones con la secuencia numérica como instrumento.

**Nivel IV**

Los sujetos diferencian los elementos de una serie, comparan dichos elementos mediante el orden temporal o topológico, establecen relaciones lógicas ordinales entre los elementos usando la alternancia como instrumento secuencial y, además, aplican relaciones lógicas ordinales entre los elementos de una serie usando el conteo como instrumento comparativo, sin llegar a comparar los elementos de la secuencia numérica usando la alternancia como instrumento comparativo.

**Nivel V**

Los sujetos, además de diferenciar los elementos de una serie, compararlos mediante el orden temporal o topológico con la alternancia y el conteo como instrumentos secuenciales, son capaces de diferenciar y, con ello, establecer relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica usando la alternancia como instrumento comparativo, todo ello en el tramo 1-10. Sin embargo no son capaces de extrapolar estas capacidades a otros tramos de la secuencia con extremos inferiores mayores que 10.

**Nivel VI**

Los sujetos en este nivel presentan todas las características del nivel

anterior y además son capaces de aplicar esquemas lógico-matemáticos de seriación cíclica generados por el tramo 1-10 a otros tramos de la secuencia.

Otras conclusiones de este estudio son las siguientes:

- Para establecer relaciones lógicas ordinales entre los términos de cualquier tramo de la secuencia numérica es necesario que se apliquen esquemas lógico-matemáticos de seriación cíclica generados por el tramo 1-10.
- Los niños que únicamente usan el instrumento secuencial sin llegar a aplicar esquemas lógico-matemáticos de primer elemento para la determinación de posiciones ordinales en un tramo cuyo extremo inferior es superior a 10, no alcanzan el Estado VI de relaciones lógicas ordinales de la secuencia numérica.
- No es condición suficiente tener un método sistemático para determinar posiciones ordinales en la secuencia numérica y establecer con ello relaciones lógicas ordinales en cualquier tramo de la secuencia.
- Que un niño tenga aplique el instrumento secuencial en el tramo 1-10 de la secuencia numérica-alternancia y localice posiciones ordinales con ese instrumento en ese tramo no es condición suficiente para que determine posiciones lógicas ordinales en el tramo 1-10 usando alternancia como instrumento comparativo y extienda el instrumento secuencial a tramos cuyos extremos inferiores sean mayores que 10.
- El establecimiento del instrumento secuencial secuencia numérica-alternancia no es condición suficiente para establecer relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica usando la alternancia como instrumento de comparación. Ni siquiera, tampoco lo es, que el niño establezca el instrumento secuencial para manifestar relaciones lógicas ordinales entre los términos del tramo 1-10 de la secuencia numérica usando la alternancia como instrumento de comparación.

### 3.5 Conclusiones para la investigación

De la revisión de estudios específicos relacionados con la investigación que presentamos es de destacar, en primer lugar, la escasez de investigaciones relativas a las capacidades ordinales y recursivas en niños de corta edad. Este hecho es sumamente sorprendente si tenemos en cuenta el papel esencial que juegan los aspectos ordinales y recursivos tanto en la construcción del número



natural como objeto matemático como en la construcción de la aritmética natural y que estas capacidades se hallan presentes con especial relevancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje del número .

En relación con los *estudios cognitivos* sobre el número natural son dignas de consideración las siguientes conclusiones:

- La mayoría de las investigaciones enfatizan los aspectos operativos y heurísticos del número natural tomando como referencia su aspecto cardinal en detrimento del ordinal. Son estudios que se dirigen más a la detección de la precocidad de aspectos numéricos concretos que a la determinación de las condiciones que hagan posible la adquisición del número natural desde un punto de vista matemático, es decir, integrando su carácter recursivo con sus aspectos cardinal y ordinal.
- Los estudios destacan la importancia del conteo y su carácter funcional e instrumental en la adquisición de relaciones numéricas por parte de los sujetos.
- La secuencia numérica se analiza como componente del conteo pero sin tener en cuenta las relaciones ordinales y recursivas que existen entre sus términos. En este modelo, las investigaciones sobre la funcionalidad del conteo apuntan hacia el “Operador Cuantificador”, comparando los números cardinales para posteriormente localizarlos en la secuencia.

En relación con las *investigaciones neuropsicológicas*, destacamos las siguientes conclusiones:

- El concepto de número utilizado en neuropsicología coincide fundamentalmente con el utilizado por las teorías cognitivas (procesamiento de la información).
- Existe una relación profunda entre capacidades numéricas y visuoespaciales, como lo prueba el hecho de que niños de diferentes culturas aprendan a contar con los dedos.
- Los adultos tienden a representar mentalmente los números naturales en una línea orientada de izquierda a derecha, no como símbolos sino como cantidades analógicas o continuas. Aún cuando el hemisferio cerebral izquierdo se encarga de la aritmética exacta mientras que el derecho lo hace de la aproximada.
- Algunas técnicas aritméticas, como el aprendizaje y uso de las tablas de multiplicar, se codifican verbalmente mientras que las comparaciones y las aproximaciones o estimaciones de cantidades parecen ser independientes del lenguaje.

- Las actividades numéricas y, en general, las actividades matemáticas son formas de conocimiento superior cuya realización requiere de la colaboración de, entre otras, las áreas cerebrales visuoespacial, lingüística, cuantitativa y lógica, de las áreas implicadas en los distintos tipos de memoria y en la coordinación de todas ellas, además de la interacción de estas con las áreas atencionales y motivacionales. Este hecho avala la adecuación y la validez de la metodología multimedia en el tratamiento de la información numérica, dadas las grandes facilidades que ofrece para implementar correspondencias y relaciones visuales, espaciales y numéricas, así como representaciones virtuales de cantidades reales con las que el sujeto puede interactuar y quedar fácilmente registrado.

En relación con el trabajo de Ortiz (1997) hemos de resaltar las siguientes conclusiones:

- Un planteamiento evolutivo de la construcción del número por los sujetos ha de considerar las referencias espaciales y temporales para establecer relaciones entre números. El orden numérico y la linealidad quedan patentes en las representaciones gráficas de las relaciones numéricas.
- Desde un punto de vista evolutivo el sujeto puede llegar, mediante inferencias inductivas, al descubrimiento, interpretación y significación de los conocimientos numéricos y aritméticos.
- En los sujetos de menor edad se observan esquemas arraigados que indican el origen de sus rutinas aritméticas. Se trata de dos tipos de esquemas:
  - *Esquemas infralógicos* subyacentes a la propia construcción del número natural, tales como los que se refieren a aspectos topológicos intuitivos que incluyen, entre otros, la orientación en la recta numérica (atrás, bajando, saltarse números, hacia abajo, etc).
  - *Esquemas de aprendizaje memorístico* de la serie de los números naturales, considerada como una lista almacenada en la memoria. Aquí se incluye la acción denominada *contar ordinal* como estrategia recursiva utilizada por una amplia mayoría de los sujetos de menor edad.
- Las respuestas más frecuentes obtenidas en los distintos ítems de los estudios empíricos son las que señalan la tendencia general en las distintas edades y niveles, lo cual significa que la evolución que se

estudia se puede caracterizar en términos de los esquemas subyacentes a dichas respuestas.

- Debe estudiarse la existencia de un nivel inductivo numerativo duradero y persistente y anterior al nivel aditivo, cuyo inicio debe situarse en Educación Infantil y cuya culminación se produce en Educación Primaria. Este problema debe abordarse estudiando el origen del número en sus aspectos preinductivos no justificados por el inductivismo, los inicios de la acción de contar y el estudio de tareas propias de los estados preinductivos del modelo teórico de Ortiz, del que son especialmente relevantes para nuestra investigación los cinco primeros estados.

Del trabajo de Fernández (2001) son especialmente relevantes para nuestra investigación tanto las conclusiones de sus estudios exploratorio y empírico cualitativo como los niveles evolutivos de su modelo teórico.

De los trabajos de Ortiz (1997) y de Fernández (2001) se concluye que los modelos evolutivos son útiles no sólo como fuentes de tareas destinadas a contrastar las capacidades de los sujetos, sino también como marcos interpretativos de las acciones y de las capacidades de los mismos.

Por otra parte, se concluye que las relaciones lógicas ordinales de Fernández (2001) son funciones recursivas definidas sobre alguna parte finita o sobre la estructura ordinal del número natural como estructura recursiva e inductiva básica.

Entendemos, por tanto, que el trabajo de Fernández estudia el desarrollo en sujetos de 3 a 6 años de capacidades ordinales y recursivas entre los términos de la secuencia numérica y que en el trabajo de Ortiz (1997) se estudia el desarrollo de la inferencia inductiva como capacidad basada en las propiedades ordinales y recursivas del número. La inferencia inductiva hace posible el descubrimiento, interpretación y significación de los conocimientos numéricos y aritméticos como estadio previo al uso de la inducción como herramienta demostrativa de propiedades y relaciones numéricas y matemáticas en general y del propio pensamiento inductivo en el aprendizaje y la investigación matemática.

De todo ello queda pendiente la realización de un estudio del desarrollo de las capacidades ordinales y recursivas de los sujetos en los niveles prenumérico y preinductivo, lo que precisamente se aborda en la investigación que presentamos.



## 4

# LA TECNOLOGÍA MULTIMEDIA Y LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

### 4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los antecedentes de la metodología multimedia empleada en la presente investigación. Consideramos que el desarrollo de dicha metodología es una parte fundamental del estudio y no un mero recurso *ad hoc* utilizado para abordar un problema aislado y puntual. De hecho el peso del estudio recae tanto en el desarrollo de pensamiento ordinal de los sujetos como en la utilización de la tecnología multimedia como soporte para este tipo de investigaciones.

El capítulo comienza fijando el sentido en el que se entenderá el término *multimedia* en este trabajo así como las formas de inteligencia que los sujetos pueden usar en su interacción con los objetos multimedia. A continuación se aborda la interacción sujeto-ordenador, donde coincidimos con la posición de Brey (2005) que se basa en la idea de que los ordenadores actuales son tanto dispositivos cognitivos como dispositivos de simulación cuya interacción con los sujetos puede caracterizarse mediante funciones epistémicas y ontológicas; funciones que consideramos particularmente útiles para nuestra investigación y que definiremos más precisamente en función de los objetivos del estudio. Así mismo tendremos en cuenta que los ordenadores actuales presentan interfaces que se basan en las habilidades sensoriomotoras y visuoespaciales de los sujetos antes que en el pensamiento abstracto, lo que los hace particularmente útiles para su uso por los sujetos de corta edad.

Una vez analizadas las características del medio y de la interacción sujeto ordenador, pasaremos a analizar las actuales teorías del aprendizaje multimedia, los principios del aprendizaje que de ellas se derivan y de los que existe evidencia empírica suficiente. No haremos uso en la investigación de tales principios como principios de aprendizaje en sí mismo, sino, de acuerdo

con Mayer (2001), como principios a tener en cuenta en la construcción de tareas y actividades multimedia.

El capítulo finaliza con las conclusiones relevantes para la investigación.

#### 4.2 Multimedia. Componentes multimodales

En general, en todo acto cognitivo intervienen tres elementos indispensables: el sujeto, el medio y la interacción entre ambos. El medio, en este caso, va a estar constituido por lo que se suele denominar como *tecnología multimedia*, entendiendo por *multimedia* un término polisémico que, entre otras, puede tener las siguientes acepciones (Doolittle, 2002):

- Multimedia es el “uso de múltiples medios en una presentación” (Schwartz y Beichner, 1999, p. 8).
- Multimedia es el “uso combinado de varios medios, tales como películas, diapositivas, música e iluminación, especialmente con propósitos educativos o de entretenimiento” (Brooks, 1997, p. 17).
- Multimedia es “la información en forma de gráficos, audio, vídeo o películas. Un documento multimedia contiene otros medios distintos del texto” (Greenlaw y Hepp, 1999, p. 44).
- Multimedia incluye un programa de ordenador que incorpora “texto con al menos uno de los siguientes: audio o sonido sofisticado, música, vídeo, fotografías, gráficos 3-D, animaciones o gráficos de alta resolución” (Maddux, Johnson, y Willis, 2001, p. 253).
- Multimedia es “una presentación que incluye palabras, tales como texto impreso o texto hablado, e imágenes, tales como ilustraciones, fotografías, animaciones o vídeo” (Mayer, 2005a, p. 2).

En este trabajo entenderemos que el término *multimedia* se refiere a un *entorno virtual creado y ejecutado por un ordenador que incluye todos o algunos de los siguientes componentes multimodales: espacial y visual, lingüístico, audio, y gestual y de movimiento*. En la tabla 4.1, adaptada de Way (2003), se incluye una síntesis no exhaustiva de los diferentes modos y componentes multimodales.

<p><b>Modo espacial y visual</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Formato y posición.</li> <li>▪ Ángulos y perspectiva.</li> <li>▪ Imágenes y sus relaciones con el texto o con los sonidos.</li> <li>▪ Formas y tamaños.</li> <li>▪ Colores.</li> <li>▪ Secuencias de items.</li> </ul>	<p><b>Modo lingüístico</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Ausencia y/o presencia de palabras.</li> <li>▪ Elección y uso de palabras.</li> <li>▪ Presentación de texto.</li> <li>▪ Símbolos e iconos.</li> </ul>
<p><b>Modo Audio</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Música.</li> <li>▪ Sonido.</li> <li>▪ Silencio.</li> <li>▪ Diálogos y voces narrativas.</li> <li>▪ Expresiones, tono y timbre.</li> </ul>	<p><b>Modo gestual y de movimiento</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Movimiento: dirección y velocidad.</li> <li>▪ Interacción dinámica: causa y efecto.</li> <li>▪ Efectos de dramatización.</li> <li>▪ Expresiones faciales y lenguaje corporal.</li> </ul>

Tabla 4.1: Modos y componentes del funcionamiento multimodal multimedia.

Además de los modos y componentes descritos consideraremos que el entorno multimedia se encuentra dotado de un sistema de registro y almacenamiento de las acciones relevantes del sujeto en su interacción con los objetos virtuales. Este sistema se configura mediante variables adecuadas y archivos de registro que permitan el análisis posterior de la información recogida.

Por otra parte se puede tener en cuenta que los sujetos, en su interacción con los objetos multimedia, ponen, o pueden poner, en juego varios tipos de inteligencia o varios aspectos de la inteligencia, de los que Gardner (1983) enumera las siguientes:

- 1<sup>a</sup>. Lingüística. Aspecto de la inteligencia que se refiere a la escritura, lectura, comprensión del lenguaje hablado, invención de historias o resolución de juegos de palabras.
- 2<sup>a</sup>. Lógico–Matemática. Aspecto de la inteligencia que se refiere al reconocimiento de patrones, clasificación en categorías, establecimiento de relaciones y resolución de problemas aritméticos.
- 3<sup>a</sup>. Cinestésica–Corporal. Aspecto de la inteligencia que se refiere a las sensaciones y acciones corporales, atléticas y de dominio corporal en general.

- 4<sup>a</sup>. Espacial. Aspecto de la inteligencia que se refiere a la creación e interpretación de imágenes, dibujos y pinturas o cuerpos espaciales.
- 5<sup>a</sup>. Sonora. Aspecto de la inteligencia que se refiere a la música y, en general, a la interpretación de los sonidos.
- 6<sup>a</sup>. Interpersonal. Aspecto de la inteligencia que se refiere a la comunicación con los demás y a la comprensión de modos de ser y de motivaciones distintos a los propios.
- 7<sup>a</sup>. Intrapersonal. Aspecto de la inteligencia que se refiere a la comprensión de la propia forma de ser y a la automotivación.

Desde el punto de vista del diseño multimedia hemos de destacar las dos aproximaciones que define Mayer (2005a, pp. 7-10), la centrada en el sujeto y la centrada en la tecnología. Ambas serán tenidas en cuenta para la preparación e implementación de las tareas propias de la investigación que presentamos.

En relación con el factor sujeto utilizaremos la tecnología multimedia para el diseño de entornos virtuales adaptados a las características cognitivas de niños de 3 a 7 años y que permitan abordar el problema de investigación. En relación con la tecnología aprovechamos las características del medio para el almacenamiento de la información que genera la interacción de los sujetos con los objetos multimedia. El registro de dichas interacciones permitirá el análisis y el tratamiento posteriores de la información correspondiente, lo que facilita la obtención de los resultados y de las conclusiones del estudio. Abordaremos ambas cuestiones con más detalle en el capítulo dedicado a la metodología de la investigación.

Finalmente, creemos que la interacción sujeto  $\iff$  ordenador es compleja y que está dotada de características especiales que la singularizan en el sentido que se detalla en la sección siguiente.

### 4.3 Consideraciones epistémicas y ontológicas sobre la interacción sujeto–ordenador

Los ordenadores actuales poseen características y funcionalidades que los alejan del mero papel auxiliar como máquinas de cálculo o de simple almacenamiento de información. Así se establece en el trabajo de Brey (2005) sobre epistemología y ontología de la interacción sujeto–ordenador, quien identifica los ordenadores actuales como *dispositivos cognitivos* y como *dispositivos de simulación* que pueden estar integrados. Como dispositivos cognitivos, el autor concluye que los ordenadores extienden las facultades cognitivas



humanas complementándolas y mejorándolas, hasta el punto de que la colaboración entre mentes humanas y ordenadores llega a ser tan estrecha que puede hablarse de sistemas cognitivos híbridos que son parte humana y parte artificial. Por otro lado, como dispositivos de simulación, extienden el mundo en el sentido de que los entornos virtuales generados por ordenador y las estructuras sociales en Internet ofrecen extensiones del mundo “real” que se usan y son importantes para el entretenimiento, la actividad creativa, el aprendizaje y la actividad social. Por todo ello el autor asigna a los ordenadores una función epistémica como dispositivos cognitivos y una función ontológica como dispositivos de simulación.

Para fundamentar la función epistémica recurre a la noción de *artefacto cognitivo*, introducida por Norman (1993), quien los define como *dispositivos artificiales diseñados para mantener, operar y mostrar información con el fin de ofrecer una función representacional* en virtud de su capacidad para representar, almacenar, recuperar y manipular información.

Por otra parte, asumiendo el concepto de *cognición distribuida* de Salomon (1993), Hutchins (1995) y Perry (2003) (citados en Brey (2005)), su prolongación a la concepción filosófica de *mente extendida* de Clark y Chalmers (1998) (citado en Brey (2005)), la de *sistema cognitivo acoplado* de los mismos autores, las *acciones epistémicas* de Kirsh y Maglio (1994) (Brey (2005)) y distinguiendo entre *sistemas débilmente acoplados* y *sistemas fuertemente acoplados*, el autor analiza los sistemas de computación considerados como artefactos cognitivos.

En dicho análisis distingue tres tipos de relaciones que establecen los artefactos que amplifican el funcionamiento de los órganos humanos: *reemplazar, complementar y mejorar* las actividades del órgano. En el último caso, el artefacto mejora sus actividades cooperando con el órgano en una especie de *relación simbiótica*. Por ejemplo, un telescopio extiende la percepción visual asociándose con el ojo para formar una nueva unidad funcional capaz de realizar observaciones que ninguno de los dos es capaz de realizar por separado.

Asimismo, el autor observa que los tres papeles mencionados son visibles, en algún grado, en los sistemas computacionales e identifica la facultad relevante u “órgano” que extienden estos sistemas con nuestra facultad de cognición localizada en el cerebro, más concretamente en el neocortex según la neurociencia.

La idea del ordenador como sustituto del sistema cognitivo humano nunca se ha desarrollado plenamente, ni siquiera aproximadamente. En la actualidad se reconoce que el sueño de la Inteligencia Artificial (IA) de construir

una “mente humana” depende de avances muy significativos en investigación básica que de momento no se han hecho realidad. Hay también posturas que niegan incluso tal posibilidad\*.

Por el contrario, la idea del ordenador como complemento de la cognición humana siempre ha sido una idea poderosa que aún mantiene plena validez. En este papel, los humanos realizan la parte intuitiva y creativa de las tareas cognitivas, siendo también responsables de su estructura general y de sus objetivos, mientras que los sistemas de computación realizan autónomamente las partes más tediosas o que más tiempo consumen, definidas como “subrutinas”, de tales tareas cognitivas.

Brey (op. cit.) añade también que desde la aparición de los ordenadores personales ha surgido otra poderosa interpretación del papel de los mismos: la de herramienta versátil que manejamos directamente y que mejora nuestra propia capacidad para realizar los trabajos. En este papel, el ordenador no es una unidad cognitiva autónoma, sino una ayuda que mejora nuestras propias facultades cognitivas. La relación con el ordenador es, en este caso, más *simbiótica*: la ejecución de una tarea cognitiva depende de las capacidades de ambos, humanos y ordenadores, y del adecuado intercambio de información entre ellos.

En este papel complementario de la cognición humana, los ordenadores requieren de operarios humanos, de modo que sus operaciones no son enteramente autónomas. Sin embargo, la dependencia mutua es mayor cuando el ordenador funciona como una mejora de la cognición humana. En estos casos, el ordenador opera *en tándem* con la mente humana y la integración de las funciones cognitivas llega a ser tan significativa que el hombre y el ordenador pueden considerarse como una sola unidad cognitiva, un *sistema cognitivo híbrido* que es parte humana y parte artificial y en el que dos sistemas semiautónomos de procesamiento de la información cooperan en la realización de tareas cognitivas.

Con frecuencia, los ordenadores se acoplan con objetos informacionales, llevando a cabo acciones epistémicas sobre símbolos e imágenes almacenadas en memorias (incluyendo discos duros) o sobre las entradas de los usuarios con el fin de realizar autónomamente tareas cognitivas determinadas. Incluso el usuario puede ser el objeto epistémico de las acciones de los sistemas de computación cuando estos están programados para pedir instrucciones a los usuarios con el fin de realizar, de modo autónomo, tareas de procesamiento de la información adaptadas a las instrucciones recibidas.

En definitiva, el ordenador es un artefacto cognitivo especial que se dis-

---

\*Véase la nota al pie de la página 92.

tingue de otros en que es capaz de realizar tareas de forma autónoma y establecer relaciones simbióticas con los seres humanos para crear sistemas cognitivos híbridos. Pero no sólo eso; Brey argumenta que con la llegada de ordenadores con elevadas capacidades gráficas y multimedia estos han adquirido funciones nuevas no cognitivas desde el punto de vista del usuario. Así, cuando un ordenador se usa para realizar dibujos artísticos, para jugar o para escuchar música, no se está usando como artefacto cognitivo sino con una intención recreativa o de entretenimiento. Estas actividades pueden incluir actividades cognitivas, pero ni sus objetivos ni su intencionalidad lo son desde el punto de vista del usuario.

La mayoría de las funciones no cognitivas de los sistemas de computación dependen de modo crítico de las capacidades adquiridas recientemente por tales sistemas, como son las de realizar representaciones de modo gráfico y sonoro, simular o modelar objetos interactivos, estructuras y entornos. Estas capacidades, según el autor, resultan de la convergencia de dos tendencias (Floridi, 1999): la *extensión de la codificación digital* y la *visualización y manipulación*. La primera tiene que ver con el tratamiento y codificación digital de sonidos, imágenes y movimientos y con la etapa final de codificación de entornos virtuales tridimensionales inmersivos. La segunda tiene que ver con el desarrollo de formas análogas a las visuales y manipulables para acceder a la información digital, tales como las interfaces gráficas de usuario para los sistemas operativos o el software *WYSIWYG* \*.

Se entiende por *habilidades de simulación* el resultado de las habilidades representacionales y de modelado de los ordenadores. En este sentido, los ordenadores actuales son también *dispositivos de simulación* además de *dispositivos cognitivos* (Turkle, 1995). Precisamente, uno de los avances más significativos se ha producido en el campo de la simulación gráfica, buscando el perfeccionamiento del ordenador como artefacto cognitivo. La ventaja de las interfaces gráficas de usuario sobre las textuales o simbólicas es que las primeras se basan en nuestras *habilidades sensoriomotoras* para orientarnos en el espacio y para reconocer y manipular objetos. Las interfaces textuales o simbólicas, sin embargo, no hacen uso de las capacidades sensoriomotoras, sino que se basan en el pensamiento abstracto. Aquéllas suelen estar mejor desarrolladas que estas, por lo que es preferible, siempre que sea posible, tratar los datos y programas como objetos manipulables y visibles. En este sentido, la tendencia en el desarrollo del software ha sido la de elaborar siste-

---

\*“What You See Is What You Get”, es decir, “lo que se ve es lo que se obtiene” como resultado final, por ejemplo, en un procesador de texto con esta característica el aspecto de los documentos que vemos en la pantalla coincidirá con el resultado impreso, la calidad dependerá de la impresora.

mas operativos en los que datos, programas y procedimientos se convierten en iconos visuales y acciones como las de hacer *clic*, *arrastrar* y *desplazar*.

Con todo ello se ha extendido ampliamente el uso de aplicaciones no cognitivas orientadas al entretenimiento y la expresión creativa cuyo funcionamiento simula entornos físicos, objetos y sucesos así como utilidades con las que podemos interactuar en ese “mundo virtual”. Incluso, en algunos entornos, podemos interactuar verbalmente o no con los objetos generados por el ordenador.

Con este papel de dispositivo de simulación, el ordenador, más que como extensión de nuestras capacidades, funciona como una extensión de nuestro mundo. Los entornos virtuales interactivos generados por ordenador nos ofrecen nuevas estructuras para experimentar, buscar e interactuar con otros.

A pesar de que estas estructuras no son físicamente reales, son significativas o útiles para nosotros, a veces tanto como sus equivalentes físicos. Por tanto, pueden interpretar un papel funcional tan amplio y diverso como los papeles funcionales de muchas de las estructuras que encontramos en el mundo físico.

El papel funcional de los sistemas informáticos como dispositivos de simulación puede denominarse *ontológico*, ya que su función es generar o representar objetos y entornos que forman una ampliación del mundo físico. A esta función ontológica se añade la formación de grandes redes de ordenadores y específicamente de la red de redes, Internet. Estas redes han dado lugar a la formación de estructuras sociales complejas donde la mayoría o la totalidad de las mismas se realiza de modo digital. Como resultado de este proceso, el ciberespacio contiene estructuras sociales evolucionadas que definen realidades sociales nuevas para sus usuarios. Estas estructuras sociales no tienen por qué representarse necesariamente de modo gráfico, pero al igual que las representaciones gráficas, contribuyen a la función ontológica de los ordenadores contemporáneos: representan objetos con los que interactúan los usuarios y forman parte de su ontología cotidiana.

Para finalizar, Brey concluye que los sistemas informáticos desempeñan funciones sustancialmente diferentes según sean las características de los usuarios, de sus fines y de las interacciones con el ordenador; el autor habla de funciones epistémicas, ontológicas y ontológico-epistémicas que trascienden la concepción obsoleta de los ordenadores como meros dispositivos de procesamiento de la información. Antes bien, los ordenadores se usan cada vez con más frecuencia como dispositivos ontológicos que generan y sustentan nuevas realidades virtuales y sociales. Cada vez más, los ordenadores son para nosotros no sólo dispositivos que procesan información, sino puertas a

mundos en los que también habitamos. No podemos sino estar de acuerdo con las conclusiones de Brey.

En este trabajo partimos de la hipótesis de que la tecnología multimedia permite construir tareas bien adaptadas a las características cognitivas de los niños que intervienen en los estudios, es decir, la inclusión de las capacidades visuoespaciales, sensoriomotoras, sonoras y afectivo–emocionales propias del intervalo de edad que tratamos concuerda con las características cognitivas de los sujetos y permite abordar el problema de investigación. El conjunto de tareas a desarrollar incluirá funciones epistémicas, ontológicas y onto–epistémicas que redefinimos en nuestro caso en los siguientes términos:

- Las *funciones epistémicas* definirán el problema cognitivo ordinal a resolver por los sujetos en cada caso, por lo que tendrán que ver con el planteamiento realizado de las relaciones ordinales cuya evolución queremos observar, con los parámetros que intervienen para ello y de acuerdo con la forma en que los registramos e interpretamos.
- Las *funciones ontológicas* establecerán los entornos virtuales interactivos que se construyan para observar y evaluar las funciones anteriores; en este caso los juegos virtuales contextualizados en una película de amplia difusión y que incluirán componentes visuoespaciales, sonoras, psicomotrices y afectivo–emocionales.
- Las *funciones onto–epistémicas*, como conjunción de las dos anteriores, establecerán el diseño y guiarán el desarrollo de los ítems concretos con los que el sujeto va a interactuar usando los tipos de inteligencia descritos al comienzo de la sección y que se describen en Gardner (1983). Esta interacción es lo que vamos a registrar, analizar y evaluar a posteriori.

En relación con las primeras, consideramos que la tecnología multimedia permite, con grandes ventajas, implementar tareas significativas para estudiar la evolución del problema cognitivo planteado. En relación con las demás, hemos elegido un formato de juego para el entorno virtual desarrollado, dada la importancia del mismo a estas edades (Bishop, 1999) y de acuerdo con lo que establece Hirsch (1998, p. 11) al respecto:

“...el juego es instintivo y universal en los niños lo mismo que en muchos tipos de animales y ayuda a desarrollar actividades cognitivas básicas hasta transformarlas en cogniciones más integradas y complejas... estos aprendizajes *primarios* siguen una secuencia temporal en el desarrollo ontogenético del ser, que con toda razón puede denominarse *natural*, porque se ha comprobado que son transculturales y universales”.

La inclusión de las capacidades visuoespaciales en el tratamiento del problema de investigación, está justificada por las consideraciones realizadas en la subsección dedicada a la neurociencia y por su relación con las capacidades sensoriomotrices. A su vez, la inclusión de estas últimas lo está por las características de la etapa cognitiva en la que se hallan los sujetos, etapa sensoriomotriz piagetiana, y por las consideraciones realizadas en esta misma sección.

Otro factor por el que hemos tenido muy en cuenta, tanto el aspecto lúdico de las tareas como las habilidades visuoespaciales, sensoriomotrices, sonoras y afectivo-emocionales, es el hecho de que estas pueden tener relación con las habilidades primarias o innatas en el sentido de Geary (1995), citado en Geary (2006, p. 802). Téngase en cuenta que las capacidades o competencias ordinales que investigamos no forman parte del currículo escolar, por lo que en su formación pueden intervenir habilidades primarias, el propio desarrollo sensoriomotriz del niño y la interacción de ambos con el medio social en el que vive.

Por otra parte, como hemos visto en la subsección dedicada a la neurociencia, no parece posible que la cognición y el aprendizaje puedan desarrollarse adecuadamente mediante el uso del hemisferio cerebral izquierdo exclusivamente sin conexión con el hemisferio derecho. En este sentido, creemos que además de las componentes racionales pueden intervenir también en el aprendizaje componentes afectivo-emocionales. De hecho, para García y García (2001, p. 328),

“lo que se denominan funciones mentales superiores tienen su origen intersubjetivo común en sutiles intercambios emocionales que constituyen el cimiento de la actividad mental”.

De lo que se sigue que las tareas cognitivas bien adaptadas a los sujetos de una edad determinada o de un determinado intervalo de edad, deben incluir o tener en cuenta componentes afectivo-emocionales adecuados a la edad de los sujetos.

Todas estas consideraciones nos ayudan a fundamentar la plausibilidad de la hipótesis enunciada, que de ser cierta debemos esperar no sólo una buena acogida por parte de los sujetos que intervienen en el estudio, sino también una elevada motivación y un alto grado de atención a la hora de realizar las tareas.

Por último, las tareas podrían implementarse, sin recurrir a la tecnología multimedia, mediante escenarios, personajes y otros elementos de cartón o materiales que el niño pudiera mover físicamente. Las narraciones y pregun-

tas podrían realizarse por el investigador o por una tercera persona en lo que podemos llamar un escenario físico. Nos interesan especialmente aquí las respuestas a las siguientes cuestiones: ¿Qué distingue al escenario multimedia del correspondiente escenario físico?, ¿qué distingue una metodología multimedia de otras metodologías tradicionales?, ¿porqué podemos esperar mejor predisposición de los sujetos en la realización de las tareas con esta metodología?

Dejando al margen, por el momento, las consideraciones metodológicas relativas a la recogida de información, que puede ser difícil y/o limitada en el escenario físico, obligando a la intervención constante del investigador en las entrevistas, produciendo pérdidas de atención y otros inconvenientes derivados de la propia intervención, podemos suponer que ambos escenarios son cognitivamente equivalentes pero difieren sustancialmente en las funciones ontológicas y ontológico-epistémicas.

El escenario físico es cotidiano, estático y convencional para el niño; sus acciones se hallan mediatizadas por el investigador, por lo que, quizás, su imaginación y su capacidad sufran limitaciones. El propio escenario reproduce el entorno y las actividades escolares, variando sólo la función cognitiva. Sin embargo, el escenario multimedia es dinámico, responde a las acciones del sujeto, extiende su mundo cotidiano, introduce una función lúdica que trasciende el entorno escolar habitual, puede incluir elementos afectivo-emocionales adecuados, minimiza la intervención del investigador preservando la atención del sujeto y estimulando su imaginación. Puede ofrecer, en definitiva, nuevas funciones ontológicas y ontológico-epistémicas bien adaptadas al estado y al desarrollo cognitivo y que favorezcan la motivación.

#### 4.4 Teorías del aprendizaje multimedia

Las teorías sobre el aprendizaje multimedia pueden situarse en los siguientes niveles (van Merriënboer y Kester, 2005):

En un primer nivel, las teorías psicológicas describen los sistemas de memoria y los procesos cognitivos que ofrecen explicaciones de cómo los sujetos procesan diferentes tipos de información y de cómo aprenden en diferentes sentidos. Ejemplos de tales teorías son la *teoría del código dual* (Clark y Paivio, 1991; Paivio, 1986) y el *modelo de la memoria de trabajo* (Baddeley, 1992, 1997).

En un segundo nivel, las teorías del diseño de los mensajes que identifican principios multimedia y proporcionan directrices para la elaboración de mensajes multimedia que contienen, por ejemplo, gráficos y texto escri-



to, texto hablado, animaciones, etc. Ejemplos de tales teorías son la *Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia* (Mayer, 2001), el *Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos* (Schnotz, 2005), y la *Teoría de la Carga Cognitiva* (Sweller, 2005).

En un tercer nivel comienzan a aparecer teorías y modelos dedicados al diseño curricular que prescriben cómo desarrollar programas educacionales que contengan diversos elementos multimedia. Tal es el caso del *Modelo de Diseño Instruccional de Cuatro Componentes* de van Merriënboer y Kester (2005).

De los diferentes tipos de teorías que se han mencionado nos interesan para la investigación que presentamos las teorías de los dos primeros niveles. De ellas, nos centraremos en las del segundo nivel, ya que contienen a las del primero. Todas ellas son teorías que se hallan dentro del paradigma del procesamiento de la información. Veamos en lo que sigue una revisión de las principales teorías, un análisis comparativo de las mismas, una relación detallada de lo que se conoce como *principios del aprendizaje multimedia* y una relación de las principales consecuencias para el estudio que se desarrolla en la presente tesis doctoral.

#### 4.4.1 Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia de Mayer

La *Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia* de Mayer (2001), en adelante TCAM, asume la *teoría del código dual* de Paivio, Clark y Paivio (1991) y Paivio (1986), y el *modelo de la memoria de trabajo* de Baddeley (1986, 1992, 1999).

La teoría, que se ilustra en el diagrama explicativo de la figura 4.1, se formuló tras quince años de investigación del autor y de sus colaboradores en el campo objeto de estudio.

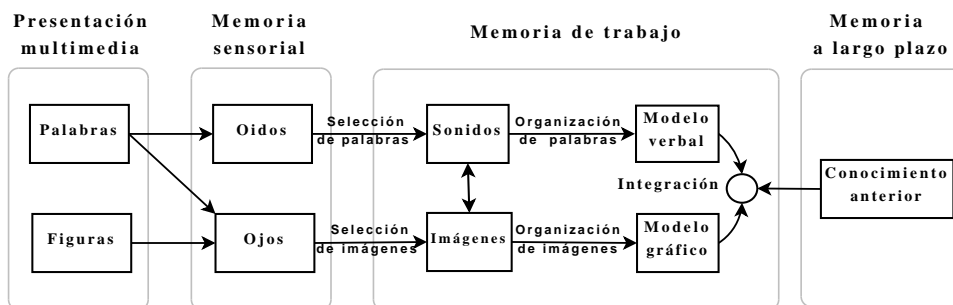


Fig. 4.1. Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia de Mayer.



El modelo incluye una definición de multimedia acorde con la teoría del código dual (Mayer, 2005b) y se basa en los siguientes supuestos (Mayer, 2001, pp. 41 y ss.):

- 1º. La información visual y auditiva se procesa a través de dos canales separados y distintos.
- 2º. La capacidad de procesamiento de información para cada uno de los dos canales es limitada.
- 3º. El proceso de información en cada canal es un proceso cognitivo activo diseñado para construir representaciones mentales coherentes.

Que se describen con más detalle en la tabla 4.2 incluyendo referencias relacionadas.

En relación con el primer supuesto, hemos de indicar que además del canal dual visual/auditivo correspondiente a la *modalidad sensorial* la teoría asume también el canal dual correspondiente a los modos de presentación, esto es, canales separados para el procesado verbal (palabras impresas o habladas) y el no verbal (imágenes, vídeo, sonido, animación). En este supuesto, la modalidad sensorial está más relacionada con el trabajo de Baddeley, mientras que los canales asociados a los modos de presentación lo están con el de Paivio. Los cuatro canales actúan y pueden interactuar en la integración final de la información que propone la teoría.

El concepto de capacidad limitada de la consciencia tiene una larga historia en psicología; algunos ejemplos modernos son los ya citados de Baddeley, Chandler y Sweller (op. cit.). Al parecer, la capacidad de proceso de información en los sujetos humanos se halla severamente limitada, al menos en lo que se refiere a los cuatro canales mencionados (Mayer, 2005b, p. 35). Las limitaciones en la capacidad de proceso fuerzan al individuo a tomar decisiones sobre las piezas de la información entrante a las que debe prestar atención, sobre el grado en que debe construir conexiones entre las piezas de información seleccionadas y sobre el grado en que debe construir conexiones entre las anteriores y el propio conocimiento disponible. En este orden de cosas, las *estrategias metacognitivas* son técnicas para localizar, monitorizar, coordinar y ajustar estos recursos cognitivos limitados. Se trata de estrategias que juegan un papel central en las teorías modernas de la inteligencia (Sternberg, 1990) y constituyen el núcleo de lo que Baddeley (op. cit.) llama el *centro ejecutivo*, es decir, el sistema que controla la localización de los recursos cognitivos.

El aprendizaje activo ocurre, según Mayer (2005b), cuando el sujeto aplica procesos cognitivos que dan sentido al material de entrada. La salida del

proceso cognitivo activo consiste en la construcción de representaciones mentales coherentes, de modo que el proceso activo puede considerarse como un proceso de construcción de *modelos mentales* o *estructuras de conocimiento*, algunas de las cuales son la *comparación*, la *generalización*, la *enumeración* y la *clasificación* (Cook y Mayer, 1988).

Supuesto	Descripción	Citas relacionadas
Canales duales	Los humanos poseemos canales separados para el proceso de la información visual y auditiva	Paivio (1986), Baddeley (1986) y (1999)
Capacidad limitada	La cantidad de información que puede procesar cada canal, en un momento dado, es limitada para los sujetos humanos	Baddeley (1986) y (1999), Chandler y Sweller (1991)
Proceso activo	Los humanos participamos activamente en el aprendizaje atendiendo a la información de entrada que es relevante, organizando la información seleccionada en representaciones mentales coherentes e integrando las representaciones mentales con el conocimiento del que ya disponemos	Mayer (2001), Wittrock (1989)

Tabla 4.2: Supuestos de la TCAM, Mayer(2005b, p.34).

Por otra parte, la teoría considera esenciales para el aprendizaje activo los tres procesos cognitivos siguientes: selección del material relevante, organización del material seleccionado e integración del mismo con los conocimientos anteriores. Y los tres tipos de memorias de almacenamiento siguientes: la memoria sensorial, la memoria de trabajo y la memoria a largo plazo. La primera almacena por un breve periodo la información visual y auditiva procedentes de la presentación multimedia. La segunda tiene un papel central, pues se usa para manipular y aprovechar temporalmente el conocimiento que se forma en la consciencia mediante la integración de la información procesada a lo largo de los canales (la mayoría de los procesos cognitivos se ejecutarían en esta memoria, aunque la información se almacena en ella durante intervalos pequeños de tiempo). Finalmente, la memoria a largo plazo corresponde al almacén de conocimientos durante períodos largos de tiempo; el material recuperado de esta memoria se volcaría en la memoria de trabajo

y la síntesis integrada con el material procesado en las entradas pasaría a formar conocimientos nuevos que se volverían a almacenar en ella.

Además, la teoría postula que para que el aprendizaje en un entorno multimedia sea significativo, el sujeto debe participar en los siguientes procesos cognitivos:

- 1<sup>a</sup>. Selección de palabras relevantes para su proceso en la memoria de trabajo verbal.
- 2<sup>a</sup>. Selección de imágenes relevantes para su proceso en la memoria de trabajo visual.
- 3<sup>a</sup>. Organización de las palabras seleccionadas en un modelo mental verbal.
- 4<sup>a</sup>. Organización de las imágenes seleccionadas en un modelo mental visual.
- 5<sup>a</sup>. Integración de las representaciones verbales y visuales entre sí y también con el conocimiento anterior.

Estos cinco procesos no tienen porqué ejecutarse sucesivamente, sino que el sujeto debe combinar los procesos de diferentes maneras, coordinándolos y monitorizándolos para que el aprendizaje multimedia se realice con éxito (Mayer, 2005b).

Aún cuando todos los procesos son esenciales para la construcción del conocimiento, el relativo a la integración es crucial, por cuanto el sujeto debe conectar entre sí y con los conocimientos anteriores las representaciones verbal y gráfica construidas previamente. Mayer llama a este proceso *integración de palabras e imágenes*, puesto que requiere construir conexiones entre porciones correspondientes de los modelos verbal y gráfico y también con el conocimiento anterior almacenado en la memoria a largo plazo. El proceso tiene lugar en las partes verbal y visual de la memoria de trabajo, requiriendo la coordinación de ambas y el uso eficiente de la capacidad cognitiva. La información adquiere sentido en este proceso, pues el sujeto debe focalizar su actividad en las estructuras de las representaciones visuales y verbales y utilizar sus conocimientos anteriores para coordinar el proceso de integración.

La teoría también postula las cinco formas de representación que se mencionan esquemáticamente en la tabla 4.3 y que reflejan el estado en el procesamiento de la información.

Finalmente, cuando se construye el nuevo conocimiento en la memoria de trabajo, pasa a almacenarse en la memoria a largo plazo y puede usarse como soporte de nuevos aprendizajes.

Como consecuencias instruccionales Mayer y sus colegas han enunciado varios principios en los que fundamentar el aprendizaje multimedia, Mayer (2001). Trataremos estos principios más adelante.

Tipo de conocimiento	Localización	Ejemplo
Palabras y gráficos	Presentaciones multimedia	Sonidos procedentes de los altavoces del ordenador
Representaciones acústicas e icónicas	Memoria sensorial	Sonidos recibidos por los oídos
Sonidos e imágenes	Memoria de trabajo	Sonidos e imágenes seleccionados
Modelos verbales y gráficos	Memoria de trabajo	Modelos mentales
Conocimientos anteriores	Memoria a largo plazo	Esquemas relacionados con la información recibida

Tabla 4.3: Las cinco formas de representación en la TCAM.

#### 4.4.2 Teoría de la Carga Cognitiva de Sweller

Se trata de una teoría que considera y organiza las implicaciones de la capacidad limitada de la memoria de trabajo para el diseño instruccional y centra su atención en las formas mediante las cuales la instrucción impone una carga cognitiva a los sujetos. Sus fundamentos apelan a la psicología evolucionista moderna, aunque no focalizan la atención en los tipos de procesamiento de la información involucrados en el aprendizaje multimedia.

El propósito de la teoría consiste en integrar el conocimiento de las estructuras cognitivas humanas y los principios del diseño instruccional (Sweller, 2005, p. 19). El punto de partida se sitúa en las relaciones existentes entre la memoria de trabajo y la memoria a largo plazo, elementos fundamentales de la teoría que se describen a continuación.

**La Memoria a largo plazo.** Se trata de un tipo de memoria caracterizada por almacenar enormes cantidades de información durante intervalos de tiempo muy largos y tener por ello un papel crucial en casi toda la actividad cognitiva humana. Sweller (2003) considera que este tipo de memoria tiene el mismo papel en la cognición humana que el código genético en biología, de manera que al igual que la información almacenada en el código genético ha

sido determinada por la adaptación al entorno (selección natural), la información almacenada en la memoria a largo plazo lo ha sido por la adaptación cognitiva al entorno.

La importancia de la acumulación de conocimientos en la memoria a largo plazo como objetivo primario de la instrucción no debe confundirse con el aprendizaje memorístico. El aprendizaje se define como una alteración en la memoria a largo plazo, de tal modo que si nada cambia en esta memoria nada ha sido aprendido; por tanto, el principal objetivo de la instrucción debe ser producir alteraciones apropiadas en la memoria a largo plazo.

Sweller (2005) considera que en el aprendizaje memorístico no se establecen las conexiones esenciales que se producen gracias a la comprensión y que se almacenan en la memoria a largo plazo en forma de *esquemas* o constructos cognitivos que permiten que elementos de información múltiples sean sintetizados y categorizados como elementos más simples. Estos esquemas se van almacenando en la memoria a largo plazo y son sus interacciones con la información de entrada las que producen el significado y el sentido de los nuevos conocimientos. Cuando un esquema ha sido usado en repetidas ocasiones, pasa a procesarse de forma automática sin control consciente, de manera que la memoria a largo plazo almacena ambos tipos de esquemas, de ejecución consciente y de ejecución automática. En el caso multimedia, estos esquemas pueden ser relativos a información gráfica o verbal, hablada o escrita.

**La Memoria de trabajo.** Se trata de un tipo de memoria limitada en la que sólo se pueden almacenar entre cinco y ocho elementos de información, se pueden procesar, en el sentido de combinar, contrastar o manipular, entre dos y cuatro elementos (Miller, 1956) y la información se mantiene durante un tiempo limitado. Peterson y Peterson (1959) (en Sweller (2005)) encontraron que la mayoría de los contenidos de la memoria de trabajo se pierden al cabo de veinte segundos.

Según Sweller (2005) estas características de la memoria de trabajo se han seleccionado en la evolución de la especie, pues una memoria de trabajo con mayores capacidades sería más lenta e ineficaz. En consecuencia, para que un sujeto aprenda conocimientos nuevos debe utilizar los mismos sistemas de proceso de la información que utilizan las especies para aprender a adaptarse a un entorno dado. Por otra parte, cuando el conocimiento está disponible, bien procedente de otra persona o fuente o en la propia memoria a largo plazo, el sujeto lo puede utilizar, pero cuando no está disponible, el ensayo y error es la única alternativa. Los diseños instruccionales deben tener en

cuenta este hecho y encontrar alternativas eficaces al aprendizaje por ensayo y error.

**Multimedia y limitaciones de la Memoria de trabajo.** Los modelos actuales suponen que la memoria de trabajo está formada por múltiples canales o procesadores. El modelo de Baddeley (1992), probablemente el más influyente, supone que este tipo de memoria consiste en un centro ejecutivo coordinador y dos subsistemas: un canal visuo/espacial para tratar con los objetos bi y tridimensionales (información visual), y un canal fonológico para tratar con el material verbal (información auditiva). Ambos canales parece que son parcialmente independientes, en contraposición a la idea a favor del papel coordinador del centro ejecutivo.

Por otra parte Penney (1989) proporciona evidencias de que el uso apropiado de los dos subsistemas puede incrementar la capacidad de la memoria de trabajo. Por tanto, se facilita el aprendizaje si la instrucción se diseña de modo que el sujeto use los dos procesadores, tesis defendida por Mayer (2001) para el aprendizaje multimedia.

**Relaciones entre la Memoria a largo plazo y la Memoria de trabajo.** Las limitaciones de capacidad de la memoria de trabajo se refieren exclusivamente a la información nueva que llega procedente del sistema sensorial; no hay limitaciones de capacidad ni duración para la información que llega procedente de la memoria a largo plazo, que de hecho supone una gran expansión para la memoria de trabajo y hace que las diferencias individuales básicas en la capacidad de la memoria de trabajo sean irrelevantes en virtud de las enormes alteraciones que ocurren en este procesador cuando trata con la información organizada de la memoria a largo plazo (Sweller, 2005).

Según Sweller (2003) el funcionamiento de la memoria de trabajo puede entenderse metafóricamente como un segmento continuo. En uno de sus extremos, las limitaciones son críticas cuando la memoria trata con información nueva adquirida por vía sensorial; a medida que aumenta la familiaridad del sujeto con la información, es decir, a medida que la memoria de trabajo utiliza más información procedente de la memoria a largo plazo, disminuyen sus limitaciones. Finalmente, en el otro extremo, cuando trata con información incorporada a la memoria a largo plazo en forma de esquemas bien enraizados o automatizados, sus limitaciones llegan a ser irrelevantes. Es decir, el grado en que se manifiestan las limitaciones de la memoria de trabajo, depende del grado en el que la información con la que tiene que tratar el sujeto se haya organizado en la memoria a largo plazo. Por tanto, las características y el

funcionamiento de la memoria de trabajo dependen de modo crítico de la información que se haya almacenado en la memoria a largo plazo (Sweller, 2005).

Las relaciones entre la memoria de trabajo y la memoria a largo plazo pueden usarse también para explicar que la comprensión ocurre cuando todos los elementos relevantes de la información se procesan simultáneamente en la memoria de trabajo (Marcus, Cooper y Sweller, 1996) (en Sweller (2005)). Cuando tratamos con material nuevo a aprender, pueden llegar a la memoria de trabajo demasiados elementos, esenciales o no, cuya comprensión no se producirá hasta que sea posible procesarlos simultáneamente. Mientras estudiamos el material, los elementos son organizados y combinados formando esquemas que se almacenan en la memoria a largo plazo. Según los autores, sólo se producirá la comprensión del tópico cuando la construcción de esquemas y la automatización hayan progresado hasta el punto en el que todos los elementos esenciales puedan procesarse simultáneamente en la memoria de trabajo.

Basándose en estas interacciones, Sweller (2005) define la *comprensión* como la habilidad para procesar simultáneamente los elementos requeridos\* en la memoria de trabajo, considerando que las relaciones entre ambos tipos de memoria son centrales para el estudio de la comprensión. Del mismo modo, confronta estas relaciones con la analogía biológico-evolucionista para explicar que cantidades enormes de información organizada pueden transmitirse de generación en generación, pero las alteraciones grandes del genoma no pueden organizarse para su transmisión. Las alteraciones aleatorias por ensayo y error son inviables y, por tanto, solo serán viables alteraciones relativamente pequeñas.

Por otra parte, el autor argumenta que podemos usar y usamos una cantidad enorme de información organizada esquemáticamente y almacenada en la memoria a largo plazo, pero si falta orientación directa a través de la instrucción, los cambios en la memoria a largo plazo no pueden organizarse. Deberíamos utilizar para ello intentos aleatorios seguidos de ensayo y error, y estos procedimientos no dan lugar a cambios rápidos, masivos y efectivos en la memoria a largo plazo. Las alteraciones deben ser pequeñas, y, como consecuencia, la capacidad de la memoria de trabajo debe ser pequeña cuando tratamos con información nueva.

Argumenta también que los esquemas almacenados en la memoria a largo plazo actúan como centros ejecutivos de la memoria de trabajo, indicando

---

\*Sweller no aclara si se trata de los elementos necesarios, de los suficientes o de ambos. Cuestión que es relevante.

qué debemos hacer y, también, cuándo y cómo debemos hacerlo. Es decir, que la información almacenada en la memoria a largo plazo dirige el modo en el que se procesa la información en la memoria de trabajo. Es más, argumenta que los esquemas aprendidos no solo actúan como centros ejecutivos, sino que, además, son los únicos centros ejecutivos concebibles. Pero, así como ninguna función ejecutiva central puede dirigir la evolución por selección natural, tampoco los centros ejecutivos no aprendidos pueden dirigir la información en la memoria de trabajo. En ambos casos, si no hay disponible ninguna información adquirida previamente, la toma de decisiones puede ocurrir solamente mediante intentos aleatorios seguidos de ensayo y error.

**Consecuencias Instruccionales.** De acuerdo con el autor, la información proporcionada por otros puede actuar también como centro ejecutivo de la memoria de trabajo, es decir, que el conocimiento de otros sujetos, transmitido en forma hablada o escrita, puede actuar como centro ejecutivo si los esquemas propios no estuvieran disponibles. Es más, el conocimiento de otras personas puede actuar como centro ejecutivo solo si está disponible de forma adecuada.

Como ejemplo de centros ejecutivos con una pequeña probabilidad de adecuación señala los derivados de la metodología de aprendizaje por descubrimiento, por considerar que en ella juegan un papel primario los intentos aleatorios con ensayo y error. Indica también que no hay nada en nuestra arquitectura cognitiva que sugiera que el intento aleatorio seguido de ensayo y error sea una estrategia cognitiva superior a la instrucción directa guiada. Y propone esta última como un buen sustituto de los propios esquemas ausentes, al permitir al sujeto desarrollar los propios esquemas sin participar en las dificultades y pérdidas de tiempo características de los sistemas instruccionales basados en el aprendizaje por ensayo y error.

De todo ello deduce la necesidad de que la instrucción directa guiada se organice en función de las estructuras y características de la arquitectura cognitiva humana, proponiendo la teoría instruccional denominada *teoría de la carga cognitiva*, según la cual cuando la información nueva se procesa en la memoria de trabajo, impone a la misma una *carga cognitiva*\* compuesta por grados variables de cargas de los siguientes tipos:

- Carga cognitiva *extrínseca*.
- Carga cognitiva *intrínseca*.
- Carga cognitiva *efectiva*.

---

\*Carga impuesta a la memoria de trabajo por la información que está siendo presentada.



La carga cognitiva extrínseca la producen los diseños instruccionales inapropiados que ignoran las limitaciones de la memoria de trabajo y no focalizan sus recursos en la construcción de esquemas ni en la automatización.

La carga cognitiva intrínseca es la carga cognitiva debida a la complejidad natural de la información que debe procesarse, que depende de los niveles de interdependencia de los elementos de la información. Por último, la carga cognitiva efectiva (*germane*), Paas y van Merriënboer (1994) (en Sweller (2005)), es la debida al esfuerzo realizado por el sujeto en la construcción de esquemas y en la automatización. Esta carga se favorece proporcionando a los sujetos ejemplos resueltos variados relacionados con la información a procesar. Las tres cargas son aditivas y su suma es la carga cognitiva total impuesta a la memoria de trabajo, Sweller (2005).

Los objetivos de la instrucción deben ser, por tanto, reducir la carga cognitiva extrínseca debida a procedimientos instruccionales inapropiados, reducir en la medida de lo posible la carga cognitiva intrínseca de los contenidos y aumentar la carga cognitiva efectiva mediante diseños instruccionales que incorporen las características y las funciones de la arquitectura cognitiva humana propuestas por la teoría.

De entre los principios de diseño instruccional basados en esta teoría, son relevantes para el aprendizaje multimedia, el principio de los *casos resueltos*, el de la *atención dividida*, el de *modalidad*, el de *redundancia* y el de los efectos de *inversión de competencia*. Los trataremos más adelante, integrados en los principios generales del aprendizaje multimedia que proponen las tres teorías presentadas.

La investigación base de la teoría se dirigió inicialmente a disminuir la carga extrínseca. Desde hace cinco o seis años hasta la actualidad, los estudios se han centrado en las cargas intrínseca y efectiva, y en su influencia en el nivel de competencia de los sujetos. Tres nuevos campos de investigación de la teoría se ocupan de:

- Desarrollar métodos que ayuden a los aprendices a sobrellevar la dificultad intrínseca de las tareas de aprendizaje. Por ejemplo, si la tarea es tan complicada que disminuir la carga extrínseca no es suficiente, es necesario disminuir la carga intrínseca a través de la simplificación en las primeras fases del aprendizaje.
- Desarrollar métodos para incrementar el esfuerzo de los estudiantes en aprender, o sea, aumentar la carga efectiva. Estos métodos tratan de incrementar la motivación del alumno y su participación, dejándolo manipular e interactuar con el material de aprendizaje.

- Desarrollar métodos instruccionales dinámicos que se adapten a las necesidades de los individuos. Estos métodos tratan de medir continuamente el nivel de competencia a partir del rendimiento y la carga cognitiva y adaptan de manera dinámica la instrucción a las necesidades de los aprendices.

#### 4.4.3 *Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos de Schnotz y Bannert*

Este modelo, en adelante MICTG, considera dos tipos de representaciones externas: descriptivas y gráficas, Schnotz (2005). Las *representaciones descriptivas* son simbólicas, es decir, formadas por signos cuya relación con su referente es convencional y arbitraria. Las *representaciones gráficas* son icónicas, es decir, formadas por signos que son similares a sus referentes o están relacionados con ellos mediante características estructurales comunes.

Ambos tipos de representación tienen usos diferentes para propósitos diferentes. Schnotz (2005) considera que las descriptivas tienen un poder representativo mayor que las gráficas. Así, por ejemplo, mientras que con las descriptivas es muy sencillo representar conjunciones, disyunciones o negaciones, las representaciones gráficas pueden expresar negaciones pero en las conjunciones o en las disyunciones presentan más dificultades y pueden ser ambiguas.

Otra distinción entre ambas es que las representaciones gráficas abarcan clases específicas de información en su totalidad, lo que no sucede con las representaciones descriptivas. Así, por ejemplo, la imagen de un objeto no está limitada a la información sobre su forma, sino que contiene también información sobre su tamaño, sus características físicas, su orientación en el espacio, etc. Sin embargo en una descripción es posible solamente mencionar algunas características geométricas de una figura o especificar solamente la forma del objeto sin proporcionar información sobre su tamaño u orientación. Por tanto, las representaciones gráficas son especialmente útiles para elaborar inferencias ya que la información nueva deducida se puede extraer directamente de la representación.

Según Schnotz (2005), la distinción entre representaciones descriptivas y gráficas se aplica también a las representaciones mentales, idea que utilizan Schnotz y Bannert (2003) para proponer un marco teórico para el análisis de la comprensión textual y gráfica tal como se muestra en la siguiente figura 4.2.

El modelo incluye dos canales, uno verbal y otro gráfico, para el almacenamiento y el procesamiento de la información. El canal verbal comprende el

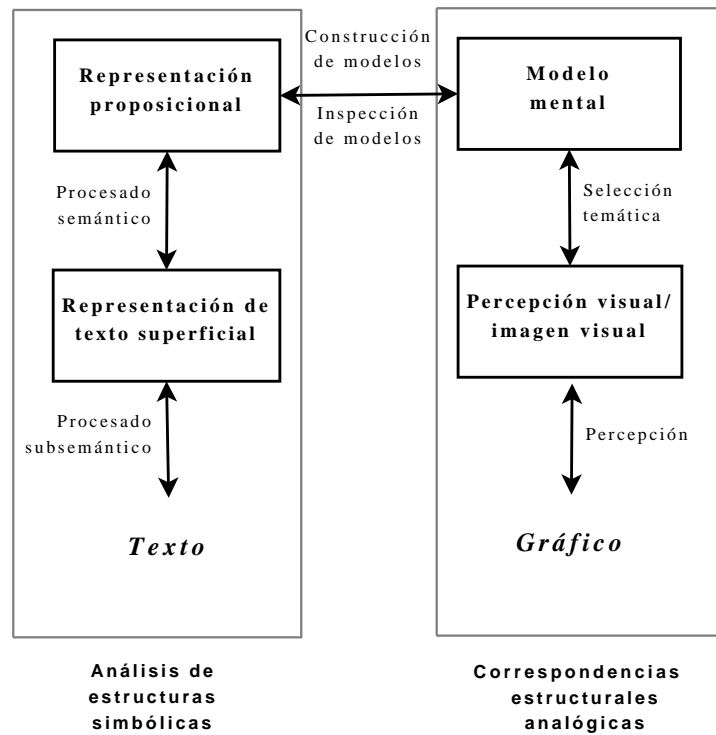


Fig. 4.2. Canles representacionales en la comprensión de texto y gráficos según el MICTG.

texto externo, la representación mental de la estructura superficial del texto y la representación mental proposicional del contenido semántico del texto; la información se procesa en este canal mediante procesamiento simbólico. El canal gráfico comprende el gráfico externo, la imagen visual del gráfico y el modelo mental del referente, la información se procesa en este canal mediante correspondencias estructurales analógicas.

Este marco corresponde al concepto de código dual de Paivio (1986). Sin embargo, al contrario que la teoría tradicional del código dual, este modelo supone que se forman múltiples representaciones en ambos canales en la comprensión de texto y gráficos, Schnotz (2005). Además, al igual que las dos teorías anteriores, este modelo incorpora tres sistemas de memoria con funciones similares: la memoria de trabajo, los registros sensoriales y la memoria a largo plazo.

En lo referente a la memoria de trabajo, este modelo asume el de Baddeley (1986) con el centro ejecutivo y los dos subsistemas visual y auditivo, parcialmente independientes, especializados en los correspondientes tipos de

información. Así como las limitaciones en la capacidad de esta memoria en lo referente a la información nueva de entrada. Más información sobre otros posibles subsistemas de la memoria de trabajo, implicados en la comprensión textual o en la construcción de modelos mentales puede verse en Schnotz (2005).

Los registros sensoriales tienen un papel análogo al de la memoria sensorial en las teorías anteriores. Pues el modelo, sin excluir otros, se concentra en los canales sensoriales visual y auditivo.

En el modelo, la memoria a largo plazo parece jugar un papel análogo al que desempeña en la teoría de la carga cognitiva de Sweller, incorporando los *esquemas cognitivos*, sin definirlos explícitamente, Schnotz (2005).

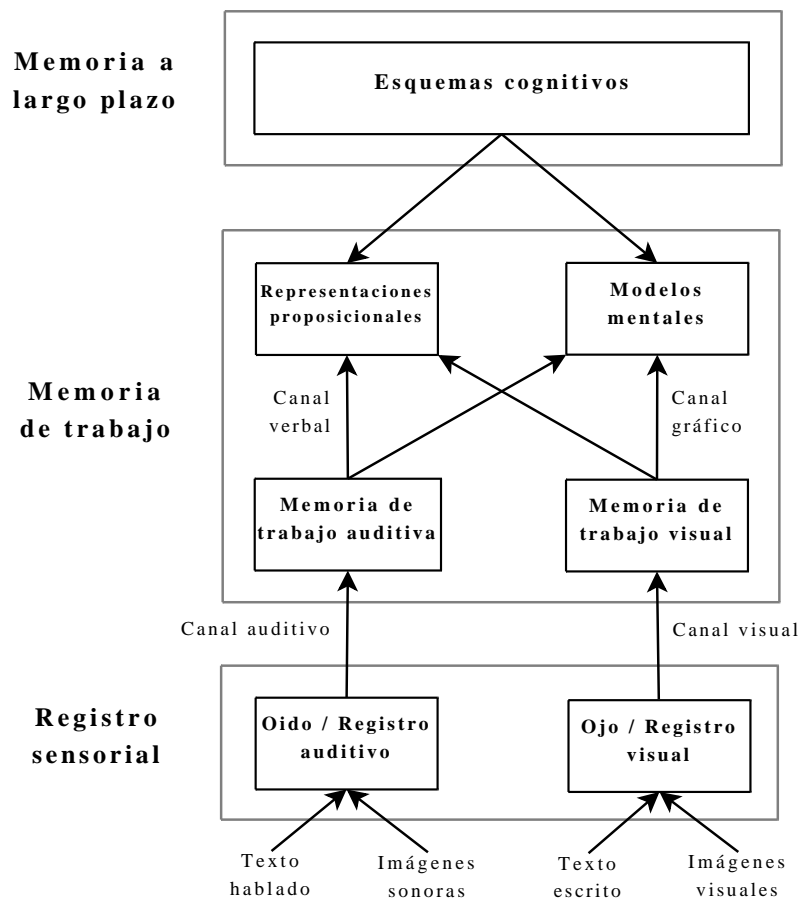


Fig. 4.3. Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos.

Específicamente, el modelo integra los conceptos de sistema de memoria múltiple, Atkinson y Shiffrin (1971); memoria de trabajo, Baddeley (1986); y el código dual de Paivio (1986). Además integra la idea de las representaciones mentales múltiples en la comprensión de texto y gráficos, Kosslyn (1994) y van Dijk y Kintsch (1983); así como ideas de la TCAM de Mayer (2001) y del modelo de la comprensión de texto y gráficos de Schnotz y Bannert (2003).

El modelo (figura 4.3) está basado en los supuestos siguientes, Schnotz (2005):

- ❖ La comprensión de texto y gráficos tiene lugar en una arquitectura cognitiva que incluye una memoria de trabajo de capacidad limitada, modalidades específicas de registros sensoriales como sistemas que recogen la información de entrada y una memoria a largo plazo.
- ❖ La información verbal, esto es, el texto escrito o hablado, y la información gráfica, es decir, las imágenes visuales y auditivas o sonoras, son transmitidas a la memoria de trabajo por los canales visual y auditivo, los cuales tienen capacidad limitada para procesar y almacenar la información.
- ❖ El procesado de la información en la memoria de trabajo tiene lugar en dos canales representacionales diferentes con capacidad limitada para procesar y almacenar la información: los canales verbal y gráfico. La información procedente del texto hablado o escrito es procesada en el canal verbal, mientras que la información procedente de imágenes visuales o sonoras es procesada en el canal gráfico.
- ❖ La comprensión de texto y gráficos son procesos activos en los que los individuos participan construyendo estructuras coherentes de conocimiento procedentes de la información externa disponible, verbal y gráfica, y de sus conocimientos anteriores.

En el modelo pueden distinguirse dos niveles de procesamiento, uno perceptual y otro cognitivo. El nivel perceptual se refiere a la transferencia de información entre el entorno exterior y la memoria de trabajo. Y el nivel cognitivo se refiere al procesamiento de la información en la memoria de trabajo y al intercambio de información entre la misma y la memoria a largo plazo. Este nivel está caracterizado por el funcionamiento de los canales verbal y gráfico.

El *aprendizaje significativo* según este modelo, Schnotz (2005), requiere un conjunto de procesos cognitivos coordinados incluyendo la selección de la información, la organización de la misma, la activación del conocimiento

anterior y la formación activa de coherencia por integración de la información procedente de diferentes fuentes: textos hablados o escritos e imágenes visuales y sonoras.

Para revisar la evidencia empírica del modelo y los efectos positivos y negativos de la combinación de texto y gráficos en distintos contextos de aprendizaje, veáse Schnotz (2005, pp. 60-64).

Como consecuencias instruccionales Schnotz (2005) obtiene varios principios para el diseño, algunos coincidentes con los de la TCAM de Mayer (2001), y otros que son propios. Los trataremos más adelante, tras la comparación de las tres teorías.

## 4.5 Conclusiones y consecuencias para la investigación

### 4.5.1 *Un análisis comparativo de las teorías del aprendizaje multimedia*

Mayer (2005b, pp. 45-46), realiza un estudio comparativo que incluye la Teoría de la Carga Cognitiva de Sweller, TCC, y el Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Graficos de Schnotz y Bannert, MICTG.

En relación con la primera considera que, al igual que la TCAM, incluye canales separados para tratar con el material auditivo y visual, y enfatiza la capacidad limitada de la memoria de trabajo. Como en la TCAM, la arquitectura del procesamiento de la información humana permite varios tipos de representaciones: los *elementos*, que corresponden a *palabras* y *gráficos* en la presentación multimedia, los *elementos en la memoria de trabajo*, que corresponden a los *modelos verbal y gráfico* en la misma y los *esquemas* en la memoria a largo plazo que corresponden al conocimiento en esta memoria. La TCC elabora las implicaciones de la capacidad limitada de la memoria de trabajo para el diseño instruccional y centra su atención en las formas mediante las cuales la instrucción impone una carga cognitiva a los sujetos. No está focalizada, sin embargo, en los tipos de procesamiento de la información involucrados en el aprendizaje multimedia.

En relación con el modelo MICTG incluye dos canales pero no enfatiza su capacidad limitada. El MICTG incluye los cinco procesos cognitivos de la TCAM con algunas diferencias en la conceptualización: el *procesado subsemántico* corresponde a la *selección de palabras*, la *percepción* a la *selección de imágenes*, el *procesado semántico* corresponde a la *organización de palabras*, la *selección temática* a la organización de imágenes y la *construcción-inspección de modelos* corresponde a la integración. Incluye también cuatro de las cinco representaciones de la TCAM, de nuevo con algunos cambios

conceptuales: el *diagrama de texto y gráficos* corresponde a las *palabras y gráficos en la presentación multimedia*, las *representaciones superficiales del texto e imágenes visuales* corresponden a *sonidos e imágenes en la memoria de trabajo*, *representaciones proposicionales y modelos mentales* corresponden a los modelos verbal y gráfico y la *organización conceptual* corresponde al *conocimiento en la memoria a largo plazo*.

Concluye Mayer que la TCAM es compatible y algo similar a las otras dos, ofreciendo la TCC elaboraciones adicionales sobre el papel de la capacidad limitada de la memoria de trabajo en el diseño instruccional para el aprendizaje multimedia y el MICTG ofrece elaboraciones sobre la naturaleza de las representaciones mentales en al aprendizaje multimedia.

Por su parte Schnotz (2005) considera que aunque el MICTG incluye varios supuestos comunes con la TCAM de Mayer, presenta también diferencias en aspectos importantes. Ambos modelos suponen una arquitectura cognitiva que incluye sistemas de memoria múltiple con una memoria de trabajo de capacidad limitada y suponen también la existencia de canales diferentes para el procesamiento y el almacenamiento de la información de acuerdo con el concepto del código dual. Pero difieren en los siguientes aspectos. En la TCAM la modalidad sensorial y el formato representacional están mezclados por la suposición de un canal auditivo, verbal y visual. El MICTG, por el contrario, supone que la información verbal no se asocia necesariamente con la modalidad auditiva, sino que puede ser soportada por otras modalidades sensoriales. En la TCAM la información verbal puede entrar a través del canal gráfico-visual o bien a través del canal auditivo-verbal, mientras que el MICTG supone que la información gráfica (analógica) no se asocia necesariamente con la modalidad visual, sino que también puede soportarse por otras modalidades sensoriales, por ejemplo, las imágenes sonoras.

El MICTG distingue los canales sensoriales (visual, auditivo, táctil y otros), al nivel perceptual, de los canales representacionales (verbal y gráfico), que estarían a un nivel cognitivo. La distinción entre niveles perceptuales y cognitivos también está incluida en al TCAM, en la que sonidos e imágenes corresponden al nivel perceptual, mientras que los modelos verbales y gráficos corresponden al nivel cognitivo.

En el MICTG distintos tipos de comprensión de texto y gráficos utilizan combinaciones diferentes de canales sensoriales y representacionales. La comprensión en la lectura de textos combina los canales visual y verbal, mientras que la comprensión auditiva de textos combina los canales auditivo y verbal. La comprensión visual combina los canales visual y gráfico, mientras que la

comprensión de imágenes auditivas (comprensión de sonidos) combina los canales auditivo y gráfico (analógico).

Otra diferencia entre ambas aproximaciones es que Mayer supone la construcción de los modelos mentales verbal y gráfico por separado. El MICTG, por el contrario, supone que se construye un único modelo mental que integra la información de las distintas fuentes desde el comienzo.

Concluye Schnotz (2005) que ambos modelos son consistentes, ya que ambos suponen que los materiales gráficos y verbales se integran en la memoria de trabajo.

Por nuestra parte pensamos que la evidencia empírica debe dirimir las diferencias y contribuir, teniendo en cuenta las acertadas críticas de Clark y Feldon (2005), a la elaboración de una teoría unificada del aprendizaje multimedia que incluya aspectos descuidados por las aproximaciones anteriores, como son los atencionales y los afectivo-emocionales.

#### 4.5.2 Los principios del aprendizaje multimedia

De las tres aproximaciones analizadas se establecen los *principios del aprendizaje multimedia* que se recogen en la tabla 4.4 y se desarrollan ampliamente en Mayer (2005a). En dicha tabla aparece el enunciado del principio, las aplicaciones prácticas y las teorías que los han propuesto.

Principio	Aplicaciones prácticas	Teorías
<b>Principio Multimedia:</b> Los sujetos aprenden mejor con palabras y gráficos que solamente con palabras.	Las animaciones, presentaciones y narraciones deben incluir texto oral o escrito o gráficos estáticos o en movimiento. Los bloques de texto escrito o hablado son menos eficaces aislados que cuando se acompañan de imágenes visuales acopladas.	Mayer, Sweller y Schnotz
Continúa en la página siguiente . . .		

Tabla 4.4: Principios del Aprendizaje Multimedia.



... viene de la página anterior.

Principio	Aplicaciones prácticas	Teorías
<b>Principio de contigüidad Espacial:</b> Los sujetos aprenden mejor cuando se presentan próximos las palabras y los gráficos correspondientes que cuando están alejados, en otra página o en otra pantalla.	Cuando se presentan texto e imágenes acoplados, el texto debe estar próximo o incluido en las imágenes. Colocar el texto debajo de la imagen (como título) es suficiente, pero es más eficaz colocarlo dentro de la imagen.	Mayer y Schnotz
<b>Principio de contigüidad Temporal:</b> Los sujetos aprenden mejor cuando las palabras y los gráficos correspondientes se presentan simultáneamente, que cuando se presentan sucesivamente.	Cuando se presentan texto e imágenes acoplados, el texto y las imágenes deben presentarse simultáneamente. Cuando se usan juntas una animación y una narración, deben coincidir temporalmente las partes significativas.	Mayer y Schnotz
<b>Principio de Coherencia:</b> Los sujetos aprenden mejor cuando se excluyen las palabras, los gráficos y los sonidos irrelevantes, que cuando se incluyen.	Las presentaciones multimedia deben ser claras y concisas. Las presentaciones que añaden decoraciones o información irrelevante impiden el aprendizaje del sujeto.	Mayer y Schnotz
<b>Principio de Modalidad:</b> Los sujetos aprenden mejor cuando se utilizan narraciones y animaciones que cuando se utilizan animaciones y texto en pantalla.	Las presentaciones multimedia que incluyen gráficos y palabras deben realizarse utilizando palabras habladas, mejor que palabras escritas.	Mayer, Sweller y Schnotz
<b>Principio de Redundancia:</b> Los sujetos aprenden mejor con animaciones y narraciones que si, además de las anteriores, se incluye texto en pantalla.	Las presentaciones multimedia que incluyen palabras y gráficos deben presentar el texto bien en forma hablada o bien en forma escrita, pero no en ambas.	Mayer, Sweller y Schnotz

Continua en la página siguiente ...

Tabla 4.4: Principios del Aprendizaje Multimedia.

... viene de la página anterior.

Principio	Aplicaciones prácticas	Teorías
<b>Principio de las Diferencias Individuales:</b> Los efectos del diseño son mayores para los sujetos con un nivel de conocimientos bajo que para los sujetos con un nivel de conocimientos alto y para los sujetos con una habilidad espacial alta más que para los que tienen habilidad espacial baja.	Las estrategias anteriores son más eficaces para los aprendices (sujetos con un nivel de conocimientos bajo) y para los sujetos con habilidad espacial alta. Las presentaciones multimedia bien estructuradas deben crearse teniendo en cuenta que ayudarán con mayor probabilidad a estos sujetos.	Mayer, Sweller y Schnotz
<b>Principio de la Atención Dividida:</b> Cuando se presentan fuentes de información dispares que deben integrarse mentalmente para la comprensión del mensaje, estas fuentes deben presentarse de forma integrada.	Este principio está relacionado con los de contigüidad espacial y temporal, de coherencia y de redundancia, entre otros.	Schnotz

Tabla 4.4: Principios del Aprendizaje Multimedia (Continuación).

### 4.5.3 Conclusiones para la investigación

En relación con el término *multimedia* y con la interacción sujeto–ordenador obtenemos las conclusiones siguientes:

- ❖ Existen numerosas y diferentes acepciones del término *multimedia*, por lo que precisamos que en este trabajo dicho término se refiere a un *entorno virtual creado y ejecutado por un ordenador que incluye todos o algunos de los siguientes componentes multimodales: espacial y visual, lingüístico, audio, gestual y de movimiento*. Pero, además, el entorno está dotado de un sistema automático de registro y almacenamiento de la interacción del sujeto con dicho entorno.
- ❖ La interacción es un proceso complejo en el que el sujeto puede hacer uso de varios tipos o formas de inteligencia: lingüística, lógico–matemática, cinestésica–corporal, espacial, sonora, interpersonal e intrapersonal, Gardner (1983).

- ❖ Consideramos que los ordenadores actuales son tanto dispositivos cognitivos como dispositivos de simulación, dotados de funciones epistémicas y ontológicas en el sentido de Brey (2005).
- ❖ Es posible, y relativamente sencillo, construir escenarios o entornos multimedia que incluyan funciones epistémicas (cognitivas) y funciones ontológicas (simulación de realidades virtuales). Estas últimas permiten incorporar a tales escenarios elementos visuoespaciales, sensoriomotrices, sonoros, afectivos y emocionales, adaptados a las características psicológicas de los sujetos del intervalo de edad que se considera.
- ❖ Dada la importancia del juego a estas edades, Bishop (1999) y Hirsch (1998), es posible y adecuado construir escenarios multimedia con formato de juegos virtuales que incluyan componentes afectivas y emocionales y que, además de dirigirse al problema cognitivo planteado, estimulen la motivación, la atención y la imaginación de los sujetos.
- ❖ La inclusión de las capacidades visuoespaciales está avalada por las consideraciones realizadas sobre la neurociencia y por su relación con las sensoriomotrices. Y la inclusión de estas últimas lo está por las características de la etapa cognitiva en la que se hallan los sujetos, que es la etapa sensoriomotriz piagetiana.
- ❖ Tanto el aspecto lúdico como las habilidades visuoespaciales, sensoriomotrices, sonoras y afectivas y emocionales, pueden tener relación con las habilidades primarias (innatas) en el sentido de Geary (1995). Lo que justifica de nuevo su inclusión.
- ❖ Las capacidades o competencias ordinales que investigamos no forman parte del currículo escolar, por lo que en su formación pueden intervenir habilidades primarias, el propio desarrollo sensoriomotriz del niño y la interacción de ambos con el medio social en el que vive.
- ❖ Como se ha visto en la subsección dedicada a la neurociencia, no parece posible que la cognición y el aprendizaje puedan desarrollarse adecuadamente mediante el uso del hemisferio cerebral izquierdo exclusivamente sin conexión con el hemisferio derecho; ello puede indicar que en la cognición y en el aprendizaje, además de componentes racionales intervienen componentes afectivos y emocionales que aconsejan aún más su inclusión en el escenario de aprendizaje.
- ❖ Estas conclusiones permiten redefinir e interpretar, en nuestro caso, las funciones epistémicas, ontológicas y onto-epistémicas en el siguiente sentido:

- ♦ Las *funciones epistémicas* definirán el problema cognitivo ordinal que tendrán que resolver los sujetos en cada caso.
  - ♦ Las *funciones ontológicas* establecerán los entornos virtuales interactivos que se construyan para observar y evaluar las anteriores.
  - ♦ Las *funciones onto-epistémicas*, como conjunción de las dos anteriores, establecerán el diseño y guiarán el desarrollo de los ítems concretos con los que el sujeto va a interactuar.
- ❖ El registro y el almacenamiento automáticos de la interacción sujeto–escenario multimedia permite reducir al mínimo la del investigador–sujeto. Todo ello redundará en la calidad, la cantidad y la objetividad de la información recogida. Tales características de la información pueden verse mermadas en las metodologías de investigación en las que la recogida no es automática.
  - ❖ Los escenarios multimedia están mejor adaptados que otros a las características de los sujetos del intervalo de edad considerado, ya que permite incorporar tareas o ítems bien adaptadas a sus características cognitivas y psicoafectivas y permiten además la recogida automática y objetiva de la información. Pensamos, en definitiva, que puede basarse en ellos una metodología de investigación válida y novedosa para la investigación en Educación Matemática.

En relación con las teorías y principios del aprendizaje multimedia podemos concluir:

- ❖ De los niveles teóricos citados en la sección 4.4\*, en esta investigación interesan especialmente las llamadas teorías del segundo nivel, como son: la *Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia* de Mayer (TCAM), el *Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos* de Schnotz (MICTG) y la *Teoría de la Carga Cognitiva* de Sweller (TCC).
- ❖ Todas ellas asumen la existencia de:
  - ♦ Distintos tipos de memoria: sensorial, de trabajo y a largo plazo.
  - ♦ Canales duales: los seres humanos poseemos canales separados para el proceso de la información visual y auditiva, tanto a nivel sensorial como en el tratamiento de la información en la memoria de trabajo.

\*Véase la página 135.

- ◆ Capacidad limitada: la cantidad de información que puede procesar cada canal, en cada momento es limitada.
- ◆ Proceso activo: los seres humanos participamos activamente en el aprendizaje atendiendo a la información de entrada que es relevante, organizando la información seleccionada en representaciones mentales coherentes e integrando las representaciones mentales con el conocimiento del que ya disponemos.
- ❖ Cada una propone mecanismos para la comprensión y el aprendizaje que destacan particularmente alguno de los aspectos anteriores y proponen principios para el aprendizaje multimedia como son los que se describen en la sección anterior.
- ❖ En nuestro caso, tales principios no se usarán como principios de aprendizaje en sí; sino, de acuerdo con Mayer (2001), como principios fundamentales a tener en cuenta en la construcción de tareas e ítems multimedia que formarán parte de una metodología de investigación.
- ❖ Con ello, asumiendo la capacidad limitada de los canales en los niveles sensoriales y en la memoria de trabajo, nuestro objetivo será, en el lenguaje de la TCC, reducir al máximo la carga cognitiva extrínseca y potenciar las cargas intrínseca y efectiva en los sujetos.
- ❖ Resaltamos el interés que tiene para esta investigación el *Principio de las diferencias individuales* que afirma, apoyándose en evidencia empírica, que las actividades multimedia son especialmente eficaces para los aprendices (no siendo así para las personas con un grado de conocimientos relativamente alto), entre los cuales se encuentran los sujetos de menor edad y, en particular, los sujetos del intervalo de edad que tratamos.
- ❖ Consideramos que las teorías y principios anteriores descuidan los aspectos atencionales, afectivos y emocionales implicados en el aprendizaje y la cognición, aspectos que nuestro escenario tendrá muy en cuenta por estar dirigido exclusivamente a sujetos de corta edad.



## 5

# ESTUDIO EXPLORATORIO

### 5.1 Introducción

La presente investigación se sustenta en estudios teóricos y empíricos que se han realizado en un proceso de sucesivas aproximaciones al problema que se aborda con la intención de fundamentar y consolidar los principios y conjeturas que orientan el trabajo.

Entre los estudios previos realizados cabe destacar el que aquí se presenta como estudio teórico-empírico inicial de carácter exploratorio que permitió examinar las variables en juego, analizar los comportamientos, valorar las dificultades y disponer, en fin, de información de primera mano sobre una aplicación prácticamente desconocida hasta este momento en el campo de la investigación en Educación Matemática con sujetos de corta edad.

Parte del mismo se presentó para optar a la suficiencia investigadora en Didáctica de la Matemática, correspondiente al programa de doctorado organizado por el Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga en el bienio 2.002/2.004. En aquella ocasión y en la correspondiente memoria\*, dada la extensión del trabajo, se presentaron solamente los resultados parciales de la parte empírica correspondientes, a su vez, a los dos primeros conjuntos de tareas. A continuación se presenta un resumen completo ya que dicho trabajo constituye, como se ha dicho, el estudio exploratorio inicial que originó la investigación objeto de esta tesis doctoral y contiene los problemas, ideas y métodos que la originaron.

Sus conclusiones pusieron de manifiesto la necesidad de realizar estudios teóricos sobre la estructura ordinal, la cognición en relación con el orden y la tecnología multimedia, de manera que una de las principales consecuencias

---

\*Véase Hernández (2005)

del estudio exploratorio ha sido la profundización en los estudios teóricos que se exponen en los capítulos 2, 3 y 4 de la presente memoria.

El capítulo incluye el análisis y estudio de los resultados recogidos en la fase empírica que se realizó mediante la construcción de una serie de tareas multimedia, agrupadas en cuatro conjuntos homogéneos, teniendo en cuenta las características del modelo evolutivo que se detalla en el apartado 5.3.1 siguiente y la posterior aplicación a una muestra de sujetos.

Las correspondientes conclusiones, junto con las de los capítulos anteriores, permitieron ajustar el modelo evolutivo inicial, mejorar y redefinir en consecuencia los conjuntos de tareas, formular los objetivos e hipótesis de la investigación y construir la metodología multimedia general y específica que se presenta en el capítulo 6 siguiente.

El capítulo comienza con la formulación de los objetivos, la descripción del modelo evolutivo de competencias ordinales, la metodología, el hardware y el software utilizados, así como de las actividades y tareas realizadas; continúa con el desarrollo de las fases empíricas, la elección y distribución de la muestra que interviene, el análisis de los resultados y la obtención de las conclusiones para cada conjunto de tareas; y finaliza con un estudio comparativo de los resultados de los cuatro conjuntos de tareas y con las conclusiones generales del estudio exploratorio.

## 5.2 Objetivos del estudio

La investigación objeto de la presente memoria se enmarca dentro de una línea de estudio orientada a averiguar la situación y el desarrollo de ciertas capacidades lógico-matemáticas en niños en edad infantil. Dos de los principales problemas que se dan en estas edades tienen que ver con la fiabilidad de los medios y tareas que se utilizan para provocar la respuesta de los sujetos y con las interacciones sujeto investigador, aspectos que han centrado la atención del presente estudio. En concreto, nos hemos propuesto:

- 1<sup>o</sup>. Construir un instrumento multimedia base, formado por un número suficiente de ítems o tareas, que permita comenzar el estudio y la evaluación de determinadas competencias ordinales en niños de 3 a 6 años y comprobar la potencialidad de este tipo de instrumento en el campo de la investigación sobre cognición matemática temprana.
- 2<sup>o</sup>. Utilizar dicho instrumento para realizar entrevistas que posibiliten:
  - Obtener evidencia empírica sobre competencias ordinales de los sujetos según un primer modelo evolutivo que se propone más



- adelante y determinar, en su caso, las posibles modificaciones y ajustes.
- Comprobar el grado de adecuación de las tareas multimedia construidas al estudio y evaluación de tales competencias, tanto desde el punto de vista de los sujetos como de la implementación del instrumento.
  - Obtener la información necesaria para su selección o modificación, si fuera preciso, y para su optimización.
  - Estudiar la viabilidad de la recogida y almacenamiento automáticos de los datos empíricos para su proceso y análisis posterior.
  - Minimizar la interacción investigador–sujeto y maximizar la objetividad de los datos recogidos.
- 3º. Analizar los datos obtenidos y elaborar las correspondientes conclusiones.
- 4º. Recoger toda la información relevante y útil para la realización de estudios posteriores.

### 5.3 Marco teórico y metodológico

El estudio se ajusta a los principios y supuestos del marco específico para la investigación en Educación Matemática propuesto por González (1999) y González y Ortiz (2000) en sus dos vertientes, no empírica y empírica.

Desde un punto de vista general tendremos en cuenta el concepto de rendimiento presentado por Brueckner y Bond (1984), las facetas del mismo en relación con el sujeto (Andrés, 1952) y las consideraciones de Cohen, Manion, y Morrison (2000) sobre los test como herramientas productivas en investigación dentro de los métodos de investigación educativa. Desde una óptica más específica, partimos de los trabajos de Fernández (2001) y Fernández y Ortiz (2008), en los que se utilizan métodos cualitativos y entrevistas clínicas individualizadas como técnicas adecuadas de recogida de información (Claparède, 1976; VinhBang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974) y como soportes de la metodología multimedia desarrollada.

Las entrevistas clínicas individualizadas se han realizado con el material multimedia como herramienta intermediadora en la interacción entre el investigador y el sujeto. En dicho contexto multimedia se plantean situaciones ordinales a las que debe responder el sujeto y que se plantean en actividades o tareas acordes con el modelo que se propone en el apartado 5.3.1. Una justificación de este tipo de metodología la encontramos en los trabajos de

Ortiz (1997), Fernández (2001) y Fernández y Ortiz (2008), en el ámbito de la línea de investigación, y en las propuestas de Bliss (1987), Cohen y Manion (1990, p. 377) y Blanco y Prieto (2000), en los que se pone de manifiesto que las entrevistas clínicas individualizadas, sobre la base de un material concreto, son pruebas adecuadas para este tipo de estudios caracterizados por su naturaleza cualitativa y por el empleo de una muestra reducida de sujetos.

Como punto de partida, es necesario determinar las competencias ordinales que se van a analizar y situarlas en un esquema de conjunto que sirva a la vez de soporte para orientar las actividades y analizar los significados de las respuestas de los sujetos. Tales competencias son la base previa en la que se sustentan las tareas multimedia implementadas y la primera aproximación a una de las principales conjeturas del estudio en torno al orden en el que se produce la apropiación y/o construcción de los conocimientos y destrezas correspondientes. Para ello nos basamos en las consideraciones y conclusiones de los estudios previos de la línea de investigación que se recogen en Ortiz (1997), Fernández (2001) y Fernández y Ortiz (2008), en los que se estudia una parte de las capacidades ordinales y del pensamiento numérico y aritmético de los sujetos entre 3 y 6 años de edad. A partir de dichos estudios, organizamos las competencias ordinales en el modelo evolutivo que se describe a continuación.

### *5.3.1 Modelo de competencias ordinales*

Para la construcción del modelo hemos elegido considerar el razonamiento de forma progresiva y partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, en el bien entendido de que los contenidos ordinales tratados en la investigación no han formado parte explícita de la formación de los sujetos del estudio. El modelo se halla resumido y estructurado en etapas o estados basados en la ordenación y categorización establecida por los autores citados en el apartado anterior y que vienen expresados por su descripción y justificación así como por las competencias teóricas que corresponden a la progresión de las capacidades ordinales en un sujeto individual ideal. El modelo supone que los sujetos de las edades en estudio desarrollan y dominan en el mismo orden establecido las capacidades, destrezas y conocimientos que se incluyen en cada uno de los siguientes estados:

#### **Estado 1: Orden lineal infralógico**

De acuerdo con el análisis de Ortiz y Fernández sobre los orígenes

de la noción de número, el dominio del espacio, al menos parcialmente, es una de las primeras destrezas necesarias para poder establecer comparaciones que permitan determinar las analogías y diferencias precisas para poder ordenar cantidades y abordar el uso de sistemas numéricos posicionales. Por tanto, consideramos que el primer soporte intuitivo relativo a la idea general de orden está relacionado con el concepto espacial de línea y, en particular, con el concepto de orden espacio-temporal de un conjunto finito de puntos pertenecientes a una línea. Este soporte intuitivo se caracteriza por la diferenciación de los puntos entre sí por parte de los sujetos y por la aparición de un lenguaje específico: primero, último, siguiente, anterior, posterior, entre, después, luego. Consideraremos ordenaciones basadas en aspectos eminentemente perceptivos en las que no intervienen las distancias y la línea no tiene porqué ser recta.

Los sujetos que se hallen en este estado quedarán caracterizados mediante la capacidad para establecer un orden lineal infralógico.

### **Estado 2: Orden con cantidades continuas**

En este estado trataremos el orden con independencia de la situación de los objetos en el espacio, aspecto infralógico, haciendo intervenir las relaciones lógicas: más que, menos que, mayor que, menor que, referidas a cantidades lineales, sin que intervengan todavía aspectos numéricos.

Los sujetos que se hallen en este estado quedarán caracterizados mediante la capacidad para ordenar objetos por cantidades continuas.

### **Estado 3: Etiquetaje**

Siguiendo a Ortiz y Fernández (op. cit.), entendemos por etiquetaje la asignación de un símbolo, un signo, una palabra o un concepto a cada punto, objeto o espacio incluido en una colección ordenada de puntos, objetos o espacios. Se trata de un proceso de localización y diferenciación en un contexto ya ordenado pero en el que las diferencias para distinguir los elementos entre sí, con independencia de la posición en la serie, no están suficientemente explícitas. La asignación realizada puede carecer de regularidad y justificación lógica, siendo impuesta por el sujeto de manera arbitraria y subjetiva.

Este estado puede interpretarse como el paso de los objetos, puntos o posiciones a su simbolización y de las colecciones de puntos,

objetos y posiciones a las colecciones de los significantes, signos o etiquetas asociados a los mismos. El sujeto puede hacer referencias para determinar un lugar o un término de una colección ordenada: “el primero”, “el último”, “el siguiente a”, “el anterior a”, “el que está antes que”, “el que está después que”. Para ello debe conocer, al menos de memoria, alguna serie finita, que si es la de los primeros numerales, estaremos ante una iniciación en la acción de contar, sin que sea necesario conocer el aspecto cardinal del número (acumulatividad en el conteo).

Los sujetos que se hallen en este estado quedarán caracterizados mediante la capacidad de asignar etiquetas (signos, símbolos o palabras) a los elementos de una colección ordenada y de referirse a ellos usando las asignaciones correspondientes.

#### **Estado 4: Orden con cantidades discretas**

En este último estado, que no es el último de los posibles aunque sí el último de nuestro modelo, aparece el orden referido a aspectos numéricos en el contexto de las relaciones cantidades–cardinales–números, haciendo intervenir las relaciones lógicas: más que, menos que, mayor que, menor que, en dicho contexto. Se pretende que el sujeto establezca relaciones ordinales utilizando distintas representaciones numéricas de cantidades discretas. Al mismo tiempo se incluyen mecanismos para observar la influencia de distintas colocaciones o constelaciones de objetos en su identificación y ordenación posterior.

Los sujetos que se hallen en este estado quedarán caracterizados mediante la capacidad de establecer órdenes utilizando distintas representaciones de cantidades discretas, independientemente de su situación espacial.

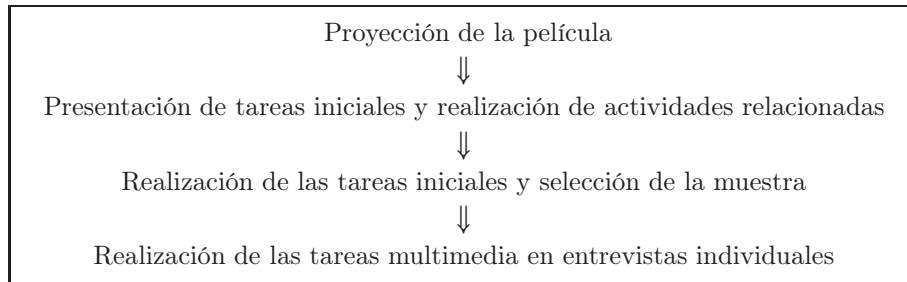
#### **5.4 Diseño del estudio empírico exploratorio**

En el marco descrito, hemos decidido realizar un estudio transversal que ponga en evidencia la adecuación de la metodología multimedia para la evaluación de las competencias ordinales en escolares de 3 a 6 años y que permita contrastar con garantías el modelo teórico propuesto. Para ello se ha diseñado un estudio empírico cualitativo basado en una prueba integrada por tareas multimedia sobre competencias ordinales correspondientes a cada uno de los estados del modelo sometido a examen. Por otra parte, dado el intervalo de

edad y las características psicológicas de los sujetos, hemos creído necesario realizar la selección de la muestra y preparar las etapas de realización de las tareas multimedia manteniendo en todo momento la motivación y el sentido de las tareas a realizar, para lo que se ha tomado el ambiente y algunos personajes de la película “El libro de la selva” de Walt Disney, obra de alto contenido motivador y excelentes valores cuyos personajes y situaciones pueden proporcionar naturalidad y sentido a las tareas de la prueba en ese contexto.

#### 5.4.1 Metodología

El proceso metodológico adoptado para el diseño del estudio exploratorio consta de las cuatro etapas siguientes:



Veamos una explicación detallada de cada una de dichas etapas:

##### 1<sup>a</sup>. Proyección de la película

Dada su duración y las características de los sujetos, en particular las relativas a la atención, se prevé proyectar solamente algunas partes de interés especial.

##### 2<sup>a</sup>. Presentación de las tareas iniciales y realización de actividades relacionadas

Etapa dedicada principalmente a favorecer la motivación de los sujetos de cara a su participación en el estudio. Se planteó en dos partes:

- a) Presentación de las tareas iniciales destinadas a la selección de la muestra.
- b) Realización de actividades complementarias de familiarización con los personajes y con las actividades a realizar en las propias tareas preparatorias.

En la primera parte se presentan unas tareas preparadas para la selección de la muestra. Estas tareas están relacionadas con las que se utilizan en la siguiente etapa y tienen por objeto favorecer la participación en dicha etapa.

En la segunda parte se proponen tareas de colorear, cortar y pegar dibujos con los personajes más relevantes de la película con el propósito de aumentar la familiaridad con los mismos y con las acciones propias de las tareas iniciales destinadas a la elección de la muestra.

### **3<sup>a</sup>. Realización de las tareas iniciales y selección de la muestra**

Para esta etapa se diseñaron tres tareas multimedia específicas, que analizaremos posteriormente, para que los sujetos practicasen las acciones cinestésicas básicas de uso del ratón, concretamente “hacer clic” y “arrastrar y soltar”, para jugar y para construir los personajes ya conocidos en las etapas anteriores y que aparecerán en las tareas definitivas posteriores. Su objetivo fue seleccionar sujetos sin dificultades en dichas acciones cinestésicas para participar en la etapa siguiente.

### **4<sup>a</sup>. Realización de las tareas multimedia en entrevistas individuales**

En esta etapa los sujetos seleccionados realizan las tareas propias del estudio orientadas a la resolución de situaciones en términos constructivos, es decir, procurando evitar, en la medida de lo posible, la intervención del binomio estímulo–respuesta en un marco evolutivo no conductista. En lo que se refiere a la intervención del investigador, esta se reduce a aclarar dudas, prestar ayuda puntual en alguna dificultad con el ratón, insistir de modo imparcial en las cuestiones planteadas en formato audiovisual y observar y tomar nota de los aspectos relevantes. Con ello se pretende maximizar la objetividad de la información obtenida.

#### ***5.4.2 Recogida y tratamiento de la información.***

La recogida de información se realiza por medio de entrevistas clínicas individualizadas en las que el niño, utilizando el material multimedia desarrollado, da respuesta a las cuestiones y situaciones ordinales que se le plantean de modo audiovisual e interactivo en un ordenador que las ejecuta.

Las entrevistas se han organizado en torno a cuatro programas o conjuntos de tareas multimedia en consonancia con los cuatro estados del modelo evo-

lutivo propuesto: tareas de orden lineal infralógico, tareas de orden orden con cantidades continuas, tareas de etiquetaje y tareas de orden con cantidades discretas.

Todas las respuestas y acciones de los sujetos quedan registradas en registros adecuados asignados a las variables correspondientes definidas en cada uno de los cuatro programas. Los datos se almacenan automáticamente en cuatro ficheros de texto para su tratamiento y análisis posterior. En el primero de ellos, correspondiente al primer conjunto, se recogen para cada sujeto los siguientes datos: clave identificativa, apellidos, nombre, curso y grupo, fecha de nacimiento, edad en años y meses y sexo. La clave identificativa asignada a cada sujeto permite el anonimato y sirve de nexo de unión entre todos los datos, evitando la redundancia y facilitando la organización de cara a su análisis posterior.

Las claves se construyen mediante un prefijo que indica el intervalo de edad en años (A) y meses (M), seguido de un número que distingue al sujeto en cada intervalo. Este número se asigna siguiendo el orden creciente de edad en años y meses. En caso de igualdad de edades se recurre al orden alfabético de los apellidos. Los prefijos asignados por intervalos de edad son los que aparecen en la tabla 5.1 siguiente.

Intervalo	Prefijo
[3a-6m, 4a)	3AM
[4a, 4a-6m)	4A
[4a-6m, 5a)	4AM
[5a, 5a-6m)	5A
[5a-6m, 5a-8m)	5AM
[5a-8m, 6a]	6A

Tabla 5.1: Prefijos a asignar a los sujetos según su grupo de edad. Estudio exploratorio.

Posteriormente, los cuatro ficheros de texto con toda la información obtenida se importan a un gestor de bases de datos relacionales que permite su clasificación, estableciendo una correspondencia biunívoca entre las variables almacenadas en los ficheros de texto y los campos de definidos en la base de datos. El análisis y estudio se completa mediante la exportación a hojas de cálculo de la información pertinente clasificada en la base de datos.

### 5.4.3 Materiales: Hardware y software

El hardware utilizado en las fases empíricas del estudio consiste en un ordenador multimedia para la proyección de la película, el mismo que se emplea para implementar las tareas, cuyas características se detallan más adelante, un proyector o cañón VGA y un amplificador de sonido con altavoces adecuados para una buena audición en una sala de dimensiones medianas.

La implementación de las tareas se lleva a cabo en un ordenador multimedia estándar con las siguientes características:

- Procesador AMD Thunderbird a 1200 Mhz.
- Memoria RAM de 1Gb.
- Disco duro de 60 Gb.
- Tarjeta gráfica con 32 Mb de memoria RAM.
- Tarjeta de sonido Sound Blaster Live Original.
- Lector de DVD ROM 16x.
- Grabadora de CD ROM 16x.

Para la selección de la muestra se utilizan 10 ordenadores con sistema operativo Windows 98, con tarjeta de sonido y auriculares individuales conectados, y 10 ratones de pequeño tamaño adecuados para su uso por niños de 3 años. En las entrevistas individuales se usa el mismo ordenador multimedia al que se conectan altavoces y un ratón USB adecuado a la edad del entrevistado.

En lo que se refiere al software, se utiliza un DVD que incluye la película, las tareas iniciales para la selección de la muestra y los cuatro conjuntos de tareas propias del estudio. Su implementación se realiza bajo el sistema operativo Windows XP Profesional, aunque se ha probado en ordenadores con sistemas operativos de Microsoft: Windows 98, Me, NT, 2.000, XP y versiones posteriores. Los objetos gráficos se han construido o tratado utilizando las aplicaciones Adobe Photoshop 7.0.1, Corel Photopaint 9.0, Corel Draw 9.0 y Macromedia Fireworks 4.0. Todas las tareas se han implementado en una resolución de 800x600 píxeles, lo que permite su ejecución en cualquier ordenador con los sistemas operativos indicados, incluidos los que tienen bajas capacidades gráficas.

La programación orientada a objetos, POO, se realiza con Macromedia Director, versión 8.5 (Pescador, 2000; Rosenzweig, 2002), que ofrece las siguientes posibilidades:

- Permite desarrollar programas eficientes con un uso eficaz de recursos



hardware (memoria, disco ...). Así, se obtienen programas optimizados que ocupan solamente 2 o 3 Megabytes.

- Los programas obtenidos son fácilmente modificables, en previsión de actualizaciones o mejoras futuras.
- Los programas son fácilmente adaptables a nuevas necesidades y modos de ejecución, de manera que es posible su publicación en formato web optimizado, conservando sus características multimedia, y realizar conexiones a bases de datos. También permite almacenar los datos recogidos en ficheros de texto que pueden importarse fácilmente desde gestores de bases de datos; método que, por su sencillez, hemos seguido en el desarrollo de este estudio.
- Permite incorporar en los programas gran variedad de elementos multimedia: textuales, gráficos, sonoros y visuales, permitiendo alcanzar una calidad muy alta en las tareas previstas.

## 5.5 Las tareas

A continuación se describen las tareas multimedia que intervienen en el estudio empírico exploratorio, con el que se pretende obtener información inicial para decidir, en primera aproximación, si la metodología que utilizamos, basada en la tecnología multimedia, es o no adecuada como metodología de investigación del pensamiento matemático ordinal en niños de 3 a 6 años. Como se ha dicho, las tareas se dividen en dos grupos: tareas iniciales para la selección de la muestra y tareas propias del estudio. Estas últimas se dividen, a su vez, en cuatro conjuntos correspondientes a los estados del modelo evolutivo propuesto: Tareas de orden lineal, de orden con cantidades continuas, de etiquetaje y de orden con cantidades discretas. En este apartado se presentan las tareas del primer grupo así como las interfaces, elementos de interacción y navegación y diagrama de flujo que son comunes a las tareas del segundo grupo. La descripción y análisis de estas últimas se realizará, en el orden indicado, en los apartados siguientes.

Se ha comprobado que tanto las tareas iniciales como el diseño de los elementos comunes de las tareas propias del estudio, anteriormente citados, se adaptan de manera excelente a las características psicológicas y psicomotrices de los sujetos. Por ello, como se verá en capítulos posteriores de la presente tesis doctoral, estas mismas tareas e interfaces, con ajustes menores, de acuerdo con los principios del aprendizaje multimedia de Mayer (2001), se utilizarán también en el segundo estudio empírico.

### 5.5.1 Tareas iniciales

Dado el intervalo de edad al que se dirige este estudio, niños de 3 a 6 años, y su naturaleza multimedia, es natural suponer que algunos sujetos, por diversas causas, pueden no adaptarse adecuadamente a las tareas multimedia o presentar dificultades en el manejo de un ratón y, en particular, en las acciones cinestésicas básicas “hacer clic” y “arrastrar y soltar”, lo que podría introducir distorsiones en los resultados e incluso imposibilitar la participación y la realización de las tareas propias del estudio.

Para salvar estas dificultades, seleccionar una muestra adecuada y favorecer la motivación de los sujetos, fomentando su familiaridad con los personajes y con las acciones que intervienen en las tareas definitivas, planteamos la realización del conjunto de actividades o tareas iniciales que se presentan a continuación.

#### 5.5.1.1 Objetivos

Con las tareas iniciales se pretende:

- 1º. Dotar a los sujetos de una experiencia y previa en el manejo del ratón y, en particular, en las acciones “hacer clic” y “arrastrar y soltar”.
- 2º. Favorecer el conocimiento de los personajes, de los ambientes y de las acciones que intervienen en las tareas posteriores así como su motivación, estimulando la autoestima y resaltando el aspecto lúdico de las tareas.
- 3º. Observar las dificultades de los sujetos en el manejo del ratón y las relacionadas con la comprensión y coordinación de la información audiovisual y multimedia.
- 4º. Comprobar el grado de adecuación de las tareas propuestas a las edades de los sujetos participantes, hacer los ajustes pertinentes y obtener conclusiones relevantes para estudios posteriores.
- 5º. Seleccionar, teniendo en cuenta lo anterior, una muestra adecuada de niños para llevar a cabo el estudio planteado.

#### 5.5.1.2 Descripción e interfaces

Estas tareas se dividen en tres conjuntos de dificultad creciente que llamamos: Personajes (primer conjunto), Baloo (segundo conjunto) y Mowgli (tercer conjunto). El primero se divide, a su vez, en dos partes directamente relacionadas con las acciones “hacer clic” y “arrastrar y soltar”. El segundo en tres partes, las dos primeras para “hacer clic” y la tercera para “arrastrar

y soltar”. Y el tercero en otras tres partes, la primera para “hacer clic” y las otras dos para “arrastrar y soltar”.

El diagrama de flujo de estas tareas se presenta en la figura 5.1 siguiente.

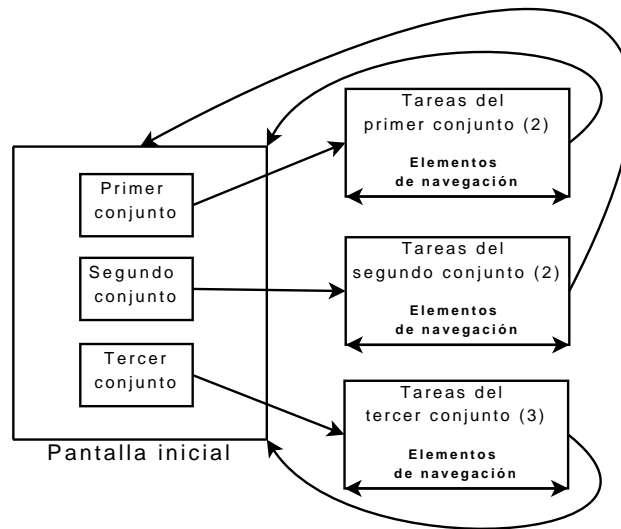


Fig. 5.1. Diagrama de flujo de las tareas de selección de la muestra.

La pantalla inicial puede verse en la figura 5.2, las interfaces, los elementos de información y navegación (sonoros, gráficos e interactivos) pueden verse en las figuras 5.3 y 5.4 y las ventanas de planteamiento y solución, a las que nos referimos más adelante, en la sección A.1 del anexo A.

La pantalla inicial contiene un icono de información (esquina inferior izquierda de la figura 5.2) que permite repetir el mensaje sonoro que la acompaña cuando el sujeto pasa sobre él el puntero del ratón. Este icono está presente en todas las tareas, tanto en las iniciales como en las específicas de los todos los conjuntos del estudio.

El icono inferior (el más grande) conduce al sujeto a completar dos tareas, el icono superior derecho conduce a completar otras dos y el superior izquierdo a completar tres tareas de nivel superior a las anteriores. La descripción de estas tareas se incluye en los párrafos que siguen.

Los elementos de navegación están representados por flechas de color azul, orientadas a izquierda y derecha que permiten pasar a la tarea anterior y a la siguiente, respectivamente, haciendo clic sobre ellas (Figura 5.3), y por un aspa en color rojo que permite pasar desde la última tarea de cada conjunto



Fig. 5.2. Primera pantalla de las tareas iniciales.

a la pantalla inicial, bien para repetir el mismo conjunto de tareas, bien para iniciar otro distinto o bien para finalizar estas actividades (Figura 5.4).

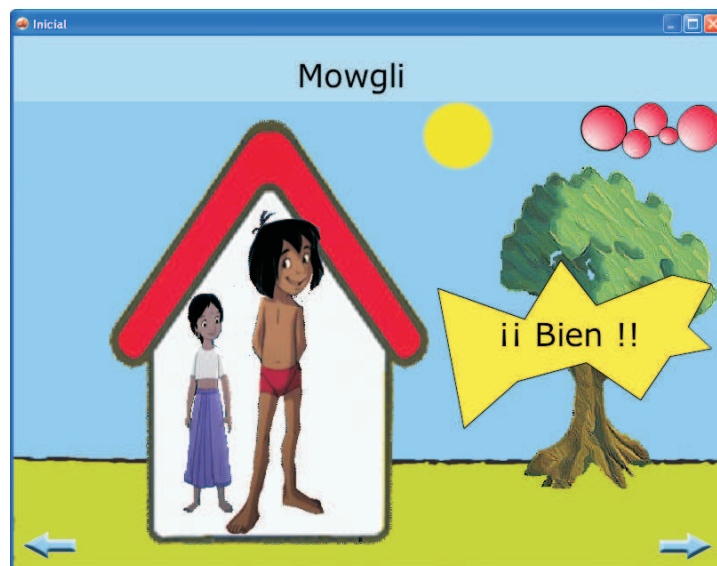


Fig. 5.3. Elementos de navegación 1.

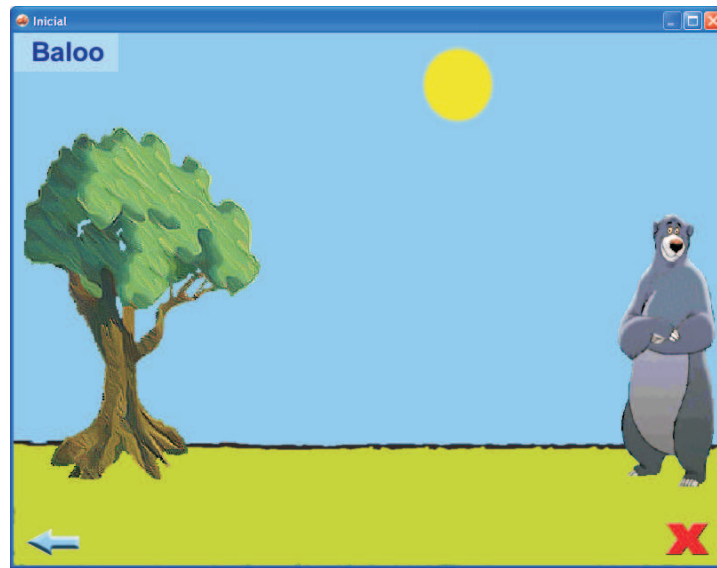


Fig. 5.4. Elementos de navegación 2.

En el segundo estudio empírico se ha mantenido el sencillo diseño de estas interfaces de acuerdo con los principios de contiguidad espacial y temporal así como los principios de coherencia y de las diferencias individuales\*, dado el intervalo de edad de los sujetos que intervienen.

En todas las tareas procuramos que el sujeto automatice el sistema de navegación e información y conozca con detalle la organización general que coincide sustancialmente con la de las tareas propias del estudio. Así mismo, mediante el diseño general y los sucesivos mensajes de audio, especialmente con los que recibe al terminar cada conjunto, se pretende favorecer su motivación estimulando la autoestima y resaltando el aspecto lúdico de las tareas\*.

### 5.5.1.3 Desarrollo y tareas

La actividad se inicia haciendo clic con el ratón en un acceso directo en el escritorio de Windows, tras lo que se activa la ventana inicial (Figura 5.2), desde la que se accede a las tres tareas, con el siguiente mensaje sonoro “*Para empezar a jugar haz clic en alguno de los tres dibujos*”. El investigador indica entonces a los sujetos que deben empezar con la tarea “*Personajes*”, para lo que deben hacer clic en el icono inferior, cuadrado grande, y continuar con la

\*Véanse los Principios del Aprendizaje Multimedia en la sección 4.5.2, página 152 y siguientes.

\*Véase la sección A.1, página 613 y siguientes, anexo A

tarea “Baloo” haciendo clic sobre el icono superior derecho en el que aparece el personaje. Finalmente deben terminar con la tarea “Mowgli” haciendo clic en el icono superior izquierdo en el que aparece este personaje. Veamos una breve descripción de estas tareas\*.

### Primera tarea: Personajes

La primera parte se inicia en una ventana de planteamiento con el mensaje sonoro “Haz clic sobre la silueta de cada personaje para que aparezca” y finaliza cuando el niño ha logrado hacer clic en todas y cada una de las 6 siluetas que se presentan, con lo que todos los personajes quedan a la vista en la ventana de solución.

Para continuar con la segunda parte, el niño debe hacer clic sobre el icono correspondiente a la flecha que aparece en la esquina inferior derecha de la ventana. Con ello pretendemos que *asocie hacer clic sobre dicho icono con la acción de pasar a la actividad siguiente.*

La segunda parte comienza con el mensaje sonoro “Ahora puedes llevar cada personaje donde tú quieras”. Con los 6 personajes a la vista, el niño debe jugar con ellos libremente arrastrándolos con el ratón y soltándolos en las posiciones deseadas o formando distintos grupos. Finaliza cuando el niño lo desea.

Las ventanas de planteamiento y solución se muestran en la figura A.1. El icono correspondiente a la flecha de la esquina inferior izquierda de la última ventana, figura A.1(c), permite al sujeto volver a la parte anterior y el icono correspondiente al aspa de la esquina inferior derecha permite finalizar la tarea y volver a la pantalla inicial para elegir la misma u otras tareas. Tras hacer click en este icono se oye el mensaje “¡Hasta luego!”.

### Segunda tarea: Baloo

La primera parte comienza con el mensaje sonoro “Para empezar a jugar haz clic encima de Baloo”. Tras ello, el personaje camina y se recuesta sobre el tronco de un árbol. A continuación, en la segunda parte, el niño recibe el mensaje sonoro: “Para seguir haz clic encima de Baloo”. Cuando lo consigue, comienza la tercera parte, el oso se descompone en tres piezas y se pide al niño que lo reconstruya mediante el mensaje “Lleva cada una de las piezas debajo del árbol para que aparezca Baloo”. Cuando lo recompone, el oso camina hacia

\*Las ventanas de planteamiento y solución de todas ellas pueden verse en la figuras que en cada caso se citan. Todas ellas se hallan en la sección A.1, página 613 y ss., del anexo A.

la derecha, aparece la ventana final de esta tarea y oye el mensaje “*Bien, lo has conseguido*”. Desde ella el niño puede repetir la tarea o terminar y volver a la ventana inicial para repetir la primera, realizar la tercera o finalizar el programa, en este caso oye el mensaje “*¡Hasta luego!*”. Las ventanas de planteamiento y solución se muestran en la figura A.2.

### Tercera tarea: Mowgli

La primera parte comienza con el mensaje sonoro “*Hola, para empezar a jugar haz clic encima de Mowgli*”. Cuando lo consigue, comienza la segunda parte con el mensaje “*Mowgli quiere visitar a su amiga, para ayudarlo llévale a su lado dentro de la casita*”. Para ello el niño debe arrastrar con el ratón el personaje y soltarlo dentro de la casita al lado de su amiga. Cuando lo consigue oye el mensaje “*Bien, lo has conseguido*” y se inicia la última parte, que comienza con el mensaje “*Lleva las piezas que están en el árbol para que aparezca Mowgli al lado de su amiga dentro de la casita*”. El personaje aparece descompuesto en piezas y el niño debe reconstruirlo. Cuando finaliza la tarea, oye el mensaje “*Bien, lo has conseguido*” y se muestra la ventana final desde la que el niño puede repetirla total o parcialmente, volver a la pantalla de inicio para abandonar el programa o repetir cualquiera de las tareas, en este caso oye de nuevo el mensaje “*¡Hasta luego!*”. Las sucesivas ventanas de planteamiento y solución pueden verse en la figura A.3.

El grado de dificultad de esta tarea es superior al de las anteriores tanto por la complejidad de los mensajes que contiene como por el conjunto de acciones que el niño debe realizar, que exigen mayores niveles de atención y de psicomotricidad.

#### 5.5.2 Elementos comunes e interfaces de las tareas propias del Estudio

Las tareas centrales o propias del estudio se agrupan en cuatro conjuntos con diagramas de flujo idénticos al que se describe en la figura 5.5 y con pantallas iniciales similares a la que se incluye en la Figura 5.6.

La pantalla inicial de cada conjunto, además de la presentación, incluye un cuadro de texto que recoge la clave de cada uno de los sujetos de la muestra. Esta clave sirve para identificarlos y asignarles los resultados obtenidos en cada conjunto de tareas. Esta pantalla incluye también un icono de navega-

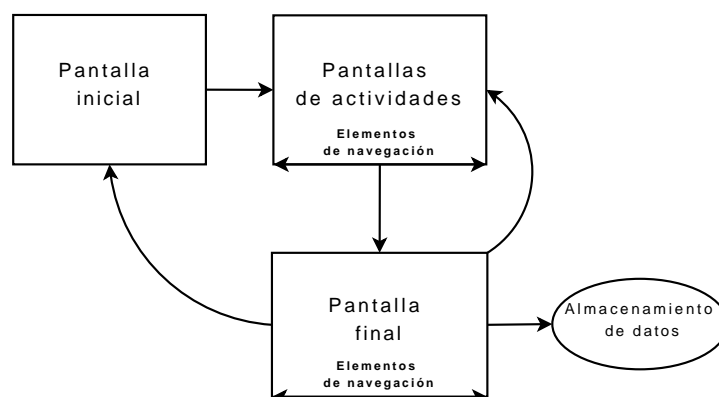


Fig. 5.5. Diagrama de flujo de las tareas propias de los estudios.



Fig. 5.6. Pantalla inicial de uno de los conjuntos de tareas propias.

ción (flecha orientada a la derecha) que permite pasar a la primera tarea del conjunto. En todas las tareas están presentes los elementos de navegación descritos en la subsección anterior salvo el aspa que es característico de las tareas iniciales.

Además, en la esquina superior derecha de las ventanas de cada una de las tareas de los cuatro conjuntos se incluye una lista desplegable, con la leyenda *Elegir tarea*, que permite pasar de una dada a cualquier otra, a la pantalla inicial o a la final, dentro de un mismo conjunto (Figuras 5.7 y 5.8).

La pantalla final de cada conjunto incluye tres botones desde los que es



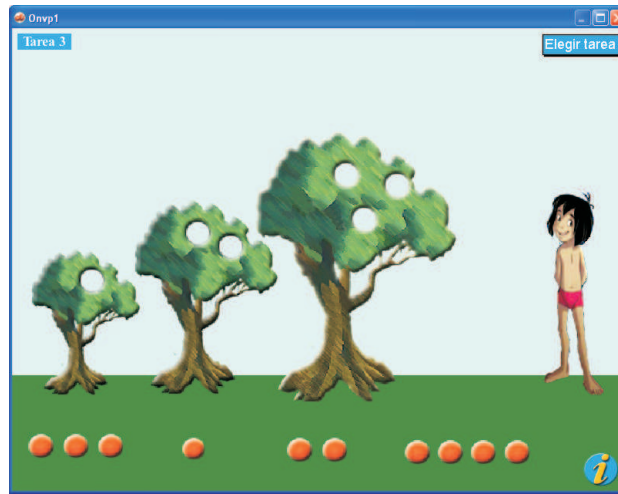


Fig. 5.7. Situación de la lista desplegable de las tareas en la esquina superior derecha.



Fig. 5.8. Menú de la Lista desplegable.

posible pasar a la pantalla de inicio, a cualquier tarea del conjunto o almacenar los datos recogidos por las variables del conjunto en un fichero de texto (Figura 5.9).

Veamos a continuación las tareas de cada uno de los cuatro conjuntos o bloques de la parte central del estudio exploratorio.

### 5.5.3 Primer conjunto: Orden lineal

Estas tareas corresponden al primer estado del modelo evolutivo (sección 5.3.1, pág. 162 y siguientes). Con ellas se pretende observar y evaluar, en



Fig. 5.9. Pantalla final de uno de los conjuntos de tareas propias.

primera aproximación, la capacidad para establecer órdenes lineales. Los elementos de información y navegación (sonoros, gráficos e interactivos) así como el diagrama de flujo pueden verse en la sección 5.5.2, pág. 175 y siguientes. En la sección A.2, anexo A, se muestran sus ventanas de planteamiento y solución.

#### 5.5.3.1 Objetivos

Mediante estas tareas se pretende:

- 1º. Averiguar hasta qué punto los sujetos son capaces de identificar órdenes lineales infralógicos en secuencias de hasta cuatro objetos, determinando sus componentes más sencillos: *primer elemento*, *último elemento*, *anterior a*, *siguiente a*, *entre*.
- 2º. Identificar si existen pautas evolutivas o niveles de competencia y/o desarrollo en este aspecto ordinal en base a los datos recogidos.
- 3º. Determinar si las tareas son o no adecuadas para la consecución de dichos objetivos y obtener las conclusiones relevantes para su modificación o sustitución en estudios posteriores.

#### 5.5.3.2 Descripción y análisis

En este primer conjunto se plantean 10 tareas de dificultad creciente sobre ordenación de objetos que aparecen colocados sobre caminos o recorridos. El sujeto debe responder a cuestiones ordinales verbales del tipo: *estar en*

*primer lugar, estar en último lugar, estar antes que, estar después que, estar entre*, referidas a dichos objetos, identificando con un clic del ratón el camino (línea) que considere correcto según la cuestión planteada. La figura 5.10 es un ejemplo de las tareas de este bloque.

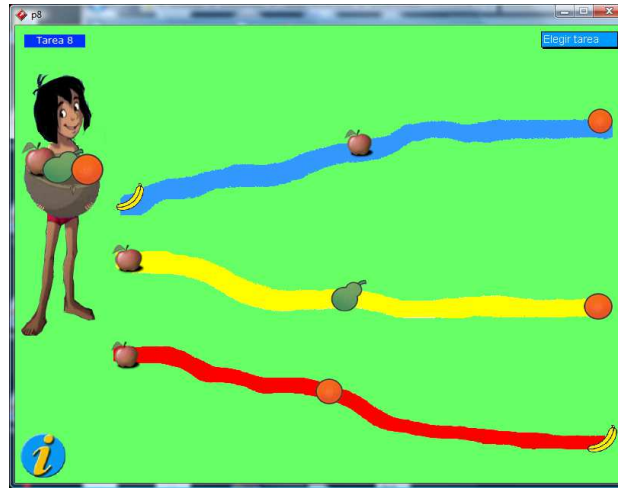


Fig. 5.10. Octava tarea de orden lineal.

El conjunto comienza cuando el sujeto hace doble clic sobre un icono de acceso directo en el escritorio de Windows. La primera ventana de presentación sirve, además, para que el investigador recoja los datos personales de los sujetos de la muestra\*. A partir de aquí, haciendo clic en la flecha de la esquina inferior derecha, comienza la:

**Primera tarea o tarea introductoria** con el siguiente mensaje sonoro introductorio: *“Hola voy a contarte algo. Mowgli va a recoger frutas a la selva y encuentra varios caminos. Ayúdale a encontrar el camino correcto”*.

A continuación, cuando el sujeto pasa el puntero del ratón por encima del icono de información de la esquina inferior izquierda, se oye el mensaje propio de la tarea: *“Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger el plátano”*.

Esta tarea es especial por ser el inicio de la serie, mientras que en las demás el mensaje se emite automáticamente en la ventana de planteamiento. Además, también se diferencia de las otras en que carece de valor observacional, esto es, sus resultados no se almacenan para su estudio; simplemente

\*Véase la figura A.4 en la página 617, anexo A.

se pretende que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tareas siguientes.

La tarea finaliza cuando el sujeto hace clic sobre el camino azul (correcto), entonces el personaje se pone en movimiento, recorre dicho camino, recoge el plátano y se muestra la ventana de solución a la cuestión planteada con el mensaje sonoro: “*Bien, lo has conseguido*”. Las ventanas de planteamiento y solución se muestran en la figura A.5, página 617, anexo A.

La dinámica de las demás es totalmente análoga, incluyéndose a continuación los mensajes sonoros de planteamiento\* y los objetivos de cada una de estas tareas:

**2ª Tarea:** “*Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger primero el plátano*”.

*Objetivo:* Identificar el primer elemento de una serie sencilla de dos elementos, entre dos series dadas.

**3ª Tarea:** “*Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger primero la manzana*”.

*Objetivo:* Eliminar la posibilidad de resolver por azar la tarea anterior.

Consideraremos que el sujeto identifica el primer elemento de una serie sencilla, entre dos dadas, solamente cuando resuelva positivamente ambas tareas.

**4ª Tarea:** “*Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger en último lugar la manzana*”.

*Objetivo:* Identificar el último elemento de una serie sencilla de dos elementos, entre dos series dadas.

**5ª Tarea:** “*Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger en último lugar el plátano*”.

*Objetivo:* Es doble. Por una parte, eliminar la posibilidad de que se haya resuelto por azar la tarea anterior; por otra, incrementar el grado de dificultad en la identificación del último elemento de una serie sencilla, ya que en este caso hay tres elementos en cada una de las dos series dadas.

\*Las figuras A.6, A.7 y A.8, en las páginas respectivas 618, 619 y 620 del mismo anexo, muestran sus ventanas de planteamiento y solución.

Consideraremos que el sujeto identifica el último elemento de una serie sencilla, entre dos dadas, solamente cuando resuelva positivamente esta tarea y la anterior.

**6ª Tarea:** “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger la naranja **antes que** el plátano”.

*Objetivo:* Identificar el **anterior inmediato** a un elemento, el último, en una serie de tres elementos ordenada linealmente, entre dos dadas.

Para resolver la tarea, debe identificarse previamente el plátano como último elemento de la serie solución.

**7ª Tarea:** “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger la naranja **después que** el plátano”.

*Objetivo:* Identificar el **siguiente inmediato** a un objeto, el primero, en una serie de tres elementos ordenada linealmente, entre dos dadas.

Para resolver la tarea, debe identificarse previamente el plátano como primer elemento de la serie solución.

**8ª Tarea:** “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger **primero** la manzana, **luego** la pera y por **último** la naranja”.

*Objetivo:* Identificar una serie ordenada completa de tres elementos, entre tres series dadas.

Esta tarea refuerza la anterior, ya que al ser el primer elemento común a las tres series propuestas, la solución está determinada por el **siguiente inmediato** a la manzana, que es la pera en este caso.

**9ª Tarea:** “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger **primero** la manzana, **después** la naranja, **luego** la pera y por **último** el plátano”.

*Objetivo:* Identificar una serie ordenada completa de cuatro elementos, entre tres dadas.

Las dos alternativas a considerar, caminos amarillo y rojo, tienen iguales el primer y el último elementos, por lo que la solución, camino rojo, está determinada por el orden de los elementos intermedios o,

equivalentemente, por la consideración de la naranja como *siguiente inmediato* del primer elemento o la pera como *anterior inmediato* del último elemento.

**10<sup>a</sup> Tarea:** “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger la pera **después** que la manzana y el plátano **antes** que la naranja”.

*Objetivo:* Identificar una serie ordenada completa de cuatro elementos entre tres dadas, partiendo en este caso de posiciones intermedias.

También puede determinarse la solución, camino amarillo, considerando la naranja como *último elemento* de la serie descartando previamente el camino azul, cuyo primer elemento no es la manzana. Esta es la tarea de mayor nivel del conjunto.

### 5.5.3.3 Variables y registros de la información

Para cada una de las tareas se han incorporado variables destinadas a recoger la interacción sujeto–ordenador. Esta información se almacena en *registros* según se indica en la sección 5.4.2, pág 166, para su tratamiento posterior. Los registros utilizados en este conjunto de tareas son los siguientes:

- ❖ *Registros de localización:* variables ***vij***. En cada tarea se almacenan el camino o los caminos sobre los que el sujeto hace clic.
- ❖ *Registros de números de intentos:* variables ***nij***. En cada tarea almacenan el número de veces que el sujeto hace clic en cada uno de los caminos.
- ❖ *Registros temporales:* variable ***ti***. Recogen el tiempo, en segundos, que tarda el sujeto en realizar cada una de las tareas. Valores nulos de estos registros indican que el sujeto no realiza la tarea correspondiente.
- ❖ *Listas de acciones:* variable ***listaRi***. Recogen la lista de pares (***vij***, ***nij***) que reproducen las acciones sucesivas del sujeto en cada tarea. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las mismas.

El índice *i* indica la tarea y varía, por tanto, de 2 a 10. El índice *j* indica los caminos que intervienen y varía, por tanto, de 1 a 2 en las tareas segunda a séptima y de 1 a 3 en las tareas octava a décima. Para distinguirlos, los caminos se han numerado de modo que el camino correcto se identifica

mediante  $vi1=1$ . Por tanto, los registros  $vi2$  toman el valor 2 en las tareas segunda a séptima y los  $vi2$  y  $vi3$  toman los valores 2 y 3 respectivamente, en las tareas octava a décima; todos ellos indican caminos erróneos\*. Por su parte, los registros  $ni1$  solo pueden tomar el valor 1, ya que la primera vez que el sujeto hace clic sobre el camino correcto completa la tarea. Los demás  $nij$  o no toman ningún valor, si el sujeto no hace clic sobre el camino correspondiente, o toman valores enteros de 1 a 15, siendo 15 el máximo número de intentos para cada tarea. En cuanto al tiempo, no se fijaron restricciones para ninguna de las tareas.

#### 5.5.4 Segundo conjunto: Orden con cantidades continuas

Estas tareas corresponden al segundo estado del modelo evolutivo propuesto\*, con el que se pretende observar, en primera aproximación, si los sujetos utilizan estrategias ordinales lógicas (creciente o decreciente) o convencionales (izquierda–derecha) cuando establecen correspondencias seriales en las que intervienen cantidades continuas longitudinales.

Resaltamos que en ninguno de los mensajes sonoros de planteamiento se pide al sujeto que proceda en orden alguno para resolverlas. A diferencia de las anteriores son tareas de carácter no verbal.

Los elementos de información y navegación y el diagrama de flujo, comunes con las anteriores, pueden verse en la sección 5.5.2, pág. 175 y siguientes. Y sus ventanas de planteamiento y solución en la sección A.3, anexo A.

##### 5.5.4.1 Objetivos

Mediante estas tareas se pretende:

- Averiguar si los sujetos utilizan espontáneamente estrategias ordinales en correspondencias seriales de hasta cuatro objetos, con independencia de la situación en el espacio, haciendo intervenir las relaciones lógicas: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*, *el menor*, *el mayor*; referidas a cantidades continuas longitudinales sin indicar estrategia alguna.
- Determinar, en su caso, las estrategias más utilizadas de carácter lógico (creciente–decreciente) o convencional (izquierda–derecha).

---

\*Concretamente, en la tarea octava se hicieron las siguientes asignaciones a los caminos: amarillo (correcto) → 1, rojo → 2, azul → 3. En la novena: rojo (correcto) → 1, amarillo → 2, azul → 3. Y en la décima: amarillo (correcto) → 1, rojo → 2, azul → 3.

\*Véase la sección 5.3.1, pág. 162 y siguientes.

- Identificar, si existen, pautas evolutivas o niveles de competencia y/o desarrollo en este aspecto del orden en base a los datos recogidos.
- Decidir si las propias tareas son o no adecuadas para la consecución de dichos objetivos y obtener las conclusiones relevantes para su modificación o sustitución en estudios posteriores.

#### 5.5.4.2 Descripción y análisis

El conjunto está formado por 6 tareas de dificultad creciente en las que intervienen las relaciones: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*, referidas a cantidades continuas longitudinales, sin que intervengan aspectos numéricos y dejando que el sujeto las aborde libremente con el fin de observar si sigue o no de modo espontáneo estrategias ordinales en su resolución. Para ello se utilizan situaciones en las que es necesario realizar correspondencias seriales “tronco–hueco” en situaciones problemáticas en las que el personaje, Mowgli, debe reunirse con el oso al otro lado de un camino con varios desniveles a salvar. El entrevistado debe colocar los troncos adecuados en los huecos, a elegir entre varios y sin recibir indicación alguna, para que los personajes puedan encontrarse (Figura 5.11). Para la colocación de las piezas se ha tolerado en todas las tareas un margen de error de 50 pixels en torno a la posición exacta correspondiente.

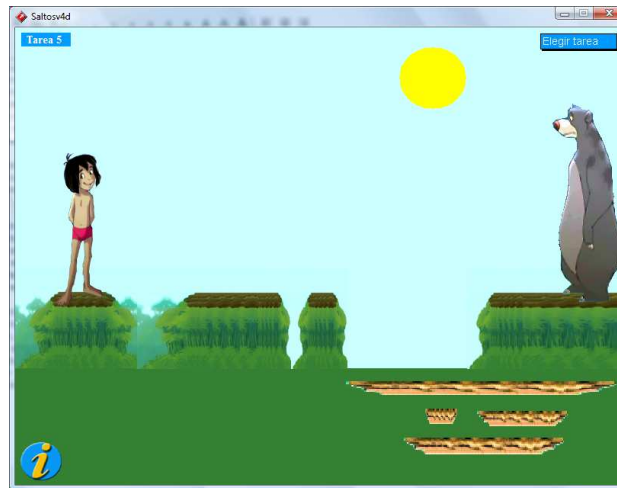


Fig. 5.11. Quinta tarea de orden no numérico.

Para comenzar, el sujeto debe hacer doble clic sobre un icono de acceso directo en el escritorio de Windows. La primera ventana que aparece es la de presentación, que sirve, además, para que el investigador introduzca la



clave identificativa de cada sujeto de la muestra durante la entrevista, véase la figura A.9 en la página 627, anexo A. Mediante dicha clave es posible enlazar los resultados del sujeto en todos los conjuntos de tareas. Este dato queda recogido en el registro **clave** y se almacena finalmente junto con los resultados de las tareas. Con ello, haciendo clic en la flecha de la esquina inferior derecha, comienza la:

**1ª Tarea.** El mensaje sonoro es introductorio a todo el conjunto: “¿Ves a Mowgli? Quiere ir con Baloo, pero no puede porque se ha caído el tronco que hace de puente. ¿Quieres ayudarlo a pasar?”.

Cuando el sujeto pasa el puntero del ratón por encima del icono de información de la esquina inferior izquierda, se oye el mensaje propio de la tarea:

“Arrastra el tronco y colócalo para que Mowgli pueda pasar junto a su amigo Baloo”.

Como en el conjunto anterior, esta primera tarea se utiliza sólo para que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar. La tarea finaliza cuando se coloca el tronco en el hueco correspondiente, lo que hace que el personaje se ponga en movimiento para pasar al lado del oso y se muestra la ventana de solución y el mensaje sonoro: “Bien, lo has conseguido”. Las ventanas de planteamiento y solución se muestran en la figura A.10, página 628, anexo A. La dinámica de las demás tareas es totalmente análoga.

En este conjunto se registran y almacenan para su estudio los resultados de las tareas segunda a sexta\*. Los mensajes sonoros de planteamiento y los objetivos de las mismas son los siguientes:

**2ª Tarea:** “Arrastra los troncos y coloca cada uno en su sitio para que Mowgli pueda pasar junto a su amigo Baloo”.

*Objetivo:* Ordenar por longitud dos objetos estableciendo una correspondencia serial.

En esta tarea los huecos se han ordenado de izquierda a derecha en orden creciente de longitudes, lo que hace que la estrategia creciente no se distinga de la izquierda–derecha. Intervienen solo dos troncos correspondientes a los huecos.

**3ª Tarea:** “Mowgli quiere pasar junto a su amigo Baloo. Arrastra y coloca los troncos que necesita para conseguirlo”.

*Objetivo:* Ordenar por longitudes dos objetos a elegir de entre tres,

\*Las figuras A.10 y A.11, páginas 628 y 629, anexo A, muestran sus ventanas de planteamiento y solución.

donde uno de ellos (el más corto) no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir.

En esta tarea los huecos se han ordenado de izquierda a derecha por orden decreciente de longitudes, por lo que la estrategia decreciente coincide con la izquierda–derecha. Queremos observar el mantenimiento o cambio de estrategia respecto de la anterior así como la influencia del tronco sobrante.

**4ª Tarea:** Mensaje sonoro idéntico al de la tarea anterior.

*Objetivo:* Ordenar por longitudes tres objetos a elegir de entre cuatro, donde uno de ellos (el más largo) no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir.

En los huecos se ha mantenido, de izquierda a derecha, el orden decreciente de longitudes. Intervienen tres objetos, con lo cual podrá detectarse la ausencia o presencia de distintas estrategias ordinales aún cuando la decreciente coincide con la izquierda–derecha.

**5ª Tarea:** Mensaje sonoro idéntico al de las anteriores.

*Objetivo:* El mismo que en la anterior salvo la ausencia de orden en los huecos a cubrir.

Nótese que en este caso hay ausencia de orden tanto en los troncos como en los huecos, es decir, hay ausencia total de información ordinal incluso en la presentación no verbal. Al igual que en la anterior tarea intervienen cuatro troncos y tres huecos y se podrá observar la ausencia o presencia de las diferentes estrategias ordinales así como el grado en el que pueden usarse tanto por los sujetos como en el conjunto muestral.

**6ª Tarea:** Mensaje sonoro idéntico al de las anteriores.

*Objetivo:* El mismo que en la tarea anterior, añadiendo un nivel mayor de dificultad al intervenir cuatro huecos desordenados y cinco troncos, también desordenados, de los cuales sobra el más largo.

También en esta tarea la ausencia de información ordinal es total.

### 5.5.4.3 Variables y registros de la información

Las variables y los registros que recogen la interacción sujeto–ordenador en estas tareas son los siguientes:

❖ *Registros de localización de la acción:* variables *vij*, *vpi*. Los

registros  $v_{ij}$  informan de si el sujeto ha movido o no en la  $i$ -ésima tarea el tronco  $j$ -ésimo. Los valores de  $v_{pi}$  informan de si el sujeto mueve o no el tronco sobrante en las tareas en las que tales troncos intervienen.

- ❖ *Registros de números totales de intentos:* variables  $n_{ij}$ ,  $np_i$ . Los registros  $n_{ij}$  recogen el número total de intentos que realiza el sujeto en la tarea  $i$ -ésima para colocar el  $j$ -ésimo tronco en su hueco correspondiente, incluido el intento correcto. Los valores de  $np_i$  recogen el número total de veces que el sujeto ha movido el tronco sobrante en las tareas en las que intervienen.
- ❖ *Registros temporales:* variable  $ti$ . Recogen el tiempo, en segundos, que emplea el sujeto en realizar cada una de las tareas. Valores nulos de estos registros indican que el sujeto no realiza la tarea correspondiente.
- ❖ *Listas de acciones:* variable  $listaR_i$ . Son listas de pares de valores  $(v_{ij}, n_{ij})$  o  $v_{pi}, np_i$  que recogen, en la tarea  $i$ -ésima, todas las acciones del sujeto. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las actividades realizadas.

El índice  $i$ , al igual que en el conjunto anterior, varía de 2 a 6 e indica el número de la tarea. El índice  $j$  indica, para cada tarea, los troncos correctos que intervienen; varía, por tanto, de 1 al número total de troncos correctos que intervienen en cada tarea.

En la segunda tarea los registros  $(v_{21}, n_{21})$  se asignan al tronco más largo,  $v_{21}$  puede tomar los valores: 0, si no mueve el tronco, 1 si lo mueve. Y los registros  $(v_{22}, n_{22})$  se asignan al tronco más corto, los valores posibles de  $v_{22}$  son: 0 y 2, según que no se mueva o se mueva dicho tronco.

En la tercera tarea, los registros  $(v_{31}, n_{31})$  y  $(v_{32}, n_{32})$ , al igual que en la anterior, se asignan respectivamente a los troncos más largo y más corto. Los registros  $(v_{p3}, np_3)$  se asignan al tronco sobrante (el más corto de los tres). Análogamente, los posibles valores de  $v_{p2}$  son: 0 y 3.

En la cuarta, los registros  $(v_{4j}, n_{4j})$ , variando  $j$  de 1 a 3, se asignan a los troncos correctos por orden decreciente de longitud con valores posibles: 0,  $j$  correspondientes. Los registros  $(v_{p4}, np_4)$  se asignan al tronco sobrante, tomando  $v_{p4}$  dos valores posibles: 0, si el sujeto no mueve este tronco, y 4, si lo mueve.

En la quinta tarea se realizan las siguientes asignaciones:

- Al tronco más largo se le asignan los registros (*v53, n53*), con 0 y 3 como valores posibles de *v53*.
- Al tronco más corto se le asignan los registros (*v52, n52*), con 0 y 2 como valores posibles de *v52*.
- Al tronco intermedio se le asignan las registros (*v51, n51*), con 0 y 1 como valores posibles de *v51*.
- Al tronco sobrante, el más largo, se le asignan los registros (*vp5, np5*), con 0 y 4 como valores posibles de *vp5*.

Finalmente, en la sexta tarea se realizan las siguientes asignaciones:

- Al tronco más corto se le asignan los registros (*v64, n64*), con 0 y 4 como valores posibles de *v64*.
- Al tronco más largo se le asignan los registros (*v63, n63*), con 0 y 3 como valores posibles de *v53*.
- Al tronco intermedio más largo se le asignan las registros (*v62, n62*), con 0 y 2 como valores posibles de *v62*.
- Al tronco intermedio más corto se le asignan las registros (*v61, n61*), con 0 y 1 como valores posibles de *v61*.
- Al tronco sobrante, el más largo, se le asignan los registros (*vp6, np6*), con 0 y 5 como valores posibles de *vp6*.

Para todos los *registros de números totales de intentos* se fija un máximo de 10, por los mismos motivos y propósitos indicados en el conjunto anterior. Tampoco se fijan restricciones temporales.

### 5.5.5 Tercer conjunto: Etiquetaje

Este conjunto corresponde al tercer estado del modelo evolutivo propuesto\*. Mediante sus tareas se pretende observar y evaluar, en primera aproximación, la capacidad de asignar “nombres” o etiquetas a los elementos de una serie.

Al igual que en el conjunto anterior las tareas son de carácter no verbal, ya que los mensajes sonoros de planteamiento carecen de indicaciones sobre el modo de proceder para resolverlas.

Los elementos de información y navegación y el diagrama de flujo se pueden examinar en la sección 5.5.2, pág. 175 y siguientes, mientras que sus ventanas de planteamiento y solución figuran en la sección A.4, anexo A.

\*Sección 5.3.1, pág. 162 y siguientes.

### 5.5.5.1 Objetivos

Mediante las tareas de este tercer conjunto se pretende:

- Averiguar si los sujetos son capaces de establecer etiquetajes mediante colores, en secuencias sencillas, utilizando distintos tipos de alternancia.
- Identificar, si existen, pautas evolutivas o niveles de competencia y/o desarrollo en este aspecto.
- Decidir si las tareas son o no adecuadas para la consecución de los objetivos y obtener las conclusiones relevantes para su modificación o sustitución en estudios posteriores.

### 5.5.5.2 Descripción y análisis

El conjunto consta de una tarea inicial y de dos partes adicionales de tres tareas cada una, la primera parte más sencilla y la segunda de mayor grado de dificultad en previsión de los diferentes niveles de desarrollo que pudieran darse.

Las tareas se refieren a objetos (plátanos) que aparecen en secuencias ordenadas (de frutas), mediante distintos tipos de alternancia, sobre los escalones de una escalera, que el sujeto debe etiquetar mediante colores sin recibir indicación alguna sobre el modo de proceder (Figura 5.12).

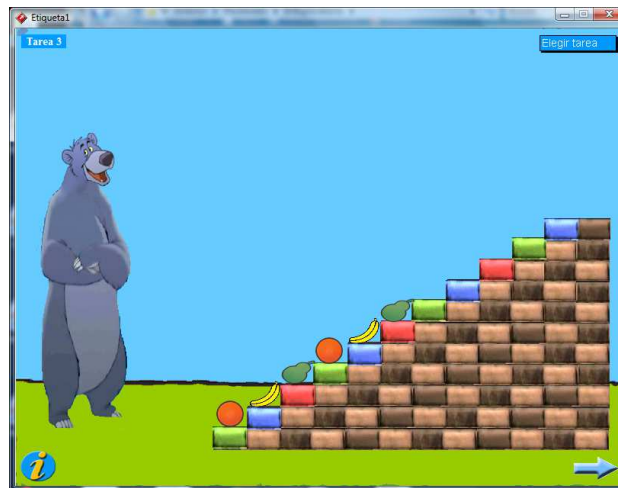


Fig. 5.12. Alternancia del tipo *no-sí-no-no-sí-no...*, a etiquetar mediante el color azul.

El conjunto comienza del mismo modo que los anteriores. La primera ven-

tana es de presentación y permite recoger la clave identificativa de cada sujeto de la muestra.

La **tarea inicial** es introductoria y se presenta con el mensaje sonoro: “*Baloo ha escondido frutas en la escalera, para encontrarlas debes hacer un solo clic en cada escalón*”.

El objetivo es que el sujeto conozca los personajes que participan, el contexto en el que se desarrollan las demás tareas, las acciones cinestésicas específicas a realizar y, especialmente, que entienda que las frutas escondidas aparecen cuando se hace clic en cada uno de los escalones y que si se hace clic sobre una fruta que ha aparecido, ésta desaparece y vuelve a aparecer si se hace clic de nuevo sobre el mismo escalón. Cuando el sujeto practica y comprende las reglas del juego, haciendo clic sobre la flecha inferior, comienzan las tareas propias del conjunto.

De acuerdo con su propósito, los resultados no se almacenan. Cuando se completa, los personajes se animan y se emite el mensaje: “*Bien, lo has conseguido*”.

La dinámica de las demás tareas es idéntica. Las figuras A.12 y A.13, en las páginas 639 y 640 del anexo A, muestran sus ventanas de planteamiento y solución.

El mensaje sonoro de planteamiento es el mismo para las seis tareas restantes: “*Fíjate bien en los escalones. Cada uno tiene un color y una fruta. ¿En qué escalones ha escondido Baloo los plátanos que faltan? Haz clic donde tú creas que están*”. Y sus objetivos son los siguientes:

- 1<sup>a</sup> **Tarea.** *Objetivo:* Reconocer una alternancia del tipo *sí-no-sí-no-sí-no...*, y aplicarla para etiquetar mediante el color **azul** las posiciones en las que se hallan los plátanos.
- 2<sup>a</sup> **Tarea.** *Objetivo:* Reconocer una alternancia del tipo *no-sí-no-sí-no-sí...*, y aplicarla para etiquetar mediante el **azul** las posiciones en las que se hallan los plátanos.
- 3<sup>a</sup> **Tarea.** *Objetivo:* Reconocer una alternancia del tipo *no-sí-no-no-sí-no-no-sí-no...*, y aplicarla para etiquetar, una vez más, mediante el color **azul** las posiciones en las que se hallan los plátanos.
- 4<sup>a</sup> **Tarea.** *Objetivo:* Reconocer una alternancia del tipo *no-sí-no-sí...*, y aplicarla para etiquetar mediante el color **verde** las posiciones en las que se hallan los plátanos.

Esta tarea se considera clave, ya que además de la alternancia, cam-

bia el color de etiquetaje del azul al verde.

Consideramos que el sujeto que supera la primera parte y además esta tarea, se encuentra en un nivel superior con respecto a los sujetos que solo superan la primera parte, ya que reconoce la alternancia independientemente del color de soporte usado. Las dos siguientes tareas tratan de distinguir niveles de etiquetaje superiores, cambiando en cada una el color de soporte.

**5ª Tarea.** *Objetivo:* Reconocer una alternancia del tipo *no-sí-no-no-sí-no...* y aplicarla volviendo al color **azul** como color para el etiquetaje.

**6ª Tarea.** *Objetivo:* Reconocer una alternancia del tipo *sí-no-no-sí-no-no...*, y aplicarla con el color **rojo** como color para el etiquetaje.

### 5.5.5.3 Registro de la información

Los registros que recogen la información en este conjunto son los siguientes:

- ❖ *Registros de localización:* variables ***pij***. En cada tarea, identifican los escalones libres (no ocupados inicialmente por frutas) sobre los que el sujeto hace clic.
- ❖ *Registros de números de intentos:* variables ***nij***. En cada tarea, recogen el número de veces que el sujeto hace clic en cada uno de los escalones libres que haya en la escalera.
- ❖ *Registros temporales:* variable ***ti***. Recogen el tiempo, en segundos, que tarda el sujeto en realizar cada una de las tareas.
- ❖ *Listas de acciones:* variable ***listaRi***. Recogen la lista de pares (***pij***, ***nij***) que reproducen las acciones sucesivas del sujeto en cada tarea. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las mismas.

En este caso, el índice *i* se refiere a los números sucesivos de los escalones libres (no ocupados inicialmente por frutas) que intervienen, contando desde el suelo; por ejemplo en la tarea representada en la figura 5.12 este índice varía de 7 a 11, que son los escalones libres. El índice *j* indica el número de la tarea, variando de 1 a 6.

Los registros ***pij***, en la *j-ésima* tarea, pueden tomar dos valores posibles: 0, si el sujeto no hace clic en el *i-ésimo* escalón libre, o bien el número de dicho escalón si el sujeto hace clic sobre él.

El máximo número de intentos sobre cada escalón libre, al igual que en los conjuntos anteriores, se fija en 10 y no se establecen restricciones temporales.

### 5.5.6 Cuarto conjunto: Orden con cantidades discretas

Este conjunto, correspondiente al cuarto estado del modelo evolutivo\*, está constituido por 6 tareas no verbales divididas en dos subconjuntos de tres tareas cada uno y otras dos introductorias referentes a cada uno de los dos subconjuntos mencionados. Con ellas se pretende observar si los sujetos utilizan espontáneamente estrategias ordinales lógicas (creciente o decreciente) o convencionales (izquierda–derecha) en situaciones problemáticas ordinales en las que intervienen cantidades discretas, para el primer subconjunto, o cantidades que pueden interpretarse como discretas o como continuas (discretas–continuas), según la percepción o libre elección del sujeto, para el segundo subconjunto.

Al igual que en los conjuntos anteriores, los elementos de información y navegación y el diagrama de flujo pueden examinarse en la sección 5.5.2, pág. 175 y siguientes. Y sus ventanas de planteamiento y solución en la sección A.5, anexo A.

#### 5.5.6.1 Objetivos

Mediante estas tareas se pretende:

- Averiguar si los sujetos utilizan espontáneamente estrategias ordinales en correspondencias seriales o en la formación de secuencias de hasta cuatro objetos con independencia de la situación de los mismos en el espacio, haciendo intervenir las relaciones lógicas: *más que, menos que, mayor que, menor que, el menor, el mayor*; referidas a cantidades discretas o discretas–continuas, sin recibir indicación explícita alguna.
- Determinar, en su caso, las estrategias más utilizadas de carácter lógico (creciente–decreciente) o convencional (izquierda–derecha).
- Observar si los sujetos perciben o no la dualidad discreto–continuo e interpretan las cantidades como discretas y continuas de modo espontáneo.
- Identificar, si existen, pautas evolutivas o niveles de competencia y/o desarrollo en este aspecto del orden.
- Decidir si las propias tareas son o no adecuadas para la consecución de los objetivos y obtener las conclusiones relevantes para su modificación o sustitución en estudios posteriores.

#### 5.5.6.2 Descripción y análisis

En este conjunto se utilizan dos clases de situaciones problemáticas:

\*Véase la sección 5.3.1, pág. 162 y siguientes.



- a) Establecer correspondencias seriales frutas-huecos al colocar conjuntos discretos de frutas en los huecos existentes en unos árboles dados (primeras tres tareas).
- b) Construir secuencias de hasta cuatro conjuntos de peldaños para formar una escalera. Los conjuntos pueden interpretarse como discretos, según su número de peldaños, o como continuos, según su altura, dependiendo de la percepción o libre elección de cada sujeto (últimas tres tareas).

En ningún caso los sujetos reciben indicación explícita alguna sobre el modo de proceder, de modo que las tareas son no verbales. Las figuras 5.13(a) y 5.13(b) muestran ventanas de planteamiento de ambos tipos de situaciones.

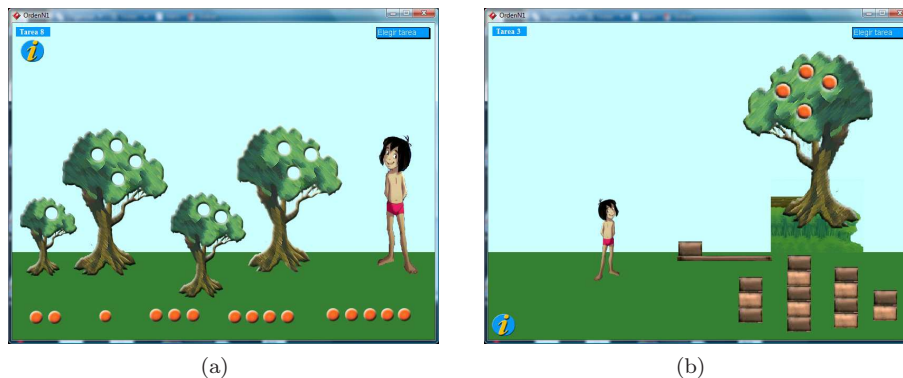


Fig. 5.13. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Ventana de planteamiento de la tercera tarea. (b) Ventana de planteamiento de la quinta tarea.

El conjunto comienza del mismo modo que los anteriores y la dinámica es la misma. En la ventana de presentación se recoge la clave asignada a cada sujeto y se le familiariza con el contexto multimedia en el que van a desarrollarse las tareas y con las acciones específicas requeridas para su resolución. Tras ello comienza la **tarea introductoria del primer subconjunto** con el mensaje: *“Mowgli quiere que coloques la fruta en el árbol. Para conseguirlo arrastra la naranja hasta el hueco”*. Cuando finaliza se muestra la ventana de solución, en la que Mowgli sonríe y asiente, y se oye el mensaje *“Bien, lo has conseguido”*. Este mensaje de finalización se repite cuando los sujetos terminan cada una de las demás tareas.

Seguidamente se plantean las tres tareas del primer subconjunto y a continuación la **tarea introductoria del segundo** con el mensaje: *“Mowgli*

*quiere coger la fruta del árbol. Para conseguirlo coloca la pieza que falta*". Cuando finaliza, Mowgli asciende por la escalera formada y recoge la fruta, se muestra la ventana de solución y vuelve a oírse el mensaje de finalización anteriormente citado.

Como puede observarse en la figura 5.13(b), en las tareas del segundo subconjunto se trata de que el sujeto construya una escalera con los bloques de escalones (continuos–discretos) para que Mowgli pueda subir y alcanzar la fruta. Al igual que en el conjunto de tareas de orden con cantidades continuas, en las tareas del primer subconjunto se ha tolerado un margen de error de 50 píxels en torno a la posición exacta de cada pieza y de 30 píxels en las del segundo subconjunto debido a la mayor proximidad de las piezas. Las figuras A.14 y A.15, en las páginas 646 y 647 del anexo A, muestran las ventanas de planteamiento y solución de las tareas de cada subconjunto.

Los mensajes sonoros de planteamiento y los objetivos de las seis tareas son los siguientes:

**1ª Tarea:** *“Mowgli quiere que coloques las naranjas en los árboles. Para conseguirlo arrástralas hasta sus sitios. ¡Pero fíjate bien!”*.

*Objetivo:* Ordenar tres conjuntos discretos de frutas, de uno, dos y tres elementos, estableciendo una correspondencia serial.

En esta tarea, que se considera de nivel básico, los árboles se presentan ordenados por tamaño, de izquierda a derecha, y según el número de huecos que presentan. Los conjuntos de frutas se presentan desordenados. La estrategia creciente no se distingue de la izquierda–derecha.

**2ª Tarea:** Mensaje sonoro idéntico al anterior.

*Objetivo:* Ordenar tres conjuntos discretos de frutas, de uno, dos y tres elementos, a elegir de entre cuatro, donde uno de ellos, el de cuatro elementos, no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir. Se desea observar el mantenimiento o cambio de estrategia respecto de la anterior así como la influencia del conjunto sobrante.

En este caso también se presentan los árboles ordenados por tamaño, de izquierda a derecha, según el número de huecos que presentan, por lo que la estrategia creciente coincide con la izquierda–derecha. Los conjuntos de frutas también se presentan desordenados.

**3ª Tarea:** Mensaje sonoro idéntico a los dos anteriores.

*Objetivo:* Ordenar cuatro conjuntos discretos de frutas, de uno, dos, tres y cuatro elementos, a elegir de entre cinco donde uno de ellos, el de cinco elementos, no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir. En esta tarea se pretende que la correspondencia serial, en caso de establecerse, esté basada exclusivamente en criterios ordinales cuantitativos.

En este caso los árboles aparecen desordenados y los de tres y cuatro huecos presentan igual tamaño. También los conjuntos de frutas se presentan desordenados, por lo que todas las estrategias son posibles sin que, de ningún modo, se favorezca alguna de ellas.

**4ª Tarea:** “Mowgli quiere coger la fruta del árbol. Para conseguirlo, fíjate bien y ayúdale, coloca las piezas que necesita”.

*Objetivo:* Ordenar secuencialmente tres conjuntos de uno, dos y tres escalones, de los que el primero es dado y los otros dos deben elegirse entre tres, de los cuales sobra el de cuatro escalones.

La presencia de la pieza sobrante impide que la tarea se reduzca a colocar correctamente una sola pieza. Es decir, al igual que en tareas anteriores y siguientes, permite distinguir situaciones y competencias que su ausencia haría inobservables.

La estrategia puede ser creciente o decreciente, atendiendo tanto a la progresiva cantidad de escalones que forman la escalera como a la cantidad de bloques que forman cada conjunto o pieza, en una seriación sencilla 1–2–3 o a las alturas de los conjuntos o piezas. Éstos se presentan desordenados en el planteamiento de la tarea.

**5ª Tarea:** Mensaje sonoro idéntico al anterior.

*Objetivo:* Ordenar secuencialmente cuatro conjuntos de uno, dos, tres y cuatro escalones, de los que el primero es dado y los otros tres deben elegirse entre cuatro, de los cuales sobra el de cinco escalones.

Los conjuntos de escalones o piezas se presentan desordenados.

**6ª Tarea:** Mensaje sonoro idéntico a los dos anteriores.

*Objetivo:* Ordenar secuencialmente cinco conjuntos de uno, dos, tres, cuatro y cinco escalones, de los que el primero es dado y los otros cuatro deben elegirse entre cinco, de los cuales sobra el de seis escalones.

Los conjuntos de escalones o piezas también se presentan desordenados.

El propósito fundamental de esta tarea y de la anterior consiste en hacer posible, en su caso, la observación de niveles superiores de competencia ordinal.

Nótese que en esta tarea y en las dos anteriores la ausencia de información ordinal es total.

Finalmente, resaltamos que en las tareas de este conjunto, a diferencia de los demás, los sujetos pueden usar o no las ideas de número y seriación numérica al establecer el orden. Sin embargo, no es objetivo de este estudio averiguar si los sujetos disponen o no de tales ideas y si las usan o no al resolver tareas ordinales. Por el contrario, se pretende observar si los sujetos utilizan o no estrategias ordinales al resolver tareas no verbales en las que intervienen o pueden intervenir cantidades discretas, aunque es indudable, desde nuestro punto de vista, que las competencias y avances en este aspecto deben favorecer el uso de estrategias ordinales\*.

### 5.5.6.3 Variables y registros de la información

Las variables y los *registros* que recogen la información en estas tareas son los siguientes:

- ❖ *Registros de localización de la acción:* variables  $v_{ij}$ ,  $v_{pi}$ . Los registros  $v_{ij}$  informan de si el sujeto ha movido o no en la  $i$ -ésima tarea el  $j$ -ésimo conjunto de frutas o de escalones. Los  $v_{pi}$  informan de si el sujeto mueve o no el conjunto o pieza sobrante en las tareas en las que tales conjuntos intervienen.
- ❖ *Registros de números totales de intentos:* variables  $n_{ij}$ ,  $n_{pi}$ . Los registros  $n_{ij}$  recogen el número total de intentos que realiza el sujeto en la tarea  $i$ -ésima para colocar el  $j$ -ésimo conjunto en su hueco correspondiente, incluido el intento correcto. Los  $n_{pi}$  recogen el número total de veces que el sujeto ha movido el conjunto o pieza sobrante.
- ❖ *Registros temporales:* variable  $t_i$ . Recogen el tiempo, en segundos, que emplea el sujeto en realizar cada una de las tareas. Valores nulos de estos registros indican que el sujeto no realiza la tarea correspondiente.
- ❖ *Listas de acciones:* variable  $listaR_i$ . Son listas de pares valores  $(v_{ij}, n_{ij})$  o  $v_{pi}, n_{pi}$  que recogen, en la tarea  $i$ -ésima, todas las

---

\*Creemos que los números naturales, en su doble interpretación cardinal y ordinal, son modelos abstractos de cantidades concretas y que su estructura ordinal es intrínseca no solo desde el punto de vista matemático, sino que también lo es en la formación o génesis psicológica del número en los sujetos.

acciones del sujeto. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las mismas.

El índice  $i$  indica el número de la tarea y varía de 1 a 6. El índice  $j$  indica, para cada tarea, los conjuntos o piezas correctas que intervienen, variando de 1 al número total de piezas correctas que intervienen en cada tarea.

En las tres primeras tareas, los posibles valores de los registros  $v_{ij}$  son: 0, si el sujeto no mueve el conjunto de  $j$  frutas y  $j$  si lo mueve. Igual sucede en las tareas segunda y tercera para los registros  $v_{pi}$ , cuyos posibles valores son: 0, si el sujeto no mueve el conjunto sobrante, y  $j$  (el número de frutas del conjunto sobrante) si lo mueve.

En las tres últimas, debido a que el primer elemento de la serie (el conjunto de un escalón) siempre es dado, los posibles valores de los registros  $v_{ij}$  son: 0, si el sujeto no mueve el conjunto de  $j+1$  escalones, y  $j$  si lo mueve. Igual sucede para los registros  $v_{pi}$ , cuyos posibles valores son: 0, si el sujeto no mueve el conjunto sobrante, y  $j$  (el número de escalones del conjunto sobrante menos uno) si lo mueve.

Al igual que en los anteriores conjuntos de tareas, para todos los *registros de números totales de intentos*, se fija un máximo de 10 intentos y no se fijan restricciones temporales.

## 5.6 Selección de la muestra y desarrollo del estudio

La muestra se eligió entre los alumnos de los tres últimos cursos de la etapa de Educación Infantil del Colegio “San Manuel” de Málaga. Se trata de un centro concertado situado en un barrio de clase media-baja en el que no existen conflictos sociales ni de marginación y que es representativo de lo que se entiende por un centro estándar. Los criterios seguidos para la elección del centro fueron dos:

- 1º. La existencia de un número relativamente alto de alumnos matriculados en el mismo en la etapa de Educación Infantil, que hace posible elegir al azar una muestra de alumnos.
- 2º. La existencia en el Centro de un aula de informática, suficientemente dotada, que hace posible la realización de las tareas multimedia destinadas a la elección de la muestra.

El estudio se ha desarrollado en cuatro etapas\*. En la *primera etapa* se preseleccionaron 50 niños y niñas de tres años y medio a 6 años previo conocimiento y autorización de los padres y tutores.

Para la proyección de la película se formaron dos grupos de 25 niños y se realizó en dos días distintos. La película se proyectó en formato DVD mediante un proyector VGA sobre una pared blanca y con un amplificador de sonido. La duración de la proyección fue de aproximadamente 40 minutos, sin que se llegase a proyectar la película hasta el final. Esta etapa fue imprescindible para situar los personajes y el contexto en el que se desarrollaron todas las tareas.

A continuación, en la *segunda etapa*, el investigador presentó a cada grupo las tareas iniciales animando a los niños a participar, lo que hicieron con verdadero entusiasmo. Las acciones se proyectaron en la pared favoreciendo la motivación y la participación en la tercera etapa. En esta etapa también se realizaron tareas manuales de coloreado y de recortar y pegar con los personajes más relevantes de la película, lo que favoreció la familiaridad con los mismos y también con las acciones propias de las tareas iniciales, si bien el entusiasmo fue menor en este caso.

Para la realización de la *tercera etapa* se instaló el software en 10 ordenadores del aula de informática del Centro y se conectaron auriculares de modo que los mensajes de audio llegaran individualmente a cada niño en cada uno de los puestos ocupados. Tras una sesión inicial, se concluyó que el número máximo de niños participantes en cada sesión no debía exceder a 6, para asegurar una adecuada atención por parte del investigador, tanto en lo que se refiere a las preguntas y dificultades planteadas como a la necesaria observación.

Con ello, la tercera etapa se completó en 10 sesiones con cinco niños por sesión y una duración comprendida entre media hora y tres cuartos de hora. En estas sesiones, los 50 sujetos realizaron las tareas iniciales destinadas a la selección de la muestra y se pudieron observar hechos y comportamientos relevantes para esta etapa exploratoria. Así, se pudo comprobar la capacidad de adaptación de sujetos de edades comprendidas entre los tres años y medio y los seis años, cuya familiaridad con los ordenadores era nula o muy escasa. Igualmente, es de destacar que algunos niños del grupo de menor edad (sujetos de 3 años y 7 u 8 meses) completaron todas las tareas, incluso las de mayor dificultad, lo que nos hace pensar que en éstas tareas intervienen formas de comunicación e información no verbales así como diversas formas

\*Véase el subapartado 5.4, pág. 164 y siguientes.

de la inteligencia (Gardner, 1983). Se observó también que normalmente los sujetos de cuatro años de edad dominan el uso del ratón, lo que no sucede en general para sujetos de edad inferior, para los que se observaron situaciones variables entre el dominio completo y el parcial o escaso.

La tercera etapa permitió seleccionar una muestra de 25 niños con un dominio básico de las acciones cinestésicas que implica el uso del ratón y que pudieron abordar la realización de las tareas propias del estudio sin problemas significativos en este aspecto. La composición de esta muestra fue la siguiente: 4 sujetos, en seis intervalos de seis meses, de 3 años y medio a 6 años de edad, procurando que las edades estuvieran centradas en los intervalos en el mayor grado posible. Excepción fue el grupo de cuatro años, ya que uno de sus integrantes realizó las tareas solo en parte, lo que aconsejó incorporar un niño más a este grupo e incluir los resultados de ambos según se detalla más adelante. En definitiva, la muestra quedó formada por un total de 25 niños.

La *cuarta etapa* se llevó a cabo mediante entrevistas clínicas individualizadas en una sala con un ambiente agradable, debidamente acondicionada con un ordenador multimedia, mesa y sillas para el sujeto y para el investigador en ausencia de ruido y otras posibles distracciones. En estas sesiones, además del sujeto y el investigador, podían asistir los profesores o profesoras de los alumnos si así lo deseaban.

Cada uno de los sujetos realizó en el ordenador los conjuntos de tareas de modo secuencial, del primer al último conjunto y de la primera a la última tarea, terminando cada conjunto bien al finalizar su última tarea o bien en el momento en que el sujeto no deseaba continuar y así lo manifestaba explícitamente al investigador.

La intervención del investigador ha consistido en aclarar dudas, prestar una ayuda puntual en alguna dificultad con el ratón, insistir de modo imparcial en las cuestiones planteadas al niño en forma audiovisual, animar a alguno de los sujetos a continuar, y observar y tomar nota de los aspectos considerados relevantes.

En los apartados que siguen se exponen y analizan los resultados obtenidos en las entrevistas individuales. Dichos resultados se exponen agrupados en los cuatro conjuntos de tareas correspondientes a las cuatro etapas del modelo que venimos utilizando en esta fase exploratoria y que se incluye en el apartado 5.3.1 del presente capítulo.

### 5.7 Resultados y conclusiones del primer conjunto: Orden lineal

A continuación se presentan los resultados y conclusiones de las tareas descritas en apartados anteriores\* para este conjunto de actividades multimedia basadas en el orden lineal.

Recordamos que de las 10 tareas planteadas, la primera es introductoria y las nueve siguientes almacenan datos para el estudio.

#### 5.7.1 Codificación y categorías de respuestas.

Las nueve tareas se han agrupado en siete bloques de la siguiente manera.

Las tareas segunda y tercera correspondientes al “*primer elemento*” se sintetizan en el bloque llamado **L1A**, orientado a minimizar la influencia del azar en las respuestas.

Igualmente, las tareas cuarta y quinta correspondientes al “*último elemento*” se sintetizan en el bloque llamado **L2A** con la misma orientación que el bloque anterior.

Las correspondencias de los bloques restantes son:

- **L3**: sexta tarea, referente al concepto “*antes que*”.
- **L4**: séptima tarea, referente al concepto “*después que*”.
- **L5**: octava tarea, referente a la ordenación de tres elementos con tres caminos posibles.
- **L6**: novena tarea, referente a la ordenación de cuatro elementos con tres caminos posibles.
- **L7**: décima tarea, en la que se demanda una respuesta simultánea a una cuestión referente a los conceptos “*después que*” y “*antes que*” en la que intervienen cuatro elementos y tres caminos.

La codificación de las respuestas y la valoración correspondiente se recogen en las tablas A.1 y A.2, página 622 y siguientes, del anexo A.

Con el propósito de clasificar de una manera cómoda los resultados obtenidos e introducir una base numérica que posibilite calcular medias y observar tendencias que clarifiquen el análisis, se ha asignado a cada una de las situaciones posibles una valoración numérica según se especifica en la misma tabla A.1. Con ello, la tabla A.2 recoge dichas valoraciones para cada sujeto así como su suma y las variables **SumaL** y **MediaL**, correspondiendo la primera a dicha suma convertida a una escala de 0 a 5 unidades y la segunda a las medias de **SumaL** para los distintos grupos de edad.

\*Véase la página 177 y siguientes.



Los bloques están ordenados por grado de dificultad creciente salvo los dos primeros, cuyo nivel de dificultad es a priori el mismo, lo que también sucede para los bloques tercero y cuarto.

### 5.7.2 Análisis de las respuestas.

El análisis de las respuestas se ha realizado en base a los datos almacenados en los registros **listaRi\*** (con **i** variando de 2 a 10).

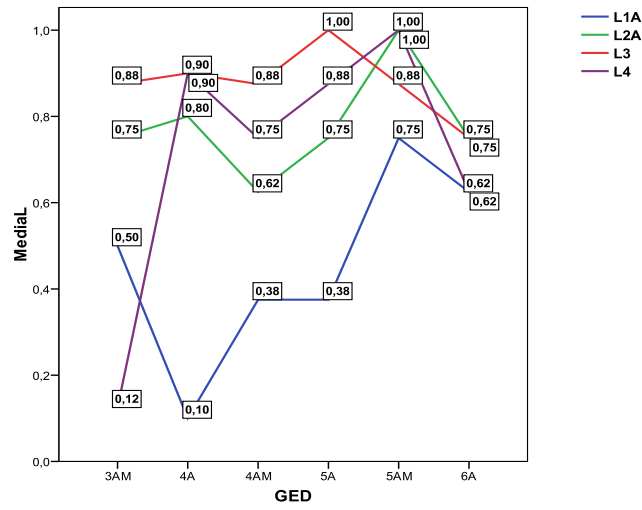
Los gráficos de las figuras 5.14(a) y 5.14(b) representan las medias de los resultados obtenidos en los siete bloques por grupos de edad. En ellos se aprecian semejanzas claras entre los resultados de los cuatro primeros bloques y entre los de los tres últimos entre sí, observándose también diferencias notables en los patrones evolutivos de ambos conjuntos de bloques.

Las variaciones más suaves en los resultados de los bloques segundo, tercero y cuarto en los grupos de edad indican un dominio elevado y homogéneo de los conceptos implicados. El comportamiento singular en los resultados del primer bloque puede ser indicativo de una necesidad de adaptación de los sujetos a las tareas o un déficit inicial de atención que se va superando en los bloques posteriores, idea que también apoyan los mejores resultados en este bloque de los grupos de edad superior. Por ello consideramos que el conocimiento del concepto de *primer elemento*, al que alude este bloque, puede ser similar a los anteriores, es decir, elevado y homogéneo. Además, la mejora progresiva de los resultados en los bloques posteriores puede indicar que se produce aprendizaje y mejora de la atención al avanzar las tareas.

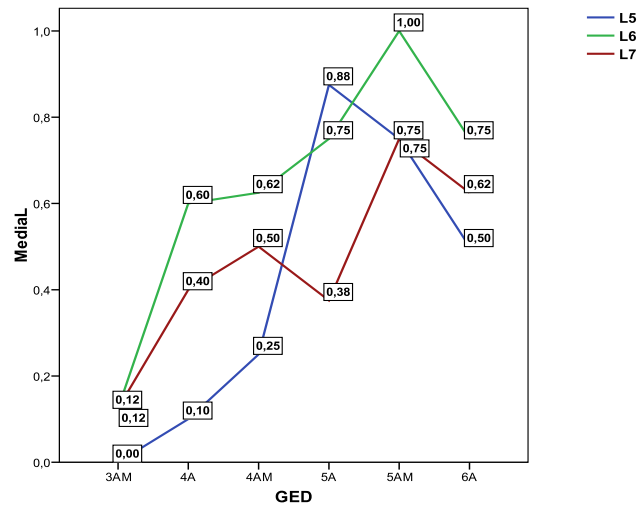
Las variaciones más bruscas en los patrones evolutivos de los tres últimos bloques muestran diferencias claras en la identificación de series por por más de una condición, competencia que es muy limitada en los dos grupos de edad inferior y que progresa rápidamente en los tres siguientes grupos, apreciándose una variación muy acusada entre los cuatro años y medio y los cinco años y medio.

En el quinto bloque se observa un fenómeno similar al del primero y debido a las mismas causas, de tal forma que a pesar de ser un bloque de menor dificultad que los dos siguientes, todos los grupos de edad, salvo el de cinco años, obtienen resultados peores o iguales que en los bloques posteriores que son de mayor dificultad. El quinto bloque inicia la identificación de una serie completa por más de una condición, actividad relacional distinta a las anteriores en las que la serie se determina por una sola condición o un único elemento: el primero, el último, el siguiente o el anterior a uno dado, lo

\*Estos registros se describen en el apartado 5.5.3.3, página 182 y siguientes.



(a)



(b)

Fig. 5.14. Medias de los bloques de tareas de orden lineal. Estudio exploratorio. (a) Bloques del primero al cuarto. (b) Bloques del quinto al séptimo.

que exige una readaptación a las actividades y puede producir pérdida de atención de los sujetos que se supera en los bloques posteriores.

Por otra parte, las diferencias en los patrones de los dos tipos de bloques muestran la mayor dificultad que existe en la identificación verbal de secuen-

cias ordenadas en las que interviene más de una condición o relación entre sus elementos.

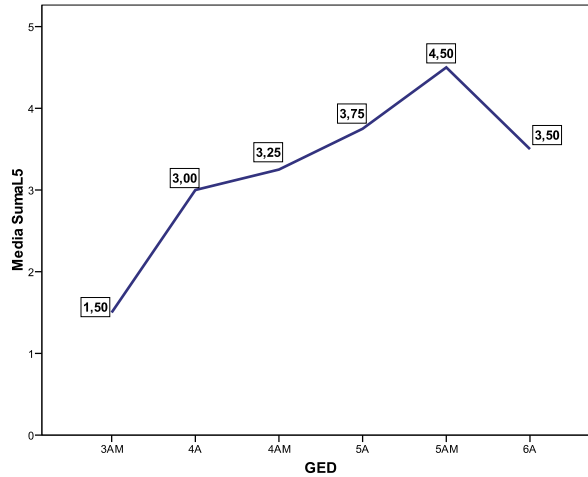


Fig. 5.15. Medias globales por grupos de edad, tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.

Las gráficas de la Figura 5.14 parecen indicar que el mayor grado de competencia en este aspecto del orden se alcanza entre los cinco y los seis años de edad. Los peores resultados obtenidos por el grupo de seis años pudiera ser un efecto muestral o un signo indicativo de evolución no lineal de estas competencias con la edad. Lo que también se observa en el gráfico de la Figura 5.15 que representa las medias globales de los siete bloques por grupos de edad, mientras que la evolución de los resultados globales por grupos de edad se muestra en el gráfico de la Figura 5.16.

En las gráficas de la Figura 5.16 observamos, en primer lugar, una clara tendencia a la mejora de resultados con la edad desde los tres años y medio a los cinco años y medio, siendo excepcional el grupo de seis años, cuyos resultados empeoran respecto de los del grupo anterior.

Por otra parte, son dignos de mencionar los siguientes resultados:

- a) Los mejores resultados, 4 y 5, que corresponden a la realización de dos o de los tres últimos bloques, aún cuando pueden darse para sujetos de cuatro o de cuatro años y medio, no predominan hasta los cinco años y medio.
- b) Las colas correspondientes a los resultados inferiores, 1 y 2, en los que no se realiza ninguno de los tres últimos bloques, no desaparecen hasta los cinco años.

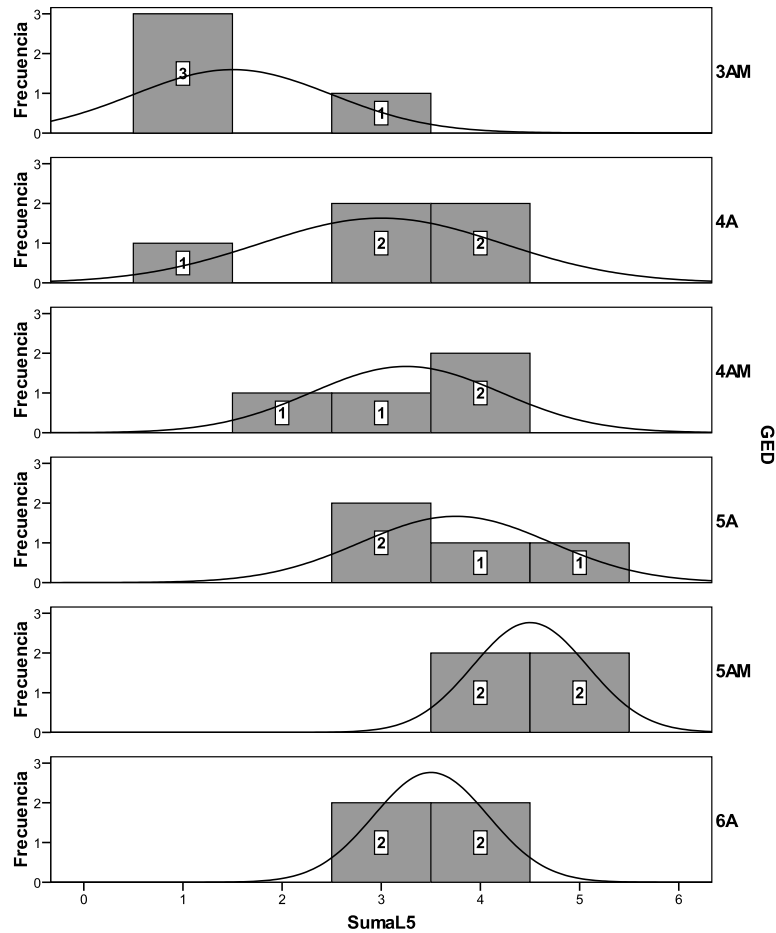


Fig. 5.16. Frecuencias y evolución de los resultados globales por grupos de edad, tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.

- c) La dispersión tiende a disminuir con la edad, minimizándose a partir de los cinco años, lo que apoya la idea de que las capacidades y competencias correspondientes a este aspecto ordinal presentan su mayor grado de desarrollo entre los cinco y los seis años de edad, comenzando a manifestarse progresivamente a partir de los tres años.

De nuevo, la excepcionalidad del grupo de seis años parece indicar que tales competencias pueden no consolidarse en sujetos de seis o más años, que pueden presentar dificultades para reconocer secuencias sencillas de tres o cuatro elementos. Este comportamiento sugiere también una evolución no lineal de dichas capacidades y competencias al avanzar la edad de los sujetos.

Por otra parte, se han hallado correlaciones (de Pearson) positivas significativas en las respuestas individuales a los bloques sucesivos y contiguos a partir del cuarto. Concretamente:

- Correlación (**L4, L5**)=0,400, significación bilateral: 0,047 al 95 %.
- Correlación (**L5, L6**)=0,409, significación bilateral: 0,042 al 95 %.
- Correlación (**L6, L7**)=0,633, significación bilateral: 0,001 al 99 %.

Lo que indica, de acuerdo con el análisis anterior, que las tareas seleccionan progresivamente a los sujetos con mayores competencias.

### 5.7.3 Niveles en el orden lineal

El análisis anterior pone de manifiesto que la identificación de secuencias ordenadas linealmente puede ser un criterio válido para estudiar la evolución de las competencias ordinales lineales de tipo verbal.

Utilizando este criterio, podemos establecer los siguientes niveles o estados:

- ❖ **Nivel 1:** Sujetos que identifican secuencias ordenadas linealmente usando una sola condición sobre sus elementos. Realizan tareas de los cuatro primeros bloques y no realizan, o lo hacen por azar, tareas de los tres últimos bloques. Presentan competencias ordinales lineales incipientes identificando el primer elemento, el último, el siguiente o el anterior a un elemento dado en una secuencia lineal simple.
- ❖ **Nivel 2:** Sujetos que comienzan a identificar secuencias lineales usando más de una condición sobre sus elementos. Realizan, totalmente o con un alto porcentaje de éxito, tareas de los cuatro primeros bloques y una tarea de los tres últimos, al primer intento, o más de una, al segundo. Identifican el primer elemento, el último, el siguiente o el anterior a un elemento dado en una secuencia lineal y comienzan a identificar secuencias ordenadas de tres o cuatro elementos.
- ❖ **Nivel 3:** Sujetos que identifican secuencias lineales usando más de una condición sobre sus elementos. Realizan totalmente o con bastante éxito tareas de los cuatro primeros bloques y al menos dos tareas de los tres últimos al primer intento. Identifican el pri-

mer elemento, el último, el siguiente y el anterior a un elemento dado en una secuencia lineal e identifican secuencias ordenadas de tres o cuatro elementos.

La clasificación resultante de los sujetos de la muestra la tabla A.3, página 624, del anexo A y las frecuencias y evolución de estos niveles por grupos de edad en el gráfico 5.17.

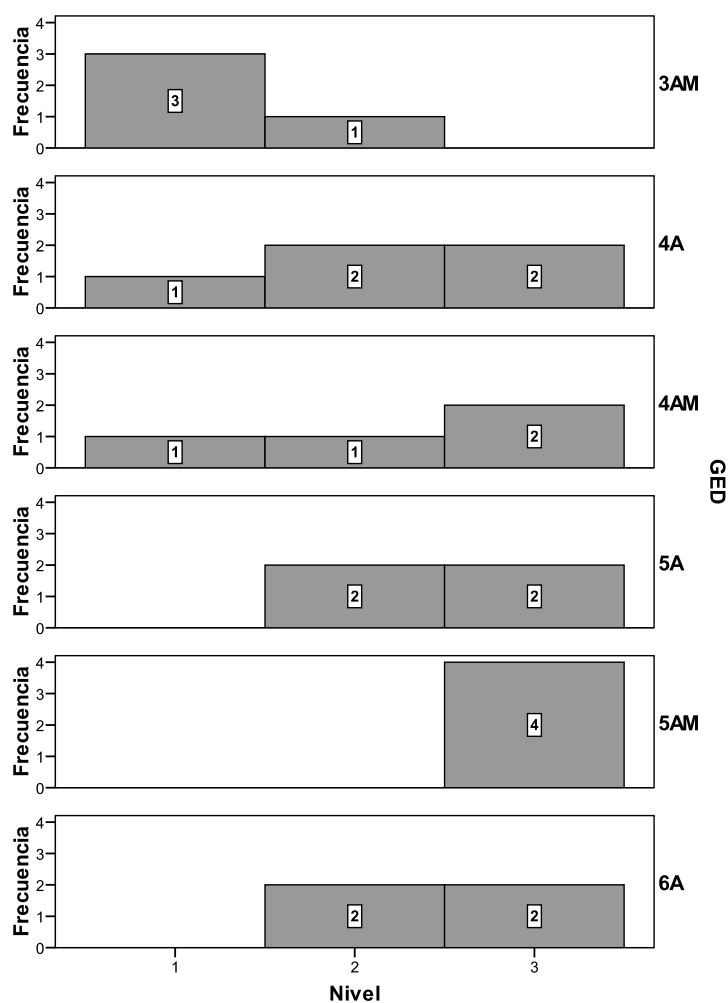


Fig. 5.17. Frecuencias y evolución de los niveles, orden lineal. Estudio Exploratorio.

Se observa claramente que la mayor frecuencia del *nivel 1* se da para el grupo de tres años y medio, en el que es predominante. En este grupo aparece ya el *nivel 2*, por lo que a esta edad algún sujeto es capaz de identificar

secuencias linealmente ordenadas usando más de una condición sobre sus elementos.

El *nivel 1* persiste en los grupos de cuatro años y cuatro años y medio y no se supera totalmente hasta los cinco años. Se observa también que en los grupos de cuatro años y cuatro años y medio se alcanza el *nivel 3* encontrándose sujetos en los tres niveles, por lo que estas edades son críticas y en ellas debería comenzar la acción didáctica en este aspecto.

El *nivel 2*, como nivel de transición, solo se supera totalmente a los cinco años y medio sin superarse del todo en los sujetos de seis años.

Todo ello indica que, para los sujetos de la muestra, la identificación de secuencias lineales mediante un solo criterio: primer elemento, último elemento, anterior y siguiente, se utiliza con bastante éxito a partir de los tres años y medio. Y que la identificación mediante más de un criterio, aún cuando comienza a esa edad, solo se domina a partir de los cinco años, sin consolidarse del todo en los sujetos de seis años. El intervalo de cuatro a cinco años es crítico y en él debería iniciarse, sino antes, la acción didáctica, ya que las dificultades no superadas en este aspecto ordinal pueden influir negativamente en la adquisición de los primeros conceptos numéricos y aritméticos.

Finalmente hemos de indicar que se han hallado correlaciones (de Pearson) positivas significativas entre las respuestas individuales en determinados bloques o tareas y los valores las variables **SumaL** y **Nivel**, correspondientes a los resultados globales y al nivel de cada sujeto:

- Correlación (**L2A**, **SumaL**)=0,424, significación bilateral: 0,035 al 95%. Correlación (**L2A**, **Nivel**)=0,417, significación bilateral: 0,038 al 95%.
- Correlación (**L4**, **SumaL**)=0,632, significación bilateral: 0,001 al 99%. Correlación (**L4**, **Nivel**)=0,572, significación bilateral: 0,003 al 99%.
- Correlación (**L5**, **SumaL**)=0,599, significación bilateral: 0,002 al 99%. Correlación (**L5**, **Nivel**)=0,542, significación bilateral: 0,005 al 99%.
- Correlación (**L6**, **SumaL**)=0,769, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**L6**, **Nivel**)=0,789, significación bilateral: 0,000 al 99%.
- Correlación (**L7**, **SumaL**)=0,725, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**L7**, **Nivel**)=0,748, significación bilateral: 0,000 al 99%.

La correlación aumenta con la dificultad de los bloques y tareas, salvo la última tarea que no fue realizada por algunos sujetos, siendo especialmente significativa la correspondiente al bloque L6 (tarea 9). También es Correlación (**SumaL, Nivel**)=0,922 con significación bilateral: 0,000 al 99%, que muestra el excelente acuerdo entre los valores individuales de dichas variables para los sujetos.

#### 5.7.3.1 Conclusiones

Teniendo en cuenta la caracterización de los estados, obtenemos las siguientes conclusiones y consecuencias sobre los niveles:

- 1<sup>a</sup>. En el primer nivel se encuentran la mayoría de los sujetos de tres años y medio y algunos de cuatro y cuatro años y medio. Se trata de sujetos que presentan competencias ordinales lineales incipientes identificando la mayor parte de los siguientes elementos de una secuencia lineal: el primero, el último, el siguiente o el anterior; no identifican, sin embargo, secuencias lineales definidas por más de una condición entre sus elementos. Este nivel no se supera completamente hasta los cinco años de edad.
- 2<sup>a</sup>. En el segundo nivel se encuentran sujetos de todo el intervalo de edad estudiado, es decir, de tres años y medio a seis años. Es, por tanto, el estado más persistente de todos y solo se supera completamente por sujetos de cinco años y medio sin consolidarse del todo a los seis años de edad. Estos sujetos identifican totalmente o con bastante éxito el primer elemento, el último, el siguiente o el anterior a un elemento dado en una secuencia lineal y comienzan a identificar secuencias ordenadas de tres o cuatro elementos definidas por más de una condición ordinal.
- 3<sup>a</sup>. En el tercer nivel se encuentran sujetos de cuatro a seis años. Al parecer se inicia a los cuatro años y su frecuencia es máxima a los cinco años y medio, aunque no se consolida del todo a los seis años de edad, lo que parece indicar *no uniformidad y lenta evolución de las competencias ordinales lineales a nivel verbal*. Estos sujetos identifican el primer elemento, el último, el siguiente y el anterior a un elemento dado en una secuencia lineal e identifican secuencias ordenadas de tres o cuatro elementos, definidas por más de una condición ordinal.
- 4<sup>a</sup>. El intervalo de cuatro a cinco años parece ser crítico en el proceso de construcción de estas competencias ordinales. Comienzan a manifestarse a partir de los tres años y presentan su mayor grado de desarrollo entre los cinco y los seis años de edad. Es por ello que creemos que



debería iniciarse la acción didáctica en el intervalo de 4 a 5 años, sobre todo teniendo en cuenta que las dificultades no superadas en este aspecto ordinal pueden influir negativamente en la adquisición de los primeros conceptos numéricos y aritméticos.

A las que podemos añadir las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Las tareas multimedia referentes al orden lineal infralógico distinguen diferentes niveles o estados de competencias ordinales en el intervalo de edad de 3 a 6 años.
- 2<sup>a</sup>. Dichas tareas son adecuadas para asignar un estado de competencia ordinal infralógica a cada sujeto de la muestra, lo que quiere decir que son útiles para evaluar dicho grado de competencia.
- 3<sup>a</sup>. Los resultados favorecen la detección de patrones de desarrollo singulares respecto al grupo de edad\*. Con ello se puede facilitar el diagnóstico de sujetos con un desarrollo precoz o con dificultades de aprendizaje.
- 4<sup>a</sup>. El estado de la competencia ordinal infralógica evoluciona positivamente con la edad, posiblemente de forma no lineal.
- 5<sup>a</sup>. Los intervalos de edad elegidos para el estudio son adecuados, ya que, en general, discriminan bien a los sujetos en cuanto a la competencia ordinal analizada.

#### 5.7.4 Análisis de los tiempos de respuesta.

En el gráfico de la Figura 5.18 se representan los patrones temporales en las respuestas a las tareas del conjunto orden lineal, observándose que los patrones temporales con menores tiempos se dan en las tareas intermedias. Los datos correspondientes, incluidos los tiempos medios para cada grupo de edad, el tiempo total empleado en todas las tareas por todos los sujetos de la muestra y el tiempo medio total por sujeto se pueden consultar en la tabla A.4, página 625, anexo A.

Se observa también que, aún teniendo una dificultad similar, los tiempos empleados en las dos tareas iniciales son superiores a los invertidos en las dos siguientes, lo que está de acuerdo con lo indicado en otro momento acerca de la necesidad de adaptación de los sujetos al tipo de tarea. Del mismo modo ocurre con la tarea 8, correspondiente al bloque **L5**, en relación con las anteriores y siguientes.

Por otra parte se observa que los tiempos totales tienden a crecer con

\*Véanse las tablas A.2 y A.3, página 623 y siguientes, del anexo A.

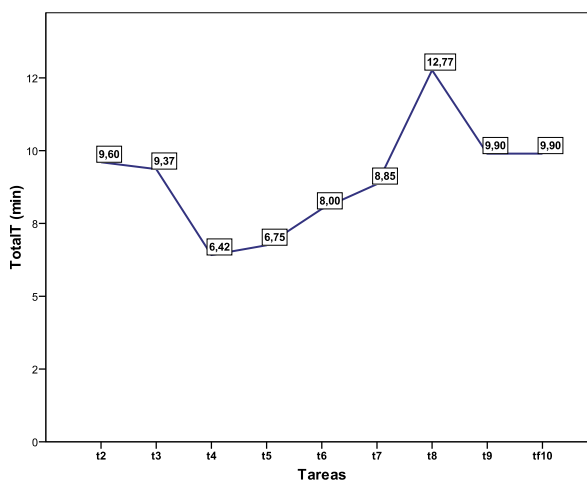


Fig. 5.18. Tiempos totales por tarea, orden lineal. Estudio Exploratorio.

la dificultad de las tareas y que se da una correlación inversa de  $-0,776$ , con significación  $0,014$  al  $95\%$ , entre los resultados totales por tareas y los tiempos totales por tareas.

El tiempo total empleado por cada niño en las nueve tareas se ilustra en el gráfico de la Figura 5.19, en el que podemos observar que las oscilaciones temporales se van atenuando con la edad. Igualmente, salvo casos puntuales, los tiempos empleados por los sujetos de cuatro y cuatro años y medio parecen tender hacia los tres minutos, mientras que los de los cinco años en adelante lo hacen hacia los dos minutos. Los tiempos invertidos por un total de 19 de los 25 niños de la muestra se hallan en un intervalo comprendido entre 2 y 4 minutos. Por otra parte, los tiempos singularmente elevados son puntuales y creemos que ocurren cuando el sujeto pierde concentración o atención o realiza tareas por encima de su nivel; estos tiempos pueden ser también indicadores para el diagnóstico de déficits de atención. Por último, hemos de señalar que la correlación observada entre los tiempos totales y los resultados globales por sujeto es débil:  $-0,238$  con significación bilateral  $0,252$ .

En la Figura 5.20 se representan las medias temporales por grupos de edad, confirmándose las anteriores apreciaciones y situándose la media del grupo en torno a los tres minutos y medio. Observamos también en dicha Figura que las medias temporales disminuyen con la edad, que las medias temporales son prácticamente las mismas en los grupos 4A, 4AM y 5AM, hallándose muy próximas a la media global y que tiempos menores no impli-

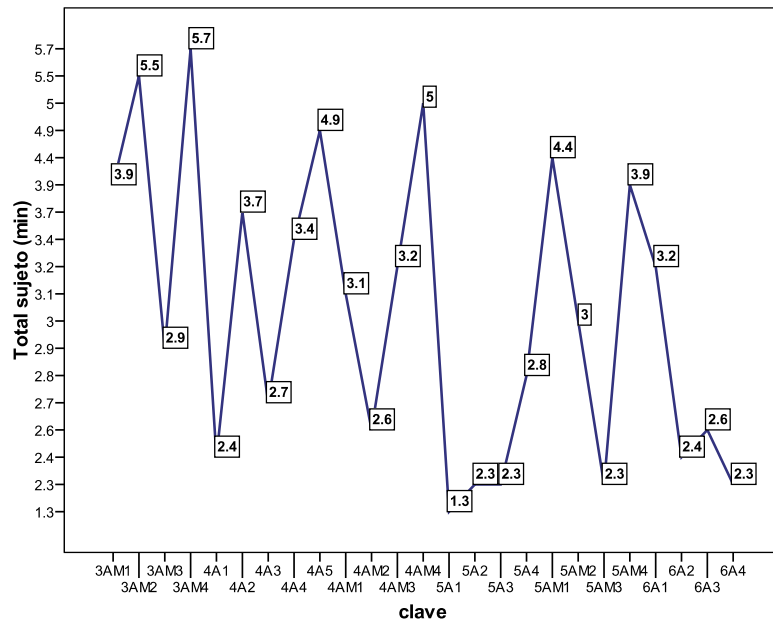


Fig. 5.19. Tiempos totales por sujeto, orden lineal. Estudio Exploratorio.

can necesariamente mejores resultados, como evidencian los grupos 5AM y 6A, y la débil correlación inversa ( $-0,657$  con significación  $0,156$ ) existente entre las medias temporales y las medias de resultados por grupos de edad.

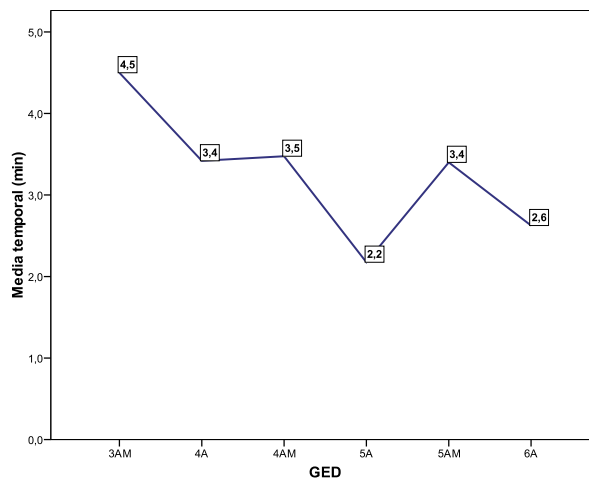


Fig. 5.20. Medias temporales por grupos de edad, orden lineal. Estudio Exploratorio.

En cuanto a los patrones temporales de los sujetos, los gráficos de la Figura 5.21 confirman que, salvo para algún sujeto y alguna tarea puntual, las oscilaciones temporales en los grupos de edad tienden a uniformizarse a medida que la edad aumenta.

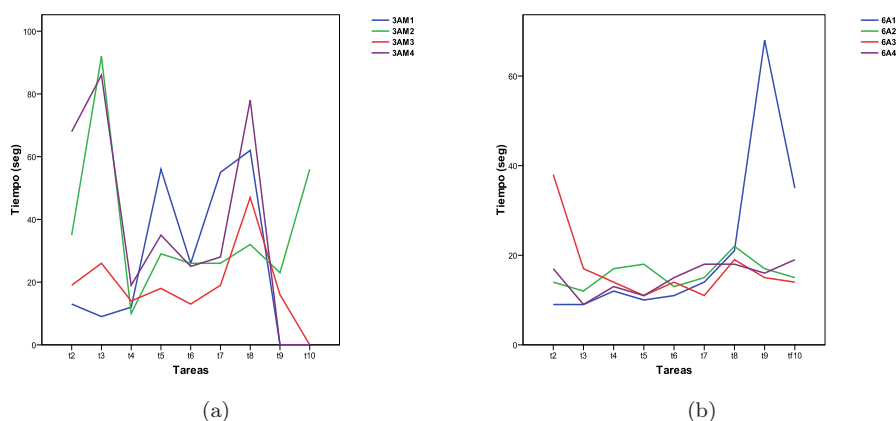


Fig. 5.21. Patrones temporales. Estudio exploratorio. (a) Grupo de tres años y medio. (b) Grupo de seis años.

#### 5.7.4.1 Conclusiones

Sintetizando, del estudio de los tiempos de respuesta a las tareas de este conjunto se pueden resaltar las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Los tiempos invertidos en las dos tareas iniciales son superiores a los invertidos en las dos siguientes, de grado de dificultad similar. El resultado es coherente con lo indicado sobre la necesidad de adaptación de los niños al tipo de tareas, conclusión que se confirma al observar la misma situación para la tarea 8 (bloque **L5**) en relación con las anteriores y siguientes.
- 2<sup>a</sup>. Los tiempos totales por tarea tienden a crecer con la dificultad de las mismas.
- 3<sup>a</sup>. El 75 % de los niños de la muestra realizan las nueve tareas en un intervalo temporal comprendido entre 2 y 4 minutos, situándose la media en tres minutos y medio.
- 4<sup>a</sup>. Los tiempos singularmente elevados son puntuales para determinados sujetos y tareas y ocurren cuando el sujeto pierde concentración o atención o realiza tareas cuyo nivel no alcanza. Estos tiempos elevados se pueden utilizar como indicadores para el diagnóstico de déficits de atención.

- 5<sup>a</sup>. Las medias temporales por grupos de edad disminuyen con la misma, siendo 4,5 y 2,2 minutos los valores máximo y mínimo correspondientes a los grupos 3AM y 5A respectivamente. No obstante, esta disminución no puede relacionarse con una mejora en los resultados, como prueban los resultados en los grupos 5AM y 6A y las débiles correlaciones encontradas.
- 6<sup>a</sup>. Los patrones temporales tienden a uniformizarse con la edad.

### 5.7.5 Número de intentos.

En lo que se refiere al número de intentos erróneos, se representa en el gráfico de la Figura 5.22 la distribución de los patrones de intentos erróneos por sujetos y niveles y los resultados correspondientes se pueden examinar en la tabla A.5, página 626, del anexo A.

En general se observan cuatro tipos de patrones en relación con el número de intentos erróneos:

- Elevado número de intentos erróneos que se reparten de manera bastante uniforme en todas o en la mayoría de las tareas.
- Elevado número de intentos erróneos que se concentran en las tareas de mayor dificultad.
- Elevado número de intentos erróneos que se concentran en tareas determinadas y puntuales, no necesariamente las de mayor dificultad.
- Número bajo o nulo de intentos erróneos (5 o menos).

A cada tipo de patron se le asignan, respectivamente, los valores 1, 2, 3 y 4. Con ello, el coeficiente de correlación de Pearson entre el nivel y el tipo de patrón asignados a cada sujeto es 0,803 con significación (bilatreal) 0,00 al 99%.

En la Figura 5.22 se observa que *patrón 1* corresponde, de modo predominante, a sujetos de edad inferior o igual a cuatro años y medio y *nivel 1*; encontrándose un sujeto de cinco años y otro de seis con este patrón en el *nivel 2*, lo que podría ser útil de cara al diagnóstico de dificultades.

El *patrón 2* predomina en el *nivel 2*, como era de esperar por ser éste un nivel de transición, y se distribuye desde los tres años y medio a los seis años, si bien ocurre para un solo sujeto de esta edad, lo que también puede ser útil de cara al diagnóstico. Exceptuando este caso, el *patrón 2* desaparece a partir de los cinco años.

Por su parte, los *patrones 3 y 4* predominan en el *nivel 3*, el primero en sujetos de edad inferior o igual a cuatro años y medio y el segundo a partir de

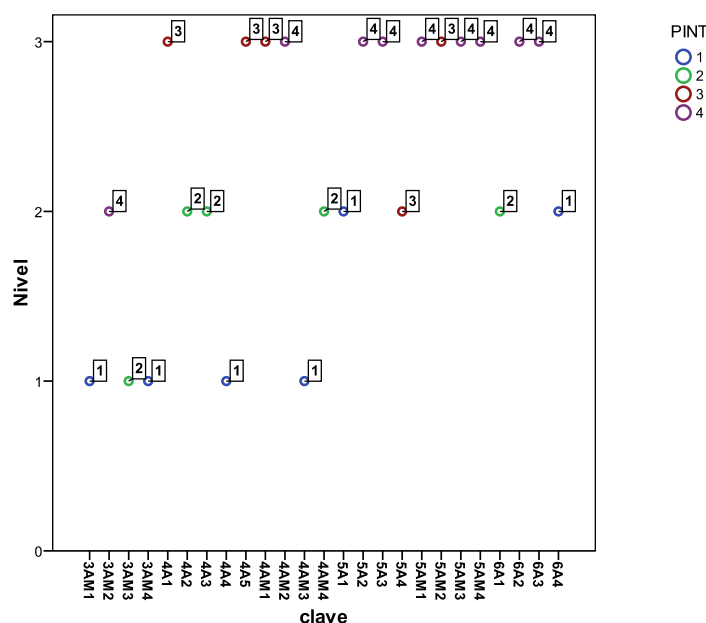


Fig. 5.22. Distribución de patrones de intentos erróneos por sujetos y niveles, orden lineal. Estudio Exploratorio.

los cinco años, lo que confirma las conclusiones anteriores sobre los resultados. Excepcionalmente hay un sujeto de tres años y medio con este patrón en el *nivel 2*. A nuestro juicio, el *patrón 3* es indicativo de que el sujeto sufrió pérdidas de atención o encontró dificultades especiales de comprensión en alguna tarea puntual, no necesariamente en las de mayor dificultad objetiva, reiterando el error sin cuestionarse la bondad de su decisión. Por tanto, la mayor frecuencia de este patrón en sujetos de edad inferior o igual a cuatro años y medio puede ser indicativa de la complejidad y de la dificultad de comprensión del lenguaje ordinal a esas edades, lo que avalaría de nuevo la conveniencia de la acción didáctica a los cuatro años de edad. Vuelve a observarse que, a partir de los cinco años, los conceptos verbales presentes en el orden lineal empiezan a utilizarse coherentemente sin consolidarse en sujetos de mayor edad, pudiendo utilizarse excepcionalmente por sujetos de edad inferior.

Las medias de los intentos erróneos por grupos de edad se recogen en el gráfico 5.23, en el que se observa de forma clara su disminución con la edad, existiendo correlaciones inversas (de Pearson) de  $-0,951$  y  $-0,882$ , con significaciones respectivas  $0,003$  (al 99%) y  $0,02$  (al 95%), entre esta

variable y las correspondientes medias de resultados y niveles medios por grupos de edad.

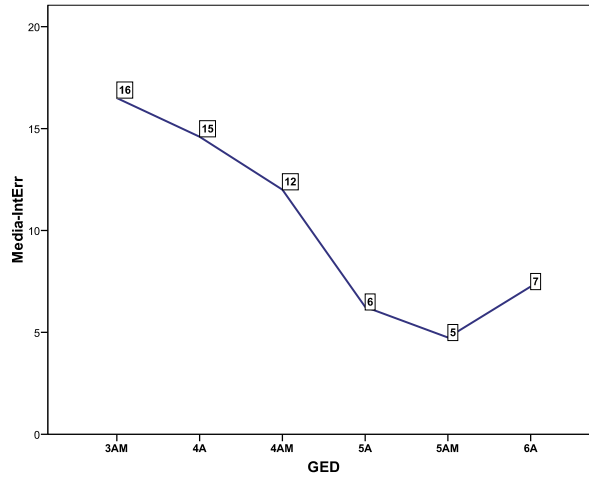


Fig. 5.23. Medias de intentos erróneos por grupos de edad, orden lineal. Estudio Exploratorio.

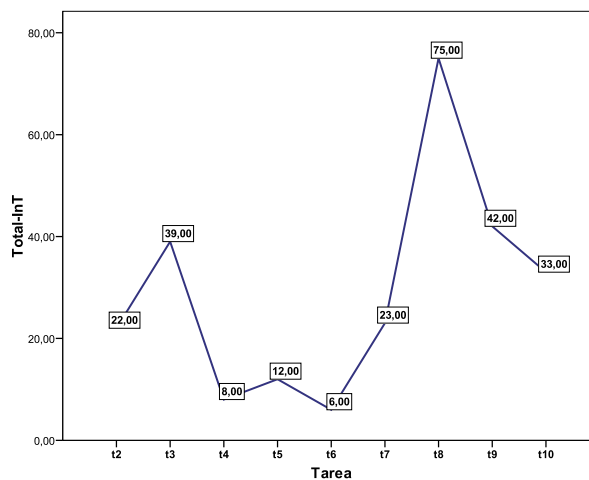


Fig. 5.24. Intentos erróneos totales por tareas, orden lineal. Estudio Exploratorio.

Por otra parte, los intentos erróneos por tareas se muestran en el gráfico de la Figura 5.24, existiendo una correlación alta (de 0,930 con significación 0,00 al 99% con significación al 99%) entre estos resultados y los resultados de la variable “tiempos totales por tarea”, gráfico 5.18; salvo que en este caso

se identifica la tercera tarea como fuente del mayor número de errores en los bloques **L1A** y **L2A**. La tarea no presenta mayor dificultad que el resto de las tareas de ambos bloques, el mayor número de errores se debe a dos sujetos de tres años y medio y cuatro años que acumulan 7 y 10 errores respectivamente.

Se observa también, como era de esperar, una correlación inversa de  $-0,748$ , con significación  $0,02$  al  $95\%$  entre esta variable y los resultados totales por tareas.

Finalmente, la revisión de los errores individuales confirma los resultados ya expuestos. Sin embargo, a pesar de su interés intrínseco, el tamaño de la muestra no permite diferenciar con claridad intentos por ensayo y error de otro tipo de intentos que pudieran tener su origen en defectos o carencias en las competencias ordinales de los sujetos.

#### 5.7.5.1 Conclusiones

En definitiva, podemos establecer las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Es posible identificar patrones que relacionan el número de intentos erróneos con el nivel y la edad, facilitando la distinción entre los sujetos, la comprensión del estado de competencia ordinal lineal en que se hallan y su evolución con la edad.
- 2<sup>a</sup>. El análisis dichos patrones permitiría identificar sujetos que pudieran necesitar un diagnóstico más preciso en lo que se refiere a sus competencias en este aspecto ordinal.
- 3<sup>a</sup>. El número medio de errores disminuye con la edad, existiendo una relación inversa significativa con el aumento medio en los resultados y en los niveles.
- 4<sup>a</sup>. Existe una correspondencia casi absoluta entre el número de intentos erróneos totales y los tiempos totales invertidos en la realización de las tareas.
- 5<sup>a</sup>. Debido al tamaño de la muestra, no es posible diferenciar con claridad entre intentos por ensayo y error y otro tipo de intentos que pudieran tener su origen en defectos o carencias en las competencias ordinales de los sujetos.



## 5.8 Resultados y conclusiones del segundo conjunto: Orden con cantidades continuas

Como se expone con detalle en el apartado 5.5.4\*, el conjunto correspondiente al orden con cantidades continuas está formado por 6 tareas, ordenadas por dificultad creciente, de las que la primera es introductoria y las cinco siguientes registran datos para el estudio. Al igual que en el caso del orden lineal desarrollamos la exposición teniendo en cuenta los distintos aspectos en los que se puede dividir el análisis de los datos.

### 5.8.1 Codificación y categorías de respuestas.

La codificación de las respuestas y las valoraciones correspondientes se recogen en las tablas A.6, A.7 y A.10 del anexo A. Del mismo modo, las estrategias utilizadas y el uso o no de las piezas sobrantes se pueden consultar en las tablas A.8 y A.9 del mismo anexo<sup>†</sup>. Por otra parte, se han asignado valoraciones numéricas a cada una de las posibles situaciones con el propósito de calcular medias y observar tendencias que clarifiquen el análisis. Los datos se incluyen en la tabla A.10 junto a los valores de las variables **SumaCC** y **MCCGED**, correspondiendo, la primera a la suma de dichas valoraciones para cada sujeto en una escala de 0 a 5 y la segunda a las medias de **SumaCC** para los distintos grupos de edad, y los valores de la variable **TotalT** correspondiente a la suma de las valoraciones por tareas.

### 5.8.2 Análisis de las respuestas.

El análisis de las respuestas se ha realizado en base a los datos almacenados en los registros **listaRi**<sup>‡</sup> (con **i** variando de 2 a 6), cuyo examen detallado permite constatar el elevado número de categorías consideradas a tenor de la gran variedad de posibilidades a tener en cuenta<sup>§</sup> y debido a que el sistema de registro de la información diseñado para este conjunto de tareas detecta todos los intentos que realiza el sujeto. Este sistema incluye todos los movimientos de los troncos sin excepción, sin discriminar aquellos en los que el sujeto trata de colocar un tronco dado en un determinado hueco de modo inequívoco de aquellos otros en los que el sujeto, al arrastrar, pierde el tronco accidentalmente o en los que inicialmente mueve un tronco que finalmente

\*Véase la página 183 y siguientes.

†Véase la página 631 y siguientes.

‡Estos registros se describen en el apartado 5.5.4.3, página 186 y siguientes.

§Solamente se han considerado aquellas categorías que aparecen en los resultados de las tareas.

decide no colocar. Este hecho obliga a modificar significativamente el sistema de registro de la información de estas tareas en estudios posteriores.

### 5.8.2.1 Estrategias y uso de la pieza sobrante

Partiendo de las tablas A.6, A.7 y A.8, se sintetiza la información relativa a las estrategias seguidas por los sujetos, por tareas y grupos de edad (GED), en la tabla 5.2, en la que las tareas se designan, al igual que en las tablas anteriormente citadas, mediante las abreviaturas **ECCj**, con **j** variando de 2 a 6, refiriéndose a las tareas segunda a sexta. Del mismo modo, las estrategias posibles se denotan mediante los signos C, D, ID y DI, que se refieren, respectivamente, a las estrategias creciente, decreciente, izquierda-derecha y derecha-izquierda utilizadas por los sujetos. Los signos N y X indican, respectivamente, los casos en los que el sujeto no realiza la tarea debido a intentos incorrectos y los que renuncia a realizarla.

En la tabla A.8, las columnas etiquetadas mediante C y D recogen el número de tareas en las que cada sujeto ha seguido una estrategia ordinal (creciente o decreciente) en su resolución. La siguiente columna indica el total de tareas en las que el sujeto ha utilizado las estrategias crecientes o decrecientes. La penúltima columna (CB) indica si el sujeto ha cambiado (S) o no (N) de estrategia ordinal cuando resuelve al menos dos tareas y la última columna indica si el sujeto cambia (S) o no (N) de estrategia ordinal cuando resuelve al menos dos de las tres últimas tareas.

En la tabla 5.2, se observa que el número de sujetos que renuncian a realizar alguna de las tareas (X) es relativamente pequeño, la renuncia aparece en las tareas de mayor dificultad y se concentra en los grupos de menor edad. De hecho las tareas segunda y tercera las realizan el 100% de los sujetos, la cuarta el 96%, la quinta el 88% y la sexta el 84%, lo que avala la adecuación de su interfaz y su temática a las edades de los sujetos de la muestra.

En la misma tabla se observa que el número de sujetos que resuelven incorrectamente las tareas (N) aumenta con la dificultad, se concentra en los grupos de menor edad en las más sencillas y se va distribuyendo con más homogeneidad en todos los grupos de edad a medida que aumenta la dificultad de las mismas. Es destacable la mayor dificultad de la cuarta tarea en relación con la tercera, quizás por haber sido percibida por los sujetos como bastante más elevada, dificultad que disminuye en la quinta debido, quizás, a una mejor comprensión por la experiencia obtenida en la tarea anterior.

Nótese que en las tareas segunda y tercera (ECC2 y ECC3), en las que se

(a)

GED	ECC2			ECC3		
	C	D	N	C	D	N
3AM	1	0	3	0	2	2
4A	3	2	0	0	3	2
4AM	2	1	1	0	2	2
5A	3	1	0	1	1	2
5AM	3	0	1	2	2	0
6A	1	2	1	0	2	2
<b>Total</b>	13	6	6	3	12	10

(b)

GED	ECC4				ECC5					
	C	D	N	X	C	D	DI	ID	N	X
3AM	0	1	3	0	0	1	0	0	2	1
4A	1	0	3	1	1	2	0	0	1	1
4AM	0	1	3	0	0	1	0	0	2	1
5A	2	0	2	0	0	2	0	1	1	0
5AM	0	2	2	0	0	1	1	1	1	0
6A	0	2	2	0	0	1	1	0	2	0
<b>Total</b>	3	6	15	1	1	8	2	2	9	3

(c)

GED	ECC6				
	C	D	ID	N	X
3AM	0	0	0	3	1
4A	0	1	0	2	2
4AM	0	0	1	2	1
5A	1	1	0	2	0
5AM	1	0	0	3	0
6A	1	1	0	2	0
<b>Total</b>	3	3	1	14	4

Tabla 5.2. Estrategias. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

(a) Tareas segunda y tercera; (b) Tareas cuarta y quinta; (c) Sexta tarea.

trata de colocar solamente dos troncos\*, todos los sujetos que las resuelven correctamente siguen necesariamente alguna estrategia, coincidiendo en la segunda las estrategias creciente e izquierda-derecha y, en la tercera, ésta última con la decreciente.

Los dos siguientes, ECC4 y ECC5, corresponden a tareas en las que hay que colocar tres troncos, por lo que solo algunos niños siguen una estrategia ordinal. En la tarea ECC4 la estrategia decreciente coincide con la izquierda-derecha y en la tarea ECC6 hay que colocar cuatro troncos, no existiendo en ésta ni en la anterior, ECC5, coincidencia de estrategias.

\*Véase la sección 5.5.4.2, en la página 184 y siguientes.

Nótese también que en la resolución correcta de las tres primeras tareas, ECC2, ECC3 y ECC4, se observan tanto estrategias crecientes como decrecientes, predominando la estrategia creciente en la segunda y la decreciente en la tercera y cuarta. Sin embargo, en la segunda se detectan 6 casos correspondientes a la estrategia decreciente, aproximadamente un 32 % de los que la resuelven correctamente, en la tercera se registran 3 casos correspondientes a la estrategia creciente, un 20 % de los que la resuelven correctamente, y en la cuarta se observan 3 casos correspondientes a la estrategia creciente, aproximadamente un 33 % de los que la resuelven correctamente.

Estos casos, en los que las estrategias empleadas no se corresponden con el orden de los huecos, sugieren el papel limitado de las estrategias izquierda-derecha y derecha-izquierda en la resolución de las tareas, lo que también viene confirmado por los resultados de las tareas quinta y sexta, en las que se detecta este hecho, respectivamente, en un 15 % (2 sujetos de 13) y en un 14 % (1 sujeto de 7 utiliza la ID) de sujetos. Concluimos por tanto que la gran mayoría de los sujetos que resuelven las tareas emplean las estrategias ordinales, creciente o decreciente, en su resolución. La estrategia decreciente se emplea aproximadamente en un 60 % de las ocasiones (35 de 58 casos), utilizándose la estrategia creciente en el 40 % (23 de 58 casos) restante. Estas dos estrategias se utilizan, a su vez, en un 46 % (58 de 125) del total de las ocasiones posibles.

Igualmente, la estrategia decreciente se utiliza en un 71 % de las ocasiones (17 de 24 casos) y la estrategia creciente en un 29 % (7 de 24 casos) en las tres últimas tareas. En total se utilizan en un 32 % (24 de 75) de las ocasiones posibles, lo que pone de manifiesto la dificultad de las mismas y la necesidad de mejorar el registro de la información, que en su estado actual puede ocultar o no detectar información relevante.

En relación con la preferencia por la estrategia decreciente, puede haber sido favorecida por el orden decreciente de los huecos en las tareas tercera y cuarta, pudiendo haber inducido a algunos sujetos a utilizar la misma estrategia en la quinta tarea. Del mismo modo puede haberlo hecho el procedimiento de colocar primero los troncos más grandes y más sencillos de mover en los huecos más grandes, que al mismo tiempo son los más sencillos de detectar. De todos modos estas cuestiones deben aclararse en estudios posteriores con muestras más amplias.

Por otra parte, la tabla A.8 muestra que 17 de los 25 sujetos (68 %), utilizan en algún grado estrategias ordinales en la resolución de al menos dos de las cinco tareas, mientras que no lo hacen 8 sujetos, de los que 6 pertenecen a los grupos de edad menor o igual a cuatro años y medio y solamente

2 pertenecen a grupos de edades superiores. Así mismo, 9 sujetos (36%) resuelven correctamente al menos dos de las tres últimas tareas utilizando estrategias ordinales en su resolución; de ellos, un 67% tienen edades iguales o superiores a cinco años. Por otra parte, de los 16 sujetos que no realizan correctamente las tareas, 10 tienen edades inferiores o iguales a los cuatro años y medio y 6 superiores a dicha edad. Todo ello apunta a una evolución con la edad de esta competencia.

La tabla A.8 muestra también que de los 17 sujetos mencionados, 9 no cambian de estrategia ordinal y 8 sí lo hacen, sin que se encuentre relación alguna entre el mantenimiento o el cambio de estrategia y los resultados obtenidos. En este sentido se observa también que los cambios de estrategia se producen con mayor frecuencia en los sujetos de edad igual o superior a cinco años, 6 de 10 (60%) mientras que sólo 2 de 7 (29%) cambian de estrategia y tienen edad inferior a cinco años. De los 9 sujetos citados en el párrafo anterior, 6 no cambian de estrategia ordinal y 3 sí lo hacen, obteniéndose conclusiones muy similares.

Por último, no se observan preferencias significativas en las estrategias utilizadas por los distintos grupos de edad.

Los resultados globales por tareas y grupos de edad se muestran, respectivamente, en las tablas 5.3 y 5.4 siguientes.

Tarea	C/D	ID/DI	N	X	% C/D	% ID/DI	% N	% X
ECC2	19	0	6	0	76	0	24	0
ECC3	15	0	10	0	60	0	40	0
ECC4	9	0	15	1	36	0	60	4
ECC5	9	4	9	3	36	16	36	12
ECC6	6	1	14	4	24	4	56	16
<b>Total</b>	58	5	54	8				

Tabla 5.3: Resumen numérico de las estrategias por tareas. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

Como muestra la tabla 5.3 los porcentajes totales de sujetos que usan una estrategia ordinal (C o D) es el 76%, el 60%, el 36%, el 36% y el 24% respectivamente en cada tarea. Lo que, a su vez, muestra una clara disminución de su uso al aumentar la dificultad de las mismas. Es clara también la escasa presencia del uso de las estrategias no ordinales (ID/DI) con porcentajes de uso del 16% y del 4% en las dos últimas tareas. Se

observa de nuevo que los porcentajes de resolución sin estrategia (% N) crecen con la dificultad de las tareas y que los porcentajes de renunciadas (% X) son pequeños y aumentan con la dificultad de las mismas concentrándose en las tres últimas tareas.

En la tabla 5.4, las columnas sexta y séptima, etiquetadas C/D y ID/DI respectivamente, recogen las sumas de las columnas C y D y ID y DI respectivamente, es decir, los totales de estrategias ordinales y no ordinales para cada grupo de edad. En ella destaca el muy escaso uso por los sujetos de las estrategias no ordinales por lo que aumento del grado de dificultad en las tareas o la pérdida o recuperación de la atención pueden motivar que un sujeto deje de usar estrategias ordinales y no utilice ninguna en cualquier grupo de edad. Se observa también que, salvo para los grupos de cuatro años y medio y seis años, el uso de la estrategia creciente tiende a aumentar con la edad, produciéndose un máximo en el grupo 5A; que el uso de la estrategia decreciente es casi constante (en 4 o 5 ocasiones de las 20 o 25 posibles), produciéndose dos picos en los grupos 4A y 6A; que el uso de ambas estrategias ordinales (C/D), salvo un máximo local en el grupo de cuatro años, parece estabilizarse a partir de los cinco años entre 10 y 12 ocasiones de las 20 posibles, debido a la disminución en el uso de la estrategia creciente a partir de esa edad y a la constancia o aumento del uso de la decreciente en el grupo 6A; que el uso de las estrategias no ordinales oscila entre 1 y 2 respuestas de las 20 posibles (entre un 5% y un 10% de las ocasiones) a partir de los cuatro años y medio; que las respuestas sin estrategia se concentran en los tres grupos de menor edad con 31 frente a 23 ocasiones, aumentando sorprendentemente en el grupo 6A, y que las renunciadas se reducen a los tres grupos de menor edad.

GED	C	D	ID	DI	C/D	ID/DI	N	X	Tot
3AM	1	4	0	0	5	0	13	2	20
4A	5	8	0	0	13	0	8	4	25
4AM	2	5	1	0	7	1	10	2	20
5A	7	5	1	0	12	1	7	0	20
5AM	6	5	1	1	11	2	7	0	20
6A	2	8	0	1	10	1	9	0	20
<b>Total</b>	<b>23</b>	<b>35</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>58</b>	<b>5</b>	<b>54</b>	<b>8</b>	<b>125</b>

Tabla 5.4: Resumen numérico de las estrategias por grupos de edad. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

En todo el conjunto, como se deduce de los totales del uso de las estrategias almacenados en la tabla 5.4, los porcentajes de uso de las distintas estrategias observadas fueron: un 18,4% para la estrategia creciente, un 28% para la decreciente, un 2,4% para la ID, un 1,6% para la DI, un 43,2% para la ausencia de estrategia (N) y un 6,4% para las renunciadas (X). Por tanto las estrategias ordinales se han usado en un 46,4% de las ocasiones frente a un 4% en que se usan las no ordinales y un 43,2% en que no se usan estrategias. Por tanto, se concluye que los sujetos de tres años y medio comienzan a usar estrategias ordinales en estas tareas y que la evolución, es decir, el aumento de su uso con la edad es lento y gradual en el intervalo de edad estudiado, pudiendo ser de tipo no lineal en promedio como apunta la estabilización de su uso observada a partir de los cinco años de edad.

(a)

GED	ECC3		ECC4		
	N	S	N	S	X
3AM	0	4	1	3	0
4A	3	2	1	3	1
4AM	1	3	1	3	0
5A	1	3	2	2	0
5AM	1	3	2	2	0
6A	1	3	1	3	0
<b>Total</b>	7	18	8	16	1

(b)

GED	ECC5			ECC6		
	N	S	X	N	S	X
3AM	1	2	1	0	3	1
4A	0	4	1	2	1	2
4AM	1	2	1	2	1	1
5A	1	3	0	2	2	0
5AM	0	4	0	1	3	0
6A	2	2	0	2	2	0
<b>Total</b>	5	17	3	9	12	4

Tabla 5.5. Uso de la piezas sobrantes. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio. (a) Tareas tercera y cuarta; (b) Tareas quinta y sexta.

En relación con el uso de la pieza sobrante, las tablas A.9 y 5.5 resumen los resultados globales por sujetos, la primera, y por tareas y grupos de edad, la segunda. Como puede observarse en la tabla 5.5, el uso de la pieza sobrante ha sido muy elevado en todas las tareas en las que interviene. De hecho se utiliza por el 72% de los sujetos en la tercera tarea, por el 67% en la cuarta, por el 77% en la quinta y por el 57% en la sexta. Se trata de una tendencia que, salvo el repunte en la quinta tarea, es decreciente y se produce

con bastante homogeneidad en todos los grupos de edad. Además, como se observa en la tabla A.9, solo los sujetos de mayor edad parecen advertir su presencia sistemática al usarla con menor frecuencia a medida que avanzan las tareas.

Podemos conjeturar que al establecer las correspondencias seriales los sujetos realizan las comparaciones tronco-hueco de modo aproximado y que llevan a cabo tales correspondencias tras algunos ensayos en los que se deciden las longitudes que finalmente se corresponden. No obstante, este extremo se debe confirmar en estudios posteriores con muestras de mayor tamaño y un sistema de registro de la información debidamente mejorado. Por ahora creemos que la presencia de estas piezas sobrantes, aún cuando complica notablemente las tareas aumentando su dificultad, puede aportar información significativa y relevante sobre el modo en que los sujetos establecen las correspondencias seriales en la ordenación de cantidades continuas, razón por la que deben mantenerse.

#### 5.8.2.2 Conclusiones

Sintetizando, obtenemos las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. El alto grado de realización de las tareas de este conjunto, con porcentajes que varían entre el 100 % en la segunda y el 84 % en la sexta, avala la adecuación de su interfaz y de su temática a las edades y a características psicomotrices y psicoafectivas de los sujetos de la muestra.
- 2<sup>a</sup>. Estas tareas detectan la utilización espontánea de estrategias ordinales, crecientes y decrecientes. Se estima que las utiliza más del 50 % de los sujetos.
- 3<sup>a</sup>. Los resultados obtenidos, en particular los de las tareas quinta y sexta, indican que la intervención de las estrategias no ordinales izquierda-derecha y derecha izquierda es muy reducida, detectándose en dichas tareas en porcentajes del 16 % y el 4 %. Lo que apoya la idea de que la mayoría de los sujetos utiliza estrategias ordinales en algún grado.
- 4<sup>a</sup>. Se observa que el 36 % de los sujetos resuelven correctamente mediante estrategias ordinales al menos dos de las tres últimas tareas. El 67 % de los mismos tienen edades iguales o superiores a cinco años, lo que apunta a una evolución lenta, y posiblemente no lineal, de esta competencia con la edad.
- 5<sup>a</sup>. No se observan preferencias significativas en las estrategias ordinales utilizadas por los distintos grupos de edad.



- 6<sup>a</sup>. En la preferencia relativa observada por la estrategia decreciente puede haber influido el orden decreciente de los huecos en las tareas tercera y cuarta, pudiendo haber inducido a algunos sujetos a utilizar la misma estrategia en la quinta tarea. También puede haberlo hecho el procedimiento, tendente a asegurar la resolución de las tareas, de colocar primero los troncos más grandes y más sencillos de mover en los huecos más grandes, más sencillos de detectar.
- 7<sup>a</sup>. Observamos que los cambios de estrategia en las cinco tareas se produce aproximadamente en el 50% de los sujetos (8 cambian y 9 no) que realizan al menos dos tareas. Sin embargo, no cambian de estrategia el 67% (6 de 9) de los que realizan al menos dos de las tres últimas. De ellos, el 83% (5 de 6) tampoco lo hacen en las cinco tareas\*. Es claro que mantener una estrategia ordinal dada garantiza la correcta resolución de las tareas.
- 8<sup>a</sup>. No se observa una relación clara entre el cambio o no de estrategia y el nivel de resultados obtenidos.
- 9<sup>a</sup>. El uso de las piezas o troncos sobrantes ha sido muy elevado en todas las tareas en las que interviene este fenómeno. Aún cuando su presencia complica notablemente las tareas aumentando su dificultad, creemos que puede aportar información significativa y relevante sobre el modo en que los sujetos establecen las correspondencias seriales en la ordenación de cantidades continuas, lo que aconseja, por tanto, mantenerlo en estudios posteriores.
- 10<sup>a</sup>. Las conclusiones anteriores son provisionales y meramente indicativas de algunas tendencias. Consideramos necesaria la realización de estudios posteriores, con muestras de mayor tamaño y un sistema de registro de la información debidamente mejorado.

### 5.8.2.3 Niveles de resultados

Las valoraciones asignadas a los sujetos, correspondientes a la codificación indicada al comienzo de esta sección, se recogen en la tabla A.10 del anexo A<sup>†</sup>, en la que se indica la clave asignada a cada sujeto, las valoraciones de los sujetos en cada una de las tareas ECC<sub>j</sub> (variando j de 2 a 6) según la tabla A.6, la suma de las valoraciones anteriores para cada sujeto, denominada SumaCC, y las medias correspondientes por grupos de edad, denominada MCCGED. La valoración de los sujetos en cada tarea se ha normalizado a 1, dividiendo la valoración obtenida entre la máxima posible de la tarea según

\*Véase la tabla A.8, en la página 633, anexo A.

<sup>†</sup>Para más detalles, véanse las tablas A.6, A.7 y A.10, página 631 y siguientes, anexo A.

la tabla A.6, obteniéndose para las sumas y medias anteriores una escala de 5 unidades. Asimismo, en la última fila se indican los totales por tareas, el total de la variable SumaCC y el promedio de las medias por grupos de edad.

A diferencia de lo observado en el conjunto de tareas anteriores, se puede observar que ninguno de los sujetos alcanza la valoración máxima, que, salvo para la segunda, en las demás tareas se obtienen totales pequeños (8 o menos sobre 25) y que, en general, se observa una considerable variabilidad de las valoraciones por grupos de edad, por lo que las medias pudieran ser poco representativas (diagrama de cajas de la Figura 5.25):

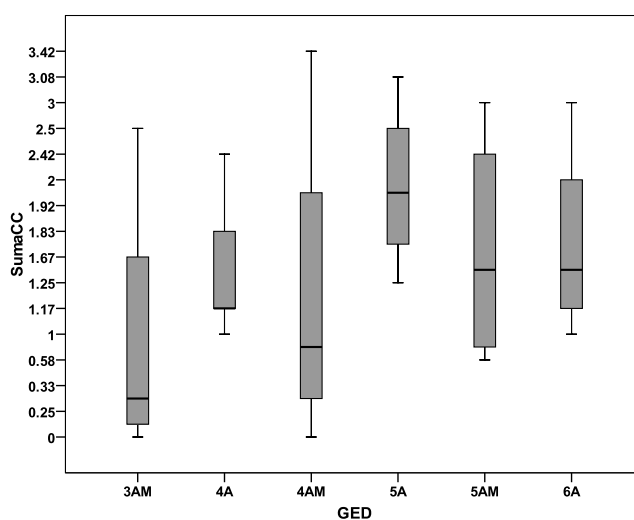


Fig. 5.25. Dispersión de las valoraciones. Orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

Como se puede apreciar en dicho diagrama, salvo para los grupos 4A y 5A, en los que las valoraciones están más concentradas, existe una variabilidad considerable en los demás grupos. Se observa también que las medianas no superan el valor 2, que aproximadamente se alcanza en el grupo 5A (1,96), y parece estabilizarse en los dos grupos de edad superior en el valor 1,46, según muestra también la tabla 5.6, en la que se observa, por medio de los coeficientes de variación, que los grupos de edad con mayor variabilidad son 3AM y 4AM, los que presentan menor variabilidad son los grupos 4A y 5A, resultando los de mayor edad 5AM y 6A con una variabilidad intermedia. Por otra parte, tanto la tabla A.10 como el gráfico de la Figura 5.25 muestran que en todos los grupos de edad hay sujetos con valoraciones claramente superiores a las correspondientes medias por grupos de edad que alcanzan

GED	Media	Mediana	Desv. típ.	CV
3AM	0,77	0,29	1,16	1,51
4A	1,52	1,17	0,60	0,39
4AM	1,25	0,79	1,50	1,20
5A	2,06	1,96	0,76	0,37
5AM	1,63	1,46	1,07	0,66
6A	1,73	1,46	0,89	0,51

Tabla 5.6. Medidas de centralización y dispersión de las valoraciones. Orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

valores intermedios (3 sobre 5) o medio-altos (3,42 sobre 5) que evolucionan con la edad. Así mismo, el comportamiento de las medianas en el gráfico de la Figura 5.25 y el muy similar de las medias (Figura 5.26), sugieren que la evolución de esta competencia con la edad pudiera ser de tipo no lineal.

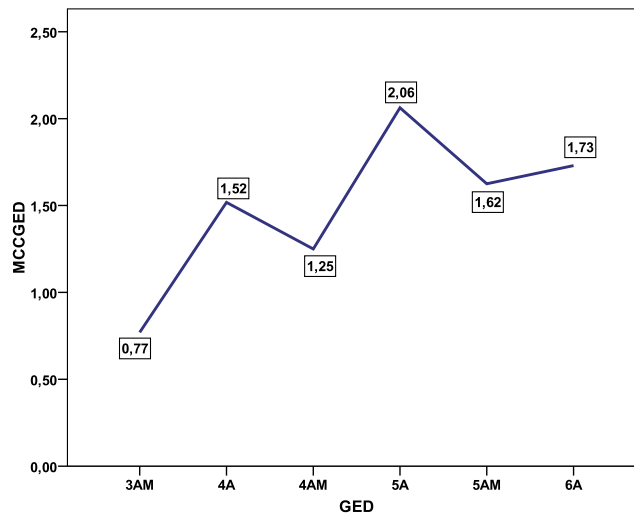


Fig. 5.26. Medias de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

Se han hallado correlaciones de Pearson positivas significativas en las respuestas individuales a las siguientes tareas:

- Correlación ( $ECC3, ECC5$ )=0,541, significación bilateral: 0,005 al 99 %.
- Correlación ( $ECC4, ECC5$ )=0,508, significación bilateral: 0,009 al 99 %.

Lo que apunta a que estas tareas seleccionan progresivamente a los sujetos con mayores competencias.

Nótese que el análisis anterior, de acuerdo con los objetivos de este estudio exploratorio, es provisional y meramente indicativo de tendencias que habrán de confirmarse o rebatirse en estudios posteriores. La alta variabilidad encontrada sugiere, nuevamente, mejorar de modo notable la precisión del registro de la información así como aumentar el tamaño de la muestra.

Con ello, y teniendo en cuenta la dificultad que estas tareas, en su estado actual, imponen para la asignación de niveles consideraremos de modo indicativo los siguientes:

- ❖ **Nivel 1:** Sujetos que no ordenan cantidades continuas o lo hacen de forma incipiente usando esporádicamente estrategias ordinales, realizan como máximo dos tareas o lo hacen parcialmente y no consiguen ordenar secuencias de tres elementos.
- ❖ **Nivel 2:** Sujetos que comienzan a ordenar espontáneamente cantidades continuas usando estrategias ordinales en secuencias de tres o cuatro elementos. Realizan tres tareas, parcialmente al menos, o una de las dos primeras y otra de las tres últimas con valoraciones altas.
- ❖ **Nivel 3:** Sujetos que ordenan cantidades continuas usando estrategias ordinales con éxito en secuencias de tres o cuatro elementos. Realizan cuatro tareas, parcialmente al menos, con valoraciones altas.

La clasificación correspondiente a las respuestas de los sujetos de la muestra se recoge en la tabla A.11, página 636, del anexo A y las frecuencias y evolución de estos niveles por grupos de edad en el gráfico de la Figura 5.27, en el que se observa que el *Nivel 1* es mayoritario en los tres primeros grupos de edad, es minoritario a partir de los cuatro años y medio y aparece en todos los grupos e incluso en el 6A, de lo que se deduce que, en general, puede haber sujetos de edad superior a los cinco años con dificultad para reconocer y aplicar las estrategias ordinales en tareas de ordenación de cantidades continuas.

Se observa también que, salvo en el grupo 5AM, el *Nivel 2* es el más frecuente a partir de los cinco años, pudiendo aparecer incluso en sujetos de tres años y medio y cuatro años. Igualmente se observa que el *Nivel 3* es menos frecuente pudiendo aparecer en sujetos de cuatro años y medio. Por tanto, el uso espontáneo de estrategias ordinales parece hallarse en formación entre los tres y los cinco años, comenzando a utilizarse mayoritariamente a

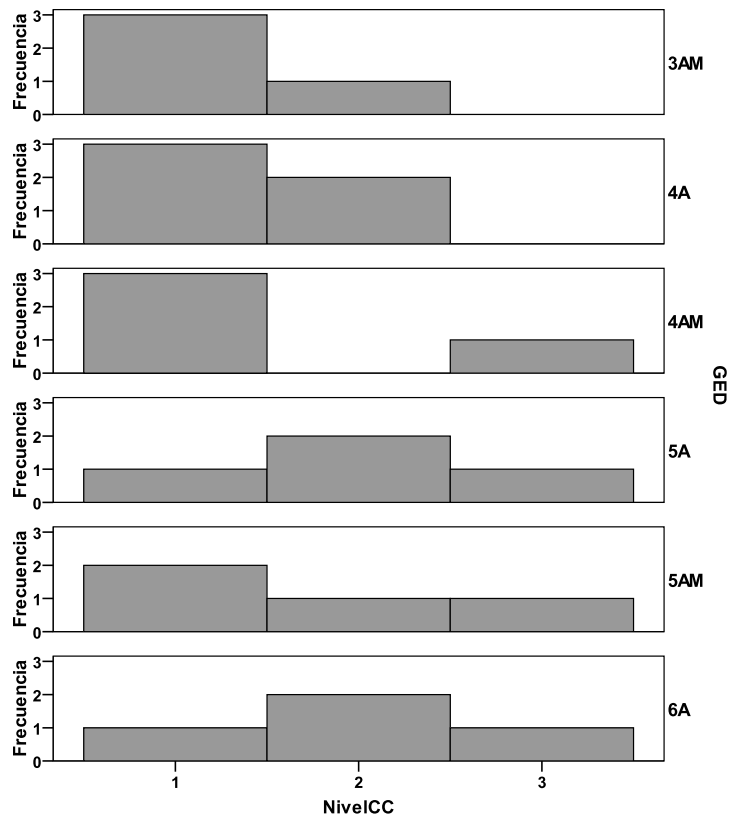


Fig. 5.27. Frecuencias y evolución de los niveles, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

partir de los cinco años, edad que nuevamente aparece como crítica, por lo que la acción didáctica en este aspecto debería comenzar a partir de los tres años o los tres años y medio.

Por otra parte, se han hallado correlaciones de Pearson positivas significativas entre las respuestas individuales en determinadas tareas y los valores las variables **SumaCC** y **NivelICC**, correspondientes a los resultados globales y al nivel de cada sujeto:

- Correlación (**ECC3**, **SumaCC**)=0,584, significación bilateral: 0,002 al 99 %. Correlación (**ECC3**, **NivelICC**)=0,537, significación bilateral: 0,006 al 99 %.
- Correlación (**ECC4**, **SumaCC**)=0,712, significación bilateral: 0,000 al 99 %. Correlación (**ECC4**, **NivelICC**)=0,698, significación bilateral: 0,000 al 99 %.

- Correlación (**ECC5, SumaCC**)=0,791, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**ECC5, NivelCC**)=0,727, significación bilateral: 0,000 al 99%.

También resulta que Correlación (**SumaCC, NivelCC**)=0,919 con significación bilateral: 0,000 al 99%, lo que indica la excelente correspondencia entre las valoraciones totales y los niveles individuales definidos para los sujetos.

#### 5.8.2.4 Conclusiones

Finalmente, con las reservas indicadas anteriormente, obtenemos las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Nuevamente se constata la necesidad de mejorar el registro de la información en este conjunto de tareas, pues en su estado actual no discriminan intentos cuya consideración puede afectar significativamente tanto a la calidad y a la precisión de la información obtenida como a las conclusiones y a la mejor comprensión de la formación y evolución de las capacidades y competencias ordinales que se estudian.
- 2<sup>a</sup>. Con los datos obtenidos se observa que ninguno de los sujetos alcanza la valoración máxima y que las valoraciones totales en las distintas tareas ha sido baja, existiendo una dispersión considerable en todos los grupos de edad salvo en los 4A y 5A.
- 3<sup>a</sup>. La evolución de las medias y medianas por grupos de edad, con las reservas antes expresadas, sugiere una evolución lenta y no lineal de esta competencia con la edad de los sujetos.
- 4<sup>a</sup>. Se han definido tres niveles para esta competencia, cuyo análisis y evolución sugieren que el uso espontáneo de estrategias ordinales por los sujetos se halla en formación entre los tres y los cinco años, comenzando a utilizarse mayoritariamente a partir de los cinco años.
- 5<sup>a</sup>. La edad de cinco años aparece nuevamente como crítica, por lo que la acción didáctica en este aspecto debería comenzar a partir de los tres años o los tres años y medio.
- 6<sup>a</sup>. Consideramos que los intervalos de edad de seis meses elegidos para el estudio son adecuados; ya que, de nuevo, se encuentran diferencias apreciables entre ellos.
- 7<sup>a</sup>. En necesario realizar estudios posteriores que aporten nueva información, que permitan decidir la validez de las anteriores conclusiones y tendencias, que incorporen una notable mejora en la precisión del registro de la información e incluyan muestras de mayor tamaño.

### 5.8.3 Análisis de los tiempos de respuesta.

Los resultados temporales por sujetos y tareas, expresados según el número de minutos que emplea el sujeto para responder, se recogen en la tabla A.12, página 637, anexo A. También se recogen los tiempos totales en la variable **SumaTCC**, los promedios temporales por grupos de edad en la variable **PTGECC**, los tiempos totales por tareas, el tiempo total invertido por todos los sujetos en este conjunto de tareas y el tiempo medio por sujeto. Sin embargo se han excluido los resultados de los sujetos 3AM4, 4A1 y 4AM4 por haber realizado, a lo sumo, una de las dos primeras tareas o ambas, lo que distorsiona los resultados temporales de los correspondientes grupos de edad.

En dicha tabla se observa que el tiempo aumenta con la dificultad hasta la cuarta tarea, mientras que en la quinta los tiempos de numerosos sujetos disminuyen, debido quizá a su similitud con la cuarta, y en la sexta se registra un tiempo total ligeramente superior al de la quinta pero sensiblemente inferior al registrado en la cuarta, que por otra parte es de menor dificultad. El gráfico de la Figura 5.28, ilustra la evolución del tiempo total por tareas.

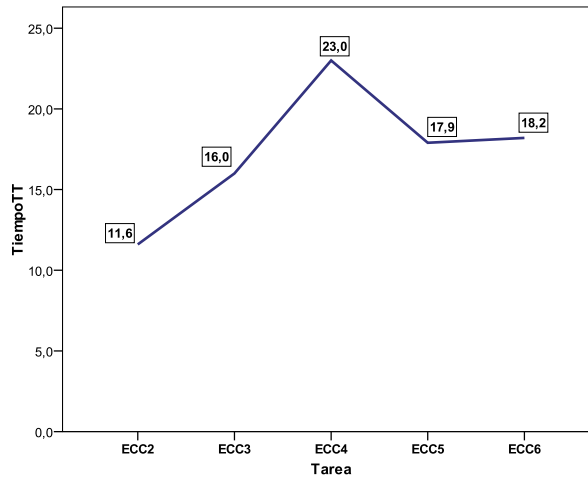


Fig. 5.28. Tiempos totales por tarea, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

La evolución observada parece indicar que los sujetos invierten comparativamente más tiempo en aquellas tareas que presentan elementos nuevos en relación con la anterior que en otras de mayor o igual dificultad que son más parecidas o que incorporan menos elementos nuevos (la quinta en relación con la cuarta y la sexta con la quinta). Como ejemplos de tal aumento po-

demos citar lo que ocurre en la tercera tarea en relación con la segunda, con la aparición de la pieza sobrante, y en la cuarta en relación con la tercera, con la intervención de tres troncos a ordenar además del tronco sobrante. La correlación hallada entre los tiempos totales por tareas y sus valoraciones totales es  $-0,803$  con significación  $0,102$ , lo que quiere decir que no es muy significativa. Su relación con el número de intentos se verá en el apartado siguiente.

Por otra parte, el tiempo total empleado por cada sujeto en las cinco tareas se muestra en el gráfico de la Figura 5.29, en el que se observa que las oscilaciones más bruscas se producen en los grupos de menor edad, suavizándose a medida que se avanza hacia edades superiores. Observamos también que los tiempos de 14 de los 22 sujetos se hallan en el intervalo temporal aproximado de 2 a 4 minutos y que solamente 4 de los 22 sujetos superan los 5 minutos, situándose la media del grupo en 3,9 minutos.

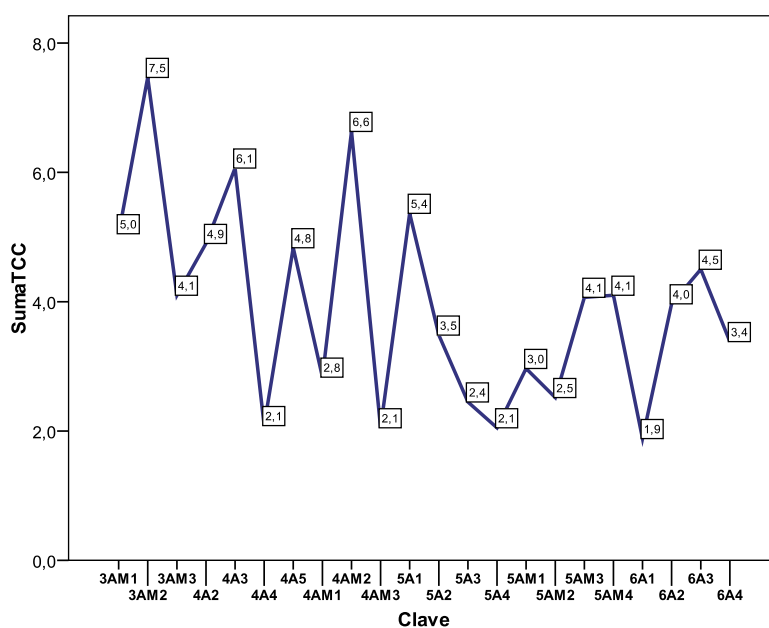


Fig. 5.29. Tiempos totales por sujeto, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

La correlación entre los tiempos totales por sujeto y sus valoraciones totales es negativa e igual a  $-0,584$  con significación  $0,004$  al 99%. Por otra parte, el gráfico de la Figura 5.30 muestra las medias temporales en las cinco tareas por grupos de edad, observándose que se produce una rápida dismi-



nución de dichas medias con el grupo de edad, con una correlación con las valoraciones medias por grupos de edad de  $-0,415$  con significación  $0,413$ , que es notablemente menor que los correspondientes valores individuales.

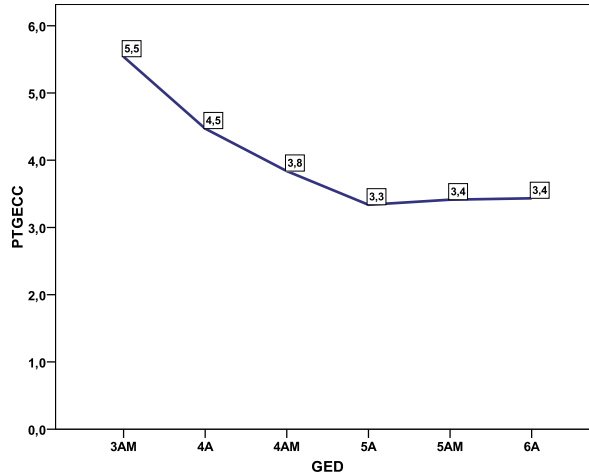


Fig. 5.30. Medias temporales por grupos de edad, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

En cuanto a los patrones temporales, los datos de la tabla A.12 ponen de manifiesto, al igual que en las tareas de orden lineal, que las oscilaciones temporales en los grupos de edad tienden a suavizarse a medida que aumenta la misma.

### 5.8.3.1 Conclusiones

De toda la información anterior podemos extraer las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. En general, los tiempos totales por tareas aumentan con la dificultad. Sin embargo, los sujetos invierten comparativamente más tiempo en aquellas tareas que presentan elementos nuevos que en otras más parecidas de mayor o igual dificultad que incorporan menos elementos nuevos.
- 2<sup>a</sup>. El tiempo total empleado en las cinco tareas por 14 de los 22 sujetos (el 64%) se encuentra entre 2 y 4 minutos, y el de 18 de los 22 (el 82%) no supera los 5 minutos, situándose la media del grupo en los 3,9 minutos.
- 3<sup>a</sup>. Las oscilaciones temporales más bruscas se producen en los grupos de menor edad para ir suavizándose a medida que la edad avanza.

- 4<sup>a</sup>. Las medias temporales por grupos de edad disminuyen rápidamente al aumentar la edad.
- 5<sup>a</sup>. Existen correlaciones negativas entre los datos temporales y las valoraciones correspondientes con significaciones moderadas en general, lo que indica que las valoraciones disminuyen al aumentar los tiempos empleados, sin que ello pueda afirmarse en general, es decir, que para ciertos sujetos ocurre y para otros puede no ser así.
- 6<sup>a</sup>. Observamos de nuevo que las oscilaciones de los tiempos totales en los grupos de edad pueden tender a suavizarse a medida que aumenta la edad.

#### 5.8.4 Número de intentos.

Los intentos totales por sujetos y tareas se recogen en la tabla A.13, página 638, anexo A, junto a los intentos totales de los sujetos, variable **SumaICC**, los promedios de intentos por grupos de edad, variable **PIGECC**, los intentos totales por tareas, los intentos totales de todos los sujetos en este conjunto de tareas y el número medio de intentos por sujeto. También se recogen los intentos mínimos por tareas, es decir, el menor número de intentos necesarios para resolver correctamente cada tarea. De esta tabla se han excluido los resultados de los sujetos 3AM4, 4A1 y 4AM4 por los mismos motivos comentados en el apartado anterior.

A partir de los datos se construye el gráfico de la Figura 5.31, que recoge los intentos totales por tareas; con un comportamiento muy similar al de los tiempos totales por tareas (figura 5.28), un resultado que no es casual y que obedece a las mismas causas comentadas en el análisis de los tiempos de respuesta. De hecho las correlaciones de los intentos totales por tareas con las valoraciones y tiempos totales correspondientes son significativas (respectivamente,  $-0,911$  con significación  $0,032$  al  $95\%$  y  $0,920$  con significación  $0,027$  al  $95\%$ ).

En lo que se refiere al número total de intentos por sujeto, observamos su evolución en el gráfico de la Figura 5.32, mientras que el número medio de intentos en las cinco tareas por grupos de edad se ilustra en el gráfico de la Figura 5.33.

El análisis de los datos coincide con el correspondiente a los tiempos totales por sujeto, es decir, las oscilaciones más bruscas en el número de intentos se producen en los grupos de menor edad, suavizándose a medida que aumenta la misma. Observamos también que los números de intentos de 16 de los 22 sujetos (el  $73\%$ ) se hallan en el intervalo de 16 a 30 y que solamente 6

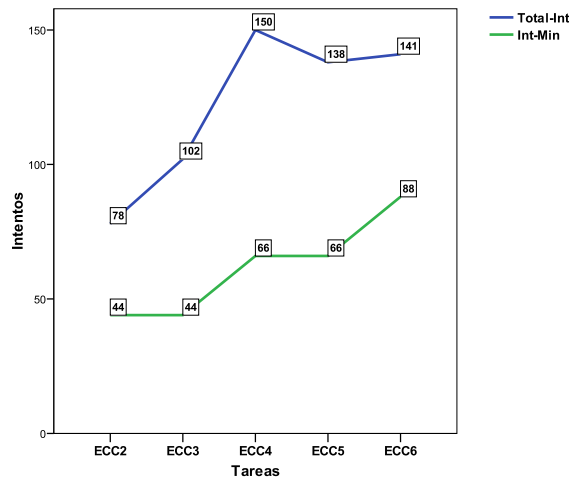


Fig. 5.31. Intentos totales por tarea, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

de los 22 sujetos (el 27%) superan los 30 intentos, situándose la media del grupo en 28 intentos y en 14 los intentos mínimos por sujeto. Nótese que un sujeto de cuatro años y medio, 4AM3, realiza solamente 16 intentos sobre un mínimo de 14, correspondiéndole además una valoración alta y un tiempo de 2,1 minutos.

Las correlaciones de los intentos totales por sujeto con las valoraciones y tiempos totales correspondientes son, respectivamente,  $-0,608$  con significación  $0,003$  al 99% y  $0,717$  con significación  $0,000$  al 99%, lo que confirma que las relaciones son significativas.

Observéese de nuevo la notable semejanza con el gráfico de los tiempos medios en las cinco tareas por grupos de edad (Figura 5.30) y la rápida disminución global con la edad del número de intentos con mínimos inferiores a la media del grupo (29) y menores que el doble del número mínimo por sujeto (14). De hecho, la correlación hallada entre las medias de intentos por grupos de edad y las correspondientes medias temporales es  $0,964$  con significación  $0,002$  al 99%.

De nuevo, la correlación entre las medias de intentos por grupos de edad y las valoraciones medias correspondientes baja notablemente en relación con los correspondientes valores individuales, resultando ser  $-0,239$  con significación  $0,648$ , esto es, pequeña y poco significativa, lo que indica, otra vez, la considerable variabilidad de los resultados en los grupos de edad y la necesidad de mejorar el registro de la información.

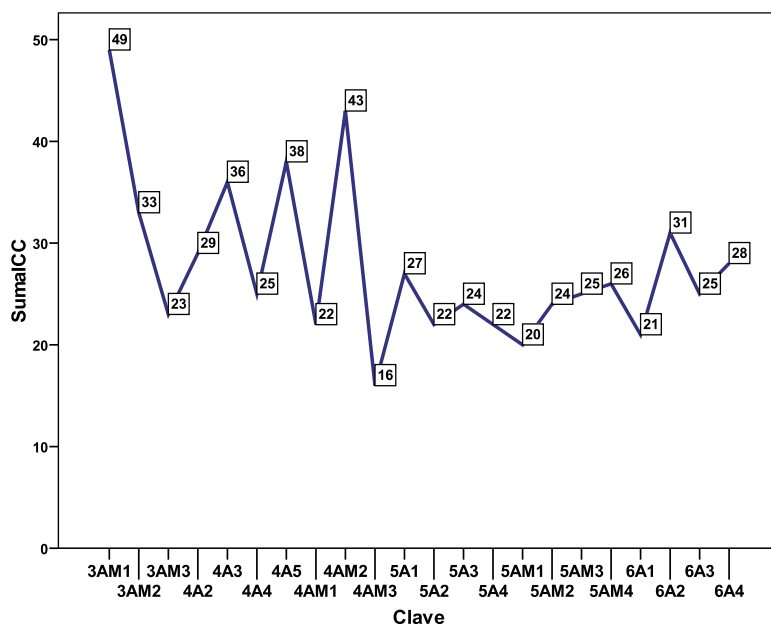


Fig. 5.32. Intentos totales por sujeto, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

#### 5.8.4.1 Conclusiones

De toda la información analizada podemos establecer las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Existe una gran semejanza entre el número de intentos totales por tareas y los tiempos totales por tareas, existiendo entre ambos una correlación positiva e igual a 0,920 con significación 0,027 al 95 %.
- 2<sup>a</sup>. En cuanto al número total de intentos por sujeto, las oscilaciones más bruscas se producen en los grupos de menor edad, suavizándose y disminuyendo considerablemente a medida que avanza la misma. Se observa también que los números de intentos de 16 de los 22 sujetos (el 73 %) se hallan en el intervalo de 16 a 30 y que solamente 6 de los 22 sujetos (el 27 %) superan los 30 intentos, situándose la media del grupo en 28 intentos y en 14 los intentos mínimos por sujeto.
- 3<sup>a</sup>. La correlación entre los números totales de intentos por sujeto y los tiempos totales correspondientes ha resultado ser 0,717 con significación 0,000 al 99 %, es decir, alta y significativa. Parece deducirse, sin embargo, que el tiempo empleado por los sujetos no se dedica so-

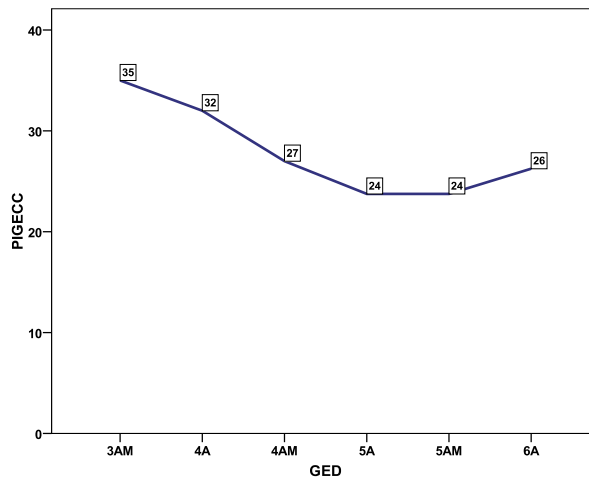


Fig. 5.33. Medias de intentos por grupos de edad, orden con cantidades continuas. Estudio Exploratorio.

lamente a realizar más intentos; sino también a la observación, a la acomodación y al análisis de las tareas.

- 4<sup>a</sup>. En cuanto a la evolución de los números medios de intentos en las cinco tareas por grupos de edad, se observa gran semejanza con los tiempos medios correspondiente, como también era de esperar, existiendo entre ambos una correlación igual a 0,964 con significación 0,002 al 99%.
- 5<sup>a</sup>. Existen correlaciones negativas entre los números de intentos y las valoraciones correspondientes, siendo elevada y significativa en las tareas, moderada y significativa para los sujetos y pequeña y poco significativa para las medias, lo que indica que las valoraciones disminuyen al aumentar el número de intentos, como era de esperar. Además los dos últimos datos apuntan, de nuevo, a la necesidad de mejorar el registro de la información para este conjunto de tareas.

### 5.9 Resultados y conclusiones del tercer conjunto: Etiquetaje

En el presente apartado nos disponemos a exponer y analizar los resultados de las respuestas de los sujetos de la muestra a las tareas que se presentan y analizan en el apartado 5.5.5\* del presente capítulo. El conjunto consta de una tarea inicial y de dos partes de tres tareas cada una, la primera más sencilla y la segunda de mayor grado de dificultad. Se refieren a objetos (plátanos) que aparecen en secuencias ordenadas (de frutas) mediante distintos

\*Véase la página 188 y siguientes.

tipos de alternancia sobre los escalones de una escalera que el sujeto debe etiquetar mediante colores sin recibir indicación alguna sobre el modo de proceder. Al igual que en el conjunto anterior se trata de tareas de carácter no verbal\*. Veamos los resultados y conclusiones de este conjunto de tareas.

### 5.9.1 Codificación y categorías de respuestas

En este caso las tareas se han designado mediante las abreviaturas **EEi**, donde el índice **i** varía de 1 a 6. La casuística considerada para este conjunto ha sido bastante más simple que en el conjunto anterior, por lo que se ha prescindido de codificaciones específicas para las respuestas, considerando las siguientes categorías: el sujeto realiza la tarea sin fallos, comete un solo fallo, comete dos o más fallos, no realiza la tarea (renuncia a realizarla). A cada una de estas categorías se les han asignado los valores  $1$ ;  $0,5$ ;  $0$  y  $0$ , que han servido para establecer las valoraciones de los sujetos así como los valores de las variables **SumE5**, **MEEGED** y **TotalT** que se incluyen en la tabla A.15. La primera variable recoge la suma de las valoraciones de cada sujeto en una escala de 0 a 5 unidades, la segunda las medias de la primera para los distintos grupos de edad y la tercera la suma de las valoraciones de todos los sujetos para cada una de las tareas.

Por su parte, en la tabla A.14\* se incluye la información sobre las categorías relativas a la utilización de estrategias ascendente (A) o descendente (D), utilizadas por los sujetos que cometen un fallo como máximo, la categoría “ninguna” (N), cuando comenten más de un fallo, o la categoría “inexistente” (X) cuando se renuncia a realizar la tarea.

### 5.9.2 Análisis de las respuestas

El análisis de las respuestas se ha realizado en base a los datos almacenados en los registros **listaRi**<sup>†</sup> (con **i** variando de 1 a 6) y en la mencionada tabla A.14, con los que se han construido las tablas 5.7 en las que se muestra la distribución de estrategias utilizadas por tareas y grupos de edad.

#### 5.9.2.1 Estrategias en Etiquetaje

Un examen detallado de los datos (tablas 5.7) permite averiguar que en todas las tareas hay sujetos que utilizan la estrategia decreciente (más elaborada que la creciente), ya que los datos para construir las respectivas

\*Véase el apartado 5.5.5.2, página 189 y siguientes.

\*Ambas tablas A.14 y A.15 pueden verse en el anexo A, páginas 641 y 642 respectivamente.

<sup>†</sup>Estos registros se describen en el apartado 5.5.5.3, página 191 y siguientes.

alternancias se dan en los primeros escalones y parece natural continuarlas en el sentido ascendente de la escalera. De hecho, resolver las tareas mediante estrategias decrecientes implica elegir en primer lugar el último escalón de la serie alternada para, a continuación, identificar los demás escalones al ir descendiendo. Pero si se descarta la resolución por azar, dado que dicha estrategia se utiliza en mayor o menor grado en todas las tareas, la identificación del último escalón en primer lugar sugiere que el sujeto ha resuelto primero la tarea mentalmente en sentido ascendente, pues de otro modo dicha identificación parece imposible.

(a)

GED	EE1			EE2		
	C	D	N	C	D	N
3AM	0	0	4	2	0	2
4A	1	0	4	2	0	3
4AM	2	0	2	2	0	2
5A	0	1	3	2	1	1
5AM	3	1	0	3	1	0
6A	2	1	1	3	0	1
<b>Total</b>	8	3	14	14	2	9

(b)

GED	EE3			EE4			
	C	D	N	C	D	N	X
3AM	1	1	2	0	0	0	4
4A	1	1	3	1	0	0	4
4AM	1	1	2	2	0	1	1
5A	3	1	0	1	0	3	0
5AM	2	2	0	2	1	1	0
6A	3	1	0	1	0	3	0
<b>Total</b>	11	7	7	7	1	8	9

(c)

GED	EE5				EE6			
	C	D	N	X	C	D	N	X
3AM	0	0	0	4	0	0	0	4
4A	0	0	1	4	0	0	1	4
4AM	1	0	2	1	1	1	1	1
5A	4	0	0	0	3	0	1	0
5AM	1	0	3	0	3	1	0	0
6A	1	2	1	0	2	1	1	0
<b>Total</b>	7	2	7	9	9	3	4	9

Tabla 5.7. Estrategias en Etiquetaje. Estudio exploratorio. (a) Tareas primera y segunda; (b) Tareas tercera y cuarta; (c) Tareas quinta y sexta.

La resolución mental es posible, por ejemplo, si el sujeto utiliza el conteo o

algún procedimiento perceptivo de reconocimiento de patrones, que invierte posteriormente una vez identificado el último elemento de la serie. Así se convierte la alternancia que define cada serie en un patrón de conteo o en uno perceptivo que el sujeto traslada en los sentidos ascendente y descendente de la escalera. Esto supone un grado elevado de competencia, lo que explica que sea una estrategia utilizada mayoritariamente por los sujetos de mayor edad (sólo en 4 de las 18 ocasiones corresponden a sujetos menores de 5 años (un 22,2 %)).

A pesar de todo, como era de esperar, el uso de la estrategia ascendente es mayoritario en todas las tareas. Salvo casos puntuales, la estrategia ascendente se utiliza en un 75,7 % de los casos en todos los grupos de edad (en 56 de las 74 ocasiones) frente a un 24,3 % (en 18 de las 74 ocasiones) en que se utiliza la estrategia descendente.

Por otra parte, los datos muestran que a partir de los cinco años de edad aumenta el número de sujetos que resuelven las tareas y utilizan alguna estrategia, como se pone de manifiesto en la tabla 5.8, en la que se muestra dicha distribución agrupando los sujetos en los dos grupos de edad mencionados.

	A	D	Total
Edad < 5 años	17	4	21
Edad ≥ 5 años	39	14	53
Total	56	18	74

Tabla 5.8. Número de estrategias utilizadas por los sujetos con edad menor o mayor que 5 años en etiquetaje. Estudio Exploratorio.

Estos datos se confirman sabiendo que utilizan estrategias un 28,4 % de los sujetos con menos de 5 años frente a un 71,6 % de sujetos con edad igual o superior a 5 años. Además, teniendo en cuenta que la muestra incluye 25 sujetos y que hay 6 tareas a realizar, resultan 150 posibles respuestas, de las que en 74 se utilizan estrategias de resolución (49,3 %). Como la muestra incluye 13 sujetos de menos de 5 años y 12 de edad igual o superior, 78 de la 150 posibilidades corresponden a sujetos con menos de 5 años y 72 a sujetos con más de 5 años, lo que indica que el 26,9 % de los sujetos menores de 5 años utilizó alguna estrategia frente al 73,6 % de los sujetos con más de 5 años que también lo hizo.

Por otra parte, las mismas tablas muestran que las tres primeras tareas son resueltas por 11, 16 y 18 sujetos, respectivamente, es decir, por un 44 %, un 64 % y un 72 %, y que las tres últimas también son resueltas correctamente por 8, 9 y 12 sujetos, respectivamente, es decir, por un 32 %, un 36 % y un



48 %. En ambos casos aumentan los porcentajes a medida que se avanza en la resolución, lo que parece indicar que se produce aprendizaje en la realización de las tareas a pesar de la creciente dificultad.

Las tablas 5.7 muestran también que los sujetos que renuncian a hacer alguna tarea lo hacen a partir de la cuarta y que se concentran en los dos grupos de edades inferiores, lo que indica que a esas edades los sujetos realizan el etiquetaje como mucho con un solo color, presentando muchas dificultades para hacerlo con más de un color, y que ésto empieza a conseguirse con mayor frecuencia a partir de los cinco años. Este hecho se confirma también mediante los datos recogidos en la última columna de la tabla A.14\* en la que los códigos NE, 1C, S, SC se refieren, respectivamente, a las categorías “no realiza el etiquetaje”, “realiza el etiqueje por un solo color”, “realiza el etiqueje por varios colores con algún fallo”, “realiza el etiqueje por varios colores sin fallos”.

Nótese también la existencia en esta misma columna de un sujeto de cuatro años y medio, 4AM3, que logra realizar el etiquetaje por varios colores sin fallos y también la de sujetos de cinco y seis años que solo logran etiquetar por un color e incluso uno que no realiza el etiquetaje.

GED	N	1C	S	SC
3AM	2	2		
4A	3	2		
4AM	2	1		1
5A		1	2	1
5AM			4	
6A	1	1	1	1
Total	8	7	7	3

Tabla 5.9. Etiquetaje por grupos de edad. Estudio Exploratorio.

Los datos anteriores se sintetizan por grupos de edad en la tabla 5.9, en la que también se observa que el 32 % de los sujetos no logra realizar el etiquetaje, el 28 % realiza el etiquetaje por un solo color, el 28 % realiza el etiquetaje por varios colores con algún fallo y el 12 % realiza el etiquetaje por varios colores sin fallos, de los que solamente uno de los tres sujetos se halla en el grupo de mayor edad, lo que sugiere una evolución no lineal de esta competencia con la edad.

En resumen, el estudio de las estrategias permite concluir que a partir de los cinco años de edad los sujetos utilizan claramente alguna estrategia en la resolución de las tareas, logrando realizar el etiquetaje por distintos

\*Véase la pág.641 en el anexo A.

colores, mientras que los sujetos de edades inferiores comienzan a hacerlo de manera lenta y progresiva logrando el etiquetaje a lo más por un solo color. Por otra parte, la estrategia dominante es la ascendente, aunque hay sujetos que a partir de los cinco años utilizan la estrategia descendente, lo cual es altamente significativo pues supone invertir patrones perceptivos o de conteo.

### 5.9.2.2 Niveles en Etiquetaje

En la tabla A.15 se recogen los datos correspondientes a la valoración de las respuestas y en el gráfico de la Figura 5.34 se han redondeado sin decimales los valores de la variable **SumE5**, que sintetiza dicha valoración por grupos de edad.

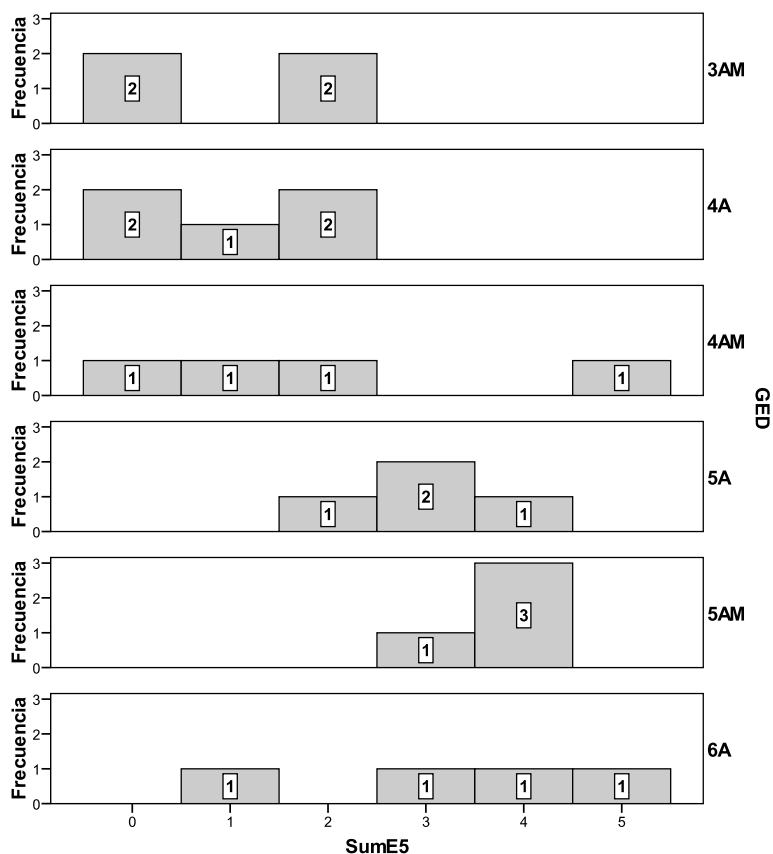


Fig. 5.34. Valoraciones de los resultados en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

Como se puede observar, las valoraciones aumentan con la edad, siendo

el aumento muy significativo a partir de los cinco años de edad. Asimismo, los dos grupos de edad con mayor dispersión corresponden a los sujetos de cuatro años y medio (4AM) y seis años (6A), lo que podría interpretarse en el sentido de que a los cuatro años y medio aún se encuentran los sujetos en diversos estados competenciales y no es hasta los cinco años cuando se produce un incremento importante y generalizado en el dominio de esta competencia. Los datos indican, por tanto, una evolución no lineal con la edad, lo que también se observa en el gráfico de la Figura 5.35, que muestra la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad.

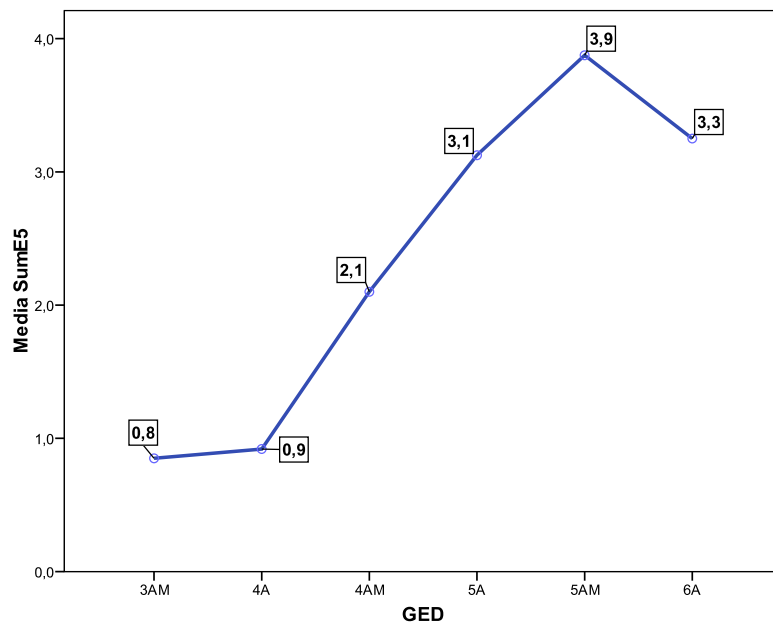


Fig. 5.35. Medias de las valoraciones en Etiquetaje por grupos de edad. Estudio Exploratorio.

Para este conjunto de tareas se identifican con claridad los siguientes niveles:

? Nivel 1: ? Nivel 2: ? Nivel 3: Sujetos que realizan el etiquetaje por varios colores sin fallos o con algún fallo. Realizan al menos dos tareas de los dos grupos y como máximo una de ellas pueden realizarla parcialmente.

En relación con los niveles de resultados para este conjunto de tareas se identifican con claridad los siguientes:

- ❖ **Nivel 1:** Sujetos que no realizan el etiquetaje. No realizan nin-

guna tarea o, a lo sumo, realizan parcialmente dos tareas aisladas de distintos grupos y sin continuidad.

- ❖ **Nivel 2:** Sujetos que realizan el etiquetaje por un solo color. Realizan al menos dos tareas del primer grupo y, ocasionalmente, alguna tarea aislada, total o parcialmente, del segundo grupo.
- ❖ **Nivel 3:** Sujetos que realizan el etiquetaje por varios colores sin fallos o con algún fallo. Realizan al menos dos tareas de los dos grupos y como máximo una de ellas pueden realizarla parcialmente.

La clasificación de las respuestas por niveles se realizó mediante los datos consignados en las tablas A.14 y A.15 y se recoge, a su vez, en la tabla A.16 A.16\*. El gráfico de la figura 5.36 muestra sus distribuciones y evolución por grupos de edad, poniendo de manifiesto que en los grupos de menor edad los sujetos no realizan el etiquetaje o lo hacen por un solo color. Igualmente, un solo sujeto de cuatro años y medio logra el etiquetaje por varios colores y sólo a partir de los cinco años la mayoría de los sujetos realizan el etiquetaje por varios colores, competencia que no se consolida a edades superiores como muestran los resultados del grupo 6A. Es de destacar que el hecho de etiquetar por varios colores equivale en nuestra opinión a realizarlo con independencia del color, por lo que los resultados anteriores muestran que esta competencia comienza a establecerse alrededor de los cinco años.

Al igual que se ha constatado en los conjuntos de tareas anteriores, se han hallado correlaciones de Pearson positivas en las respuestas individuales a los siguientes pares de tareas:

- ❑ Correlación (**EE1, EE3**)=0,457, significación bilateral: 0,022 al 95 %.
- ❑ Correlación (**EE1, EE6**)=0,620, significación bilateral: 0,001 al 99 %.
- ❑ Correlación (**EE2, EE3**)=0,671, significación bilateral: 0,000 al 99 %.
- ❑ Correlación (**EE3, EE5**)=0,529, significación bilateral: 0,007 al 99 %.
- ❑ Correlación (**EE3, EE6**)=0,524, significación bilateral: 0,007 al 99 %.

\*Véase la pág. 641 y ss., anexo A.

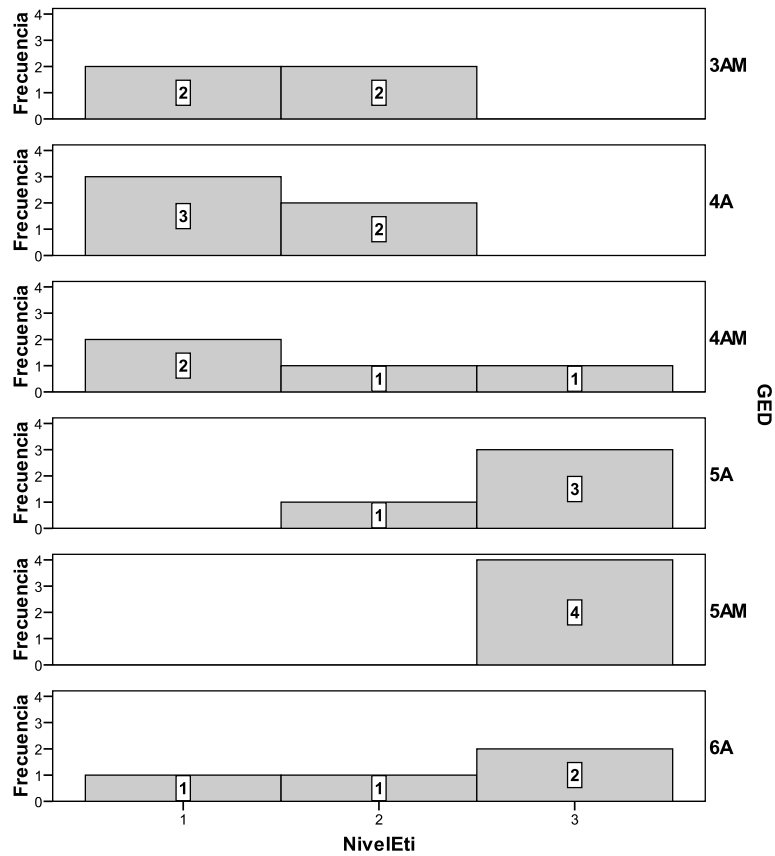


Fig. 5.36. Distribuciones y evolución de los niveles en Etiquetaje por grupos de edad. Estudio Exploratorio.

- Correlación (**EE5**, **EE6**)=0,592, significación bilateral: 0,002 al 99 %.

También se han hallado correlaciones de este tipo entre las valoraciones de la respuestas individuales en determinadas tareas y los valores de las variables **SumE5**, **NivelEti** y **EDG** correspondientes a la valoración global, al nivel de cada sujeto y a la edad de su grupo\*:

- Correlación (**EE1**, **SumE5**)=0,719, significación bilateral: 0,000 al 99 %. Correlación (**EE1**, **NivelEti**)=0,679, significación bila-

\*Esta variable toma los valores 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; correspondientes a los respectivos grupos de edad.

teral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE1, EDG**)=0,577, significación bilateral: 0,003 al 99%.

- Correlación (**EE2, SumE5**)=0,746, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE2, NivelEti**)=0,736, significación bilateral: 0,000 al 99%.
- Correlación (**EE3, SumE5**)=0,754, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE3, NivelEti**)=0,761, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE3, EDG**)=0,504, significación bilateral: 0,010 al 95%.
- Correlación (**EE4, SumE5**)=0,468, significación bilateral: 0,018 al 95%.
- Correlación (**EE5, SumE5**)=0,674, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE5, NivelEti**)=0,646, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE5, EDG**)=0,496, significación bilateral: 0,012 al 95%.
- Correlación (**EE6, SumE5**)=0,828, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE6, NivelEti**)=0,808, significación bilateral: 0,000 al 99%. Correlación (**EE6, EDG**)=0,626, significación bilateral: 0,001 al 99%.

Correlación (**SumE5, NivelEti**)=0,939 con significación bilateral: 0,000 al 99%, Correlación (**SumE5, EDG**)=0,666 con significación bilateral: 0,000 al 99% y Correlación (**NivelEti, EDG**)=0,561 con significación bilateral: 0,004 al 99%, lo que indica la buena correspondencia existente entre las valoraciones totales y los niveles individuales así como la mejora de esta competencia con la edad, sin descartarse una dependencia no lineal más ajustada a dicha evolución.

### 5.9.2.3 Conclusiones

De acuerdo con las consideraciones anteriores podemos establecer las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. El estudio de las estrategias permite concluir que a partir de los cinco años de edad los sujetos utilizan alguna estrategia en la resolución de las tareas logrando realizar el etiquetaje\*.
- 2<sup>a</sup>. Los sujetos de edad inferior a cinco años comienzan a etiquetar de manera lenta y progresiva logrando el etiquetaje por un solo color.

\*Entendemos por realizar el etiquetaje hacerlo con independencia del color, es decir, etiquetar por varios colores.

- 3<sup>a</sup>. Se encuentran excepciones puntuales a las dos conclusiones anteriores, como un sujeto de cuatro años y medio que realiza el etiquetaje y dos sujetos de seis años, uno de los cuales no logra etiquetar y el otro lo hace solamente por un color.
- 4<sup>a</sup>. Se observa, como era de esperar, que la estrategia dominante es la ascendente, encontrándose un número significativo de sujetos, principalmente a partir de los cinco años de edad, que utilizan la estrategia descendente, lo cual es altamente significativo pues ello supone invertir patrones perceptivos o de conteo mediante la utilización de *capacidades recursivas*\* notables.
- 5<sup>a</sup>. El estudio de las valoraciones de las respuestas confirma las conclusiones anteriores y muestra que los dos grupos de edad con mayor dispersión corresponden a los cuatro años y medio y a los seis años, lo que podría indicar que alrededor de los cinco años se produce un incremento importante en esta competencia, encontrándose sujetos en transición en diversos estados competenciales a los cuatro años y medio y empezando a dominarla a partir de los cinco años, sin que su dominio se mantenga estable a edades superiores.
- 6<sup>a</sup>. La edad de 5 años aparece nuevamente como crítica, por lo que la acción didáctica en este aspecto debería comenzar alrededor de los cuatro años.
- 7<sup>a</sup>. El estudio de las valoraciones de los resultados, de la evolución de las medias por grupos de edad y las correlaciones existentes entre las variables **SumE5**, **NiveEti** y **EDG**, de acuerdo también con la 3<sup>a</sup> conclusión anterior, sugieren una evolución compleja y no lineal de esta competencia.
- 8<sup>a</sup>. Se han definido tres niveles distintos en Etiquetaje cuyo análisis y evolución confirman las conclusiones anteriores.
- 9<sup>a</sup>. Las tareas de este conjunto se consideran adecuadas para el estudio del etiquetaje pues discriminan diferentes estados de evolución en los sujetos. Este resultado es apoyado por las correlaciones encontradas, si bien es discutible si las estrategias utilizadas por los sujetos son las que corresponden al etiquetaje o a la recursividad.
- 10<sup>a</sup>. Los intervalos de seis meses de edad elegidos son adecuados para el estudio, pues, de nuevo, se encuentran diferencias apreciables en las respuestas de dichos grupos.
- 11<sup>a</sup>. Es necesario realizar estudios posteriores que aporten más información que permita decidir el grado de validez de las conclusiones y

---

\*Traslación de patrones recursivos en los dos sentidos, ascendente y descendente

tendencias anteriormente expuestas y, sobre todo, que aclare el papel de las capacidades recursivas detectadas, ya que la recursión y el orden son las bases sobre las que se apoya el desarrollo de la aritmética.

### 5.9.3 Análisis de los tiempos de respuesta

Los datos temporales para este conjunto de tareas se recogen en la tabla A.17 del anexo A\*, en la que los tiempos de las tareas se expresan en segundos y los de las variables **STETi**, tiempo total por sujeto, **PTGeEti**, promedios temporales por grupos de edad, y **TiempoTT**, tiempos totales por tarea, en minutos.

El valor 0 en los tiempos de las tres últimas tareas indica que el sujeto renunció a realizarla, por lo que los 25 sujetos de la muestra realizaron las tres primeras mientras que solo 16 realizaron las tres últimas. Las tres variables anteriores no tienen en cuenta este hecho, por lo que a partir de los datos de dicha tabla se definirán nuevas variables temporales que lo incorporen.

La tabla 5.10 siguiente recoge los valores de la variable **TiempoTT**, así como los de las nuevas variables **TiempoTP** y **TiempoTPS** que, a su vez, recogen los promedios temporales totales para cada tarea por *sujeto que la realiza* en minutos y en segundos respectivamente. Y los de la variable **ValTEti** correspondiente a las valoraciones totales de las tareas obtenidos sumando las correspondientes a los sujetos que las realizan<sup>†</sup>.

Tarea	TiempoTT (min.)	TiempoTP (min.)	TiempoTPS (seg.)	ValTEti
EE1	12,62	0,51	30,60	11,0
EE2	12,33	0,49	29,40	13,5
EE3	11,40	0,46	27,60	17,0
EE4	7,53	0,47	28,20	7,5
EE5	6,22	0,39	23,40	8,5
EE6	5,82	0,36	21,60	11,0
Total	55,93	2,68	160,80	68,5

Tabla 5.10. Tiempos y valoraciones totales por tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

Para mayor claridad el gráfico de la figura 5.37 muestra los valores de la variable **TiempoTPS** en segundos para cada una de las tareas.

En dicho gráfico se observa, al igual que en los conjuntos de tareas anteriores, que en las tareas iniciales de cada grupo **EE1** y **EE4** el tiempo que le

\*Véase la pág. 644

†Véase la última fila de la tabla A.15, pág. 642, anexo A



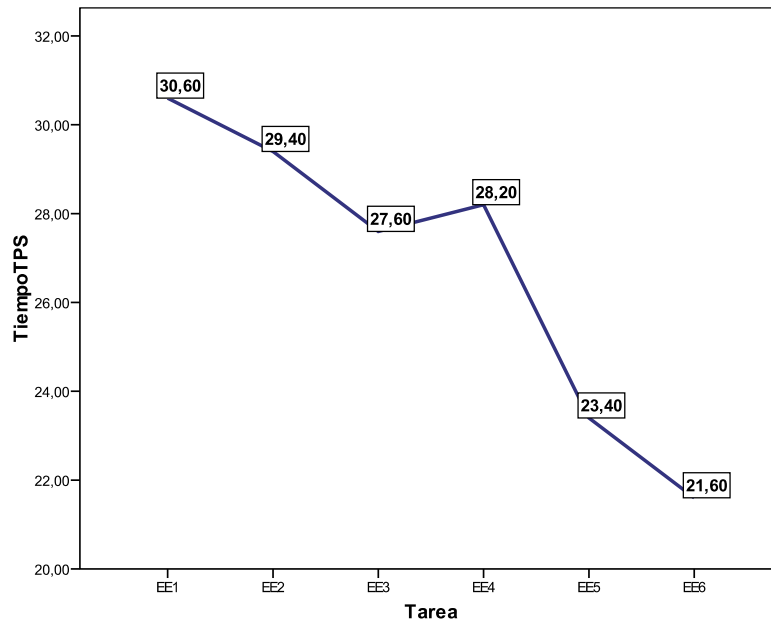


Fig. 5.37. Promedios temporales por sujeto que las realiza de las tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

dedican los sujetos es mayor que en las posteriores que tienen mayor grado de dificultad. De nuevo la adaptación a las tareas y el aprendizaje posterior observado explican dicho fenómeno.

Como puede observarse, para el actual conjunto de tareas, a diferencia de los anteriores, los tiempos disminuyen con el aumento en la dificultad de las mismas, aunque no se observan correlaciones lineales significativas entre las variables temporales (**TiempoTT** y **TiempoTPS**) y la valoración total de las tareas\*. Sin embargo, si se consideran por separado los dos subconjuntos de tareas (**EE1, EE2, EE3**) y (**EE4, EE5, EE6**) correspondientes al etiquetaje por un solo color y al etiquetaje por varios colores, son Correlación (**TiempoTPS1-3, ValTEti1-3**)= $-1,000$ , significación bilateral: 0,012 al 95% y Correlación (**TiempoTPS4-6, ValTEti4-6**)= $-0,878$ , significación bilateral: 0,318. Por lo tanto para las tres primeras tareas un aumento en el promedio temporal se traduce en una disminución lineal de la valoración, lo que también sucede para las tres últimas (posiblemente de modo no lineal). Estos resultados apuntan a la independencia de las dos partes del conjunto de tareas y a la distinción de los estados y niveles correspondientes.

\*Correlación (**TiempoTT, ValTEti**)= $0,626$ , significación bilateral: 0,183, Correlación (**TiempoTPS, ValTEti**)= $0,244$ , significación bilateral: 0,641.

Por otra parte, el siguiente gráfico (figura 5.38) muestra los tiempos totales ponderados por tareas de los sujetos en el conjunto actual. Al igual que en los conjuntos anteriores se observa que las mayores oscilaciones temporales se producen para los sujetos de los grupos de edades inferiores y que a partir de los cinco años las oscilaciones se reducen notablemente y se concentran en el intervalo de 15 a 30 segundos, en el que en total se hallan los promedios temporales de 17 sujetos de la muestra, es decir, el 68%. Por tanto, para las seis tareas dicho porcentaje se halla en promedio en el intervalo de 1,5 a 3 minutos, lo que indica que en promedio el tiempo dedicado por los sujetos a la realización de las tareas de este conjunto ha sido menor que los correspondientes a los dos conjuntos anteriores (intervalo de 2 a 4 minutos).

Como era de esperar, en consonancia con lo dicho en el antepenúltimo párrafo, tampoco se observan correlaciones lineales significativas entre la variable **PSTarTEti**, que recoge el tiempo total promediado según el total de tareas que realiza cada sujeto, y la valoración total de las tareas para cada uno: Correlación (**PSTarTEti**, **SumE5**) = -0,346, significación bilateral: 0,090, ni tampoco con el nivel asignado a los sujetos: Correlación (**PSTarTEti**, **NivelEti**) = -0,297, significación bilateral: 0,150. Aún cuando si se desglosaran las tareas por subconjuntos pudiera encontrarse alguna correlación lineal significativa, lo más relevante a nuestro juicio son los signos negativos de los valores hallados, que indican que en cierto grado el aumento del promedio temporal se corresponde con una disminución en la valoración, aunque no sea así para todos los sujetos y la dependencia pudiera ser no lineal.

Finalmente, el gráfico de la figura 5.39 muestra la evolución de las medias de tiempos totales ponderados por tareas para los grupos de edad, observándose claramente la disminución de las medias temporales con la edad de los grupos y la pequeña oscilación que se produce a partir del grupo de cinco años. El grupo **4AM** resulta distinguido, lo que es coherente con el análisis de las respuestas realizado en el apartado anterior, en el que este grupo de edad presentaba una gran dispersión en las valoraciones y resultaba ser crítico en la transición de los niveles 2 y 3. La correlación lineal entre las medias de tiempos totales ponderados por tareas y las valoraciones medias de los resultados por grupos de edad\* resultó ser -0,762 con significación 0,077, que confirma lo ya expresado en los párrafos anteriores.

### 5.9.3.1 Conclusiones

Del estudio temporal para este conjunto de tareas obtenemos las conclusiones siguientes:

\*Véase la tabla A.15, pág. 642, anexo A.

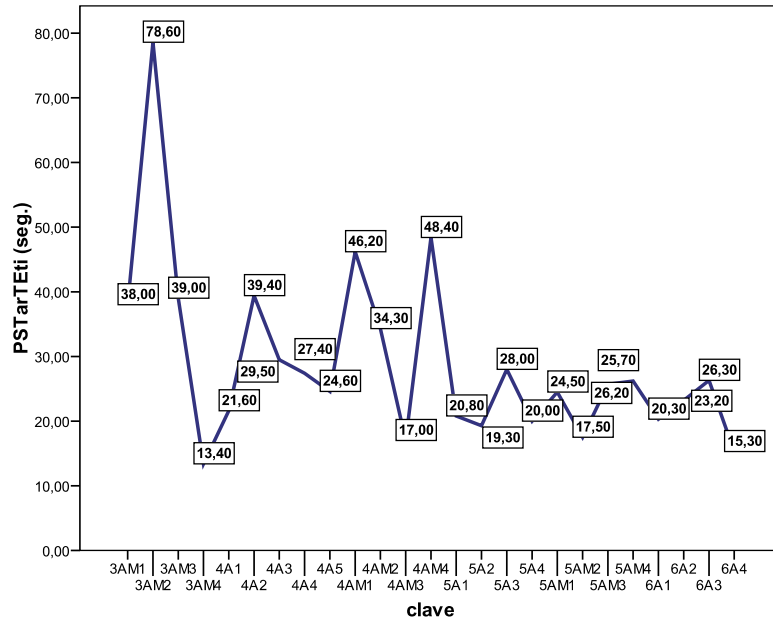


Fig. 5.38. Tiempos totales ponderados por tareas de los sujetos en las tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

- 1<sup>a</sup>. Al igual que en los conjuntos de tareas anteriores se observa que el tiempo promedio que dedican los sujetos a la primera tarea, **EE1**, y a la primera del segundo subconjunto, **EE4**, que presenta elementos nuevos en relación con la anterior es mayor que el dedicado a las posteriores que tienen mayor grado de dificultad. De nuevo la adaptación a las tareas y el aprendizaje posterior observado explicarían dicho fenómeno.
- 2<sup>a</sup>. A diferencia de los conjuntos de tareas anteriores, sorprendentemente, los tiempos ponderados disminuyen con la dificultad de las mismas.
- 3<sup>a</sup>. Existen correlaciones lineales negativas entre los datos temporales y las valoraciones correspondientes con significaciones moderadas en general. Lo que indica que, en cierto grado, las valoraciones disminuyen al aumentar los tiempos empleados, sin que ello pueda afirmarse en general para todos los sujetos y pudiendo ser las dependencias de tipo no lineal.
- 4<sup>a</sup>. El tiempo ponderado total empleado en la realización de las seis tareas se halla para 17 de los 25 sujetos de la muestra (el 68%) en el intervalo temporal de 1,5 a 3 minutos, claramente inferior a los correspondientes a los dos conjuntos anteriores que se situaban en el

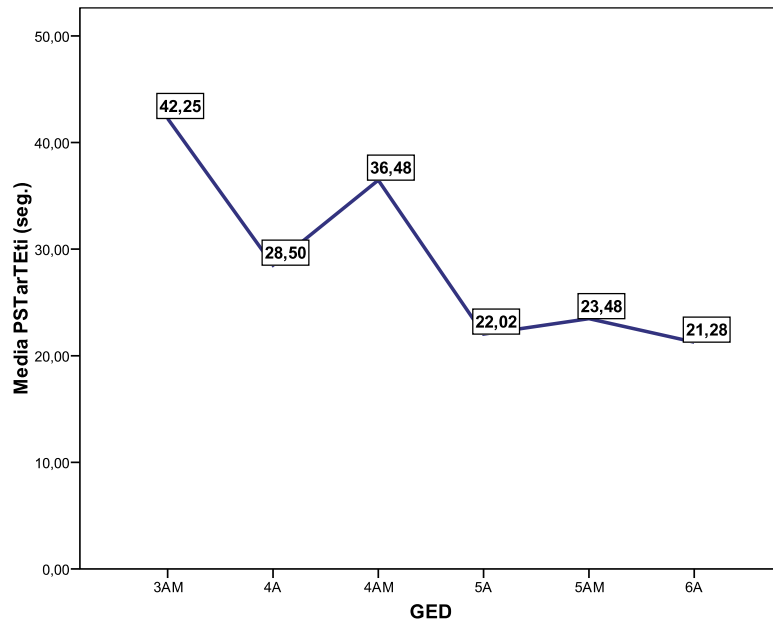


Fig. 5.39. Medias de tiempos totales ponderados por tareas para los grupos de edad en las tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

intervalo de 2 a 4 minutos. La media del grupo se halla en los 2,68 minutos.

- 5<sup>a</sup>. Observamos también que, para los sujetos, las oscilaciones temporales más bruscas se producen en los grupos de menor edad para ir suavizándose a medida que la edad avanza.
- 6<sup>a</sup>. Las medias temporales ponderadas por grupos de edad disminuyen rápidamente al aumentar la misma, distinguiéndose el grupo **4AM**, de cuatro años y medio, que es crítico en la transición entre los niveles 2 y 3.

#### 5.9.4 Número de intentos

Los intentos totales por sujetos y tareas se recogen en la tabla A.18, página 645, anexo A; que recoge también los valores de las variables **IESEti**, **PE-GeEt** y **IETEti** correspondientes respectivamente a los intentos totales de los sujetos ponderados según el número de tareas que realizan, los promedios de los valores anteriores por grupos de edad y los intentos totales en cada tarea ponderados según el número de sujetos que las realizan. Estas ponderaciones son necesarias, ya que el primer subconjunto de tareas (las tres

primeras) las realizaron los 25 sujetos de la muestra mientras que el segundo subconjunto (las tres últimas) las realizaron solamente 16 sujetos. También de dicha tabla se han excluido los datos del sujeto 4AM4 que no realizó las tres últimas tareas y cuyos numerosos intentos erróneos en las tres primeras distorsionaban notablemente la media correspondiente a su grupo de edad. El sujeto 5A2 aparece sin intentos erróneos aún cuando no realizó correctamente las tareas **EE2** y **EE4** al no seguir ninguna estrategia ascendente o descendente, sino que en el sentido ascendente comenzó por la posición intermedia de las tres que eran solución en dichas tareas, los registros o variables **listaRi** citados al comienzo del análisis de las respuestas de este conjunto de tareas permiten detectar casos singulares como éste, lo que muestra de nuevo su utilidad.

Con ello, el gráfico de la figura 5.40 siguiente muestra los valores de la variable **IETeti** para cada tarea.

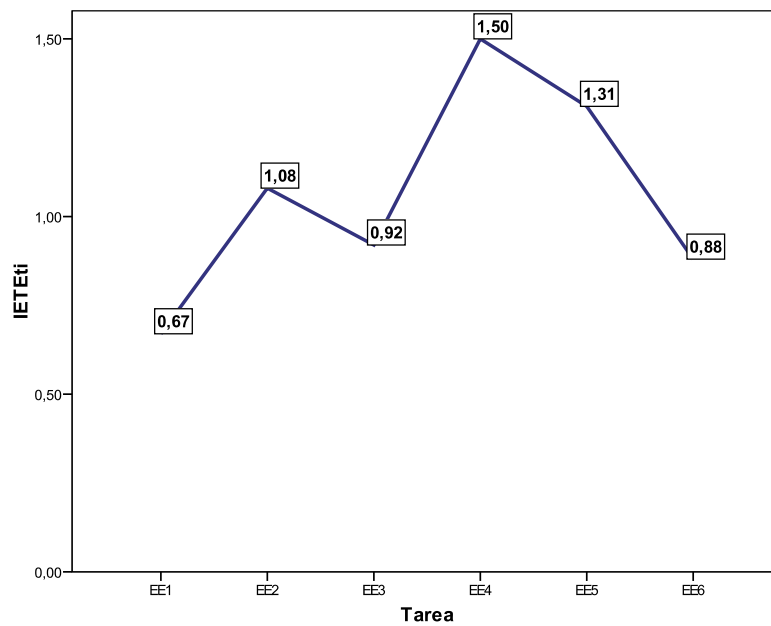


Fig. 5.40. Intentos erróneos totales en cada tarea ponderados por sujetos en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

Nótese que este gráfico no presenta similitudes con el de los tiempos correspondientes sino que los intentos erróneos tienden a aumentar con la dificultad de las tareas, valores correspondientes a **EE1**, **EE2** y **EE4**, hasta que el aprendizaje los hace disminuir en relación con los anteriores, valores correspondientes a **EE3**, **EE5** y **EE6**. Las correlaciones lineales halladas

entre la variable **IETETi** y las **TiempoTP**, tiempos totales en minutos ponderados por el número de sujetos en cada tarea, y **ValTETi**, valoraciones totales de las tareas, son negativas y no significativas: Correlación (**IETETi**, **TiempoTP**)= $-0,157$ , significación bilateral:  $0,767$  y Correlación (**IETETi**, **ValTETi**)= $-0,563$ , significación bilateral:  $0,254$ , que reflejan la rapidez de los intentos realizados y la disminución de las valoraciones al aumentar el número de intentos ponderados. Si se separan las tareas en los dos subconjuntos citados en el párrafo anterior alguna de las correspondientes correlaciones se hace significativa, siendo las interpretaciones compatibles con las anteriores.

Por otra parte, el gráfico de la figura 5.41 muestra la evolución del número de intentos erróneos totales de los sujetos ponderados por tareas (variable **IESEti**).

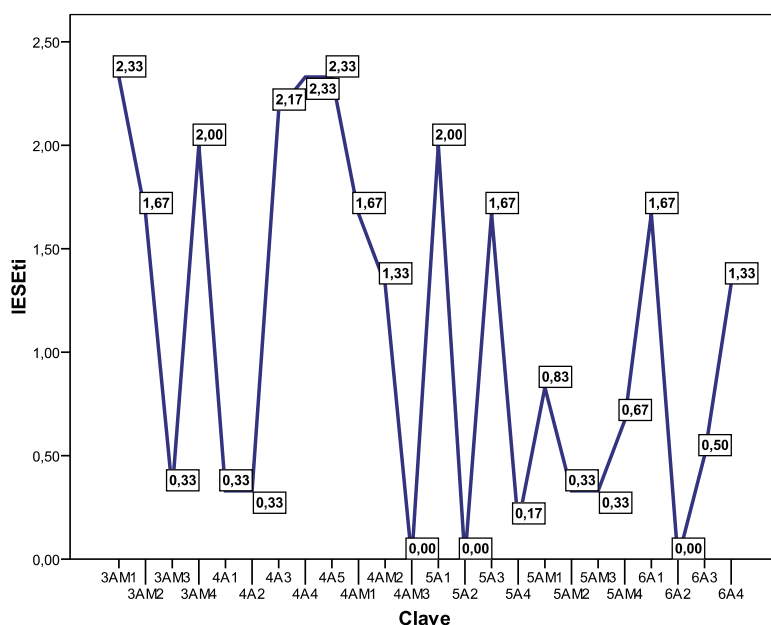


Fig. 5.41. Intentos erróneos totales de los sujetos ponderados por tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

De nuevo se observa que las oscilaciones tienden a disminuir con la edad de los sujetos. Se observa también que 11 de los 24 sujetos, el 45,8%, cometen menos de un error por tarea, que 19 de los 24 sujetos, el 79,2%, cometen dos o menos (en ambos casos se excluye el caso singular 5A2), y que el 100% comete menos de 2,5 errores por tarea en promedio, lo que está de acuerdo con los datos recogidos en la tabla A.18 en la que se observa que los números

grandes de intentos erróneos (más de tres intentos por tarea) se concentran puntualmente en determinadas tareas y sujetos y son muy poco frecuentes.

Así mismo, como era de esperar la correlación de la variable **IESEti** con la correspondiente temporal no resulta significativa, por el contrario Correlación (**IESEti**, **SumE5**)= $-0,820$ , significación bilateral:  $0,000$  al  $99\%$ , que muestra un buen acuerdo de tipo lineal inverso entre el total de intentos erróneos ponderados por tareas y la valoración total de los sujetos.

Finalmente, el gráfico de la figura 5.42 muestra la evolución de los promedios de intentos erróneos totales por grupos de edad ponderados por tareas\* (variable **PEGeEti**).

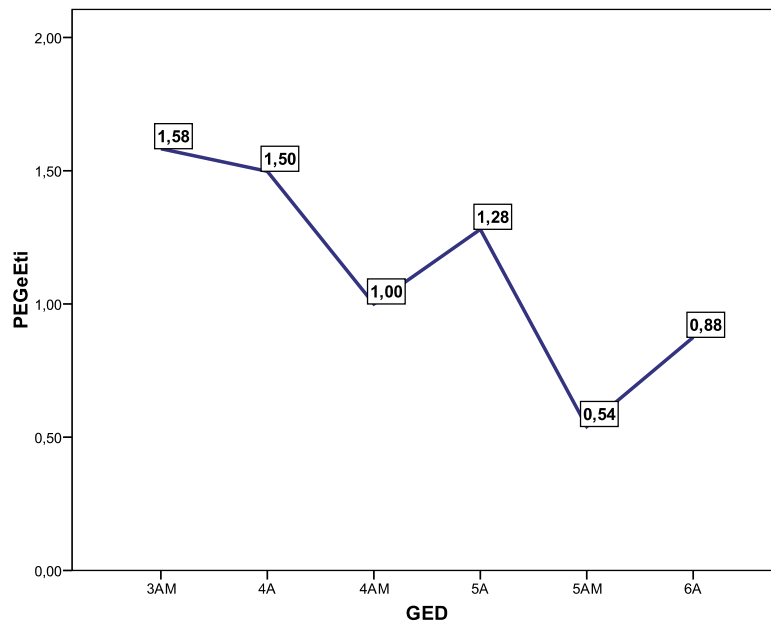


Fig. 5.42. Promedios de intentos erróneos totales por grupos de edad ponderados por tareas en Etiquetaje. Estudio Exploratorio.

En el que se observa la disminución de los promedios de intentos erróneos totales ponderados al aumentar la edad de los grupos, así como las pequeñas oscilaciones que se producen.

También en este caso la correlación de la variable **PEGeEti** con la correspondiente temporal no resulta significativa, mientras que Correlación (**PEGeEti**, **MEEGED**)= $-0,862$ , significación bilateral:  $0,027$  al  $95\%$ , lo que a su vez muestra un buen acuerdo de tipo lineal inverso entre los prome-

\*En los resultados representados se han excluido de nuevo los del sujeto 5A2.

dios de intentos erróneos totales por grupos de edad ponderados por tareas y las valoraciones medias por grupos de edad.

#### 5.9.4.1 Conclusiones

Del estudio anterior obtenemos las conclusiones siguientes:

- 1<sup>a</sup>. Para este conjunto los números ponderados de intentos erróneos por tareas tienden a aumentar con la dificultad de las mismas, tareas **EE1**, **EE2** y **EE4**, observándose su disminución para las restantes, **EE3**, **EE5** y **EE6**, lo que pudiera atribuirse al aprendizaje.
- 2<sup>a</sup>. Las correlaciones lineales entre la variable anterior (**IETETi**) y las **TiempoTP**, tiempos totales en minutos ponderados por el número de sujetos en cada tarea, y **ValTETi**, valoraciones totales de las tareas, son negativas y no significativas, reflejando la rapidez de los intentos realizados y la tendencia a la disminución de las valoraciones al aumentar el número de intentos ponderados. La no significación pudiera deberse a la existencia de los dos subconjuntos caracterizados en el apartado anterior.
- 3<sup>a</sup>. En cuanto a la evolución del número total de intentos erróneos de los sujetos ponderados por tareas, las oscilaciones tienden a disminuir con la edad de los sujetos. En particular se observa que 11 de los 24 sujetos (el 45,8%) cometen menos de un error por tarea, que 19 de los 24 sujetos (el 79,2%) cometen dos o menos y que el 100% comete, en promedio, menos de 2,5 errores por tarea. La mayor cantidad de intentos erróneos (más de tres intentos por tarea) se concentran puntualmente en determinadas tareas y sujetos y son muy poco frecuentes. La media del grupo se halla en 1,1 intentos erróneos por tarea y sujeto.
- 4<sup>a</sup>. La correlación lineal entre el total de intentos erróneos ponderados por tareas para los sujetos (**IESEti**) y la valoración total de los sujetos (**SumE5**) resultó ser igual a  $-0,820$ , significación bilateral: 0,000 al 99%, lo que muestra un buen acuerdo de tipo lineal inverso entre ambas.
- 5<sup>a</sup>. Los promedios de intentos erróneos totales por grupos de edad ponderados por tareas (variable **PEGeETi**) disminuyen, con pequeñas oscilaciones, al aumentar la edad de los grupos. Así mismo, la correlación lineal entre esta variable y las valoraciones medias por grupos de edad (variable **MEEGED**) es  $-0,862$ , con significación bilateral: 0,027 al 95%, lo que también muestra un buen acuerdo de tipo lineal inverso.



## 5.10 Resultados y conclusiones del cuarto conjunto: Orden con cantidades discretas

Se presentan a continuación los resultados y conclusiones correspondientes al conjunto de tareas descritas en el apartado 5.5.6\*.

Se trata, como se recordará, de dos subconjuntos de 4 tareas cada uno, siendo la primera y la quinta tareas introductorias al subconjunto respectivo y las seis restantes (a las que notamos **ECD<sub>j</sub>** variando **j** de 1 a 6), las que aportan los datos para el estudio.

Las tareas están ordenadas por grado de dificultad en cada uno de los dos subconjuntos. En el primero de ellos se trata de ordenar cantidades discretas (conjuntos discretos de frutas) y en el segundo de construir secuencias ordenadas de escalones, pudiendo interpretarse éstos como cantidades discretas o continuas a libre elección del sujeto.

Las ventanas de planteamiento y solución para cada uno de los subconjuntos pueden verse en las figuras A.14 y A.15, páginas 646 y 647 del anexo A.

### 5.10.1 Codificación y categorías de respuestas

La codificación de las respuestas<sup>†</sup>, las valoraciones correspondientes y los niveles asignados a los sujetos se recogen respectivamente en las tablas A.19, A.20, A.24 y A.25 del anexo A. Así mismo, los datos sobre las estrategias utilizadas y el uso o no de las piezas sobrantes en en cada caso se recogen en las tablas A.21, A.22 y A.23 del mismo anexo<sup>‡</sup>.

A cada una de las respuestas observadas se le ha asignado una valoración numérica según se especifica en la tabla A.19. La tabla A.24 recoge los resultados de dichas valoraciones para cada sujeto normalizadas a la unidad<sup>§</sup> así como los valores de las variables **SECD**, **PGECD** y **TotalT**, que corresponden, respectivamente, a la suma para cada sujeto de las valoraciones en cada una de las tareas en una escala de 0 a 5 unidades, a las correspondientes medias de tales sumas para los distintos grupos de edad y a la suma de las valoraciones de cada sujeto en todas las tareas.

\*Véase la página 192 y siguientes.

†Por sencillez, dicha tabla codifica solamente las respuestas observadas dentro de la amplia casuística posible.

‡Véase la página 649 y siguientes.

§Es decir, la valoración obtenida dividida por 5 que es la valoración máxima posible de cada tarea.

### 5.10.2 Análisis de las respuestas

El análisis de las respuestas de este conjunto de tareas se ha realizado en base a los datos almacenados en los registros **listaRi\***, donde **i** varía de 1 a 6. Al igual que en el segundo conjunto, el sistema de registro detecta todos los intentos que realiza el sujeto, es decir, todos los movimientos de las piezas, sin discriminar aquellos en los que el sujeto trata de colocar una pieza dada en una posición determinada de aquellos en los que el sujeto, al arrastrar, la pierde accidentalmente o en los que inicialmente mueve una pieza que finalmente decide no colocar. La imprecisión de este diseño inicial obliga a modificar significativamente el sistema de registro de la información de estas tareas en estudios posteriores.

#### 5.10.2.1 Estrategias y uso de las piezas sobrantes

En la tabla 5.11 se sintetiza la información relativa a las estrategias por tareas y grupos de edad (GED) a partir de las tablas A.20 y A.21. Las tareas se designan mediante las abreviaturas **ECDj**, con **j** variando de 1 a 6, y las estrategias mediante los símbolos C, D, N, PDI y PID, que se refieren, respectivamente\*, a las estrategias creciente, decreciente, no utiliza estrategia, establece las correspondencias asignando las piezas móviles de derecha–izquierda y asignando las piezas de izquierda–derecha. Finalmente, con una X se indica que el sujeto renuncia a realizar la tarea correspondiente.

En las columnas C y D de la tabla A.22 se recoge el número de tareas en las que cada sujeto ha seguido una estrategia ordinal creciente o decreciente, mientras que en la siguiente columna se indica el total de ambas columnas. Igualmente las columnas PID, PDI, N, X, recogen los números de tareas correspondientes a dichos valores para cada sujeto. Las dos últimas filas, correspondientes a las variables **SumE** y **%Est**, recogen respectivamente los totales y porcentajes de dichos valores para el conjunto de tareas. Así mismo, la tabla 5.12 recoge los correspondientes totales y porcentajes por tareas.

En la tabla 5.11 se pone de manifiesto que que el número de sujetos que renuncian a realizar alguna de las tareas (X) crece con la dificultad de las mismas, en ambos subconjuntos, en los tres grupos de menor edad y que todos los sujetos de los tres grupos de mayor edad realizan todas las tareas. De hecho las tres primeras tareas las realizan el 96 %, el 88 % y el 80 % de los sujetos respectivamente, y las tres últimas el 96 %, el 84 % y el 60 % respectivamente.

\*Estos registros se describen en el apartado 5.5.6.3, página 196 y siguientes.

\*En consonancia con el análisis de las respuestas estos valores se recogen inicialmente en la tabla A.21.

Como se puede apreciar los porcentajes de renunciaciones son muy bajos salvo en la última tarea destinada a la detección de niveles competenciales superiores. Esto viene a confirmar la adecuación de la interfaz y su temática a las edades de los sujetos de la muestra.

(a)

GED	ECD1						ECD2				
	C	D	PDI	PID	N	X	C	D	PDI	N	X
3AM	0	2	1	0	1	0	1	0	1	1	1
4A	0	0	2	1	1	1	2	0	0	2	1
4AM	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
5A	0	0	1	0	3	0	2	0	1	1	0
5AM	1	2	1	0	0	0	1	1	1	1	0
6A	0	0	1	0	3	0	0	0	3	1	0
<b>Total</b>	2	5	7	1	9	1	7	1	7	7	3

(b)

GED	ECD3						ECD4					
	C	D	PDI	PID	N	X	C	D	PDI	PID	N	X
3AM	1	0	1	0	0	2	0	1	1	1	1	0
4A	3	0	0	0	0	2	1	1	0	0	3	0
4AM	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
5A	2	0	0	1	1	0	0	1	0	2	1	0
5AM	0	0	1	0	3	0	0	3	0	1	0	0
6A	1	0	1	0	2	0	1	2	0	0	1	0
<b>Total</b>	8	1	3	1	7	5	3	9	2	4	6	1

(c)

GED	ECD5						ECD6			
	C	D	PDI	PID	N	X	C	D	N	X
3AM	0	1	0	0	1	2	0	0	0	4
4A	0	0	1	0	3	1	0	0	0	5
4AM	0	0	0	2	1	1	0	1	2	1
5A	2	0	0	1	1	0	2	0	2	0
5AM	4	0	0	0	0	0	3	0	1	0
6A	3	0	1	0	0	0	1	0	3	0
<b>Total</b>	9	1	2	3	6	4	6	1	8	10

Tabla 5.11. Estrategias por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades discretas. (a) Tareas primera y segunda; (b) Tareas tercera y cuarta; (c) Tareas quinta y sexta.

En la misma tabla se observa que resuelven las tareas sin ninguna estrategia (N) el 36%, 28% y 28% respectivamente, para las tres primeras, y el 24%, 24% y 32% respectivamente, para las tres últimas. Lo que indica que los porcentajes tienden a mantenerse constantes o a disminuir en el primer caso, y a aumentar en el segundo caso debido a la mayor dificultad de las tareas.

Dichos porcentajes se concentran en los tres grupos de mayor edad en las tareas primera, tercera y sexta y en los de menor edad en las tareas segunda, cuarta y quinta, salvo en la primera en la que los sujetos deben adaptarse a las acciones y características del nuevo conjunto.

Llama la atención en estas tareas la aparición y el uso de las estrategias denominadas PDI y PID, ordinalmente incorrectas, en las que algunos sujetos tratan de resolverlas moviendo las diferentes piezas móviles (frutas o escalones) de derecha a izquierda o de izquierda a derecha según vienen colocadas en cada interfaz\*. Los resultados ponen de manifiesto que esos sujetos no llegan a identificar o anticipar el problema ordinal planteado, lo que supone una notable dificultad y explica el lento desarrollo observado en estas competencias.

Como también se observa en la tabla 5.11, la estrategia PDI predomina claramente sobre la PID en las tres primeras tareas mientras que en la cuarta y quinta el uso de ambas es menor predominando ligeramente PID. Ninguna de ellas se usa en la sexta tarea. Ambas estrategias tienden a repartirse con mayor o menor homogeneidad por todos los grupos de edad, lo que creemos que es debido a la colocación de las piezas móviles en las correspondientes interfaces†, que en las tres primeras se sitúan en la parte inferior derecha y en las tres últimas en la inferior izquierda; se observa además que su uso se debilita o desaparece en las tareas tercera y quinta en las que las piezas móviles se reparten en la parte inferior de la interfaz en mayor grado. Nótese también el menor uso de estas estrategias en la tercera tarea, en relación con las dos anteriores, en la que las piezas móviles no están tan concentradas hacia la derecha. En total han utilizado una u otra estrategia el 32% de los sujetos en la primera tarea, el 28% en la segunda, el 16% en la tercera, el 24% en la cuarta, el 20% en la quinta y ninguno en la sexta, observándose una disminución progresiva en su utilización.

En lo que se refiere al uso de las estrategias ordinales C y D se observa, en primer lugar, que salvo en la primera y cuarta tareas, que son las más sencillas (por haber menos piezas móviles) y en las que predomina claramente la estrategia decreciente, en las demás sucede justamente lo contrario, lo que significa que el uso de dichas estrategias aparece cuando aumenta el grado de complejidad de las tareas. Por otra parte, dichas estrategias aparecen en todos los grupos de edad, observándose un aumento lento y gradual en las tareas del primer subconjunto (28%, 32% y 36%, respectivamente), más

---

\*Nótese que estas estrategias son diferentes de las derecha-izquierda e izquierda-derecha en las que el sujeto colocaría dichas piezas *en sus lugares respectivos* de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, que no se han observado en este conjunto de tareas.

†Véanse de nuevo las figuras A.14 y A.15 en las páginas 646 y 647 del anexo A

acusado en los sujetos de los tres grupos de edad inferior. Igualmente, se observa una disminución gradual en el uso de estas estrategias a lo largo de las tareas del segundo subconjunto (48 %, 40 % y 28 %, respectivamente), especialmente importante en el caso de los sujetos de los tres grupos de edad inferior, y un claro aumento en el caso de los sujetos de los tres grupos de edad superior con excepción de la tarea sexta, en la que el aumento es más moderado por su mayor dificultad. Ello indica que las tareas del segundo subconjunto son mejor comprendidas por los sujetos de los tres grupos de edad superior, lo que apoya la idea de que se produce un desarrollo lento y progresivo de las competencias ordinales referidas a la cantidad discreta.

Por último, en la tabla 5.12 se aprecia que el uso de estrategias ordinales (C/D) aumenta con el índice de las tareas mientras que el de las no ordinales (PID/PDI) disminuye en las tareas del primer subconjunto. Para las del segundo subconjunto el uso de ambas disminuye progresivamente existiendo diferencias muy notables en las tres tareas a favor de las estrategias ordinales.

Tarea	C/D	PID/ PDI	N	X	% C/D	% PID/ PDI	% N	% X
ECD1	7	8	9	1	28	32	36	4
ECD2	8	7	7	3	32	28	28	12
ECD3	9	4	7	5	36	16	28	20
ECD4	12	6	6	1	48	24	24	4
ECD5	10	5	6	4	40	20	24	16
ECD6	7	0	8	10	28	0	32	40
<b>Total</b>	<b>53</b>	<b>30</b>	<b>43</b>	<b>24</b>				

Tabla 5.12: Totales numéricos en las estrategias por tareas. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

Los resultados totales por grupos de edad se recogen en la tabla 5.13 en la que las columnas sexta y séptima, etiquetadas C/D y PID/PDI respectivamente, recogen las sumas de las columnas C y D y PID y PDI respectivamente, es decir, los totales de estrategias ordinales y no ordinales para cada grupo de edad. En dicha tabla se aprecian los resultados siguientes:

- En todos los grupos de edad se usan todas las estrategias descritas, influyendo el grado de dificultad de la tarea, la presencia o ausencia en la identificación del problema ordinal o la pérdida o recuperación de la atención. Estos factores pueden motivar que un sujeto, de cualquier

grupo de edad, cambie entre estrategias ordinales y no ordinales o que no utilice ninguna estrategia.

- Salvo para el grupo de seis años, el uso de la estrategia creciente tiende a aumentar gradualmente con la edad.
- El uso de la la estrategia decreciente presenta un comportamiento variable en todos los grupos de edad.
- El uso de ambas estrategias ordinales (C/D), salvo una disminución local en el grupo de seis años, aumenta gradualmente con la edad y supera al uso de las no ordinales (PID/PDI) en todos los grupos de edad.
- El uso de las estrategias no ordinales oscila entre 4 y 6 respuestas (entre un 13% y un 25%) en cada grupo de edad.
- Las respuestas sin estrategia presentan también un comportamiento variable en los diferentes grupos de edad.
- Las renunciaciones disminuyen con la edad y se concentran en los tres grupos de menor edad.

Por otra parte, como puede comprobarse en la tabla A.21\*, solamente tres sujetos: 4A5, 6A3 y 6A4, mantienen la misma estrategia en tres tareas seguidas (C los dos primeros y N el tercero), los restantes como máximo la mantienen solo en dos.

GED	C	D	PID	PDI	C/D	PID/ PDI	N	X	Tot
3AM	2	4	1	4	6	5	4	9	24
4A	6	1	1	3	7	4	9	10	30
4AM	4	4	2	3	8	5	6	5	24
5A	8	1	4	2	9	6	9	0	24
5AM	9	6	1	3	15	4	5	0	24
6A	6	2	0	6	8	6	10	0	24
<b>Total</b>	35	18	9	21	53	30	43	24	150

Tabla 5.13: Resumen numérico de las estrategias por grupos de edad. Tareas de orden con cantidades discretas. Est. exploratorio.

Examinando los totales de la tabla 5.13 o de los valores de la variable %EST<sup>†</sup>, los porcentajes totales de uso de las distintas estrategias fueron: un 23% para la estrategia creciente, un 12% para la decreciente, un 6% para la PID, un 14% para la PDI, un 29% para la ausencia de estrategia (N) y

\*Véase la página 651.

†Véase la tabla A.22 en la página 652, anexo A.

un 16% para las renunciaciones (X). Por tanto, aproximadamente, las estrategias ordinales se usan en un 35% de las ocasiones frente a un 20% en que se usan las no ordinales y un 29% en que no se usa ninguna estrategia. Se concluye, por tanto, que los sujetos de tres años y medio comienzan a usar estrategias ordinales en estas tareas y que la evolución de su uso con la edad es lento y gradual en el intervalo de edad estudiado, pudiendo ser de tipo no lineal en promedio como apuntan los resultados del grupo de edad superior.

Por otra parte, comparando los resultados anteriores con los obtenidos en el conjunto de tareas de orden con cantidades continuas, se constatan diferencias significativas entre el uso de estrategias ordinales en las tareas de orden con cantidades continuas (46,4%\*) y en las tareas de orden con cantidades discretas (35%).

GED	% C/D <sub>CC</sub>	% C/D <sub>CD</sub>	% NOR <sub>CC</sub>	% NOR <sub>CD</sub>	% N <sub>CC</sub>	% N <sub>CD</sub>	% X <sub>CC</sub>	% X <sub>CD</sub>
3AM	25	25	0	21	65	17	10	37
4A	52	23,3	0	13,3	32	30	16	33,3
4AM	35	33	5	21	50	25	10	21
5A	60	37,5	5	25	35	37,5	0	0
5AM	55	62,5	10	16,5	35	21	0	0
6A	50	33	5	25	45	42	0	0

Tabla 5.14: Porcentajes comparativos de uso de estrategias por grupos de edad en las tareas de orden con cantidades continuas y discretas. Estudio exploratorio.

Los resultados de la tabla 5.14<sup>†</sup> indican que los porcentajes de uso de las estrategias ordinales es inferior para las tareas de cantidades discretas salvo para el grupo 3AM, en el que coinciden, y para el grupo 5AM, en que puntualmente sucede lo contrario. En este caso, los sujetos pueden haber utilizado tanto estrategias de tipo continuo, que ya tienen bastante desarrolladas, como estrategias de tipo discreto, incluido el conteo (véase más adelante). Es evidente que alrededor de los cinco años de edad, para las tareas actuales a los cinco y medio, hay una etapa crítica en el desarrollo de las competencias ordinales de los sujetos. Los porcentajes de renunciaciones muestran también la mayor dificultad de las tareas con cantidades discretas para los sujetos de

\*Como se deduce los datos recogidos en las tablas 5.3 y 5.4, véase la página 221 y ss.

<sup>†</sup>En esta tabla 5.14, los subíndices CC y CD se refieren respectivamente a las tareas relativas a cantidades continuas y discretas, C/D a las respectivas estrategias ordinales, NOR a las no ordinales y N y X tienen el mismo significado que se viene utilizando. En las columnas se indican los correspondientes porcentajes por grupos de edad.

los tres grupos de edad inferior, resultado que apoyan también los mayores porcentajes de uso de estrategias no ordinales en todos los grupos de edad.

Teniendo en cuenta que en ambos tipos de tareas los sujetos interaccionan con interfaces no verbales similares (ventanas, mensajes y acciones), los resultados muestran que el uso de estrategias ordinales con cantidades discretas presenta mayor dificultad que el de cantidades continuas en el intervalo de edad considerado, lo que contribuye a la confirmación del modelo evolutivo propuesto.

Por otra parte, debe subrayarse que en ambos tipos de tareas se observa un aumento gradual con la edad en el uso de la estrategia creciente, frente a la constancia (aproximada) o la variabilidad en el uso de la estrategia decreciente. El uso de estrategias ordinales aumenta con la edad y su evolución está ligada a la evolución de la estrategia creciente, cuyo uso puede indicar un mayor nivel competencial y evolutivo.

Finalmente, es importante señalar el uso espontáneo del conteo en sujetos que utilizan las estrategias ordinales C y D mediante justificaciones no pedidas del tipo: “*primero va una naranja, luego dos, etc. . .*” o “*después de un escalón van dos, luego tres, etc. . .*”, cuya aparición y estudio evolutivo tiene interés para su tratamiento en estudios posteriores.

En lo que se refiere al uso de la pieza sobrante la tabla 5.15 muestra los resultados por tareas y grupos de edad. Es claro que su uso ha sido elevado en las tareas de los dos subconjuntos en las que interviene\*. De hecho se utiliza por el 64% de los sujetos en la segunda tarea, por el 40% en la tercera; por el 40% en la cuarta, por el 64% en la quinta y por el 16% en la sexta. Por otra parte, se observa en la tabla A.23<sup>†</sup> que solo los sujetos de los dos grupos de mayor edad parecen advertir mayoritariamente su presencia al usarla con menor frecuencia. Así, no la usan en el 70% y en el 55% de los casos, respectivamente, frente al 0%, al 31%, el 33% y el 36% en que no la usan los sujetos de los cuatro grupos respectivos de menor edad (del 3AM al 5A). Nótese también la tendencia creciente a no usar dicha pieza.

Al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, los resultados sugieren que los sujetos, al establecer las correspondencias seriales, realizan las comparaciones pieza–hueco de modo aproximado y que llevan a cabo tales correspondencias tras algunos ensayos. No obstante, creemos que son necesarios nuevos estudios para disponer de información definitiva al respecto. De nuevo, creemos que la presencia de estas piezas sobrantes, aún cuando

\*Véanse las respectivas subtablas 5.14(a) y 5.14(b)

<sup>†</sup>Véase la página 653.



complican notablemente las tareas aumentando su dificultad, minimiza la influencia del azar, puede aportar información significativa y relevante sobre el modo en que los sujetos establecen las correspondencias seriales en la ordenación de cantidades continuas y discretas y hay que mantenerlas en estudios posteriores.

(a)

GED	ECD2			ECD3		
	N	S	X	N	S	X
3AM	0	3	1	0	2	2
4A	1	3	1	1	2	2
4AM	1	2	1	2	1	1
5A	0	4	0	2	2	0
5AM	2	2	0	4	0	0
6A	2	2	0	1	3	0
<b>Total</b>	6	16	3	10	10	5

(b)

GED	ECD4			ECD5			ECC6		
	N	S	X	N	S	X	N	S	X
3AM	0	4	0	0	2	2	0	0	4
4A	2	3	0	1	3	1	0	0	5
4AM	1	2	1	0	3	1	1	2	1
5A	1	3	0	1	3	0	3	1	0
5AM	3	1	0	1	3	0	4	0	0
6A	3	1	0	2	2	0	3	1	0
<b>Total</b>	10	14	1	5	16	4	11	4	10

Tabla 5.15. Uso de las piezas sobrantes por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Primer subconjunto: Tareas segunda y tercera; (b) Segundo subconjunto: Tareas cuarta, quinta y sexta.

### 5.10.2.2 Conclusiones

En definitiva, podemos establecer las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Salvo la sexta tarea, cuyo porcentaje de realización es del 60%, los porcentajes de realización de las demás se hallan entre el 96% en la primera y cuarta y el 80% en la tercera. Estos resultados avalan la adecuación de la interfaz y de la temática de estas tareas a las edades y a las características psicomotrices y psicoafectivas de los sujetos.
- 2<sup>a</sup>. Estas tareas detectan la utilización espontánea de estrategias ordinales, crecientes y decrecientes (se ha detectado su utilización en un 35%, porcentaje que podría aumentar si se mejora el sistema de registro de la información).

- 3<sup>a</sup>. Los porcentajes de sujetos que las resuelven sin ninguna estrategia varía entre el 36 % en la primera y el 24 % en la cuarta y en la quinta, y corresponden a un promedio global del 29 %, que es claramente inferior al 35 % global de los sujetos que utilizan estrategias ordinales.
- 4<sup>a</sup>. Hay que señalar la aparición y el uso de las estrategias no ordinales PDI y PID que tienden a repartirse por todos los grupos de edad. Su uso varía entre el 32 % en la primera tarea y el 0 % en la sexta, con un promedio de uso global del 20 %, observándose una disminución progresiva en cada subconjunto de tareas.
- 5<sup>a</sup>. Los sujetos que las usan no identifican el problema ordinal planteado, identificación que quizá requiera un análisis o una visión global de la tarea que supone una notable dificultad para los sujetos de menor edad. Destaca también la ausencia de estrategias no ordinales izquierda–derecha y derecha–izquierda por lo que su uso real debe ser muy reducido.
- 6<sup>a</sup>. Se observa un predominio claro del uso de la estrategia creciente, tanto en los resultados totales como en los de los grupos de edad, en aumento en las tareas del primer subconjunto y en disminución en las del segundo. Ello puede deberse a la mejor comprensión de estas tareas (y en mayor medida de las tres últimas) por parte de los sujetos de mayor edad, si bien creemos que son necesarios nuevos estudios y mejoras en el registro de la información.
- 7<sup>a</sup>. En cuanto al uso de las estrategias ordinales (C/D) frente a las no ordinales (PID/PDI), se han hallado diferencias notables a favor de las primeras.
- 8<sup>a</sup>. Todos los grupos de edad usan en mayor o menor medida todas las estrategias descritas por lo que el grado de dificultad en las tareas, la variable presencia o ausencia en la identificación del problema ordinal o la pérdida o recuperación de la atención pueden motivar que un sujeto cambie entre estrategias ordinales y no ordinales o que no utilice ninguna estrategia en el intervalo de edad estudiado.
- 9<sup>a</sup>. El uso de la estrategia creciente tiende a aumentar gradualmente con la edad, el de la estrategia decreciente presenta un comportamiento variable apareciendo en todos los grupos de edad.
- 10<sup>a</sup>. El uso de las dos estrategias ordinales (C/D), salvo una disminución local en el grupo de seis años, aumenta gradualmente con la edad y supera al uso de las no ordinales (PID/PDI) en todos los grupos de edad.
- 11<sup>a</sup>. Los resultados anteriores por tareas y grupos de edad proporcionan la siguiente imagen evolutiva en el uso de estrategias ordinales con

cantidades discretas: *los sujetos de tres años y medio comienzan a utilizarlas y su evolución es lenta y gradual en el intervalo de edad estudiado, pudiendo ser de tipo no lineal en promedio como apuntan los resultados del grupo de edad superior.*

- 12<sup>a</sup>. Se ha detectado el uso espontáneo del conteo por parte de sujetos que utilizan las estrategias ordinales con justificaciones del tipo “*primero va una naranja, luego dos, etc...*” o “*después de un escalón van dos, luego tres, etc...*”, cuya aparición y estudio evolutivo presentan suficiente interés para incluirse en estudios posteriores.
- 13<sup>a</sup>. El uso de estrategias ordinales en las tareas de orden con cantidades discretas es significativamente inferior al correspondiente a las tareas de orden con cantidades continuas, observándose un 35 % de uso global en las discretas frente a un 46,4 % en las continuas.
- 14<sup>a</sup>. La edad de cinco años y medio parece ser crítica en el desarrollo de las competencias ordinales con cantidades discretas.
- 15<sup>a</sup>. Se confirma de nuevo la adecuación al estudio de los subintervalos de seis meses en que se ha dividido el rango de edad elegido.
- 16<sup>a</sup>. La evolución del uso de estrategias ordinales con cantidades discretas presenta mayor dificultad y es más tardía que la correspondiente a cantidades continuas en el intervalo de edad considerado, lo que contribuye a la confirmación del modelo evolutivo propuesto.
- 17<sup>a</sup>. En ambos tipos de tareas se observa un aumento gradual en el uso de la estrategia creciente al aumentar la edad de los sujetos, frente a la constancia o la variabilidad en el uso de la estrategia decreciente. Ello se traduce en un aumento gradual en el uso de estrategias ordinales al aumentar la edad de los sujetos.
- 18<sup>a</sup>. Los sujetos cambian de estrategia al realizar las tareas, lo que proporciona mejores resultados que la elección de una estrategia no ordinal fija o la no utilización de ninguna estrategia\*.
- 19<sup>a</sup>. El uso de la pieza sobrante ha sido elevado en las tareas de los dos subconjuntos en las que interviene, observándose una tendencia decreciente. Igualmente se observa su constancia o disminución en todos los grupos de edad, siendo los sujetos de los dos grupos de mayor edad los que mayoritariamente advierten su presencia y la utilizan con menor frecuencia.
- 20<sup>a</sup>. La presencia de las piezas sobrantes aumenta la dificultad de las tareas pero minimiza la influencia del azar y aporta información significativa y relevante sobre el modo en que los sujetos establecen las correspon-

\*Nótese que las tareas son de tipo no verbal.

dencias seriales en la ordenación de cantidades continuas y discretas. Por estos motivos creemos que deben mantenerse en estudios posteriores.

Al igual que en el caso de las tareas con cantidades continuas subrayamos que las conclusiones anteriores son provisionales e indicativas de simples tendencias. Para confirmarlas o rebatirlas es necesario realizar estudios posteriores con muestras de mayor tamaño y un sistema mejorado para el registro de la información.

### 5.10.2.3 Niveles de resultados

Las valoraciones se recogen en la tabla A.24 del anexo A\*. La cabecera de las columnas de dicha tabla indica la clave asignada a cada sujeto, las valoraciones de los sujetos en cada una de las tareas ECDj (variando j de 1 a 6, tabla A.20), la suma de las valoraciones para cada sujeto, variable denominada SECD, y las medias correspondientes por grupos de edad, denominada PGECD. Las valoraciones de los sujetos en cada tarea se han normalizado a 1, dividiendo la valoración obtenida entre la máxima de la tarea según la tabla A.19. A las sumas y medias anteriores se les ha aplicado una escala de 5 unidades.

En la última fila de la tabla A.24 se indican los totales por tareas, el total de la variable SECD y el promedio global de las medias por grupos de edad (promedio de los valores de PGECD). En dicha tabla se puede observar:

- Ningún sujeto alcanza la valoración máxima.
- Las tareas del primer subconjunto han presentado mayor dificultad que las del segundo, con valoraciones totales entre 4,6 y 5,8 frente a valoraciones entre 8 y 8,6 sobre 25 para las del segundo.
- La valoración máxima es 3,33 sobre 5 y corresponde a un sujeto de cinco años y medio.
- En algunos grupos de edad se observa una considerable variabilidad de las valoraciones, por lo que las medias correspondientes pudieran ser poco representativas.

Estos resultados ponen de manifiesto la notable dificultad que presenta para los sujetos la ordenación de cantidades discretas, la cual se suaviza en el segundo subconjunto debido a la experiencia previa o la aplicación de estrategias ordinales tanto a la cantidad discreta como a la continua (altura versus cantidad de escalones de las piezas). Esto corrobora de nuevo el modelo

\*Para más detalles, véanse las tablas A.19 y A.20, página 649 y siguientes, anexo A.

evolutivo propuesto, en el sentido de que el desarrollo de la competencia para ordenar cantidades discretas es posterior a la correspondiente a las cantidades continuas, en contra de lo que a priori parece más razonable.

La variabilidad de las valoraciones para los grupos de edad se muestra con detalle en el diagrama de cajas de la figura 5.43, en el que se observa que las medianas no superan el valor 2, salvo para el grupo 5AM (3, 17) que destaca claramente sobre los demás, que sus valores son crecientes para los tres grupos de menor edad y que oscilan significativamente para los tres grupos de mayor edad. Se observa también que los grupos con mayor dispersión son cuatro primeros de menor edad, en los que esta competencia ordinal se halla en desarrollo.

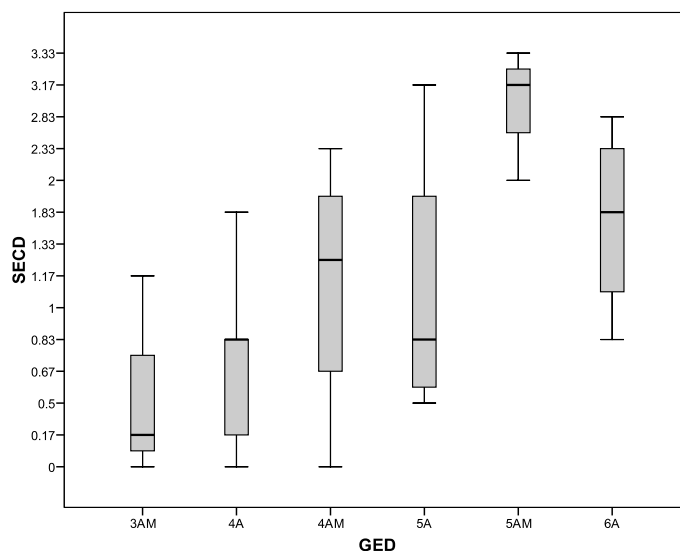


Fig. 5.43. Dispersión de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.

En la tabla 5.16 se confirman los resultados indicados anteriormente y se pone de manifiesto, mediante los coeficientes de variación, que la representatividad de las medias tiende a aumentar con la edad. Igualmente, se muestra también que el grupo 5A es singular en el sentido de que presenta una gran dispersión y su media es menos representativa (también su mediana es menor) que la del grupo de edad anterior, lo que podría indicar que dicha edad es crítica y se produce una transición hacia un mayor dominio de esta competencia ordinal.

Por otra parte, tanto en la tabla A.24 como en el gráfico 5.43 se muestra

que en todos los grupos de edad hay sujetos con valoraciones superiores e inferiores a las correspondientes medias, que a su vez evolucionan de forma creciente con la edad. Por último, el comportamiento de las medianas en el gráfico 5.43 y el de las medias en el gráfico 5.44, sugieren que la evolución de esta competencia con la edad pudiera ser de tipo no lineal, destacando claramente los grupos 5A, por su mediana relativamente baja en relación con los grupos anterior y siguiente, 5AM, por sus valores relativamente altos, y 6A por todo lo contrario.

GED	Media	Mediana	Desv. típ.	CV
3AM	0,38	0,17	0,53	1,4
4A	0,73	0,83	0,72	0,99
4AM	1,21	1,25	0,95	0,79
5A	1,34	0,84	1,24	0,93
5AM	2,92	3,17	0,62	0,26
6A	1,75	1,67	0,87	0,5

Tabla 5.16. Medidas de centralización y dispersión de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.

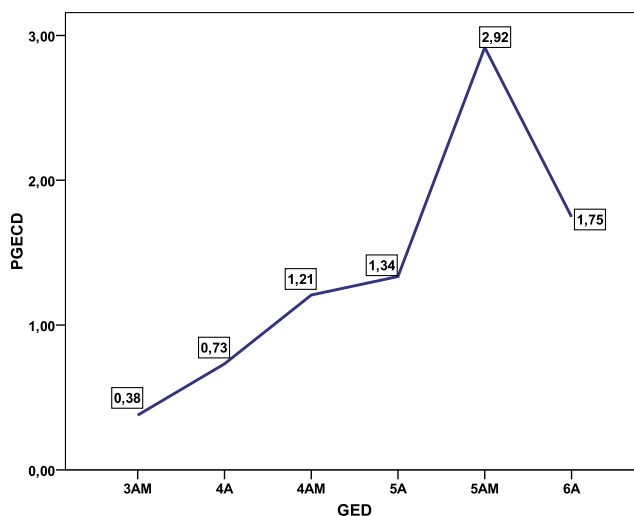


Fig. 5.44. Evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad. Orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.

Se han hallado correlaciones de Pearson positivas significativas en las respuestas individuales a las siguientes tareas:

- Correlación ( $\mathbf{ECD4}$ ,  $\mathbf{ECD5}$ )=0,427, significación bilateral: 0,033

al 95 %. Correlación (**ECD4**, **ECD6**)=0,599, significación bilateral: 0,002 al 99 %.

- ❑ Correlación (**ECD5**, **ECD6**)=0,716, significación bilateral: 0,000 al 99 %.

Se observa que los coeficientes de correlación de las respuestas a la tercera tarea con respecto a las de las dos anteriores son crecientes y de significación también creciente, lo que sugiere que las tareas seleccionan progresivamente a los sujetos con mayores competencias.

De nuevo hemos de señalar, al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, que el análisis anterior es provisional y meramente indicativo de tendencias que habrán de confirmarse o rebatirse en estudios posteriores con muestras de mayor tamaño.

Teniendo en cuenta lo anterior consideraremos de modo indicativo los siguientes niveles:

- ❖ **Nivel 1:** Sujetos que no ordenan cantidades discretas o lo hacen de forma incipiente usando esporádicamente estrategias ordinales. Realizan alguna tarea pero solo parcialmente y con valoraciones bajas y no consiguen ordenar secuencias discretas de tres elementos.
- ❖ **Nivel 2:** Sujetos que comienzan a ordenar cantidades discretas usando estrategias ordinales. Comienzan a ordenar espontáneamente secuencias discretas de tres o cuatro elementos. Realizan al menos cuatro tareas, alguna de forma parcial.
- ❖ **Nivel 3:** Sujetos que ordenan cantidades discretas usando estrategias ordinales. Ordenan espontáneamente secuencias discretas de tres o cuatro elementos con éxito. Realizan al menos cinco tareas, alguna de forma parcial, con valoraciones altas.

La clasificación correspondiente a las respuestas de los sujetos de la muestra se recoge en la tabla A.25, página 655, del anexo A y las frecuencias y evolución de estos niveles por grupos de edad en el gráfico 5.45, en el que se observa que el *Nivel 1* es mayoritario en los cuatro grupos de menor edad, desaparece a los cinco años y medio y reaparece en el grupo 6A. Igualmente, el *Nivel 2* aparece a los cuatro años y medio con una presencia moderada y en aumento en los grupos de edad siguientes. Por su parte, el *Nivel 3* aparece a los cinco años, es mayoritario a los cinco y medio y desaparece en el grupo de seis años. Todo ello indica que las capacidades y competencias para ordenar cantidades discretas presentan un desarrollo más lento que las

correspondientes a la ordenación de cantidades continuas, pudiendo ser dicho desarrollo de tipo no lineal, como indica a su vez la existencia de sujetos de edad superior a los cinco años y medio que no aplican estrategias ordinales en tareas de ordenación de cantidades discretas. Estos datos están nuevamente a favor del modelo evolutivo propuesto.

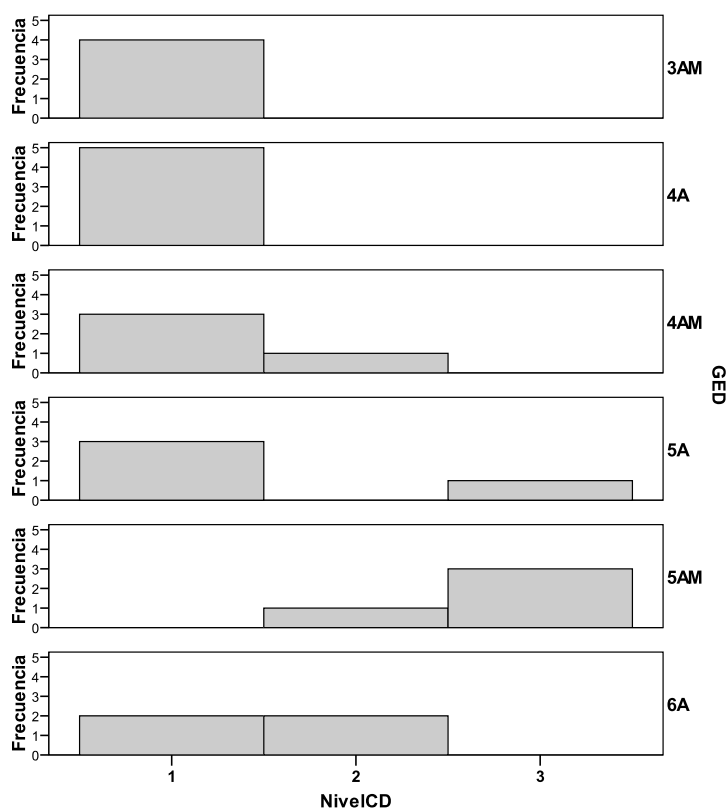


Fig. 5.45. Frecuencias y evolución de los niveles, orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.

Por tanto, se concluye que el uso espontáneo de estrategias ordinales relativas a la cantidad discreta se halla en formación entre los tres y los seis años, utilizándose mayoritariamente a los cinco años y medio sin consolidarse su frecuencia de uso a edades superiores, en las que puede observarse incluso una notable falta de desarrollo. El intervalo de cuatro años y medio a seis años edad parece ser crítico en lo que se refiere al desarrollo de esta competencia, por lo que la acción didáctica en este aspecto ordinal debiera empezar a partir de los cuatro años.

Por otra parte, se han hallado correlaciones de Pearson positivas significa-



tivas entre las respuestas individuales en determinadas tareas y los valores las variables **SECD** y **NivelCD** correspondientes a la valoración global y al nivel de cada sujeto:

- Correlación (**ECD1**, **SECD**)=0,462, significación bilateral: 0,020 al 95 %. Correlación (**ECD1**, **NivelCD**)=0,438, significación bilateral: 0,028 al 95 %.
- Correlación (**ECD3**, **SECD**)=0,556, significación bilateral: 0,004 al 99 %. Correlación (**ECD3**, **NivelCD**)=0,510, significación bilateral: 0,009 al 99 %.
- Correlación (**ECD4**, **SECD**)=0,735, significación bilateral: 0,000 al 99 %. Correlación (**ECD4**, **NivelCD**)=0,630, significación bilateral: 0,001 al 99 %.
- Correlación (**ECD5**, **SECD**)=0,735, significación bilateral: 0,000 al 99 %. Correlación (**ECD5**, **NivelCD**)=0,713, significación bilateral: 0,000 al 99 %.
- Correlación (**ECD6**, **SECD**)=0,841, significación bilateral: 0,000 al 99 %. Correlación (**ECD6**, **NivelCD**)=0,848, significación bilateral: 0,000 al 99 %.

También resulta: Correlación (**SECD**, **NivelCD**)=0,897 con significación bilateral: 0,000 al 99 %. Lo que indica la excelente correspondencia entre las valoraciones totales y los niveles individuales definidos.

#### 5.10.2.4 Conclusiones

Con las reservas ya indicadas, obtenemos las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Es necesario mejorar el registro de la información en este conjunto de tareas, pues, al igual que las tareas de cantidades continuas, no discriminan intentos cuya consideración puede afectar significativamente a la calidad y a la precisión de la información obtenida así como a las conclusiones sobre la formación y evolución de las capacidades y competencias en estudio.
- 2<sup>a</sup>. Las valoraciones ponen de manifiesto la mayor dificultad de la ordenación de cantidades discretas en relación con la ordenación de cantidades continuas, lo que confirma la bondad del modelo evolutivo propuesto en el sentido de que el desarrollo de la competencia para ordenar cantidades discretas es posterior a la correspondiente a las cantidades continuas.
- 3<sup>a</sup>. Los grupos de menor edad presentan una mayor dispersión, que tiende

a disminuir con el aumento de la edad, lo que favorece el incremento de la representatividad de las medias y medianas.

- 4<sup>a</sup>. El grupo de cinco años presenta una dispersión mayor que la de los grupos anterior y siguiente, una mediana inferior y una media ligeramente superior a las del grupo anterior. Asimismo, la dispersión del grupo de seis años es mayor que la del grupo anterior, siendo la media y la mediana claramente inferiores.
- 5<sup>a</sup>. Las edades alrededor de los cinco años son críticas en lo referente a la adquisición de un mayor dominio de esta competencia ordinal. Los resultados y conclusiones sugieren una evolución lenta y no lineal de esta competencia con la edad de los sujetos.
- 6<sup>a</sup>. El uso espontáneo de estrategias ordinales relativas a la cantidad discreta se halla en formación entre los tres y los seis años, utilizándose mayoritariamente a los cinco años y medio.
- 7<sup>a</sup>. La competencia ordinal parece que se estanca, e incluso retrocede, a partir de los cinco años y medio, por lo que la acción didáctica sobre este aspecto ordinal debiera empezar a partir de los cuatro años. Este fenómeno pudiera ser debido a su posible evolución no lineal.
- 8<sup>a</sup>. Los intervalos de edad de seis meses elegidos para el estudio son adecuados en la medida en que favorecen la manifestación de diferencias apreciables entre ellos.
- 9<sup>a</sup>. Es necesario realizar estudios posteriores con muestras de mayor tamaño, que incorporen mejoras en la precisión del registro de la información y que permitan confirmar la validez de los resultados y conclusiones anteriores.

### 5.10.3 *Análisis de los tiempos de respuesta*

En la tabla A.26, página 656, anexo A, se recogen, en minutos, los resultados temporales por sujetos y tareas, los tiempos totales empleados por los sujetos, variable **STECD**, los promedios temporales por grupos de edad, variable **PTGECD**, y en la última fila los tiempos totales por tareas, el tiempo total invertido por todos los sujetos en este conjunto de tareas y el tiempo medio por sujeto.

En la tabla anteriormente mencionada se han excluido los resultados de los sujetos 3AM4, 4A1 y 4AM4 por haber renunciado a realizar al menos cuatro tareas, lo que distorsiona los resultados temporales de los correspondientes grupos de edad. Del mismo modo, los valores nulos indican que el sujeto renunció a realizar la tarea correspondiente, lo que también introduce cierta

dostorsión en los tiempos totales por tareas y por sujetos, ya que no todas las tareas fueron realizadas por el mismo número de sujetos y algunos sujetos no realizaron todas las tareas, en particular la sexta.

Para paliar la situación descrita y obtener conclusiones más ajustadas tomaremos en consideración los promedios temporales totales respecto al número de sujetos que realizan cada tarea y los promedios temporales según el número de tareas que realiza cada sujeto, tal y como se indica en los gráficos de la figuras 5.46 y 5.47.

Los gráficos de Figura 5.46 muestran que han sido mayores los tiempos y los promedios temporales en las tareas del primer subconjunto, en el que las cantidades que intervienen son discretas, que en las del segundo, en el que los sujetos pueden interpretar las cantidades como discretas o continuas. Ello es coherente con la mayor dificultad observada en las respuestas\* a las tareas del primer subconjunto, lo que avala de nuevo la pertinencia del modelo evolutivo propuesto

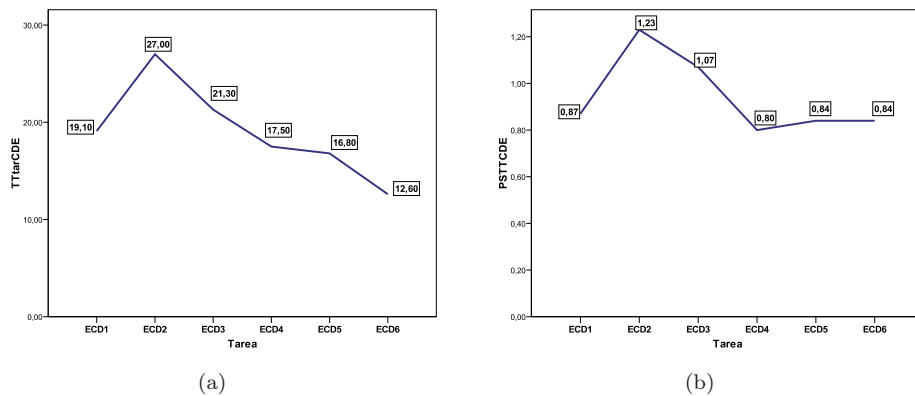


Fig. 5.46. Tiempos en las tareas de orden con cantidades discretas (en min.). Estudio exploratorio. (a) Tiempos totales. (b) Promedios temporales según el número de sujetos que las realizan.

Es claro también que los mayores valores temporales observados corresponden a la segunda tarea, la primera en la que aparece la pieza sobrante. En las siguientes tareas, de igual o mayor dificultad que la segunda y en las que también aparece la pieza sobrante, se observa una disminución de los valores temporales. Ello indica de nuevo que los sujetos invierten más tiempo en aquellas tareas que presentan elementos nuevos e inesperados que en otras de igual o mayor dificultad que son más parecidas a las ya realizadas pero que no incorporan, o incorporan menos, elementos nuevos.

\*Vénase los resultados y conclusiones del apartado anterior.

Por otra parte, en el gráfico de la Figura 5.46(a) se observa una disminución clara de los tiempos totales a partir de la segunda tarea debida, por una parte, a la experiencia adquirida por los sujetos con la interfaz y, por otra, a las renunciaciones de los sujetos de menor edad. Así mismo, el gráfico 5.46(b) ilustra la evolución temporal, indicando que en realidad los promedios temporales de las dos últimas tareas son iguales y mayores que los de la cuarta y que estos tres son inferiores a los de las tareas del primer subconjunto. Sin embargo la disminución de los valores temporales no parece relacionarse linealmente con la mejora de las valoraciones de las tareas, ya que la correlación entre los tiempos totales por tareas y sus valoraciones totales es  $-0,664$  con significación  $0,150$  y la de los promedios temporales según el número de sujetos y las valoraciones totales es  $-0,571$  con significación  $0,237$ , que no son significativas.

En cuanto a los patrones temporales individuales, los datos de la tabla A.26 ponen de manifiesto, al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, que las oscilaciones temporales en los grupos de edad tienden a suavizarse y homogeneizarse a medida que aumenta la edad y que las oscilaciones observadas se deben a determinados sujetos en los grupos de edad.

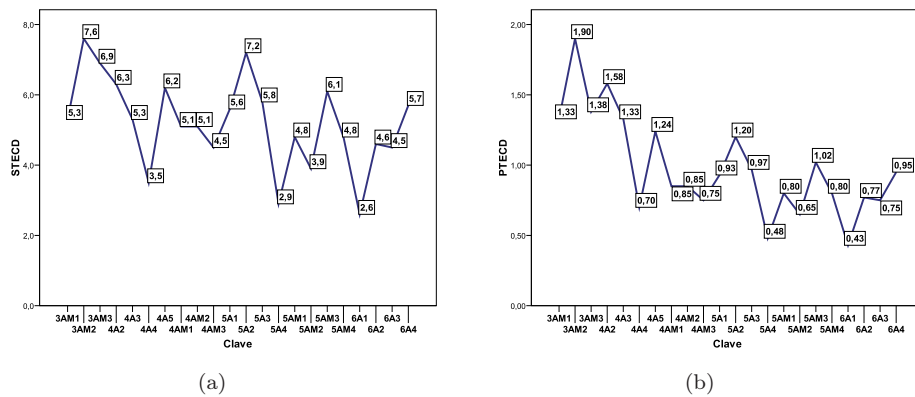


Fig. 5.47. Tiempos de los sujetos en las tareas de orden con cantidades discretas (en min.). Estudio exploratorio. (a) Tiempos totales. (b) Promedios temporales totales según el número de tareas que realizan.

Por otra parte, en los gráficos 5.47(a) y 5.47(b) se muestran los valores temporales totales correspondientes a cada sujeto, observándose una tendencia a la disminución de los valores temporales al aumentar la edad de los sujetos, tendencia que es más clara en el gráfico de los promedios. Así mismo se observa que se producen oscilaciones temporales apreciables en todos los

grupos de edad, siendo el más estable el de cuatro años y medio, y que las oscilaciones tienden a suavizarse con la edad salvo en el grupo de seis años. Se observa también que los tiempos de 17 de los 22 sujetos se hallan en el intervalo temporal aproximado de 3,5 a 6,5 minutos, que solamente 3 de los 22 sujetos superan los 6 minutos y medio y que 2 sujetos tardan menos de 3 minutos y medio, situándose la media del grupo en 5,2 minutos. Estos valores son sensiblemente superiores a los correspondientes a las tareas con cantidades continuas\*, lo que de nuevo pone de manifiesto la mayor dificultad de las tareas presentes y apoya el modelo evolutivo propuesto.

No se observa correlación lineal entre los tiempos totales por sujeto y sus valoraciones totales, variables **SECD** y **STECD** (el valor resultante es  $-0,147$  con significación  $0,514$ ), pero entre los promedios totales según el número de tareas que realiza el sujeto y su valoración global, variables **SECD** y **PTECD**, la correlación lineal observada es negativa e igual a  $-0,445$  con significación  $0,038$  al 95%, lo que indica cierto grado de dependencia lineal entre ambas.

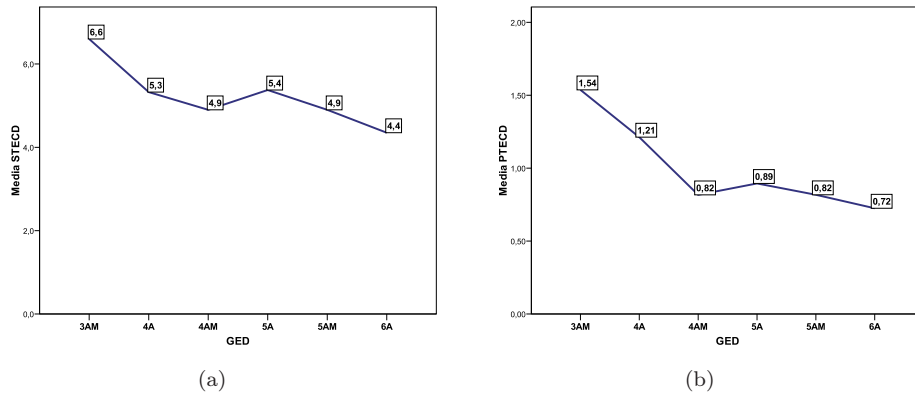


Fig. 5.48. Medias temporales por grupos de edad en las tareas de orden con cantidades discretas (en min.). Estudio exploratorio. (a) De los tiempos totales. (b) De los promedios temporales según el número de tareas que realizan los sujetos.

En los gráficos de las figuras 5.48(a) y 5.48(b) se representan las medias temporales por grupos de edad. En dichos gráficos se observa que las medias disminuyen más rápidamente en los tres grupos de edad inferior que en los tres grupos de edad superior, produciéndose un ligero aumento al pasar del grupo de cuatro años y medio al de cinco años. La correlación de la variable **Media STECD** (anteriormente denominada **PTGECD**) con las valoracio-

\*Recordemos que los tiempos de 14 de los 22 sujetos se hallaban en el intervalo temporal aproximado de 2 a 4 minutos y que solamente 4 de los 22 sujetos superaban los 5 minutos, situándose la media del grupo en 3,9 minutos. Véase la sección 5.8.3, pág. 231 y siguientes.

nes medias por grupos de edad, variable **PGECD**, es igual a  $-0,654$  con significación  $0,159$ . Igualmente, la correlación de esta última con la de los promedios temporales según el número de tareas por grupos de edad, variable **Media PTECD** en el gráfico 5.48(b), es igual a  $-0,733$  con significación  $0,097$ , lo que indica cierto grado de dependencia lineal entre las valoraciones medias y los promedios temporales según el número de tareas que realizan los sujetos por grupos de edad. Dicha dependencia podría ser de tipo no lineal.

### 5.10.3.1 Conclusiones

Se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Los valores temporales son superiores en las tareas del primer subconjunto, en el que las cantidades que intervienen son discretas, que en las del segundo subconjunto, en el que los sujetos pueden interpretar las cantidades como discretas o continuas. Ello es coherente con la mayor dificultad observada en las respuestas de los sujetos en las tareas del primer subconjunto, lo que apoya la validez del modelo evolutivo propuesto.
- 2<sup>a</sup>. Los sujetos invierten más tiempo en las tareas que presentan elementos nuevos e inesperados que en otras de igual o mayor dificultad que son más parecidas a las realizadas anteriormente pero que no incorporan, o incorporan menos, elementos nuevos. En general se observa una tendencia al aumento de los valores temporales al aumentar la dificultad de las tareas.
- 3<sup>a</sup>. Existen correlaciones lineales negativas poco significativas entre los valores temporales por tareas y sus valoraciones totales, por lo que la disminución de los valores temporales indica cierta mejora pero no parece que exista una relación lineal con la mejora de las valoraciones de las tareas.
- 4<sup>a</sup>. Los patrones temporales individuales, al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, indican que las oscilaciones temporales tienden a suavizarse y homogeneizarse a medida que aumenta la edad y que las mayores oscilaciones observadas se deben a los valores puntuales de determinados sujetos.
- 5<sup>a</sup>. Los tiempos empleados por 17 de los 22 sujetos (el 77,3%) se hallan en el intervalo temporal aproximado de 3,5 a 6,5 minutos. Solo 3 de los 22 sujetos (el 13,6%) superan los 6 minutos y medio y 2 (el 9,1%) tardan menos de 3 minutos y medio, situándose la media del grupo en 5,2 minutos. Estos valores son sensiblemente superiores a

los correspondientes a las tareas de orden con cantidades continuas, lo que indica de nuevo la mayor dificultad de las tareas de orden con cantidades discretas y apoya el modelo evolutivo propuesto.

- 6<sup>a</sup>. Se observa una tendencia a la disminución de los valores temporales al aumentar la edad de los sujetos, tendencia que es más clara en el caso de los promedios temporales totales según el número de tareas que realiza el sujeto. Entre estos promedios y la valoración global de los sujetos existe una correlación lineal negativa igual a  $-0,445$  con significación  $0,038$  al  $95\%$ , lo que indica cierto grado de dependencia lineal entre ambas variables.
- 7<sup>a</sup>. Las medias temporales por grupos de edad tienden a disminuir rápidamente para los tres grupos de edad inferior, siendo su disminución más lenta para los tres grupos de edad superior.
- 8<sup>a</sup>. Existen correlaciones lineales negativas con significaciones moderadas entre los datos temporales por grupos de edad y las valoraciones correspondientes, mayor en el caso de los promedios. Esto indica cierto grado de dependencia lineal entre las valoraciones medias y los promedios temporales según el número de tareas que realizan los sujetos por grupos de edad, es decir, que dichas valoraciones medias tienden a disminuir al aumentar los promedios temporales empleados y que la dependencia entre ambas podría ser de tipo no lineal.

#### 5.10.4 Número de intentos

Los intentos totales por sujetos y tareas se recogen en la tabla A.27, página 657, anexo A, donde se recogen también los intentos totales de los sujetos, variable **SIECD**, y los promedios de intentos por grupos de edad, variable **PSIGECD**. Por la misma razón indicada en el apartado anterior, los promedios de los intentos totales de los sujetos según el número de tareas que realizan, variable **PIntS**, y los correspondientes promedios de esta variable por grupos de edad, variable **PIGECD**, se recogen así mismo en las dos últimas columnas de la tabla A.28, página 658, del mismo anexo.

En la penúltima fila de la primera tabla aparecen los intentos totales por tareas, variable **TotalInt**, y los intentos totales de todos los sujetos en este conjunto de tareas. Igualmente, en la última fila aparecen los intentos mínimos totales por tareas, es decir, el menor número de intentos necesarios para resolver correctamente cada tarea que deberían realizar todos los sujetos que aparecen en la tabla y que no renuncian a realizarla, variable **IntMin**, así como el total de éstos intentos correctos, ya que los primeros totales incluyen

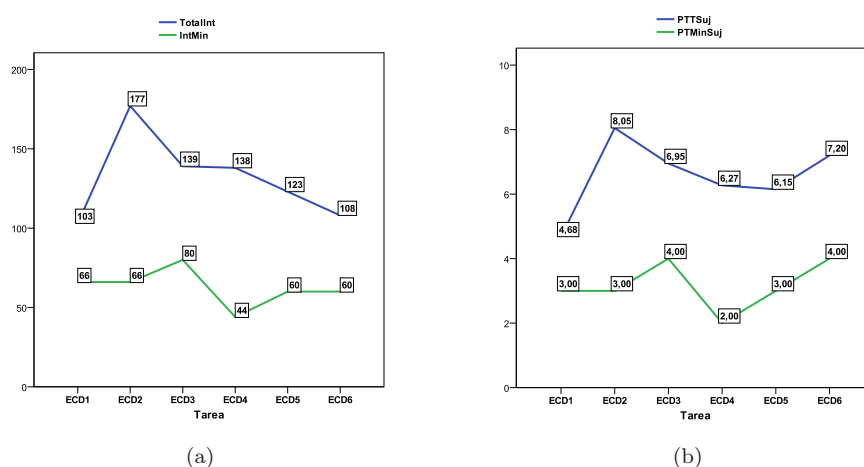


Fig. 5.49. Intentos en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Intentos totales e Intentos Mínimos totales. (b) Promedios de intentos según el número de sujetos que las realizan e Intentos Mínimos por tarea.

tanto los intentos correctos como los erróneos. Por otra parte, en la penúltima fila de la segunda tabla aparecen los promedios correspondientes según los sujetos que las realizan, variable **PTTSuj**, y la suma de dichos promedios para el conjunto de tareas; en la última fila aparecen los intentos mínimos por tareas, es decir, el menor número de intentos necesarios para resolver correctamente cada tarea que debería realizar cualquier sujeto de la muestra, variable **PTMSuj**, así como el total de éstos.

Al igual que en el apartado anterior, y por los mismos motivos, se han excluido de estas tablas los resultados de los sujetos 3AM4, 4A1 y 4AM4.

Con los datos de ambas se obtienen los gráficos 5.49, observándose una notable semejanza entre éstos y los correspondiente a los tiempos totales por tareas, figura 5.46; lo que resulta natural ya que, normalmente, el aumento o disminución de los intentos conlleva mayor o menor cantidad de tiempo, siendo la correlación lineal de los intentos totales por tareas, variable **TotalInt**, con los tiempos totales correspondientes, variable **TotalTT**, igual a 0,847 con significación 0,042 al 95 %.

Por otra parte, los intentos erróneos se obtienen por simple diferencia entre los totales y los mínimos para cada tarea, por tanto, de los datos recogidos en los gráficos anteriores resulta que los intentos erróneos por tareas, de la primera a la sexta, son 37, 111, 59, 94, 63 y 48 respectivamente y que los promedios respectivos son 1,68, 5,05, 2,95, 4,27, 3,15 y 3,20. Es claro que los máximos se presentan en las tareas segunda, en la que aparece por primera



vez la pieza sobrante, y cuarta, que es la inicial del segundo subconjunto. Por tanto, de acuerdo con los resultados del apartado anterior, se observa que los sujetos realizan más intentos erróneos en aquellas tareas que presentan elementos nuevos e inesperados que en otras de igual o mayor dificultad pero que son más parecidas a las ya realizadas y que no los incorporan, aún cuando se observa una tendencia al aumento de los intentos erróneos con la dificultad de las tareas en cada subconjunto.

La evolución con la edad del número total de intentos por sujeto se resume en los gráficos de la figura 5.50.

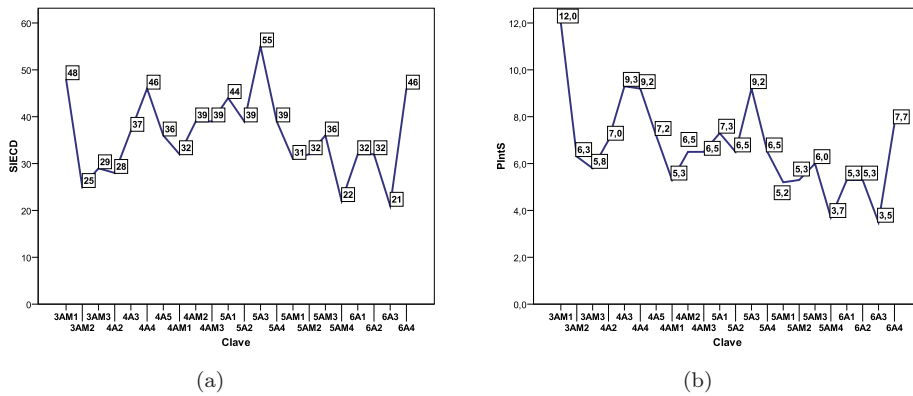


Fig. 5.50. Intentos de los sujetos en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) Intentos totales. (b) Promedios de los intentos totales según el número de tareas que realizan.

El análisis coincide con el correspondiente a los tiempos totales por sujeto: las oscilaciones más bruscas ocurren solo para determinados sujetos en los grupos de edad; observándose, especialmente para los promedios, una tendencia clara a su disminución con la edad. Se observa también que los números de intentos de 14 de los 22 sujetos (el 63,6%) se hallan en el intervalo de 28 a 40, que solamente 5 sujetos (el 22,7%) superan los 40 intentos y que solo 3 sujetos (el 13,6%) quedan por debajo de los 28; situándose la media del grupo en 35,8 intentos y en 19 los intentos mínimos por sujeto. Para los promedios por sujetos y tareas, 15 sujetos (el 68%) se hallan en el intervalo de 5 a 7,5 intentos por tarea, 5 sujetos (el 23%) superan 7,5 intentos y 2 (el 9%) se hallan por debajo de los 5 intentos; en este caso, el valor medio se halla en 6,5 intentos y el de intentos mínimos en 3,2 intentos por tarea.

Se observa que las correlaciones de la variable **SIECD**, intentos totales por sujeto, con las valoraciones y tiempos totales correspondientes, variables

**SECD** y **STECD**, no son significativas; sin embargo, lo son las correlaciones entre los promedios de las valoraciones de los sujetos según el número de tareas que realizan, variable **PIntS**, y las valoraciones y niveles correspondientes, variables **SECD** y **NivelCD**, con valores respectivos  $-0,658$  con significación  $0,001$  al  $99\%$  y  $-0,526$  con significación  $0,012$  al  $95\%$ . Esto indica cierto grado de correlación lineal entre el aumento de dichos promedios y la disminución en las valoraciones y niveles individuales.

Los números de intentos medios en las seis tareas por grupos de edad se resumen en los gráficos de la figura 5.51.

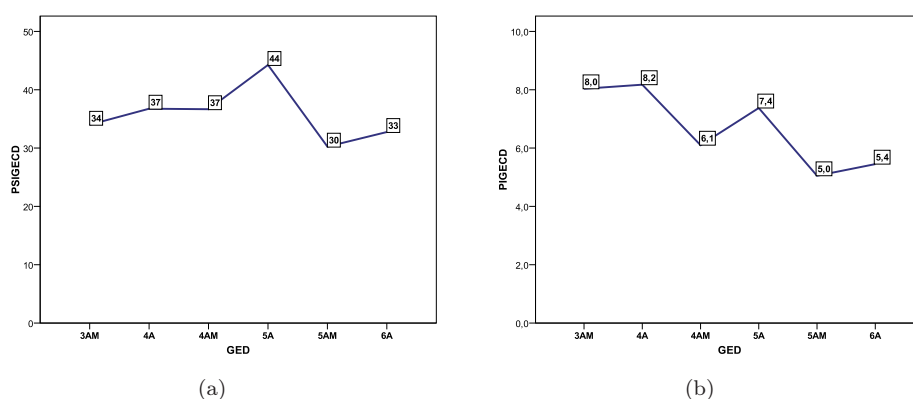


Fig. 5.51. Medias de los intentos por grupos de edad en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (a) De los Intentos totales. (b) De los promedios de intentos según el número de tareas que realizan los sujetos.

El primer gráfico muestra bastante homogeneidad en las medias para los tres primeros grupos de edad y una clara tendencia a la disminución de dichas medias para los tres grupos de edad superior, lo que indica la necesidad de mejorar el registro de la información y aumentar el tamaño de la muestra.

El segundo gráfico muestra con mayor claridad la tendencia global decreciente de dichos promedios con la edad, tendencia que no es uniforme observándose oscilaciones que pueden ser aleatorias y que indican de nuevo que es necesario mejorar el registro de la información.

Por otra parte, la correlación entre las medias de intentos totales por grupos de edad y las valoraciones medias correspondientes no resulta significativa, pero sí lo es la de los promedios de intentos según el número de tareas que realizan los sujetos por grupos de edad y las correspondientes valoraciones medias, variables **PGECD** y **PIGECD**, arrojando el valor  $-0,870$  con significación  $0,024$  al  $95\%$ , lo que indica un alto grado de dependencia lineal inversa entre ambas variables.

#### 5.10.4.1 Conclusiones

Sintetizando, las conclusiones son:

- 1<sup>a</sup>. A nivel de tareas se observa gran semejanza entre los intentos totales y sus promedios y los correspondientes valores temporales, existiendo entre los totales respectivos una correlación positiva igual a 0,847 con significación 0,042 al 95%.
- 2<sup>a</sup>. Se observa, en consonancia con los resultados temporales, que los sujetos realizan más intentos erróneos en aquellas tareas que presentan elementos nuevos e inesperados que en otras de igual o mayor dificultad pero que no incorporan tales elementos, aún cuando se observa una tendencia al aumento de los intentos erróneos con la dificultad de las tareas en cada subconjunto.
- 3<sup>a</sup>. Las oscilaciones más bruscas en los intentos ocurren solo para sujetos puntuales y determinados en los grupos de edad; observándose, especialmente para los promedios, una tendencia clara a su disminución al aumentar la edad.
- 4<sup>a</sup>. El 63,6% de los sujetos tienen entre 28 y 40 intentos, el 22,7% superan los 40 intentos y el 13,6% quedan por debajo de los 28, situándose la media del grupo en 35,8 intentos y en 19 los intentos mínimos por sujeto. Para los promedios por sujetos y tareas el 68% se hallan en el intervalo de 5 a 7,5 intentos por tarea, el 23% superan 7,5 intentos y el 9% tienen menos de 5; en este caso, el valor medio se halla en 6,5 intentos y el de intentos mínimos en 3,2 intentos por tarea.
- 5<sup>a</sup>. Las correlaciones de los intentos totales por sujeto con las valoraciones y tiempos totales correspondientes no son significativas, mientras que sí lo son las correlaciones entre los promedios de las valoraciones de los sujetos según el número de tareas que realizan y las valoraciones y niveles correspondientes, lo que indica cierto grado de correlación lineal entre el aumento de dichos promedios y la disminución en las valoraciones y niveles individuales.
- 6<sup>a</sup>. La ausencia de correlaciones significativas entre los intentos y los valores temporales de los sujetos podría indicar que no sólo dedican el tiempo a realizar más intentos, sino que también lo dedican a la observación, a la acomodación y al análisis de las tareas.
- 7<sup>a</sup>. Se observa una tendencia global decreciente de los promedios de intentos según el número de tareas que realizan los sujetos al aumentar la edad; dicha tendencia no es uniforme, observándose oscilaciones que pudieran ser aleatorias y que indican de nuevo la necesidad de

mejorar el registro de la información así como de aumentar el tamaño de la muestra en estudios posteriores.

- 8<sup>a</sup>. Se ha encontrado una correlación lineal negativa y significativa, con valor igual a  $-0,870$  y significación  $0,024$  al  $95\%$ , entre los promedios de intentos según el número de tareas que realizan los sujetos por grupos de edad y las correspondientes valoraciones medias, lo que indica un alto grado de dependencia lineal entre ambas variables.

### 5.11 Estudio comparativo de las tareas

En las tablas A.29, A.30 y A.31 se recogen, respectivamente, las medias de las valoraciones por grupos de edad, las valoraciones totales de los respuestas de los sujetos y los niveles asignados a dichas respuestas en los cuatro conjuntos de tareas\*. Además, en el gráfico A.16 se recogen las distribuciones de las medias de las valoraciones por grupos de edad y en la tabla A.32 las correlaciones de Pearson entre resultados de los cuatro conjuntos de tareas<sup>†</sup>.

Del análisis de los resultados se concluye que, salvo en el caso de las tareas de etiquetaje, se produce un ajuste notable de los demás conjuntos de tareas al modelo evolutivo propuesto, con la única salvedad de algunos sujetos concretos que pueden mostrar leves variaciones y los del grupo de cinco años y medio en las tareas de orden con cantidades discretas. Los gráficos de la figura 5.52 muestran la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad.

Como se observa en dichos gráficos, el único conjunto de resultados cuyas medias no se ajustan al modelo evolutivo propuesto corresponde al conjunto de tareas de etiquetaje, línea azul claro del gráfico 5.52(a), mostrando el gráfico 5.52(b) la evolución y grado de acuerdo de las medias de los resultados de los demás conjuntos con el modelo propuesto. Es evidente que la evolución de las competencias en etiquetaje es más rápida a partir de los cuatro años que la de las correspondientes a las tareas ordinales, mientras que las de las cantidades continuas y discretas presentan una evolución considerablemente más lenta.

Las conclusiones anteriores, incluida la singularidad del etiquetaje, se muestran también en los gráficos de las figuras 5.53 y 5.54.

En el gráfico 5.53(a) se observa que las modas<sup>‡</sup> de los niveles de los sujetos

\*En relación con este estudio véase, en la sección 5.3.1 de este capítulo, página 162 y siguientes, el modelo evolutivo de competencias ordinales propuesto.

<sup>†</sup>Véase la página 659 y siguientes, anexo A

<sup>‡</sup>Nótese que en el cálculo de las modas se toma el menor valor de los niveles si la distribución resulta bimodal. Así, por ejemplo, la distribución NivelCD para los sujetos de seis años es bimodal

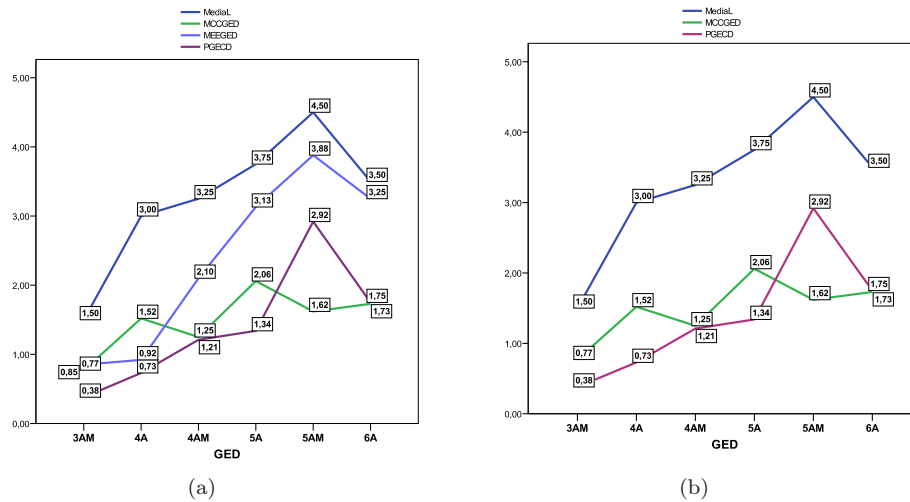


Fig. 5.52. Evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad. Estudio exploratorio. (a) Para los cuatro conjuntos de tareas. (b) Excluyendo el conjunto de tareas de Etiquetaje.

en las tareas de etiquetaje presentan una evolución diferenciada en relación con las correspondientes a las de los niveles en los conjuntos tareas ordinales. En las primeras, el nivel 3 se alcanza de forma estable a los cinco años de edad precedido de una rápida evolución a partir de los tres años y medio. En las demás, como muestra el gráfico 5.53(b), la evolución de los niveles es más lenta y menos estable, aunque adaptándose al modelo evolutivo propuesto y con la salvedad del grupo de cinco años y medio en las tareas de orden con cantidades discretas\*. Esto último es avalado también por la información mostrada en los gráficos de la figura 5.54, en los que se compara la evolución de los niveles medios con la de las valoraciones medias por grupos de edad en los tres conjuntos de tareas ordinales excluyendo el etiquetaje.

En el gráfico 5.54(a) se confirma la mayor dificultad global de las tareas ordinales con cantidades discretas en relación con las de cantidades continuas y se observa una evolución lenta y muy similar de las capacidades ordinales no verbales relativas a la cantidad continua y discreta, aunque en niveles claramente inferiores a las capacidades ordinales verbales correspondientes a las tareas de orden lineal en todos los grupos de edad. Esto vuelve a confirmar

con valores 1 y 2 tomándose y representándose el valor 1 como moda. Para los mismos sujetos la distribución NivelL es también bimodal con valores 2 y 3, tomándose como moda el valor 2 en la representación gráfica.

\*Véase también la figura A.16 en la página 662, anexo A, que confirma las mismas conclusiones referidas, esta vez, a las distribuciones de las medias de las valoraciones por grupos de edad.

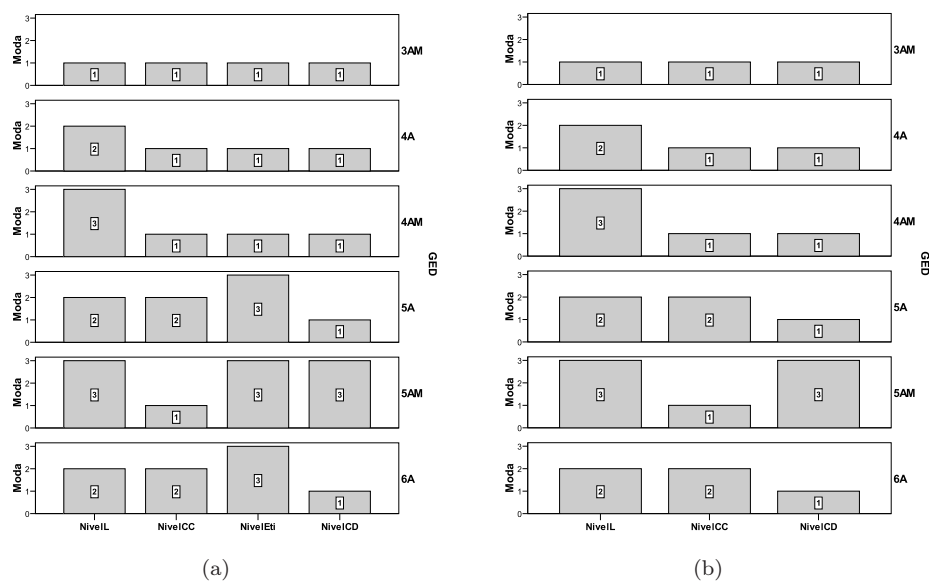


Fig. 5.53. Distribuciones de las modas de los niveles por grupos de edad. Estudio exploratorio. (a) Para los cuatro conjuntos de tareas. (b) Excluyendo el conjunto de tareas de Etiquetaje.

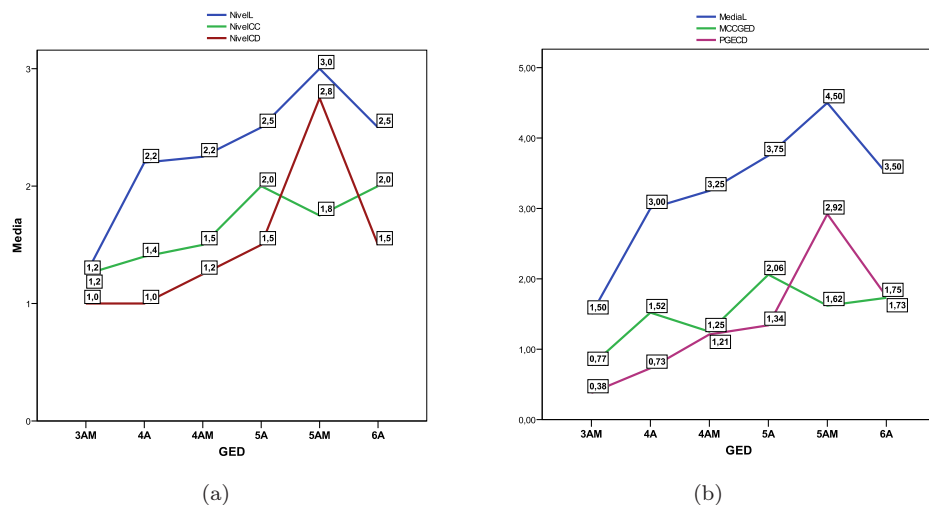


Fig. 5.54. Evolución de los valores medios por grupos de edad excluyendo Etiquetaje. Estudio exploratorio. (a) Niveles medios. (b) Valoraciones medias.

la bondad del modelo evolutivo propuesto para los valores medios de estos tres conjuntos de tareas.

La singularidad observada en las tareas de etiquetaje pone de manifiesto

las diferentes capacidades y competencias utilizadas por los sujetos en las tareas de dicho conjunto frente a las correspondientes a los tres conjuntos de tareas ordinales; en el caso del etiquetaje, las alternancias presentes apuntan al reconocimiento de patrones recursivos y a la recursividad\* en la resolución más que al mero etiquetaje o a la utilización de los conceptos ordinales en que se basan los otros tres conjuntos de tareas. Es decir que posiblemente dicha singularidad *viene a distinguir las capacidades recursivas de las propiamente ordinales, resultando de suma importancia indagar en estudios posteriores sobre dichos conceptos y sus relaciones, tanto desde el punto de vista matemático como desde el papel que juegan el orden y la recursividad en la formación de las ideas de cantidad y número en los sujetos.*

Por otra parte, las correlaciones de la edad con las valoraciones de los sujetos, con las medias de las valoraciones por grupos de edad y con los niveles de los sujetos y de ellas entre sí son, en ocasiones, elevadas y altamente significativas, como muestra la tabla A.32. Sin embargo, como se ha visto, el análisis de las respuestas de los cuatro conjuntos de tareas y los gráficos anteriores apuntan a modelos no lineales de evolución con la edad de todas estas competencias, aspecto importante que debe aclararse también en estudios posteriores.

Finalmente, con ayuda de los datos de la tabla A.31 y de la figura 5.53, se obtiene el cuadro evolutivo siguiente relativo a las frecuencias de los niveles\*:

- Los sujetos de **tres años y medio** se hallan, por regla general, en el primer nivel de competencias en los cuatro aspectos estudiados. Aisladamente, algún sujeto puede alcanzar el nivel 2 en orden lineal, orden con cantidades continuas o etiquetaje, de manera que estos niveles aparecen por primera vez a esta edad, aunque son muy infrecuentes. Solo uno de los cuatro sujetos de este grupo de edad se halla en el nivel 2 de orden con cantidades continuas y en nivel 1 de orden lineal.
- Los sujetos de **cuatro años** se hallan en el nivel 2 en orden lineal y en el nivel 1 en las demás competencias. Aisladamente algún sujeto puede alcanzar el nivel 2 en orden con cantidades continuas o etiquetaje; el nivel 3 en orden lineal aparece por primera vez a esta edad, lo que ocurre para un solo sujeto. Ninguno de los sujetos presentan niveles

\*Véase la descripción y análisis de estas tareas en la sección 5.5.5.2, página 189 y ss., así como las conclusiones del análisis de las respuestas en la sección 5.9.2.3, página 246 y ss., especialmente las conclusiones 4<sup>a</sup> y 11<sup>a</sup>.

\*Véase la caracterización y descripción de los niveles en la páginas: 205, orden lineal; 228, orden con cantidades continuas; 243, etiquetaje; 271, orden con cantidades discretas.

mayores en orden con cantidades continuas o en etiquetaje que el que muestran en orden lineal, es decir que este nivel es superior o igual a los anteriores.

- Los sujetos de **cuatro años y medio** se hallan en el nivel 3 en orden lineal y en el nivel 1 en las demás competencias. Por primera vez aparece el nivel 3 en orden con cantidades continuas y en etiquetaje y el nivel 2 en orden con cantidades discretas, lo que sucede en el caso de un sujeto con nivel 1 en el orden lineal, lo que es interesante para el diagnóstico de posibles déficits de tipo verbal.
- Los sujetos de **cinco años** se hallan en el nivel 2 o 3 del orden lineal, en el nivel 2 en las tareas de orden con cantidades continuas, en el nivel 3 de etiquetaje y en el nivel 1 en orden con cantidades discretas. Igualmente, aparece por primera vez el nivel 3 en orden con cantidades discretas. A partir de esta edad comienzan a aparecer con mayor frecuencia los niveles superiores salvo en las tareas de orden con cantidades discretas.
- Los sujetos de **cinco años y medio** se hallan con mayor frecuencia en el nivel 3, es decir, en nivel superior de competencias en tres de los cuatro aspectos. Para la muestra elegida los niveles en orden con cantidades continuas obtenidos por los sujetos varían del primero al tercero y con mayor frecuencia aparece el nivel 1, es decir que se observa una gran inestabilidad en el estado de esta competencia a esta edad, no obstante se observa con mayor frecuencia el nivel 3 en orden con cantidades discretas en cuyas tareas (segundo subconjunto) pueden haber aplicado criterios ordinales correspondientes a la cantidad continua aprovechando la experiencia adquirida. Por tanto, quizá los niveles más frecuente en orden con cantidades continuas y discretas hayan resultado excesivamente bajo y alto respectivamente desde el punto de vista estadístico. Quizá a esta edad los niveles más frecuentes pudieran ser: 3 en orden lineal, 2 o 3 en orden con cantidades continuas, 3 en etiquetaje y 2 en orden con cantidades discretas. Conjetura que debe resolverse en estudios posteriores.
- Los sujetos de **seis años** se hallan en los niveles 2 o 3 en orden lineal, en el nivel 2 en orden con cantidades continuas, en el nivel 3 de etiquetaje y en los niveles 1 o 2 en orden con cantidades discretas. La modesta evolución de este grupo en relación con el de cinco años, solo apreciable en orden con cantidades discretas, y el empeoramiento en la anterior y en orden lineal en relación con el de cinco años y medio



indican que los niveles alcanzado por los sujetos, no se consolidan con la edad, es decir que su evolución con la misma puede ser no lineal. Lo que, a su vez, pudiera indicar la existencia de competencias no desarrolladas o insuficientemente desarrolladas y que no se consolidan al avanzar la edad. Situación que pudiera tener una enorme repercusión negativa en aprendizaje de la cantidad, del número y de la aritmética.

La tabla 5.17 resume la evolución observada de los niveles en los cuatro conjuntos de tareas, mostrando las edades en las que aparecen por primera vez (tabla 5.17(a)) así como las edades en las que se observan con mayor frecuencia las competencias correspondientes (tabla 5.17(b)).

Resaltamos que el nivel 3 en cantidades continuas y el nivel 2 en etiquetaje no llegan a hacerse mayoritarios en ningún grupo de edad, lo que sugiere una vez más la necesidad de mejorar el registro de la información en las tareas de orden con cantidades continuas y la rápida evolución observada en el llamado etiquetaje entre los niveles 1 y 3, que puede hacer que el 2 sea transitorio.

Resaltamos también que el nivel 1 en orden lineal deja de observarse a partir de los cuatro años y medio pero que todos los demás niveles en ésta y en las demás tareas pueden observarse incluso en sujetos de seis años, lo que indica su persistencia y avala lo indicado con anterioridad para ese grupo de edad.

## 5.12 Conclusiones del estudio exploratorio

Hemos agrupado en los distintos apartados que se exponen a continuación las principales conclusiones que se pueden extraer del estudio realizado.

### En relación con los objetivos del estudio:

- 1<sup>a</sup>. Se ha construido un instrumento multimedia base, formado por 26 ítems o tareas, para evaluar el estado de las cuatro competencias determinadas por el modelo evolutivo propuesto para niños de 3 a 6 años.
- 2<sup>a</sup>. Se ha utilizado una metodología, basada en la entrevista individual a una muestra formada por 25 sujetos, mediante la que:
  - Se ha obtenido evidencia empírica sobre las competencias contempladas en el modelo evolutivo y se ha obtenido información esencial para su modificación y ajuste.

(a)

Competencia	Nivel	Grupo de Edad					
		3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A
O. Lineal	1	A					
	2	A					
	3		A				
O. C. Cont.	1	A					
	2	A					
	3			A			
Etiquetaje	1	A					
	2	A					
	3			A			
O. C. Disc.	1	A					
	2			A			
	3				A		

(b)

Competencia	Nivel	Grupo de Edad					
		3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A
O. Lineal	1	M					
	2		M				
	3			M			
O. C. Cont.	1			M			
	2				M		
	3						
Etiquetaje	1			M			
	2						
	3				M		
O. C. Disc.	1				M		
	2						M
	3					M	

Tabla 5.17. Evolución de los tres niveles en cada uno de los cuatro conjuntos de tareas. Estudio Exploratorio. (a) Edades en las que aparecen por primera vez; (b) Edades a las que se hacen más frecuentes.

- Se ha comprobado el grado de adecuación de las tareas multimedia construídas, tanto desde el punto de vista de los sujetos como de la implementación del instrumento, y se ha obtenido la información necesaria para su selección, modificación y optimización.
- Se ha comprobado la viabilidad, validez y fiabilidad de

la recogida y almacenamiento automáticos de los datos empíricos para su proceso y análisis posterior.

- Se ha conseguido minimizar la interacción investigador–sujeto y maximizar la objetividad de los datos recogidos.

3<sup>a</sup>. Se han analizado los datos obtenidos y se han extraído los resultados y conclusiones pertinentes.

4<sup>a</sup>. Se ha recogido la información relevante y útil para la realización de estudios posteriores.

En definitiva, podemos decir que se han alcanzado los objetivos propuestos.

### **En relación con la metodología:**

1<sup>a</sup>. El estudio realizado ha sido de tipo cualitativo, transversal y aplicado a un muestra reducida de sujetos, de acuerdo con su carácter exploratorio. La metodología se considera adecuada y está avalada por numerosos autores.

2<sup>a</sup>. El sistema de entrevistas clínicas individualizadas sobre la base del material multimedia desarrollado constituye una técnicas adecuada para la recogida de la información con sujetos de las edades del estudio, permiten minimizar la interacción investigador–sujeto y maximizar la objetividad de la información recogida.

3<sup>a</sup>. La puesta en práctica del diseño empírico influyó muy positivamente sobre la motivación y la participación de los sujetos en todas las etapas o fases del proceso.

4<sup>a</sup>. La duración de la proyección de secuencias de la película resultó excesiva y podría reducirse a 10 o 15 minutos como máximo dada la limitada capacidad de concentración de los sujetos de menor edad. También podría eliminarse la realización de las actividades manuales complementarias, por observarse que su efecto motivador fue considerablemente menor que el producido por el material audiovisual y el multimedia. Ello contribuiría a simplificar las dos primeras etapas del estudio empírico.

5<sup>a</sup>. En la segunda etapa es de destacar el efecto positivo de la presentación pública de las tareas iniciales en la que los sujetos participaron en presencia de los demás.

- 6<sup>a</sup>. En la tercera etapa, de realización de las tareas iniciales para la selección de la muestra, no deben participar más de 6 sujetos, para asegurar una atención adecuada por parte del investigador. La duración recomendada para estas sesiones se estima en media hora para los grupos de edad superior y en tres cuartos de hora para los de edad inferior.
- 7<sup>a</sup>. Destacamos la especial importancia de la tercera etapa para los sujetos de tres años y medio\*, ya que a partir de los cuatro años se ha comprobado que, salvo excepciones, los sujetos manejan el ratón sin dificultades; lo que también permite simplificar considerablemente esta compleja etapa.
- 8<sup>a</sup>. La cuarta etapa, correspondiente a la realización de las entrevistas individualizadas, debe realizarse en una sala aislada, con un ambiente agradable, en ausencia de ruido y otras posibles distracciones, de modo que se favorezca la concentración de los sujetos. A dichas entrevistas, además del sujeto y del investigador, podrán acudir los profesores o profesoras del sujeto si así lo desean.
- 9<sup>a</sup>. La intervención del investigador en esta última etapa debe reducirse a aclarar dudas, prestar una ayuda puntual, insistir de modo imparcial en las cuestiones planteadas al sujeto en forma audiovisual, animar a alguno de los sujetos a continuar, y observar y tomar nota de los aspectos considerados relevantes, de modo que se asegure la objetividad e imparcialidad de la información recogida.
- 10<sup>a</sup>. Los intervalos de seis meses de edad considerados son adecuados para el estudio pues, como se ha visto, distinguen capacidades y competencias en los sujetos.
- 11<sup>a</sup>. Se ha comprobado la viabilidad, comodidad y fiabilidad de la recogida y almacenamiento automáticos de la información para su proceso y análisis posterior.

#### **En relación con las tareas y su diseño:**

Además de las conclusiones establecidas en las secciones correspondientes al análisis de resultados y niveles, análisis temporal y número de intentos, indicamos las siguientes:

---

\*Aún cuando se han detectado sujetos de edad inferior que manejan el ratón sin dificultades e incluso sujetos de 3 años y 7 u 8 meses que han realizado todas las tareas iniciales, incluso las de mayor dificultad, no puede asegurarse que *normalmente* un sujeto de tres años y medio utilice un ratón sin dificultad.

- 1<sup>a</sup>. Las tareas iniciales destinadas a la selección de la muestra cumplen adecuadamente su función, contribuyen a la motivación y están bien adaptadas a las características psicoafectivas y psicomotrices de los sujetos. En cuanto a su diseño se concluye que no precisan modificaciones esenciales, salvo quizás aumentar el número de píxels atractivos en determinados huecos para no forzar a los sujetos a la colocación innecesariamente exacta de algunas de las piezas que intervienen.
- 2<sup>a</sup>. Igualmente, los elementos comunes de las tareas propias del estudio: interfaces, elementos de interacción y navegación y diagrama de flujo, se adaptan de manera excelente a las características de los sujetos y no requieren modificaciones esenciales para su utilización posterior.
- 3<sup>a</sup>. En las tareas de orden lineal el dominio mayoritario de los bloques L1A y L2A aconseja estudiar su eliminación en futuros estudios, lo que reduciría el número de ítems de este conjunto, homologándolo a los demás, y acortaría su duración temporal, lo que es importante para que los sujetos puedan alcanzar el último conjunto sin excesiva fatiga.
- 4<sup>a</sup>. Debe modificarse el sistema de registro de la información en los ítems de las tareas de orden con cantidades continuas y discretas, ya que en su estado actual no discrimina intentos cuya distinción afecta esencialmente a sus valoraciones, niveles y resultados y, por tanto, al conocimiento evolutivo de las capacidades y competencias asociadas.
- 5<sup>a</sup>. Es necesario replantear el conjunto de tareas de “etiquetaje” de acuerdo con la singularidad encontrada y con su probable naturaleza recursiva. Alternativamente se pueden diseñar tareas propias de etiquetaje eliminando los componentes recursivos u otras influencias posibles.
- 6<sup>a</sup>. Se ha comprobado que, en general, las tareas están bien adaptadas a las características psicoafectivas y psicomotrices de los sujetos y que distinguen niveles de capacidades y competencias en los mismos, por lo que pueden servir de punto de partida para estudios posteriores.
- 7<sup>a</sup>. Se ha observado que en todas las tareas utilizadas intervienen significativamente formas de comunicación e información no verbales así como diversas “formas de la inteligencia” (Gardner, 1983).

### En relación con el modelo evolutivo propuesto:

- 1<sup>a</sup>. Se ha contrastado que las tareas de etiquetaje presentan una evolución singular respecto a la de las demás competencias estudiadas y no siguen el modelo propuesto. Este hecho puede deberse a la naturaleza más recursiva que propiamente ordinal de este conjunto de tareas, lo que debe aclararse y contrastarse en estudios posteriores.
- 2<sup>a</sup>. Los demás conjuntos de tareas, prescindiendo de los resultados del grupo de cinco años y medio de edad en las tareas de orden con cantidades discretas, siguen con notable precisión las líneas generales del modelo tanto a nivel de resultados medios por grupos de edad como a nivel individual, siguiendo un total de 16 de 21 sujetos, es decir, el 76 % del total. Las desviaciones individuales ofrecen casos particulares para el diagnóstico de posibles disfunciones o retrasos evolutivos.
- 3<sup>a</sup>. Los resultados positivos son indicativos y alentadores, pero no pueden confirmar la validez del modelo parcial para las tres tareas ordinales, que sigue siendo hipotética y queda pendiente para estudios posteriores (ver capítulos 6 y 7 de la presente memoria).

### En relación con la continuación del estudio:

- 1<sup>a</sup>. La parte empírica en estudios posteriores debe aplicarse a una muestra de sujetos de mayor tamaño sin alcanzar las exigencias y los requerimientos necesarios de un estudio cuantitativo y sin salir del ámbito de los estudios cualitativos en muestras relativamente pequeñas. Los nuevos estudios se orientarán a analizar con mayor precisión las tendencias observadas y contrastar las hipótesis mediante análisis estadístico. Un estudio de masas podría ser prematuro en la situación actual de la investigación y podría realizarse en una tercera etapa.
- 2<sup>a</sup>. Como condición previa a la adaptación o modificación del modelo evolutivo en estudios posteriores, se observa la necesidad de realizar una ampliación del análisis epistemológico y fenomenológico del papel del orden y la recursión en la formación de las ideas de cantidad y número, tanto desde el punto de

vista matemático como desde el de la formación de tales ideas en los sujetos\*.

- 3<sup>a</sup>. Es necesario estudiar la interacción ordenador–sujeto y los conceptos e ideas implicados en la tecnología multimedia, tanto desde el punto de vista de su utilización por los sujetos como desde el punto de vista del propio diseño y construcción de los ítems multimedia. El instrumento multimedia y los niveles definidos en este estudio exploratorio sólo deberían modificarse o adaptarse para su utilización rigurosa en estudios posteriores de acuerdo con el modelo evolutivo resultante del estudio mencionado.
- 4<sup>a</sup>. Teniendo en cuenta las numerosas evidencias encontradas debe estudiarse el posible carácter no lineal de los patrones evolutivos con la edad de todas las competencias tratadas y decidir si la no linealidad que sugieren los resultados de este estudio exploratorio es debida al azar o si, por el contrario, es intrínseca a dicha evolución.
- 5<sup>a</sup>. En las tareas de orden con cantidades discretas, en posteriores estudios, sería conveniente incorporar algún procedimiento que permita decidir si los sujetos utilizan estrategias continuas al resolver las tareas del segundo subconjunto, basadas, por ejemplo, en el tamaño o en la longitud, o si, por el contrario, utilizan estrategias discretas.
- 6<sup>a</sup>. Se ha observado que algunos sujetos utilizan espontáneamente el conteo como estrategia al resolver las tareas de orden con cantidades discretas, por lo que en estudios posteriores es importante determinar la aparición y evolución con la edad de esta estrategia poderosa y fundamental.

---

\*Ver el capítulo 2 de la presente memoria.





## 6

# PENSAMIENTO ORDINAL Y TECNOLOGÍA MULTIMEDIA. MARCOS TEÓRICO Y METODOLÓGICO

### 6.1 Introducción

La investigación objeto de la presente tesis doctoral se sustenta en unos principios teóricos que proceden de diversas fuentes. En primer lugar, la revisión y análisis de los antecedentes primarios y secundarios\* del problema de investigación, cuyos resultados y conclusiones se exponen en el capítulo 2 de la memoria; en segundo lugar, de los estudios teóricos específicos desarrollados antes del inicio de la fase empírica de la investigación así como durante el propio desarrollo de dicho proceso, y que se exponen en los capítulos 3 y 4, y del estudio exploratorio que se describe detalladamente en el capítulo 5.

En este capítulo se sintetizan dichos principios y resultados en marcos propios, teórico y metodológico, que abarcan o se refieren a los dos componentes o ámbitos problemáticos que trata esta investigación: un estudio de la evolución de algunos aspectos prenuméricos del Pensamiento Ordinal en escolares de 3 a 7 años y el desarrollo de una nueva metodología multimedia de investigación, adaptada a los sujetos de dichas edades, que haga posible llevar a cabo con garantías el estudio anterior.

Como veremos a continuación, los resultados y conclusiones de los estudios epistemológico y fenomenológico (capítulo 2), de los antecedentes relativos a las investigaciones cognitivas y neuropsicológicas sobre el aprendizaje del número y a los propios de la línea de investigación (capítulo 3), junto con los resultados al respecto obtenidos en el estudio exploratorio (capítulo 5), permiten establecer un modelo evolutivo de capacidades ordinales y recursivas (MECOR) organizado progresivamente, de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, estructurado en etapas o estados diferentes especificados por su descripción y justificación

---

\*Terminología propia de la metodología de investigación denominada Análisis Didáctico (González, 1998; Gallardo y González (2013))

así como por la progresión de las capacidades correspondientes referidas a un sujeto individual ideal. Este modelo constituye el marco interpretativo de la evolución de las capacidades ordinales y recursivas de los sujetos que vamos a estudiar y permitirá avanzar en el contraste de las hipótesis **H2** y **H6** de la investigación.

Asimismo, los resultados y conclusiones de los estudios de las relaciones entre la tecnología multimedia y los procesos cognitivos, las teorías y principios del aprendizaje multimedia, la interacción ordenador–sujeto (capítulo 4) y las investigaciones neuropsicológicas (capítulo 3), junto con los resultados al respecto obtenidos en el estudio exploratorio (capítulo 5); permiten, a su vez, establecer un modelo general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM), una *Metodología Multimedia* general basada en dicho modelo así como las particularizaciones respectivas a las construcciones de un instrumento multimedia, adaptado al MECOR y a las características psicomotrices y psicoafectivas de los sujetos, y de una metodología adaptada, que lo incorpora, para aplicar en la fase empírica del estudio. Dicha *Metodología Multimedia* se presenta, como conclusión, al final del capítulo. Los diseños y construcciones anteriores permitirán avanzar en el contraste de las hipótesis **H2** a **H6**.

## 6.2 Dualidad de la investigación: Pensamiento ordinal y tecnología multimedia

La presente investigación incluye dos partes claramente diferenciadas y que se sitúan a un mismo nivel por su interés, dificultad y novedad:

- 1<sup>a</sup>. Un estudio de la evolución de algunos aspectos prenuméricos del Pensamiento Ordinal en escolares de 3 a 7 años.
- 2<sup>a</sup>. El desarrollo de una nueva metodología multimedia de investigación, adaptada a los sujetos de dichas edades, que haga posible llevar a cabo el estudio anterior con garantías.

Ambas partes requieren, a nuestro juicio, un marco teórico que permita plantear tareas con sentido para la investigación y viables desde el punto de vista del instrumento metodológico y que facilite la interpretación y evaluación de las respuestas de los sujetos y la comprobación de la pertinencia y eficacia de la propia metodología con la que se desarrolla el estudio. A ello se dedica este capítulo, tomando como fundamentos las conclusiones obtenidas en los cuatro capítulos previos de la memoria.

En relación con la primera parte (apartado 1) y con la definición del marco teórico correspondiente, se han establecido conclusiones correspondientes a dos campos o enfoques diferentes del problema en estudio, aunque estrechamente relacionados: uno matemático y epistemológico y otro psicogenético. Veamos algunos de los aspectos fundamentales de dichos enfoques.

1<sup>a</sup>. Desde el punto de vista matemático y epistemológico,

- Existen varias construcciones del número natural y de su aritmética, como por ejemplo, las basadas en la axiomática NBG o ZF de la teoría de conjuntos o la basada en la axiomática de Bourbaki.
- En las primeras el concepto primario es el concepto de número ordinal, definiéndose los números naturales como los ordinales finitos. La construcción cardinal requiere el concepto previo de número ordinal, haciéndose patente la identidad de los ordinales y de los cardinales finitos. La aritmética básica que se construye es la ordinal\*.
- La segunda toma como concepto primitivo el de número cardinal. No se construyen explícitamente los números ordinales, aunque, al admitir el axioma de elección, equivalente al principio de buena ordenación, se usan implícitamente sus propiedades. La aritmética básica que se construye es la aritmética cardinal. La primacía de esta elección, que arranca desde los mismos orígenes del logicismo, puede haber ocultado la relevancia didáctica de la interpretación ordinal del número natural y de su aritmética así como la insuficiencia de la interpretación cardinal para la didáctica del número natural y de su aritmética.
- En todas las construcciones numéricas y aritméticas las relaciones de orden desempeñan un papel esencial, siendo la recursión<sup>†</sup> la herramienta constructiva y el principio de inducción la principal herramienta demostrativa<sup>‡</sup>. Véase la figura 6.1.

2<sup>a</sup>. Desde el punto de vista psicogenético, los trabajos de Ortiz (1997) y de Fernández (2001) concluyen que los modelos evolutivos son útiles no

\*En la aritmética ordinal la suma de ordinales infinitos es no conmutativa, lo que no sucede en la aritmética cardinal en la que la suma es conmutativa. Sin embargo, ello no afecta en nada a la aritmética natural sino a su generalización transfinita.

<sup>†</sup>Entendemos por función recursiva o algorítmica, en sentido restringido, una función de variable natural (sin el cero) cuyas imágenes se determinan por la acción del *operador siguiente* (o *función sucesor*) un número finito de veces. Véanse Manin y Panchishkin (2005, p. 103 y ss.)

<sup>‡</sup>Véanse de nuevo Manin y Panchishkin (2005, p. 95) y Kneebone (1963, p. 260).

solo como fuentes de tareas destinadas a contrastar las capacidades de los sujetos, sino también como marcos interpretativos de sus acciones y de las capacidades involucradas.

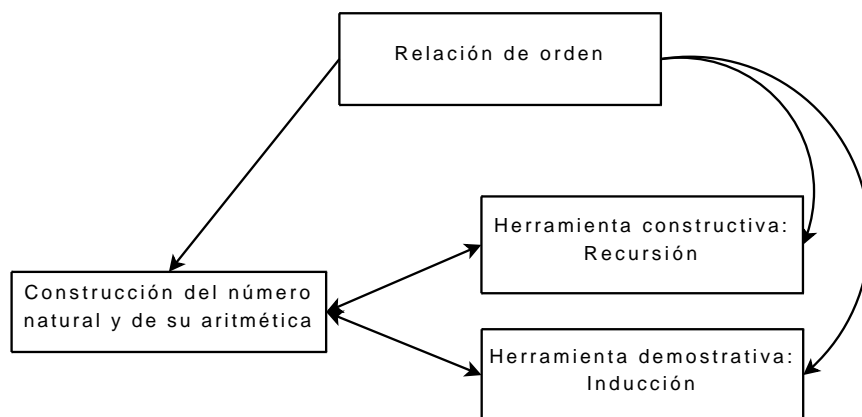


Fig. 6.1. El número natural y su aritmética.

Premisas como las que se acaban de enunciar en los párrafos anteriores han constituido el soporte para la construcción de un modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas que se presenta con detalle más adelante en el apartado 6.3 al que nos remitimos para una mayor información.

En relación con la segunda parte (apartado 2), y también con la definición del marco teórico correspondiente, resaltamos las siguientes conclusiones:

- El término *multimedia* se refiere aquí a un *escenario o entorno virtual creado y ejecutado por un ordenador que incluye todos o algunos de los siguientes componentes multimodales: espacial y visual, lingüístico, audio, y gestual y de movimiento*. Dicho entorno se encuentra dotado, además, de un sistema automático de registro y almacenamiento de la interacción del sujeto con dicho entorno.
- En la interacción sujeto–ordenador asumimos:
  - Los sistemas informáticos actuales son *dispositivos cognitivos* y también *dispositivos de simulación* (Turkle, 1995).
  - Los sistemas informáticos actuales realizan dos clases de funciones: *funciones epistémicas* y *funciones ontológicas* (Brey, 2005).
  - *Funciones epistémicas*: el sistema informático actúa como un dispositivo cognitivo que extiende o complementa las funciones cognitivas humanas.

- *Funciones ontológicas*: el sistema informático simula escenarios o entornos virtuales y proporciona herramientas para utilizar dichos escenarios.
- En relación con las teorías del aprendizaje multimedia:
  - Consideraremos dos aproximaciones (Mayer, 2001): la centrada en el sujeto y la centrada en la tecnología.
  - La primera tiene el propósito de construir tareas con formato de juego en un escenario multimedia adaptadas a las características cognitivas y psicoafectivas de los sujetos.
  - La segunda pretende conseguir registrar la información de la interacción ordenador–sujeto con objetividad y minimizando la interacción investigador–sujeto.
  - Tendremos en cuenta los *principios del aprendizaje multimedia* no como principios de aprendizaje en sí, sino como *principios de diseño multimedia* (Mayer, 2001, 2005a).
- Desde el punto de vista de la neurociencia, no parece posible que la cognición y el aprendizaje puedan desarrollarse adecuadamente mediante el uso del hemisferio cerebral izquierdo exclusivamente sin conexión con el hemisferio derecho\*, lo que puede indicar que en la cognición y en el aprendizaje, además de componentes racionales, intervienen también componentes motivacionales, afectivas y emocionales. Esta conjetura plausible vendría a avalar la validez de los escenarios multimedia como entornos para la investigación en cognición y aprendizaje, dada la suma facilidad que proporciona esta tecnología para la integración de todos esos componentes en tareas o actividades concretas.
- En el estudio exploratorio hemos podido comprobar que el uso de ítems o tareas multimedia permite plantear cuestiones de elevada dificultad con extrema sencillez y naturalidad. El formato de juego y el uso de personajes cercanos y conocidos producen una alta motivación e implicación de los sujetos en la realización de las tareas.

Con ello, los problemas que tenemos planteados y que abordaremos en este capítulo y en el siguiente se sintetizan en la figura 6.2.

Es claro que la resolución del problema multimedia, además del planteamiento del problema ordinal, depende de la construcción del instrumento

---

\*En este sentido, y en relación con el conocimiento matemático, véase una reflexión muy sugerente en Alekseevskij, Vinogradov, y Lygachin (1991, p. 9-14).

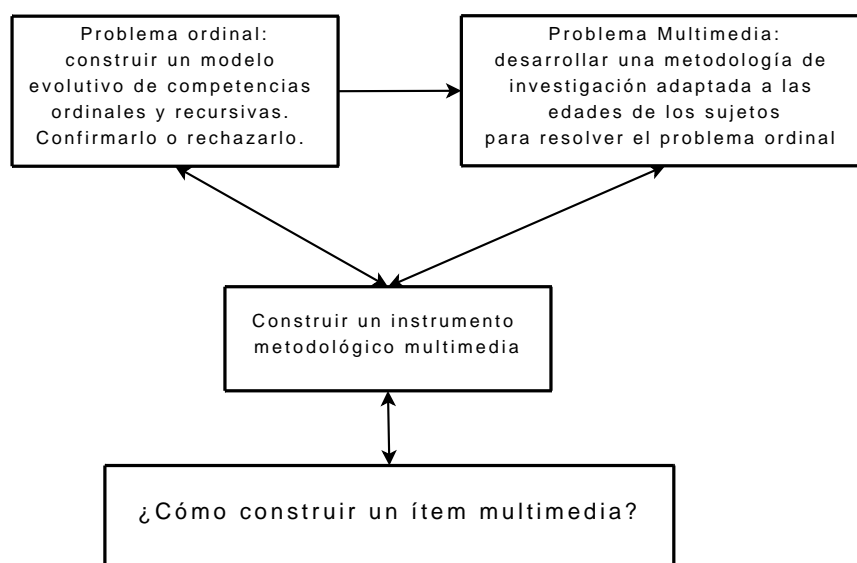


Fig. 6.2. Doble problemática ordinal y multimedia de la presente investigación.

multimedia a utilizar, lo que nos lleva directamente a la cuestión fundamental de cómo diseñar y construir un ítem multimedia. Más adelante nos ocuparemos de la misma y le daremos respuesta mediante un protocolo o modelo general para el diseño y la construcción del ítem multimedia creado en esta investigación.

### 6.3 Modelo evolutivo de capacidades ordinales y recursivas

El estudio de la evolución de las capacidades ordinales, recursivas e inductivas como bases del Pensamiento Numérico es una de las líneas de investigación establecidas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga. *Los fundamentos de este enfoque se sitúan, por un lado, en los estudios del campo de la Psicología Evolutiva y la Epistemología Genética de la escuela piagetiana en torno al desarrollo del pensamiento lógico matemático infantil y, por otro, en las consideraciones teóricas que sitúan la Epistemología y Fenomenología del conocimiento matemático como referencia imprescindible y fundamento para cualquier estudio en el campo de la Educación Matemática.*

Desde el punto de vista del conocimiento matemático se incluye en el capítulo 2 de la memoria el estudio realizado sobre la estructura de orden y su papel en la construcción de los números naturales. La relevancia mate-

mática de tales conceptos es evidente y se pone de manifiesto en Manin y Panchishkin (2005, p. 95):

“Even in the earliest research into the axiomatics of number theory (Peano, Frege) it was established that all the notions empirically thought of as belonging to ENT\* (such as divisibility, primality etc.), functions (the number of divisors, the Euler function  $\phi(n)$ ,  $\pi(x)$ ) and theorems (Fermat’s little theorem, the quadratic reciprocity law etc.) can be respectively constructed by recursion and proved by induction”.

Por otra parte, los antecedentes específicos de la línea de investigación, que se detallan en el capítulo 3, atienden a la faceta evolutiva de las relaciones ordinales y a las características del razonamiento inductivo numérico en escolares de los niveles de Infantil y Primaria. Así, las investigaciones de Ortiz (1997) y de Fernández (2001) se ocupan de estudiar el desarrollo de la inferencia inductiva y el dominio de las destrezas ordinales y recursivas en los sujetos, capacidades que hacen posible el descubrimiento, interpretación y significación de los conocimientos numéricos y aritméticos. El dominio de la inferencia inductiva se sustenta en una capacidad que se manifiesta y desarrolla en un estadio previo al uso de la inducción como herramienta demostrativa de propiedades y relaciones numéricas y constituye un elemento fundamental en el desarrollo de capacidades ordinales y recursivas entre los términos de la secuencia numérica en sujetos de 3 a 6 años de edad.

Dichas investigaciones muestran también la utilidad de los modelos evolutivos, no sólo como fuentes de tareas destinadas a contrastar las capacidades de los sujetos, sino también como marcos interpretativos de las acciones de los mismos. La presente investigación parte, por tanto, de las consideraciones y resultados de los estudios citados para abordar el desarrollo de las capacidades ordinales y recursivas mencionadas en los niveles prenumérico y preinductivo que aún no han sido estudiados; niveles en los que las relaciones ordinales y recursivas se refieren a cantidades y no a números, como se indica en el estudio fenomenológico de las relaciones de orden que se detalla en el capítulo 2 y se menciona en el trabajo de González (1998), de cuya página 184 resaltamos las siguientes conclusiones:

- La separación entre las cantidades (dominio de las experiencias físicas), las medidas elementales y los números (dominio de las matemáticas), aunque formal, conceptual y epistemológicamente correcta, no puede plantearse en términos analíticos en los inicios de la educación del pensamiento numérico. De hecho, a un nivel formal y una vez

\*Acrónimo de Elementary Number Theory.

establecido un concepto métrico, el isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo; pero ello ocurre en un nivel de abstracción superior al del propio proceso de formación de dicho concepto métrico.

- Desde el punto de vista del aprendizaje matemático cabría interpretar, en virtud de los isomorfismos existentes, que debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos comparativos, los conceptos numéricos y los conceptos métricos. Las relaciones entre los tres son muy estrechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás.

Los resultados del estudio en los dos campos mencionados, tal y como se recoge en los capítulos 2 y 3, ponen en evidencia que la recursión, el orden y la inducción juegan un papel esencial en la construcción de las primeras nociones numéricas y en la formación del pensamiento numérico individual, de tal manera que un sujeto con dificultades relacionadas con las competencias ordinales y/o recursivas debe manifestar también dificultades en el establecimiento de relaciones numéricas\* y en la utilización de los algoritmos de la suma, la multiplicación y la división, como de hecho ocurre en el caso del uso efectivo de las tablas de sumar y multiplicar o de los propios algoritmos básicos.

Así pues, teniendo en cuenta los antecedentes específicos mencionados, considerando las conclusiones de los capítulos 2 al 4 y los resultados y conclusiones del estudio exploratorio, cuyos fundamentos, diseño, desarrollo y resultados se exponen con detalle en el capítulo 5, nos proponemos establecer y validar un modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas para el nivel prenumérico que integre, incluya y/o tenga en cuenta los siguientes aspectos:

- El uso progresivo con la edad de relaciones ordinales y recursivas referidas a distintos tipos de cantidades.
- Los tipos de relaciones que se toman en consideración.
- Los ámbitos verbales y no verbales en los que tales relaciones pueden darse en la práctica.
- El uso espontáneo de dichas relaciones en la resolución de problemas en los que no se suministra al sujeto ningún tipo de información ordinal ni recursiva.
- La aplicación de relaciones ordinales, tanto a cantidades continuas

---

\*Lo que coincide plenamente con algunos resultados del trabajo de Fernández (2001). Véase la pág. 120, capítulo 3



como discretas, de manera que se puedan observar y registrar las diferencias y analogías que puedan establecer los sujetos.

- La aparición espontánea del conteo (y la relación de orden implícita) como estrategia de resolución cuando las cantidades que intervienen admiten la doble interpretación continua–discreta.
- Las modificaciones sugeridas por los resultados del estudio exploratorio en relación con el modelo allí expuesto y, en particular, la distinción entre capacidades ordinales y capacidades recursivas así como las posibles relaciones entre ambas.
- La posibilidad de establecer niveles de competencias ordinales y recursivas y de clasificar las respuestas de los sujetos según dichos niveles.
- La evolución de dichas competencias y de sus posibles relaciones al pasar de un nivel a otro.

Al igual que en el estudio exploratorio, se ha optado por considerar que el razonamiento evoluciona de forma progresiva, partiendo de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores. Dicha evolución se estructura en diversas etapas o estados que se caracterizan por las diferentes competencias teóricas que corresponden a un sujeto individual ideal en relación con la progresión de las capacidades analizadas.

El modelo ordinal evolutivo que proponemos se caracteriza por los estados siguientes:

### Estado 1: Orden lineal infralógico

De acuerdo con el análisis de Ortiz y Fernández (*ops. cit.*) sobre los orígenes de la noción de número, el dominio del espacio, al menos parcialmente, es una de las primeras destrezas necesarias para poder establecer comparaciones que permitan determinar las analogías y diferencias precisas para poder ordenar cantidades y abordar el uso de sistemas numéricos posicionales.

Otros autores también consideran el orden lineal espacial como concepto primitivo para la comparación ordinal de números:

“La idea de orden de los puntos sobre una línea recta es una de las nociones geométricas primitivas. Es un modelo matemático de la concepción intuitiva de comparación de números enteros”.  
Dieudonné, J. (1989, p. 194). Cita tomada de Fernández (2001, p. 164).

Asimismo, Dehaene (1997) pone de manifiesto la existencia de una relación profunda entre capacidades numéricas y visuoespaciales y

la tendencia de personas adultas occidentales a representar mentalmente los números naturales en una línea orientada de izquierda a derecha, no como símbolos sino como cantidades analógicas o continuas. El autor pone como ejemplo de la profunda relación entre las capacidades numéricas y las visuoespaciales, el hecho de que niños de diferentes culturas aprendan a contar con los dedos.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, postulamos que el primer soporte intuitivo relativo a la idea general de orden está relacionado con el concepto espacial de línea y, en particular, con el concepto de orden espacio-temporal de un conjunto finito de puntos pertenecientes a una línea. Consideraremos ordenaciones basadas en aspectos eminentemente perceptivos en las que no intervienen las distancias y la línea no tiene porqué ser recta (orden topológico). Este soporte intuitivo se caracteriza por la diferenciación entre los puntos y por la aparición de un lenguaje específico: primero, último, siguiente, anterior, posterior, entre, después, luego.

La diferenciación y el dominio del lenguaje asociado a tales estructuras ordinales topológicas caracterizarán las respuestas de los sujetos capaces de establecer lo que denominamos órdenes lineales infralógicos.

## Estado 2: Orden con cantidades continuas

La ordenación de objetos con independencia de su situación en el espacio exige la comparación de algún atributo directamente perceptible o atribuible a los mismos, como puede ser la longitud, en situaciones de clara diferenciación entre las cantidades que se comparan.

En este segundo estado consideraremos que dicho atributo es una cantidad continua y que el orden se establece por comparación grosera o aproximada de cantidades continuas perceptibles o atribuibles a los objetos que intervienen con independencia de su situación en el espacio; es por ello que se considera este estado más evolucionado que el anterior.

Pero, además, Dehaene (*ibíd.*) manifiesta que las comparaciones y las estimaciones de cantidades parecen ser independientes del lenguaje, a diferencia de algunas técnicas aritméticas relacionadas con el aprendizaje y uso de las tablas de multiplicar, que se codifican\* verbalmente.

---

\*Desde el punto de vista de la representación mental.

Por tanto, trataremos el orden en este estado haciendo intervenir las relaciones lógicas duales asociadas a los términos: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*, referidas a la comparación no verbal de cantidades lineales sin la intervención de aspectos numéricos.

Las respuestas propias de este estado quedarán caracterizadas mediante la capacidad para ordenar objetos por cantidades continuas no numéricas, para lo que utilizaremos la longitud por su mayor simplicidad.

### Estado 3: Orden orden con cantidades discretas

Con independencia de la situación de los objetos en el espacio, la intervención de cantidades discretas en colecciones de objetos separados abre una nueva posibilidad en relación con la ordenación. En este caso, la ordenación puede realizarse por comparación grosera de atributos: numerosidad, tamaño, compensación o subitizing, o mediante el establecimiento de correspondencias seriales que conserven el orden inducido por el uso del conteo\*, incluyendo la interpretación cardinal de la cantidad o del número natural (acumulatividad en el conteo).

La variedad de estrategias aplicables para conseguir la ordenación y, en particular, la aparición espontánea del conteo como estrategia ordinal en los sujetos, incluyendo o no la interpretación cardinal, distingue este estado más evolucionado que el anterior. En este caso, el orden se refiere ya a aspectos protonuméricos, haciendo intervenir las relaciones lógicas: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*. Se tendrá en consideración la posibilidad de que el sujeto establezca órdenes utilizando distintas representaciones de cantidades discretas, incluyéndose mecanismos para observar la influencia de distintas colocaciones o constelaciones de objetos en su identificación y ordenación posterior, y si los sujetos distinguen o no cantidades que pueden interpretarse como discretas o como continuas, así como los criterios elegidos para su ordenación según la edad.

Las respuestas propias de este estado quedarán caracterizadas por la posibilidad de establecer órdenes utilizando distintas representaciones de cantidades discretas.

---

\*Contar es establecer una correspondencia biunívoca, que conserva el orden, entre un subconjunto natural y cualquier otro conjunto de objetos.

## Estado Recursivo

La evolución de los sujetos en este estado se determinará por el grado de reconocimiento, localización y diferenciación de ciertos elementos distinguidos colocados recursivamente en un determinado contexto que será progresivamente más complejo. Los sujetos quedan caracterizados en este estado por el grado de reconocimiento mencionado.

Los niveles elementales que organiza este estado estarán ligados al reconocimiento de patrones, por lo que no es necesario, ni se presupone, que los sujetos tengan conocimientos numéricos, aún cuando podrán aplicarlos si disponen de ellos.

La recursión se plantea mediante alternancias cíclicas, progresivamente más complejas, basadas en la estructura de seriación de Piaget\*; tales alternancias, de modo evidente, admiten definiciones propiamente recursivas sobre los conjuntos finitos a utilizar o prolongándolos idealmente *ad infinitum*.

El sujeto puede hacer referencias ordinales para determinar un lugar o un término de una colección recursiva: *el primero, el último, el siguiente a, el anterior a, el que está antes que, el que está después que*, ya que tales colecciones heredan el orden impuesto por la función que las define.

### 6.4 Modelo general para el diseño del ítem multimedia

De acuerdo con el planteamiento y las conclusiones del estudio exploratorio, el diseño del ítem multimedia ha sido objeto de un profundo estudio. De él depende, de modo esencial, la realización de un instrumento multimedia adaptado a las necesidades de la investigación, a las características de los sujetos que intervienen y a la metodología a aplicar. Como resultado de dicho estudio se presenta en este apartado el modelo general utilizado para dicho diseño<sup>†</sup>.

El proceso de diseño, conformación o configuración de cada uno de los ítems o tareas que forman parte del instrumento de recogida de datos se divide en dos fases: fase de fundamentación y fase de construcción que incluye, a su vez, tanto la preparación como la programación o construc-

\*Véase la sección 2.2.3.2, pág. 71, del capítulo 2

<sup>†</sup>Nótese que no se trata del diseño de un juego multimedia ordinario cuyo propósito puede ser exclusivamente lúdico, aunque podría adaptarse de modo evidente para su aplicación al mismo, sino del diseño de un ítem o tarea cuyo propósito, además de lúdico, es registrar la mayor parte de la interacción relevante del sujeto con el entorno en relación con la cuestión que se le plantea.

ción propiamente dicha. La primera fase o de fundamentación se ocupa del planteamiento teórico del ítem, mientras que la segunda, de construcción, se refiere a la realización o implementación del mismo mediante el correspondiente software de autoría multimedia.

Cada una de las fases presenta una estructura que se esquematiza en la figura 6.3 y cuya justificación se halla en las conclusiones anteriormente expuestas y en las que se incluyen en los capítulos anteriores. En particular, las funciones epistémica, ontológica y onto-epistémica, que intervienen en la primera fase, fueron redefinidas concretamente para la presente investigación en la página 133, sección 4.3, capítulo 4. Y los *principios del aprendizaje multimedia*, que intervienen en la segunda, se introdujeron en la página 152, sección 4.5.2, del mismo capítulo. A continuación detallamos ambas fases.

#### Fase de fundamentación del ítem.

El objetivo de esta fase consiste en la determinación de la función onto-epistémica de la tarea en el aspecto de su interacción con el sujeto.

Los datos de partida son, además de las funciones epistémica y ontológica\*, el intervalo de edad y las características cognitivas y psicomotrices de la muestra de sujetos a los que va dirigida la tarea.

Veamos en detalle los principales aspectos que configuran cada uno de los elementos que fundamentan los ítems del estudio que nos proponemos desarrollar.

**Características de los sujetos.** La edad de los sujetos, su situación en relación con las conceptos o conocimientos a observar y sus capacidades cinestésicas: disponibilidad de las acciones *hacer clic* y *arrastrar y soltar*, son datos fundamentales de partida.

**Función epistémica.** La *función epistémica*, cuya evaluación (mediante la función onto-epistémica) es el objetivo principal del ítem, debe ser conocida. Estará determinada por el concepto o los conceptos concretos cuya disponibilidad se desee observar o investigar en los sujetos.

**Representaciones.** La determinación de la representación<sup>†</sup>, descriptiva, icónica o ambas, que queramos darle a la función ontológica así como el grado en el que deban participar ambas, es previa a la determinación de dicha función ontológica,

\*Véase la sección 4.3, página 133, capítulo 4.

<sup>†</sup>Véase la sección 4.4.3, pág. 146 y siguientes, del Capítulo III, o también Schnotz (2005) para más detalles.

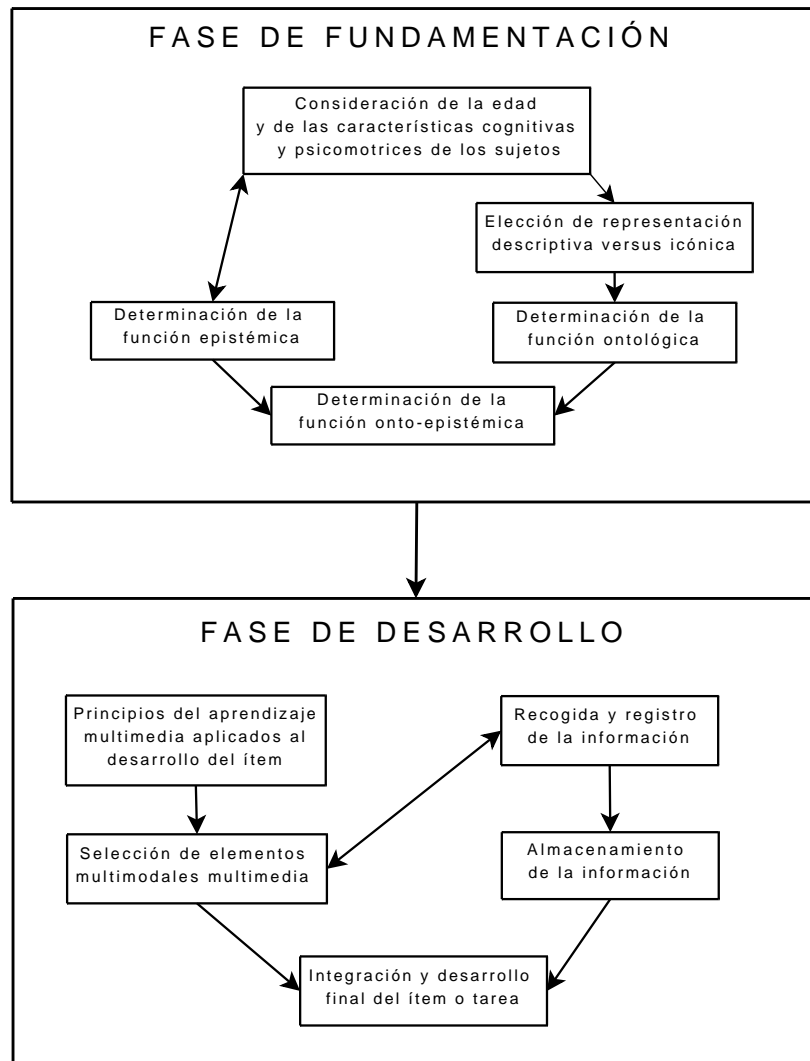


Fig. 6.3. Modelo general para el diseño del ítem multimedia.

teniéndose en cuenta que en las icónicas la nueva información deducida se extrae directamente de la representación, mientras que las representaciones descriptivas y/o verbales requieren no solo más competencias básicas por parte del sujeto, sino, además, su correcta coordinación.

**Función ontológica.** Partiendo de la elección anterior, la *función ontológica* se determinará un mediante guión interactivo (p.e. una simulación o un juego), pudiendo incluir componentes afectivo-emocionales destinados a favorecer la motivación y la atención, procurando minimizar la *carga cognitiva extrínseca* (Sweller, 2005) a la que se expone al sujeto.

**Función onto-epistémica.** La conjunción de la función ontológica del ítem (o del conjunto de ítems) con su función epistémica determinará la la función *onto-epistémica* de aquél en forma de situación problemática global que el sujeto debe resolver.

Para cada ítem se realizará una ficha técnica, en la que se detallarán el audio y la interfaz visual e interactiva que intervengan, el objetivo y una breve descripción. En la misma, *se entenderá que las secciones Audio e Interfaz muestran, ya implementada, la función onto-epistémica y que el objetivo define la función epistémica a evaluar mediante la onto-epistémica* (figura 6.4).

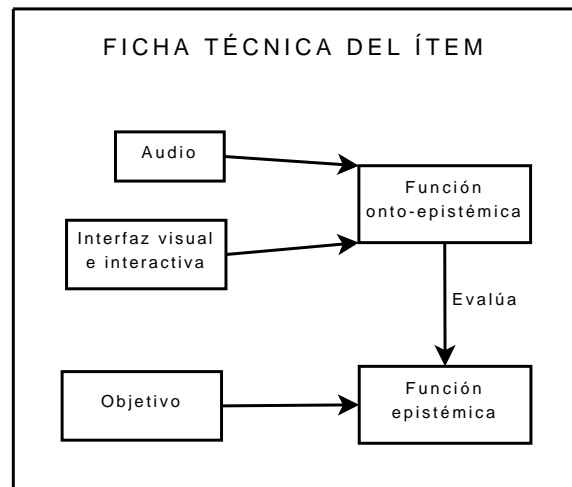


Fig. 6.4. Funciones onto-epistémica y epistémica del ítem.

#### Fase de construcción del ítem.

El objetivo de esta fase es la implementación final del ítem en un soporte informático específico tomando la función onto-epistémica como punto de partida y guía de su construcción práctica.

Los elementos que intervienen en esta fase, en lo que se refiere a la preparación, son los siguientes, :

**Principios constructivos.** Consideramos que los principios del aprendizaje multimedia, Mayer (2005a), son útiles y válidos no solo para la implementación de secuencias de aprendizaje, sino también para la construcción de ítems o tareas que pongan en juego destrezas de naturaleza cognitiva.

Los siguientes principios constructivos pueden aplicarse a la construcción, en general, y a la selección de los elementos multimedia: principios de contigüidad espacial y temporal, de coherencia, de modalidad, de redundancia, de las diferencias individuales y de la atención dividida.

**Elementos multimedia.** Para la selección de los elementos multimedia se tendrá en cuenta tanto la edad como las características psicomotrices de los sujetos, dotando de la mayor ergonomía posible a los objetos gráficos encargados de recoger la información procedente de la interacción de los sujetos con el instrumento, facilitando dicha interacción todo lo posible; y procurando, de nuevo, minimizar la *carga cognitiva extrínseca* a la que se expone al sujeto.

**Registro de la información.** Para cada ítem se programarán y utilizarán registros (variables en programación) asociados a determinados elementos multimedia encargados de recoger la información procedente de la interacción de los sujetos; su determinación vendrá dada por la función onto-epistémica del ítem. Dichos registros tratarán de discriminar en lo posible los intentos nulos o no válidos que se produzcan en dicha interacción.

**Almacenamiento de la información.** El almacenamiento de la información podrá realizarse mediante la escritura del contenido de los registros correspondientes, definidos para cada ítem, en archivos de texto, en bases de datos o, incluso, mediante páginas web conectadas a bases de datos para su análisis posterior. Dichas páginas podrán actuar como soportes de la interfaz de los ítems y actuar, por tanto, como agentes para la recogida de la información.

Tras la preparación descrita queda finalmente la,



**Programación o construcción práctica de ítem.** La construcción práctica se llevará a cabo mediante el programa de autoría multimedia o sistema de programación que se elija.

Los ítems multimedia generados podrán incluir todos o algunos de los elementos multimodales\* enumerados, por canales, en la figura 6.5.

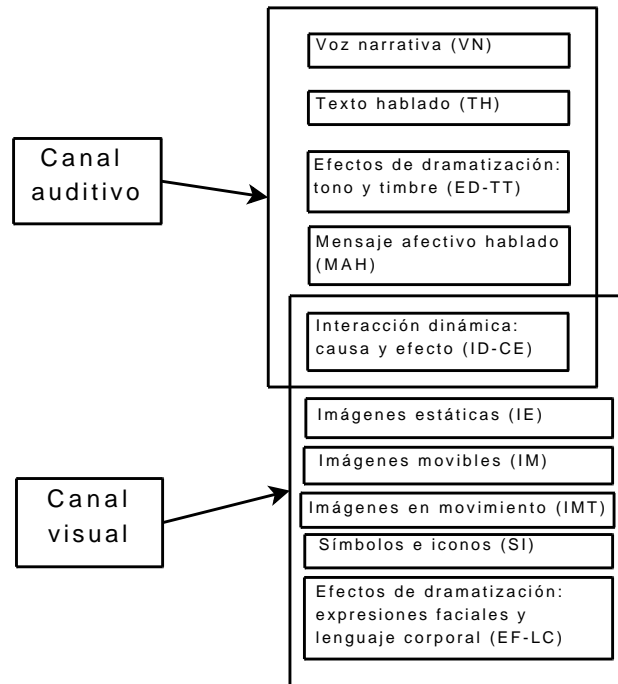


Fig. 6.5. Elementos multimodales multimedia por canales

Para la integración de estos elementos en el desarrollo práctico, mediante el programa de autor o sistema de programación elegido, podrán aplicarse de nuevo los siguientes principios constructivos: de contigüidad espacial y temporal, de coherencia, de modalidad, de redundancia, de las diferencias individuales y de la atención dividida. Véase la sección 4.5.2, pág. 152 y siguientes.

\*Los componentes multimodales multimedia fueron introducidos en la sección 4.2, página 126, del capítulo 4.

### 6.5 Diseño y construcción del instrumento multimedia. Los conjuntos de tareas

Fijados los modelos evolutivo de competencias ordinales y recursivas (MECOR) y el general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM), procede estudiar la construcción de un instrumento multimedia que incorpore la aplicación sistemática del segundo de los modelos mencionados, las correspondientes conclusiones del estudio exploratorio incluyendo las modificaciones y mejoras en las tareas propuestas en dicho estudio y que permita contrastar y validar, en su caso, las correspondientes hipótesis de la investigación.

En consecuencia, en correspondencia con los estados del MECOR, el instrumento incorporará los cuatro conjuntos de ítems o tareas multimedia siguientes:

- Tareas de orden lineal infralógico.
- Tareas ordinales con cantidades continuas.
- Tareas ordinales con cantidades discretas.
- Tareas recursivas basadas en alternancias cíclicas.

Por otra parte, de acuerdo con las conclusiones del estudio exploratorio, se mantiene en la implementación del instrumento la estructura descrita en la sección 5.5.2, página 175 y siguientes, del capítulo 5, para las interfaces de los conjuntos de tareas, lo que significa que cada ítem incluirá una primera ventana de introducción al conjunto o ventana de planteamiento, otra ventana de solución a la cuestión planteada y una ventana final del conjunto. Los elementos multimodales se integran en cada parte de acuerdo con lo indicado en el esquema de la figura 6.6\*.

La ventana final de cada conjunto se reservará para uso del investigador. Desde ella es posible reiniciar el conjunto (volver a la ventana de introducción), seleccionar una tarea concreta para su realización o almacenar los datos recogidos por el conjunto de tareas<sup>†</sup>.

Al igual que en el estudio exploratorio, de acuerdo con sus conclusiones, para cada conjunto de tareas se incluirán ítems introductorios, cuyo papel, contenido y formato se describirán en el capítulo 7, e ítems específicos destinados a recoger la información fundamental de la interacción del sujeto en los aspectos a estudiar correspondientes al conjunto de tareas.

Asímismo, aceptando las modificaciones y mejoras en las tareas propuestas en dicho estudio exploratorio, procederemos a reducir el número de ítems y a

\*Véase también la figura 6.5 anterior.

<sup>†</sup>Véase la figura 5.9 en la sección 5.5.2, página 178, del capítulo 5.

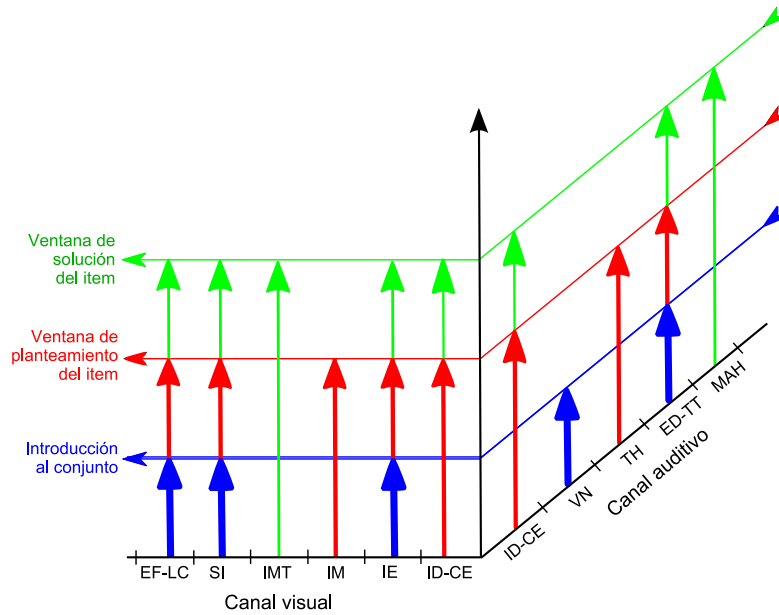


Fig. 6.6. Elementos multimodales que intervienen en cada tipo de ventana.

reelaborarlos mediante la aplicación sistemática de los aspectos considerados en el modelo MGDIM.

La tabla siguiente muestra el número de ítems que se van a incluir en cada conjunto de tareas.

Tareas ordinales	Núm. ítems introductorios	Núm. ítems específicos
Lineales infralógicas	1	5
Con cantidades continuas	1	5
Con cantidades discretas	2	6
Tareas recursivas	1	6

Tabla 6.1: Número de ítems en cada conjunto de tareas.

### 6.5.1 Funciones ontológicas de los conjuntos de tareas

Para la construcción del instrumento multimedia en condiciones óptimas para la investigación, es esencial la elección de funciones ontológicas adaptadas a las características psicoafectivas y a la edad de los sujetos para los que se diseña. Nos referimos al aprovechamiento óptimo del aspecto lúdico del medio para favorecer la motivación y la implicación de los sujetos en la realización de las tareas.

En nuestro caso, la función ontológica o simulación se define para cada conjunto de tareas e incluye un contexto general, común a los cuatro conjuntos, y un contexto específico, propio de cada uno de ellos.

El contexto general esta basado en los contenidos de la película “*El libro de la selva*” de Walt Disney, de la que resaltamos especialmente los valores de la amistad y de la colaboración.

En cada uno de los conjuntos pediremos al sujeto que ayude al personaje principal a realizar alguna tarea ordinal concreta o a resolver las cuestiones problemáticas ordinales que se le planteen, desempeñando el sujeto el papel protagonista de la acción. Deseamos pues, mediante el valor de la amistad, suscitar en el sujeto una actitud lúdica de colaboración y ayuda al personaje principal en la consecución de un fin que dé sentido a las actividades que tiene que realizar en cada una de las simulaciones. En las interacciones entre el sujeto y la tarea apelamos, por tanto, al uso de las inteligencias inter e intrapersonal, Gardner (1983), así como al empleo de componentes afectivas y emocionales.

La estructura escénica de los ítems se simplificará al máximo, interviniendo sólo el personaje principal y el sujeto protagonista en los conjuntos primero, tercero y cuarto. En el segundo conjunto, además de los personajes citados, interviene un personaje secundario que suministra apoyo afectivo a la acción del sujeto. En este caso, como resultado de la aplicación del *principio de coherencia*, Mayer (2005a), se limitará la intervención de este personaje a lo estrictamente necesario.

A continuación se describe el contexto específico de cada conjunto de tareas, que combinado con el general define la función ontológica del mismo.

### **Tareas de orden lineal infralógico.**

El contexto de este conjunto de ítems es un juego interactivo en el que el sujeto tiene que identificar, haciendo clic, el camino correcto entre dos o más dados que debe recorrer el personaje principal de modo que se cumplan los objetivos ordinales definidos por las funciones epistémicas en cada caso.

Los objetivos ordinales se refieren a frutas que aparecen ordenadas linealmente en cada camino y a las que el sujeto debe aplicar el concepto o conceptos ordinales que identifican o discriminan el camino correcto de los demás.

Los conceptos ordinales implicados se le indican al sujeto mediante sucesivos mensajes de audio, por lo que las tareas del conjunto son

de naturaleza verbal.

### **Tareas ordinales con cantidades continuas.**

Este conjunto se ha concretado mediante un juego interactivo en el que el sujeto debe ayudar al personaje principal a reunirse con el secundario, que se halla al otro lado de un camino que está interrumpido por dos o más precipicios.

El sujeto debe arrastrar figuras que simulan troncos, hasta las posiciones correctas, de modo que cubran todos los huecos de los precipicios presentes en cada caso y el personaje principal pueda caminar hasta reunirse con el secundario.

Troncos y huecos se hallan en correspondencia serial de tipo ordinal por cantidades longitudinales. Estas cantidades quedarán fijadas por la función epistémica de cada ítem.

En algunos ítems se incluyen piezas sobrantes que no corresponden a ningún hueco y que el sujeto deberá discriminar e intentar evitar su colocación incorrecta. Con ello pretendemos estudiar la conducta de los sujetos en relación con el uso de estas piezas, averiguar su influencia en el modo en que establecen las correspondencias seriales, detectar intentos por ensayo y error, describir la evolución con la edad de la frecuencia de uso de las mismas y, finalmente, estimular la atención y la concentración de los sujetos en la tarea.

El sujeto no recibe ninguna indicación sobre la colocación de los troncos, por lo que estos ítems son de naturaleza no verbal.

### **Tareas ordinales con cantidades discretas.**

Para este conjunto, la simulación incluye dos juegos que se le presentan al sujeto como un reto o una situación problemática que debe resolver y que le plantea el personaje principal.

En el primero, el sujeto debe arrastrar y colocar varias cantidades discretas, de una a cinco piezas de fruta, hasta sus posiciones correctas que se hallan en huecos de árboles colocados de diversas maneras. Las cantidades de frutas y los huecos de los árboles se hallan en correspondencia serial por cantidades, cuyas características se determinarán de nuevo por la función epistémica del ítem.

En el segundo, el sujeto deberá arrastrar y colocar hasta su posición correcta varias piezas formadas por una cantidad discreta de escalones, de modo que mediante pasos sucesivos forme una escalera por la que el personaje principal subirá para alcanzar las piezas de

fruta que se hallan en un árbol, en posición elevada al final de la escalera.

La correspondencia serial entre las piezas y los huecos puede establecerse, bien mediante la cantidad discreta de escalones que forman cada una, por conteo, asignando al primer hueco la de dos escalones, al segundo la de tres, etcétera, o bien por tamaños o alturas (cantidad continua), asignando al primer hueco la pieza más pequeña, al segundo la siguiente en tamaño o altura, etcétera. La función epistémica define el tamaño de la escalera y, por tanto, el número de piezas a colocar.

Conviene aclarar que, en este caso, las piezas son bloques formados por conjuntos de dos a seis escalones que el sujeto puede interpretar como estructuras discretas, contando el número de escalones de cada una, o como estructuras continuas (por ejemplo: pieza pequeña, mediana o grande, si no se produce el conteo). Esto se hace así expresamente porque queremos detectar las edades a las que el sujeto comienza a distinguir y utilizar la cantidad discreta en las ordenaciones, así como las edades a las que aparece el conteo en la asignación de posiciones ordinales (*conteo ordinal*) como estrategia espontánea, la estrategia que consideramos más evolucionada, y queremos también distinguirla de otras estrategias, como puede ser, por ejemplo, la ordenación por tamaños o alturas (cantidades continuas). Además, esta característica de las piezas permitirá comprobar si los sujetos mantienen o no la misma estrategia en las dos partes del conjunto de tareas, lo que permitirá estudiar la evolución de dichas estrategias con la edad.

En algunos ítems de ambos juegos se incluyen piezas sobrantes que no corresponden a ningún hueco en los árboles o a ninguna pieza de la escalera. El sujeto deberá identificar y discriminar estas piezas sobrantes e intentar evitar su colocación incorrecta. Con ello, al igual que en el conjunto de tareas anterior, pretendemos estudiar la conducta de los sujetos en relación con el uso de estas piezas, averiguar su influencia en el modo en que establecen las correspondencias seriales y las ordenaciones, detectar intentos por ensayo y error, describir la evolución de la frecuencia de uso de las mismas y, finalmente, estimular la atención y la concentración de los sujetos en la tarea.

En ninguno de los dos juegos se le da al sujeto información sobre la forma de proceder en la realización del ítem o tarea, por lo que estos ítems son de nuevo de naturaleza no verbal.

### Tareas recursivas mediante alternancias cíclicas.

En el juego construido para este conjunto de tareas, cada ítem se le presenta al sujeto como un reto o situación problemática que le plantea el personaje principal, que en este caso es el personaje más juguetón, y el sujeto debe resolver.

En cada ítem el sujeto debe continuar la serie que se le propone localizando las posiciones de determinadas frutas escondidas por el personaje principal en los peldaños de una escalera. Para ello tendrá que *hacer clic* sobre los peldaños correctos. Dichas posiciones están determinadas recursivamente por alternancias cíclicas, que en cada caso determinará la función epistémica del ítem.

La única información relativa a las posiciones que reciben los sujetos son las propias alternancias, por lo tanto estos ítems son también de naturaleza no verbal.

En la construcción de los conjuntos de ítems se tendrá muy presente el doble objetivo de evitar la monotonía y reducir la fatiga que pudieran producir conjuntos de ítems demasiado similares. El mecanismo a utilizar para ello será el cambio de la función ontológica en cada conjunto, caracterizado por la alternancia en las acciones psicomotrices del sujeto. Así, las acciones se alternan en el sentido de *hacer clic* en los conjuntos primero y cuarto y *arrastar y colocar* en los conjuntos segundo y tercero, por lo que el orden de ejecución de los conjuntos será: primero, segundo, cuarto, tercero. Este cambio de orden permitirá la alternancia en las acciones psicomotrices citadas.

En la sección 7.6, página 344 y siguientes, del capítulo 7 se incluye un análisis descriptivo de los ítems o tareas individuales que forman cada uno de los conjuntos y se describe el registro de la información en cada caso. Para cada ítem se detalla, en su ficha técnica, el audio y la interfaz visual e interactiva que intervienen junto con un análisis descriptivo del ítem.

Resaltamos, de nuevo, que en la ficha técnica de cada uno *Audio e Interfaz mostrarán, ya implementada, la función onto-epistémica y que Objetivo definirá la función epistémica a evaluar, por medio de la primera.*

#### 6.5.2 Aplicación del diseño del ítem multimedia a la implementación del instrumento

En este apartado nos proponemos aplicar o particularizar el modelo general para el diseño del ítem a la implementación concreta del instrumento

multimedia que se utilizará en la investigación. Para ello, se incorporan los siguientes datos concretos a cada una de las fases del mencionado diseño:

### Fase de fundamentación del ítem.

En esta fase se determinará la función onto–epistémica de interacción con el sujeto. Se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

**Características de los sujetos.** Los sujetos que intervienen en la investigación tienen edades comprendidas entre tres años y medio y siete años. Como supuestos de partida, consideramos que los conceptos ordinales a investigar se hallan en evolución y en formación progresiva a lo largo del intervalo de edad mencionado y que las capacidades cinestésicas de los sujetos incluyen las acciones *hacer clic* y *arrastrar y soltar*.

**Función epistémica.** Estará determinada por el concepto o competencia ordinal concretos cuya evolución se va a investigar\*.

**Representaciones.** Dadas las edades de los sujetos que intervienen, se usarán preferentemente representaciones de tipo icónico, teniendo en cuenta la utilidad de este tipo de representaciones para elaborar inferencias debido a que la nueva información deducida puede extraerse directamente de la representación. El uso de este tipo de representación será aún mayor en los ítems de naturaleza no verbal<sup>†</sup>.

**Función ontológica.** Estas funciones se han definido para cada conjunto de tareas en la sección anterior<sup>‡</sup>.

**Función ontoepistémica.** La conjunción de la función ontológica del ítem (o del conjunto de ítems) con su función epistémica determinará la función *onto–epistémica* de aquél en forma de situación problemática global que el sujeto deberá resolver<sup>§</sup>.

\*Esta función se especifica para cada conjunto de tareas y para cada ítem en la sección 7.6, página 344 y siguientes, del capítulo 7.

<sup>†</sup>Las representaciones descriptivas y/o verbales requieren no solo más competencias básicas por parte del sujeto, sino, además, su correcta coordinación.

<sup>‡</sup>En nuestro caso, los papeles secundarios de los personajes junto con la constancia de la función ontológica para cada conjunto, se eligen con el propósito de minimizar la *carga cognitiva extrínseca*, (Sweller, 2005), a la que exponemos los sujetos; objetivo muy importante, dadas sus edades y el elevado número de ítems con los que deberán trabajar.

<sup>§</sup>De la determinación de los tres tipos de funciones: epistémicas, ontológicas y onto–epistémicas, deducimos que el sujeto debe interactuar con los ítems multimedia de modo activo, integrando la información procedente de los canales auditivo y visual mediante el uso activo de todas las formas de la inteligencia descritas en Gardner (1983), poniendo en juego las correspondientes redes neuronales, tanto en la construcción de sus representaciones internas como en la emisión de sus respuestas, más allá del clásico esquema conductista. Esta función se especifica para cada conjunto de tareas y para cada ítem en la sección 7.6, página 344 y siguientes, capítulo 7.



### Fase de construcción del ítem.

En relación con la preparación para la construcción del ítem se tendrán en cuenta los aspectos siguientes:

**Principios constructivos.** Consideraremos como principios constructivos los principios del aprendizaje multimedia, Mayer (2005a). Concretamente se aplicarán los siguientes principios a la construcción, en general, y a la selección de los elementos multimedia: principios de contigüidad espacial y temporal, de coherencia, de modalidad, de redundancia, de las diferencias individuales y de la atención dividida.

**Elementos multimedia.** Dada la edad de los sujetos y sus características psicomotrices, se dotará del mayor tamaño posible a los objetos gráficos encargados de recoger la información procedente de la interacción en cada ítem, facilitando todo lo posible dicha interacción.

**Registro de la información.** Se seguirán las normas generales del modelo.

**Almacenamiento de la información.** En nuestro caso, por sencillez, el almacenamiento de la información se realizará mediante la escritura del contenido de los registros correspondientes en archivos de texto para su análisis posterior.

En relación con la construcción efectiva del ítem:

**Construcción práctica.** En la investigación que se presenta en esta memoria, la construcción práctica se lleva a cabo mediante el programa de autoría multimedia Macromedia Director. Este programa hace posible la integración de distintos elementos multimedia tanto estáticos como dinámicos, en numerosos formatos y de modo relativamente sencillo. Incorpora, además, un lenguaje de programación potente y versátil, produciendo programas ejecutables de pequeño tamaño y fácil modificación que permiten almacenar la información en el formato elegido. El programa presenta características que permiten la realización de juegos multimedia de gran calidad y fiabilidad. Para más detalles sobre esta excelente herramienta de autor véase Rosenzweig (2002).

### 6.6 Metodología multimedia aplicada al estudio de las competencias ordinales y recursivas

En las últimas secciones se ha visto cómo la determinación de los modelos evolutivo de competencias ordinales y recursivas (MECOR) y general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM) permiten construir un instrumento multimedia que recoge las correspondientes conclusiones del estudio exploratorio así como las modificaciones y mejoras de las tareas o ítems planteadas en el mismo. La estrategia metodológica seguida para la resolución del problema dual planteado se muestra en la figura 6.7.

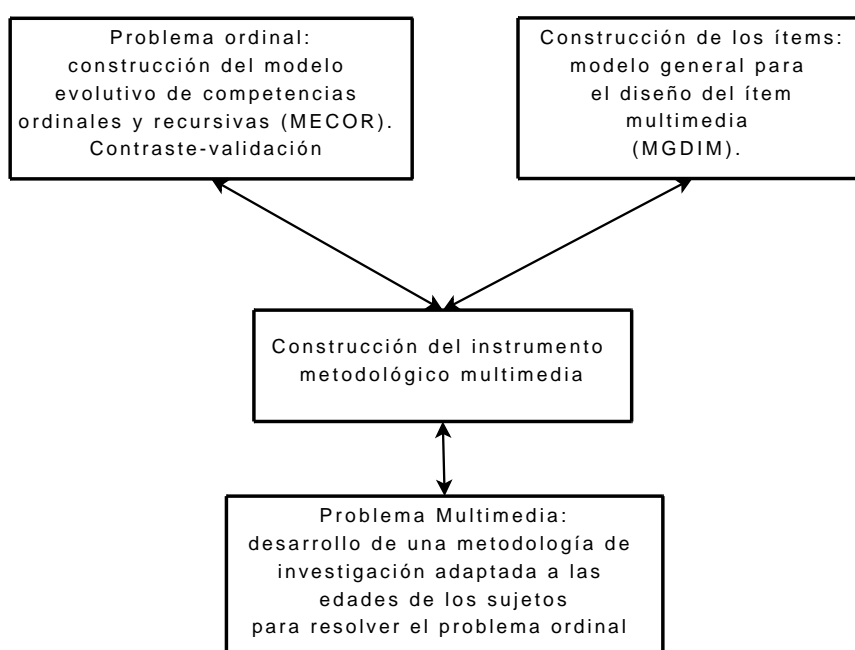


Fig. 6.7. Estrategia metodológica seguida para la resolución del problema dual.

Por tanto, queda por fijar la metodología de investigación adecuada y el diseño pertinente para abordar el problema ordinal mediante un estudio empírico que utilice el instrumento multimedia construido anteriormente. Dedicaremos a esta cuestión los apartados que siguen de la presente sección.

En primer lugar, dado el intervalo de edad que queremos analizar, una vez fijadas las características psicomotrices y psicoafectivas de los sujetos a los que se refiere el estudio, teniendo en cuenta las correspondientes conclusiones del estudio exploratorio y las funciones ontológicas elegidas para el

instrumento en la sección anterior, hemos diseñado un proceso metodológico que consta de las tres etapas o fases siguientes:

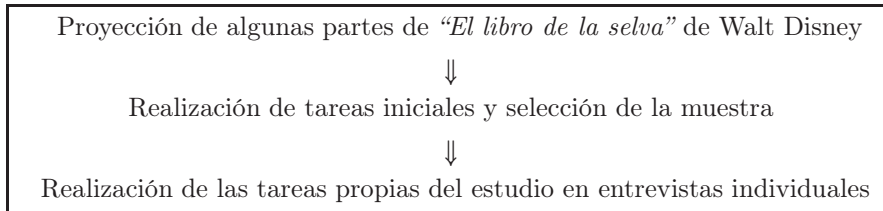


Tabla 6.2. Etapas metodológicas del Estudio Empírico.

Veamos con más detalle en qué consisten cada una de las etapas anteriores.

### 1<sup>a</sup>. Proyección de la película

Dada la limitada capacidad atencional de los sujetos del intervalo de edad escogido, se pretende proyectar solamente algunas partes de interés especial por su contenido lúdico y/o motivacional.

### 2<sup>a</sup>. Realización de las tareas iniciales y selección de la muestra

La necesidad de esta etapa es evidente, ya que según se ha constatado en el estudio exploratorio, los sujetos de 4 o más años dominan en general el manejo del ratón y las acciones cinestésicas “hacer clic” y “arrastrar y soltar”, pero esto no sucede, en general, para los sujetos de edades inferiores. Es necesario, por tanto, seleccionar una muestra de sujetos que no presenten problemas en el uso del ratón y que dominen tales acciones cinestésicas.

Para tal fin, de acuerdo con las conclusiones del estudio exploratorio, se pueden utilizar los mismos ítems o tareas multimedia que se diseñaron específicamente para dicha etapa en el estudio citado y con las mínimas modificaciones allí indicadas. Además, estas tareas sirven también para que los sujetos seleccionados se familiaricen con los personajes que aparecerán y con las acciones que tendrán que realizar en los ítems de la etapa siguiente.

El diseño de estas tareas iniciales se ha revisado aplicándole el MGDIM con las modificaciones obvias por tratarse de tareas exclusivamente lúdicas en las que no se realiza ningún registro de la información salvo la observación directa del propio investigador\*. Sobre la selección de la muestra y las directrices seguidas, véase la sección

\*El diseño de sus interfaces puede verse en la sección 5.5.1.2, página 170, del Capítulo V y sus objetivos, descripción y análisis en la sección 5.5.1, página 170 y siguientes, del mismo capítulo.

7.3.3, página 334 y siguientes, capítulo 7.

### **3ª. Realización de las tareas propias del estudio en entrevistas individuales**

En esta etapa los sujetos seleccionados en la etapa anterior realizarán, mediante entrevista individual, las tareas propias del estudio contenidas en los cuatro cuestionarios multimedia que integran el instrumento descrito en la sección anterior. Las tareas se orientan a la resolución de situaciones que requieren la construcción de las soluciones, evitando en la medida de lo posible el binomio estímulo–respuesta.

La intervención del investigador en las entrevistas se reducirá a aclarar dudas, prestar ayuda muy puntual en alguna dificultad con el ratón, insistir de modo totalmente imparcial en las cuestiones planteadas al niño en forma audiovisual y observar y tomar nota de los aspectos relevantes. Precisamente, uno de los objetivos de la investigación es maximizar la objetividad de la información recogida y minimizar la interacción investigador–sujeto.

Las entrevistas pertenecen a la categoría de entrevistas clínicas individualizadas, en las que el sujeto debe dar respuesta a las cuestiones y situaciones ordinales que se le plantean de modo audiovisual e interactivo en un ordenador que las ejecuta.

Todas las respuestas y acciones de los sujetos quedan registradas en variables adecuadas que se detallan en el capítulo 7. Dichas variables se encuentran definidas en cada uno de los cuatro programas y los datos se almacenan automáticamente, para su tratamiento y análisis posterior, en cuatro ficheros de texto correspondientes a cada uno de los cuatro conjuntos de ítems.

Además, en el fichero correspondiente al primer conjunto, se recogen los siguientes datos para cada sujeto: clave identificativa, apellidos, nombre, curso y grupo en que se encuentra, fecha de nacimiento, edad en años y meses y sexo.

Al igual que en el estudio exploratorio, la clave identificativa asignada a cada sujeto tiene dos propósitos:

- 1º. Identificar al sujeto de forma anónima, lo que garantiza la reserva y confidencialidad de los datos personales.
- 2º. Servir de enlace de todos los datos del sujeto que se encuentran recogidos en los distintos ficheros, evitando así el almacenamiento de datos redundantes y facilitando la organización de la información para el análisis posterior.

Las claves se construyen mediante un prefijo que indica el intervalo de edad en años (A) y meses (M) seguido de un número que distingue al sujeto en cada intervalo. Este número se asigna siguiendo igualmente el orden creciente de edad en años y meses. En caso de igualdad de edades se recurre al orden alfabético de los apellidos.

Los prefijos a asignar por intervalos de edad son los que aparecen en la tabla 6.3.

Finalmente, los cuatro ficheros de texto con toda la información obtenida se importarán a hojas de cálculo y, posteriormente, a programas de tratamiento estadístico de datos: R o SPSS.

Intervalo	Prefijo
[3a-6m, 4a)	3AM
[4a, 4a-6m)	4A
[4a-6m, 5a)	4AM
[5a, 5a-6m)	5A
[5a-6m, 6a)	5AM
[6a, 6a-6m)	6A
[6a-6m, 7a)	6AM
[7, 7a-6m]	7A

Tabla 6.3: Prefijos identificativos asignados sujetos por intervalos de edad.

## 6.7 La tecnología multimedia en la investigación en Educación Matemática: una nueva metodología de investigación

Como se puede observar en las últimas secciones, además de presentar el problema ordinal a investigar se ha establecido un procedimiento para adaptar la metodología multimedia al problema específico y construir un instrumento adecuado para abordarlo en un todo integrado que constituye un nuevo método de investigación; un nuevo método que puede aplicarse de modo sencillo e inmediato a otros problemas de investigación en Educación Matemática. De modo esquemático su articulación puede ajustarse al esquema que se presenta en la figura 6.8.

La determinación de otros problemas de investigación en Educación Matemática junto con la particularización y adaptación del modelo general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM) al problema concreto analizado y a las características de los sujetos que intervengan en la investigación, mediante la determinación de las funciones ontológicas y epistémicas pertinentes, entre

otros parámetros, permitirá, de modo similar al caso analizado en el estudio que se presenta en esta memoria, la construcción de un instrumento multimedia y de una metodología adaptados al estudio del problema específico a abordar.

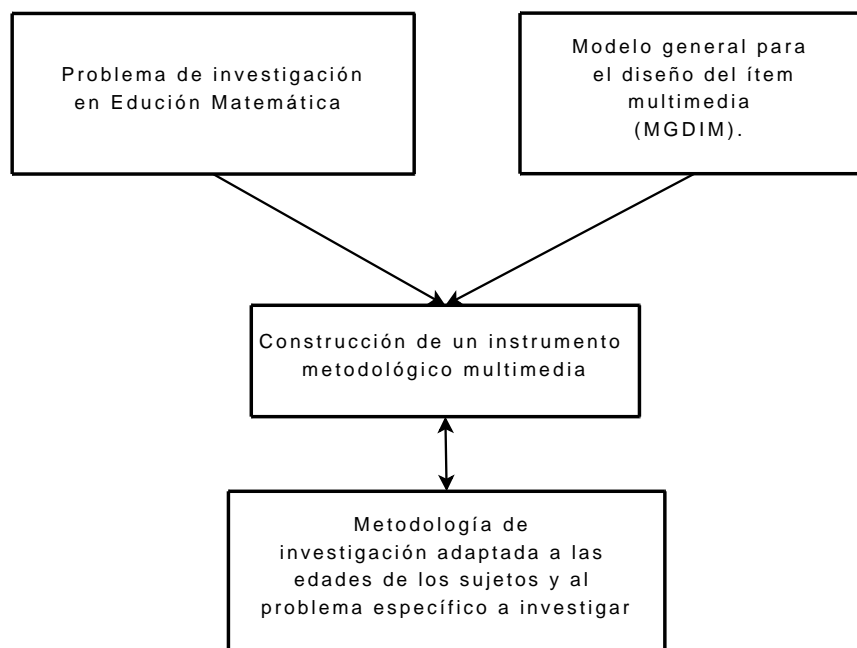


Fig. 6.8. Metodología multimedia general.

Podemos adelantar, por último, que el uso de esta metodología presenta, entre otras, las siguientes ventajas ya comprobadas en la investigación que nos ocupa:

- ❖ Su potencial aplicación a numerosos problemas de investigación en Educación Matemática.
- ❖ Su aplicabilidad a sujetos de un amplio intervalo de edades, que estimamos que puede ser al menos de tres a catorce años.
- ❖ Su posible aplicación, mediante el uso de pantallas táctiles, a sujetos de corta edad, por debajo de tres años y medio.
- ❖ Permite aprovechar, en función de la edad, la experiencia de los sujetos en otros entornos multimedia ampliamente extendidos, como son el uso de videoconsolas, ordenadores, teléfonos móviles, tabletas digitales, etcétera.
- ❖ Permite integrar los ítems en cuestionarios electrónicos multi-

media con contenidos lúdicos adaptados a las características psicomotrices y psicoafectivas de los sujetos y que favorecen su motivación e implicación.

- ❖ Tales cuestionarios constituyen escenarios virtuales con los que el sujeto interacciona con una riqueza superior a la del típico cuestionario de lápiz y papel y más allá del uso del binomio estímulo–respuesta.
- ❖ Dichos escenarios virtuales permiten plantear a los sujetos cuestiones de elevada dificultad con extrema sencillez y naturalidad, permitiendo incluir componentes visuoespaciales, afectivas y emocionales presentes en la cognición.
- ❖ El registro de la interacción de los sujetos así como el correspondiente almacenamiento de la información es automático, lo que facilita muy significativamente su procesamiento y análisis posteriores.
- ❖ Permite maximizar la objetividad de la información conseguida, minimizando la interacción investigador–sujeto.
- ❖ Además de estudios de tipo cualitativo, permite llevar a cabo estudios cuantitativos o de masas, sin más que implementar el cuestionario o cuestionarios multimedia en páginas web conectadas a bases de datos.
- ❖ Los resultados de la investigación pueden aplicarse de modo directo y riguroso a la fundamentación y construcción de nuevas secuencias multimedia de aprendizaje, pudiendo aplicarse también a secuencias de aprendizaje que no hagan uso de esta tecnología.

Estas y otras ventajas auguran un futuro prometedor para la investigación en Educación Matemática. Los resultados del estudio empírico junto con las perspectivas futuras del trabajo, que se presentan en los capítulos 8 y 9 de esta memoria, son buenos ejemplos de la potencialidad de esta nueva metodología.





## DISEÑO DEL ESTUDIO EMPÍRICO

### 7.1 Introducción

La necesidad de someter a contraste las hipótesis **H2** a **H6**, en su parte empírica, justifica, a su vez, la necesidad de realizar el correspondiente estudio cuyo diseño se aborda en este capítulo.

Expuestos en el capítulo anterior el diseño, las líneas constructivas y las funciones ontológicas de los cuatro conjuntos de tareas asociadas al MECOR que integran el instrumento de observación, y la aplicación de la metodología multimedia, que se apoya en dicho instrumento, al estudio de las competencias ordinales y recursivas; corresponde ahora precisar con detalle su papel, características e integración en dicho estudio empírico.

El capítulo comienza detallando los objetivos del mismo y la metodología a emplear en los siguientes niveles o aspectos: general y específica del estudio, referente a la selección de la muestra, la propia a seguir en las entrevistas individuales y en la recogida y tratamiento de la información.

Continúa describiendo los materiales de hardware y software necesarios o convenientes para la realización del estudio, las modificaciones y mejoras en los conjuntos de tareas realizadas de acuerdo con el MGDIM, el MECOR y con las conclusiones que al respecto se obtuvieron en el estudio exploratorio que se incorporan al nuevo instrumento; y describiendo y analizando con detalle los 27 ítems de los cuatro conjuntos de tareas que integran el instrumento, explicitando sus características generales, funciones epistémicas, fichas técnicas individuales (que incluyen sus funciones onto-epistémicas) así como el registro de la interacción sujeto-entorno multimedia en cada caso. El tercer conjunto de tareas incluye un breve cuestionario, que se describe igualmente, relativo a la identificación de las estrategias utilizadas por los sujetos en cada uno de los subconjuntos que forman este tercer conjunto y que se emplea,

además, para averiguar si los sujetos distinguen o no la cantidad discreta cuando realizan las tareas del segundo subconjunto.

El capítulo finaliza detallando el tratamiento y análisis de la información que incluye la definición, para cada conjunto de tareas, de las variables del estudio relativas a la valoración de las respuestas, caracterización de niveles, identificación de estrategias y estudios de modelos de ajuste lineales y no lineales para las medias de las valoraciones por grupos de edad. Finalmente se describen los instrumentos de tratamiento y análisis de datos que se utilizan en este estudio.

## 7.2 Objetivos del estudio

Los objetivos de este estudio coinciden con los generales **O2** a **O5** de la investigación y, concretamente, son los siguientes:

- Validar una nueva metodología de investigación en Educación Matemática basada en la tecnología multimedia (metodología multimedia), segunda parte del objetivo **O2**.
- Comprobar la idoneidad, eficacia y validez de la metodología multimedia para el registro y análisis de las respuestas de sujetos de 3 a 7 años ante la realización de tareas lógico-matemáticas relacionadas con el orden y la recursión, objetivo **O3**.
- Configurar y contrastar, mediante la metodología multimedia, la validez de un modelo evolutivo sobre el Pensamiento Ordinal Preinductivo (MECOR) en sujetos de 3 a 7 años de edad, constituido por estados de desarrollo caracterizados por capacidades ordinales o recursivas empleadas en la realización de actividades específicas, objetivo **O4**.
- Construir un instrumento multimedia adaptado a las características de los sujetos y a los estados del modelo evolutivo propuesto, que permita observar, registrar y analizar las regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo y contrastar la bondad del modelo (objetivo **O5**). En particular, el instrumento debe permitir:
  - Identificar y caracterizar niveles de competencia y/o de desarrollo (**O5.1**).
  - Identificar y caracterizar las estrategias de resolución y las regularidades existentes (**O5.2**).
  - Describir la evolución con la edad de las estrategias, capacidades y competencias correspondientes (**O5.3**); en particular

- ◊ Determinar las edades a las que se produce el uso espontáneo de las capacidades recursivas frente al mero etiquetaje (**O5.3.1**).
- ◊ Identificar el intervalo de edad y las circunstancias en las que se produce la diferenciación entre cantidad continua y discreta (**O5.3.2**).
- ◊ Identificar el intervalo de edad y las circunstancias en las que se produce el uso espontáneo del conteo ordinal frente a otras estrategias (**O5.3.3**).
- Decidir la existencia o no de modelos de ajuste lineales y/o no lineales para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas y, en caso afirmativo, la mayor precisión y adecuación de ellos a los fenómenos observados (**O5.4**).

En definitiva, el estudio pretende aportar evidencias que avalen la bondad de las hipótesis **H2** a **H6** de la investigación, lo que permitirá asegurar la consecución de los de los objetivos anteriores

### 7.3 Metodología

En los subapartados siguientes se exponen las metodologías a utilizar en el presente estudio. En concreto, se detallan la metodología general y la propia del estudio empírico, las utilizadas para la elección de la muestra y la realización de las entrevistas individuales, así como la empleada en la recogida y tratamiento de la información.

#### 7.3.1 Metodología general del estudio

Desde el punto de vista general se utilizarán métodos descriptivos, cualitativos y cuantitativos sobre una muestra intencional (Bisquerra, 1989); también tendremos en cuenta el concepto de rendimiento presentado por Brueckner y Bond (1984), las facetas del mismo en relación con el sujeto (Andrés, 1952) y las consideraciones de Cohen, Manion y Morrison (2000) sobre los test como herramientas productivas en investigación dentro de los métodos de investigación educativa. Desde un punto de vista más específico, partimos de los trabajos de Fernández (2001) y Fernández y Ortiz (2008), en los que se utilizan métodos cualitativos y entrevistas clínicas individualizadas como técnicas adecuadas de recogida de información (Claparède, 1976;

VinhBang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974) y como soportes de la metodología multimedia desarrollada.

Las entrevistas clínicas individualizadas se realizarán con el instrumento multimedia desarrollado como herramienta intermediadora en la interacción entre el investigador y el sujeto. En dicho entorno multimedia se plantearán situaciones ordinales y recursivas, a las que debe responder el sujeto, y que se plantean mediante tareas acordes con el modelo propuesto (MECOR)\*. Una justificación de este tipo de metodología se encuentra en los trabajos de Ortiz (1997), Fernández (2001) y Fernández y Ortiz (2008), en el ámbito de la línea de investigación, y en las propuestas de Bliss (1987), Cohen (1990, p.377) y Blanco y Prieto (2000), en los que se pone de manifiesto que las entrevistas clínicas individualizadas, sobre la base de un material concreto, son pruebas adecuadas para este tipo de estudios caracterizados por su naturaleza cualitativa y por el empleo de una muestra reducida de sujetos.

### 7.3.2 *Diseño del estudio empírico*

Este estudio se llevará a cabo aplicando la Metodología Multimedia específica (aplicada al estudio de las capacidades ordinales y recursivas) que se describe en la sección 6.6, página 322 y siguientes del capítulo anterior, en las tres fases o etapas que se detallan (véase la tabla 6.2 en la misma sección). El proceso a utilizado para establecerla se describe en la Figura 7.1.

La primera etapa se llevará a cabo según lo indicado en la sección 6.6, en una sala amplia que permita proyectar las partes seleccionadas de la película.

En la segunda etapa, para la elección de la muestra, se aplicarán las tareas multimedia implementadas al efecto<sup>†</sup> a grupos de no más de seis sujetos en sesiones de duración no mayor a media hora para los grupos de edad superior y tres cuartos de hora para los de edad inferior, de acuerdo con la 6<sup>a</sup> conclusión relativa a la metodología, obtenida en el estudio exploratorio<sup>‡</sup>. Sobre los criterios a emplear para la elección de la muestra, véase la siguiente sección 7.3.3.

La tercera etapa incorporará el entorno y el instrumento multimedia cuyo diseño y construcción se detallan en la sección 6.5, página 314 y siguientes, capítulo 6. Dicho entorno incorporará, a su vez, cuatro conjuntos de ítems o tareas multimedia, que se corresponden con los estados del modelo evolutivo

\*Véase el apartado 6.3, página 302 y siguientes, capítulo 6.

<sup>†</sup>Recordamos de nuevo que el diseño de sus interfaces puede verse en la sección 5.5.1.2, página 170, del Capítulo V y sus objetivos, descripción y análisis en la sección 5.5.1, página 170 y siguientes, del mismo capítulo.

<sup>‡</sup>Véase la página 292 y siguientes

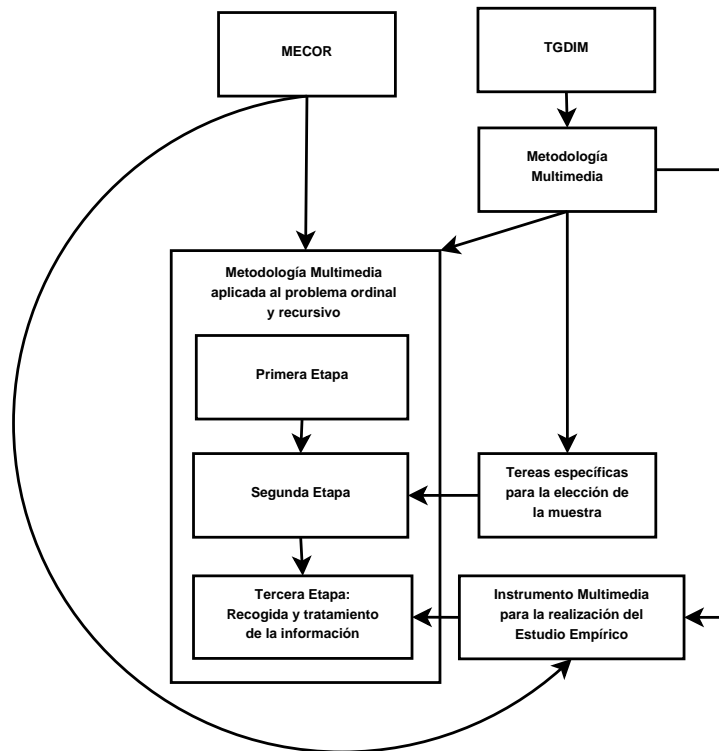


Fig. 7.1. Esquema del proceso metodológico aplicado en el diseño del Estudio Empírico.

de competencias ordinales y recursivas propuesto (MECOR)\*, y cuyos ítems se implementarán según el modelo general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM)<sup>†</sup>, teniendo en cuenta las correspondientes conclusiones del estudio exploratorio e incluyendo las modificaciones y mejoras en los ítems propuestas en las conclusiones citadas. La descripción y el análisis pormenorizados de los cuatro conjuntos así como de los ítems individuales se lleva a cabo más adelante, en la sección 7.6, página 344 y siguientes, del presente capítulo.

Finalmente, en las tres subsecciones siguientes se detallan la metodología a seguir en la selección de la muestra y en las entrevistas individuales, previstas en la tercera etapa, así como el procedimiento empleado para la recogida y tratamiento de la información.

\*Véase la sección 6.3, página 302 y siguientes, capítulo 6.

†Véase la sección 6.4, página 308 y siguientes, capítulo 6.

### 7.3.3 Selección de la muestra

El estudio que nos proponemos realizar es de tipo cualitativo, sin renunciar al tratamiento cuantitativo estadístico de la información tanto en el contraste de hipótesis como en el análisis de las tendencias evolutivas.

Se realizará con una muestra reducida e intencional, procedente de una población de sujetos de ambiente urbano y clases media y media-baja sin conflictos ni marginación social, representativos de lo que llamaremos *sujeto urbano estándar*. No se pretende generalizar los resultados, por los que las conclusiones del mismo se referirán siempre a estos sujetos.

Para la elección de la muestra se determinarán, en primer lugar, los centros educativos de procedencia y, en segundo lugar, los alumnos y alumnas que formarán el conjunto de sujetos o individuos de la misma, distribuidos en ocho grupos de edad, de tres años y medio a siete años, en intervalos de seis meses, de acuerdo con las conclusiones del estudio exploratorio.

Los criterios a seguir para la elección de centros son dos:

- 1º. Existencia de un número grande de alumnos matriculados en los tres cursos del segundo ciclo de Educación Infantil y en los dos primeros cursos de Educación Primaria, que posibilitará elegir al azar una muestra de alumnos.
- 2º. Existencia en el Centro, bien de un aula de informática o bien de ordenadores suficientes, que posibilitarán la realización de las tareas multimedia destinadas a la selección de la muestra.

Es condición necesaria para la participación del sujeto en el estudio, y por tanto para la posible elección del mismo, la entrega de la autorización correspondiente del padre, madre o tutor legal.

Los criterios que seguiremos para la elección de los sujetos autorizados son también dos:

- 1º. La mayor habilidad en las técnicas cinestésicas básicas en el uso del ratón: movimiento, hacer clic y arrastrar y soltar.
- 2º. La mayor proximidad de la edad del sujeto a la media de su grupo de edad.

Con ello nos aproximaremos a un muestreo de tipo polietápico:

- En la primera etapa se seleccionarán aleatoriamente dos conglomerados entre los centros que cumplen las condiciones fijadas, sin ninguna condición adicional que pudiera influir en los resultados del estudio.

- En la segunda, los sujetos a considerar son los que presenten la correspondiente autorización paterna, hecho que podemos considerar aleatorio.
- En la tercera, el muestreo se estratificará por grupos de edad y dominio del ratón de modo intencional, con una fuerte componente aleatoria, en consonancia con los resultados del estudio exploratorio. Se procurará elegir el tamaño de los estratos de modo que sea posible observar las tendencias evolutivas de modo cualitativo sin renunciar al tratamiento cuantitativo estadístico, tanto en el contraste de hipótesis como en el análisis de tendencias evolutivas, que permitan sentar las bases para estudios cuantitativos posteriores.

La selección de la muestra se llevará a cabo en el Aula de Informática o sala de ordenadores de los centros, por lo que los ordenadores a utilizar se revisarán y se pondrán a punto previamente.

#### *7.3.4 Metodología a seguir en las entrevistas individuales*

Elegidos los criterios y métodos para la selección de la muestra, trataremos aquí la metodología que se utilizará para recoger la información procedente de los sujetos en las entrevistas individuales, como última fase del proceso metodológico específico diseñado para la realización del estudio empírico.

Uno de los objetivos de la investigación consiste en reducir al mínimo la interacción del investigador con el sujeto entrevistado, de modo que la posible influencia de aquel en los comportamientos y resultados de este también se minimicen. Es decir que, mediante la metodología propuesta, pretendemos maximizar la objetividad de los datos recogidos en la interacción sujeto-instrumento de observación.

También se pretende influir lo menos posible en el funcionamiento de los centros educativos, por lo que, el estudio procurará respetar el horario escolar.

Para la recogida de la información y para cada sujeto participante, se seguirá un protocolo en tres fases\*:

- 1<sup>a</sup>. Recepción del sujeto.
- 2<sup>a</sup>. Realización por el sujeto de la entrevista individual.
- 3<sup>a</sup>. Despedida del mismo.

---

\*La puesta en práctica de este protocolo se llevará a cabo respetando las opiniones y aportaciones de las directoras o directores de los centros y de los profesores y profesoras de los sujetos de la muestra elegida.

Detallamos, a continuación, cada una de las fases mencionadas.

### Recepción del sujeto

Dadas las edades de los sujetos de la muestra, no se recibirán en momentos próximos a las horas de entrada y salida del centro, por ser momentos en los que se organizan las clases, se recogen alumnos y alumnas que llegan con retraso o se organiza la salida del centro, acontecimientos que pueden ocasionar en los mismos nerviosismo y falta de atención. También respetaremos su descanso y sus relaciones sociales, por lo que no se recibirá a ningún sujeto durante el recreo. Con ello, el horario de recepción quedará dividido en dos partes por el mismo: desde las 9,30 a las 11 horas y desde las 11,45 a las 13.30 horas.

El investigador dispondrá de un listado en el que figuren los nombres y apellidos de los sujetos de la muestra seleccionada, junto con el aula del centro en que se hallan, el nombre de su profesor o profesora y el de su tutor o tutora.

El sujeto será identificado en la lista y recogido en su aula por el investigador, que lo acompañará hasta el lugar en el que se realicen las entrevistas. Por el camino el investigador le recordará las tareas realizadas en la selección de la muestra, así como los personajes que vuelven a aparecer en las que va a realizar a continuación. Para ello mantendrá con el mismo una conversación informal en torno a las preguntas: *¿Recuerdas los juegos que hiciste con el ordenador?, ¿te gustaron?, ¿recuerdas a Mowgli y a su amigo Baloo?*

### Realización de la entrevista individual

Las tareas se realizarán en una mesa amplia sobre la que se hallará solamente el ordenador portátil del investigador, que contiene las tareas a realizar; y, en segundo plano, los altavoces que reproducirán el sonido. El ordenador está provisto de una pantalla de 17 pulgadas, adecuada para la realización de las tareas, y de un ratón de tamaño pequeño, adecuado para su uso por los sujetos de la muestra. Además, dispondremos de una silla regulable en altura, de modo que el sujeto se encuentre cómodo en su interacción con el ordenador.

Cuando el sujeto llegue al despacho o al aula de ordenadores, se le mostrará el lugar donde se va a desarrollar la entrevista y el sitio donde va a sentarse, y cuando se halle instalado adecuadamente,



delante del ordenador, se le hará la pregunta: *¿Quieres jugar con Mowgli y con su amigo Baloo?*

Si la respuesta es negativa, el investigador acompañará al sujeto a su aula y, si procede, recogerá a otro sujeto de la muestra.

Si la respuesta es afirmativa, el sujeto comenzará a realizar las tareas de cada conjunto de modo secuencial, de la primera a la última, sin limitaciones de tiempo. Terminando bien al finalizar la última tarea o bien en el momento en que el sujeto no desee continuar. Los conjuntos de ítems o tareas se realizarán en el siguiente orden: en primer lugar, las tareas de orden lineal (primer conjunto); en segundo lugar las tareas de orden con cantidades continuas (segundo conjunto); en tercer lugar, las tareas recursivas (cuarto conjunto); y en cuarto y último lugar, las tareas de orden con cantidades discretas (tercer conjunto). Aunque este orden no coincida con las etapas del modelo evolutivo, se seguirá con el propósito de intercalar las tareas en las que el sujeto debe *hacer clic* con aquellas en las que debe *arrastrar y soltar* y evitar, así, el cansancio que puede producir la repetición en bloques de la misma acción cinestésica.

En el cuarto conjunto, correspondiente al orden con cantidades discretas, al concluir las tareas tercera y cuarta así como las tareas séptima y octava, correspondientes a cada una de las dos partes o subconjuntos de los que consta, el investigador planterá al sujeto el cuestionario verbal, descrito en el apartado 7.6.3.4, con el fin de detectar las posibles estrategias utilizadas en su resolución.

El investigador se situará detrás y a la derecha del sujeto, en una posición desde la que pueda observar con precisión las acciones del mismo, sin influir en ellas.

La intervención del investigador en las entrevistas se reducirá a:

- Prestar ayuda puntual en alguna dificultad en el movimiento del ratón, evitando que llegue a salirse de la mesa o de un área que el sujeto no alcance cómodamente.
- Indicar al sujeto que pase el puntero del ratón sobre el icono de información de las tareas, que repite el mensaje de audio, en el caso en que no lo haya entendido o quiera volver a escucharlo.
- Insistir de modo totalmente imparcial en las cuestiones planteadas al niño en forma audiovisual, repitiendo él mismo el mensaje de audio si lo considera conveniente.
- Plantear verbalmente el cuestionario.
- Escribir las respuestas verbales del sujeto.

- Observar y tomar nota, a lo largo de la entrevista, de otros aspectos que puedan ser relevantes y que no hayan sido previstos con anterioridad.

### Despedida del sujeto

Finalizada la intervención del sujeto, el investigador le acompañará de nuevo a su aula para recoger, cuando proceda, a otro sujeto de la muestra.

Las entrevistas se llevarán a cabo en un despacho o en una sala en con un ambiente acogedor, libre de ruidos y distracciones, en presencia del investigador.

Se realizarán a puerta cerrada, pudiendo estar presente el profesor o profesora que lo desee con la condición de que su presencia se mantenga, sin interrupción, desde la recepción hasta la despedida del sujeto.

Con ello se pretenden evitar las distracciones y las pérdidas de atención que pudieran distorsionar los resultados, y que podrían producirse si tales condiciones no se cumplen.

#### *7.3.5 Recogida y tratamiento de la información*

La recogida de información se realizará por medio de las entrevistas clínicas individualizadas descritas en la sección anterior, en las que el niño, utilizando el instrumento multimedia desarrollado, dará respuesta a las cuestiones y situaciones ordinales y recursivas que se le plantean de modo audiovisual e interactivo en un ordenador que las ejecuta.

Todas las respuestas y acciones de los sujetos quedarán registradas, como se detalla en secciones posteriores, en registros adecuados asignados a las variables correspondientes definidas en cada uno de los cuatro programas. Los datos se almacenan automáticamente en cuatro ficheros de texto para su tratamiento y análisis posterior. En el primero de ellos, correspondiente al primer conjunto, se recogen para cada sujeto los siguientes datos: clave identificativa, apellidos, nombre, curso y grupo, fecha de nacimiento, edad en años y meses y sexo. La clave identificativa asignada a cada sujeto permite el anonimato y sirve de nexo de unión entre todos los datos, evitando la redundancia y facilitando la organización de cara a su análisis posterior.

Las claves se construirán del modo indicado en la sección 6.6, página 322 y siguientes, del capítulo 6. Los prefijos resultantes se recogen en la tabla 6.3, página 325, de la misma sección.

Posteriormente, los cuatro ficheros de texto con toda la información obtenida se importan a hojas de cálculo, estableciendo una correspondencia biunívoca entre las variables almacenadas en los ficheros de texto y las cabeceras que se obtienen en las hojas de cálculo, que permiten su clasificación y análisis. El análisis y estudio se completa mediante la importación de dichas hojas de cálculo al programa de tratamiento estadístico de datos SPSS.

#### 7.4 Materiales: Hardware y Software

Los materiales utilizados y a utilizar en las fases empíricas del presente estudio coinciden fundamentalmente, en sus características, con los utilizados en el estudio exploratorio y que se detallan en la sección 5.4.3, página 168.

Concretamente, el hardware utilizado y a utilizar consiste en un ordenador multimedia estándar para implementar las tareas, un ordenador multimedia portátil para llevar a cabo la proyección de la película, un proyector o cañón VGA y un amplificador de sonido con altavoces adecuados para una buena audición en una sala de dimensiones medianas.

Para la selección de la muestra, teniendo en cuenta la 6ª conclusión en relación con la metodología, obtenida en el estudio exploratorio\*, se utilizarán 6 ordenadores con sistema operativo Windows XP, con tarjeta de sonido y auriculares individuales conectados, y 6 ratones de pequeño tamaño adecuados para su uso por niños de 3 años. Estos ordenadores son propios de los centros en los que se llevará a cabo la selección mientras que los ratones y auriculares los aportará el investigador, con el fin de asegurar su adecuación y buen estado de uso. En las entrevistas individuales se usará el ordenador portátil mencionado, con las tareas instaladas y preparadas, al que se conectarán altavoces y un ratón USB adecuado a la edad del entrevistado.

En cuanto al software, se utilizará un DVD que incluya la película, las tareas iniciales para la selección de la muestra y los cuatro conjuntos de tareas propias del estudio. Su implementación se realiza bajo el sistema operativo Windows XP Profesional, aunque se ha probado en ordenadores con sistemas operativos de Microsoft: Windows 98, Me, NT, 2.000, XP, y versiones posteriores: Vista y Windows 7. Los objetos gráficos se han construido o tratado utilizando aplicaciones estándar de creación de gráficos y retoque fotográfico Adobe Photoshop, Corel Photopaint, Corel Draw, Macromedia Fireworks y Gimp en sus versiones de los años 2007–2008. Las tareas para la selección de la muestra se han mantenido en una resolución de 800x600 píxeles, lo que permite su ejecución en cualquier ordenador con los sistemas operati-

\*Véase la página 292 y siguientes

vos indicados, incluidos los que tienen bajas capacidades gráficas, mientras que las tareas propias del estudio se han rediseñado en una resolución de 1024x768 píxeles para mejorar y facilitar la interacción ordenador-sujeto en las entrevistas individuales.

Las modificaciones y mejoras realizadas en los conjuntos de tareas así como la programación orientada a objetos (POO) se realiza de nuevo con Macromedia Director, versión 8.5 (Pescador, 2000; Rosenzweig, 2002). Recordamos que algunas de las posibilidades ofrece esta poderosa herramienta de desarrollo multimedia son las siguientes:

- Permite desarrollar programas eficientes con un uso eficaz de recursos hardware (memoria, disco ...). Así, se obtienen programas optimizados que ocupan solamente 2 o 3 Megabytes.
- Los programas obtenidos son fácilmente modificables, en previsión de actualizaciones o mejoras futuras.
- Los programas son fácilmente adaptables a nuevas necesidades y modos de ejecución, de manera que es posible su publicación en formato web optimizado, conservando sus características multimedia, y realizar conexiones a bases de datos, lo que haría posible la realización de estudios cuantitativos de masas. También permite almacenar los datos recogidos en ficheros de texto que pueden importarse fácilmente desde hojas de cálculo o gestores de bases de datos; método que, por su sencillez, hemos seguido en el desarrollo de este estudio.
- Permite incorporar en los programas gran variedad de elementos multimedia: textuales, gráficos, sonoros y visuales, permitiendo alcanzar una calidad muy alta en las tareas previstas.

### 7.5 Modificaciones y mejoras en los conjuntos de tareas

Seguidamente damos cuenta de las modificaciones y mejoras realizadas en cada uno de los conjuntos de tareas, con respecto a los utilizados en el estudio exploratorio anterior y como consecuencia del mismo, para su incorporación al presente estudio empírico.

#### Tareas de orden lineal infralógico.

En las conclusiones del estudio exploratorio se plantea la conveniencia de reducir el número de ítems de este conjunto de tareas, formado inicialmente por nueve ítems, por los siguientes motivos:

- Homogeneizar el número de ítems de los cuatro conjuntos para otorgar un peso similar a los cuatro.

- Reducir la carga cognitiva del conjunto, de modo que los sujetos alcancen los últimos ítems con menor esfuerzo cognitivo.
- Comprobar, con ello, si mejoran o no los resultados en los tres últimos ítems en los distintos grupos de edad, especialmente en los de edades inferiores. Esto es, comprobar si la longitud de la prueba influye o no en los resultados de la misma.
- Afinar las conclusiones en este primer apartado teniendo en cuenta los resultados de la modificación.

Como sabemos, en el estudio exploratorio los cuatro primeros ítems se agruparon en dos grupos de dos, de modo que los nueve ítems iniciales quedaron reducidos a siete en la evaluación del conjunto.

Con el propósito de estudiar la reducción del número de ítems, construimos la tabla siguiente que muestra varios parámetros relativos a la *escalabilidad de Cronbach* cuando se elimina cada uno de los ítems, para los 25 sujetos que formaron la muestra.

En particular, en la última columna se muestra el coeficiente de la escala que resultaría si se eliminase el ítem correspondiente.

Observamos también que si se eliminan los ítems L1A y L2A, correspondientes a las tareas de localización del primer elemento y del último elemento de series ordenadas, la varianza de la escala tiende a disminuir, se pierde una baja correlación elemento-total y el coeficiente *alfa* tiende a aumentar, lo que incide en la pertinencia de eliminar ambos ítems.

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Correlación múltiple al cuadrado	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
L3	3,440	2,486	,058	,076	,638
L4	3,600	2,000	,373	,225	,561
L5	3,920	1,868	,421	,271	,542
L6	3,680	1,664	,595	,502	,469
L7	3,860	1,698	,544	,450	,489
L1A	3,880	2,298	,082	,052	,657
L2A	3,540	2,228	,198	,100	,615

Tabla 7.1: Coeficientes alfa si se elimina algún ítem de Orden Lineal del estudio exploratorio.

Nos interesa mantener el ítem L3, referente al concepto “antes que”, pues aún cuando su situación en la escala es similar a los otros dos,

proporciona información específica sobre el concepto y también sobre los correspondientes a L1A y L2A ya que el elemento a identificar es *el último de los anteriores y el primero de los siguientes*.

Con ello, el coeficiente de fiabilidad de la escala reducida a cinco ítems, para los 25 sujetos de la muestra, es:

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	Nº de elementos
0,681	0,641	5

Tabla 7.2: Coeficiente de fiabilidad para los cinco últimos ítems de Orden Lineal del estudio exploratorio.

Resultando un coeficiente *alfa* muy próximo a 0,7, lo que supone una fiabilidad aceptable.

Estos resultados, junto con las consideraciones anteriores, avalan la decisión de mantener los ítems L3, L4, L5, L6 y L7 en el presente estudio, y eliminar los grupos L1A y L2A, quedando el conjunto reducido a los cinco ítems citados.

### Tareas ordinales con cantidades continuas.

Las modificaciones efectuadas en las tareas de este conjunto son de dos tipos:

- 1º. Mejora de la interfaz visual e interactiva de las mismas, como resultado de la aplicación del *principio de coherencia*, eliminando elementos gráficos que pueden dar lugar a confusión de los objetos relevantes con el fondo y aumentando tanto el tamaño de las piezas móviles (los troncos) como el área en píxels del entorno de los huecos que favorece la colocación de las mismas. Estas modificaciones facilitan la realización de las tareas, especialmente a los sujetos de menor edad.
- 2º. Mejora fundamental en la precisión del registro y almacenamiento de la información recogida mediante la introducción de nuevos registros (variables globales en los programas) que distinguen los intentos válidos de los nulos, erróneos o contradictorios que pudieran realizar los sujetos con los troncos correctos, y así mismo identifican, en su caso, el tipo de in-

tento con el tronco incorrecto, esto es, si es nulo, erróneo o contradictorio.

Además, se han introducido otros registros nuevos que facilitan la evaluación de las tareas o ítems así como la de las estrategias que puede usar el sujeto en su realización\*.

### Tareas recursivas mediante alternancias cíclicas.

Este conjunto se ha modificado de modo esencial desde el punto de vista epistémico: se ha transformado en un conjunto de ítems de naturaleza recursiva.

Se han mantenido dos de los ítems usados en el estudio exploratorio (etiquetaje), que serán ahora los dos primeros, y se han modificado los cuatro últimos. En los dos primeros las alternancias vienen apoyadas por el uso de un color determinado y, por tanto, podrán resolverse por simple etiquetaje. El tercero coincide con el segundo salvo que en este tercer ítem se prescinde del color en la alternancia, de modo que no podrá resolverse por etiquetaje siendo necesaria la utilización de capacidades recursivas para su resolución; su introducción obedece a la necesidad de someter a prueba la hipótesis **H6.2**, en su primer aspecto<sup>†</sup>. Los restantes ítems son de naturaleza puramente recursiva, de modo que el sujeto deberá resolverlos sin apoyo de colores mediante la continuación de la secuencia por localización de sus elementos, recurriendo exclusivamente a las capacidades recursivas basadas en la alternancia.

Los ítems se ordenan por grados de dificultad creciente. Así, los tres primeros ítems (más sencillos) se han diseñado de modo que en la series que incorporan el operador siguiente actúa dos veces mientras que en las series correspondientes a los tres últimos (más complejos) el operador siguiente actúa tres veces.

Ampliamos así el dominio epistémico de estas tareas<sup>‡</sup>, de acuerdo con las conclusiones del estudio exploratorio, de modo que se correspondan con el *estado recursivo* del MECOR y con el propósito de contrastar las hipótesis de la investigación.

### Tareas de orden con cantidades discretas.

Las modificaciones realizadas en este conjunto son de los mismos

\*Para más detalles véase más adelante la sección 7.6.2.3, página 366 y siguientes.

<sup>†</sup>La confirmación del primer aspecto de esta hipótesis corresponde a la consecución del objetivo

**O5.4**. Véanse los apartados 1.4.3 y 1.4.4, página 23 y siguientes, del capítulo 1.

<sup>‡</sup>Véase más adelante la sección 7.6.4, en la página 399 y siguientes.

tipos realizados en el caso de las tareas ordinales con cantidades continuas.

En primer lugar, se ha mejorado la interfaz interactiva de las mismas como resultado de la aplicación del *principio de coherencia*, aumentando tanto el tamaño de las piezas móviles (grupos de frutas o de escalones) como el área en píxels del entorno de los huecos, lo que favorece la colocación de los mismos, especialmente a los sujetos de menor edad.

En segundo lugar, se ha mejorado esencialmente la precisión del registro y almacenamiento de la información de estas tareas, mediante la introducción de nuevos registros (variables globales en los programas) que distinguen los intentos válidos de los nulos, erróneos o contradictorios que pudieran realizar los sujetos con las piezas móviles correctas. Y que identifican, en su caso, el tipo de intento con la pieza incorrecta, esto es, si es nulo, erróneo o contradictorio.

También se han introducido, en este caso, nuevos registros que facilitan la evaluación de las tareas o ítems y la de las estrategias que puede usar el sujeto en su realización\*.

#### Otras modificaciones y mejoras.

En los cuatro conjuntos se ha aumentado la resolución de las interfaces de 800x600, utilizada en el estudio exploratorio, a 1024x768. Con ello se consigue, además de una mejor visualización, un mayor tamaño en la pantalla del ordenador de todos los elementos gráficos que las integran.

#### 7.6 El instrumento multimedia: conjuntos y tareas individuales.

En las secciones que siguen, analizaremos los ítems de los cuatro conjuntos de tareas que integran el instrumento multimedia, en correspondencia con los respectivos estados del modelo evolutivo de capacidades ordinales y recursivas (MECOR)<sup>†</sup>; precisando, para cada ítem, su objetivo, descripción y características técnicas e identificando las correspondientes funciones onto–epistémica y epistémica.

A continuación, para cada uno de los conjuntos, pondremos de manifiesto los mecanismos de registro de la información establecidos en consonancia con los objetivos del estudio. La información recogida en dichos registros se

\*Véase más adelante la sección 7.6.3.3, en la página 390 y siguientes.

<sup>†</sup>Véase dicho modelo en la sección 6.3, página 302 y siguientes, capítulo 6.



almacena y se incorpora posteriormente a las variables del estudio, según se expone en la sección 7.7, página 412 y siguientes, del presente capítulo.

El diseño y construcción del instrumento multimedia se realiza según lo indicado en la sección 6.5, página 314 y siguientes del capítulo 6, en la que se asignaron las funciones ontológicas a los conjuntos de tareas (subsección 6.5.1) y se aplicó el Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia\* (MGDIM) a la implementación concreta de este instrumento (subsección 6.5.2).

En las entrevistas individuales y en la en la aplicación del instrumento multimedia a los sujetos, se tendrá en cuenta el doble objetivo mencionado al final de la subsección 6.5.1, en el sentido de evitar la monotonía y reducir la fatiga que pudieran producir la ejecución conjuntos de ítems demasiado similares de modo continuado. Por ello, el orden de ejecución de los conjuntos será: en primer lugar, las tareas de orden lineal (primer conjunto); en segundo lugar, las tareas de orden con cantidades continuas (segundo conjunto); en tercer lugar, las tareas recursivas (cuarto conjunto); y por último, las tareas de orden con cantidades discretas (tercer conjunto).

### 7.6.1 Tareas de orden topológico u orden lineal infralógico.

Éstas constituyen el primer conjunto de ítems o tareas propias del estudio y corresponden al primer estado del modelo evolutivo propuesto.

Mediante las mismas pretendemos observar y evaluar la capacidad de los sujetos de la muestra para establecer un orden lineal en un conjunto finito de elementos (parte correspondiente al objetivo **O5** y a los subobjetivos **O5.1**, **O5.2** y **O5.3** de la investigación), considerando los conceptos ordinales *antes que* y *después que*, así como la identificación de series ordenadas de tres y de cuatro elementos, partiendo del primer elemento o bien de posiciones intermedias.

En ellas no intervienen relaciones de orden propiamente dichas, sino que el orden viene definido por posiciones en líneas que se recorren de izquierda a derecha y en sentido temporal creciente, a partir del inicio definido por la presencia del personaje principal. De ahí que denominemos a este orden *topológico* o *infralógico* para incidir en el hecho de que la relación que interviene es la que resulta de la simple comparación de posiciones en una estructura geométrica lineal considerada desde el punto de vista de sus propiedades topológicas.

---

\*Véase la sección 6.4, página 308 y siguientes, capítulo 6.

### 7.6.1.1 Características generales.

El conjunto consta de seis ítems o tareas, la primera es introductoria y las otras cinco, de la segunda a la sexta, son los ítems o tareas propiamente dichas, es decir, las que recogen y almacenan la información procedente de las acciones del sujeto.

En concreto, las funciones epistémicas de estas tareas son:

- **Tarea 1:** Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tareas posteriores.
- **Tarea 2:** Determinar si el sujeto aplica correctamente o no el concepto *antes que* a una serie topológica o espacio-temporal.
- **Tarea 3:** Determinar si el sujeto aplica correctamente o no el concepto *después que* a una serie topológica o espacio-temporal.
- **Tarea 4:** Determinar si el sujeto identifica o no una serie completa de tres elementos ordenada linealmente. Es decir, si aplica correctamente y comprende la secuencia: *primero–luego–último*.
- **Tarea 5:** Determinar si el sujeto identifica o no una serie completa de cuatro elementos ordenada linealmente. Es decir, si aplica correctamente y comprende la secuencia: *primero–después–luego–último*.
- **Tarea 6:** Determinar si el sujeto identifica o no una serie completa de cuatro elementos, ordenada linealmente, partiendo de posiciones intermedias. Es decir, si aplica correctamente y comprende la secuencia: *después que–antes que*.

Cada una presenta una ventana o interfaz de planteamiento y otra de solución. Los elementos de información y navegación que aparecen en las ventanas o interfaces de planteamiento, según quedó descrito en la subsección 5.5.2, página 175 y siguientes, del capítulo 3, y como puede verse a continuación, son:

- Una etiqueta situada en la esquina superior izquierda del área de trabajo, fondo verde, que informa de la tarea que se está realizando.
- Un icono de información que permite, si el niño o la situación lo requiere, repetir el mensaje sonoro que plantea la actividad a realizar en la tarea el número de veces que sea necesario, sin más que situar encima el puntero del ratón.
- Una lista desplegable que permite navegar por las distintas tareas, ir a la ventana de introducción de datos o ir a la ventana final del conjunto de tareas, cuya función quedó detallada en la misma subsección 5.5.2.

En las ventanas de solución, como único elemento de navegación se presenta, en la esquina inferior derecha, una flecha que permite pasar a la actividad siguiente haciendo clic sobre ella.

El conjunto comienza con una primera ventana de recogida de información relativa a la clave que identificará a cada uno de los sujetos de la muestra. Este dato junto con los correspondientes a las acciones que realiza cada sujeto de la muestra quedan recogidos en variables globales del programa, que en lo sucesivo llamaremos *registros* y que se describen en el siguiente apartado 7.6.1.3, página 354 y siguientes.

Los datos recogidos en estos registros se almacenan para cada sujeto, una vez realizadas las cinco tareas del conjunto, en un fichero de texto para su posterior proceso y análisis como hemos visto en la sección 7.3.5, página 338.

Las tareas se ejecutan secuencialmente de la primera a la última, permitiendo los elementos de navegación alterar este orden si, por cualquier incidencia, fuera necesario.

Seguidamente se describen y analizan cada uno de estos ítems o tareas.

#### 7.6.1.2 Descripción de las tareas.

La **primera tarea o tarea introductoria** se presenta mediante un mensaje de audio que introduce, a su vez, el conjunto de todas las tareas de orden lineal:

*“Hola voy a contarte algo. Mowgli va a recoger frutas a la selva y encuentra varios caminos. Ayúdale a encontrar el camino correcto”.*

La ficha técnica completa de cada una de ellas se presenta a continuación.


Tarea 1 (Introdutoria)	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger el plátano”.</p>	
<p><math>\Downarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Onto-Epistémica</p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math> Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tareas posteriores.</p> <p style="text-align: center;"><math>\Updownarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Epistémica</p>	
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>Esta primera tarea carece de valor observacional, esto es, sus resultados no se almacenan en ningún registro. En lo que se refiere a su funcionamiento, cuando el sujeto hace clic sobre el camino azul, que es el correcto, el personaje se pone en movimiento, recorre dicho camino, recoge el plátano y se muestra la ventana de solución a la cuestión planteada. Se pretende que el sujeto comprenda que debe hacer clic en el camino que considere correcto.</p>

Tabla 7.3: Ficha técnica 1. Tarea introductoria de orden lineal.

Los cinco ítems o tareas siguientes, de la segunda a la sexta, son los que recogen la información, es decir, son las tareas propias o específicas de esta parte del estudio empírico.

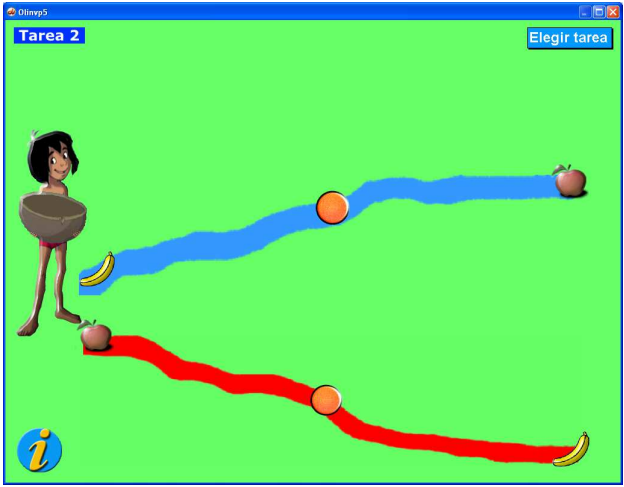
Tarea 2	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger la naranja <b>antes</b> que el plátano”.</p>	
<p><math>\Downarrow</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math> Determinar si el sujeto aplica correctamente o no el concepto <i>antes que</i> a una serie topológica o espacio-temporal sencilla.</p>	
<p style="text-align: center;"><math>\Updownarrow</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Función Epistémica</b></p>	
<p><b>Descripción:</b> Esta tarea plantea al sujeto la localización del <i>anterior inmediato</i> a un objeto en una serie ordenada linealmente. Intervienen dos caminos, azul (incorrecto) y rojo (correcto), y tres frutas en cada uno. Para resolver la tarea, debe identificar previamente el plátano como último elemento de la serie caracterizada por el camino rojo, que es la solución.</p>	

Tabla 7.4: Ficha técnica 2. Segunda tarea de orden lineal.

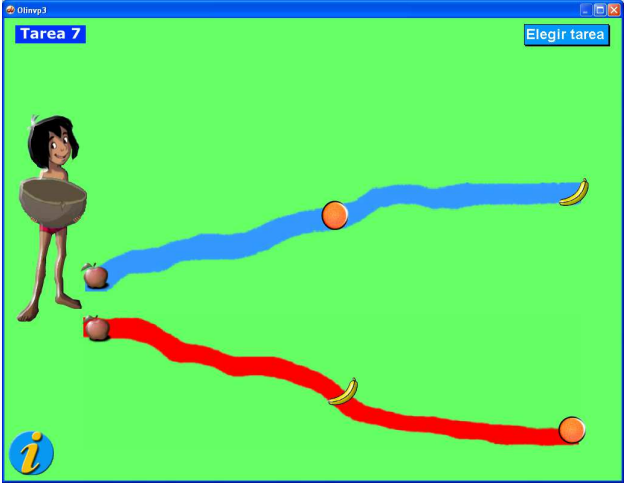
Tarea 3	
<p>Audio <math>\Rightarrow</math> “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger la naranja <i>después que</i> el plátano”.</p>	
<p>Función Orto-Epistémica</p>	
<p>Interfaz <math>\Rightarrow</math></p>	
<p>Objetivo <math>\Rightarrow</math> Determinar si el sujeto aplica correctamente o no el concepto <i>después que</i> a una serie topológica o espacio-temporal sencilla.</p>	
<p>Función Epistémica</p>	
<p>Descripción: Esta tarea plantea al sujeto la localización del <i>siguiente inmediato</i> a un objeto en una serie ordenada linealmente. Intervienen dos caminos, azul (incorrecto) y rojo (correcto), y tres frutas en cada uno. Para resolver la tarea, debe identificar previamente el plátano como elemento intermedio, primero de los que le siguen, en la serie caracterizada por el camino rojo, que es solución.</p>	

Tabla 7.5: Ficha técnica 3. Tercera tarea de orden lineal.

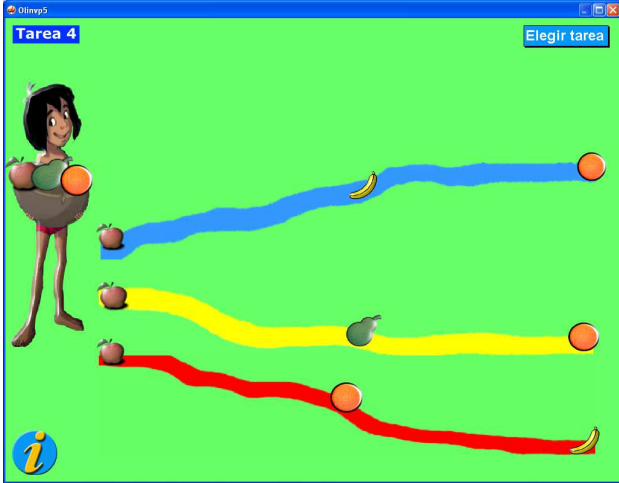
Tarea 4	
<p>Audio <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Downarrow</math></p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Función Onto-Epistémica</p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p>Interfaz <math>\Rightarrow</math></p>	<p>“Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger <b>primero</b> la manzana, <b>luego</b> la pera y por <b>último</b> la naranja”.</p> 
<p>Objetivo <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Updownarrow</math></p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Función Epistémica</p>	<p>Determinar si el sujeto identifica o no una serie completa de tres elementos ordenada linealmente. Es decir, si aplica correctamente y comprende la secuencia: <b>primero-luego-último</b>.</p>
<p>Descripción:</p>	<p>Esta tarea, además del objetivo que plantea, refuerza la anterior, ya que al ser el primer elemento común a las tres series propuestas, la solución, camino amarillo, está determinada por el <i>siguiente inmediato</i> a la manzana, que es la pera en este caso.</p> <p>Intervienen tres caminos, azul (incorrecto), amarillo (correcto) y rojo (incorrecto), y cuatro frutas con tres en cada uno.</p>

Tabla 7.6: Ficha técnica 4. Cuarta tarea de orden lineal.

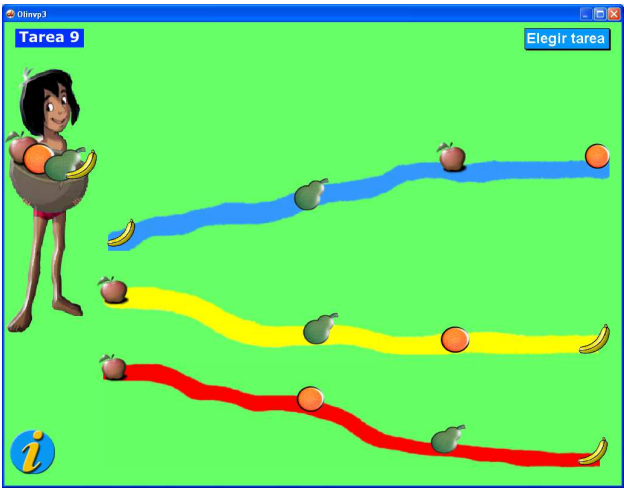
Tarea 5	
<p>Audio <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Downarrow</math></p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Función Onto-Epistémica</p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p>Interfaz <math>\Rightarrow</math></p>	<p>“Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger <b>primero</b> la manzana, <b>después</b> la naranja, <b>luego</b> la pera y por <b>último</b> el plátano”.</p> 
<p>Objetivo <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Updownarrow</math></p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Función Epistémica</p>	<p>Determinar si el sujeto identifica o no una serie completa de cuatro elementos ordenada linealmente. Es decir, si aplica correctamente y comprende la secuencia: <b>primero–después–luego–último</b>.</p>
<p>Descripción:</p>	<p>Nótese que las dos alternativas a considerar, caminos amarillo y rojo, tienen iguales el primer y el último elemento, por lo que la solución, camino rojo, está determinada por el orden de los elementos intermedios o, equivalentemente, por la consideración de la naranja como <i>siguiente inmediato</i> del primer elemento o la pera como <i>anterior inmediato</i> del último elemento. Intervienen tres caminos, azul (incorrecto), amarillo (incorrecto) y rojo (correcto), y cuatro frutas en cada uno.</p>

Tabla 7.7: Ficha técnica 5. Quinta tarea de orden lineal.




Tarea 6	
<p>Audio <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Downarrow</math></p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Función Onto-Epistémica</p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p>Interfaz <math>\Rightarrow</math></p>	<p><math>\Rightarrow</math> “Haz clic en el camino que tiene que seguir Mowgli para coger la pera <b>después</b> que la manzana y el plátano <b>antes</b> que la naranja”.</p> <hr/> 
<p>Objetivo <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Updownarrow</math></p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Función Epistémica</p>	<p><math>\Rightarrow</math> Determinar si el sujeto identifica o no una serie completa de cuatro elementos, ordenada linealmente, partiendo de posiciones intermedias. Es decir, si aplica correctamente y comprende la secuencia: <b>después que-antes que</b>.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>Alternativamente, en esta tarea, puede determinarse la solución, camino amarillo, considerando la naranja como <i>último elemento</i> de la serie, descartando previamente el camino azul cuyo primer elemento no es la manzana.</p> <p>Como podemos observar, intervienen tres caminos, azul (incorrecto), amarillo (correcto) y rojo (incorrecto), y cuatro frutas en cada uno.</p>

Tabla 7.8: Ficha técnica 6. Sexta tarea de orden lineal.

Desde la ventana de solución de esta tarea, el investigador accede a la última ventana del conjunto, haciendo clic en la flecha que aparece en la esquina inferior derecha, o bien desde la opción *Fin* de la lista desplegable en cualquiera de las ventanas de planteamiento, si el sujeto no realiza todas las tareas.

Como vimos en la subsección 5.5.2, página 175 y siguientes, desde ella es posible:

- Pasar a la primera ventana del conjunto para iniciar una nueva entrevista, haciendo clic sobre el botón **Inicio**.
- Repetir una tarea concreta sin que se modifiquen los datos recogidos para las demás, haciendo clic sobre el botón **Elegir tarea**.
- Guardar los valores almacenados en los registros en el archivo de texto correspondiente para su análisis posterior, haciendo clic sobre el botón **Guardar datos**.

#### 7.6.1.3 Registro de las interacciones sujeto-ordenador en las tareas de orden lineal.

El conjunto de registros que recogen la interacción del sujeto con el ordenador en cada una de estas tareas es el siguiente:

Tarea 2					
<i>v21</i>	<i>n21</i>	<i>v22</i>	<i>n22</i>	<i>t2</i>	<i>listaR2</i>

Tarea 3					
<i>v31</i>	<i>n31</i>	<i>v32</i>	<i>n32</i>	<i>t3</i>	<i>listaR3</i>

Tarea 4							
<i>v41</i>	<i>n41</i>	<i>v42</i>	<i>n42</i>	<i>v43</i>	<i>n43</i>	<i>t4</i>	<i>listaR4</i>

Tarea 5							
<i>v51</i>	<i>n51</i>	<i>v52</i>	<i>n52</i>	<i>v53</i>	<i>n53</i>	<i>t5</i>	<i>listaR5</i>

Tarea 6							
<i>v61</i>	<i>n61</i>	<i>v62</i>	<i>n62</i>	<i>v63</i>	<i>n63</i>	<i>t6</i>	<i>listaR6</i>

Los registros se clasifican, por su función, en cuatro tipos:

- *Registros de localización:  $v_{ij}$* . En cada tarea, identifican el camino o los caminos sobre los que el sujeto hace clic.
- *Registros de números de intentos:  $n_{ij}$* . En cada tarea, recogen el número de veces que el sujeto hace clic en cada uno de los caminos.
- *Registros temporales:  $t_i$* . Recogen el tiempo, en segundos, que tarda el sujeto en realizar cada una de las tareas.
- *Listas de acciones:  $listaR_i$* . Recogen la lista de pares  $(v_{ij}, n_{ij})$  que reproducen las acciones sucesivas del sujeto en cada tarea. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las tareas.

A continuación se explica con más detalle la función de cada uno de ellos.

### Registros de localización

El índice  $i$  de los registros  $v_{ij}$  identifica la tarea, varía por tanto de 2 a 6, y el índice  $j$  identifica el camino sobre el que el sujeto hace clic en cada tarea, varía por tanto entre 1 y 2 para las tareas segunda y tercera y entre 1 y 3 en la cuarta, quinta y sexta.

Por ejemplo, los registros  $v_{21}$  y  $v_{22}$  se refieren en primer lugar a la segunda tarea, ya que el primer índice es 2; y en segundo lugar a los caminos que intervienen en ella. El valor 1 del segundo índice identifica el camino rojo y el 2 el camino azul. Los valores que pueden tomar son: 1 para  $v_{21}$  y 2 para  $v_{22}$ . Su misión consiste en informar si el sujeto hace clic sobre el camino 1, de color rojo y correcto, o sobre el camino 2, azul e incorrecto, en la tarea 2.

Para seguir un criterio uniforme, en las demás tareas también hemos asignado el valor 1 del segundo índice y del correspondiente registro  $v_{i1}$  al camino que es solución de la cuestión planteada. Por tanto el valor 1 de los registros  $v_{i1}$  solo se almacena una vez por tarea, ya que cuando el sujeto hace clic sobre el camino correcto por vez primera, finaliza la tarea. Su ausencia indica que el sujeto no ha realizado la  $i$ -ésima tarea.

Con ello los valores asignados a los registros  $v_{ij}$  son:

- Segunda tarea:  $v_{21} = 1$  al camino rojo (correcto),  $v_{22} = 2$  al camino azul (incorrecto).
- Tercera tarea:  $v_{31} = 1$  al camino rojo (correcto),  $v_{32} = 2$  al camino azul (incorrecto).

- Cuarta tarea:  $v41 = 1$  al camino amarillo (correcto),  $v42 = 2$  al camino rojo (incorrecto),  $v43 = 3$  al camino azul (incorrecto).
- Quinta tarea:  $v51 = 1$  al camino rojo (correcto),  $v52 = 2$  al camino amarillo (incorrecto),  $v53 = 3$  al camino azul (incorrecto).
- Sexta tarea:  $v61 = 1$  al camino amarillo (correcto),  $v62 = 2$  al camino rojo (incorrecto),  $v63 = 3$  al camino azul (incorrecto).

### Registros de números de intentos

Los registros  $nij$ , están indexados también mediante dos índices cuyas funciones son idénticas a las descritas para los  $vij$ , esto es, el primer índice informa del número de la tarea, del 2 al 6, y el segundo del camino sobre el que el sujeto ha hecho clic en cada tarea, variando de 1 a 2 para las tareas segunda y tercera y de 1 a 3 en la cuarta, quinta y sexta.

Estos registros recogen el número de intentos que el sujeto ha realizado sobre cada camino en cada tarea, esto es, el número de veces que ha hecho clic sobre cada uno de ellos.

Por tanto, los registros  $ni1$  solo pueden tomar los valores 0, si el sujeto no realiza la tarea, y 1, cuando el sujeto la realiza. Los demás  $nij$  con  $j \neq 1$  pueden tomar valores naturales entre 0 y 10, ya que decidimos no considerar más de 10 errores en cada tarea.

### Registros temporales

Los registros  $ti$  almacenan el tiempo, en segundos, que tarda el sujeto en realizar la tarea  $i$ -ésima, variando  $i$  de 2 a 6. Si alguno de estos registros almacenara el valor cero indicaría que el sujeto no ha realizado la tarea correspondiente.

### Listas de acciones

Finalmente, los registros  $listaRi$  recogen las acciones del sujeto tal como se produjeron en cada tarea, es decir: sobre qué caminos hizo clic y el número de intentos realizados sobre cada camino en cada tarea. Esta lista es en realidad una lista de pares  $(vij, nij)$  que reproducen las acciones sucesivas del sujeto. Si alguna de estos registros almacenara un valor vacío indicaría que el sujeto no ha realizado la tarea correspondiente.

Ejemplos de valores de estas listas son los siguientes:

- ❖ [1, 1], que informa de que el sujeto ha hecho clic sobre el camino correcto en el primer intento.
- ❖ [2, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1], que informa de que el sujeto ha comenzado la tarea haciendo clic tres veces sobre el camino incorrecto y que en el cuarto intento la resolvió finalmente.

La utilidad de este registro en tareas con solo dos caminos es limitada, sin embargo es muy útil en el análisis y en la evaluación de las tareas cuando con más de dos caminos, como es el caso de las tareas cuarta, quinta y sexta de este conjunto.

### 7.6.2 Tareas ordinales con cantidades continuas longitudinales.

Éstas constituyen el segundo conjunto de tareas propias del estudio y corresponden al segundo estado del modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas\* (MECOR), es decir que los sujetos que se hallen en este estado quedarán caracterizados mediante la capacidad para ordenar cantidades continuas longitudinales.

Con este conjunto de tareas se pretende observar y evaluar la capacidad de los sujetos de la muestra para ordenar por tamaños cantidades lineales continuas (parte correspondiente al objetivo **O5** y a los subobjetivos **O5.1**, **O5.2** y **O5.3** de la investigación). Se incluyen la compensación de cantidades y la correspondencia serial objeto-hueco, en relación con el orden. Son de carácter lógico, puesto que el sujeto debe establecer relaciones de orden para realizarlas correctamente, lo que requiere establecer comparaciones analógicas de cantidades continuas utilizando la antisimetría y la transitividad.

En el estudio contemplamos 6 tareas en las que trataremos el orden con independencia de la situación de los objetos en el espacio, aspecto infralógico, haciendo intervenir las relaciones ordinales: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*, referidas a la cantidad continua, sin que intervengan todavía aspectos numéricos y dejando que el sujeto las aborde libremente con el fin de observar si sigue o no de modo natural alguna estrategia en su resolución. Son de carácter no verbal ya que en ninguna se indica al sujeto que proceda con ningún tipo de orden.

En lo que se refiere a las estrategias, nuestro interés se centrará en la aparición y en la evolución del uso por los sujetos de las estrategias: creciente (C), decreciente (D), izquierda-derecha (ID), derecha-izquierda (DI), ensayo y error (EE), ninguna o ausencia de estrategia (N) y no realización de

\*Véase dicho modelo en la sección 6.3, página 302 y siguientes, capítulo 6.

la tarea (X). Asimismo, estudiaremos también la evolución del uso de las agrupaciones de estrategias siguientes:

- a) *Ordinales*: Crecientes y decrecientes.
- b) *Laterales*: Izquierda–derecha y derecha–izquierda.
- c) *No laterales*: Ensayo y error y ausencia de estrategia.
- d) *No ordinales*: Izquierda–derecha, derecha–izquierda, ensayo y error y ausencia de estrategia.

Como veremos, las tareas de la tercera a la sexta incluyen una pieza *sobrante* que no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir. Esta pieza se introduce con el propósito de averiguar la manera en la que los sujetos establecen las correspondencias seriales objeto–hueco. Estudiaremos también el uso de esta pieza así como su evolución con la edad.

#### 7.6.2.1 Características generales

La primera tarea es introductoria y las demás, de la segunda a la sexta, son las tareas propiamente dichas, es decir, las que recogen y almacenan la información procedente de las acciones del sujeto.

La función ontológica del conjunto quedó definida en la sección 6.5.1. Sus funciones epistémicas son las siguientes:

- **Tarea 1**: Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tareas posteriores.
- **Tarea 2**: Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar por tamaño dos objetos lineales y observar las estrategias que utiliza.
- **Tarea 3**: Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar por tamaño dos objetos lineales, a elegir de entre tres, y observar las estrategias que utiliza cuando el tercer objeto, el más corto en este caso, no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir.
- **Tarea 4**: Observar si el sujeto establece o no algún orden por tamaños, las estrategias seguidas y si discrimina o no el elemento sobrante, cuando le pedimos que coloque tres objetos lineales a elegir de entre cuatro, donde uno de ellos (el más largo) no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir.
- **Tarea 5**: Observar si los sujetos utilizan o no, de modo espontáneo, estrategias ordinales en la resolución de la tarea cuando no hay ningún tipo de sugerencia ordinal implícita en la colocación de los huecos. Precisar el papel de la estrategia ordinal izquierda–derecha frente a las estrategias creciente–decreciente y observar también las regularidades que pudieran aparecer en las estrategias de resolución.

- **Tarea 6:** La misma función que la anterior, aumentando el número de objetos a ordenar en ausencia de orden en los huecos. Su objetivo consiste en tratar de distinguir niveles superiores en los sujetos.

Al igual que las anteriores, cada una presenta una ventana o interfaz de planteamiento y otra de solución. Los elementos de información y navegación que aparecen en las ventanas de planteamiento y solución son los comunes, realizando idénticas funciones.

El conjunto de tareas comienza con una primera ventana de presentación en la que se recoge solamente la clave asignada a cada sujeto, véase por ejemplo la figura 5.6 en la página 176, ya que mediante esta clave es posible enlazar los resultados de este conjunto de tareas con resultados obtenidos en otras anteriores y posteriores.

El dato queda recogido en el registro **clave** y se almacenará finalmente, junto con los demás resultados, en el fichero de texto correspondiente en la forma descrita en la sección 7.3.5, página 338.

Se ejecutan secuencialmente de la primera a la última, permitiendo los elementos de navegación alterar este orden si, por cualquier incidencia, fuera necesario.

La **primera tarea** o **tarea introductoria** se presenta mediante un mensaje de audio que introduce, a su vez, el conjunto de todas las tareas de orden con cantidades continuas: “*¿Ves a Mowgli? Quiere ir con Baloo, pero no puede porque se ha caído el tronco que hace de puente. ¿Quieres ayudarlo a pasar?*”.

A continuación, en la forma indicada, el sujeto realiza el conjunto de tareas, cuyo grado de dificultad es progresivo.

Teniendo en cuenta las edades de los niños participantes, para facilitar la colocación de cada pieza en su lugar, tanto en esta tarea como en las posteriores, hemos tolerado un margen de error de 50 pixels en torno a su posición exacta.

## 7.6.2.2 Descripción de las tareas.

Seguidamente se presenta la ficha técnica completa de cada una de ellas.

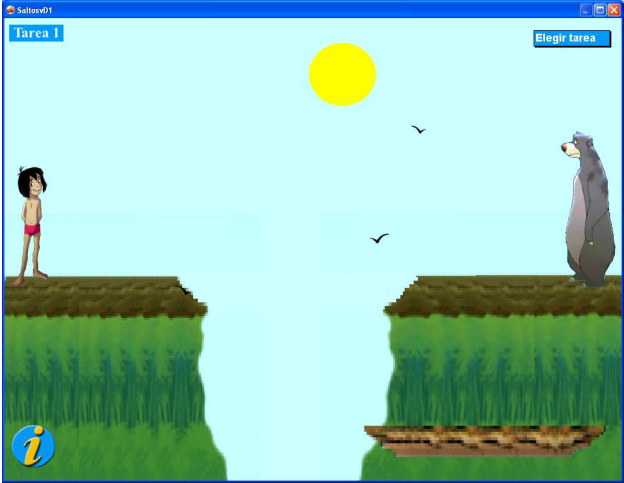
Tarea 1 (Introdutoria)	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Arrastra el tronco y colócalo para que Mowgli pueda pasar junto a su amigo Baloo”.</p>	
<p><math>\Downarrow</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math> Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tareas posteriores.</p> <p style="text-align: center;"><math>\Updownarrow</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Función Epistémica</b></p>	
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>Esta primera tarea carece de valor observacional, esto es, sus resultados no se recogen en ningún registro. En lo que se refiere a su funcionamiento, cuando el sujeto coloca el tronco en la posición adecuada, el personaje se pone en movimiento, pasa al lado del oso y se muestra la ventana de solución a la cuestión planteada. Pretendemos que el sujeto comprenda que debe arrastrar y soltar cada tronco en su correspondiente posición o hueco.</p>

Tabla 7.14: Ficha técnica 7. Tarea introductoria al orden con cantidades continuas.



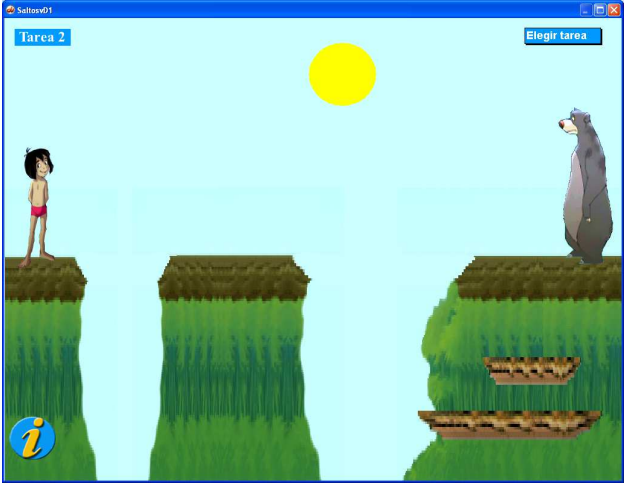
Tarea 2	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Arrastra los troncos y coloca cada uno en su sitio para que Mowgli pueda pasar junto a su amigo Baloo”</p> <p><math>\Downarrow</math></p> <p><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math> Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar por tamaño dos objetos lineales y observar las estrategias que utiliza.</p> <p><math>\Updownarrow</math></p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En la tarea los huecos se han ordenado de izquierda a derecha en orden creciente de tamaños, por tanto la estrategia creciente coincide con la estrategia de colocación izquierda-derecha, y es de esperar que sea la más utilizada.</p> <p>En lo que se refiere a su funcionamiento, cuando el sujeto coloca cada pieza en su lugar, el personaje se pone en movimiento, se encuentra con su amigo oso y se muestra la ventana de solución a la cuestión planteada. Las tareas siguientes funcionan del mismo modo.</p>

Tabla 7.15: Ficha técnica 8. Segunda tarea de orden con cantidades continuas.


Tarea 3	
<p><b>Audio</b> ⇒ “Mowgli quiere pasar junto a su amigo Baloo. Arrastra y coloca los troncos que necesita para conseguirlo”.</p>	
<p>⇕</p> <p><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p>⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	<p>Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar por tamaño dos objetos lineales, a elegir de entre tres, y observar las estrategias que utiliza cuando el tercer objeto, el más corto en este caso, no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En esta tarea, al contrario que en la anterior, los huecos se han ordenado de izquierda a derecha por orden decreciente de tamaños, por tanto la estrategia decreciente coincide con la estrategia de colocación izquierda-derecha, y es de esperar que sea la más utilizada. Pretendemos, además, observar si los sujetos son o no capaces de discriminar el objeto sobrante, es decir, si en la comparación analógica el sujeto discrimina o no este objeto y si en ello influye o no la edad del mismo.</p>

Tabla 7.16: Ficha técnica 9. Tercera tarea de orden con cantidades continuas.

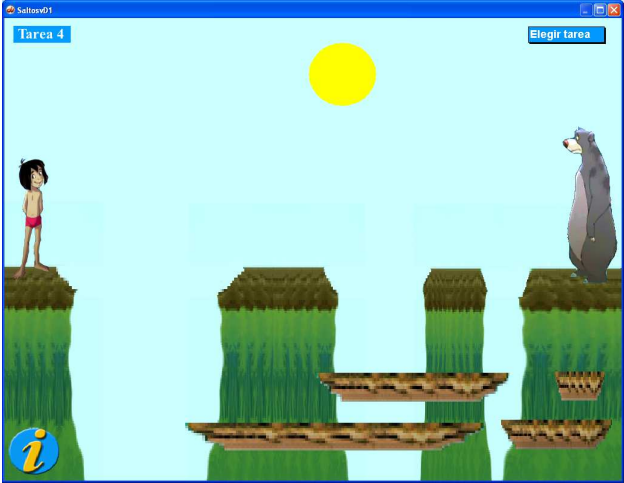
Tarea 4	
<p><b>Audio</b> ⇒ “Mowgli quiere pasar junto a su amigo Baloo. Arrastra y coloca los troncos que necesita para conseguirlo”.</p> <p>⇕</p> <p><b>Función Orto-Epistémica</b></p> <p>⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	<p>Observar si el sujeto establece o no algún orden por tamaños, las estrategias seguidas y si discrimina o no el elemento sobrante, cuando le pedimos que coloque tres objetos lineales a elegir de entre cuatro, donde uno de ellos (el más largo) no se halla en correspondencia serial con ninguno de los huecos a cubrir.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En esta tarea se ha mantenido el orden decreciente en el tamaño de los huecos, por tanto la estrategia decreciente coincide con la estrategia de colocación izquierda-derecha; de nuevo, es de esperar que sea la más utilizada.</p> <p>Pretendemos, además, determinar si la edad del sujeto influye o no en la discriminación del elemento sobrante.</p>

Tabla 7.17: Ficha técnica 10. Cuarta tarea de orden con cantidades continuas.

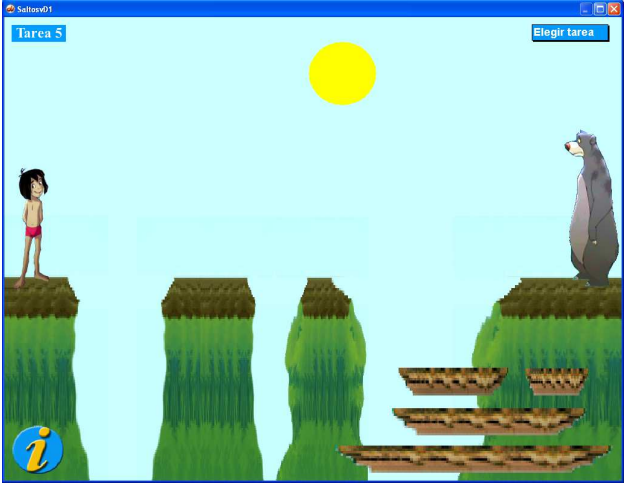
Tarea 5	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> <i>Mowgli quiere pasar junto a su amigo Baloo. Arrastra y coloca los troncos que necesita para conseguirlo.</i></p> <p style="text-align: center;"> <math>\Downarrow</math>  <b>Función Onto-Epistémica</b>  <math>\Uparrow</math> </p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p> 	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math></p> <p style="text-align: center;"> <math>\Updownarrow</math>  <b>Función Epistémica</b> </p>	<p>Observar si los sujetos utilizan o no, de modo espontáneo, estrategias ordinales en la resolución de la tarea, cuando no hay ningún tipo de sugerencia ordinal implícita en la colocación de los huecos. Precisar el papel de la estrategia ordinal izquierda-derecha frente a las estrategias creciente-decreciente y observar también las regularidades que pudieran aparecer en las estrategias de resolución.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En las tareas anteriores los huecos aparecen ordenados, por tamaños, de modo creciente o decreciente. Esta información puede servir de apoyo al establecer la correspondencia serial entre troncos y huecos, pudiendo favorecer la utilización de una determinada estrategia ordinal por parte de los sujetos. Esta tarea, como podemos observar en su interfaz, se distingue de las anteriores por la ausencia de orden en los huecos. Con ella queremos observar la utilización de estrategias ordinales cuando no se suministra información que sugiera o favorezca la utilización de ninguna estrategia ordinal.</p>

Tabla 7.18: Ficha técnica 11. Quinta tarea de orden con cantidades continuas.

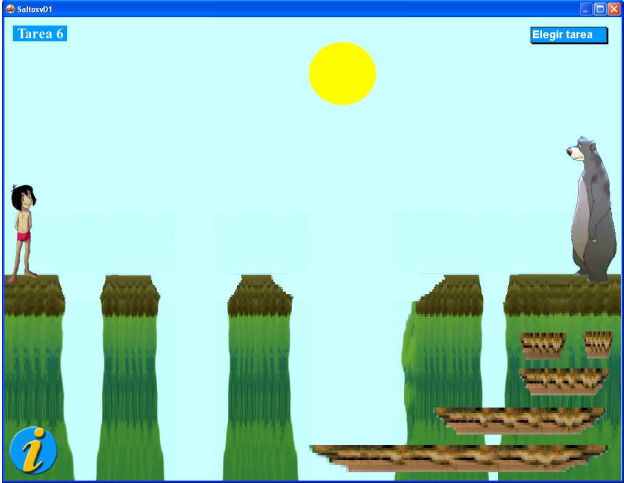
Tarea 6	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> <i>Mowgli quiere pasar junto a su amigo Baloo. Arrastra y coloca los troncos que necesita para conseguirlo.</i></p>	
<p><math>\Downarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Onto-Epistémica</p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Updownarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Epistémica</p>	<p>La misma función que la anterior, aumentando el número de objetos a ordenar en ausencia de orden en los huecos. Su objetivo consiste en tratar de distinguir niveles superiores en los sujetos.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>La tarea añade un grado más de dificultad, con respecto a la anterior, al tener que operar el sujeto con cuatro huecos desordenados y cinco troncos, de los cuales el más largo sobra.</p>

Tabla 7.19: Ficha técnica 12. Sexta tarea de orden con cantidades continuas.

Desde la ventana de solución de esta tarea, el investigador accede a la última ventana del conjunto, haciendo clic en la flecha que aparece en la esquina inferior derecha, o bien desde la opción *Fin* de la lista desplegable en cualquiera de las ventanas de planteamiento, si el sujeto no realiza todas las tareas.

Al igual que en la ventana final del conjunto anterior, desde ella es posible:

- Pasar a la primera ventana del conjunto para iniciar una nueva entrevista, haciendo clic sobre el botón **Inicio**.
- Repetir una tarea concreta sin que se modifiquen los datos recogidos para las demás, haciendo clic sobre el botón **Elegir tarea**.
- Guardar los valores almacenados en los registros en el archivo de texto correspondiente para su análisis posterior, haciendo clic sobre el botón **Guardar datos**.

#### 7.6.2.3 Registro de la interacción sujeto-ordenador en las tareas de orden con cantidades continuas.

Las respuestas y acciones del sujeto quedan recogidas, por tareas, en los registros:

Tarea 2					
<i>v21</i>	<i>n21</i>	<i>e21</i>	<i>ne21</i>	<i>nc21</i>	<i>nn21</i>
<i>v22</i>	<i>n22</i>	<i>e22</i>	<i>ne22</i>	<i>nc22</i>	<i>nn22</i>
<i>t2</i>	<i>listaR2</i>	<i>listaAc2</i>	<i>listae2</i>		
<i>ie21</i>	<i>ie22</i>	<i>ie2</i>			

Tarea 3					
<i>v31</i>	<i>n31</i>	<i>e31</i>	<i>ne31</i>	<i>nc31</i>	<i>nn31</i>
<i>v32</i>	<i>n32</i>	<i>e32</i>	<i>ne32</i>	<i>nc32</i>	<i>nn32</i>
<i>vp3</i>	<i>np3</i>	<i>ep3</i>			
<i>nep33</i>	<i>nep33</i>	<i>nep34</i>	<i>nep34</i>	<i>nmp3</i>	
<i>t3</i>	<i>listaR3</i>	<i>listaAc3</i>	<i>listae3</i>		
<i>ie31</i>	<i>ie32</i>	<i>ie3</i>			

Tarea 4							
<i>v41</i>	<i>n41</i>	<i>e41</i>	<i>ne415</i>	<i>nc415</i>	<i>ne416</i>	<i>nc416</i>	<i>nn41</i>
<i>v42</i>	<i>n42</i>	<i>e42</i>	<i>ne424</i>	<i>nc424</i>	<i>ne426</i>	<i>nc426</i>	<i>nn42</i>
<i>v43</i>	<i>n43</i>	<i>e43</i>	<i>ne434</i>	<i>nc434</i>	<i>ne435</i>	<i>nc435</i>	<i>nn43</i>
<i>vp4</i>	<i>np4</i>	<i>ep4</i>					
<i>nep44</i>	<i>ncp44</i>	<i>nep45</i>	<i>ncp45</i>	<i>nep46</i>	<i>ncp46</i>	<i>nnp4</i>	
<i>t4</i>	<i>listaR4</i>	<i>listaAc4</i>	<i>listae4</i>				
<i>ie41</i>	<i>ie42</i>	<i>ie43</i>	<i>ie4</i>				

Tarea 5							
<i>v51</i>	<i>n51</i>	<i>e51</i>	<i>ne515</i>	<i>nc515</i>	<i>ne516</i>	<i>nc516</i>	<i>nn51</i>
<i>v52</i>	<i>n52</i>	<i>e52</i>	<i>ne524</i>	<i>nc524</i>	<i>ne526</i>	<i>nc526</i>	<i>nn52</i>
<i>v53</i>	<i>n53</i>	<i>e53</i>	<i>ne534</i>	<i>nc534</i>	<i>ne535</i>	<i>nc535</i>	<i>nn53</i>
<i>vp5</i>	<i>np5</i>	<i>ep5</i>					
<i>nep54</i>	<i>ncp54</i>	<i>nep55</i>	<i>ncp55</i>	<i>nep56</i>	<i>ncp56</i>	<i>nnp5</i>	
<i>t5</i>	<i>listaR5</i>	<i>listaAc5</i>	<i>listae5</i>				
<i>ie51</i>	<i>ie52</i>	<i>ie53</i>	<i>ie5</i>				

Tarea 6							
<i>v61</i>	<i>n61</i>	<i>e61</i>					
<i>ne616</i>	<i>nc616</i>	<i>ne617</i>	<i>nc617</i>	<i>ne618</i>	<i>nc618</i>	<i>nn61</i>	
<i>v62</i>	<i>n62</i>	<i>e62</i>					
<i>ne625</i>	<i>nc625</i>	<i>ne627</i>	<i>nc627</i>	<i>ne628</i>	<i>nc628</i>	<i>nn62</i>	
<i>v63</i>	<i>n63</i>	<i>e63</i>					
<i>ne635</i>	<i>nc635</i>	<i>ne636</i>	<i>nc636</i>	<i>ne638</i>	<i>nc638</i>	<i>nn63</i>	
<i>v64</i>	<i>n64</i>	<i>e64</i>					
<i>ne645</i>	<i>nc645</i>	<i>ne646</i>	<i>nc646</i>	<i>ne647</i>	<i>nc647</i>	<i>nn64</i>	
<i>vp6</i>	<i>np6</i>	<i>ep6</i>					
<i>nep65</i>	<i>ncp65</i>	<i>nep66</i>	<i>ncp66</i>	<i>nep67</i>	<i>ncp67</i>		
<i>nep68</i>	<i>ncp68</i>	<i>nnp6</i>					
<i>t6</i>	<i>listaR6</i>	<i>listaAc6</i>	<i>listae6</i>				
<i>ie61</i>	<i>ie62</i>	<i>ie63</i>	<i>ie64</i>	<i>ie6</i>			

A continuación se describen, tanto los índices que intervienen, como los tipos de registros clasificados por su función.

### Índices que intervienen

Para estas tareas hemos definido registros afectados por uno, dos o tres índices numéricos:  $i$ ,  $j$  y  $k$ . El primero, en todos los casos, informa del número de la tarea correspondiente, variando de 2 a 6; el segundo informa del tronco que el sujeto ha arrastrado en cada caso; y el tercero, en las tareas cuarta, quinta y sexta, del hueco en el que el sujeto ha colocado el tronco.

En todas las tareas los troncos se han numerado en orden creciente de tamaños, asignando el valor 1 al más corto y valores sucesivos, en progresión de tamaños, al índice  $j$ . Así, en las tareas segunda y tercera a este índice le hemos asignado el valor 1 para el tronco más corto y el valor 2 para el más largo. En las tareas cuarta y quinta los valores del índice  $j$  son: 1 para el tronco más corto, 2 para el intermedio y 3 para el más largo. Y en la sexta, 1 le corresponde al más corto, 2 al intermedio menor, 3 al intermedio mayor y 4 al más largo.

De modo similar y correlativo se han numerado los huecos en cada tarea. Así en las tareas segunda y tercera, con solo dos huecos, al índice  $k$  se le han asignado los valores: 3, para el hueco más pequeño, y 4 para el más grande; de modo que al valor 1 del índice  $j$  le corresponde el valor 3 del índice  $k$  y al valor 2 del índice  $j$  le corresponde el valor 4 del  $k$ .

En las tareas cuarta y quinta, con tres huecos, al índice  $k$  se le han asignado los valores: 4, para el hueco más pequeño, 5 para el hueco intermedio y 6 para el hueco más grande; de modo que al valor 1 del índice  $j$  le corresponde el valor 4 del índice  $k$ , al valor 2 del índice  $j$  le corresponde el valor 5 del  $k$  y al valor 3 del índice  $j$  le corresponde el valor 6 del  $k$ .

En la sexta tarea, con cuatro huecos, al índice  $k$  se le han asignado los valores: 5, para el hueco más pequeño, 6 para el hueco intermedio menor, 7 para el hueco intermedio mayor y 8 para el hueco más grande; de modo que al valor 1 del índice  $j$  le corresponde el valor 5 del índice  $k$ , al valor 2 del índice  $j$  le corresponde el valor 6 del  $k$ , al valor 3 del índice  $j$  le corresponde el valor 7 del  $k$  y al valor 4 del índice  $j$  le corresponde el valor 8 del  $k$ .



Los registros se clasifican, por su función, en los tipos siguientes:

- *Registros de localización de la acción:  $v_{ij}$ ,  $v_{pi}$ .* Los registros  $v_{ij}$  informan de si el sujeto ha movido o no en la  $i$ -ésima tarea el tronco  $j$ -ésimo. Y los  $v_{pi}$  informan de si el sujeto mueve o no el tronco sobrante, en las tareas en las que tales troncos intervienen.
- *Registros de números totales de intentos:  $n_{ij}$ ,  $n_{pi}$ .* Los registros  $n_{ij}$  recogen el número total de intentos que realiza el sujeto en la tarea  $i$ -ésima para colocar el  $j$ -ésimo tronco en su hueco correspondiente, incluido el intento correcto. Y los  $n_{pi}$  recogen el número total de veces que el sujeto ha movido el tronco sobrante, en las tareas en las que intervienen.
- *Registros de identificación de intentos:  $e_{ij}$ ,  $e_{pi}$ .* Los registros  $e_{ij}$  informan si el sujeto, en la tarea  $i$ -ésima, ha colocado o no de forma incorrecta el tronco  $j$ -ésimo. Y los  $e_{pi}$  informan si el sujeto ha intentado colocar o no el tronco sobrante, en las tareas en que interviene, en alguno de los huecos disponibles.
- *Registros de los números de intentos erróneos, contradictorios y nulos:  $neijk$ ,  $ncijk$ ,  $nnij$ ,  $nepij$ ,  $ncpij$ ,  $nnpi$ .* Estos registros recogen, respectivamente, en la  $i$ -ésima tarea, los números de intentos *erróneos*, *contradictorios* y *nulos* cuando el sujeto coloca troncos válidos (los tres primeros) o el tronco sobrante (los tres últimos) en huecos que no le corresponden, o bien mueve los troncos sin llegar a colocarlos en ningún hueco (intentos nulos).
- *Registros de números totales de intentos no correctos:  $ieij$ ,  $iei$ .* Los registros  $ieij$  recogen, en la  $i$ -ésima tarea, los números totales de *intentos erróneos*, *contradictorios* o *nulos* realizados con cada tronco correcto. Y los registros  $iei$  recogen el número total de *intentos erróneos*, *contradictorios* o *nulos* realizados con todos los troncos correctos o no en la tarea  $i$ -ésima.
- *Registros temporales:  $ti$ .* Recogen el tiempo, en segundos, que emplea el sujeto en realizar cada una de las tareas.
- *Listas de acciones:  $listaRi$ ,  $listaAci$ ,  $listaei$ .* Son listas de valores que recogen, respectivamente, en la tarea  $i$ -ésima: todas las acciones, la secuencia de aciertos y la secuencia de errores del sujeto en la tarea. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las tareas.

Las funciones y características de cada uno de ellos son las siguientes:

### Registros de localización de la acción

Como ya se ha dicho, los registros  $v_{ij}$  informan de si el sujeto ha movido o no en la  $i$ -ésima tarea el tronco  $j$ -ésimo. Sus valores posibles son: 0 si no lo mueve,  $j$  si lo mueve.

Por ejemplo,  $v_{21}$  informa de si el sujeto ha movido o no en la *tarea 2* el *tronco 1* (el más corto) y puede tomar solamente dos valores: 0, si no ha movido este tronco, y 1 si lo ha movido. El registro  $v_{22}$  informa de si el niño ha movido o no en la *tarea 2* el *tronco 2* (el más largo) y puede tomar solamente dos valores: 0, si no ha movido este tronco, y 2 si lo ha movido.

Por tanto, los registros  $v_{ij}$  informan de las elecciones de troncos que hace el sujeto en cada tarea.

De la tercera a la sexta tarea, los registros  $v_{pi}$  almacenan la misma información que los  $v_{ij}$  pero referida a la pieza o tronco que no tiene hueco correspondiente (tronco sobrante). Para ellos el índice  $i$  varía con el número de la tarea para la que interviene dicha pieza, es decir, de 3 a 6.

Por tanto, los  $v_{pi}$  identifican en la tarea  $i$ -ésima si el sujeto mueve o no el tronco sobrante. Sus posibles valores son: 0, si el sujeto no lo mueve; el valor máximo del índice  $j$  en la tarea  $i$ -ésima más una unidad o lo que es lo mismo, el número de troncos válidos en la tarea  $i$ -ésima más una unidad. Es decir que los valores no nulos de estos registros en las tareas que intervienen son:  $vp_3 = 3$ ,  $vp_4 = 4$ ,  $vp_5 = 4$  y  $vp_6 = 5$ .

### Registros de números totales de intentos

Los registros  $n_{ij}$  informan del número total de intentos que realiza el sujeto en la tarea  $i$ -ésima para colocar el  $j$ -ésimo tronco en su hueco correspondiente. Incluyen tanto los intentos erróneos como el intento correcto. Sus valores son números naturales, admitiendo como máximo el valor 14. Es decir hemos decidido no considerar más de 14 intentos erróneos.

Así, por ejemplo,  $n_{21}$  informa del número total de intentos que el sujeto ha realizado en la *tarea 2* para colocar en su sitio (hueco 3) el *tronco 1*, que es el más corto. Y  $n_{22}$  informa, a su vez, del número total de intentos que el niño ha realizado en la *tarea 2* para colocar en su sitio (hueco 4) el *tronco 2*, que es el más largo.

De la tercera a la sexta tarea, los registros  $n_{pi}$  almacenan el número total de veces que el sujeto ha movido el tronco sobrante. Para

ellos, el índice  $i$  varía con el número de la tarea en la que interviene dicha pieza, es decir, de 3 a 6; y sus posibles valores son números naturales: 0, 1, 2, 3, . . . . .

### Registros de identificación de intentos

Los registros  $eij$  informan de si en la tarea  $i$ -ésima se ha colocado o no de forma incorrecta el tronco  $j$ -ésimo. Sus posibles valores son: 0, si no se ha colocado de forma incorrecta; o los números de los huecos no correspondientes al valor de  $j$ , si se ha colocado de forma incorrecta.

Manteniendo las correspondencias entre las numeraciones de troncos y huecos vistas más arriba, por ejemplo, el registro  $e21$  informa de si en la tarea 2 el tronco 1 se ha colocado o no de forma incorrecta. Sus valores posibles son: 0 si no se ha colocado de forma incorrecta; 4 si se ha colocado en el hueco que no le corresponde. Recordemos que en esta tarea intervienen solo dos huecos y que al tronco 1 le corresponde el hueco 3 y al tronco 2 el hueco 4.

Del mismo modo,  $e22$  informa de si en la tarea 2 el tronco 2 se ha colocado o no de forma incorrecta. Sus valores posibles son: 0 si no se ha colocado de forma incorrecta; 3 si se ha colocado en el hueco que no le corresponde.

También, por ejemplo, el registro  $e42$  informa de si en la tarea 4 el tronco 2 (el intermedio) se ha colocado o no de forma incorrecta. Sus valores posibles son: 0 si no se ha colocado de forma incorrecta; 4 o 6 si se ha colocado en huecos que no le corresponden, en el 4 (que es el hueco más pequeño) o en el 6 (que es el más grande) . Recordemos que en esta tarea intervienen tres huecos y que al tronco 1 le corresponde el hueco 4, al tronco 2 el hueco 5 y al tronco 3 el hueco 6.

De la tercera a la sexta tarea, los registros  $epi$  identifican si el sujeto ha intentado colocar o no el tronco sobrante en alguno de los huecos disponibles en cada momento. El índice  $i$  varía, por tanto, de 3 a 6. Y los valores posibles de estos registros son: 0, si el tronco sobrante no se ha intentado colocar en ninguno de los huecos disponibles; el número del hueco en el que se ha intentado colocar el tronco sobrante en la  $i$ -ésima tarea. Es decir, que los valores no nulos de estos registros son:  $ep3 = 3$  o  $4$ , en la tercera tarea (dos huecos);  $epi = 4, 5, 6$ , en las tareas cuarta y quinta (tres huecos);

$ep6 = 5, 6, 7, 8$ , en la sexta tarea (cuatro huecos).

### Registros de los números de intentos erróneos, contradictorios y nulos

Los valores nulos de los registros  $eij$  y  $epi$ , quedan recogidos como *intentos nulos*, ya que los  $nij$  y  $npi$  los registran. Estos intentos ocurren cuando el sujeto en la tarea  $i$ -ésima mueve alguno de los troncos válidos y/o el tronco sobrante, y lo pierde por error al arrastrarlo con el ratón, o bien después de moverlo decide soltarlo al darse cuenta, por comparación con los huecos, de que la elección que ha realizado no es adecuada o prefiere continuar con otra. No se computan como erróneos en la resolución de las tareas.

En lo sucesivo, diremos que un intento es *erróneo* cuando alguno de los troncos válidos o el sobrante se intenta colocar en algún hueco vacío que no le corresponde. Y que un intento es *contradictorio* cuando alguno de los troncos válidos o el sobrante se intenta colocar en algún hueco ya ocupado por algún otro tronco válido.

Los registros  $neijk$ ,  $ncijk$ ,  $nnij$ ,  $nepij$ ,  $ncpij$ ,  $nnpi$  recogen, respectivamente, en la  $i$ -ésima tarea, los números de intentos *erróneos*, *contradictorios* y *nulos* cuando el sujeto coloca troncos válidos (los tres primeros registros) o el tronco sobrante (los tres últimos) en huecos que no le corresponden, o bien mueve los troncos sin llegar a colocarlos en ningún hueco (intentos nulos). Todos estos registros toman valores naturales: 0, 1, 2, 3, . . . . ., limitados por la condición  $nij < 15$ . Y los índices  $i, j, k$  los valores indicados al comienzo de esta sección, según la tarea de que se trate\*.

### Registros de números totales de intentos no correctos

Por comodidad para el análisis posterior, los registros  $ieij$  recogen en la  $i$ -ésima tarea los números totales de *intentos erróneos*, *contradictorios* o *nulos* realizados con cada tronco correcto. Nótese que los  $nij$  recogen los intentos totales correctos e incorrectos, por lo que

\*En la tarea segunda, al no haber tronco sobrante, los registros de tipo  $vp$ ,  $np$ ,  $ep$ , al igual que los de tipo  $nep$ ,  $nep$ ,  $nnp$  están ausentes. Mientras que los de tipo  $neijk$  y  $ncijk$  aparecen con dos índices. Ello es debido a que para el tronco 1 solamente hay una posición errónea o contradictoria, la correspondiente al hueco 4; y para el tronco 2 solamente hay una posición errónea o contradictoria, la correspondiente al hueco 3. Lo que hace innecesaria la consideración del tercer índice. Los  $nn2j$  nos informan en la segunda tarea del número de intentos nulos realizados con los troncos 1 y 2. Recordemos que en esta tarea aparecen solamente dos troncos y dos huecos.

En la tercera tarea sucede lo mismo, y por la misma razón, con  $neijk$  y  $ncijk$  que aparecen con dos índices. Los  $nn3j$  nos informan en esta tarea del número de intentos nulos realizados con los troncos 1 y 2. Y, al haber tronco sobrante, se incorporan los  $vp3$ ,  $np3$ ,  $ep3$ , al igual que los de tipo  $nep3j$ ,  $nep3j$ ,  $nnpi$ .

$iei_j = nij - 1$ , es decir que a los  $nij$  le restamos el intento correcto o válido. Y los registros  $iei$  recogen el número total de *intentos erróneos, contradictorios o nulos* realizados con todos los troncos correctos o no en la tarea  $i$ -ésima. Nótese que índice es la segunda  $i$  en la expresión  $iei$ , la primera hace referencia a la palabra “intentos”. Por lo tanto, es  $iei = \sum_j iei_j + npi$ , variando el índice  $j$  desde 1 hasta el número total de huecos en la tarea  $i$ -ésima, y teniendo en cuenta que para la segunda es  $np2 = 0$  por no haber tronco sobrante. Recordemos que los registros  $npi$  recogen el número total de intentos erróneos, contradictorios o nulos realizados con el tronco sobrante en la  $i$ -ésima tarea.

### Registros temporales

Los registros  $ti$  recogen el tiempo, en segundos, que invirtió el sujeto en realizar la tarea  $i$ -ésima. Hay resaltar que si algún registro temporal  $ti$ , variando  $i$  de 2 a 6, almacena el valor cero significará que el niño no ha realizado la tarea correspondiente.

### Listas de acciones

Los registros *listaRi*, *listaAci* y *listaei* son listas de valores que recogen, respectivamente, en la tarea  $i$ -ésima: todas las acciones, la secuencia de aciertos y la secuencia de errores del sujeto en la tarea. Estos registros tienen un gran interés, ya que con ellas evaluaremos las tareas realizadas por el sujeto.

Concretamente, los registros *listaAci* recogen en la tarea  $i$ -ésima pares de valores  $vij$ ,  $nij$  separados por el signo “V”, que describen la secuencia en la que el sujeto ha colocado los troncos en sus huecos correspondientes, junto con el número total de intentos realizados para cada tronco. Ejemplos de valores de este registro son los siguientes:

- $[2, 1, “V”, 1, 1, “V”, 3, 2, “V”]$ , que informa de que el sujeto, en una tarea en la que intervienen tres troncos, ha comenzado colocando el tronco 2 en su lugar al primer intento, ha seguido colocando el tronco 1 en su lugar al primer intento y ha finalizado la tarea colocando el tronco 3 en su lugar al segundo intento; por lo tanto en la colocación del tercer tronco ha habido, además del intento correcto, otro intento nulo, erróneo o contradictorio, del que dará cuenta, como veremos, el registro *listaei*.
- $[1, 1, “V”, 2, 1, “V”, 3, 1, “V”, 4, 3, “V”]$ , que informa de que el

sujeto, en la sexta tarea en la que intervienen cuatro troncos, ha comenzado colocando el tronco 1 en su lugar al primer intento, ha seguido colocando el tronco 2 en su lugar al primer intento, el tronco 3 en su lugar al primer intento y ha finalizado la tarea colocando el tronco 4 en su lugar al tercer intento; por lo tanto en la colocación del cuarto tronco ha habido, además del intento correcto, dos intentos que pueden ser nulos, erróneos o contradictorios, de los que dará cuenta el registro *listaei*.

Nótese que mediante el uso de este registro se observa de inmediato si el sujeto ha seguido o no alguna estrategia ordinal en la resolución de la tarea. En el primer ejemplo anterior observamos que el sujeto no ha seguido una estrategia creciente ni decreciente, sin embargo, el dato corresponde a la quinta tarea en la que la secuencia 2-1-3 corresponde a una estrategia ordinal en el sentido izquierda-derecha, que es la que ha seguido el sujeto. En el segundo ejemplo observamos claramente que se ha seguido la estrategia creciente 1-2-3-4. Los errores cometidos, descritos por el registro *listaei*, permiten finalmente evaluar ambas tareas.

Los registros *listaei* recogen en la tarea *i-ésima* ternas de valores *vij*, *eij*, *neijk* seguidas del signo “E”, ternas *vij*, *eij*, *ncijk* seguidas del signo “C” o ternas *vij*, *eij*, *nnij* seguidas del signo “N”, que identifican el tipo de error cometido al colocar un tronco en un hueco que no le corresponde, intentos erróneos o contradictorios (signos “E” o “C”), o intentos nulos realizados con cada tronco (signo “N”); junto con el número de intentos en cada caso.

En las tareas segunda y tercera, en las que intervienen solamente dos huecos, las ternas contienen a los registros correspondientes según lo indicado más arriba.

En el caso en el que en la tarea *i-ésima* el sujeto mueva o intente colocar la pieza o tronco sobrante, al que no le corresponde ningún hueco, los registros *listaei* recogen ternas de valores *vpi*, *epi*, *nepij* seguidas del signo “PE”, ternas *vpi*, *epi*, *ncpij* seguidas del signo “PC” o ternas *vpi*, *epi*, *nnpi* seguidas del signo “PN”, que identifican el tipo de error cometido al colocar un tronco o pieza sobrante en algún hueco, intentos erróneos o contradictorios (signos “PE” o “PC”), o intentos nulos realizados con el tronco sobrante (signo “PN”); junto con el número de intentos en cada caso.

En la segunda tarea, en la que no hay troncos sobrantes, las ternas anteriores no se recogen en el registro *listae2*.

Ejemplos de valores de estos registros son los siguientes:

- $[4, 0, 1, "N", 5, 0, 1, "PN", 5, 8, 1, "PE", 2, 7, 1, "E"]$ , que informa de la secuencia de errores cometidos por el sujeto en la tarea: realiza un intento nulo con el tronco 4, otro intento nulo con el tronco sobrante, comete un error intentando colocar el tronco sobrante en el hueco 8 y finalmente comete otro error intentando colocar el tronco 2 en el hueco 7, cuando en este caso le corresponde el 6. Como dos intentos son nulos, el sujeto habría cometido dos errores en la colocación de los troncos. Si, a pesar de los errores, ha habido o no estrategia ordinal en la resolución de la tarea, lo veríamos mediante el registro *listaAci*.
- $[1, 0, 1, "N", 2, 7, 1, "E", 2, 7, 2, "E", 4, 7, 1, "C", 4, 0, 1, "N"]$ , en este caso la secuencia de errores en la tarea es: comienza con un intento nulo con el tronco 1, seguido de dos errores con el tronco 2 que intenta colocar en el hueco 7 (en este caso le correspondería el 6), continúa con un intento contradictorio intentando colocar el tronco 4 en el hueco 7 (ya ocupado por el tronco 3) y finalmente realiza un intento nulo con el mismo tronco 4. En este caso dos intentos son nulos, por lo que el sujeto habría cometido tres errores de colocación en la tarea, siendo uno de ellos contradictorio. De nuevo el registro *listaAci* permite comprobar si, a pesar de los errores, ha habido o no estrategia ordinal en la resolución de la tarea.

A su vez, los registros *listaRi* recogen la secuencia completa de acciones del sujeto en la tarea *i-ésima*. Por tanto, recogen pares de valores *vij*, *nij* seguidos por el signo "V", cuaternas de valores *vij*, *nij*, *eij*, *neijk* seguidos por el signo "E", cuaternas *vij*, *nij*, *eij*, *ncijk* seguidos por el signo "C", cuaternas *vij*, *nij*, *eij*, *nnij* seguidas del signo "N", que identifican si cada tronco se ha colocado en la posición que le corresponde; o si no es así, en qué posición se ha intentado colocar junto con los intentos totales que se van produciendo y los números de intentos erróneos, contradictorios o nulos, según las distintas posibilidades; así como el tipo de intento erróneo, contradictorio o nulo.

En el caso en el que en la tarea *i-ésima* el sujeto mueva o intente colocar la pieza o tronco sobrante, si es que tal tronco interviene,

los registros *listaRi* recogen también las cuaternas de valores *vpi*, *npi*, *epi*, *nepij* seguidas del signo “PE”, las cuaternas *vpi*, *npi*, *epi*, *ncpij* seguidas del signo “PC” o las cuaternas *vpi*, *npi*, *epi*, *nnpi* seguidas del signo “PN”, que identifican el tipo de error cometido al colocar un tronco o pieza sobrante en algún hueco: intentos erróneos o contradictorios (signos “PE” o “PC”), o intentos nulos realizados con el tronco sobrante (signo “PN”); junto con el número total de intentos en los que ha intervenido el tronco sobrante y los números de intentos erróneos, contradictorios o nulos según se van produciendo.

Ejemplos de valores de estos registros son los siguientes:

- [1, 1, 0, 1, “N”, 1, 2, “V”, 2, 1, 0, 1, “N”, 2, 2, “V”, 3, 1, “V”, 4, 1, “V”], que informa de que la secuencia completa de acciones del sujeto en la tarea ha sido: comienza con un intento nulo con el tronco 1, en el segundo intento lo coloca correctamente, sigue con un intento nulo con el tronco 2 y lo coloca correctamente al segundo intento, finaliza colocando correctamente los troncos 3 y 4. Como ha realizado dos intentos nulos, el sujeto ha realizado la tarea sin errores de colocación, además, ha seguido la secuencia de colocaciones correctas 1–2–3–4 por lo que ha seguido una estrategia creciente.
- [4, 1, 0, 1, “N”, 5, 1, 0, 1, “PN”, 5, 2, 8, 1, “PE”, 4, 2, “V”, 2, 1, 7, 1, “E”, 2, 2, “V”, 1, 1, “V”, 3, 1, “V”], en este caso la secuencia completa ha sido: comienza con un intento nulo con el tronco 4, seguido de otro nulo con el tronco sobrante, intenta colocar este tronco erróneamente en el hueco 8, coloca el tronco 4 en su posición al segundo intento, intenta colocar erróneamente el tronco 2 en el hueco 7 (le correspondería el 6), coloca correctamente este tronco en el segundo intento y finaliza colocando correctamente los troncos 1 y 3 al primer intento. Ha cometido dos errores en la tarea, al ser los otros dos intentos nulos. La secuencia de colocación ha sido 4–2–1–3, por lo que no ha seguido ninguna estrategia ordinal en la resolución de la tarea.

Los tres registros *listaRi*, *listaAci* y *listaei* sintetizan y recogen la información almacenada en todos los demás registros, salvo en los temporales, y se han diseñado con el propósito evaluar con comodidad y precisión las acciones realizadas y los resultados obtenidos por el sujeto en el conjunto de tareas. Cuando la secuencia de acciones no es larga, la primera permite evaluar completamente la tarea como



hemos visto en los ejemplos anteriores. Nótese que la primera contiene a las otras dos. Pero cuando dicha secuencia es larga es más cómodo y preciso hacerlo con las dos últimas; de ahí su justificación, aún sabiendo que almacenan información redundante.

### 7.6.3 Tareas ordinales con cantidades discretas.

Éstas constituyen el tercer conjunto de tareas propias del estudio y corresponden al tercer estado del modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas\*

Mediante estas tareas pretendemos, como objetivo general, observar y evaluar en los sujetos la capacidad de establecer órdenes lógicos en conjuntos de cantidades discretas (parte correspondiente al objetivo **O5** y a los subobjetivos **O5.1**, **O5.2** y **O5.3** de la investigación) y, como objetivos específicos, identificar el intervalo de edad y las circunstancias en las que se produce la diferenciación entre cantidad continua y discreta (sub-objetivo **O5.5**) así como el uso espontáneo del conteo ordinal frente a otras estrategias (sub-objetivo **O5.6**). Para ello utilizarán distintas representaciones de cantidades discretas así como la noción de cardinal como *medida* de las mismas, si bien solo a efectos de comparación y asignación de posiciones ordinales, sin que sea necesaria la representación del número, cardinal y ordinal, en cifras arábigas.

Se proponen 6 tareas, divididas en dos subconjuntos de tres, que se refieren a objetos que el sujeto debe ordenar recurriendo, entre otras estrategias e instrumentos, a las ideas de número y secuencia numérica, haciendo intervenir relaciones ordinales: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que* referidas al número de objetos, y dejando que el sujeto las aborde libremente con el fin de observar si sigue o no de modo natural estrategias ordinales en su resolución. Son tareas no verbales ya que en ninguna se indica al sujeto que proceda con ningún tipo de orden.

En el primer subconjunto las cantidades se representan mediante distintas agrupaciones discretas de frutas, mientras que en el segundo, en relación con el primer objetivo específico (**O5.5**) anteriormente mencionado, se representan mediante bloques, formados por escalones, cuyas magnitudes pueden interpretarse como cantidades continuas (alturas de los bloques) o como cantidades discretas (número de escalones del bloque). Dos tareas más sirven de introducción y de elemento motivador en cada uno de dichos subconjuntos.

En lo que se refiere a las estrategias, en este conjunto de tareas tomaremos

---

\*Véase dicho modelo en la sección 6.3, página 302 y siguientes, capítulo 6.

en consideración el uso, la evolución y las interrelaciones de dos tipos de estrategias que denominaremos *estrategias locales* y *estrategias globales*.

Las *estrategias locales* son las que utilizan o pueden utilizar los sujetos en las tareas individuales. Estas estrategias son las siguientes: creciente (C); decreciente (D); las correspondiente a los casos en los que el sujeto utiliza las piezas móviles\* de izquierda a derecha (PID), de derecha a izquierda (PDI), primero de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda (PIDI) o que comienza colocando la primera pieza móvil de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda, combinándola luego con estrategias creciente o decreciente; estrategias derecha-izquierda (ADI); izquierda-derecha (AID); ensayo y error (EE); ninguna o ausencia de estrategia (N) y tarea no realizada (X). Todas estas estrategias se agruparán posteriormente de la siguiente manera:

- a) *Ordinales*: Crecientes (C) y decrecientes (D).
- b) *Laterales*: Izquierda-derecha y derecha-izquierda (PDI, PID, ADI, AID, PIDI, PID-C, PID-D, PDI-C y PDI-D).
- c) *No laterales*: Ensayo y error (EE) y ausencia de estrategia (N).
- d) *No ordinales*: Izquierda-derecha, derecha-izquierda, ensayo y error y ausencia de estrategia.

Asimismo, con el fin de alcanzar los objetivos anteriormente mencionados, tomaremos también en consideración otras estrategias que no registra automáticamente el sistema de recogida de la información asociado a estas tareas<sup>†</sup>. Para identificar estas estrategias se planteará a los sujetos el breve cuestionario que se describe más adelante, en la sección 7.6.3.4, página 398 y siguientes del presente capítulo. Las preguntas del mismo se formularán cuando el sujeto concluya las tareas tercera y cuarta (primer subconjunto) así como las tareas séptima y octava (segundo subconjunto).

Estas estrategias se aplican por los sujetos en todas las tareas del subconjunto correspondiente, ya que sus respuestas<sup>‡</sup> se referirán a todas las tareas del mismo. Por ello las llamaremos *estrategias globales*.

Las estrategias globales a considerar, ya que no se observaron otras posibles, son las siguientes:

---

\*En relación con estas estrategias, véase la subsección 5.10.2.1, página 258 y siguientes, Estudio Exploratorio.

<sup>†</sup>En principio, se podría haber diseñado dicho sistema de modo que tales estrategias quedasen registradas, sin embargo, se ha optado por no hacerlo. Véase la justificación de esta decisión en la sección 7.6.3.4, página 398 y siguientes del presente capítulo.

<sup>‡</sup>Véanse las tablas D.6 y D.7, en las páginas 747 y 751, del anexo D

- CP: comparación de tamaños, sin referirse explícitamente a la cantidad discreta o a la longitud.
- CF: comparación de formas, refiriéndose a la forma explícitamente.
- EE: ensayo y error.
- PC: protoconteo. Se usa el conteo de modo no sistemático y con errores manifiestos.
- CL: comparación de longitudes o alturas.
- CT: se usa el conteo\* en la realización de las tareas.
- CP-CT: se mezcla compensación por tamaños con el conteo.
- CL-CT: se mezcla comparación de longitudes con conteo.

Se admite como supuesto básico que un sujeto que realiza todas o la mayoría de las tareas reconociendo la cantidad discreta y usando las estrategias ordinales junto con el conteo, usa el *conteo ordinal* en la resolución y ha asimilado y usa con competencia la secuencia numérica en sus aspectos ordinal y cardinal, al menos en lo que se refiere a los primeros números.

Los sujetos que se hallen en este estado quedarán caracterizados mediante la capacidad para establecer órdenes en el sentido anterior.

Las tareas tercera, cuarta y octava incluyen una pieza *sobrante* con los propósitos que se detallan en la parte correspondiente a las tareas de orden con cantidades discretas de la sección 6.5.1, página 315 y siguientes del capítulo 6. Estudiaremos también el uso de esta pieza así como su evolución con la edad.

En la implementación de las tareas incluimos mecanismos que permiten recoger la interacción de los sujetos con el instrumento e identificar las estrategias locales que utiliza en la resolución, por lo que dicha información quedarán recogida en registros adecuados según veremos más adelante. Las estrategias globales, como ya se ha dicho, se determinarán complementando el método anterior con la observación de las acciones del sujeto en la entrevista y la realización del cuestionario de preguntas verbales que le hará el investigador de la forma indicada.

#### 7.6.3.1 Características generales.

Como se ha dicho, el presente conjunto de tareas se divide en dos partes, la primera integrada por las tareas segunda, tercera y cuarta; y la segunda, por las tareas sexta, séptima y octava. Las tareas primera y quinta servirán de introducción a cada una de las partes o subconjuntos.

---

\*No significa que el sujeto utilice el *conteo ordinal* correctamente al establecer las correspondencias, sino que manifiesta usarlo. Si lo hace o no correctamente, se observará en la valoración ulterior de las tareas.

Las funciones ontológicas del conjunto, y de los dos subconjuntos que lo forman, quedaron definidas en la sección 6.5.1 (página 315 y siguientes) del capítulo 6.

Recordamos que, en el primero de ellos, el sujeto debe arrastrar y colocar varias cantidades discretas, de una a cinco frutas, hasta sus posiciones correctas que se hallan en huecos de arboles colocados de diversas maneras. Las cantidades de frutas y los huecos de los árboles se hallan en correspondencia serial, que determinará de nuevo la función epistémica del ítem. Y en el segundo, deberá arrastrar y colocar hasta su posición correcta varias piezas formadas por una cantidad discreta de escalones, de modo que mediante pasos sucesivos forme una escalera por la que subirá el personaje principal para alcanzar la fruta que se halla en un árbol en posición elevada, al final de la escalera. La correspondencia serial entre las piezas y los huecos puede establecerse, principalmente, bien mediante el número de escalones que forman cada una, por conteo, asignando al primer hueco la de dos escalones, al segundo la de tres, etcétera; o bien por tamaños o alturas asignando a al primer hueco la pieza más pequeña, al segundo la siguiente en tamaño, etcétera. La función epistémica define el tamaño de la escalera y, por tanto, el número de piezas a colocar.

Recordamos también que, en el segundo caso, las piezas son bloques formados por conjuntos de dos a seis escalones que el sujeto puede interpretar como estructuras discretas, contando el número de escalones de cada una, o como estructuras continuas, por ejemplo: pieza pequeña, mediana o grande, si no se produce el conteo.

Las funciones epistémicas, por grado de dificultad, son las siguientes:

- **Tarea 1:** Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tres tareas siguientes.
- **Tarea 2:** Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar tres cantidades discretas, de una a tres frutas, mediante la correspondencia serial hueco–fruta; así como la estrategia local que utiliza.
- **Tarea 3:** Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar tres cantidades discretas, de una a tres frutas, mediante la correspondencia serial hueco–fruta, cuando intervienen cuatro grupos de frutas de los que hay que elegir tres, y si es capaz de discriminar el elemento sobrante (el de 4 frutas). Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.
- **Tarea 4:** Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar cuatro cantidades discretas, de una a cuatro frutas, mediante la correspondencia serial hueco–fruta, cuando intervienen cinco grupos de frutas de los

que hay que elegir cuatro, y si es capaz de discriminar el elemento sobrante (el de 5 frutas). Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.

- **Tarea 5:** Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tres últimas tareas.
- **Tarea 6:** Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar tres bloques, de uno a tres escalones, mediante la correspondencia hueco-bloque, cuando el más sencillo (el de un escalón) está colocado en su hueco y debe colocar los otros dos. Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.
- **Tarea 7:** Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar cuatro bloques, de uno a cuatro escalones, mediante la correspondencia hueco-bloque, cuando el más sencillo (el de un escalón) está colocado en su hueco y debe colocar los otros tres. Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.
- **Tarea 8:** Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar cinco bloques, de uno a cinco escalones, mediante la correspondencia hueco-bloque, cuando el más sencillo (el de un escalón) está colocado en su hueco e intervienen cinco bloques de los que debe elegir cuatro, y si es capaz de discriminar el bloque sobrante (el de 6 escalones). Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.

Mediante estas tareas, junto con las respuestas de los sujetos a las preguntas del cuestionario, que determinarán las estrategias globales que utilizan, pretendemos alcanzar los objetivos mencionados al comienzo de esta sección.

Nuevamente, los elementos de información y navegación que aparecerán en todas las ventanas de planteamiento y solución son los comunes, realizando funciones análogas, véase la subsección 5.5.2, página 175 y siguientes, capítulo 3.

También las tareas de este conjunto se ejecutan secuencialmente de la primera a la última, permitiendo los elementos de navegación alterar este orden si, por cualquier incidencia, fuera necesario.

Igual que los anteriores, el conjunto comienza con una ventana de presentación en la que el investigador escribe la clave asignada al sujeto, según vimos en la sección 6.6, página 322 y siguientes del capítulo 6. El dato quedará recogido en el registro **clave** y se almacenará finalmente, junto con los demás resultados, en el fichero de texto correspondiente en la forma descrita en la sección 7.3.5, página 338 del presente capítulo.

Al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, para facilitar

la colocación las piezas en su lugar, dadas las edades de los niños, hemos tolerado un margen de error de 50 pixels en torno a la posición exacta de cada pieza.

### 7.6.3.2 Descripción de las tareas.

A continuación presentamos la ficha técnica de cada una de ellas.

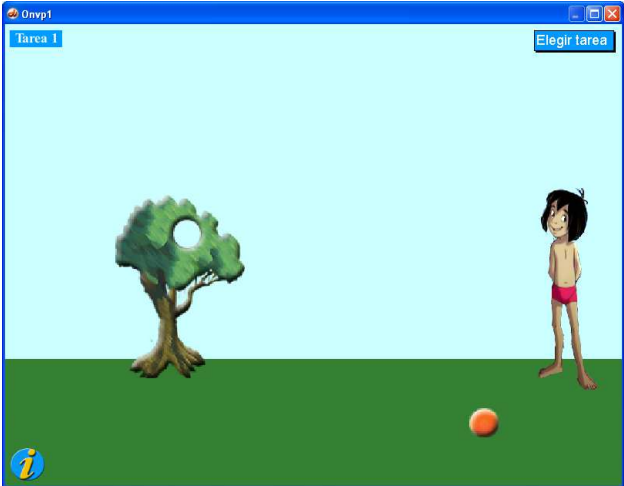
<b>Tarea 1 (Introdutoria)</b>	
<b>Audio</b> $\Rightarrow$	<i>“Mowgli quiere que coloques la fruta en el árbol. Para conseguirlo arrastra la naranja hasta el hueco”.</i>
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg); margin-right: 10px;">Función Onto-Epistémica</div> <div style="text-align: center;"> <math>\Downarrow</math>  <math>\Uparrow</math> </div> </div>	
<b>Interfaz</b> $\Rightarrow$	
<b>Objetivo</b> $\Rightarrow$	Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno multimedia en el que van a desarrollarse las tres siguientes y familiarizarle con las acciones específicas requeridas para su resolución.
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Función Epistémica</div>	
<b>Descripción:</b>	Esta tarea carece de valor observacional, esto es, sus resultados no se almacenan en ningún registro. Pretendemos que el sujeto comprenda que debe arrastrar la fruta y soltarla en el hueco que hay en el árbol. Y que debe realizar esta acción para resolver las siguientes tareas.

Tabla 7.25: Ficha técnica 20. Tarea introductoria al primer subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas.

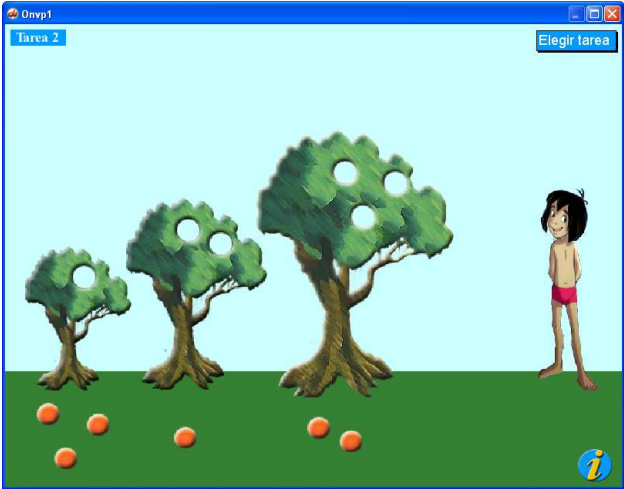
<b>Tarea 2</b>	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Mowgli quiere que coloques las naranjas en los árboles. Para conseguirlo arrástralas hasta sus sitios. ¡Pero fíjate bien!”.</p>	
<p><math>\Downarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Onto-Epistémica</p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Updownarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Epistémica</p>	<p>Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar tres cantidades discretas, de una a tres frutas, mediante la correspondencia serial hueco-fruta; así como la estrategia local que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En este caso hemos presentado los árboles ordenados por tamaño, de izquierda a derecha, y también según el número de huecos que presentan. Por tanto la estrategia creciente coincide con la estrategia de colocación izquierda-derecha. Nótese que al presentar los objetos desordenados en el suelo, estamos favoreciendo el uso de estrategias de conteo o de repentización, al constar los objetos y los huecos de tres o menos elementos.</p> <p>Sin embargo, en la resolución de la correspondencia serial pueden utilizarse otras estrategias, como son: la compensación objeto-hueco por semejanza de formas, por tamaños objeto-árbol (relaciones <i>más que</i>, <i>menos que</i>) o la ordenación lateral izquierda-derecha.</p>

Tabla 7.26: Ficha técnica 21. Segunda tarea de orden con cantidades discretas.

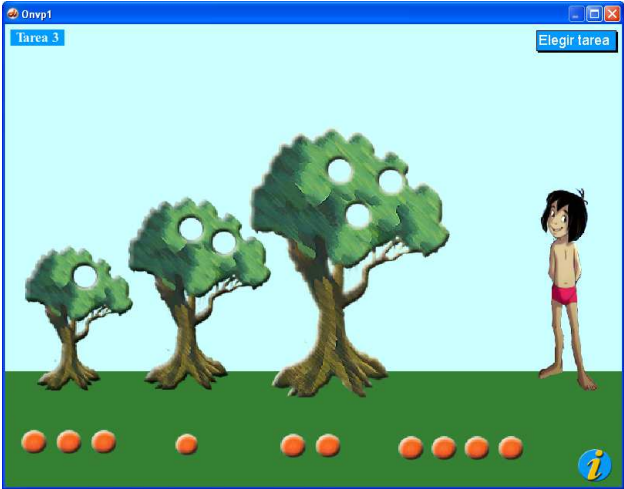
Tarea 3	
<p><b>Audio</b> ⇒ “Mowgli quiere que coloques las naranjas en los árboles. Para conseguirlo arrástralas hasta sus sitios. ¡Pero fíjate bien!”.</p>	
<p>⇒ <b>Función Onto-Epistémica</b> ⇒</p>	
<p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	<p>Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar tres cantidades discretas, de una a tres frutas, mediante la correspondencia serial hueco-fruta, cuando intervienen cuatro grupos de frutas de los que hay que elegir tres, y si es capaz de discriminar el elemento sobrante (el de 4 frutas). Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En este caso hemos presentado los árboles ordenados por tamaño, de izquierda a derecha, y también según el número de huecos. La estrategia creciente coincide de nuevo con la estrategia de colocación izquierda-derecha. Los objetos se presentan desordenados en el suelo y en forma lineal, sin relación con la forma de los huecos. Con ello estamos eliminando la estrategia de compensación objeto-hueco por semejanza de formas y favoreciendo la utilización de la estrategia de conteo. Aún más, la presencia de la pieza sobrante (de cuatro frutas) favorece claramente la estrategia de conteo, al dificultar la repentización y la correspondencia por tamaños.</p>

Tabla 7.27: Ficha técnica 22. Tercera tarea de orden con cantidades discretas.



Nótese, sin embargo, que es posible realizar la tarea anterior con una combinación de estrategias de tamaño, de la pieza más pequeña a la más grande, y lateral izquierda–derecha.

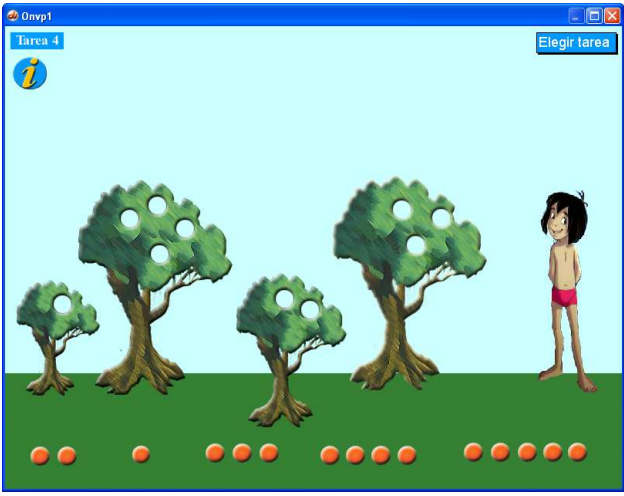
<b>Tarea 4</b>	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Mowgli quiere que coloques las naranjas en los árboles. Para conseguirlo arrástralas hasta sus sitios. ¡Pero fíjate bien!”.</p> <p><math>\Downarrow</math></p> <p><b>Función Onto–Epistémica</b></p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Updownarrow</math></p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	<p>Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar cuatro cantidades discretas, de una a cuatro frutas, mediante la correspondencia serial hueco–fruta, cuando intervienen cinco grupos de frutas de los que hay que elegir cuatro, y si es capaz de discriminar el elemento sobrante (el de 5 frutas). Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En este caso los árboles aparecen desordenados y los de tres y cuatro huecos presentan igual tamaño. Con ello pretendemos que la correspondencia serial, en el caso de establecerse, esté basada en el uso del conteo, frente a otras estrategias o combinaciones de estrategias.</p>

Tabla 7.28: Ficha técnica 23. Cuarta tarea de orden con cantidades discretas.

Con la tarea anterior finaliza la primera parte. La siguiente es la tarea introductoria de la segunda parte.

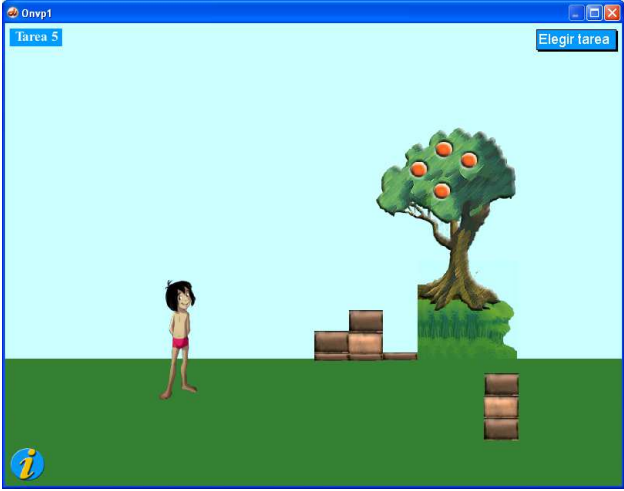
Tarea 5 (Introductoria 2ª Parte)	
<p><b>Audio</b> ⇒ “Mowgli quiere coger la fruta del árbol. Para conseguirlo coloca la pieza que falta”.</p>	
<p>⇕</p> <p><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p>⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	<p>Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno multimedia en el que va a desarrollarse esta parte y familiarizarle con las acciones específicas requeridas para la resolución de las tres tareas siguientes.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>Esta tarea carece de valor observacional, esto es, sus resultados no se recogen en ningún registro.</p> <p>Como podemos observar, al colocar la pieza, se forma una escalera por la cual asciende el personaje para alcanzar la fruta.</p> <p>Llegado este momento, el investigador aclarará a cada sujeto en la entrevista esta circunstancia e insistirá en la necesidad de formar la escalera para que el personaje consiga alcanzar la fruta.</p>

Tabla 7.29: Ficha técnica 24. Tarea introductoria al segundo subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas.


Tarea 6	
<p><b>Audio</b> ⇒ “Mowgli quiere coger la fruta del árbol. Para conseguirlo, fíjate bien y ayúdale, coloca las piezas que necesita”.</p>	
<p>⇒</p> <p>Función Onto-Epistémica</p> <p>⇒</p> <p>Interfaz ⇒</p>	
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p>Función Epistémica</p>	<p>Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar tres bloques, de uno a tres escalones, mediante la correspondencia hueco-bloque, cuando el más sencillo (el de un escalón) está colocado en su hueco y debe colocar los otros dos. Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En lo que se refiere a su funcionamiento, cuando el sujeto coloca cada pieza en el hueco correspondiente, el personaje asciende por la escalera y alcanza la fruta.</p>

Tabla 7.30: Ficha técnica 25. Sexta tarea de orden con cantidades discretas.

Las dos últimas, **tareas séptima y octava**, comienzan con el mismo mensaje de audio. El propósito fundamental de ambas consiste en hacer posible la observación de niveles superiores a la hora de valorar las capacidades ordinales de los sujetos.

Aunque es posible realizar correctamente estas dos últimas tareas con una combinación de estrategias de tamaño, de la pieza más pequeña a la más grande, y lateralidad izquierda-derecha, la ausencia de orden en la colocación

de los bloques de escalones en las interfaces o ventanas de planteamiento favorecen la estrategia de conteo.

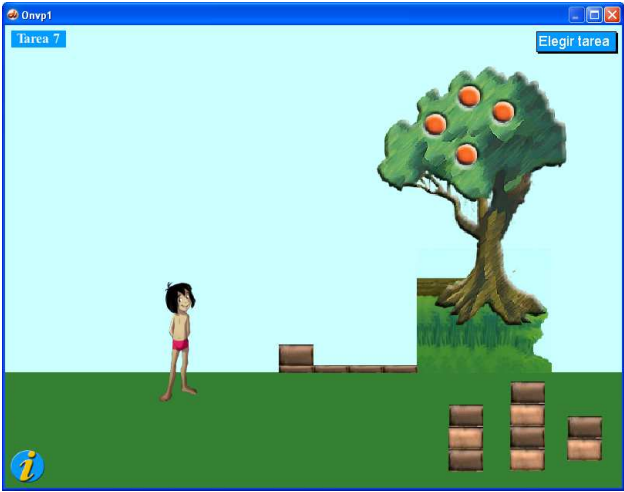
Tarea 7	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Mowgli quiere coger la fruta del árbol. Para conseguirlo, fíjate bien y ayúdale, coloca las piezas que necesita”.</p>	
<p><math>\Downarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Onto-Epistémica</p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math></p> <p style="text-align: center;">Función Epistémica</p>	<p>Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar cuatro bloques, de uno a cuatro escalones, mediante la correspondencia hueco-bloque, cuando el más sencillo (el de un escalón) está colocado en su hueco y debe colocar los otros tres. Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En lo que se refiere a su funcionamiento, cuando el sujeto coloca cada pieza en el hueco correspondiente, el personaje asciende por la escalera y alcanza la fruta.</p>

Tabla 7.31: Ficha técnica 26. Séptima tarea de orden con cantidades discretas.

<b>Tarea 8</b>	
<b>Audio</b> ⇒	<i>“Mowgli quiere coger la fruta del árbol. Para conseguirlo, fíjate bien y ayúdale, coloca las piezas que necesita”.</i>
<div style="text-align: center;"> </div>	
<b>Objetivo</b> ⇒	Determinar si el sujeto es capaz o no de ordenar cinco bloques, de uno a cinco escalones, mediante la correspondencia hueco-bloque, cuando el más sencillo (el de un escalón) está colocado en su hueco e intervienen cinco bloques de los que debe elegir cuatro, y si es capaz de discriminar el bloque sobrante (el de 6 escalones). Determinar, así mismo, la estrategia local que utiliza.
<div style="text-align: center;"> </div>	
<b>Descripción:</b>	La presencia de la pieza sobrante, en esta tarea, permite distinguir situaciones y competencias que su ausencia haría inobservables o ambiguas, por ejemplo la ordenación por tamaños versus la ordenación por conteo. Favorece también la estrategia de conteo para decidir las colocaciones.

Tabla 7.32: Ficha técnica 27. Octava tarea de orden con cantidades discretas.

Por último, comentamos que la ventana final del conjunto de tareas tiene la misma estructura y funciones vistas anteriormente.

De nuevo, al hacer clic sobre el botón **Guardar datos**, los valores recogidos en los registros definidos se escriben en el archivo de texto correspondiente para su análisis posterior, según se indica a continuación.

Finalmente consignamos en la lista siguiente las piezas móviles, huecos y piezas sobrantes que intervienen en cada tarea.

- Segunda tarea: tres piezas y tres huecos, de uno, dos y tres elementos.
- Tercera tarea: tres piezas, tres huecos, de uno, dos y tres elementos, y una pieza sobrante de cuatro elementos.
- Cuarta tarea: cuatro piezas, cuatro huecos, de uno, dos, tres y cuatro elementos, y una pieza sobrante de cinco frutas.
- Sexta tarea: dos piezas, de dos y tres escalones, y dos huecos.
- Séptima tarea: tres piezas, de dos, tres y cuatro escalones, y tres huecos.
- Octava tarea: cuatro piezas, de dos, tres, cuatro y cinco escalones, cuatro huecos y una pieza sobrante de seis escalones.

En las tres últimas, además de las piezas móviles indicadas, interviene una pieza fija de un escalón que inicia la serie en cada caso.

#### 7.6.3.3 Registro de la interacción sujeto–ordenador en las tareas de orden con cantidades discretas.

Los registros que se almacenan en la primera parte, constituida por las tareas segunda, tercera y cuarta son:

Tarea 2							
<i>v21</i>	<i>n21</i>	<i>e21</i>	<i>ne215</i>	<i>nc215</i>	<i>ne216</i>	<i>nc216</i>	<i>nn21</i>
<i>v22</i>	<i>n22</i>	<i>e22</i>	<i>ne224</i>	<i>nc224</i>	<i>ne226</i>	<i>nc226</i>	<i>nn22</i>
<i>v23</i>	<i>n23</i>	<i>e23</i>	<i>ne234</i>	<i>nc234</i>	<i>ne235</i>	<i>nc235</i>	<i>nn23</i>
<i>t2</i>	<i>listaR2</i>	<i>listaAc2</i>	<i>listae2</i>				
<i>ie21</i>	<i>ie22</i>	<i>ie23</i>	<i>ie2</i>				

Tarea 3							
<i>v31</i>	<i>n31</i>	<i>e31</i>	<i>ne315</i>	<i>nc315</i>	<i>ne316</i>	<i>nc316</i>	<i>nn31</i>
<i>v32</i>	<i>n32</i>	<i>e32</i>	<i>ne324</i>	<i>nc324</i>	<i>ne326</i>	<i>nc326</i>	<i>nn32</i>
<i>v33</i>	<i>n33</i>	<i>e33</i>	<i>ne334</i>	<i>nc334</i>	<i>ne335</i>	<i>nc335</i>	<i>nn33</i>
<i>vp3</i>	<i>np3</i>	<i>ep3</i>	<i>nep34</i>	<i>nep34</i>			
<i>nep35</i>	<i>nep35</i>	<i>nep36</i>	<i>nep36</i>	<i>nnp3</i>			
<i>t3</i>	<i>listaR3</i>	<i>listaAc3</i>	<i>listae3</i>				
<i>ie31</i>	<i>ie32</i>	<i>ie33</i>	<i>ie3</i>				

Tarea 4						
<i>v41</i>	<i>n41</i>	<i>e41</i>	<i>ne416</i>	<i>nc416</i>	<i>ne417</i>	<i>nc417</i>
<i>ne418</i>	<i>nc418</i>	<i>nn41</i>				
<i>v42</i>	<i>n42</i>	<i>e42</i>	<i>ne425</i>	<i>nc425</i>	<i>ne427</i>	<i>nc427</i>
<i>ne428</i>	<i>nc428</i>	<i>nn42</i>				
<i>v43</i>	<i>n43</i>	<i>e43</i>	<i>ne435</i>	<i>nc435</i>	<i>ne436</i>	<i>nc436</i>
<i>ne438</i>	<i>nc438</i>	<i>nn43</i>				
<i>v44</i>	<i>n44</i>	<i>e44</i>	<i>ne445</i>	<i>nc445</i>	<i>ne446</i>	<i>nc446</i>
<i>ne447</i>	<i>nc447</i>	<i>nn44</i>				
<i>vp4</i>	<i>np4</i>	<i>ep4</i>	<i>nep45</i>	<i>ncp45</i>	<i>nep46</i>	<i>ncp46</i>
<i>nep47</i>	<i>ncp47</i>	<i>nep48</i>	<i>ncp48</i>	<i>nnp4</i>		
<i>t4</i>	<i>listaR4</i>	<i>listaAc4</i>	<i>listae4</i>			
<i>ie41</i>	<i>ie42</i>	<i>ie43</i>	<i>ie44</i>	<i>ie4</i>		

Y los registros que intervienen en la segunda parte, constituida por las tareas sexta, séptima y octava son:

Tarea 6					
<i>v61</i>	<i>n61</i>	<i>e61</i>	<i>ne61</i>	<i>nc61</i>	<i>nn61</i>
<i>v62</i>	<i>n62</i>	<i>e62</i>	<i>ne62</i>	<i>nc62</i>	<i>nn62</i>
<i>t6</i>	<i>listaR6</i>	<i>listaAc6</i>	<i>listae6</i>		
<i>ie61</i>	<i>ie62</i>	<i>ie6</i>			

Tarea 7							
<i>v71</i>	<i>n71</i>	<i>e71</i>	<i>ne715</i>	<i>nc715</i>	<i>ne716</i>	<i>nc716</i>	<i>nn71</i>
<i>v72</i>	<i>n72</i>	<i>e72</i>	<i>ne724</i>	<i>nc724</i>	<i>ne726</i>	<i>nc726</i>	<i>nn72</i>
<i>v73</i>	<i>n73</i>	<i>e73</i>	<i>ne734</i>	<i>nc734</i>	<i>ne735</i>	<i>nc735</i>	<i>nn73</i>
<i>t7</i>	<i>listaR7</i>	<i>listaAc7</i>	<i>listae7</i>				
<i>ie71</i>	<i>ie72</i>	<i>ie73</i>	<i>ie7</i>				

Tarea 8						
<i>v81</i>	<i>n81</i>	<i>e81</i>	<i>ne816</i>	<i>nc816</i>	<i>ne817</i>	<i>nc817</i>
<i>ne818</i>	<i>nc818</i>	<i>nn81</i>				
<i>v82</i>	<i>n82</i>	<i>e82</i>	<i>ne825</i>	<i>nc825</i>	<i>ne827</i>	<i>nc827</i>
<i>ne828</i>	<i>nc828</i>	<i>nn82</i>				
<i>v83</i>	<i>n83</i>	<i>e83</i>	<i>ne835</i>	<i>nc835</i>	<i>ne836</i>	<i>nc836</i>
<i>ne838</i>	<i>nc838</i>	<i>nn83</i>				
<i>v84</i>	<i>n84</i>	<i>e84</i>	<i>ne845</i>	<i>nc845</i>	<i>ne846</i>	<i>nc846</i>
<i>ne847</i>	<i>nc847</i>	<i>nn84</i>				
<i>vp8</i>	<i>np8</i>	<i>ep8</i>	<i>nep85</i>	<i>ncp85</i>	<i>nep86</i>	<i>ncp86</i>
<i>nep87</i>	<i>ncp87</i>	<i>nep88</i>	<i>ncp88</i>	<i>nnp8</i>		
<i>t8</i>	<i>listaR8</i>	<i>listaAc8</i>	<i>listae8</i>			
<i>ie81</i>	<i>ie82</i>	<i>ie83</i>	<i>ie84</i>	<i>ie8</i>		

El significado, valores y estructura de los mismos son en todo análogos a los definidos en la sección 7.6.2.3, correspondiente a los datos recogidos por los registros descritos en las tareas de orden con cantidades continuas.

A continuación se describen, tanto los índices que intervienen, como los tipos de registros clasificados por su función.

### Índices que intervienen

En este caso usamos también registros afectados por uno, dos o tres índices numéricos: *i*, *j* y *k*. El primero, en todos los casos, informa del número de la tarea correspondiente, variando de 2 a 4, en la primera parte, y de 6 a 8 en la segunda; el segundo índice informa de la pieza, conjunto de frutas o escalones, que el sujeto ha arrastrado en cada caso; y el tercero, en las tareas segunda, tercera, cuarta, séptima y octava, del hueco en el que el sujeto ha colocado cada pieza.

En la sexta tarea el tercer índice es innecesario ya que solo intervienen dos piezas y dos huecos en la misma. En las demás, como sabemos, intervienen de tres a cinco piezas y tres o cuatro huecos.

Además, en las tareas tercera, cuarta y octava interviene una pieza sobrante, es decir, no correspondiente a ningún hueco. De ahí que en ellas, las acciones sobre estas piezas, se recojan en los registros afectados del índice *p*. En los tres casos la pieza sobrante es la que tiene mayor número de elementos, frutas o escalones, según el caso.

Del mismo modo, véase la sección 7.6.2.3, referidos a las piezas que intervienen en las tareas actuales, además de los intentos correctos,



podemos encontrar intentos de colocación erróneos, contradictorios o nulos, recogidos por los registros cuya nomenclatura incorpora la letra inicial del tipo correspondiente.

Las piezas se han numerado en orden creciente, por lo que en lo que se refiere al índice  $j$ , hemos asignando el valor 1 a la pieza con menor número de elementos y valores sucesivos a las demás. Así, en las tareas segunda y tercera a este índice le hemos asignado el valor 1 para la pieza con una fruta, el valor 2 a la pieza con dos frutas y el valor 3 a la pieza con tres frutas. En la cuarta tarea los valores del índice  $j$  son: 1 para la pieza con una fruta, 2 para la pieza con dos frutas, 3 para la pieza con tres frutas y 4 para la pieza con cuatro frutas. En las tareas siguientes, a las piezas que intervienen le hemos asignado el número de escalones en cada una menos una unidad. Así por ejemplo, en la séptima tarea hemos asignado el valor 1 a la pieza con dos escalones, 2 a la pieza con tres escalones y 3 a la cuatro escalones.

De modo correlativo al número de piezas, se han numerado los huecos en cada tarea. Así en las tareas segunda y tercera, con tres huecos, al índice  $k$  se le han asignado los valores: 4 al hueco de un elemento, 5 al hueco de dos elementos, y 6 al de tres; de modo que al valor 1 del índice  $j$  le corresponde el valor 4 del índice  $k$ , al valor 2 del índice  $j$  le corresponde el valor 5 del  $k$  y al valor 3 del índice  $j$  le corresponde el valor 6 del  $k$ , en los intentos correctos. Las correspondencias en las tareas restantes se realizan de la misma forma y son obvias teniendo en cuenta lo indicado en el párrafo anterior.

Los registros utilizados son de los siguientes tipos:

- *Registros de localización de la acción:  $vij$ ,  $vpi$ .* Los registros  $vij$  informan de si el sujeto ha movido o no en la  $i$ -ésima tarea la pieza  $j$ -ésima. Y los  $vpi$  informan de si el sujeto mueve o no la pieza sobrante, en las tareas en las que tales piezas intervienen.
- *Registros de números totales de intentos:  $nij$ ,  $npi$ .* Los registros  $nij$  recogen el número total de intentos que realiza el sujeto en la tarea  $i$ -ésima para colocar la  $j$ -ésima pieza en su hueco correspondiente, incluido el intento correcto. Y los  $npi$  recogen el número total de veces que el sujeto ha movido la pieza sobrante, en las tareas en las que interviene.
- *Registros de identificación de intentos:  $eij$ ,  $eipi$ .* Los registros  $eij$  informan si el sujeto, en la tarea  $i$ -ésima, ha colocado o no de forma

incorrecta la pieza  $j$ -ésima. Y los *epi* informan si el sujeto ha intentado colocar o no la pieza sobrante, en las tareas en las que interviene, en alguno de los huecos disponibles.

- *Registros de los números de intentos erróneos, contradictorios y nulos: neijk, ncijk, nniij, nepij, ncpij, nnpi.* Estos registros recogen, respectivamente, en la  $i$ -ésima tarea, los números de intentos *erróneos*, *contradictorios* y *nulos* cuando el sujeto coloca piezas válidas (los tres primeros) o la pieza sobrante (los tres últimos) en huecos que no le corresponden (intentos erróneos), o bien mueve las piezas sin llegar a colocarlas en ningún hueco (intentos nulos).
- *Registros de números totales de intentos no correctos: ieij, iei.* Los registros *ieij* recogen, en la  $i$ -ésima tarea, los números totales de *intentos erróneos*, *contradictorios* o *nulos* realizados con cada pieza correcta. Y los registros *iei* recogen el número total de *intentos erróneos*, *contradictorios* o *nulos* realizados con todas las piezas correctas o no en la tarea  $i$ -ésima.
- *Registros temporales: ti.* Recogen el tiempo, en segundos, que emplea el sujeto en realizar cada una de las tareas.
- *Listas de acciones: listaRi, listaAci, listaei.* Son listas de valores que recogen, respectivamente, en la tarea  $i$ -ésima: todas las acciones, la secuencia de aciertos y la secuencia de errores del sujeto en la tarea. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las tareas.

Las funciones y características de cada uno de ellos son:

### Registros de localización de la acción

Los registros *vij* informan de si el sujeto ha movido o no en la  $i$ -ésima tarea la pieza  $j$ -ésima. Sus valores posibles son: 0 si no lo mueve,  $j$  si lo mueve.

A su vez, en las tareas tercera, cuarta y octava, los registros *vpi* identifican en la tarea  $i$ -ésima si el sujeto mueve o no la pieza sobrante o pieza que no tiene hueco correspondiente. Para ellos el índice  $i$  varía con el número de la tarea en la que intervenga, es decir, 3, 4, 8. Sus posibles valores son: 0, si el sujeto no la mueve; el valor máximo del índice  $j$  en la tarea  $i$ -ésima más una unidad o lo que es lo mismo, el número de piezas válidas en la tarea  $i$ -ésima más una unidad. Por tanto los valores no nulos de estos registros en las tareas que intervienen son:  $vp3 = 4$ ,  $vp4 = 5$ , y  $vp8 = 5$ .

### Registros de números totales de intentos

Los registros  $nij$  informan del número total de intentos que realiza el sujeto en la tarea  $i$ -ésima para colocar la  $j$ -ésima pieza en su sitio correspondiente. Incluye tanto los intentos erróneos como el intento correcto. Sus valores son números naturales, admitiendo como máximo el valor 14. Es decir hemos decidido no considerar más de 14 intentos erróneos en ninguno de estos registros.

Del mismo modo, en las tareas tercera, cuarta y octava, los registros  $npi$  almacenan, en la tarea  $i$ -ésima, el número total de veces que el sujeto ha movido la pieza sobrante. Para ellos el índice  $i$  varía con el número de la tarea en la que intervenga, es decir, 3, 4, 8. Toma valores naturales: 0, 1, 2, 3, . . . . .

### Registros de identificación de intentos

Los registros  $eij$  informan de si en la tarea  $i$ -ésima se ha colocado o no de forma incorrecta la pieza  $j$ -ésima. Sus posibles valores son: 0, si no se ha colocado de forma incorrecta; los números de los huecos no correspondientes al valor de  $j$ , si se ha colocado de forma incorrecta.

Igualmente, en las tareas tercera, cuarta y octava, los registros  $epi$  identifican si el sujeto ha intentado colocar o no la pieza sobrante en alguno de los huecos disponibles en cada momento. Para ellos el índice  $i$  varía con el número de la tarea en la que intervenga, es decir, 3, 4, 8. Y sus valores posibles son: 0, si la pieza sobrante no se ha intentado colocar en ninguno de los huecos disponibles; el número del hueco en el que se ha intentado colocar la pieza sobrante en la tarea  $i$ -ésima. Por tanto, los valores no nulos de estos registros son:  $ep3 = 4, 5, 6$ , en la tercera tarea (tres huecos);  $epi = 5, 6, 7, 8$  en las tareas cuarta y octava (cuatro huecos).

Los valores nulos de los registros  $eij$  y  $epi$  en los casos en los que el sujeto mueve y suelta la pieza correspondiente sin asignarla incorrectamente, quedan recogidos como *intentos nulos*, ya que  $nij$  y  $npi$  los registran. Estos intentos no se computan como erróneos en la resolución de las tareas.

### Registros de los números de intentos erróneos, contradictorios y nulos

Los registros  $neijk$ ,  $ncijk$ ,  $nnij$ ,  $nepij$ ,  $ncpij$ ,  $nnpi$  recogen, respectivamente, en la tarea  $i$ -ésima, los números de intentos *erróneos*, *contradictorios* y *nulos* cuando el sujeto coloca piezas válidas (los tres

primeros registros) o la pieza sobrante (los tres últimos) en huecos, libres u ocupados, que no le corresponden (intentos erróneos o contradictorios); o bien mueve las piezas, válidas o sobrante, sin llegar a colocarlas en ningún hueco (intentos nulos). Todas estos registros toman valores naturales: 0, 1, 2, 3, . . . . ., limitados por la condición  $n_{ij} < 15$ . Y los índices  $i, j, k$  los valores ya indicados, según la tarea de que se trate.

### Registros de números totales de intentos no correctos

También en este conjunto de tareas, por comodidad para su estudio posterior, los registros  $ieij$  recogen en la  $i$ -ésima tarea los números totales de *intentos erróneos, contradictorios o nulos* realizados con cada pieza correcta. Nótese que los registros  $n_{ij}$  recogen los intentos totales correctos e incorrectos, por lo que  $ieij = n_{ij} - 1$ , es decir a los  $n_{ij}$  le restamos el intento correcto o válido. Y los registros  $iei$  almacenan el número total de *intentos erróneos, contradictorios o nulos* realizados con todas las piezas correctas o no en la tarea  $i$ -ésima. Nótese que el índice es la segunda  $i$  en la expresión  $iei$ , la primera hace referencia a la palabra “intentos”. Por lo tanto, es  $iei = \sum_j ieij + n_{pi}$ , variando el índice  $j$  desde 1 hasta el número total de huecos en la tarea  $i$ -ésima, y teniendo en cuenta que en las tareas segunda, sexta y séptima es  $n_{pi} = 0$  por no haber pieza sobrante. Recordemos que los registros  $n_{pi}$  recogen el número total de intentos erróneos, contradictorios o nulos realizados con la pieza sobrante en la  $i$ -ésima tarea.

### Registros temporales

Los registros  $ti$  recogen el tiempo, en segundos, que invirtió el sujeto en realizar la tarea  $i$ -ésima. Hay resaltar que si algún registro temporal  $ti$ , variando  $i$  de 2 a 4 o de 6 a 8, recoge el valor cero significará que el sujeto no ha realizado la tarea correspondiente.

### Listas de acciones

De igual modo y con el mismo propósito que en caso de la tareas de orden con cantidades continuas, se definen en el caso presente los registros *listaRi*, *listaAci* y *listaei*. Son listas de valores que recogen, respectivamente, en la tarea  $i$ -ésima: todas las acciones, la secuencia de aciertos y la secuencia de errores del sujeto en la tarea. Con ellos se evaluarán las tareas.

Los ejemplos de las listas de valores que recogen estos registros, y de su interpretación, expuestos en la sección 7.6.2.3, sirven para el caso presente sin más que sustituir la palabra *tronco* por *pieza* y alguna otra modificación sintáctica evidente.

Como se ha dicho, los registros *listaRi* recogen la secuencia completa de acciones del sujeto en la tarea *i-ésima*. Por tanto, recogen pares de valores *vij*, *nij* seguidos por el signo “V”, cuaternas de valores *vij*, *nij*, *eij*, *neijk* seguidos por el signo “E”, cuaternas *vij*, *nij*, *eij*, *ncijk* seguidos por el signo “C”, cuaternas *vij*, *nij*, *eij*, *nnij* seguidas del signo “N”, que identifican si cada pieza se ha colocado en la posición que le corresponde, o si no es así, en qué posición se ha intentado colocar, junto con los intentos totales que se van produciendo y los números de intentos erróneos, contradictorios o nulos, según las distintas posibilidades; así como el tipo de intento erróneo, contradictorio o nulo.

En el caso en el que en la tarea *i-ésima* el sujeto mueva o intente colocar la pieza sobrante, si es que tal pieza interviene, los registros *listaRi* recogen también las cuaternas de valores *vpi*, *npi*, *epi*, *nepij* seguidas del signo “PE”, las cuaternas *vpi*, *npi*, *epi*, *ncpij* seguidas del signo “PC” o las cuaternas *vpi*, *npi*, *epi*, *nnpi* seguidas del signo “PN”, que identifican el tipo de error cometido al colocar la misma en algún hueco: intentos erróneos o contradictorios (signos “PE” o “PC”), o intentos nulos realizados con la pieza sobrante (signo “PN”); junto con el número total de intentos en los que ha intervenido y los números de intentos erróneos, contradictorios o nulos según se van produciendo.

A su vez, los registros *listaAci* recogen en la tarea *i-ésima* pares de valores *vij*, *nij* separados por el signo “V”, que describen la secuencia en la que el sujeto ha colocado las piezas en sus huecos correspondientes, junto con el número total de intentos realizados para cada pieza. Estos registros permiten observar de inmediato la estrategia local utilizada por el sujeto en la resolución de la tarea.

Finalmente, los registros *listaei* recogen en la tarea *i-ésima* ternas de valores *vij*, *eij*, *neijk* seguidas del signo “E”, ternas *vij*, *eij*, *ncijk* seguidas del signo “C” o ternas *vij*, *eij*, *nnij* seguidas del signo “N”, que identifican el tipo de error cometido al colocar una pieza en un hueco que no le corresponde, intentos erróneos o contradictorios (signos “E” o “C”), o intentos nulos realizados con cada pieza (signo “N”); junto con el número de intentos en cada caso.

En el caso en el que en la tarea *i-ésima* el sujeto mueva o intente

colocar la pieza sobrante, los registros *listaei* recogen ternas de valores *vpi*, *epi*, *nepij* seguidas del signo “PE”, ternas *vpi*, *epi*, *ncpij* seguidas del signo “PC” o ternas *vpi*, *epi*, *nnpi* seguidas del signo “PN”, que identifican el tipo de error cometido al colocar la pieza sobrante en algún hueco, intentos erróneos o contradictorios (signos “PE” o “PC”), o intentos nulos realizados (signo “PN”); junto con el número de intentos en cada caso.

De nuevo resaltamos que los tres registros *listaRi*, *listaAci* y *listaei* sintetizan y describen la información recogida por todos los demás, salvo los registros temporales, y se han diseñado con el propósito de evaluar con comodidad y precisión las acciones realizadas y los resultados obtenidos por el sujeto en el conjunto de tareas.

Cuando la secuencia de acciones no es larga, el primero permite evaluar completamente la tarea. Nótese que el primero contiene a los otros dos. Pero cuando la secuencia es larga es más cómodo y preciso hacerlo con los dos últimos; de ahí su justificación, aún sabiendo que almacenan información redundante. Véanse los ejemplos de la sección 7.6.2.3.

#### 7.6.3.4 Cuestionario sobre las estrategias

Como se ha dicho en la introducción a este conjunto de tareas, sección 7.6.3, y como se indicado en el apartado anterior, las estrategias locales que puede usar el sujeto, en la resolución de las tareas, se identifican con precisión mediante las listas de acciones definidas e implementadas al efecto. Sin embargo, no sucede lo mismo con las estrategias denominadas globales.

Ante la disyuntiva de incluir en la implementación elementos multimedia y registros destinados a identificar estas últimas, cosa que es posible sin ninguna dificultad desde el punto de vista de la tecnología, observamos que tal inclusión complicaría la resolución de las tareas y que, posiblemente, se sometería al sujeto a un esfuerzo que pudiera ser excesivo en la fase final del estudio. Por ello, consideramos conveniente complementar el registro de la información que ofrece la metodología multimedia con otros métodos de observación y registro.

Ésta no es una limitación de la misma, ya que, como se ha dicho, es posible implementar elementos y registros que identifiquen todas las estrategias consideradas en el estudio. Sino que en la implementación de este conjunto de tareas se ha preferido, dada su situación final en las entrevistas y el elevado número de ítems que los sujetos deben abordar, veintidos más otros cinco introductorios, dotarlas de una mayor sencillez y liberar a los sujetos de un

esfuerzo quizá excesivo en la fase final, que pudiera influir negativamente en los resultados. Por tanto, con estos propósitos se decidió salir de metodología multimedia y preguntar al sujeto por las causas de sus acciones. Ello obliga a la intervención activa del investigador en la entrevista, aunque en un grado muy limitado y en un punto muy concreto, lo que creemos que no afecta significativamente ni a la filosofía y ni a los objetivos del estudio.

Así pues, con el propósito de determinar las estrategias globales utilizadas por los sujetos, el investigador planteará al sujeto cuestiones verbales de la manera que se indica a continuación.

Como se ha dicho, este conjunto se ha dividido en dos partes, la primera integrada por las tareas segunda, tercera y cuarta, y la segunda por las tareas sexta, séptima y octava. Pues bien, el investigador observará las acciones del sujeto y al concluir las tareas tercera y cuarta así como las tareas séptima y octava, planteará las cuestiones siguientes:

*“¿Por qué has colocado esta pieza ahí?”.*  
*“Y esta otra, ¿por qué la has colocado ahí?”.*  
*“¿Y esa otra?”*

Al preguntar por la colocación el investigador no usará, deliberadamente, el orden natural estándar en el conteo ni tampoco el orden por tamaños, preguntando por piezas con posición intermedia, en primer lugar, y finalizando por las de posiciones primeras y últimas, evitando permanentemente sugerir nociones ordinales al sujeto.

En cada caso, el investigador tomará nota de las respuestas o bien anotará si el sujeto procede por ensayo y error.

#### 7.6.4 Tareas recursivas

Éstas constituyen el cuarto conjunto de tareas propias del estudio y corresponden al estado recursivo del modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas\* (MECOR).

Mediante estas tareas pretendemos observar y valorar la capacidad de los sujetos para continuar series mediante la localización de las posiciones de determinados elementos. Dichas posiciones estarán determinadas recursivamente por alternancias cíclicas.

Para ello contemplamos 6 tareas que se refieren a objetos que aparecen en

\*Véase dicho modelo en la sección 6.3, página 302 y siguientes, capítulo 6.

secuencias seriadas de la forma indicada, sobre los escalones de una escalera, que el sujeto debe identificar usando colores o bien continuando las series mediante la localización de sus posiciones en las mismas. El conjunto de las 6 tareas se divide en dos subconjuntos de 3 atendiendo al grado de dificultad creciente. El primer subconjunto está formado por los tres primeros ítems, los más sencillos, que se caracterizan por el hecho de que en la series que incorporan, la localización de las posiciones correctas está determinada cuando el operador siguiente actúa dos veces sobre la primera posición correcta dada; y el segundo subconjunto lo está por los tres últimos, que son más complejos ya que en la series que incorporan, la localización de las posiciones correctas está determinada cuando el operador siguiente actúa tres veces sobre la primera posición correcta (véase la justificación en la sección siguiente).

Los sujetos que se hallen en este estado quedarán caracterizados por la capacidad de continuar series recursivas.

Ampliamos así las tareas de etiquetaje por colores planteadas en el estudio exploratorio.

En cuanto a las estrategias de resolución, recordamos que el soporte sobre el que se hallan los elementos de estas series es una escalera, por lo que el sujeto puede localizar las posiciones en los dos sentidos, y en consecuencia, tomaremos en consideración las estrategias siguientes: ascendente (A); descendente (D); comienza la serie en una posición intermedia y la continúa luego en sentido ascendente o descendente sin cometer ningún error\* (PI); identifica erróneamente todas las posiciones seguidas (sin hacer uso de la alternancia) en el sentido ascendente (S) o en el descendente (SD)<sup>†</sup>; ensayo y error (EE); no realiza la tarea (X). Posteriormente, dichas estrategias se agruparán en *recursivas* (A, D, PI) y *no recursivas* (EE, S, SD).

#### 7.6.4.1 Características generales

El conjunto de tareas, al igual que los anteriores, incluye una tarea introductoria dirigida a que el sujeto conozca el entorno multimedia y las acciones a realizar en las 6 tareas siguientes, que son las propias de esta parte del estudio. En este caso, *la tarea introductoria no lleva numeración*, mientras que *las seis tareas propias se han numerado del 1 al 6*.

La función ontológica del conjunto quedó definida en la sección 6.5.1 del capítulo 6<sup>‡</sup>. Sus funciones epistémicas son las siguientes:

\*En relación con el uso de esta estrategia, véase una nota aclaratoria posterior en la página 407.

<sup>†</sup>Los sujetos que utilicen las estrategias S y SD harán clic en todos los escalones seguidos sin tener en cuenta las alternancias.

<sup>‡</sup>Véase la página 315 y siguientes



- **Tarea Introductoria:** Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tareas posteriores.
- **Tarea 1:** Observar si el sujeto es capaz de detectar una alternancia cíclica del tipo *sí-no-sí-no-sí-no...*, y si es capaz de aplicarla para localizar, con apoyo del color, las posiciones en las que se hallan los elementos pedidos en la serie dada. Determinar, así mismo, la estrategia que utiliza.
- **Tarea 2:** La misma que la anterior pero referida a una alternancia cíclica del tipo *no-sí-no-sí...*. Ayudar a decidir si el sujeto realiza o no localizaciones basadas en alternancias elementales apoyadas por el uso del color y determinar la estrategia que utiliza.
- **Tarea 3:** Observar si el sujeto detecta una alternancia cíclica del tipo *no-sí-no-sí-no-sí-no...*, idéntica a la anterior, y si es capaz de aplicarla para localizar las posiciones en las que se hallan los elementos pedidos en la serie dada, *prescindiendo del uso del color*. Determinar, así mismo, la estrategia que utiliza.
- **Tarea 4:** Las mismas que la anterior pero referidas a una alternancia cíclica del tipo *sí-no-no-sí-no-no...*
- **Tarea 5:** Las mismas que las dos anteriores pero referidas a una alternancia cíclica del tipo *no-sí-no-no-sí-no...*
- **Tarea 6:** Las mismas que las tres anteriores pero referidas a una alternancia cíclica del tipo *no-no-sí-no-no-sí...*

Nótese la tercera tarea coincide con la segunda salvo que en la tercera se prescinde del color en la alternancia, de modo que no podrá resolverse por etiquetaje, siendo necesaria para su resolución la utilización de capacidades recursivas. Su introducción obedece a la necesidad de someter a prueba la hipótesis **H6.2**, en su primer aspecto\*. Los restantes ítems son de naturaleza puramente recursiva, de modo que el sujeto deberá resolverlos recurriendo exclusivamente a las capacidades recursivas basadas en la alternancia, sin apoyo de colores, mediante la continuación de la secuencia por localización de los elementos pedidos.

De hecho las posiciones de los *síes* en las alternancias correspondientes a cada una de las tareas, es decir las posiciones pedidas, son los valores o imágenes de auténticas funciones recursivas restringidas, en cada caso, a los correspondientes tramos finitos de la secuencia numérica. Véase la tabla E.1, en la página 768, anexo E, en la que se recogen las definiciones de dichas funciones para cada una de las tareas.

\*La confirmación del primer aspecto de esta hipótesis corresponde a la consecución del objetivo **O5.4**. Véanse los apartados 1.4.3 y 1.4.4, página 23 y siguientes, del capítulo 1.

Ello permite describir con precisión las tres primeras tareas, las más sencillas, como aquellas que se caracterizan por el hecho de que en la series que incorporan, la localización de las posiciones correctas está determinada cuando el operador siguiente actúa dos veces sobre la primera posición correcta dada, y las tres últimas, más complejas, como aquellas en las que en la series que incorporan, la localización de las posiciones correctas está determinada cuando el operador siguiente actúa tres veces sobre la primera posición correcta.

Nótese, también, que por medio de este conjunto de tareas pretendemos detectar distintos niveles evolutivos en los sujetos. Para ello se usa la variación en la alternancia (o función recursiva). Esta variación produce situaciones ontoepistémicas nuevas, de dificultad creciente, que el sujeto debe distinguir y resolver.

Por lo que se refiere a su implementación, cada una de las tareas presentará una ventana o interfaz de planteamiento y otra de solución. Los elementos de información y navegación que aparecen en todas las ventanas de planteamiento y solución serán los comunes, realizando idénticas funciones, véase la subsección 5.5.2.

Las tareas se ejecutarán secuencialmente de la primera a la última, permitiendo los elementos de navegación alterar este orden si, por cualquier incidencia, fuera necesario.

El conjunto de tareas, al igual que los anteriores, comenzará con una ventana de presentación en la que se recoge la clave asignada al sujeto.

#### *7.6.4.2 Descripción de las tareas*

Veamos a continuación la ficha técnica completa de cada una de ellas.

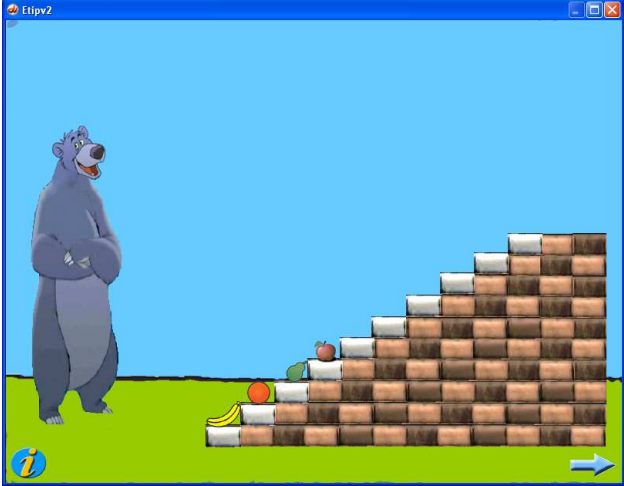
Tarea Introdutoria	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math> “Baloo ha escondido frutas en la escalera, para encontrarlas debes hacer un solo clic en cada escalón”.</p> <p><math>\Downarrow</math></p> <p><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math> Conseguir que el sujeto se familiarice con el entorno y con las acciones a realizar en las tareas posteriores.</p> <p><math>\Updownarrow</math></p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>Esta tarea carece de valor observacional, esto es, sus resultados no se recogen en ningún registro. Pretendemos que el sujeto comprenda que las frutas escondidas aparecen cuando se hace un solo clic en cada uno de los peldaños y que si se hace clic sobre una fruta que ha aparecido, ésta se oculta. De modo que para hacerla aparecer de nuevo tendría que hacer otra vez clic sobre el mismo peldaño.</p>

Tabla 7.39: Ficha técnica 13. Tarea introductoria a las tareas recursivas.

Una vez que el sujeto comprenda las reglas del juego, y haya practicado brevemente con su mecánica, comenzará el desarrollo de las tareas propias.

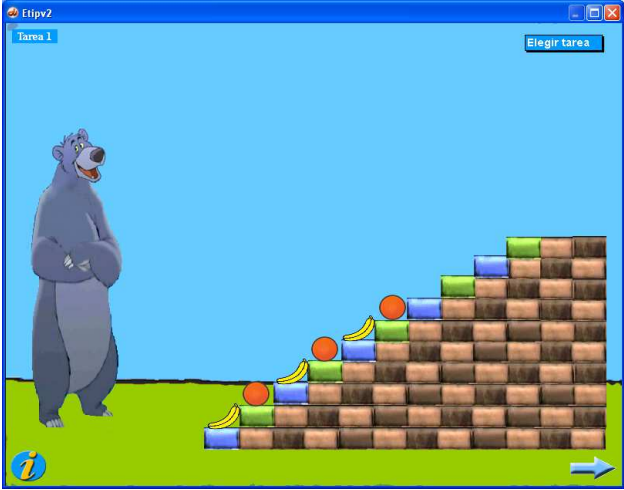
Tarea 1	
<p><b>Audio</b> ⇒</p> <p style="text-align: center;">⇕</p> <p style="text-align: center;">Función Onto-Epistémica</p> <p style="text-align: center;">⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	<p>“Fíjate bien en los escalones. Cada uno tiene un color y una fruta. ¿En qué escalones ha escondido Baloo los plátanos que faltan? Haz clic donde tú creas que están”.</p> 
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p style="text-align: center;">⇕</p> <p style="text-align: center;">Función Epistémica</p>	<p>Observar si el sujeto es capaz de detectar una alternancia cíclica del tipo <i>sí-no-sí-no-sí-no...</i>, y si es capaz de aplicarla para localizar, con apoyo del color, las posiciones en las que se hallan los elementos pedidos en la serie dada. Determinar, así mismo, la estrategia que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>Como podemos ver en la interfaz, los seis primeros peldaños de la escalera están ocupados por frutas. Por lo que el niño tendrá que actuar sobre los demás, es decir, sobre el 7º, 8º, 9º y 10º, que llamaremos peldaños activos y que corresponden a los primeros índices de los registros que intervienen en estas tareas. Véase la sección 7.6.4.3, página 410 y siguientes.</p> <p>Cuando el sujeto completa la tarea, se muestra la ventana de solución desde la que podrá acceder a la siguiente. Lo mismo sucede para las demás tareas.</p>

Tabla 7.40: Ficha técnica 14. Primera tarea recursiva.

Al finalizar esta tarea el investigador aclarará al sujeto que en las demás tiene que buscar también los plátanos, pero que Baloo cambia las posiciones de éstos en las siguientes tareas y que él tiene que encontrarlos.

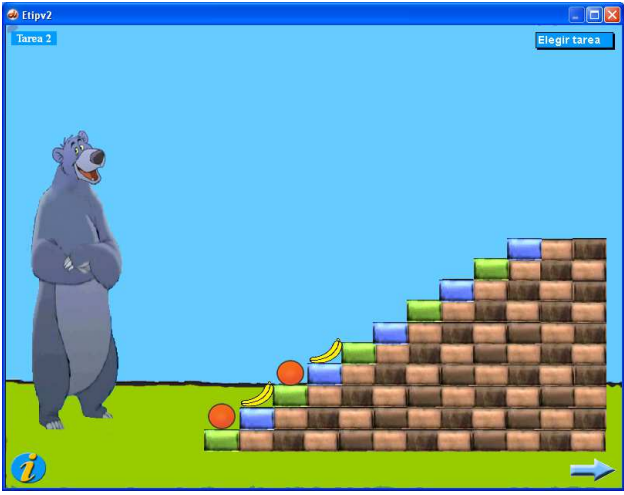
<b>Tarea 2</b>	
<p><b>Audio</b> ⇒</p> <p style="text-align: center;">⇕</p> <p style="text-align: center;">Función Onto- Epistémica</p> <p style="text-align: center;">⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	<p>“Fíjate bien en los escalones. Cada uno tiene un color y una fruta. ¿En qué escalones ha escondido Baloo los plátanos que faltan? Haz clic donde tú creas que están”.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p style="text-align: center;">⇕</p> <p style="text-align: center;">Función Epistémica</p>	<p>La misma que la anterior pero referida a una alternancia cíclica del tipo <i>no-sí-no-sí...</i>. Ayudar a decidir si el sujeto realiza o no localizaciones basadas en alternancias elementales apoyadas por el uso del color y determinar la estrategia que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En este caso los peldaños activos comienzan en el 5<sup>o</sup> y terminan en el 10<sup>o</sup>. Esta tarea y la anterior pueden resolverse o no por etiquetaje.</p>

Tabla 7.41: Ficha técnica 15. Segunda tarea recursiva.

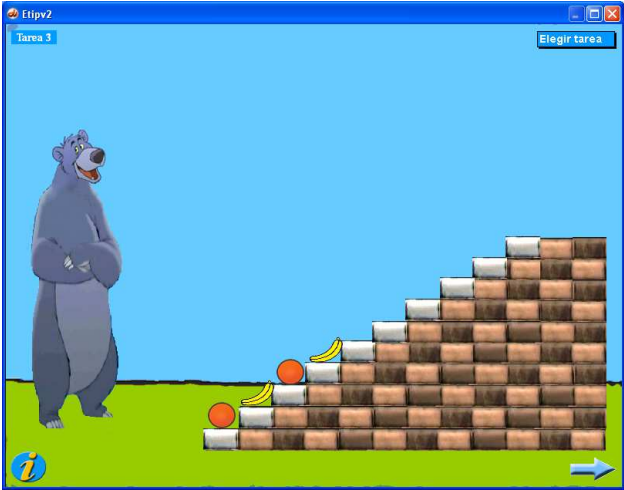
Tarea 3	
<p><b>Audio</b> ⇒ “Fíjate bien en los escalones. Cada uno tiene una fruta. ¿En qué escalones ha escondido Baloo los plátanos que faltan? Haz clic donde tú creas que están”.</p> <p>⇕</p> <p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg); border: 1px solid black; padding: 2px;">Función Onto-Epistémica</p> <p>⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Función Epistémica</p>	<p>Observar si el sujeto detecta una alternancia cíclica del tipo <i>no-sí-no-sí-no-sí-no...</i>, idéntica a la anterior, y si es capaz de aplicarla para localizar las posiciones en las que se hallan los elementos pedidos en la serie dada, <i>prescindiendo del uso del color</i>. Determinar, así mismo, la estrategia que utiliza.</p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>En este caso la localización se basa exclusivamente en la alternancia, no en el color.</p> <p>Los peldaños activos comienzan también en el 5º y terminan en el 10º.</p>

Tabla 7.42: Ficha técnica 16. Tercera tarea recursiva.

En las tres tareas siguientes se plantean alternancias cíclicas, de dificultad progresiva, en las que el sujeto debe localizar las posiciones en las que se hallan los plátanos, también *prescindiendo del color del escalón*. Las tres se presentan con el mismo mensaje de audio.

Consideraremos que la resolución positiva de estas últimas tareas, cuarta,

quinta y sexta, distingue niveles superiores con respecto a los sujetos que solo han resuelto las dos o tres primeras.

**Nota aclaratoria en relación con las estrategias:** La estrategia denominada *PI* solamente puede utilizarse en las tareas segunda y tercera, en las que se deben identificar tres posiciones en la serie. No pueden utilizarse en las demás tareas, ya que, como veremos, en ellas deben identificarse solamente dos posiciones.

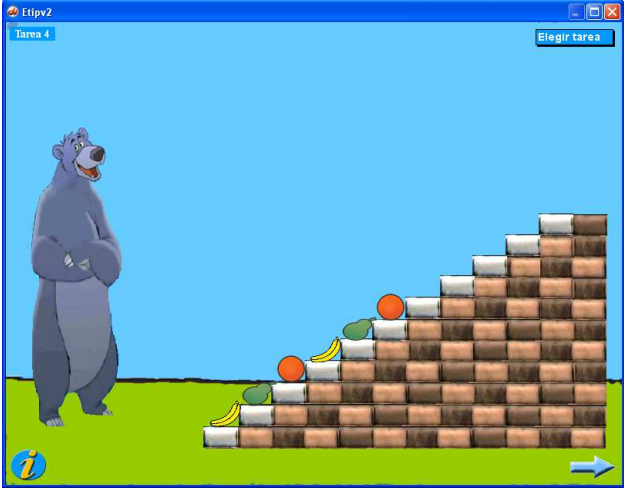
<b>Tarea 4</b>	
<p><b>Audio</b> <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Downarrow</math></p> <p><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p><math>\Uparrow</math></p> <p><b>Interfaz</b> <math>\Rightarrow</math></p>	<p><i>“Fíjate bien en los escalones. Cada uno tiene una fruta. ¿En qué escalones ha escondido Baloo los plátanos que faltan? Haz clic donde tú creas que están”.</i></p> 
<p><b>Objetivo</b> <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Updownarrow</math></p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	<p>Las mismas que la anterior pero referidas a una alternancia cíclica del tipo <i>sí-no-no-sí-no-no . . .</i></p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>La localización se basa exclusivamente en la alternancia, no en el color.</p> <p>Los peldaños activos comienzan en el 7<sup>o</sup> y terminan en el 11<sup>o</sup>.</p>

Tabla 7.43: Ficha técnica 17. Cuarta tarea recursiva.

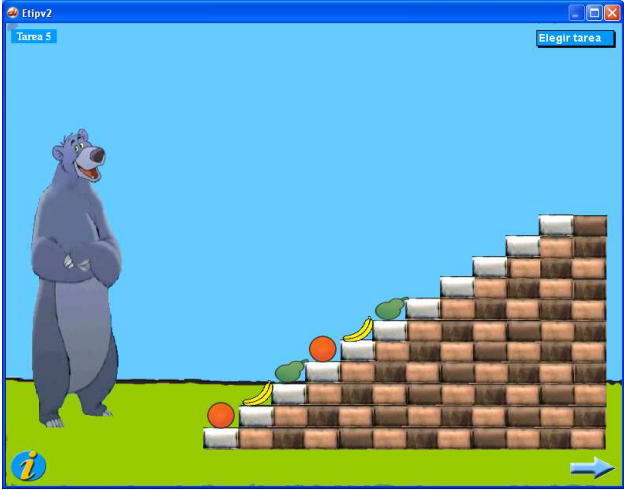
Tarea 5	
<p><b>Audio</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p>⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	<p>“Fíjate bien en los escalones. Cada uno tiene una fruta. ¿En qué escalones ha escondido Baloo los plátanos que faltan? Haz clic donde tú creas que están”.</p> 
<p><b>Objetivo</b> ⇒</p> <p>⇕</p> <p><b>Función Epistémica</b></p>	<p>Las mismas que las dos anteriores pero referidas a una alternancia cíclica del tipo <i>no-sí-no-no-sí-no . . .</i></p>
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>La localización se basa exclusivamente en la alternancia.</p> <p>Los peldaños activos también comienzan en el 7<sup>o</sup> y terminan en el 11<sup>o</sup>.</p>

Tabla 7.44: Ficha técnica 18. Quinta tarea recursiva.



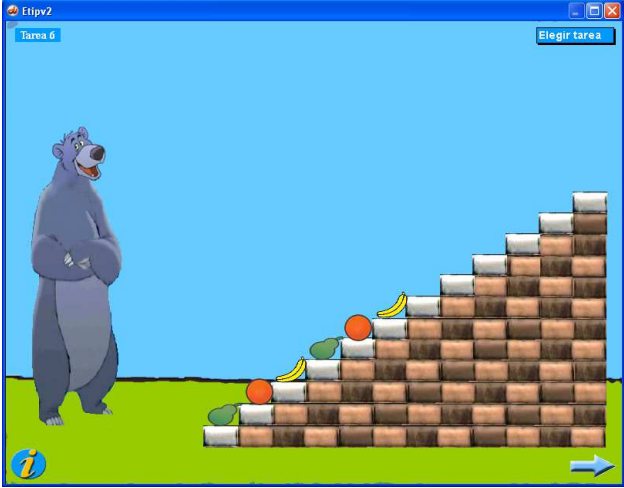
Tarea 6	
<p><b>Audio</b> ⇒ “Fíjate bien en los escalones. Cada uno tiene una fruta. ¿En qué escalones ha escondido Baloo los plátanos que faltan? Haz clic donde tú creas que están”.</p>	
<p>⇕</p> <p style="text-align: center;"><b>Función Onto-Epistémica</b></p> <p>⇕</p> <p><b>Interfaz</b> ⇒</p>	
<p><b>Objetivo</b> ⇒ Las mismas que las tres anteriores pero referida a una alternancia cíclica del tipo <i>no-no-sí-no-no-sí . . .</i></p> <p>⇕</p> <p style="text-align: center;"><b>Función Epistémica</b></p>	
<p><b>Descripción:</b></p>	<p>De nuevo, la localización se basa exclusivamente en la alternancia.</p> <p>Los peldaños activos en la tarea comienzan en el 7º y terminan en el 12º.</p>

Tabla 7.45: Ficha técnica 19. Sexta tarea recursiva.

Por último, comentamos que la ventana final del conjunto de tareas tiene la misma estructura y funciones ya vistas en otros conjuntos. Simplemente aclaramos que al hacer clic sobre el botón **Guardar datos**, los valores recogidos en todos los registros se escriben en el archivo de texto correspondiente, para su análisis posterior.

### 7.6.4.3 Registro de la interacción sujeto-ordenador en las tareas recursivas.

Los registros que recogen la información en estas tareas son:

Tarea 1							
<i>p71</i>	<i>n71</i>	<i>p81</i>	<i>n81</i>	<i>p91</i>	<i>n91</i>	<i>p101</i>	<i>n101</i>
<i>t1</i>	<i>listaR1</i>						

Tarea 2							
<i>p52</i>	<i>n52</i>	<i>p62</i>	<i>n62</i>	<i>p72</i>	<i>n72</i>	<i>p82</i>	<i>n82</i>
<i>p92</i>	<i>n92</i>	<i>p102</i>	<i>n102</i>	<i>t2</i>	<i>listaR2</i>		

Tarea 3							
<i>p53</i>	<i>n53</i>	<i>p63</i>	<i>n63</i>	<i>p73</i>	<i>n73</i>	<i>p83</i>	<i>n83</i>
<i>p93</i>	<i>n93</i>	<i>p103</i>	<i>n103</i>	<i>t3</i>	<i>listaR3</i>		

Tarea 4							
<i>p74</i>	<i>n74</i>	<i>p84</i>	<i>n84</i>	<i>p94</i>	<i>n94</i>	<i>p104</i>	<i>n104</i>
<i>p114</i>	<i>n114</i>	<i>t4</i>	<i>listaR4</i>				

Tarea 5							
<i>p75</i>	<i>n75</i>	<i>p85</i>	<i>n85</i>	<i>p95</i>	<i>n95</i>	<i>p105</i>	<i>n105</i>
<i>p115</i>	<i>n115</i>	<i>t5</i>	<i>listaR5</i>				

Tarea 6							
<i>p76</i>	<i>n76</i>	<i>p86</i>	<i>n86</i>	<i>p96</i>	<i>n96</i>	<i>p106</i>	<i>n106</i>
<i>p116</i>	<i>n116</i>	<i>p126</i>	<i>n126</i>	<i>t6</i>	<i>listaR6</i>		

Como puede observarse, para cada tarea aparecen cuatro tipos de registros: *p<sub>ij</sub>*, *n<sub>ij</sub>*, *t<sub>i</sub>*, *listaR<sub>i</sub>*. éstos se clasifican, por su función, al igual que en el caso de la tareas de orden lineal, en cuatro tipos:

- *Registros de localización: p<sub>ij</sub>*. En cada tarea, identifican los escalones sobre los que el sujeto hace clic.
- *Registros de números de intentos: n<sub>ij</sub>*. En cada tarea, recogen el número de veces que el sujeto hace clic en cada uno de los escalones de la escalera.

- *Registros temporales:  $ti$* . Recogen el tiempo, en segundos, que tarda el sujeto en realizar cada una de las tareas.
- *Listas de acciones:  $listaRi$* . Recogen la lista de pares  $(pij, nij)$  que reproducen las acciones sucesivas del sujeto en cada tarea. Su misión consiste en facilitar al investigador el análisis y la evaluación de las tareas.

A continuación se explica con más detalle, tanto los índices que intervienen como la función de cada uno de los tipos de registros.

### Índices que intervienen

Los registros de localización y de números de intentos,  $p_{ij}$  y  $n_{ij}$ , están afectados de dos índices  $i$  y  $j$ . En estos registros es el índice  $j$ , el segundo, el que identifica la tarea, varía por tanto de 1 a 6; mientras que el índice  $i$ , el primero, identifica los *peldaños activos* sobre los que el sujeto puede hacer o no clic en cada tarea, es decir los peldaños sobre los que no hay ninguna fruta en las ventanas de planteamiento. Varía, pues, según la tarea de la siguiente forma:

- Primera tarea: del 7 al 10.
- Segunda tarea: del 5 al 10.
- Tercera tarea: del 5 al 10.
- Cuarta tarea: del 7 al 11.
- Quinta tarea: del 7 al 11.
- Sexta tarea: del 7 al 12.

Los registros temporales y la listas de acciones,  $ti$  y  $listaRi$ , están afectados de un único índice  $i$  que se refiere al número que identifica la tarea, varía por tanto de 1 a 6.

### Registros de localización

Los registros  $p_{ij}$  identifican y recogen el número del peldaño activo sobre el que el niño hace o no clic en la tarea  $j$ -ésima, por lo que sus valores posibles son: 0, si el sujeto no hace clic sobre el  $i$ -ésimo peldaño activo;  $i$  si el sujeto hace clic sobre el  $i$ -ésimo peldaño activo.

### Registros de números de intentos

Los registros  $n_{ij}$  recogen el número total de intentos que realiza el sujeto sobre el  $i$ -ésimo peldaño activo en la  $j$ -ésima tarea, por ejemplo  $n_{91}$  recoge el número de veces que el niño ha hecho clic en el 9º escalón de la primera tarea. Sus valores son números naturales.

### Registros temporales

Los registros *ti* recogen el tiempo, en segundos, que tarda el sujeto en superar la tarea *i-ésima*. Si alguna de estos registros almacenara el valor cero indicaría que el sujeto no ha realizado la tarea correspondiente.

### Listas de acciones

Los registros *lista.Ri* recogen las acciones del sujeto tal como se produjeron en cada tarea, es decir: sobre qué escalones hizo clic y el número de intentos realizados sobre cada escalón. Este registro es en realidad una lista de pares  $(p_{ij}, n_{ij})$  que reproducen las acciones sucesivas del sujeto en la tarea.

Ejemplos de valores de este registro son:

- ❖ En la segunda tarea, el valor  $[6, 1, 8, 1, 10, 1]$  informa de que el sujeto ha hecho clic una sola vez sobre los peldaños 6<sup>o</sup>, 8<sup>o</sup> y 10<sup>o</sup> en ese orden, que en este caso es la secuencia correcta. Y de que ha utilizado una estrategia ascendente.
- ❖ En la tercera tarea, el valor  $[5, 1, 7, 1, 6, 1, 8, 1, 9, 1, 10, 1]$  informa de que el sujeto ha hecho clic una sola vez sobre los peldaños 5<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup>, 6<sup>o</sup>, 8<sup>o</sup>, 9<sup>o</sup> y 10<sup>o</sup> en ese orden, y de que en este caso no ha identificado la secuencia correcta, que al igual que en la tarea anterior era 6–8–10. Informa también de que el sujeto ha procedido por ensayo y error.

Como vemos, este registro es muy útil no solo para averiguar si el sujeto identifica o no la secuencia de localizaciones correctas en cada tarea, sino también, para decidir y asignarle la estrategia utilizada.

## 7.7 Tratamiento y análisis de la información. Variables del estudio.

A continuación exponemos el método seguido en el análisis de la información y definimos o identificamos las variables propias del estudio para cada conjunto de tareas. En este sentido, resaltamos la distinción que debe hacerse entre los *registros* definidos anteriormente y las *variables* del estudio que se definirán a partir de ellos, en cada una de sus partes, como se indica más adelante.

Como ya se especificó en el apartado 7.3.5, Recogida y tratamiento de la información, los datos que recojan los registros de cada conjunto de tareas se almacenarán, en primera instancia, en ficheros de texto. El tratamiento

de la información almacenada en dichos ficheros, junto con la recogida en las variables que se van a definir a continuación, se verá en la sección 7.7.5 siguiente.

La obtención de los resultados se ha dividido en cinco partes, las cuatro primeras se corresponden con cada uno de los conjuntos de tareas, y la quinta se dedica al análisis y al estudio comparado de los resultados anteriores.

El análisis y valoración de las respuestas para cada conjunto se realiza, a su vez, en cuatro apartados:

- 1º. Estudio de las distribuciones de frecuencias en las respuestas.
- 2º. Caracterización y estudio de los niveles.
- 3º. Análisis de las estrategias.
- 4º. Estudio de modelos de ajuste.

En función de las características de cada conjunto de tareas, el plan general anterior adopta las particularidades siguientes:

- Para el primer conjunto no se incluye en el análisis y valoración de las respuestas el apartado correspondiente al análisis de las estrategias, dado que, por la propia naturaleza de las tareas, no ha lugar.
- Para los conjuntos segundo y tercero se incluye, además, un apartado correspondiente al análisis del uso de las piezas sobrantes.
- Para el cuarto conjunto se incluye, además, un apartado correspondiente al análisis del uso del etiquetaje frente a la recursión.

Para cada conjunto se incluye, finalmente, un apartado dedicado a los resultados y conclusiones del estudio de las tareas correspondientes.

En cada apartado, a partir de las variables primarias o básicas de las que parte el análisis, que son los *registros* definidos en las secciones correspondientes anteriores, se identificarán o definirán las *variables del estudio* como variables secundarias adecuadas, y se procederá analizar y valorar la información que almacenen.

En las subsecciones siguientes se definen o se identifican tales variables para cada una de las cuatro primeras partes. Para todas ellas es común la variable **Clave** que identifica a cada uno de los sujetos, permite conectar los resultados del mismo en cada conjunto de tareas y a la que se referirán todas las demás variables individuales. La última parte, dedicada al estudio comparativo de los resultados de los cuatro conjuntos, se realizará utilizando variables definidas previamente para los conjuntos de tareas.

Para cada conjunto, hemos incluido un estudio de modelos de ajuste lineales y no lineales con el propósito de averiguar las posibles tendencias evolutivas. En ellos intervienen variables del estudio.

Hacemos la advertencia de que las conclusiones relativas a dichos modelos estarán sujetas a las limitaciones impuestas por el tamaño de la muestra utilizada.

### 7.7.1 Variables para el estudio de las tareas de orden lineal.

En cada uno de los apartados citados se tomarán en consideración las variables secundarias que se indican. Pueden intervenir en uno o en más apartados según sus características o según las necesidades del estudio. Recordamos que son cinco las tareas que aportan datos.

#### Valoración de las respuestas.

La valoración se lleva a cabo mediante la inspección de los valores recogidos en los registros *listaRi*, variando *i* de 2 a 6\*, para cada uno de los sujetos codificados por los valores de la variable *Clave*.

Se asigna el *valor 1* a aquellos casos en los que el valor del registro *listaRi* es [1, 1] (el sujeto elige el camino correcto al primer intento) y el *valor 0* a todos los demás, teniendo en cuenta que estos registros carecen de valores vacíos (todos los sujetos de la muestra realizaron las cinco tareas). Estos valores se almacenan, para cada sujeto y para cada ítem o tarea, en las variables dicotómicas *EvLi*, variando *i* de 2 a 6.

La variable *SumaL* almacena la suma de los valores de las variables dicotómicas *EvLi* para cada sujeto, variando *i* de 2 a 6. Por tanto, los valores posibles de *SumaL* varían de 0 a 5, estableciéndose las siguientes categorías o niveles según las valoraciones globales de las respuestas de los sujetos:

- ❖ Nivel 1  $\iff$  *SumaL* = 0, 1, 2.
- ❖ Nivel 2  $\iff$  *SumaL* = 3.
- ❖ Nivel 3  $\iff$  *SumaL* = 4, 5.

Consideramos también como variables del estudio, la media de la variable *SumaL* por grupos de edad, que llamaremos *MediaL*, y la edad característica en años de cada grupo de edad, que llamaremos *EDG* (edad del grupo), cuyos valores son: 3,5; 4; 4,5; 5; .....; 7.

\*Véase la subsección 7.6.1.3 en la página 354 y siguientes

### 7.7.2 Variables para el estudio de las tareas de orden con cantidades continuas.

Para el análisis y estudio de estas tareas tomaremos en consideración las variables secundarias que se indican en cada apartado. Pueden intervenir en uno o más apartados según sus características o según las necesidades del estudio. Recordamos que también, en este caso, son cinco las tareas que aportan datos.

#### Valoración de las respuestas

La valoración de las respuestas de cada sujeto, identificada por los valores de la variable *Clave*, se lleva a cabo mediante la inspección de los valores recogidos en los registros *listaRi*, que almacenan todas sus acciones. Así como, mediante los recogidos en los registros *listaAci* y *listaei* correspondientes, variando *i* de 2 a 6\*.

En cada tarea se asigna el *valor 1* a aquellos casos en los que el valor del registro *listaAci* coincide con la lista correcta de los números correspondientes a los troncos a colocar, ordenada de modo creciente o de modo decreciente, y el valor del registro *listaei* es vacío o solo contiene intentos nulos.

En estos casos diremos que la ordenación se ha realizado de forma *completa*.

En las tareas cuarta, quinta y sexta, dada su mayor complejidad, se ha asignado el *valor 0,5* a aquellos casos en los que el valor del registro *listaAci* coincide con la lista de los números correspondientes a los troncos a colocar, ordenada de modo creciente o de modo decreciente, y el valor del registro *listaei* contiene un sólo intento erróneo, o bien ninguno y aparece un único error en el orden creciente o decreciente de la lista *listaAci*. Como, por ejemplo, sucede en el caso  $listaAc6 = [1, 1, "V", 2, 1, "V", 4, 1, "V", 3, 1, "V"]$ . No se tienen en cuenta los intentos nulos.

En la sexta tarea *se ha asignado también este valor* en los casos en los que no hay intentos erróneos y que siguen una estrategia ordinal creciente o decreciente, con un máximo de dos errores en el orden de la lista *listaAci*; como sucede, por ejemplo, en el caso  $listaAci = [4, 1, "V", 1, 1, "V", 3, 1, "V", 2, 1, "V"]$  en el que se observa una estrategia decreciente por parejas:  $4 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$ . Esto sucede en muy pocos casos (cuatro sujetos solamente).

\*Véase la subsección 7.6.2.3, página 366 y siguientes.

En cualquiera de las dos situaciones anteriores, diremos que la ordenación se ha realizado de forma *incompleta*.

En todos los demás casos se ha asignado el *valor 0*.

Estos valores se almacenan, para cada sujeto y cada tarea, en las variables *EvCCi*, variando *i* de 2 a 6. Las cinco son variables del estudio.

La variable acumulativa *SumaCC* almacena, para cada sujeto, la suma de los valores de las variables *EvCCi*, variando *i* de 2 a 6. Por tanto, los valores posibles de *SumaCC* varían de 0 a 5.

Consideramos también como variables del mismo la media de la variable *SumaCC* por grupos de edad, que llamaremos *MediaCC*; el grupo de edad llamada *GED* (grupo de edad), variable ordinal cuyos posibles valores son: 3AM, 4A, 4AM, 5A, 5AM, 6A, 6AM, 7A; así como la edad característica de cada grupo en años, llamada *EDG* (edad del grupo), cuyos valores son: 3,5; 4; 4,5; 5;...; 7.

### Niveles

Mediante la variable acumulativa *SumaCC* definimos las siguientes categorías o niveles, que son también variables del estudio:

- ❖ Nivel 1  $\iff$  *SumaCC*  $\in$  [0, 2].
- ❖ Nivel 2  $\iff$  *SumaCC*  $\in$  (2, 3].
- ❖ Nivel 3  $\iff$  *SumaCC*  $\in$  (3, 5].

Éstos, son los posibles valores de la variable cualitativa *NivelCC*.

### Estrategias

Para el estudio de las estrategias, y de nuevo para cada sujeto, consideraremos las variables *EstCCi* y *HPCi*, variando *i* de 2 a 6, como variables del estudio.

Las variables *EstCCi*, almacenan para cada sujeto y tarea la clave de la estrategia utilizada: X, no realiza la tarea; N, ninguna; EE, ensayo y error; DI, ID el sujeto ordena los troncos de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, respectivamente; C, creciente; D, decreciente. Las dos últimas pueden ir seguidas de un número, 1 o 2, que indica si ha habido 1 error relativo a la estrategia, en las tareas cuarta, quinta y sexta, o 2 en la sexta (Véanse los ejemplos aclaratorios anteriores).

Finalmente, las variables *HPCi* almacenan los números de los huecos en los que el sujeto intentó colocar la pieza o tronco sobrante en la tarea *i*-ésima. Si no lo hace, almacenan un valor vacío. En este



caso  $i$  varía de 3 a 6, pues en la segunda tarea no hay pieza o tronco sobrante.

Otras variables, derivadas de las anteriores, se introducen y definen en el análisis y estudio de los resultados de estas tareas\*.

### 7.7.3 Variables para el estudio de las tareas de orden con cantidades discretas

Las variables primarias o básicas de las que parte el análisis y estudio de estas tareas son los *registros* que se presentaron en la sección 7.6.3.3<sup>†</sup>. A partir de ellas se definen, a continuación, otras variables secundarias adecuadas al estudio. Su estructura y definiciones son similares a las ya definidas, en el apartado anterior, para el estudio de las tareas con cantidades continuas. En este caso son seis las tareas que aportan datos al estudio.

#### Valoración de las respuestas

La valoración de las respuestas de cada sujeto, identificada por los valores de la variable *Clave*, se lleva a cabo mediante la inspección de los valores recogidos en los registros *listaRi*, que almacenan todas sus acciones. Y, de modo complementario, también mediante los recogidos en los registros *listaAci* y *listaei* correspondientes, variando  $i$  de 2 a 4, en el primer subconjunto de tareas, y de 6 a 8, en el segundo.

En cada tarea se asigna el *valor 1* a aquellos casos en los que el valor del registro *listaAci* coincide con la lista correcta de los números correspondientes a las piezas a colocar (conjuntos de frutas o de escalones), ordenada de modo creciente o de modo decreciente, y el valor del registro *listaei* es vacío o solo contiene intentos nulos.

En estos casos diremos que la ordenación se ha realizado de forma *completa*.

En las tareas de la segunda a la cuarta, así como en la séptima y octava, se ha asignado el *valor 0,5* a aquellos casos en los que el valor del registro *listaAci* coincide con la lista de los números correspondientes a las piezas a colocar, ordenada de modo creciente o de modo decreciente, y el valor del registro *listaei* contiene un sólo intento erróneo, o bien ninguno y aparece un único error en el orden creciente o decreciente de la lista *listaAci*. Como, por ejemplo,

\*Véase la sección 8.6, página 443 y siguientes.

<sup>†</sup>Véase la página 390 y siguientes.

sucede en el caso  $listaAc4 = [4, 1, "V", 3, 1, "V", 1, 1, "V", 2, 1, "V"]$  (sujeto 25AM4). No se tienen en cuenta los intentos nulos.

En las tareas cuarta y séptima, eventualmente, *se ha asignado también este valor* en los casos en los que no hay intentos erróneos de colocación de piezas, y siguen una estrategia ordinal, creciente o decreciente, con un máximo de dos errores en el orden de la lista  $listaAc_i$ . Ello sucede, por ejemplo, en el caso  $listaAc4 = [3, 1, "V", 4, 1, "V", 1, 1, "V", 2, 1, "V"]$  (sujeto 16A6) en el que se observa una estrategia creciente por parejas:  $3 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 2$  (se ordena de forma creciente empezando por la tercera pieza y no por la primera). Esto sucede muy raramente: cuatro casos en la cuarta tarea y uno en la séptima.

En cualquiera de las dos situaciones anteriores, diremos que la ordenación se ha realizado de forma *incompleta*.

En todos los demás casos se ha asignado el *valor 0*.

Estos valores se almacenan, para cada sujeto y cada tarea, en las variables  $EvCD_i$ , variando  $i$  de 2 a 4, en el primer subconjunto de tareas, y de 6 a 8, en el segundo. Las seis son variables del estudio.

Las variables acumulativas  $SumCD24$  y  $SumCD68$  (o abreviadamente  $SCD24$  y  $SCD68$ ) almacenan, para cada sujeto, la suma de los valores de las variables  $EvCD_i$ , variando  $i$  de 2 a 4, para la primera, y de 6 a 8, para la segunda.

Asimismo, la variable  $CoefCD$  tomará, para cada sujeto, uno solo de los siguientes valores: 0; 0,5; 1. Estos valores corresponden, respectivamente, a las tres situaciones que se observan en las respuestas\* de los sujetos a las preguntas del cuestionario relativas a las tareas 6<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup>: el sujeto no manifiesta reconocer o usar la cantidad discreta (se refiere al tamaño, la forma o la longitud, no sabe o no contesta), el sujeto reconoce parcialmente la intervención de la cantidad discreta (en su respuesta mezcla referencias a la cantidad continua y discreta), el sujeto reconoce y manifiesta la intervención de la cantidad discreta.

Los valores de la variable acumulativa  $SCCD5$  se obtienen, para cada sujeto, sumando al valor correspondientes de  $SumCD24$  el de  $SumCD68$  multiplicado, esto último, por el valor de la variable  $CoefCD$  correspondiente a la respuesta del sujeto sujeto<sup>†</sup> en el cuestionario. Finalmente, la variable  $SCCD5$  se expresa en una escala

\*Estas respuestas se almacenan en la variable  $Respuesta78$ . Véase su definición más adelante.

†Es decir, que se usa la fórmula  $SCCD5 = SumCD24 + SumCD68 \cdot CoefCD$ , para obtener los valores de la variable  $SCCD5$ .

de 5 unidades, por lo que, sus posibles valores varían de 0 a 5. Nótese que esta variable fundamental recoge información que se refiere exclusivamente a la interacción de los sujetos con la cantidad discreta y su ordenación, bien porque es la única que interviene en las tareas de la 2<sup>a</sup> a la 4<sup>a</sup>, o bien, porque el sujeto la reconoce y la usa (siquiera parcialmente) en las tareas 6<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup>, de modo que excluye de la valoración de las respuestas de los sujetos aquellas tareas resueltas correctamente (se ordenan correctamente las cantidades) en las que se emplean estrategias ordinales que no corresponden a la cantidad discreta\*.

Consideramos también como variables del mismo la media de la variable *SCCD5* por grupos de edad, que llamaremos *MediaCD*; el grupo de edad llamada *GED* (grupo de edad), variable ordinal cuyos posibles valores son: 3AM, 4A, 4AM, 5A, 5AM, 6A, 6AM, 7A; así como la edad característica de cada grupo en años, llamada *EDG* (edad del grupo), cuyos valores son: 3,5; 4; 4,5; 5; . . . ; 7.

### Niveles

Mediante la variable *SCCD5* definimos las siguientes categorías o niveles, que son también variables del estudio:

- ❖ Nivel 1  $\iff SCCD5 \in [0, 2]$ .
- ❖ Nivel 2  $\iff SCCD5 \in (2, 3]$ .
- ❖ Nivel 3  $\iff SCCD5 \in (3, 5]$ .

Del mismo modo que en el anterior conjunto de tareas, éstos son los posibles valores de la variable cualitativa *NivelCD*.

### Estrategias

Para el estudio de las estrategias, y de nuevo para cada sujeto, consideraremos como variables primarias del estudio las variables *ECDi* y *HPCDi*, variando *i* en la primera de 2 a 4 y de 6 a 8, y pudiendo tomar en la segunda los valores 3, 4, 8.

Las variables *ECDi*, almacenan para cada sujeto y tarea la clave de la estrategia utilizada: X, no realiza la tarea; N, ninguna; EE, ensayo y error; PDI, PID, PIDI, el sujeto utiliza las piezas movibles\* de izquierda a derecha, de derecha a izquierda o primero de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda respectivamente; ADI, AID el sujeto ordena las piezas de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, respectivamente; PID-D, el sujeto comienza colocando la

\*Por ejemplo, las que se basan en el tamaño o la longitud de las piezas

\*En relación con estas estrategias, véase la subsección 5.10.2.1, página 258 y siguientes, Estudio Exploratorio.

primera pieza de izquierda a derecha combinándola luego con la estrategia decreciente\*; C, creciente; D, decreciente. Estas dos últimas pueden ir seguidas de un número, 1, 2 o 3, que indica si ha habido 1, 2 o 3 errores, según la tarea.

En relación con la última indicación, hacemos las siguientes observaciones:

- ❖ Un sujeto puede cometer más de un error y sin embargo seguir una estrategia ordinal. Por ejemplo, el sujeto 23AM2 en la segunda tarea realiza [2, 1, 6, 1, "E", 2, 2, "V", 3, 1, 0, 1, "N", 3, 2, 0, 2, "N", 3, 3, "V", 1, 1, 0, 1, "N", 1, 2, "V"], cometiendo un error inicial de ubicación de la pieza 2 (en el lugar de la tercera, por tanteo) y otro ordinal: 3-1-1, ésta es una estrategia que hemos denominado C1\*. Se valora con 0.
- ❖ Un sujeto puede comenzar con una estrategia de ensayo y error y terminar siguiendo una estrategia ordinal. Por ejemplo, el sujeto 25A1 en la tercera tarea realiza [3, 1, 5, 1, "E", 4, 1, 6, 1, "PE", 1, 1, "V", 2, 1, 0, 1, "N", 2, 2, 0, 2, "N", 2, 3, "V", 3, 2, 0, 1, "N", 3, 3, 0, 2, "N", 3, 4, "V"], aún con dos intentos erróneos y otros nulos, utiliza una estrategia creciente 1-2-3. A la estrategia empleada se la denomina C2. Se valora con 0.
- ❖ Un sujeto puede utilizar una estrategia ordinal a pesar de cometer tres errores. Por ejemplo, el sujeto 24A6 en la tercera tarea realiza [4, 1, 4, 1, "PE", 1, 1, "V", 2, 1, "V", 4, 2, 6, 1, "PE", 4, 3, 6, 2, "PE", 3, 1, "V"]. Nótese que, salvo el tanteo inicial con la pieza sobrante (la que tiene 4 frutas), posteriormente intenta colocarla dos veces erróneamente en el árbol que tiene más huecos (3 huecos). Presenta fallos en la correspondencia serial pero emplea, sin embargo, una estrategia creciente 1-2-3. En estos casos, a la estrategia empleada se la denomina C3. Se valora con 0.
- ❖ Un sujeto puede establecer correspondencias mediante el con-

\*No se ha observado en la muestra incidencia alguna de la correspondiente PID-C

\*Análogamente, el sujeto 24A1 en la séptima tarea realiza [2, 1, 4, 1, "E", 3, 1, "V", 2, 2, 6, 1, "C", 2, 3, "V", 1, 1, "V"], cometiendo un error de ubicación inicial de la pieza 2 y un intento contradictorio al colocar la pieza 2 en el lugar correspondiente a la 3, siguiendo una estrategia D1. También se valora con 0.

Cabe pensar que las acciones de este sujeto son descriptivas de su estado y edad: el sujeto tantea con la pieza 2 (tres escalones, pieza intermedia) el hueco 4 (correspondiente a dos escalones) y obtiene un error, coloca correctamente la pieza 3 (cuatro escalones) e intenta colocar la pieza 2 (tres escalones) en su hueco correspondiente, fallando en su colocación y produciéndose el intento contradictorio con el hueco de la pieza 3, ya colocada. Posteriormente coloca las piezas 2 y 1 correctamente, utilizando, salvo el tanteo inicial, una estrategia decreciente clara (con un error).

teo pero sin conservar el orden\* (correspondencias no ordenadas).

A estas estrategias las llamaremos estrategias *locales*, ya que se utilizan por los sujetos en las tareas individuales.

A su vez, las variables *HPCDi* almacenan los números de los huecos en los que el sujeto intentó colocar la pieza sobrante en la tarea *i*-ésima. Si no lo hace, almacenan un valor vacío. En este caso *i* toma los valores de 3, 4 y 8, por ser las tareas en las que intervienen tales piezas.

En relación con las respuestas de los sujetos a las preguntas de la primera parte del cuestionario, referidas a la colocación de las piezas en los dos subconjuntos de tareas, se utilizarán también como variables cualitativas primarias las denominadas *Cod24* y *Cod68*, respectivamente. Estas variables recogen las respuestas observadas\* de cada sujeto, codificadas de la siguiente forma:

- ❖ CP: comparación de tamaños, sin referirse explícitamente a la cantidad discreta o a la longitud.
- ❖ CF: comparación de formas, refiriéndose a la forma explícitamente.
- ❖ EE: ensayo y error.
- ❖ PC: protoconteo. Se usa el conteo de modo no sistemático y con errores manifiestos.
- ❖ CL: comparación de longitudes o alturas.
- ❖ CT: se usa el conteo<sup>†</sup> en la realización de las tareas.
- ❖ CP-CT: se mezcla compensación por tamaños con el conteo.
- ❖ CL-CT: se mezcla comparación de longitudes con conteo.

Finalmente, las respuestas completas de cada sujeto, en cada subconjunto, se recogen respectivamente en las variables textuales primarias *Estrategia24* y *Estrategia78*. Nótese que estas estrategias se aplican por los sujetos en todas las tareas del subconjunto correspondiente y por ello las llamaremos estrategias *globales*.

\*Por ejemplo, el sujeto 24AM1 en la tercera tarea realiza [2, 1, "V", 1, 1, "V", 3, 1, 0, 1, "N", 4, 1, 0, 1, "PN", 3, 2, "V"] y en la entrevista manifiesta utilizar el conteo. Utiliza una estrategia PDI y se valora con 0.

\*En la muestra elegida no se han observado otras posibilidades

<sup>†</sup>No significa que el sujeto utilice el *conteo ordinal* correctamente al establecer las correspondencias, sino que manifiesta usarlo. Si lo hace o no correctamente, se observará en la valoración ulterior de las tareas.

Como derivadas de las anteriores, se introducen y definen otras variables adecuadas al análisis y estudio de los resultados de estas tareas en la sección 8.7 correspondiente\*.

#### 7.7.4 Variables para el estudio de las tareas recursivas

Para el análisis y estudio de estas tareas tomaremos en consideración las variables secundarias que se indican en cada apartado. Pueden intervenir en uno o más apartados según sus características o según las necesidades del estudio. Recordamos que son seis las tareas que aportan datos y que en las tres primeras el operador siguiente actúa dos veces, mientras que en las tres últimas dicho operador actúa tres veces (tabla E.1, página 768, anexo E).

#### Valoración de las respuestas

La valoración de las respuestas de los sujetos se identifica mediante los valores de la variable *Clave* y se lleva a cabo mediante la inspección de los valores recogidos en los registros *listaR<sub>i</sub>*, variando *i* de 1 a 6\*, que almacenan todas sus acciones.

En cada tarea se asigna el *valor 1* a aquellos casos en los que el valor del registro *listaR<sub>i</sub>* coincide con la lista de posiciones correctas de los plátanos en la serie, ordenada de modo creciente o de modo decreciente<sup>†</sup>. En las tareas segunda y tercera, en las que el sujeto debe identificar tres posiciones de la serie, también se ha asignado este valor en los pocos casos en los que el sujeto completa la serie sin errores partiendo de la posición intermedia. Como, por ejemplo, sucede en el caso  $listaR2 = [8, 1, 10, 1, 6, 1]$ , correspondiendo a la respuesta correcta en sentido descendente  $listaR2 = [10, 1, 8, 1, 6, 1]$ , o en sentido ascendente  $listaR2 = [6, 1, 8, 1, 10, 1]$ .

En las tareas cuarta, quinta y sexta, en las que el operador siguiente actúa tres veces, se ha asignado el *valor 0,5* a aquellos casos en los que el valor del registro *listaR<sub>i</sub>* presenta un solo error en la lista de posiciones correctas de los plátanos en la serie, ordenada de modo creciente o decreciente. Como, por ejemplo, sucede en el caso  $listaR5 = [8, 1, 10, 1, 11, 1]$ , correspondiendo a la respuesta correcta  $listaR5 = [8, 1, 11, 1]$ .

En todos los demás casos se ha asignado el *valor 0*.

\*Véase la página 479 y siguientes.

\*Véase la subsección 7.6.4.3, página 410 y siguientes.

<sup>†</sup>El soporte sobre el que se hallan los elementos de estas series es una escalera, véase la sección 7.6.4 en la página 399 y siguientes, por lo que puede “recorrerse” en los dos sentidos ascendente o descendente. El primero corresponde a la ordenación creciente y el segundo a la decreciente.

Estos valores se almacenan, para cada sujeto y cada tarea, en las variables **EvRi**, variando *i* de 1 a 6. Las seis son variables del estudio.

La variable acumulativa **SR5** almacena, para cada sujeto, la suma de los valores de las variables **EvRi**, variando *i* de 1 a 6, expresada en una escala de 5 unidades. Por tanto, los valores posibles de **SR5** varían de 0 a 5.

Consideramos también como variables del mismo la media de la variable **SR5** por grupos de edad, que llamaremos **MedREC**; el grupo de edad llamada **GED** (grupo de edad), variable ordinal cuyos posibles valores son: 3AM, 4A, 4AM, 5A, 5AM, 6A, 6AM, 7A; así como la edad característica de cada grupo en años, llamada **EDG** (edad del grupo), cuyos valores son: 3,5; 4; 4,5; 5;...; 7.

### Niveles

Mediante la variable acumulativa **SR5** definimos las siguientes categorías o niveles, que son también variables del estudio:

- ❖ Nivel 1  $\iff SR5 \in [0, 2]$ .
- ❖ Nivel 2  $\iff SR5 \in (2, 3]$ .
- ❖ Nivel 3  $\iff SR5 \in (3, 5]$ .

Éstos, son los posibles valores de la variable cualitativa **NivelR**.

### Estrategias

Para el estudio de las estrategias consideraremos las variables **EstRi**, variando *i* de 1 a 6, que almacenan para cada sujeto y tarea la clave de la estrategia utilizada: X, tarea no realizada; EE, ensayo y error; S, SD el sujeto identifica erróneamente todas las posiciones seguidas (sin hacer uso de la alternancia) en el sentido ascendente o en el descendente, respectivamente; PI, el sujeto comienza la serie en una posición intermedia y la continúa luego en sentido ascendente o descendente sin cometer ningún error (solo posible en las tareas segunda y tercera, véase el ejemplo aclaratorio anterior); A, ascendente; D, descendente.

Recordamos que el soporte sobre el que se hallan los elementos de estas series es una escalera, por lo que puede “recorrerse” en los dos sentidos, ascendente o descendente, y, en consecuencia, los sujetos puede utilizar ambos tipos de estrategias para construir las series. La estrategia PI solamente puede utilizarse en las tareas segunda y tercera, en las que se deben identificar tres posiciones en la serie, no pueden utilizarse en las demás tareas, ya que en ellas deben identificarse solamente dos posiciones. Finalmente, los sujetos que utilizan

las estrategias S y SD hacen clic en todos los escalones seguidos sin tener en cuenta las alternancias.

Otras variables, derivadas de las anteriores, se introducen y definen en el análisis y estudio de los resultados de estas tareas\*.

### *7.7.5 Instrumentos de tratamiento y análisis de datos*

Como se ha indicado en la sección 7.3.5, página 338 y siguientes, la información recogida en los registros definidos en las secciones anteriores se almacenará en cuatro ficheros de texto, uno para cada conjunto de tareas.

Sin embargo, aunque este método de almacenamiento de la información es sencillo y eficaz, la lectura de los contenidos de los ficheros resultantes por el investigador, resulta difícil, incómoda y poco adecuada para realizar un análisis detenido, lo que pudiera ocasionar errores e imprecisiones. Por ello, estos ficheros se importarán a hojas de cálculo Excel, estableciendo una correspondencia biunívoca entre los registros almacenados en los ficheros de texto y las cabeceras de las columnas que se obtienen en las hojas de cálculo; de este modo, los valores de los registros quedarán dispuestos en las columnas de las hojas, correspondiendo las filas a los datos individuales de los sujetos, lo que hará posible una lectura cómoda que es necesaria para el análisis detallado de los datos. Posteriormente, en las mismas hojas, se procederá a definir en columnas las variables propias del estudio para cada conjunto de tareas y a asignar los valores correspondientes de las mismas para cada sujeto, según se ha indicado en las secciones anteriores.

El análisis y estudio se completa mediante la importación de dichas hojas de cálculo al programa de tratamiento estadístico de datos SPSS que, finalmente, permitirá la realización de análisis descriptivos de frecuencias y porcentajes y de los parámetros de las distribuciones de los datos, representaciones gráficas y confección de tablas de valores, tests de diferentes tipos, análisis de correlaciones y estudio de modelos de regresión lineal y no lineal, entre otros.

Por último, la información procedente de dicho programa se convertirá a formatos adecuados para su edición final en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, sistema en el que está redactada la presente memoria.

---

\*Véase la sección 8.8, página 521 y siguientes.



## 8

# DESARROLLO Y RESULTADOS

### 8.1 Introducción

En el presente capítulo se describe el desarrollo de las tres etapas del estudio empírico correspondientes a la metodología específica utilizada, que se detalla en los capítulos 6 y 7 anteriores, y se realiza el análisis y valoración de los datos y acciones de los sujetos, tratados según quedó descrito en la sección 7.7 del capítulo anterior, para los cuatro conjuntos de tareas correspondientes a los estados del MECOR, así como un estudio comparativo global de las valoraciones de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos citados.

Para cada conjunto se incluye un análisis de las frecuencias en las valoraciones de las respuestas y de su evolución, la caracterización y estudio evolutivo de los niveles detectados así como un estudio de modelos de ajuste lineales y no lineales para la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad. Para los conjuntos del segundo al cuarto se incluye también el análisis y estudio de la evolución de las estrategias utilizadas por los sujetos en la resolución de los ítems o tareas correspondientes. Para los conjuntos segundo y tercero se incluye además un estudio del uso de ciertas piezas *sobrantes*, cuya función y propósitos se detallan en las secciones correspondientes de este capítulo así como en las secciones 7.6.2 y 7.6.3 del capítulo anterior, y para el cuarto conjunto se incluye un estudio del uso del etiquetaje y la recursión en función de la edad de los sujetos en la resolución de las tareas. Para cada conjunto se incluyen, asimismo, las conclusiones correspondientes de los análisis y estudios anteriores.

En el estudio comparativo final se presenta un cuadro evolutivo que resume las capacidades estudiadas por grupos de edad y se obtienen conclusiones que muestran la validez del MECOR para las medias de las valoraciones por grupos de edad (sujeto epistémico), respaldada por los resultados de los

modelos de ajuste obtenidos, y su buena adecuación para la descripción de la evolución de estas capacidades en los sujetos individuales concretos.

Este estudio empírico aporta numerosos datos y resultados que avalan la bondad de las hipótesis planteadas. Sus conclusiones generales se detallan, junto con las globales de la investigación, en el capítulo siguiente.

## 8.2 Primeras etapas del estudio: actividades realizadas

El presente estudio se ha desarrollado aplicando la Metodología Multimedia específica que se cita en la sección 7.3.2, página 332 y siguientes del capítulo anterior, y se describe en la sección 6.6, página 322 y siguientes del capítulo 6, en las tres etapas que se detallan (véase la tabla 6.2).

En relación con la primera parte del proceso de selección de la muestra, correspondiente a la selección de centros, informamos de que el trabajo de campo se llevó a cabo con los alumnos de los tres cursos del segundo ciclo de Educación Infantil del C.E.I.P. “Gloria Fuertes” y entre los alumnos de los tres cursos del segundo ciclo de Educación Infantil y de los dos primeros cursos de Educación Primaria del Colegio “San Manuel” de Málaga (España); centros que, cumpliendo los criterios de selección de la muestra\*, resultaron seleccionados de entre una lista de seis centros en total, por ser los primeros en aceptar la solicitud de participación realizada por el investigador† a la dirección de esos centros, con fechas respectivas del 2 y el 1 de octubre de 2007.

El primero es un centro público y el segundo un centro concertado, situados ambos en barrios de clase media y media-baja, en los que no existen conflictos ni marginación social y son representativos de lo que podemos llamar *centro urbano estándar*.

Con el fin de comenzar y organizar el desarrollo del estudio, se mantuvieron entrevistas personales con los tutores y tutoras de los grupos de alumnos. Se les entregó también la documentación descriptiva de la investigación a realizar, de sus tres etapas y de su temporalización, para su propio conocimiento y el de los padres y madres de los alumnos; así como modelos de autorización para los padres, madres o tutores legales de los niños que desearan participar.

Como resultado de ese proceso obtuvimos un total de 132 autorizaciones

\*Véase la sección 7.3.3, página 334 y siguientes

†Dichas solicitudes se realizaron mediante entrevistas personales con los directores y directoras de los centros, a lo largo de la semana del 24 al 28 de septiembre de 2007, en las que se les informó de las características del estudio a realizar, de sus etapas y de su temporalización, se les entregó documentación descriptiva, y se atendió a sus preguntas, dudas y sugerencias, quedando citados en fecha posterior para recibir la respuesta.

de niños y niñas, de edades comprendidas entre los tres años y medio y los siete años. De ellos 59 resultaron ser alumnos del primer centro y 73 del segundo.

Agradecemos encarecidamente la colaboración y ayuda prestada por las directoras y por los padres y madres de los alumnos y alumnas de ambos centros, así como la colaboración, ayuda, sugerencias y auténtico entusiasmo con los que participaron los tutores y tutoras, profesores y profesoras y los alumnos y alumnas en todas las etapas del estudio.

En este punto comenzó el desarrollo de las tres etapas metodológicas anteriormente aludidas, en las fechas y periodos que, para cada centro, se detallan en la tabla 8.1.

	Colegio "San Manuel"	C.E.I.P. "Gloria Fuertes"
Proyección de la película	12 de noviembre de 2007	29 de noviembre de 2007
Periodo de selección de la muestra	del 13 al 16 de noviembre de 2007	30 de noviembre y 3 de diciembre de 2007
Periodo de realización de las entrevistas	del 21 al 23 y del 26 al 29 de noviembre de 2007	del 4 al 7 y del 10 al 14 de diciembre de 2007

Tabla 8.1: Fechas de realización de las etapas del estudio en los colegios seleccionados.

La primera etapa del proceso se llevó a cabo en la forma prevista\*, con los materiales especificados en la sección 7.4, página 339 y siguientes del capítulo anterior, en salas y ambientes adecuados, y en las fechas indicadas. Las proyecciones se organizaron para cada centro, dado el elevado número de participantes, en dos sesiones de media hora, justo antes del recreo (la primera) y justo después (la segunda), con el objeto de perturbar mínimamente el normal desarrollo de las actividades académicas. Durante los primeros quince minutos se procedió a proyectar una parte seleccionada de la película, reservando los quince últimos minutos para presentar a los participantes (mediante proyección) las tareas destinadas a la selección de la muestra e intercambiar impresiones con el profesorado y el alumnado de ambos centros. Este último manifestó, en todos los casos, verdadero entusiasmo.

Asimismo, la segunda etapa, destinada a la selección de la muestra, tam-

\*Véanse las secciones 6.6 y 7.3.2, en las páginas 322 y 332 y siguientes, de los capítulos 6 y 7, respectivamente.

bién se llevó a cabo en la forma prevista, con los materiales especificados en la sección 7.4, en el Aula de Informática (primer centro) y en la sala de ordenadores (segundo centro), y en las fechas indicadas. En esta etapa se aplicaron las tareas multimedia implementadas al efecto\* a grupos de seis sujetos, en sesiones de alrededor de media hora de duración, de acuerdo con la 6ª conclusión relativa a la metodología, obtenida en el estudio exploratorio†. A estas sesiones el investigador fue provisto de listados en los que figuraban los nombres, apellidos y cursos de los participantes, junto con su edad en años y meses, y en los que tomó nota de los sujetos que presentaban las capacidades cinestésicas suficientes para participar en la etapa siguiente y a los que aplicar el segundo criterio de selección de la muestra relativo a los sujetos (véase la siguiente sección). Esta etapa, aunque tuvo una duración larga, se realizó normalmente, según lo previsto, y sin complicación remarcable alguna.

Las características de la muestra seleccionada y el desarrollo y actividades realizadas en la tercera etapa del proceso, se desarrollan en las dos secciones siguientes.

### 8.3 Muestra sobre la que se realiza el estudio

Recordamos que los criterios empleados para la selección de los centros fueron dos:

- 1º. La existencia de un número grande de alumnos matriculados en los tres cursos del segundo ciclo de Educación Infantil y en los dos primeros cursos de Educación Primaria, que posibilitara elegir al azar una muestra de alumnos.
- 2º. La existencia en el Centro, bien de un aula de informática o bien de ordenadores suficientes, que posibilitaran la realización de las tareas multimedia destinadas a la selección de la muestra.

Y los utilizados para la selección de los sujetos de la muestra fueron también dos:

- 1º. La mayor habilidad en las técnicas cinestésicas básicas en el uso del ratón: movimiento, hacer clic y arrastrar y soltar.

---

\*El diseño de sus interfaces puede verse en la sección 5.5.1.2, página 170 y siguientes del capítulo V, las propias interfaces en la sección A.1, página 613 y siguientes del anexo A, y sus objetivos, descripción y análisis en la sección 5.5.1, página 170 y siguientes del capítulo 5.

†Véase la página 292 y siguientes.

2<sup>o</sup>. La mayor proximidad de la edad del sujeto a la media de su grupo de edad.

Terminado el proceso de selección, descrito anteriormente, y teniendo en cuenta las conclusiones del estudio exploratorio sobre la adecuación de los grupos de edad elegidos, clasificamos los sujetos en 8 grupos de edad, en intervalos de seis meses, de tres años y medio a siete años, procurando que las edades fueran lo más próximas posible a la media del grupo de edad correspondiente.

Con ello quedaron seleccionados 76 sujetos cuya distribución y características son las siguientes:

<b>GED</b>	<b>N</b>	<b>Media</b>	<b>Error típ. de la media</b>	<b>Desv. típ.</b>
3AM	10	3,5500	,03578	,11314
4A	10	4,0300	,04326	,13679
4AM	10	4,4960	,04167	,13176
5A	10	4,9970	,04648	,14697
5AM	10	5,4940	,04812	,15218
6A	10	5,8820	,03702	,11708
6AM	8	6,4638	,03669	,10378
7A	8	7,0800	,07375	,20860
<b>Total</b>	<b>76</b>			

Tabla 8.2: Datos de la muestra. Estudio empírico definitivo

Aclaremos que en la primera columna de la tabla, etiquetada mediante **GED**, aparece el código de los distintos grupos de edad:

- Tres años y medio: **3AM**.
- Cuatro años: **4A**.
- Cuatro años y medio: **4AM**.
- Cinco años: **5A**.
- Cinco años y medio: **5AM**.
- Seis años: **6A**.
- Seis años y medio: **6AM**.
- Siete años: **7A**.

Como podemos observar en la tabla anterior las muestras están bastante bien centradas en la edad media de cada grupo.

Finalmente resaltamos que aún tratándose de un estudio cualitativo y teniendo en cuenta el tamaño de las muestras en este tipo de estudios, nos hemos aproximado a un muestreo de tipo polietápico:

- En la primera etapa hemos seleccionado aleatoriamente dos conglomerados entre los centros que cumplían las dos condiciones fijadas, sin ninguna condición adicional que pudiera influir en los resultados del estudio.
- En la segunda, los 132 sujetos son los que presentaron la correspondiente autorización paterna, hecho que podemos considerar aleatorio.
- En la tercera, el muestreo se ha estratificado por grupos de edad y dominio del ratón de modo intencional con una fuerte componente aleatoria, en consonancia con los resultados del estudio exploratorio. El tamaño de los estratos se ha elegido de modo que sea posible observar las tendencias evolutivas de modo cualitativo, sin renunciar al tratamiento cuantitativo estadístico tanto en el contraste de hipótesis como en el análisis de tendencias evolutivas, que permitan sentar las bases para estudios cuantitativos posteriores.

#### 8.4 Tercera etapa del estudio: las entrevistas individuales.

Uno de los objetivos de la investigación consiste en reducir al mínimo, mediante la metodología descrita en secciones anteriores, la interacción del investigador con el sujeto entrevistado, de modo que la posible influencia de aquel en los comportamientos y resultados de este también se minimicen.

Es decir que, mediante la metodología multimedia implementada y el logro del objetivo anterior, se conseguirá maximizar la objetividad de los datos recogidos en la interacción sujeto–instrumento de observación.

También nos propusimos influir lo menos posible en el funcionamiento de los centros educativos participantes en el estudio, por lo que, en todo caso, se ha respetado el horario escolar.

La recogida de la información se ha llevado a cabo mediante el protocolo en tres partes\*, descrito en la sección 7.3.4, página 335 y siguientes, del capítulo 7:

- 1<sup>a</sup>. Recepción del sujeto.
- 2<sup>a</sup>. Realización por el sujeto de la entrevista individual.
- 3<sup>a</sup>. Despedida del mismo.

---

\*El diseño y puesta en práctica de este protocolo se han gestionado y acordado con las directoras de los centros y con los profesores y profesoras de los sujetos de la muestra elegida.

Las entrevistas se llevaron a cabo en un despacho, en el primer colegio, y en el aula de ordenadores, en el segundo, en un ambiente acogedor y libre de ruidos, y en presencia del investigador.

Las entrevistas se realizaron a puerta cerrada, estando presentes en algunos casos el profesor o profesora del entrevistado, que mantuvo su presencia, sin interrupción, desde la recepción hasta la despedida del sujeto. Con ello se pretendía evitar distracciones y pérdidas de atención que pudieran distorsionar los resultados, objetivo que se consiguió.

Detallamos, a continuación, las actividades llevadas a cabo en cada una de las partes mencionadas.

### Recepción del sujeto

Dadas las edades de los sujetos de la muestra, decidimos aceptar la propuesta del profesorado de no recibirlos en momentos próximos a las horas de entrada y salida del centro, por ser momentos en los que se organizan las clases, se recibe a niños que llegan con retraso o se organiza la salida del centro, acontecimientos que pueden ocasionar en los mismos nerviosismo y falta de atención. También respetamos su descanso y sus relaciones sociales, por lo que no se recibió a ningún sujeto durante el recreo. Con ello, el horario de recepción quedó dividido en dos partes por el recreo: desde las 9,30 a las 11 horas y desde las 12,45 a las 13.30 horas.

El investigador dispuso de listado en los que figuraban los nombres y apellidos de los sujetos de la muestra seleccionada, junto con el aula del centro en que se hallaban, el nombre de su profesor o profesora y el de su tutor o tutora. Así, cada sujeto de la muestra fue identificado en la lista y recogido en su aula por el investigador, que lo acompañó hasta el lugar en el que se realizaron las entrevistas. Por el camino el investigador le recordó las tareas realizadas en la selección de la muestra, así como los personajes que vuelven a aparecer en las que va a realizar a continuación. Para ello mantuvo con los mismos conversaciones informales en torno a las preguntas: *¿Recuerdas los juegos que hiciste con el ordenador?, ¿te gustaron?, ¿recuerdas a Mowgli y a su amigo Baloo?*

### Realización de la entrevista individual

Este parte se llevó a cabo siguiendo fielmente los requerimientos y especificaciones detallados en la sección 7.3.4, página 335 y siguientes, a ella referidos.

Así, las tareas se desarrollaron mediante entrevistas individuales, practicadas a los 76 sujetos de la muestra, tomando el instrumento multimedia como base de la interacción entre el investigador y el niño o niña.

Los sujetos de la muestra realizaron los veintidos ítems multimedia de que consta el instrumento, clasificados y ordenados de la siguiente manera: cinco ítems o tareas de orden topológico u orden lineal infra-lógico, cinco ítems o tareas de orden con cantidades continuas, seis ítems o tareas recursivas y seis ítems o tareas de orden con cantidades discretas.

Además, como introducción a cada uno de los tres primeros conjuntos el sujeto realizó una tarea o ítem introductorio y dos más en el último conjunto, introductorios a cada una de las dos partes de las que consta.

Cada sujeto realizó las tareas de cada conjunto de modo secuencial, de la primera a la última, terminando bien al finalizar la última tarea o bien en el momento en que el sujeto no deseaba continuar por encontrar niveles que no alcanzaba.

En el cuarto conjunto, correspondiente al orden con cantidades discretas, al concluir las tareas tercera y cuarta así como las tareas séptima y octava, correspondientes a cada una de las dos partes o subconjuntos de los que consta, el investigador planteó a cada sujeto el cuestionario verbal, descrito en el apartado 7.6.3.4, con el fin de detectar las posibles estrategias utilizadas en su resolución.

En lo que se refiere a la intervención del investigador en las entrevistas, hemos de decir que ha consistido en aclarar dudas, prestar una ayuda muy puntual en alguna dificultad con el ratón, insistir de modo totalmente imparcial en las cuestiones planteadas al niño en forma audiovisual, y observar y tomar nota de las respuestas de los sujetos a las preguntas del cuestionario planteado, así como de otros aspectos considerados relevantes. Por lo que consideramos que se ha logrado el objetivo enunciado al comienzo de esta sección.

En cuanto a la participación de los sujetos, resaltamos que solamente fue necesario sustituir a dos de ellos (2,63% de la muestra), uno que no quiso finalmente realizar las tareas y otro cuya hiperactividad desaconsejó su participación. Ello supone una aceptación y una adaptación excelente, del 97,37%, de los sujetos a las tareas propuestas, lo que confirma la buena adaptación del instrumento y de la metodología multimedia a las características cognitivas de los sujetos del intervalo de edad considerado y su validez como instrumento de



investigación en Educación Matemática.

### Despedida del sujeto

Finalizada la intervención del sujeto, el investigador le acompañó a su aula y procedió a recoger a otro sujeto de la muestra. Por el camino mantuvo con los niños y niñas conversaciones informales en las que les preguntó por el conjunto de ítems o tareas que más les habían gustado y el porqué de esa elección, obteniendo sorprendentemente y con frecuencia abrumadora (53 sujetos) la respuesta “todas”. En otras respuestas (23), las preferencias estuvieron muy repartidas sin que llegase a destacar significativamente, en este aspecto, ninguno de los subconjuntos. Por lo que concluimos que los cuatro conjuntos fueron totalmente adecuados a las características cinestésicas y psicoafectivas de los sujetos de la muestra.

Las siguientes secciones se dedican al estudio y análisis detallados de la información obtenida para cada uno de los cuatro conjuntos de tareas y a la obtención de las correspondientes conclusiones.

## 8.5 Resultados relativos a las tareas de orden lineal.

En la sección 7.6.1, página 345 y siguientes, hicimos un análisis detallado de este conjunto de tareas. Recordamos que se trata de un conjunto de 6 ítems o tareas de estructura espacio-temporal, sobre ordenación de objetos, en las que el niño debe responder a cuestiones ordinales elementales del tipo *estar antes que*, *estar después que*, *estar entre*, a ellos referidas o bien identificar series ordenadas sencillas de objetos.

De las seis tareas, la primera es introductoria y son las cinco siguientes las que aportan datos al estudio.

Recordamos también que mediante estas tareas pretendemos observar y evaluar la capacidad de los sujetos para establecer un orden lineal infralógico.

Para este conjunto de tareas, las secciones B.2 y B.3 del anexo B ofrecen información complementaria sobre el análisis de los tiempos de respuesta y los intentos erróneos que no se incluye para los demás conjuntos. Sus resultados y conclusiones deben considerarse un avance que, por su carácter complementario, se completará en estudios posteriores.

### 8.5.1 Valoración de las respuestas globales y niveles

La valoración y análisis de las respuestas se lleva a cabo mediante el uso de las variables propias del orden lineal infralógico. Véase la subsección 7.7.1, página 414 y siguientes.

#### 8.5.1.1 Frecuencias de las respuestas.

En el conjunto de histogramas de la figura 8.1 puede observarse la clasificación, por grupos de edad, de los valores de la variable acumulativa *SumaL* alcanzados por los sujetos de la muestra. Las líneas continuas en color negro muestran las distribuciones normales correspondientes a cada grupo de edad.

Un primer análisis de los resultados pone de manifiesto la existencia de desviaciones en las distribuciones respecto de las distribuciones normales correspondientes, observándose asimetrías en las que las frecuencias aumentan en el sentido de los valores crecientes de *SumaL*. Esta hipótesis se contrasta mediante tests de normalidad de Kolmogorov–Smirnov\* y Shapiro–Wilk, de mayor precisión que anterior, cuyos resultados se muestran en la tabla 8.3.

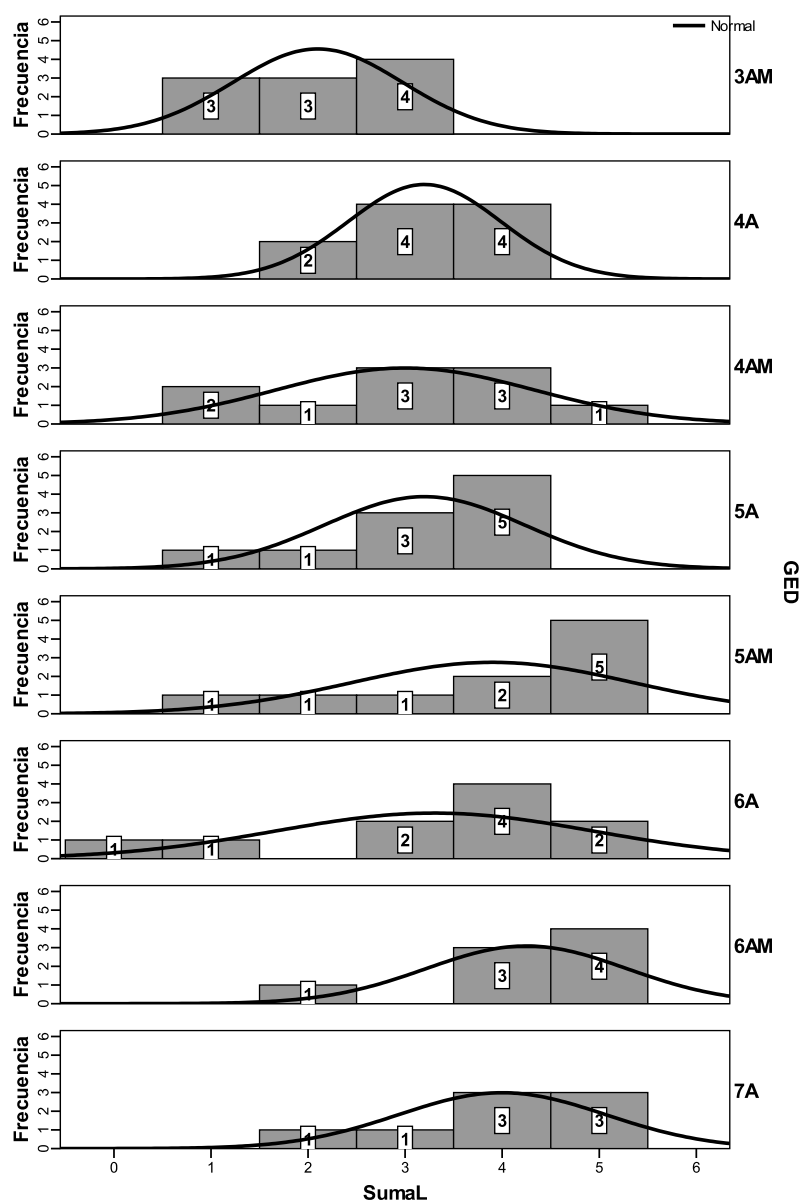
GED	Kolmogorov–Smirnov			Shapiro–Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
3AM	,248	10	,082	,805	10	,017
4A	,245	10	,091	,820	10	,025
4AM	,200	10	,200	,918	10	,344
5A	,281	10	,025	,791	10	,011
5AM	,276	10	,030	,794	10	,012
6A	,266	10	,044	,848	10	,055
6AM	,280	8	,065	,745	8	,007
7A	,250	8	,150	,860	8	,120

Tabla 8.3: Test de normalidad de la variable *SumaL* por grupos de edad.

El análisis de la significación de los estadísticos (*p-valor*) muestra que la hipótesis de normalidad debe rechazarse (**Sig**<**0.05**) en los grupos 5A, 5AM y 6A, según el test de Kolmogorov–Smirnov. Y, con mayor precisión, que solamente los grupos 4AM y 7A presentan distribuciones que pueden considerarse inequívocamente normales (**Sig**>**0.05**) según el test de Shapiro–Wilk.

También se observa con claridad en el gráfico de la Figura 8.1 la diver-

\*Este test incorpora la corrección de la significación de Lilliefors.

Fig. 8.1. Frecuencias de valores de *SumaL* por grupos de edad

idad de las valoraciones de los sujetos en los grupos de edad así como su no uniformidad, que confirma resultados análogos obtenidos en el estudio exploratorio.

Por otra parte, los estadísticos más relevantes de la variable *SumaL* por grupos de edad se recogen en la tabla 8.4:

GED	Media	Mediana	Desv. típ.	Rango	Asimetría	Curtosis
3AM	2,10	2,00	,876	2	-,223	-1,734
4A	3,20	3,00	,789	2	-,407	-1,074
4AM	3,00	3,00	1,333	4	-,352	-,748
5A	3,20	3,50	1,033	3	-1,241	,946
5AM	3,90	4,50	1,449	4	-1,156	,201
6A	3,30	4,00	1,636	5	-1,171	,660
6AM	4,25	4,50	1,035	3	-1,675	3,136
7A	4,00	4,00	1,069	3	-,935	,350
<b>Total</b>	3,33	4,00	1,300	5	-,528	-,539

Tabla 8.4: Estadísticos de la variable *SumaL* por grupos de edad.

A simple vista se observa la asimetría negativa de las distribuciones en todos los grupos de edad, lo que significa que las colas son más largas por la izquierda en consonancia con el primer análisis de los datos del gráfico de la Figura 8.1. Por otra parte, se observa el cambio en el signo de las curtosis, negativas de tres años y medio a cuatro años y medio y positivas a partir de los cinco años, lo que indica que a partir de esta edad los resultados tienen tendencia positiva a agruparse en torno a la media o valor central, lo que resulta especialmente acusado en el grupo de seis años y medio. Estos resultados apoyan la idea de no normalidad de las distribuciones de la variable *SumaL* y la clara tendencia, a partir del grupo de cinco años, al aumento de la frecuencia en el sentido de los valores crecientes de la variable. Esta tendencia muestra con claridad el sentido evolutivo de la capacidad de los sujetos para establecer órdenes lineales al aumentar la edad.

Así mismo, en la tabla 8.4 se observan las escasas variaciones en las medias y medianas de los grupos 4A, 4AM y 5A, el salto apreciable que se produce en el grupo 5AM y la tendencia hacia los valores más altos en los grupos 6AM y 7A. La persistencia de los valores más pequeños de la variable (0, 1 y 2) en el grupo 5A y en los de edad superior expresa, a nuestro juicio, un déficit claro en la capacidad de los sujetos para distinguir y establecer órdenes lineales.

#### 8.5.1.2 Caracterización y estudio de los niveles.

La clasificación de las respuestas de los sujetos según los valores de la variable *SumaL*, junto con los correspondientes valores de las variables

dicotómicas *EvLi*, se incluyen en la tabla B.1, página 667 y siguientes del anexo B.

Con esos datos, la información mostrada en el gráfico de la figura 8.1 y la información complementaria de la subsección B.1.2, página 668 y siguientes, caracterizamos los niveles introducidos en la sección 7.7.1, página 414, de la siguiente manera:

**Nivel 1.** El sujeto identifica con acierto un máximo de dos conceptos ordinales infralógicos de los cinco propuestos. Corresponde a los valores 0, 1, 2 de la variable *SumaL*.

Los sujetos que se hallan en el *Nivel 1* identifican como máximo alguno de los conceptos *antes que* o *después que* o una combinación de uno de ellos con la de una de las series de tres o de cuatro elementos.

**Nivel 2.** Está definido por la identificación de tres conceptos ordinales infralógicos de los cinco propuestos. Corresponde al valor 3 de la variable *SumaL*.

Los sujetos que se hallan en el *Nivel 2* son capaces de identificar una serie sencilla de tres elementos ordenados linealmente; de aplicar, no sin fallos, los conceptos *antes que* y *después que* y comienzan a identificar series de cuatro elementos ordenadas con criterios verbales infralógicos.

**Nivel 3.** Está definido por la identificación de cuatro o cinco conceptos ordinales infralógicos de los cinco propuestos. Corresponde a los valores 4 o 5 de la variable *SumaL*.

Los sujetos que se hallan en el *Nivel 3* tienen una capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos *antes que* y *después que* y para identificar series de tres y cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.

La evolución de estos niveles por grupos de edad se puede observar en el conjunto de histogramas de la figura 8.2. Así, se aprecia que el mayor porcentaje de sujetos en el **Nivel 1** corresponde al grupo *3AM*, tendiendo a estabilizarse en valores bajos en los grupos *4A* a *6A* y disminuyendo aún más en los dos grupos de edad superior.

El porcentaje de sujetos en el **Nivel 2** es considerable en los cuatro primeros grupos de edad, disminuyendo de los dos primeros a los dos siguientes y tendiendo a estabilizarse en valores bajos en los cuatro grupos de edad superior.

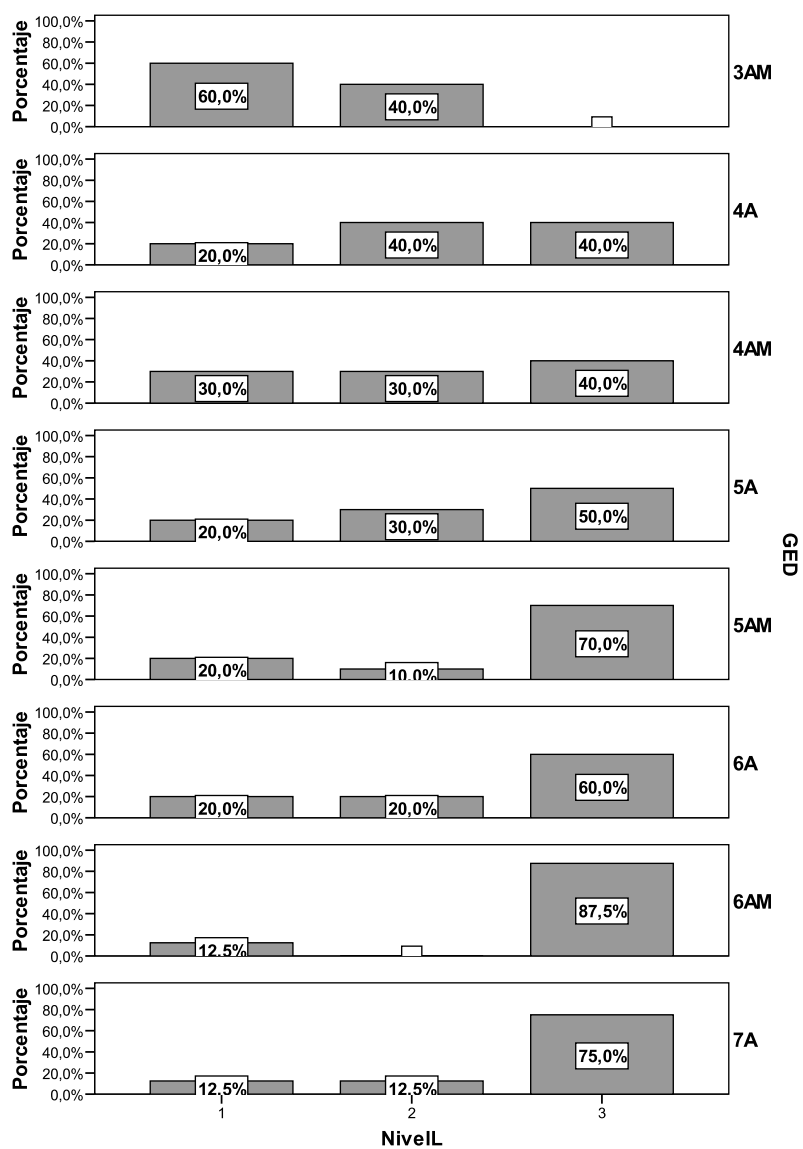


Fig. 8.2. Evolución de los niveles en orden lineal por grupos de edad.

Se observa también que la mitad de los sujetos no alcanzan el **Nivel 3** hasta los 5 años mientras que la mayoría de los sujetos de 5 años y medio o más edad se encuentran en dicho nivel.

Por tanto, con el soporte multimedia utilizado y para la muestra seleccionada, podemos concluir que los sujetos de tres años y medio, en su mayor parte, tienen una capacidad incipiente para identificar órdenes lineales infralógicos, pudiendo reconocer aspectos ordinales aislados. Algunos de los sujetos de esta edad son capaces de identificar series sencillas de tres elementos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.

De cuatro a cinco años de edad se observa un aumento en la capacidad para identificar series lineales infralógicas de cuatro objetos, lo que consiguen la mitad de ellos a los cinco años. Disminuye significativamente el número de sujetos que identifican aspectos ordinales aislados y los que identifican solamente series infralógicas de tres objetos.

A partir de los cinco años y medio la mayor parte de los sujetos tienen capacidad alta para identificar series de objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.

Por otra parte, se observa una evolución lenta y progresiva de los niveles en los grupos de cuatro a cinco años de edad, apreciándose un cambio significativo a partir del grupo de cinco años y medio. Así mismo, se produce un cambio en los perfiles de los cuatro últimos grupos de edad, respecto de los perfiles de los cuatro primeros, lo que vuelve a producirse en el mismo grupo de cinco años y medio.

Identificamos el intervalo de cuatro a cinco años como el periodo en el que los sujetos desarrollan y asimilan los conceptos ordinales infralógicos verbales, que se han venido formando desde los tres años y medio e incluso desde edades anteriores.

A pesar de todo, aún hay de cinco años o más que se hallan en el *Nivel 1* y algunos sujetos de cinco años y medio en adelante que se hallan en el *Nivel 2*. Estos sujetos identifican con claridad, como máximo, series sencillas de tres elementos ordenados linealmente con criterios verbales infralógicos. Es evidente que esto supone una limitación que aconsejaría un tratamiento específico que permitiera paliar o eliminar la influencia negativa de estas disfunciones en la adquisición y el aprendizaje de los conceptos aritméticos y en la práctica escolar correspondiente.

La tabla 8.5 recoge una síntesis de los niveles encontrados en este estudio y de las características de cada uno de ellos.

Nivel	Caracterización	Edad
1	Capacidad para aplicar o identificar, de forma aislada o por ensayo y error, como máximo dos conceptos ordinales infralógicos de los cinco propuestos. Normalmente, alguno de los conceptos <i>antes que</i> o <i>después que</i> o una combinación de uno de ellos con la identificación de una de las series de tres o de cuatro elementos.	Las mayores frecuencias se dan para sujetos de entre <i>tres años y medio y cuatro años y medio</i> . La aparición en edades superiores indica un déficit en la identificación y comprensión de ordenes verbales infralógicos.
2	Capacidad para identificar una serie sencilla de tres elementos ordenados linealmente y de aplicar, no sin fallos, los conceptos <i>antes que</i> y <i>después que</i> . Comienzo de la identificación de series de cuatro elementos ordenadas con criterios verbales infralógicos. Menor incidencia de la estrategia de ensayo y error.	Las mayores frecuencias se dan para sujetos de entre <i>tres años y medio y cinco años</i> . La aparición en edades superiores indica un déficit en la identificación y comprensión de ordenes verbales infralógicos.
3	Capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos <i>antes que</i> y <i>después que</i> y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.	La frecuencia del nivel alcanza el 50% para sujetos de <i>cinco años</i> y supera claramente el 50% a los <i>cinco años y medio y edades superiores</i> .

Tabla 8.5: Caracterización de los niveles de orden lineal.

### 8.5.1.3 Modelos de ajuste.

La tabla 8.4 de la página 436 recoge los estadísticos más relevantes de la variable **SumaL** y, en particular, las medias por grupos de edad. Nos planteamos ahora si la evolución de tales medias sigue algún modelo matemático lineal o de otro tipo y, en el caso en que sea así, con qué grado de validez.

Para ello estudiamos el ajuste de las medias mediante varios modelos regresión y también haciendo uso de modelos lineales generalizados. En los ajustes consideramos como dependiente la variable **MediaL** y como independiente la variable **EDG**, cuyas descripciones pueden verse en la sección 7.7.1, página 414, del capítulo anterior.



La tabla 8.6 recoge los resultados de distintos ajustes lineales y no lineales realizados.

Ecuación	Resumen del modelo				
	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.
Lineal	,740	17,102	1	6	,006
Logarítmica	,767	19,767	1	6	,004
<b>Inversa</b>	<b>,783</b>	<b>21,604</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,004</b>
Cuadrático	,773	8,524	2	5	,024
Cúbico	,773	8,524	2	5	,024
Compuesto	,711	14,780	1	6	,009
Potencial	,753	18,253	1	6	,005
<b>S</b>	<b>,785</b>	<b>21,853</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,003</b>
Crecimiento	,711	14,780	1	6	,009
Exponencial	,711	14,780	1	6	,009
Logística	,741	17,171	1	6	,006

Tabla 8.6: Comparativa de modelos de ajuste de la variable *MediaL* al variar la edad de los grupos.

Como se aprecia en la tabla 8.6, los mejores ajustes corresponden a los modelos *Inverso* y de tipo *S*, con  $R^2 = 0,783$  y significación  $p = 0,004 < 0,05$ , y  $R^2 = 0,785$  y significación  $p = 0,003 < 0,05$ , respectivamente.

A estos modelos le corresponden ecuaciones del tipo:

$$\begin{cases} y = b_0 + \frac{b_1}{t} , & \text{para el modelo Inverso} \\ y = e^{(b_0 + \frac{b_1}{t})} \text{ o bien } \ln y = b_0 + \frac{b_1}{t} , & \text{para el modelo S} \end{cases}$$

donde  $b_0$  y  $b_1$  son los parámetros a determinar.

La subsección B.1.3, página 671, del anexo B recoge las características de los ajustes de ambos modelos, incluyéndose los valores observados de la variable *MediaL*, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95 % para ambos modelos.

La tabla B.4 del mismo anexo muestra los valores obtenidos para los coeficientes del modelo junto con sus significaciones al 95 %. Estos valores son:  $b_0 = 5,803$  y  $b_1 = -12,196$  con significaciones  $p = 0,000$  y  $p = 0,004$ , para el modelo Inverso, y  $b_0 = 1,989$  y  $b_1 = -3,965$  con significaciones  $p = 0,000$  y  $p = 0,003$ , para el modelo de la curva *S* o exponencial inversa.

En el gráfico de la Figura B.1, página 674, se representan los valores observados de la variable *MediaL* y los ajustados mediante ambos modelos, lo que pone de manifiesto la bondad de los ajustes. Del mismo modo, el gráfico de la Figura B.2, página 674, muestra la independencia de los errores de ambos modelos de los valores ajustados correspondientes, lo que prueba también la significación de los mismos.

De los ajustes estudiados, el de interpretación más sencilla y mayor grado de precisión es el que proporciona el modelo Inverso, en el que las medias de los grupos aumentan con la edad según una rama de hipérbola con asíntota horizontal en la recta  $y = b_0 = 5,803$ , que representa la máxima valoración a la que tienden asintóticamente las edades crecientes.

Por tanto, los resultados obtenidos indican que el desarrollo (medio) de las capacidades lineales infralógicas verbales en los sujetos se aproxima mejor por un modelo evolutivo no lineal, cuya velocidad decrece al aumentar la edad de los mismos. El intervalo de edad en el que se produce la mayor variación, es el periodo en el que tales capacidades se forman en la mente de los sujetos, por lo que la actuación didáctica a lo largo del mismo puede prevenir y paliar los déficits y dificultades de aprendizaje en este aspecto ordinal y en los aspectos aritméticos que en él se apoyan.

### 8.5.2 Conclusiones del estudio de las tareas de orden lineal infralógico.

Del tratamiento y análisis de los resultados, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- 1<sup>a</sup>. Las tareas multimedia referentes al orden lineal infralógico son adecuadas para asignar un estado de competencia ordinal infralógica a cada sujeto de la muestra, esto es con ellas podemos valorar el nivel de competencia en que se encuentra en lo referente a este tipo de orden.
- 2<sup>a</sup>. Los datos de asimetría y curtosis en las distribuciones de los resultados por grupos de edad, apoyan la idea de no normalidad de las mismas. Las asimetrías negativas prueban la existencia, en todos los grupos de edad, de sujetos con resultados inferiores a la media del grupo de edad. Estos sujetos deberían recibir una atención especial para confirmar o rechazar su situación en este aspecto ordinal.
- 3<sup>a</sup>. Los conceptos ordinales infralógicos verbales vienen formandose desde los tres años y medio e incluso desde edades anteriores, y se consolidan

entre los cuatro y los cinco años de edad. Conjeturamos que la acción didáctica en este aspecto ordinal es adecuada en este periodo para paliar y prevenir los retrasos y las dificultades en el aprendizaje.

- 4<sup>a</sup>. Los sujetos pueden clasificarse en tres niveles de competencias ordinales infralógicas verbales asociados a intervalos de edad característicos\*.
- 5<sup>a</sup>. Esta clasificación permite diagnosticar déficits en la identificación y comprensión de órdenes verbales infralógicos y plantea la posible conveniencia de tratamiento para los sujetos con edades superiores a los cuatro años y medio que se hallan en el *Nivel 1* y para los sujetos con edades superiores a los cinco años que se hallan en el *Nivel 2*.
- 6<sup>a</sup>. El desarrollo de las capacidades ordinales infralógicas verbales se ajusta en media a modelos evolutivos no lineales cuya velocidad decrece al aumentar la edad de los sujetos.
- 7<sup>a</sup>. Según los modelos ajustados, el intervalo de edad en el que se produce la mayor variación evolutiva es el comprendido entre los tres años y medio y los cinco años.
- 8<sup>a</sup>. El 100% de los sujetos han intentado resolver todas las tareas, lo que prueba su buena adecuación a las características de los mismos.

### 8.6 Resultados y conclusiones de las tareas de orden con cantidades continuas.

En el presente apartado se analizan los resultados del segundo conjunto de tareas propias del estudio desarrollado y que corresponden al segundo estado del modelo evolutivo propuesto<sup>†</sup>. Este conjunto, del que se presenta un análisis detallado en la sección 7.6.2 y con el que se pretende observar y valorar la capacidad de los sujetos para ordenar cantidades lineales continuas, incluye 6 tareas no verbales en las que se trata el orden haciendo intervenir las relaciones lógicas: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*, referidas al tamaño o a la cantidad continua, sin que intervengan aspectos protonuméricos o numéricos. Todas las tareas permiten que el sujeto manipule libremente con el propósito de observar si sigue o no, de modo espontáneo, estrategias ordinales en su resolución, es decir, si realiza comparaciones analógicas aproximadas de cantidades lineales continuas utilizando la antisimetría y la transitividad, propiedades fundamentales de las relaciones de orden, con el fin de poder distinguir entre sí y ordenar tales cantidades.

\*Véase el cuadro resumen en la tabla 8.5, página 440.

†Véase la página 306, Capítulo VI.

De las 6 tareas, la primera es introductoria y las cinco siguientes son las propias del estudio.

### 8.6.1 Análisis y valoración de las respuestas.

La valoración y análisis de las respuestas se lleva a cabo mediante el uso de las variables propias del orden con cantidades continuas (subsección 7.7.2, página 415 y siguientes). Comenzaremos por realizar un breve estudio de las frecuencias de las respuestas a las tareas del conjunto.

#### 8.6.1.1 Distribución de las frecuencias.

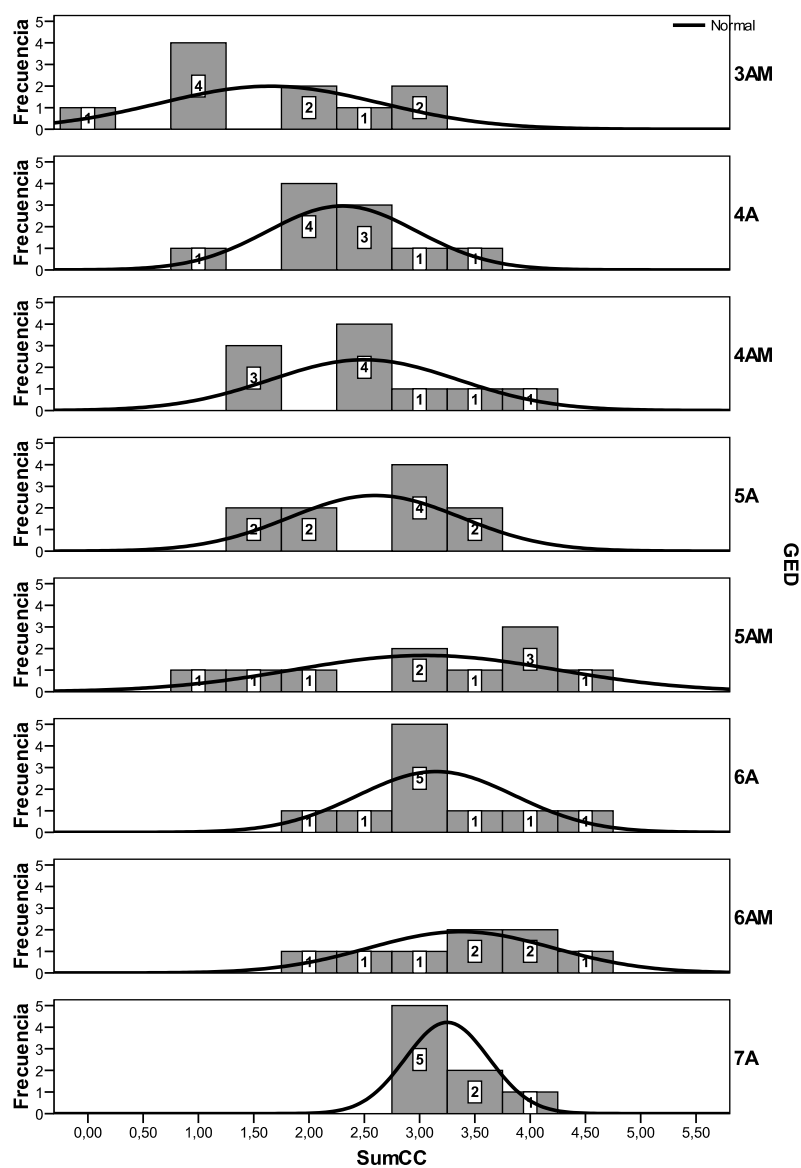
En la Figura 8.3 se observa la clasificación por grupos de edad de los valores de la variable acumulativa *SumaCC*, que sintetiza las respuestas de los sujetos de la muestra al conjunto de tareas en estudio.

Las líneas continuas en color negro indican, de nuevo, las distribuciones normales aproximadas correspondientes al conjunto de respuestas de cada grupo de edad.

En un primer análisis de los resultados se observan distintas asimetrías con colas a la derecha o a la izquierda en función de los grupos de edad: distribuciones a la derecha para los tres primeros grupos de edad, a la izquierda para los siguientes (salvo 6A) y a la derecha para el grupo de edad superior. Esto indica que en los tres grupos de edad inferior, así como en el grupo de edad superior, se encuentran sujetos con valores significativamente superiores a la media correspondiente, sucediendo lo contrario para los demás grupos de edad, salvo para el 6A cuya distribución parece prácticamente simétrica.

GED	Kolmogorov–Smirnov			Shapiro–Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
3AM	,242	10	,100	,909	10	,271
4A	,228	10	,149	,929	10	,440
4AM	,200	10	,200	,896	10	,200
5A	,297	10	,013	,850	10	,058
5AM	,188	10	,200	,909	10	,278
6A	,284	10	,022	,915	10	,318
6AM	,185	8	,200	,959	8	,801
7A	,371	8	,002	,724	8	,004

Tabla 8.7: Test de normalidad de la variable *SumaCC* por grupos de edad.

Fig. 8.3. Frecuencias de valores de *SumaCC* por grupos de edad

Sin embargo, según el test de Kolmogorov-Smirnov, los datos de la tabla 8.7 no permiten descartar la hipótesis de normalidad (en los casos en los que  $\text{Sig} > 0.05$ ) salvo para los grupos de edad 5A, 6A y 7A (en los casos en los que  $\text{Sig} < 0.05$ ) y, con mayor precisión, sólo para el grupo 7A

( $\text{Sig} < 0.05$ ) según el test de Shapiro–Wilk, permaneciendo dudosa la normalidad del grupo *5A* ( $\text{Sig} = 0.058$ ). Nótese el contraste con los resultados del orden lineal en los que los dos únicos grupos para los que no se podía descartar la normalidad eran *4AM* y *7A*\*.

Por otra parte, en la tabla 8.8, en la que se detallan los valores de los estadísticos más comunes de la variable *SumaCC* por grupos de edad, se observa, en primer lugar, una rápida variación en las medias y medianas al aumentar la edad, que prácticamente se doblan al pasar del grupo *3AM* al *5AM* y que tienden a estabilizarse con ligeras variaciones a partir de este último grupo. Se concluye por tanto, en consonancia con resultados análogos del estudio exploratorio, que:

las edades en torno a los cinco años y medio son críticas en la formación de la capacidad para establecer órdenes con cantidades continuas.

Si se comparan los resultados anteriores con los de la variable *SumaL*\*, correspondiente al orden lineal, se observa que los valores menores de las medias y medianas en todos los grupos de edad indican que en este caso se produce una evolución más lenta que la observada en el orden lineal. Además, se puede observar que los rangos y las desviaciones típicas son menores en general, presentando una tendencia decreciente al aumentar la edad y una evolución más homogénea. Este resultado se refleja, además, en la escasa incidencia de los valores menores o iguales que 2 a partir de los cinco años, como se puede comprobar en los gráficos de la Figura 8.3.

La presencia de esos valores a partir de dicha edad expresa, a nuestro juicio, un déficit en la capacidad de los sujetos para ordenar cantidades continuas lineales. Resaltamos también la escasa incidencia de este hecho en los sujetos de la muestra. Se observa también que los valores del intervalo [2, 3) son transitorios y que su frecuencia tiende a minimizarse a partir de los cinco años en beneficio de los valores superiores.

Así mismo, se observa menor asimetría (en valor absoluto) en las distribuciones de la variable *SumaCC* por grupos de edad en relación con las correspondientes al orden lineal, lo que confirma que la evolución de los resultados es más homogénea. Sin embargo, el cambio de signo en las asimetrías, de positivo a negativo, a partir de los cinco años, parece indicar que se produce un aumento en la capacidad de los sujetos para establecer órdenes

\*Véase la tabla 8.3, página 434.

\*Véase la tabla 8.4 en la página 436.

con cantidades continuas que se frena en el grupo de edad superior (7A con asimetría positiva y distribución no normal según los test aplicados).

GED	Media	Med.	Desv. típ.	Rango	Asimetría	Curtosis
3AM	1,650	1,500	1,001	3,0	,004	-1,014
4A	2,300	2,250	,675	2,5	-,095	1,137
4AM	2,500	2,500	,850	2,5	,339	-,521
5A	2,600	3,000	,775	2,0	-,412	-1,549
5AM	3,050	3,250	1,189	3,5	-,643	-,894
6A	3,150	3,000	,709	2,5	,508	,659
6AM	3,375	3,500	,835	2,5	-,461	-,596
7A	3,250	3,000	,378	1,0	1,323	,875
<b>Total</b>	2,704	3,000	,970	4,5	-,352	-,232

Tabla 8.8: Estadísticos de la variable *SumaCC* por grupos de edad.

Por otro lado, la variabilidad del signo de las curtosis no es muy acusada, como indican los valores relativamente pequeños de las desviaciones típicas; la dispersión observada es mayor a los cinco o cinco años y medio, es decir, en torno a la edad crítica anteriormente señalada, lo que contrasta con la agrupación de los resultados alrededor de las medias en el caso del orden lineal, que se produce a partir de los cuatro años y medio y viene a indicar de nuevo que:

se produce una consolidación más tardía de la capacidad para establecer órdenes con cantidades continuas que la correspondiente al orden lineal.

#### 8.6.1.2 Análisis y caracterización de los niveles

En la tabla C.1, página 711 y siguientes, se muestran los valores de las variables *EvCCi* y la clasificación de las respuestas según los valores de la variable *SumaCC*. Con dichos datos y con la información mostrada en los gráficos de la Figura 8.3, caracterizamos los niveles (introducidos en la sección 7.7.2, página 415) de la siguiente manera\*:

\*El significado de los términos *ordenación incompleta* y *ordenación completa* que aparecen a continuación se definió en el apartado *Evaluación de resultados*, subsección 7.7.2, página 415 y siguientes.

**Nivel 1.** Ordenación por longitudes de dos series de objetos como máximo de las cinco propuestas. Corresponde a  $\mathit{SumaCC} \in [0, 2]$ .

Los sujetos que se hallan en el *nivel 1* están caracterizados por su capacidad para ordenar series de dos objetos por sus longitudes con o sin objeto sobrante, o bien una de ellas en combinación con la ordenación incompleta de series de tres o cuatro objetos.

**Nivel 2.** Ordenación completa por longitudes de tres series de objetos como máximo de las cinco propuestas. Corresponde a  $\mathit{SumaCC} \in (2, 3]$ .

Los sujetos que se hallan en el *nivel 2* están caracterizados por su capacidad para ordenar series de dos o tres objetos por sus longitudes, con o sin objeto sobrante, las de tres objetos de forma completa o incompleta, y en algunos casos por la capacidad para empezar a ordenar series de cuatro objetos.

**Nivel 3.** Ordenación por longitudes de más de tres series de objetos de las cinco propuestas. Corresponde a  $\mathit{SumaCC} \in (3, 5]$ .

Los sujetos que se hallan en el *nivel 3* se caracterizan por su capacidad para ordenar por longitudes, de forma completa, series de dos y tres objetos con o sin objeto sobrante, y para ordenar por longitudes series de cuatro objetos de forma completa o incompleta.

Nótese que en este contexto el término *ordenar* significa establecer correspondencias seriales que conservan el orden entre el conjunto de troncos y el conjunto de huecos, lo que implica que el sujeto debe identificar el primer o el último elemento del conjunto de troncos, según la estrategia elegida (creciente o decreciente), asignarlo al hueco correspondiente y proceder ordenadamente con los siguientes, es decir, que debe ordenar troncos y huecos antes de establecer la correspondencia serial definitiva. Por tanto, los niveles definidos no solo clasifican las respuestas en relación con la capacidad de ordenar cantidades continuas lineales sino que distinguen, además, la capacidad de establecer *correspondencias seriales que conservan el orden* con cantidades continuas.

La clasificación de las respuestas por niveles se puede examinar en la tabla C.2, página 714 y siguientes, mientras que en los histogramas de la Figu-



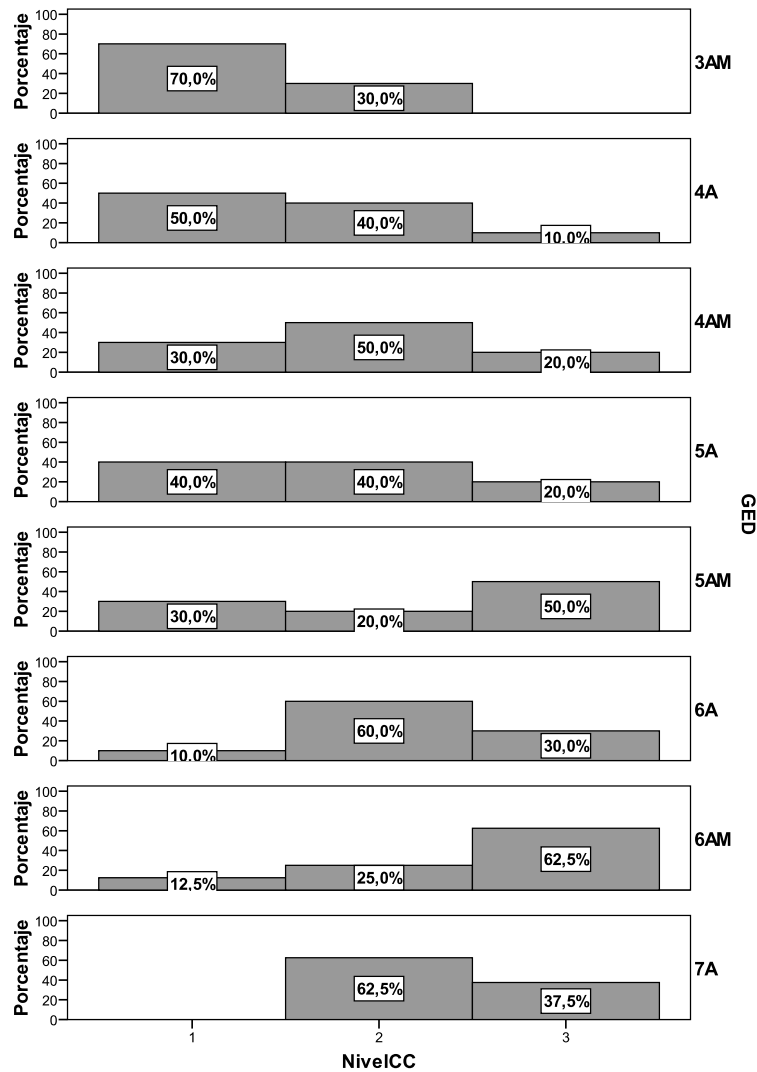


Fig. 8.4. Evolución de los niveles en orden con cantidades continuas por grupos de edad.

ra 8.4 se puede apreciar la evolución en porcentajes de los niveles por grupos de edad, observándose los siguientes hechos:

El **Nivel 1** es mayoritario en los dos grupos de menor edad (*3AM* y *4A*), disminuye en los tres grupos de edad siguientes (*4AM*, *5A* y *5AM*), con porcentajes alrededor del 30% dejando de ser mayoritario, es residual en

los dos grupos siguientes (*6A*, *6AM*), con porcentajes en torno al 10%, y desaparece en el grupo de edad superior *7A*.

El **Nivel 2** crece monótonamente en los tres primeros grupos de edad, desde el 30% en el grupo *3AM* hasta el 50% en el grupo *4AM*, tendiendo a disminuir en los grupos *5A*, *5AM* y *6AM*, significativamente en los dos últimos con porcentajes respectivos del 30% y del 25%, y produciéndose un repunte sorprendente en los grupos *6A* y *7A*, en los que es mayoritario con porcentajes respectivos del 60% y el 62,5%.

El **Nivel 3** aparece en el grupo *4A* de forma testimonial con un porcentaje del 10%, crece monótonamente a partir de dicho grupo hasta el grupo *5AM*, en el que es mayoritario con un 50% de los sujetos, vuelve a hacerse mayoritario en el grupo *6AM*, en el que alcanza la frecuencia máxima (con un 62,5%), y decrece apreciablemente en las grupos *6A* y *7A* en relación con los anteriores, alcanzando porcentajes del 30% y 37,5%.

Por tanto, podemos concluir que:

- La capacidad de los sujetos del estudio para establecer correspondencias seriales que conservan el orden con cantidades continuas se encuentra en formación entre los tres años y medio y los cuatro años, siendo capaces de ordenar series de dos objetos y comenzando a ordenar series de tres objetos de forma completa o incompleta. Entre los cuatro y los cinco años se produce la transición entre la capacidad de ordenar series de dos objetos y la de ordenar series de tres.
- Entre los cuatro años y medio y los cinco años y medio se consolida la capacidad para ordenar series de tres objetos y comienza a ser mayoritaria la de ordenar series de cuatro objetos, disminuyendo significativamente el porcentaje de sujetos que sólo ordenan series de dos objetos. En este intervalo de edad, sobre todo en su límite superior, se produce la transición entre la capacidad de ordenar series de tres objetos a la de ordenar series de cuatro objetos.
- A partir de los cinco años y medio los sujetos tienen capacidad alta o plena para ordenar por longitudes series de cuatro objetos, aún cuando es significativo que a los seis, e incluso a los siete años, haya sujetos que solo ordenan series de tres objetos.

Con ello:

se identifica el intervalo de cuatro años y medio a cinco años y medio como el periodo en el que se consolida la capacidad de establecer correspondencias seriales que conservan el orden con cantidades continuas, que ha venido desarrollándose desde edades inferiores.

Es significativo que el *Nivel 1* solo desaparezca a los siete años y que el *Nivel 2* se mantenga e incluso sea mayoritario también a los siete años. Lo que indica que se encuentra un número pequeño de sujetos de seis o seis años y medio con la capacidad de ordenar solamente series de dos objetos y que hay sujetos de cinco años y medio o de mayor edad que ordenando por longitudes series de tres objetos no consiguen ordenar las de cuatro. Ello da idea, de nuevo, de que:

Existe una apreciable diversidad individual en el proceso de formación de esta capacidad ordinal.

Lo que plantea de nuevo:

la necesidad de tratamientos didácticos específicos que permitan paliar o eliminar la influencia negativa de estas disfunciones en la adquisición y el aprendizaje de los conceptos numéricos y aritméticos.

En la tabla 8.9 se expone una síntesis del estudio realizado y la caracterización de los niveles analizados.

Nivel	Caracterización	Edad
1	Capacidad para ordenar por longitudes series de dos objetos en posible combinación con la ordenación incompleta de series de más objetos por ensayo y error.	Los mayores porcentajes se dan entre los <i>tres años y medio y los cuatro años</i> , disminuyendo apreciablemente a partir de los cuatro años y permaneciendo de forma residual a partir de los cinco años y medio.  La aparición en edades superiores a los cinco años y medio indica un déficit en la capacidad para ordenar cantidades continuas longitudinales.

2	Capacidad para ordenar por longitudes series de dos y tres objetos, éstas últimas de forma completa o incompleta. Inicio de la capacidad para ordenar por longitudes series de cuatro objetos.	<p>Los porcentajes se hacen mayoritarios para los sujetos de <i>cuatro años y medio</i>, permaneciendo elevados en los grupos de seis y siete años, en los que de hecho se alcanzan los mayores porcentajes.</p> <p>La persistencia de este nivel a los seis y siete años indica dificultades significativas en la capacidad para ordenar cantidades continuas longitudinales aún en los sujetos de mayor edad.</p>
3	Capacidad alta o plena para ordenar por longitudes, de forma completa, series de dos y tres objetos y de ordenar por longitudes series de cuatro objetos de forma completa o incompleta.	<p>El porcentaje es mayoritario a los <i>cinco años y medio</i> (50%) y alcanza su valor máximo a los seis años y medio (62,5%). Sin embargo este nivel no es estable, produciéndose disminuciones significativas en los porcentajes de los grupos de seis y siete años.</p> <p>Ello es indicativo de las dificultades señaladas anteriormente así como de la posible evolución no lineal de esta capacidad.</p>

Tabla 8.9: Caracterización de los niveles de dominio del orden con cantidades continuas.

### 8.6.1.3 Análisis de las estrategias

Las estrategias utilizadas por los sujetos en la resolución de las tareas se recogen en las tablas C.3, C.4 y C.5\*, página 717 y siguientes, del anexo C.

Los valores de las variables correspondientes que aparecen en la cabecera de las columnas se detallan en la sección 7.7.2<sup>†</sup>. En la tabla C.3 se recogen las estrategias seguidas por los sujetos, identificados por su clave y grupo de edad, junto con los valores correspondientes de las variables *SumaCC* y *NivelCC*; la tabla C.4 recoge dichas estrategias clasificadas según los valores de la variable *SumaCC*, mientras que la tabla C.5 recoge las citadas estrategias clasificadas según los valores de la variable *NivelCC*.

\*Téngase en cuenta que en dichas tablas, por economía en la notación, las variables *EstCCi* se denominan *SCCi*.

<sup>†</sup>Véase la página 415 y siguientes en el capítulo 7.

Por otra parte, en las tablas 8.10 se recogen los porcentajes por grupos de edad de cada una de las estrategias en cada una de las tareas del conjunto analizado. Las columnas en las que aparece la letra o prefijo  $C$  designan las estrategias crecientes, mientras que la  $D$  hace alusión a las decrecientes. El número que acompaña a dichas letras (1 o 2) indica que en dichas estrategias se han producido ese número de errores y que se tendrán en cuenta en las tareas indicadas. Las etiquetas  $DI$ ,  $ID$ ,  $EE$ ,  $N$  y  $X$ , designan, respectivamente, las estrategias derecha-izquierda, izquierda-derecha, ensayo y error, sin orden y tarea no realizada. Posteriormente, dichas estrategias se agruparán en las tablas 8.11 en ordinales ( $C$ ,  $C1$ ,  $C2$ ,  $D$ ,  $D1$ ,  $D2$ ), laterales ( $DI$ ,  $ID$ ), no laterales ( $EE$ ,  $N$ ) y no ordinales ( $DI$ ,  $ID$ ,  $EE$ ,  $N$ ) u otras combinaciones que, en cualquier caso, se indicarán en el texto.

Antes de iniciar el análisis hemos de indicar que se distinguen dos subconjuntos de tareas: un primer subconjunto formado por las tareas 2<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup>, en las que coinciden las estrategias laterales y ordinales, y un segundo formado por las tareas 5<sup>a</sup> y 6<sup>a</sup>, en cuyas respuestas es posible discriminar todas las posibles estrategias. Comenzaremos por analizar los resultados que son comunes a ambos subconjuntos, para pasar a continuación a examinar los resultados de cada uno de los dos subconjuntos por separado.

(a)

GED	EstCC2			EstCC3			EstCC4					
	C	D	EE	C	D	EE	C	C1	D	D1	EE	N
3AM	20	50	30	10	50	40	10	0	10	10	50	20
4A	20	80	0	10	50	40	0	10	20	10	60	0
4AM	30	60	10	10	40	50	30	0	30	20	20	0
5A	90	10	0	0	60	40	10	0	70	0	20	0
5AM	80	20	0	0	60	40	20	0	50	0	10	20
6A	60	30	10	20	80	0	20	10	50	0	0	20
6AM	75	25	0	12,5	75	12,5	25	0	75	0	0	0
7A	100	0	0	0	75	25	25	0	62,5	12,5	0	0
<b>Total</b>	57,9	35,5	6,6	7,9	60,5	31,6	17,1	2,6	44,7	6,6	21,1	7,9

(b)

GED	EstCC5								
	C	C1	D	DI	ID	EE	N	X	
3AM	0	10	0	0	10	40	20	20	
4A	30	20	0	10	20	10	0	10	
4AM	10	30	10	0	20	20	10	0	
5A	10	10	10	10	50	10	0	0	
5AM	30	20	10	0	40	0	0	0	
6A	20	10	10	10	50	0	0	0	
6AM	25	12,5	0	12,5	50	0	0	0	
7A	25	0	0	0	75	0	0	0	
<b>Total</b>	18,4	14,5	5,3	5,3	38,2	10,5	3,9	3,9	

(c)

GED	EstCC6										
	C	C1	C2	D	D1	D2	DI	ID	EE	N	X
3AM	0	0	0	10	0	0	0	0	0	10	80
4A	0	20	0	10	10	0	0	0	20	10	30
4AM	20	0	0	0	0	10	0	20	0	50	0
5A	0	20	0	0	10	0	10	50	0	10	0
5AM	20	20	0	0	10	10	0	30	0	10	0
6A	0	40	10	0	0	0	10	40	0	0	0
6AM	0	25	0	0	12,5	12,5	0	37,5	12,5	0	0
7A	12,5	25	0	0	12,5	0	0	50	0	0	0
<b>Total</b>	6,6	18,4	1,3	2,6	6,6	3,9	2,6	27,6	3,9	11,8	14,5

Tabla 8.10. Porcentajes de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades continuas por grupos de edad. (a) Tareas segunda, tercera y cuarta; (b) Quinta tarea; (c) Sexta tarea.

Del examen detallado de los datos incluidos en las tablas mencionadas se pueden establecer los siguientes resultados.

**A) No realización de las tareas. Estrategia X.**

Las tareas de mayor dificultad no son resueltas por un alto porcentaje de los sujetos de 3 años y medio y 4 años; la no realización es altamente significativa en el grupo de menor edad y en la sexta tarea.

**B) Sin orden. Estrategia N.**

La estrategia *N* (sin orden) aparece y se contabiliza\* a partir de la cuarta tarea (tres o más huecos), en la que solamente se da en los tres grupos de edad *3AM*, *5AM* y *5AM* en porcentajes pequeños del 20%, siendo significativo el porcentaje en los dos últimos.

Se trata de una estrategia que presenta una incidencia muy escasa o nula en los grupos de edad superior a cinco años y medio y escasa o muy escasa en los grupos de edad inferior, salvo en el grupo *4AM* en la sexta tarea que presenta dificultad máxima para los grupos de edad inferior<sup>†</sup> y que en este caso se traduce en el aumento del porcentaje correspondiente.

**C) Ensayo y error. Estrategia EE.**

La estrategia de ensayo y error (EE) aparece en la segunda tarea en los grupos *3AM*, *4AM* y *6A*, desapareciendo en este último grupo en las restantes tareas. La aparición de la pieza sobrante en la tercera tarea produce un considerable aumento de esta estrategia en todos los grupos de edad, salvo precisamente en el grupo *6A*. En todas las tareas, salvo en la sexta, en la que aparece residualmente en dos grupos de edad, los porcentajes de uso de esta estrategia presentan una tendencia clara a disminuir con el aumento de la edad hasta anularse a partir de los cuatro años y medio o cinco años. Los mayores porcentajes de uso de la estrategia de ensayo y error se dan en los tres grupos de edad inferior, mientras que los porcentajes globales de esta estrategia para toda la muestra decrecen monótonamente desde la tercera tarea (31,6%) a la sexta (3,9%).

---

\*Nótese que los sujetos que no resuelven por ensayo y error (EE) las tareas segunda y tercera, que sólo presentan dos huecos, utilizan necesariamente una estrategia creciente o decreciente o alguna de las estrategias laterales (DI, ID), por lo que la estrategia *N* (sin orden) no puede aparecer en estas tareas.

<sup>†</sup>Véanse los porcentajes de no realización de la sexta tarea en los grupos *3AM* y *4A*.

#### D) Estrategias laterales (DI, ID).

En relación con el uso de estas estrategias, las subtablas 8.10(b) y (c) muestran que el uso de la estrategia derecha-izquierda (DI) es residual y puede aparecer en cualquier grupo de edad\* con porcentajes pequeños (alrededor del 10%) y que su incidencia es muy escasa en las tareas quinta y sexta con porcentajes globales respectivos del 5,3% y 2,6%.

El uso de la estrategia izquierda-derecha (ID) presenta una clara tendencia creciente con la edad, en las tareas quinta y sexta alcanza máximos del 75% y del 50% para los sujetos en el grupo 7A, también se alcanza el 50% en el grupo 5A (sexta tarea), si bien dichos porcentajes se reducen apreciablemente en la sexta tarea en los cuatro grupos de edad superior. Dichas reducciones son del 10% en los grupos 5AM y 6A, del 12,5% en el grupo 6AM y del 25% en el grupo 7A y, por tanto, es más acusada al aumentar la edad de los sujetos. Creemos que el aprendizaje y el mayor nivel de comprensión de las tareas por parte de los sujetos de mayor edad pueden ser las causas de este hecho. Nótese el papel relevante de esta estrategia no ordinal, no detectada en el estudio exploratorio y puesta aquí de manifiesto gracias a la inclusión de los dos grupos de edad superior (6AM y 7A) y a su uso significativo a partir de los 5 años de edad con porcentajes globales del 38,2% y 27,6% en las tareas quinta y sexta respectivamente.

Para los sujetos del intervalo de edad estudiado la lateralidad se halla en periodo de formación (le Boulch, 1995), por lo que conjeturamos que este hecho puede deberse a la influencia cultural de la lateralidad izquierda-derecha dominante y a su fomento en los procesos de aprendizaje de la lectura y la escritura, de ahí su mayor presencia en los grupos de edad superior.

---

\*Aunque, de hecho, no ha aparecido en el grupo 3AM en ninguna de las dos tareas.



(a)

GED	EstCC2		EstCC3		EstCC4			
	C+D	EE	C+D	EE	C+C1	D+D1	C+D	TNO
3AM	70	30	60	40	10	20	30	70
4A	100	0	60	40	10	30	40	60
4AM	90	10	50	50	30	50	80	20
5A	100	0	60	40	10	70	80	20
5AM	100	0	60	40	20	50	70	30
6A	90	10	100	0	30	50	80	20
6AM	100	0	87,5	12,5	25	75	100	0
7A	100	0	75	25	25	75	100	0
<b>Total</b>	93,4	6,6	68,4	31,6	19,7	51,3	71	29

(b)

GED	EstCC5					
	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	10	0	10	10	60	70
4A	50	0	50	30	10	40
4AM	40	10	50	20	30	50
5A	20	10	30	60	10	70
5AM	50	10	60	40	0	40
6A	30	10	40	60	0	60
6AM	37,5	0	37,5	62,5	0	62,5
7A	25	0	25	75	0	75
<b>Total</b>	32,9	5,3	38,2	43,5	14,4	57,9

(c)

GED	EstCC6					
	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	0	10	10	0	10	10
4A	20	20	40	0	30	30
4AM	20	10	30	20	50	70
5A	20	10	30	60	10	70
5AM	40	20	60	30	10	40
6A	50	0	50	50	0	50
6AM	25	25	50	37,5	12,5	50
7A	37,5	12,5	50	50	0	50
<b>Total</b>	26,3	13,1	39,4	30,2	15,7	45,9

Tabla 8.11. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades continuas por grupos de edad. (a) Tareas segunda, tercera y cuarta; (b) Quinta tarea; (c) Sexta tarea.

Seguimos a continuación con el análisis de los resultados de los datos de las tablas 8.10 agrupados en las tablas 8.11, que sintetizan los porcentajes totales por tareas y grupos de edad en las columnas de sumas etiquetadas  $C+D$ ,  $C+C1$  y  $D+D1$ . Por su parte, las columnas etiquetadas EE (ensayo y error) coinciden con la homónimas de la subtabla 8.10(a) y la etiquetada  $TNO$  con la suma de las correspondientes EE y N de dicha subtabla, como porcentajes totales de estrategias no ordinales utilizadas en la cuarta tarea. Las columnas  $TC$ ,  $TD$ ,  $TO$ ,  $TL$ ,  $TNL$  y  $TNO$  designan los porcentajes totales de estrategias crecientes (C, C1, C2), decrecientes (D, D1, D2), ordinales (C, C1, C2, D, D1, D2), laterales (DI, ID), no laterales (EE, N) y no ordinales (DI, ID, EE, N) obtenidos sumando las columnas correspondientes de las subtablas 8.10(b) y (c).

### E) Estrategias ordinales y laterales en las tareas segunda a cuarta. Extrapolación de las incidencias globales.

1. En relación con las estrategias ordinales (C/D), señalamos de nuevo que en la segunda tarea la estrategia creciente coincide con la izquierda–derecha y la decreciente con la derecha–izquierda, mientras que en las tareas tercera y cuarta la estrategia decreciente coincide con la izquierda–derecha y la creciente con la derecha–izquierda, por lo que las columnas etiquetadas  $C+D$ ,  $C+C1$  y  $D+D1$  en las tablas 8.11(a) incluyen los porcentajes totales de uso de las estrategias ordinales y laterales, que se separarán en las dos últimas tareas. Por tanto, la estrategia ordinal predominante en las tres primeras tareas coincide con la lateral izquierda–derecha, es decir, la creciente en la segunda tarea y la decreciente en las tareas tercera y cuarta.
2. En la segunda tarea la estrategia creciente no es predominante hasta los cinco años, mientras que la estrategia decreciente es predominante en los tres primeros grupos de edad. Este resultado, que queda oculto en las tareas tercera y cuarta, en las que predomina la estrategia decreciente en todos los grupos de edad, coincide con el observado en el estudio exploratorio\*, pudiendo ser debido a la estrategia de resolución basada en colocar primero los troncos más grandes y más sencillos de mover en los huecos más grandes y más sencillos de detectar.

Conjeturamos que la influencia de la estrategia

\* Véase en la sección 5.8.2.1, página 218 y siguientes, la tendencia observada al incremento del uso de la estrategia creciente con la edad.

derecha-izquierda en el resultado anterior es muy limitada, dado su papel residual observado en las dos últimas tareas. Nótese también, la clara tendencia en la segunda tarea a la disminución del uso de la estrategia decreciente al aumentar la edad de los sujetos, desde valores del 50 % al 80 % en los tres primeros grupos de edad hasta valores del 30 % al 0 % en los cinco últimos, así como su incidencia global del 35,5 %.

3. En las tres tareas resulta clara la tendencia al aumento de las estrategias dominantes (creciente, decreciente, decreciente) al aumentar la edad, con valores mínimos respectivos del 20 %, 40 % y 20 % en los tres grupos de menor edad (*3AM*, *4AM* y *3AM*) y valores máximos del 100 %, 80 % y 75 % en los tres grupos de mayor edad (*7A*, *6A* y *7A*), siendo su incidencia global respectiva del 57,9 %, el 60,5 % y el 51,3 %. Los valores anteriores incluyen la incidencia de la estrategia izquierda-derecha en un 32,9 %\*, que al ser eliminada se obtienen los valores: 38,8 %, 40,5 % y 34,4 % como estimación por extrapolación lineal de los porcentajes globales de uso de dichas estrategias en estas tareas.
4. En las mismas tareas también se observa la presencia de estrategias decreciente, creciente y creciente que, si bien, no son dominantes, tampoco son despreciables. Así, la estrategia decreciente en la segunda tarea presenta una tendencia a disminuir con la edad y un porcentaje máximo del 80 % en el grupo *4A* y mínimo del 0 % en el grupo *7A*; la estrategia creciente en la tercera tarea presenta valores entre el 10 % (tres primeros grupos de edad) y el 20 % (grupo *6A*) sin que esté clara su evolución con la edad, mientras que la estrategia creciente en la cuarta tarea presenta valores entre el 10 % (dos primeros grupos de edad) y el 30 % en una sucesión que tiende a estabilizarse alrededor del 25 % en los grupos de edad superior. Las respectivas incidencias globales son: el 35,5 %, el 7,9 %<sup>†</sup> y el 19,7 %<sup>‡</sup>.
5. Si se tiene en cuenta que la incidencia global media de la estrategia derecha-izquierda en las tareas quinta y sexta es muy

\*Este valor es el de la incidencia global media de la estrategia izquierda-derecha en las tareas quinta y sexta. Corresponde al total de la columna ID de la subtabla 8.12(a).

<sup>†</sup>Estos dos valores corresponden a los totales de las columnas D y C de la subtabla 8.10(a)

<sup>‡</sup>Es el valor total de la columna *C+CI* en la subtabla 8.11(a).

escasa (3,95 %\*), podría obtenerse una estimación de los porcentajes globales de uso de las respectivas estrategias ordinales disminuyendo un 4% los porcentajes globales anteriores, con ello se obtienen un 34,1 %, 7,6 % y un 18,9 % como porcentajes globales estimados de uso de las estrategias creciente, decreciente y decreciente en las tareas segunda, tercera y cuarta, respectivamente. Y con ello, sumando los valores obtenidos con los estimados en el punto 3 anterior se obtienen los siguientes porcentajes de uso de las respectivas estrategias ordinales, crecientes y decrecientes en total, en dichas tareas: el 72,9 %, el 48,1 % y el 53,3 %<sup>†</sup>.

(a)

GED	DI	ID
3AM	0	5
4A	5	10
4AM	0	20
5A	10	50
5AM	0	35
6A	10	45
6AM	6,25	43,75
7A	0	62,5
<b>Total</b>	3,95	32,9

(b)

GED	Tarea 2			Tarea 3			Tarea 4		
	C	D	TOR	C	D	TOR	TC	TD	TOR
3AM	19	50	69	10	47,5	57,5	10	19	29
4A	18	76	94	9,5	45	54,5	9,5	27	36,5
4AM	24	60	84	10	32	42	30	40	70
5A	45	9	54	0	30	30	9	35	44
5AM	52	20	72	0	39	39	20	32,5	52,5
6A	33	27	60	18	44	62	27	27,5	54,5
6AM	42,2	23,4	65,6	11,7	42,2	53,9	23,4	42,2	65,6
7A	37,5	0	37,5	0	28,1	28,1	25	28,1	53,1
<b>Total</b>	38,8	34,1	72,9	7,6	40,5	48,1	18,9	34,4	53,3

Tabla 8.12. Extrapolación lineal de los porcentajes de uso de las estrategias ordinales en las tareas segunda, tercera y cuarta. Orden con cantidades continuas.

(a) Promedios de uso de las estrategias laterales en las tareas quinta y sexta; (b) Estimaciones para las tareas segunda, tercera y cuarta;

\*Valor correspondiente a la incidencia global media de la estrategia derecha-izquierda en las tareas quinta y sexta. Corresponde al total de la columna DI de la subtabla 8.12(a)

<sup>†</sup>Son los totales de las columnas **TOR** de la subtabla 8.12(b).

En la subtabla 8.12(a) se recogen los promedios de los porcentajes por grupos de edad de las estrategias laterales en las tareas quinta y sexta. Teniendo en cuenta dichos valores y reduciendo los correspondientes a las estrategias ordinales y laterales en las tareas segunda, tercera y cuarta, se obtienen los porcentajes estimados que se recogen en la subtabla 8.12(b), en la que las designaciones **TOR**, **TC** y **TD** se refieren al total de estrategias ordinales, crecientes y decrecientes, respectivamente. Teniendo en cuenta la advertencia de que los valores obtenidos son meras extrapolaciones, destacamos los resultados siguientes.

#### **F) Estrategias ordinales en las tareas segunda a cuarta.**

##### **Extrapolación a los grupos de edad.**

1. Los porcentajes de incidencia estimados de la estrategia derecha-izquierda en las tareas quinta y sexta son muy pequeños, tanto a nivel global como en los distintos grupos de edad, en los que aparece esporádicamente y de forma residual y aislada. Por el contrario, los de el uso de la estrategia izquierda-derecha, presentan una tendencia creciente hasta los cinco años de edad, disminuyendo a los cinco años y medio para volver a aumentar hasta los siete años. Ambas estrategias resultan casi inexistentes en los dos grupos de edad inferior debido a la menor participación de estos sujetos en las tareas quinta y sexta, de mayor dificultad, por lo que los porcentajes estimados para las estrategias ordinales en estos grupos pueden resultar un tanto elevados.
2. En general, los porcentajes totales estimados (TOR) de uso espontáneo de las estrategias ordinales en las tareas segunda, tercera y cuarta son elevados, tanto globalmente, con valores alrededor del 50% en las tareas tercera y cuarta, como por grupos de edad, con valores entre el 30% y el 65,6%.
3. La aparición de la pieza sobrante en la tercera tarea provoca un aumento en los porcentajes de ensayo y error, disminuyendo apreciablemente, salvo en el grupo 6A, los porcentajes totales estimados para las estrategias ordinales. El aprendizaje y la mejor identificación de esta pieza por parte de los grupos de mayor edad producen un aumento apreciable de dichos porcentajes a partir del grupo 6A.
4. Las estrategias ordinales decreciente, creciente, creciente correspondientes a las tareas segunda, tercera y cuarta, respectivamente, no son dominantes pero su presencia es moderada en

las tareas tercera y cuarta y las tres aparecen en en la mayoría o en todos los grupos de edad.

5. El uso contrapuesto de las estrategias ordinales y de la izquierda-derecha ocasiona una evolución no lineal de las competencias ordinales con con cantidades continuas, con apreciable variabilidad entre los cinco y seis años de edad.

A continuación se analiza el uso por los sujetos de las distintas estrategias en tareas quinta y sexta en las que, como se ha dicho, no hay coincidencias entre las mismas. Para ello nos basamos en los datos de las tablas 8.10(b) y (c).

### G) Estrategias en las tareas quinta y sexta.

1. En las columnas **ID** de la quinta tarea se produce una evolución monótona creciente, salvo en el grupo *5AM* en el que se produce una disminución local, con valor mínimo del 10% en el grupo *3AM* y máximo del 75% en el grupo *7A*. Dicha evolución pierde su monotonía creciente en la sexta tarea (creemos que debido al aprendizaje) en los cuatro grupos de edad superior, disminuyendo los porcentajes en los grupos *5AM*, *6A* y *6AM* en relación con el del grupo *5A*, e igualándose en el grupo *7A*.
2. La estrategia decreciente parece ser independiente de la edad y es persistente, ya que está presente en todos los grupos y en al menos una de las dos tareas con porcentajes inferiores o iguales al 25%. La tendencia evolutiva de las estrategias ordinales prácticamente coincide con la registrada para la estrategia creciente que, como se observa en las subtablas 8.11(b) y (c), tiene carácter creciente hasta el grupo *5AM* en la quinta tarea y hasta el *6A*\* en la sexta, lo que se debe al aumento del porcentaje de uso de las estrategias laterales en los tres grupos de edad superior en ambas tareas.
3. Los porcentajes de uso de las estrategias ordinales en ambas tareas presentan una tendencia creciente hasta el grupo *5AM*, a partir del cual los porcentajes disminuyen, decreciendo en la quinta tarea y estabilizándose en el 50% en la sexta†. Resulta por tanto que el grupo de edad *5AM* es crítico en lo que se

\*Véase la columna **TC** en las subtablas 8.11(b) y (c)

†Véase la columna **TC** de ambas subtablas.

refiere al desarrollo de las capacidades ordinales relativas a la cantidad continua, lo que confirma los resultados del estudio exploratorio.

4. En la quinta tarea las estrategias dominantes a nivel global son las no ordinales (57,9%), las laterales (43,5%) y, en particular, la izquierda–derecha (38,2%) (tabla 8.15 8.10(b)), frente a las no laterales (14,4%) y a las ordinales (38,2%), entre las que domina la creciente (32,9%, columna **TC**).
5. En la sexta tarea, pasan a ser dominantes las estrategias ordinales (39,4%), entre las que predomina la creciente (26,3% columna **TC**), frente a las no laterales (15,7%) y a las laterales (30,2%), entre las que predomina la izquierda–derecha (27,6%, columna **ID**, tabla 8.10(c)); aunque, a nivel global, las estrategias no ordinales son dominantes (45,9%) frente a las ordinales (39,4%). En esta tarea, se reduce la incidencia de las estrategias no ordinales, en relación con su incidencia en la tarea anterior, debido al aumento del porcentaje de no realización de la tarea (X) en los dos grupos de menor edad, y aumenta ligeramente la incidencia de las estrategias ordinales, cuyo valor se aproxima al de las no ordinales.
6. Los porcentajes de uso de las estrategias ordinales (alrededor del 40%) se consideran muy elevados en ambas tareas teniendo en cuenta que su uso es *espontáneo*. Varía en ambas tareas entre el 10% en el grupo *3AM*, como valor mínimo, y el 60% en el grupo *5AM*, como valor máximo, valor que se puede considerar muy elevado.
7. Los grupos *4A* y *4AM* utilizan las estrategias ordinales en un porcentaje comparable a los correspondientes de los tres grupos de edad superior, en los que la incidencia de uso de la estrategia izquierda–derecha es alta. Nótese la importante influencia negativa de dicha estrategia lateral en el desarrollo de las capacidades ordinales de los sujetos a partir de los cuatro años y medio.
8. La inclusión de los dos grupos de edad superior (*6AM* y *7A*) y la mejora del registro de la información han sido cruciales para aclarar tanto los resultados obtenidos en el estudio exploratorio como para identificar el papel de la estrategia izquierda–derecha en el desarrollo de estas capacidades ordinales, hecho no observado en dicho estudio exploratorio.

Los porcentajes de uso de las distintas estrategias por niveles en las dos últimas tareas se recogen en las tablas 8.13(a) y(b). Del examen de los datos recogidos en las mismas se destacan los siguientes resultados.

(a)

EstCC5								
Nivel	C	C1	D	DI	ID	EE	N	X
1	4,2	4,2	0	8,3	37,5	25	8,3	12,5
2	12,9	12,9	6,5	3,2	58,1	6,5	0	0
3	42,9	28,6	9,5	4,8	9,5	0	4,8	0

(b)

EstCC6											
Nivel	C	C1	C2	D	D1	D2	DI	ID	EE	N	X
1	4,2	8,3	0	0	4,2	4,2	0	25	0	12,5	41,7
2	0	9,7	3,2	6,5	3,2	0	3,2	48,4	6,5	16,1	3,2
3	19	42,9	0	0	14,3	9,5	4,8	0	4,8	4,8	0

Tabla 8.13. Porcentajes de las estrategias utilizadas por niveles en las dos últimas tareas de Orden con cantidades continuas. (a) Quinta tarea; (b) Sexta tarea.

#### H) Niveles y estrategias en las tareas quinta y sexta.

Los sujetos del *nivel 1* usan las estrategias ordinales de modo incipiente, un 8,4% en la quinta y un 20,9% en la sexta, prevaleciendo las estrategias laterales (45,8%) y el ensayo y error (25%) en la quinta tarea, y las laterales (25%) y la no realización (41,7%) en la sexta tarea.

Los sujetos del *nivel 2* usan las estrategias ordinales con mayor frecuencia, un 32,3% en la quinta y un 22,6% en la sexta, predominando ampliamente las estrategias laterales: un 61,3% en la quinta y un 51,6% en la sexta; siendo las demás residuales salvo la **N** (sin orden) en la sexta tarea.

Los sujetos del *nivel 3* usan ampliamente las estrategias ordinales, un 81% en la quinta y un 85,7% en la sexta, utilizando las demás con porcentajes pequeños o residuales.

Finalmente, por inspección directa de la tabla C.3 se observa:

#### I) Mantenimiento de estrategias por los sujetos.

Se encuentran 17 sujetos, un 22,4% del total de la muestra, que mantienen la misma estrategia ordinal u ordinal-lateral en al menos



tres tareas, de los que 9 (un 11,8%) lo hacen en las tres últimas. Por otra parte, de los 17, 5 se encuentran en el *nivel 2* y 12 en el *nivel 3*, mientras que los 9 mencionados se encuentran todos en el *nivel 3*, lo que indica que todos alcanzan los niveles 2 y 3 y todos los que lo hacen en las tres últimas tareas alcanzan el nivel 3, por lo que mantener la misma estrategia parece ser condición suficiente para obtener un alto nivel de ejecución, si bien no es una condición necesaria como se desprende de un análisis detallado de los datos\*. Por grupos de edad, de los 17, 1 se halla en el grupo *3AM*, 3 en el *4AM*, 1 en el *5A*, 3 en el *5AM*, 3 en el *6A*, 4 en el *6AM* y 2 en el *7A*; y de los 9, todos se hallan en los cuatro grupos de edad superior, 3 en el grupo *5AM* y 2 en cada uno de los tres grupos *6A*, *6AM* y *7A*. Por tanto, en casi todos los grupos de edad se encuentran sujetos que mantienen la misma estrategia ordinal u ordinal-lateral en al menos tres tareas, no superando el 40% en cada grupo; sin embargo, los sujetos que lo hacen en las tres últimas tareas se encuentran solamente en los cuatro grupos de edad superior, lo que, por otra parte, es coherente con la dificultad progresiva de las tareas.

Por tanto, la mayor parte de los sujetos (un 77,6% del total) cambian de estrategia al resolver las tareas de orden con cantidades continuas y, de ellos, un 15,25% (o un 11,8% del total) alcanzan el *nivel 3*. Del 22,4% que mantienen la misma estrategia ordinal u ordinal-lateral en al menos tres tareas, un 70,6% (un 15,8% del total) alcanzan el *nivel 3* y de los que lo hacen en las tres últimas el 100% lo alcanzan (el 11,8% del total).

#### 8.6.1.4 Uso de las piezas sobrantes

La tabla C.6\*, anexo C, recoge los datos relativos al uso de las piezas sobrantes incluidas en las tareas tercera a sexta; como se recordará son piezas añadidas intencionadamente a la colección de piezas a encajar en los huecos y cuya longitud no coincide con ninguno de los huecos. Se pretende con ello distinguir de una manera más precisa a los sujetos que utilizan estrategias ordinales de los que emplean otros tipos de estrategias. La primera columna de la tabla recoge la clave identificativa del sujeto, las etiquetadas mediante

\*Se encuentran 9 sujetos en el nivel 3 (número se obtiene restando del total de los 21 sujetos que se hallan en el *nivel 3* los 12 que se hallan en el mismo nivel y mantienen la misma estrategia ordinal u ordinal-lateral en al menos tres tareas), o un 42,86% de los sujetos de ese nivel, que no que mantienen la misma estrategia ordinal u ordinal-lateral en al menos tres tareas, es decir que como máximo la mantienen solo en dos.

\*Véase la página 724 y siguientes.

**HPCi** (con **i** variando de 3 a 6) recogen, a su vez, para cada una de las tareas, los números correspondientes a las posiciones en las que los sujetos intentaron colocar la pieza sobrante\*, si el intento es contradictorio los números citados vendrán precedidos por una “C” mayúscula. Las etiquetadas mediante **NTar** y **TarU** recogen, respectivamente, el número de tareas en las que el sujeto utilizó la pieza sobrante y el número (o los números) identificativo(s) de la tarea(s) en la(s) que lo intentó, figurando igualmente una “C” mayúscula, si el intento es contradictorio. Finalmente, las columnas etiquetadas mediante **SumCC** y **NivelCC** corresponden a las variables homónimas anteriormente utilizadas<sup>†</sup>.

Partiendo de los datos de la tabla C.6, se construye la tabla 8.14, que recoge la distribución de los porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según el número de tareas en las que se usa (variable **NTar**).

GED	NTar (%)			
	0	1	2	3
3AM	20,0	20,0	60,0	,0
4A	10,0	50,0	40,0	,0
4AM	30,0	40,0	10,0	20,0
5A	40,0	30,0	20,0	10,0
5AM	40,0	20,0	30,0	10,0
6A	80,0	20,0	,0	,0
6AM	75,0	12,5	12,5	,0
7A	75,0	25,0	,0	,0
<b>Total</b>	46,25	27,19	21,56	5,0

Tabla 8.14: Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según el número de tareas en las que se usa. Orden con cantidades continuas.

## J) Número de tareas en las que se usa la pieza sobrante.

Del examen de los datos incluidos en la tabla 8.14 se observa que:

El uso de la pieza sobrante presenta una tendencia claramente decreciente con la edad debido a su mejor identificación y a la menor incidencia de la estrategia de ensayo y error. Así, el porcentaje de sujetos que no utilizan la pieza sobrante en ninguna de las tareas (total

\*Si el sujeto no usa dicha pieza el espacio correspondiente aparecerá en blanco, si intenta colocarla una vez aparecerá un solo número y aparecerá una secuencia numérica, correspondiente a las posiciones citadas, si los intentos de colocación son reiterados.

<sup>†</sup>Recordamos que estas variables almacenan, respectivamente, la valoración total de las respuestas de los sujetos y el correspondiente nivel asociado en estas tareas.

de la columna **0**) es cercano al 50% con variaciones notables por grupos de edad; los que la utilizan sólo en una tarea es del 27,19%, siendo más elevado entre los cuatro y los cinco años; el 21,56% la utiliza en dos tareas con un máximo en el grupo *3AM* y una evolución decreciente posterior; sólo el 5% de los sujetos utiliza la pieza sobrante en tres tareas, lo que resulta un valor residual y su evolución es decreciente entre los cuatro años y medio y los cinco años y medio (pasando del 20% al 10%), anulándose en los tres grupos de edad superior. Por último, ningún sujeto usa la pieza sobrante en las cuatro tareas en las que interviene.

Por otra parte, las tablas 8.15 y 8.16 recogen, respectivamente, los porcentajes de uso de la pieza sobrante según las tareas y grupos de tareas en las que se utiliza\* y en cada una de las tareas individuales en total por grupos de edad.

GED	TarU (%)								
	3	34	345	346	35	4	45	5	6
3AM		20			10	10	30	10	
4A	10	20				40	20		
4AM	20	10	20			20			
5A	20	10	10			10	10		
5AM	20	10		10			20		
6A						20			
6AM							12,5		12,5
7A	25								
<b>Total</b>	11,88	8,75	3,75	1,25	1,25	12,5	11,56	1,25	1,56

Tabla 8.15: Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según las tareas y combinaciones en las que se usa. Orden con cantidades continuas.

### K) La pieza sobrante en las tareas individuales y en las combinaciones de tareas en las que se usa.

1. En general, las piezas sobrantes se utilizan en todas las tareas y combinaciones de tareas, presentando en la sexta un uso claramente inferior. Por otra parte son excepcionalmente altos, los porcentajes que se dan en el grupo *3AM* en las tareas

\*En una sola tarea: columnas **3**, **4**, **5** y **6**, en dos tareas: columnas **34**, **35** y **45**, y en tres: columnas **345** y **346**. No se han observado otras combinaciones posibles.

cuarta y quinta y en el grupo 4A en la cuarta tarea. En este caso creemos que esto es debido al predominio de la estrategia de ensayo y error y a la menor edad de los sujetos. Por el contrario, el uso es residual de seis a siete años, lo que puede deberse a pérdidas de atención o al uso puntual de la estrategia de ensayo y error.

- Los porcentajes globales de uso de la pieza sobrante en dos o tres tareas son muy pequeños y corresponden a grupos de edad intermedios (de cuatro años y medio a cinco años y medio). La tarea en la que más se ha usado la pieza sobrante por grupos de edad ha sido la cuarta, que es la primera que presenta por primera vez tres huecos. En la tercera los porcentajes son menores o iguales, siendo sorprendentemente menores en los dos grupos de edad inferior que en los tres grupos siguientes. En la quinta tarea los porcentajes disminuyen significativamente y en la sexta los valores son residuales. Esta evolución decreciente\*, a partir de los cuatro años y medio en la tercera tarea y a partir de los tres y medio en la cuarta y quinta tareas, muestra los efectos del aprendizaje, el mejor reconocimiento de estas piezas por los grupos de mayor edad y la menor frecuencia de realización de las tareas más complejas por los grupos de edad inferior.

GED	Tarea				% SG
	3	4	5	6	
3AM	30	60	50	–	35
4A	30	80	20	–	32,5
4AM	50	50	20	–	30
5A	40	40	20	–	25
5AM	40	40	20	10	27,5
6A	–	20	–	–	5
6AM	–	12,5	12,5	12,5	9,38
7A	25	–	–	–	6,25
<b>Total</b>	26,9	37,8	17,8	2,8	

Tabla 8.16: Porcentajes totales de uso de la pieza sobrante por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades continuas.

\*Nótese que también es decreciente, con leves variaciones en los grupos de edad superior, la evolución de los porcentajes medios de uso por tarea (% SG) y grupo de edad al aumentar la misma.

La tabla C.7 del anexo C y sus subtablas\* recogen los datos de los intentos de colocación. En la misma se observa:

#### L) Lugares de colocación de la pieza sobrante\*.

1. Los sujetos entre cuatro años y medio y cinco y medio tratan mayoritariamente de colocar la pieza sobrante de la tercera tarea, la de menor longitud y situada en primer lugar de arriba a abajo, en el hueco de menor longitud (3), situado en segundo lugar de izquierda a derecha, es decir, asignan el tronco más corto al hueco menor sin comparar las longitudes con precisión. Solamente predomina el segundo hueco, el más largo (4), con un porcentaje modesto (el 20%), en el grupo 3AM, lo que se debe, creemos, a una incorrecta comprensión de la tarea. En ambos casos se trata del uso de la estrategia pura de ensayo y error, lo que sucede de modo residual en algunos grupos e incidentalmente en el de mayor edad.
2. En la cuarta y en la quinta tareas predomina con claridad, en todos los grupos de edad, la asignación de la pieza sobrante, tronco de mayor longitud, al hueco de mayor longitud (6), sin comparar las longitudes con precisión. El resto de asignaciones se produce de modo residual en los dos grupos de menor edad. Se detectan intentos contradictorios residuales en los grupos 3AM y 5AM al intentar colocar, respectivamente, la pieza sobrante (4) en el hueco más largo (6) que ya estaba ocupado y el tronco de longitud intermedia (2) en el hueco más corto (4) también ocupado.

En el grupo de menor edad se produce un 30% de asignaciones del tronco sobrante al hueco de menor longitud (4), siendo incidentales las demás asignaciones (grupo 4AM), o bien, indicativas del uso de la estrategia de ensayo y error (asignación sucesiva a los huecos 4, 6 y 5).

En la sexta tarea el uso de la pieza sobrante, también la de mayor longitud, es incidental y se produce solamente en los grupos 5AM y 6AM, que reproducen la misma asignación errónea de las dos tareas anteriores: el tronco sobrante (el mayor longitud) al hueco de mayor longitud (8). Se producen también

\*Véase la página 725, anexo C. En todas las subtablas la columna denominada "0" recoge los porcentajes de sujetos que no usan la pieza sobrante, así como el porcentaje total correspondiente de los que no la usan.

intentos contradictorios residuales\* (10%) en los grupos 4A y 5A, como muestran los datos de la tabla 8.17.

- Las asignaciones predominantes: pieza sobrante de menor longitud al hueco de menor longitud (tercera tarea) y pieza sobrante de mayor longitud al hueco de mayor longitud (tareas cuarta, quinta y sexta), permiten concluir que los grupos de edad intermedia, 4AM a 5AM, hacen asignaciones fundamentalmente correctas por comparación visual aproximada (sin llegar a realizarlas con precisión), lo que da lugar a errores y, como consecuencia, quizá también a cierto incremento del uso de estrategias no ordinales en estos grupos de edad. Este hecho pudiera tener relación con una incidencia destacada a esas edades de la ley de Weber–Fechner\*: pequeñas diferencias en el estímulo provocan identificaciones perceptivas de objetos distintos, los objetos se perciben como iguales cuando solo son aproximadamente iguales.

GED	TarU (%)	
	C4	C6
3AM	10	
4A		10
4AM		
5A		10
5AM	10	
6A		
6AM		
7A		
<b>Total</b>	2,5	2,5

Tabla 8.17: Tareas y grupos de edad en los que se han registrado intentos contradictorios. Orden con cantidades continuas.

\*Los intentos contradictorios detectados solo se producen en dos tareas (la cuarta y la sexta), son meramente incidentales y muy probablemente debidos a pérdidas puntuales de atención o a fallos psicomotrices en el uso del ratón del tipo “soltar” piezas accidentalmente en posiciones no deseadas.

\*Véase la nota al pie en la página 93, sección 3.3. Esta ley relaciona la intensidad de un estímulo y la sensación producida por el mismo. Su enunciado es: *el menor cambio discernible en la magnitud de un estímulo es proporcional a la magnitud del estímulo*. Matemáticamente  $dp = k \frac{dS}{S}$ , donde  $dp$  corresponde al cambio percibido en el estímulo,  $dS$  corresponde a cambio de magnitud del estímulo,  $S$  corresponde a la magnitud del estímulo y  $k$  es un factor de escala. Integrando la ecuación se obtiene:  $p = k \ln \frac{S}{S_0}$ , siendo  $S_0$  el umbral perceptivo y  $\ln$  el logaritmo natural. Es claro, pues, que la relación entre el estímulo y la percepción corresponde a una escala logarítmica.

## 8.6.1.5 Modelos de ajuste

El contenido de este apartado trata de responder a la siguiente pregunta: ¿la evolución de las medias de las valoraciones de los resultados por grupos de edad\* sigue algún modelo matemático lineal o de otro tipo?; en el caso en que sea así, ¿con qué grado de validez?.

La tabla 8.8, página 447, recoge los estadísticos más relevantes de la variable *SumaCC* y, en particular, los valores de las medias por grupos de edad que designaremos como variable *MedCC*. Con dichos valores se ha estudiado el ajuste de dichas medias mediante varios modelos de regresión lineal y no lineal, considerando como variable dependiente la variable *MedCC* y como independiente la variable *EDG* (edades de los grupos), cuyas descripciones pueden verse con más detalle en la sección 7.7.2, página 415, del capítulo anterior. La tabla 8.18 recoge los resultados del ajuste al modelo lineal y de los mejores ajustes no lineales.

Ecuación	Resumen del modelo				
	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.
Lineal	,898	52,885	1	6	,000
<b>Inversa</b>	<b>,961</b>	<b>147,811</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,000</b>
<b>S</b>	<b>,941</b>	<b>95,572</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,000</b>

Tabla 8.18: Comparativa de modelos de ajuste de la variable *MedCC* al variar la edad de los grupos.

Como se aprecia en la tabla 8.18, los mejores ajustes vuelven a corresponder a los modelos *Inverso* y de tipo *S*, con  $R^2 = 0,961$  y significación  $p = 0,000 < 0,05$ , y  $R^2 = 0,941$  y significación  $p = 0,000 < 0,05$ , respectivamente, valores que indican un excelente grado de precisión superando al ajuste del modelo lineal. De nuevo, el modelo más sencillo y preciso para describir el fenómeno corresponde al modelo *Inverso*, en el que las medias de los grupos aumentan con la edad según una rama hiperbólica con asíntota horizontal en la recta  $y = b_0 = 5,053$ , que representa la máxima valoración a la que tienden asintóticamente los valores al aumentar las edades. Nótese el excelente grado de aproximación, ya que 5 corresponde a la valoración exacta máxima en este conjunto de tareas.

Como se indicó en la sección correspondiente del análisis de resultados del

\*Es decir, las medias de la variable *SumaCC* por grupos de edad.

anterior conjunto de tareas, las ecuaciones de estos modelos son:

$$\begin{cases} y = b_0 + \frac{b_1}{t} , \text{ para el modelo Inverso} \\ y = e^{(b_0 + \frac{b_1}{t})} \text{ o bien } \ln y = b_0 + \frac{b_1}{t} , \text{ para el modelo S} \end{cases}$$

donde  $b_0$  y  $b_1$  son los parámetros a determinar.

Las tablas C.11 y C.12 de la subsección C.5, páginas 727 y siguiente, recogen las características de los ajustes de ambos modelos, incluyéndose los valores observados de la variable **MedCC**, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95 % para ambos modelos.

Por su parte, la tabla C.10 del mismo anexo muestra los valores obtenidos para los coeficientes del modelo con sus significaciones al 95 %. Estos valores son:  $b_0 = 5,053$  y  $b_1 = -11,570$  con significaciones  $p = 0,000$ , en ambos casos, para el modelo Inverso y  $b_0 = 1,919$  y  $b_1 = -4,671$  con significaciones  $p = 0,000$ , también en ambos casos, para el modelo de la curva *S* o exponencial inversa.

En el gráfico de la Figura C.1, página 728, se representan los valores observados de la variable **MedCC** y los ajustados mediante ambos modelos, lo que pone de manifiesto la bondad de los ajustes. Del mismo modo, el gráfico de la Figura C.2, página 729, muestra la independencia de los errores de ambos modelos de los valores ajustados correspondientes, lo que prueba también la significación de los mismos.

Por tanto, los resultados obtenidos indican que el desarrollo (medio) de la capacidad para establecer órdenes con cantidades continuas se aproxima mejor al comportamiento de un modelo evolutivo no lineal, cuya velocidad decrece al aumentar la edad de los sujetos. Conjeturamos, en consecuencia, que el intervalo de edad en el que se produce la mayor variación es en el que se construyen y consolidan tales capacidades en la mente de los sujetos, por lo que la actuación didáctica a lo largo del mismo puede prevenir y paliar los déficits y dificultades de aprendizaje en este aspecto ordinal y en los aspectos aritméticos que se apoyan en dicha estructura.

### *8.6.2 Conclusiones del estudio de las tareas de orden con cantidades continuas*

Del tratamiento y análisis de los resultados se pueden establecer las siguientes conclusiones agrupadas en torno a los diferentes aspectos analizados



(se remite a los distintos epígrafes del apartado 8.6.1 para una información más amplia).

#### 8.6.2.1 En relación con las frecuencias y niveles

- 1<sup>a</sup>. Entre los cuatro años y medio y los cinco años y medio se consolida la capacidad de los sujetos para ordenar cantidades continuas lineales y establecer correspondencias seriales que conservan el orden con cantidades continuas lineales. La edad alrededor de los cinco años y medio es crítica en la formación de estas capacidades, observándose una rápida evolución hasta dicha edad para estabilizarse posteriormente.
- 2<sup>a</sup>. La evolución de la capacidad para establecer órdenes con cantidades continuas es más lenta y homogénea que la correspondiente al orden lineal y posterior a ella en el tiempo (más tardía), con una tendencia decreciente en los rangos y desviaciones típicas y menor asimetría en las distribuciones por grupos de edad.
- 3<sup>a</sup>. La capacidad de ordenar cantidades continuas lineales se desarrolla mayoritariamente pasando por tres niveles y dos períodos de transición:
  - *Nivel 1 (3AM–4AM)*: ordenar series de dos objetos e inicio al orden de series de tres objetos de forma completa o incompleta;
  - *Transición 1 (4A–5A)*: paso de ordenar series de dos objetos a ordenar series de tres objetos;
  - *Nivel 2 (4AM–5AM)*: ordenar series de tres objetos e inicio a la capacidad de ordenar series de cuatro objetos, disminuyendo muy significativamente el porcentaje de sujetos que solo ordenan a lo más series de dos objetos;
  - *Transición 2 (5A–5AM)*: paso de ordenar series de tres objetos a ordenar series de cuatro objetos;
  - *Nivel 3 (5AM–6AM)*: capacidad alta o plena para ordenar por longitudes series de cuatro objetos.
- 4<sup>a</sup>. Entre los seis y los siete años hay sujetos que todavía se encuentran en los dos primeros niveles, lo que indica que el desarrollo de esta capacidad no es completo en el periodo de edad considerado y que son necesarios tratamientos didácticos específicos para paliar estas disfunciones y su posible influencia negativa en la construcción de los conceptos numéricos y aritméticos.

### 8.6.2.2 En relación con las estrategias

- 1<sup>a</sup>. Los sujetos de menor edad (grupos 3AM y 4A) no realizan en un alto porcentaje las tareas de mayor dificultad (quinta y sexta), mientras que los sujetos de más edad realizan todas las tareas. Resulta, por tanto, que las tareas son adecuadas para el intervalo de edad considerado al nivel de las denominadas funciones onto-epistémicas.
- 2<sup>a</sup>. El porcentaje de utilización de la estrategia de ensayo y error (EE) aumenta con la aparición de la pieza sobrante en la tercera tarea y decrece monótonamente con el aumento de la dificultad y con la edad hasta la sexta tarea, en la que su uso es residual. En cuanto a la edad, esta estrategia llega a anularse a partir de los cuatro años y medio.
- 3<sup>a</sup>. La estrategia lateral derecha-izquierda (DI) es residual, pudiendo aparecer en cualquier grupo de edad con porcentajes pequeños. Sin embargo la estrategia lateral izquierda-derecha (ID), culturalmente dominante debido al aprendizaje de la lectura y la escritura y que aparece por primera vez en este estudio gracias a la inclusión de los dos grupos de edad superior (6AM y 7A) y a la mejora en el registro de la información, sí es relevante, presentando una tendencia creciente con la edad, si bien, su uso se reduce apreciablemente en la última tarea y especialmente en los grupos de mayor edad (aprendizaje).
- 4<sup>a</sup>. Las estrategias ordinales y laterales (totales de las columnas C+D se la subtabla 8.11(a)) son empleadas globalmente en las tareas 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup> por más del 70% de los sujetos. Sin embargo, dichas tareas no distinguen las estrategias ordinales de las laterales, por lo que tales valores incluyen la influencia de las estrategias laterales. Eliminando dicha influencia mediante extrapolación lineal (según su incidencia en las tareas quinta y sexta) se obtiene una estimación de los porcentajes globales de uso de las estrategias ordinales en las tareas 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup> en torno al o que superan el 50%, valores que son elevados tanto a nivel global como por grupos de edad (véase la subtabla 8.12(b)).
- 5<sup>a</sup>. Eliminando la incidencia de la estrategia izquierda-derecha mediante extrapolación se comprueba que en las tareas 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup> predominan, respectivamente y en aumento con la edad, las estrategias ordinales creciente, decreciente y decreciente, con porcentajes globales\* alrededor del 40%.
- 6<sup>a</sup>. Del mismo modo, el uso de las estrategias decreciente, creciente y

\*Nótese, sin embargo, la disminución de los porcentajes estimados de uso de estas estrategias para los tres grupos de mayor edad, en relación con los anteriores, debida al aumento de la incidencia de la estrategia izquierda-derecha en dichos grupos. Véanse dichos valores en la subtabla 8.12(b)

creciente en las mismas tareas alcanza, respectivamente, el 34,1%, 7,6% y 18,9%, por lo que su papel es moderado incluso por grupos de edad\* (subtabla 8.12(b)).

- 7<sup>a</sup>. La aparición de la pieza sobrante en la tercera tarea provoca un aumento en los porcentajes de ensayo y error y disminuye apreciablemente los porcentajes totales estimados para las estrategias ordinales. El aprendizaje y la mejor identificación de esta pieza por los grupos de mayor edad producen un aumento apreciable de dichos porcentajes.
- 8<sup>a</sup>. En las tareas quinta y sexta, en las que no hay coincidencia de estrategias, la estrategia DI es residual (subtablas 8.10(b) y (c)), mientras que la incidencia de la ID es elevada. En la quinta tarea la evolución de la estrategia ID es monótona creciente, alcanzando el 75% en el grupo 7A, reduciéndose su incidencia en la sexta tarea a partir de los 5 años de edad, con porcentajes que varían entre el 30% en el grupo 5AM y el 50% en el grupo 7A.
- 9<sup>a</sup>. En las tareas quinta y sexta predominan globalmente las estrategias no ordinales frente a las ordinales\* (57,9% frente al 38,2%, en la quinta tarea, y 45,9% frente al 39,4% en la sexta) debido a la influencia negativa de la estrategia izquierda–derecha a partir de los cuatro años y medio. Los grupos 4A y 4AM utilizan las estrategias ordinales en porcentajes comparables (quinta tarea) o algo inferiores (sexta tarea) a los correspondientes de los cuatro grupos de edad superior, en los que la incidencia de uso de la estrategia izquierda–derecha es alta.
- 10<sup>a</sup>. En la quinta tarea la incidencia de las estrategias ordinales (38,2%), entre las que predomina la creciente (32,9%), es igual al de la izquierda–derecha (38,2%) y ligeramente inferior al de las estrategias laterales (43,5%). En la sexta tarea predominan las estrategias ordinales (39,4%) frente a las laterales (30,2%) y, en particular, frente a la izquierda–derecha (27,6%), cuya incidencia es muy próxima a la de la estrategia creciente<sup>†</sup> (26,3%).
- 11<sup>a</sup>. A pesar del predominio mencionado en las dos conclusiones anteriores, los porcentajes de uso de las estrategias ordinales en las tareas quinta y sexta se pueden considerar elevados si tenemos en cuenta que los sujetos han respondido así de forma espontánea, sin información ordinal alguna.

\*En relación con la elevada incidencia de la estrategia decreciente en los tres grupos de menor edad, en la segunda tarea, véase lo indicado en el punto E.2, página 458.

\*Véanse las subtablas 8.11(b) y (c) en la página 457.

<sup>†</sup>Véanse de nuevo las tablas 8.10(b) y (c), y 8.11(b) y (c) en las páginas 454 y 457, respectivamente.

- 12<sup>a</sup>. La estrategia decreciente en las tareas quinta y sexta parece ser independiente de la edad, presentando una incidencia moderada, por lo que la tendencia evolutiva de las estrategias ordinales y la estrategia creciente coinciden y van en aumento hasta el grupo *5AM* en la quinta tarea y hasta el *6A\** en la sexta. A partir de los cinco años y medio los porcentajes disminuyen debido al aumento del uso de las estrategias laterales, decreciendo en la quinta tarea y estabilizándose en el 50% en la sexta. Resulta, por tanto, que el grupo *5AM* es singular<sup>†</sup> en lo que se refiere al desarrollo de las capacidades ordinales con cantidades continuas, lo que confirma los resultados del estudio exploratorio.
- 13<sup>a</sup>. En relación con las estrategias y los niveles en las tareas quinta y sexta:
- Los sujetos que alcanzan el *Nivel 1* usan las estrategias ordinales de modo incipiente, prevaleciendo en la quinta tarea las estrategias laterales y el ensayo y error y en la sexta las estrategias laterales (25%) y la no realización.
  - Los sujetos del *Nivel 2* usan las estrategias ordinales con mayor frecuencia, predominando ampliamente las estrategias laterales (un 61,3% en la quinta y un 51,6% en la sexta) y siendo las demás residuales, salvo la N (sin orden) en la sexta tarea.
  - Los sujetos del *Nivel 3* usan ampliamente las estrategias ordinales (81% en la quinta y 85,7% en la sexta), utilizando las demás con porcentajes pequeños.
- 14<sup>a</sup>. La mayor parte de los sujetos cambian de estrategia al resolver las tareas. Sin embargo, en casi todos los grupos de edad se encuentran algunos sujetos que mantienen la misma estrategia ordinal u ordinal-lateral en al menos tres tareas, no superando el 40% en cada grupo. Los sujetos que mantienen la estrategia en las tres últimas tareas se encuentran, únicamente, en los cuatro grupos de edad superior; dicho de otra forma, los mayores (a partir de los cinco años y medio) presentan una mayor tendencia a mantener la misma estrategia ordinal en las tareas más complejas.
- 15<sup>a</sup>. Los sujetos que mantienen la misma estrategia ordinal u ordinal-lateral en al menos tres tareas alcanzan los niveles 2 y 3 y todos los que lo hacen en las tres últimas tareas alcanzan el *Nivel 3*, por lo que mantener la misma estrategia parece ser característica de los niveles altos y condición suficiente, aunque no necesaria, para alcanzarlos ya

\*Véase la columna **TC** en las subtablas 8.11(b) y (c)

†El porcentaje de uso de las estrategias ordinales es máximo en este grupo, alcanzando el 60%.

que hay sujetos en el *Nivel 3* que como máximo mantienen en dos tareas la misma estrategia ordinal u ordinal–lateral.

### 8.6.2.3 En relación con las piezas sobrantes

- 1<sup>a</sup>. Las piezas sobrantes se han utilizado en todas las tareas individuales y en las combinaciones que se mencionan en la discusión, en una tendencia decreciente con el aumento de la edad (con valores pequeños o nulos en los tres grupos de mayor edad), lo que se debe a la mejor identificación de este tipo de piezas, a la menor incidencia de la estrategia de ensayo y error y a la evolución del aprendizaje y de las capacidades ordinales.
- 2<sup>a</sup>. Ningún sujeto utiliza la pieza sobrante en las cuatro tareas en las que interviene, mientras que la mitad de los sujetos, aproximadamente, no la utilizan en ninguna de las tareas. Asimismo, muy pocos sujetos usan la pieza sobrante en tres tareas, estando todos entre los cuatro años y medio y los cinco años y medio, y pocos lo hacen en dos, concentrándose en los dos grupos de edad inferior. Por otra parte, los que la utilizan en una tarea se encuentran mayoritariamente entre los cuatro y los cinco años de edad. Por último, la pieza sobrante se ha utilizado más en la cuarta tarea, la primera que presenta por primera vez tres huecos, al igual que ocurrió en el estudio exploratorio\*.
- 3<sup>a</sup>. Las piezas sobrantes se utilizan mayoritariamente por los sujetos con menores capacidades ordinales y menor edad, es decir, los sujetos de los grupos *3AM*, en las tareas cuarta y quinta, y *4A*, en la cuarta tarea, en cuyas respuestas predomina la estrategia de ensayo y error.
- 4<sup>a</sup>. El uso de la pieza sobrante decrece con la edad a partir de los cuatro años y medio en la tercera tarea, de los cuatro años en la cuarta y de los tres años y medio en la quinta tarea. Asimismo, su uso es menor en la tercera tarea y en los dos grupos de edad inferior que en los tres grupos siguientes. Esta evolución global muestra que la dificultad de las tareas para los grupos de menor edad es progresiva a medida que avanzan en las mismas y que disminuye al avanzar la edad, lo que pone de manifiesto su adecuación.
- 5<sup>a</sup>. Las asignaciones predominantes: pieza sobrante de menor longitud al hueco de menor longitud (tercera tarea) y pieza sobrante de mayor longitud al hueco de mayor longitud (tareas cuarta, quinta y sexta), permiten concluir que los grupos de edad intermedia, *4AM* a *5AM*,

\*Las tareas que introducen cambios o novedades incrementan de modo observable la *carga cognitiva intrínseca*, según la *teoría de la carga cognitiva*. Véase la sección 4.4.2, página 140, capítulo 4.

hacen asignaciones fundamentalmente correctas por comparación visual aproximada (sin llegar a realizarlas con precisión), lo que da lugar a errores y quizás, como consecuencia, a cierto incremento del uso de estrategias no ordinales en estos grupos de edad.

- 6<sup>a</sup>. Los intentos contradictorios solo se producen en dos tareas: la cuarta (en la que el número de huecos cambia de dos a tres) y la sexta (la más complicada). Estos intentos son meramente incidentales y muy probablemente debidos a pérdidas puntuales de atención o a fallos psicomotrices en el uso del ratón al “soltar” piezas accidentalmente en posiciones no deseadas.

#### 8.6.2.4 En relación con los modelos de ajuste

- 1<sup>a</sup>. Las medias de las valoraciones de los resultados por grupos de edad (*MedCC* (dependiente) y las edades de los grupos *EDG* (independiente)) se ajustan a dos modelos de regresión no lineal, denominados Inverso y de tipo S, con un excelente grado de precisión, independencia de errores y alta significación. Ello apoya la hipótesis de una evolución no lineal de la capacidad para establecer órdenes con cantidades continuas al aumentar la edad.
- 2<sup>a</sup>. El modelo de mayor grado de precisión y simpleza para la interpretación corresponde al modelo Inverso ( $R^2 = 0,961$ ,  $p = 0,000 < 0,05$ ), en el que las medias de los grupos aumentan con la edad según una rama de hipérbola con asíntota horizontal en la recta  $y = b_0 = 5,053$  (se recuerda que 5 es la valoración máxima en este bloque de tareas). Se puede afirmar que la capacidad para establecer órdenes con cantidades continuas se aproxima con notable precisión mediante el modelo evolutivo no lineal descrito, cuya velocidad decrece al aumentar la edad.
- 3<sup>a</sup>. El intervalo de edad en el que se produce la mayor variación y en el que se forman las capacidades correspondientes, es el de cuatro a cinco años y medio. De nuevo se incide en la necesidad de la actuación didáctica a lo largo de dicho periodo para prevenir y paliar los déficits y las dificultades que pueden aparecer en este aspecto ordinal y en los aspectos aritméticos que en él se apoyan.

## 8.7 Resultados y conclusiones relativos a las tareas de orden con cantidades discretas

Las tareas de orden con cantidades discretas, que se describen con detalle en el apartado 7.6.3\*, constituyen el conjunto de tareas correspondientes al tercer estado del modelo evolutivo propuesto<sup>†</sup>. Se trata de dos subconjuntos de 4 tareas cada uno, de las que la primera y la quinta son tareas introductorias al subconjunto respectivo y las seis restantes, las que aportan los datos para el estudio.

Al igual que en el estudio exploratorio, las tareas están secuenciadas según el grado de dificultad en cada uno de los dos subconjuntos. En el primero de ellos se trata de ordenar cantidades discretas (conjuntos discretos de frutas) y en el segundo se trata de construir secuencias ordenadas de escalones, pudiendo interpretarse éstos bien como cantidades discretas (número de escalones) o bien como cantidades continuas (longitudes o alturas de los escalones), a libre elección del sujeto. Las fichas técnicas respectivas, que incluyen la descripción completa, pueden examinarse en la subsección 7.6.3.2, página 382 y siguientes.

Recordamos que estas tareas, al igual que las anteriores, son de carácter no verbal, y que con ellas se pretende, como objetivo general, observar y evaluar en los sujetos la capacidad de establecer órdenes lógicos en conjuntos de cantidades discretas. Como objetivos específicos, se trata de: *a)* observar si el sujeto sigue o no de modo espontáneo estrategias ordinales en su resolución, *b)* identificar las edades en las que aparece espontáneamente el conteo como estrategia dominante en la asignación de posiciones ordinales, *c)* estudiar su evolución con la edad y *d)* analizar las relaciones entre las ordenaciones de cantidades discretas y continuas. Para ello se utilizan las representaciones indicadas para las cantidades discretas (o continuas–discretas), así como la noción de cardinal\* como *medida* de las cantidades discretas, si bien sólo a efectos de comparación y asignación de posiciones ordinales, sin que sea necesaria la representación simbólica del número en ninguno de sus aspectos cardinal u ordinal.

Además de los objetivos establecidos en el párrafo anterior, nuestro interés se centra también en la evolución del uso del conteo en la asignación de posiciones ordinales mediante estrategias crecientes o decrecientes y en el uso de las estrategias laterales (izquierda–derecha) en relación con las anteriores, sin olvidar la evolución de otras estrategias, la observación y análisis de las

---

\*Véase la página 377 y siguientes.

†Véase la página 307, Capítulo VI.

\*O cardinal frente a longitud o altura, en las tres últimas.

interrelaciones posibles y el estudio de la evolución de las relaciones entre las ordenaciones de las cantidades discretas y las continuas en las tres últimas tareas.

Para la realización del estudio, se han preparado tareas en las que el sujeto, en el nivel más evolucionado, debe realizar comparaciones haciendo intervenir relaciones ordinales tales como *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*, referidas a objetos que debe ordenar recurriendo a nociones intuitivas de número y secuencia numérica y utilizando la antisimetría y la transitividad para distinguir y ordenar las cantidades. En el primer subconjunto las ordenaciones se llevan a cabo mediante correspondencias uno a uno, mientras que en el segundo debe utilizarse la comparación directa de cardinales frente a longitudes o alturas.

### 8.7.1 Análisis y valoración de las respuestas.

En las subsecciones que siguen, utilizando las variables propias del orden con cantidades discretas (subsección 7.7.3, página 417 y siguientes), se analizan las frecuencias de las respuestas observadas, se definen y caracterizan los niveles hallados, se estudian las estrategias utilizadas y, finalmente, se determinan, al igual que para los conjuntos de tareas anteriores, los modelos de ajuste para las medias de las valoraciones por grupos de edad.

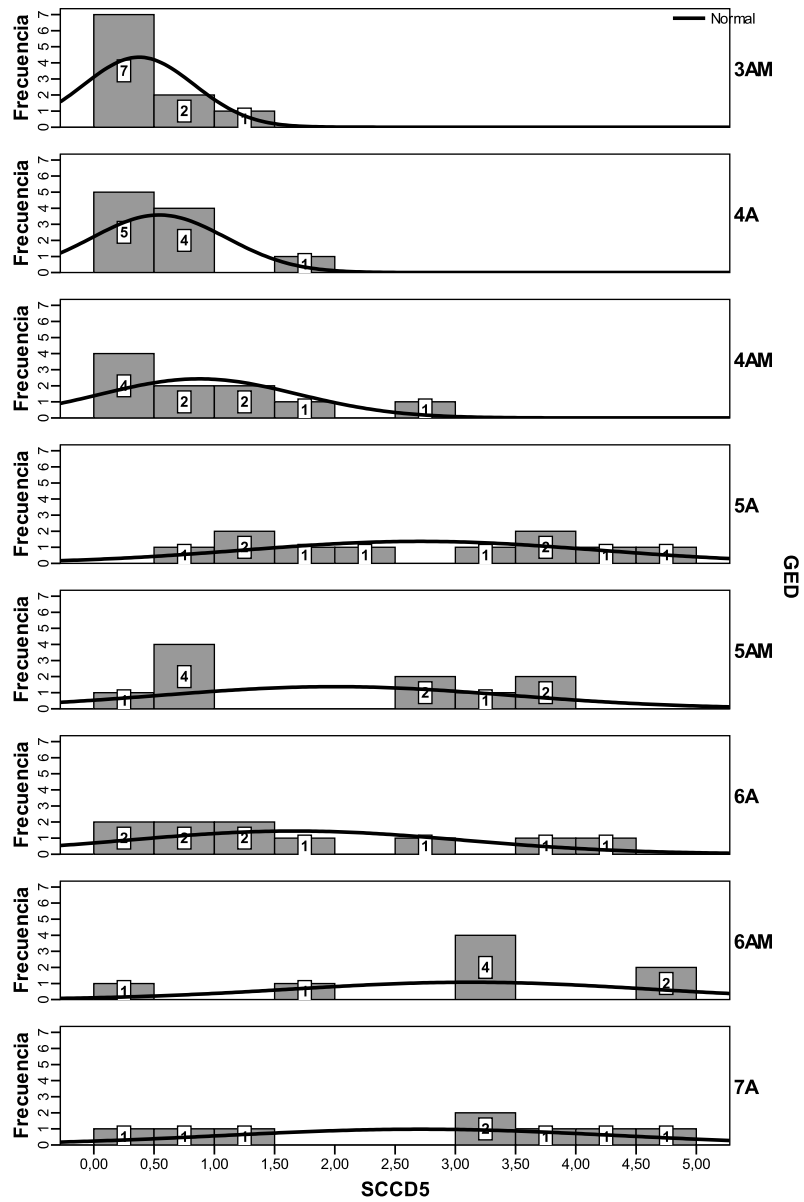
#### 8.7.1.1 Distribuciones de frecuencias en las respuestas

En el conjunto de histogramas de la Figura 8.5 se observa la clasificación, por grupos de edad, de los valores de la variable **SCCD5** para los sujetos de la muestra, donde las líneas continuas en color negro indican, de nuevo, las distribuciones normales aproximadas correspondientes a cada grupo de edad.

De la lectura directa de dichos gráficos se aprecian los siguientes resultados:

- La evolución con la edad de las competencias ordinales con cantidades discretas se produce lentamente y con una considerable dispersión a partir de los cinco años de edad, correspondiendo los grados más bajos a los tres primeros grupos de edad.
- La evolución de esta variable es más lenta que la de la variable correspondiente a los dos conjuntos de tareas anteriores, lo que contribuye a la validez del modelo propuesto. La dispersión es mayor, especialmente en relación con la correspondiente al caso del orden con cantidades continuas, lo que confirma también una evolución más lenta y menos homogénea del fenómeno.



Fig. 8.5. Frecuencias de valores de *SCCD5* por grupos de edad

- A los cinco años de edad se produce un salto brusco hacia los valores superiores a 3, lo que sucede para el 50% de los sujetos de dicho grupo

de edad. Ello se puede interpretar en el sentido de que a dicha edad un número elevado de sujetos comienzan a resolver el segundo subconjunto de tareas discriminando cantidades continuas y discretas y aplicando estrategias y competencias propias del orden con cantidades discretas, lo que no se observa en edades anteriores.

- En los grupos *5AM* y *6A*, las competencias disminuyen al 30% y al 20%, respectivamente, y la evolución se consolida en los dos grupos de edad superior con porcentajes del 75% y 62,5%, respectivamente, siendo mayoritario el desarrollo de estas competencias.
- En las distribuciones por grupos de edad se observan asimetrías positivas en todos los grupos, salvo en los dos de edad superior, en los que la asimetría es negativa. Esto indica que en los seis grupos de menor edad se encuentran sujetos con valores de la variable superiores a la media, sucediendo lo contrario en los dos grupos de mayor edad\*.

Por otra parte, los datos de la tabla 8.19 no permiten descartar la hipótesis de normalidad en las distribuciones (**Sig**>**0.05**), salvo en los grupos de edad *3AM*, *5AM* y *6AM* (**Sig**<**0.05**), según el test de Kolmogorov–Smirnov, y, con mayor precisión, en los grupos *3AM*, *4A* y *5AM* (**Sig**<**0.05**) según el test de Shapiro–Wilk. Por tanto, no se puede descartar la normalidad de las distribuciones para la mayoría de los grupos de edad, resultado coincidente con el del caso del orden con cantidades continuas y en contraste con el caso del orden lineal en los que los dos únicos grupos para los que no se podía descartar la normalidad eran *4AM* y *7A*<sup>†</sup>.

GED	Kolmogorov–Smirnov			Shapiro–Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
3AM	,293	10	,015	,810	10	,019
4A	,234	10	,127	,835	10	,039
4AM	,157	10	,200	,914	10	,307
5A	,166	10	,200	,916	10	,325
5AM	,289	10	,018	,835	10	,038
6A	,218	10	,196	,897	10	,204
6AM	,306	8	,026	,894	8	,255
7A	,275	8	,076	,875	8	,169

Tabla 8.19: Test de normalidad de la variable *SCCD5* por grupos de edad.

\*Lo que significa que, globalmente, las tareas han resultado ser relativamente complicadas para los seis grupos de menor edad y relativamente sencillas para los dos grupos de mayor edad; y son adecuadas, por tanto, para el intervalo de edad estudiado.

<sup>†</sup>Véanse las tablas 8.3 y 8.7, en las páginas 434 y 444 respectivamente.

En la tabla 8.20 se recogen los estadísticos más comunes de la variable *SCCD5* por grupos de edad, observándose un lento crecimiento de las medias y medianas en los tres primeros grupos de edad, seguido de un aumento importante en el grupo 5A. A partir de ahí, se observan descensos claros en los dos grupos de edad siguientes y aumentos, también claros, en los dos grupos de edad superior en los que parecen estabilizarse los resultados. La situación descrita está en completo acuerdo con los resultados obtenidos en el estudio exploratorio, en el que se observa que la edad alrededor de los cinco años es crítica en las destrezas para establecer órdenes con cantidades discretas, estancándose o retrocediendo a los cinco años y medio y los seis años y volviendo a progresar progresar de modo más o menos estable a partir de los seis años y medio. Asimismo, se confirma la lenta evolución y el posible carácter no lineal del progreso.

GED	Media	Med.	Desv. típ.	Rango	Asimetría	Curtosis
3AM	,375	,208	,459	1,25	,863	-,522
4A	,542	,625	,557	1,67	,711	,130
4AM	,875	,833	,821	2,50	,701	,095
5A	2,710	2,710	1,460	4,17	,155	-1,584
5AM	2,00	1,875	1,454	3,75	,013	-2,057
6A	1,667	1,250	1,389	4,17	,900	-,259
6AM	3,125	3,333	1,477	4,58	-,782	,514
7A	2,708	3,333	1,621	4,17	-,465	-1,783
<b>Total</b>	1,689	1,250	1,520	5,00	,652	-,938

Tabla 8.20: Estadísticos de la variable *SCCD5* por grupos de edad.

Si se comparan los estadísticos de la variable *SCCD5* con los de las variables *SumaL* y *SumaCC\**, correspondientes al orden lineal y al orden con cantidades continuas, se observa una evolución más lenta de las capacidades ordinales en este grupo de tareas y una tendencia convergente hacia valores muy similares de las medias y medianas en los dos grupos de mayor edad, lo que de nuevo confirma la bondad del modelo evolutivo propuesto. Además, los rangos y las desviaciones típicas son similares a los del orden lineal y superiores a los del orden con cantidades continuas, especialmente para los cinco grupos de edad superior, presentando una tendencia prácticamente creciente al aumentar la edad. Todo ello indica que la evolución es menos homogénea que en el caso del orden con cantidades continuas, hasta el punto

\*Vénase las tablas 8.4 y 8.8, en las páginas 436 y 447 respectivamente.

de que la variable *SCCD5* sigue teniendo menores o iguales que 2 a partir de los cinco años (Figura 8.5), lo que expresa, a nuestro juicio, un déficit no despreciable en la capacidad de los sujetos de la muestra para ordenar cantidades discretas. En estas tareas los valores del intervalo [2, 3] han resultado ser transitorios (entre los cuatro años y medio y los seis años) y su frecuencia se anula en los dos grupos de mayor edad.

El cambio de signo en las asimetrías, de positivo a negativo, en los dos grupos de edad superior indica que el aumento en la capacidad para establecer órdenes con cantidades discretas se acelera en dichos grupos de edad, en los que aún se encuentran sujetos con valoraciones significativamente inferiores a la media.

El predominio de las curtosis negativas en los cinco grupos de edad superior indica una variabilidad acusada de los datos correspondientes y una evolución poco homogénea de estas competencias, resultado que contrasta con el obtenido en el caso del orden lineal, en el que dicha variabilidad se produce a partir de los cuatro años y que viene a indicar de nuevo la posterior formación de la capacidad de los sujetos para establecer órdenes con cantidades discretas.

#### 8.7.1.2 Caracterización y estudio de los niveles.

Los niveles de competencia ordinal con cantidades discretas se definen a partir de los valores de las variables *SCCD5*, ya descrita, *EvCDi*, que describen las competencias en estudio, y *CoefCD*, que discrimina las respuestas que utilizan la cantidad discreta de las que no la utilizan en el segundo subconjunto de tareas. La tabla D.1, página 734 y siguientes, recoge los valores de las variables citadas.

Teniendo en cuenta dichas variables se establecen los niveles que figuran en la sección 7.7.3, página 417, y que caracterizamos a continuación de la siguiente forma\*:

**Nivel 1.** Ordenación por cantidades discretas de dos series de objetos, como máximo, de las seis propuestas. Corresponde a  $SCCD5 \in [0, 2]$ .

---

\*El significado de los términos *ordenación incompleta* y *ordenación completa* se detalla también en la misma sección que se cita.

Las respuestas que situamos en el *nivel 1* se caracterizan por ordenar, como máximo, dos de las series más sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, llegando a reconocer, en el mejor de los casos, las cantidades discretas de forma aislada solo en algunas tareas de uno o de los dos subconjuntos.

**Nivel 2.** Ordenación completa o incompleta por cantidades discretas de más de dos y menos de cuatro series de objetos de las seis propuestas. Corresponde a  $SCCD5 \in (2, 3]$ .

Las respuestas que situamos en el *nivel 2* se caracterizan por ordenar, como máximo, tres series de cantidades discretas de forma completa o cuatro de forma incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando las cantidades discretas solo en uno de los dos subconjuntos de tareas o comenzando a reconocerla en ambos subconjuntos.

**Nivel 3.** Ordenación por cantidades discretas de cuatro o más series de objetos de las seis propuestas. Corresponde a  $SCCD5 \in (3, 5]$ .

Las respuestas que situamos en el *nivel 3* se caracterizan por ordenar al menos cuatro series de cantidades discretas de forma completa o más de cuatro de forma completa o incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando las cantidades discretas en los dos subconjuntos de tareas.

Tenemos que indicar que el término *ordenar* significa, en el primer subconjunto de tareas, establecer correspondencias seriales que conservan el orden entre los conjuntos de frutas y los conjuntos de huecos en los árboles, lo cual implica que el sujeto debe identificar el primer o el último elemento de uno de dichos conjuntos, según la estrategia elegida (creciente o decreciente), asignar el conjunto de frutas al hueco correspondiente y proceder ordenadamente con los siguientes, es decir, ordenar previamente frutas y huecos para establecer finalmente la correspondencia. En el segundo subconjunto de tareas, *ordenar* significa continuar ordenadamente la serie de bloques de escalones, por lo que los niveles definidos no solo clasifican las respuestas de los sujetos en relación con la capacidad de ordenar cantidades discretas sino,

más aún, la de *establecer correspondencias seriales que conservan el orden* con cantidades discretas.

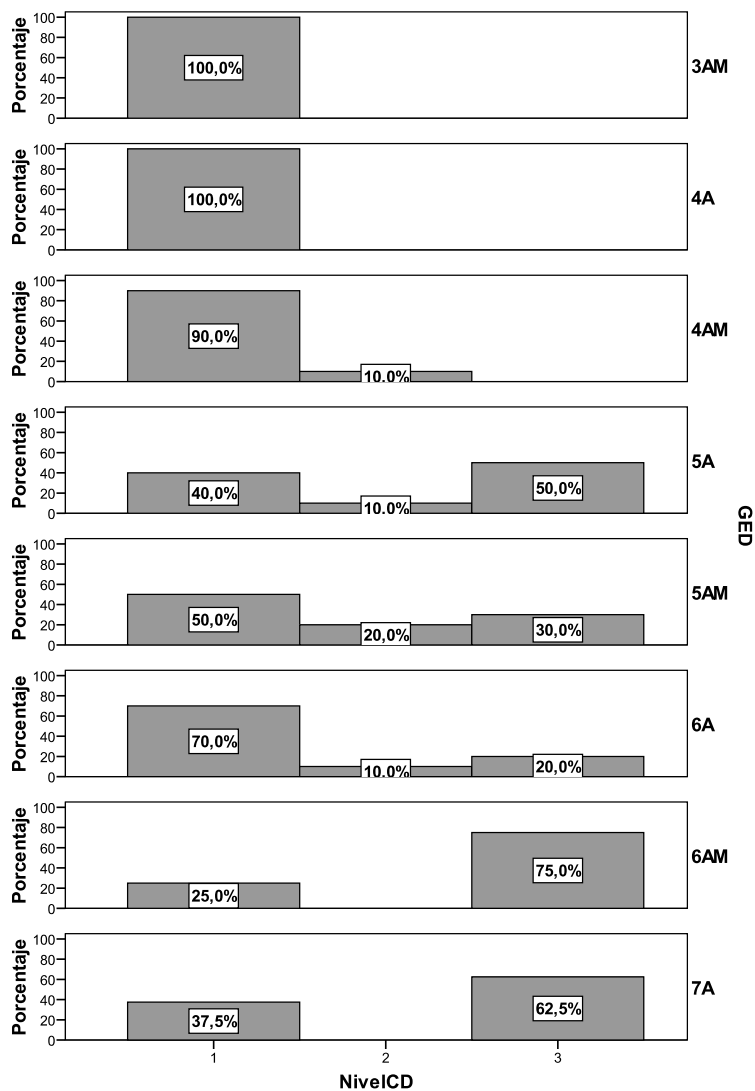


Fig. 8.6. Evolución de los niveles en orden con cantidades discretas por grupos de edad.

La clasificación de las respuestas por niveles puede verse en la tabla D.2, página 736 y siguientes, y la evolución de los niveles, en porcentajes por

grupos de edad, en los histogramas de la Figura 8.6, en los que se observa que:

- El **Nivel 1** es mayoritario en los tres grupos de edad inferior (*3AM*, *4A* y *4AM*), con porcentajes del 100% en los dos primeros y el 90% en el tercero, disminuyendo bruscamente hasta el 40% en el siguiente grupo de edad (*5A*), para aumentar en los dos grupos siguientes (*5AM* y *6A*) y reducirse significativamente, sin llegar a desaparecer, en los dos grupos de mayor edad (*6AM* y *7A*). Es un nivel persistente en todo el intervalo de edad estudiado, incluso en los grupos de mayor edad, lo que puede ser indicativo de posibles déficits que reclaman tratamientos didácticos específicos que permitan paliar o eliminar las disfunciones.
- El **Nivel 2**, claramente transitorio, comienza en el grupo *4AM* con el 10% de los casos, se mantiene con valores similares que no superan el 20% en los tres grupos de edad siguientes (*5A*, *5AM* y *6A*), y desaparece en los dos grupos de mayor edad.
- El **Nivel 3** comienza a los cinco años de edad (grupo *5A*) con un porcentaje del 50% que decrece en los dos grupos de edad siguientes (*5AM* y *6A*), hasta el 30% y el 20% respectivamente, y aumenta en los dos grupos de edad superior hasta el 75% y el 62,5% respectivamente.

Podemos concluir, por tanto, que en el periodo entre los tres años y medio y los cuatro años se encuentra en formación la capacidad de ordenar y de establecer correspondencias seriales que conservan el orden con cantidades discretas, siendo los sujetos capaces de ordenar series sencillas de dos o tres objetos, identificando las cantidades discretas sólo de forma aislada.

A los cuatro años y medio se inicia una mejor identificación de la cantidad discreta, reconociendo su intervención solo parcialmente, y comenzando a ordenar series de cuatro objetos.

Entre los cinco y los seis años de edad, los sujetos comienzan a identificar plenamente la intervención de la cantidad discreta en todas las situaciones, si bien, de manera no estable con una disminución apreciable de dicha identificación a los seis años. Resulta evidente que el intervalo de cinco a seis años es crítico en lo que se refiere al desarrollo de esta competencia ordinal.

Finalmente, la gran mayoría de los sujetos de seis años y medio a siete años identifican la cantidad discreta en todas las situaciones y utilizan la capacidad de ordenar y de establecer correspondencias seriales que conservan el orden con cantidades discretas en series de hasta cinco objetos.

Los resultados anteriores confirman los obtenidos en el estudio explora-

torio\* e inciden en el hecho de que esta capacidad presenta una evolución no lineal que alcanza su formación completa en edades posteriores a las correspondientes a la cantidad continua y el orden lineal, lo que confirma el modelo evolutivo propuesto.

A modo de resumen se muestra la síntesis del estudio y la caracterización de los niveles en la tabla 8.21.

Nivel	Caracterización	Edad
1	Capacidad de ordenar, como máximo, dos series sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, reconociendo las cantidades discretas solo en tareas aisladas.	Los mayores porcentajes se dan para sujetos entre <i>tres años y medio y cuatro años y medio</i> , disminuyendo a partir de los cinco años y permaneciendo significativamente incluso a las edades de seis años y medio y siete años.  La aparición en edades superiores a los seis años puede indicar un déficit en la capacidad para ordenar cantidades discretas.
2	Capacidad de ordenar, como máximo, tres series de cantidades discretas de forma completa o cuatro de forma incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando la intervención de las cantidades discretas solo en uno de los dos subconjuntos de tareas o comenzando a reconocerla en ambos subconjuntos. Inicio de la capacidad de ordenar series de cantidades discretas de cuatro objetos.	Este nivel comienza a manifestarse para los sujetos de <i>cuatro años y medio</i> , presentando su mayor incidencia a los <i>cinco años y medio</i> y anulándose en los dos grupos de edad superior.  Los porcentajes correspondientes a este nivel no superan el 20%, manifestándose como un nivel claramente transitorio.

\*En sentido de que las edades alrededor de los cinco años son críticas en lo que se refiere a la adquisición de un mayor dominio de esta capacidad ordinal, confirmándose su estancamiento o retroceso entre los cinco años y medio y los seis años



<b>3</b>	Capacidad alta o plena para ordenar series de cantidades discretas de forma completa o incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando la intervención de las cantidades discretas en cualquiera de las situaciones tratadas.	Los porcentajes son mayoritarios a los <i>seis años y medio</i> y <i>siete años</i> (75% y 62,5% respectivamente), alcanzando su valor máximo a los seis años y medio (75%). Este nivel parece estabilizarse en los dos grupos de edad superior, comenzando a manifestarse clara y bruscamente a los cinco años, si bien de forma no estable.  Ello es indicativo de la posible evolución no lineal al aumentar la edad de los sujetos.
----------	--	---

Tabla 8.21: Caracterización de los niveles en las tareas de orden con cantidades discretas.

### 8.7.1.3 Análisis de las estrategias

Los datos correspondientes a las estrategias utilizadas por los sujetos en la resolución del conjunto de tareas de orden con cantidades discretas se recogen en las tablas D.3, D.4 y D.5, página 739 y siguientes, del anexo D, mientras que los valores de las variables que aparecen en la cabecera de las columnas se detallan en la sección 7.7.3\*. En la tabla D.3 se recogen las estrategias observadas junto con los valores correspondientes de las variables *SCCD5* y *NivelCD*; la tabla D.4 recoge dichas estrategias clasificadas según los valores de la variable *SCCD5*, mientras que la tabla D.5 las clasifica según los valores de la variable *NivelCD*.

Por otra parte, las tablas 8.22 y 8.22 recogen los porcentajes por grupos de edad de cada una de las estrategias en cada una de las tareas del conjunto analizado. Las columnas en las que aparece la letra o prefijo *C* designan las estrategias crecientes, mientras que la *D* hace alusión a las decrecientes. El número que acompaña a dichas letras (1, 2, 3) indica que en la estrategia correspondiente se han producido ese número de errores y que se tendrán en cuenta en las tareas indicadas. Las etiquetas *PDI*, *PID*, *PIDI* y *PID-D* indican, respectivamente, que el sujeto utiliza las piezas móviles<sup>†</sup> de izquierda a derecha, de derecha a izquierda o primero de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda o que comienza colocando la primera pieza de izquier-

\*Véase la página 417 y siguientes, capítulo 7.

<sup>†</sup>En relación con estas estrategias, véase la subsección 5.10.2.1, página 258 y siguientes, Estudio Exploratorio.

da a derecha combinándola luego con la estrategia decreciente. Igualmente *ADI*, *AID*, *EE*, *N* y *X*, designan, respectivamente, las estrategias derecha-izquierda, izquierda-derecha, ensayo y error, ninguna y tarea no realizada. Todas las estrategias se agruparán posteriormente en las tablas 8.24 y 8.25 en ordinales (C, C1, C2, C3, D, D1, D2, D3), laterales (PDI, PID, ADI, AID, PIDI, PID-D), no laterales (EE, N) y no ordinales (PDI, PID, ADI, AID, PIDI, PID-D, EE, N). A todas estas estrategias las llamaremos estrategias *locales*, ya que se utilizan en las tareas individuales.

Además de las estrategias locales analizaremos también el uso de las que denominaremos estrategias *globales* y sus interacciones\* con las primeras. Las estrategias globales se corresponden con las respuestas a las preguntas del cuestionario† que se plantea al finalizar cada uno de los dos subconjuntos de tareas. Son globales en la medida en que las cuestiones se refieren a todas las tareas del subconjunto correspondiente. Las tablas D.6 y D.7 (anexo D, pp. 747 y 751) recogen dichas estrategias junto con su codificación‡ (variables *Cod 2-4* y *Cod 6-8*). La tabla D.7 incluye también los valores de la variable *CoefCD*, que indica el grado en el que el sujeto manifiesta reconocer y usar la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas§.

Hemos de advertir que en todas las tareas, salvo en la cuarta que distinga todas las estrategias, coinciden la estrategia creciente con la izquierda-derecha y la decreciente con la derecha-izquierda. No obstante, como se observó en el estudio exploratorio y se vuelve a constatar ahora, la lateralidad en este conjunto está representada fundamentalmente por las estrategias *PDI*, *PID*, *PIDI* y *PID-D*, siendo escasa la influencia de las estrategias *ADI* y *AID* (derecha-izquierda e izquierda-derecha puras) como puede observarse en las respectivas columnas de la subtabla 8.22(c)¶, que muestran su uso en la cuarta tarea. Por ello, teniendo en cuenta la escasa incidencia de este hecho en las estrategias ordinales, decidimos no tenerlo en cuenta en el análisis. Comenzamos, por tanto, con el análisis del uso de las estrategias locales, para pasar a continuación a examinar el de las estrategias globales; finalmente, se estudia la interacción entre ambos tipos de estrategias.

Del examen detallado de las tablas 8.22, 8.23, 8.24 y 8.25, destacamos los siguientes resultados.

\*Nótese que el estudio de dicha interacción es importante, ya que determina, por ejemplo, si un sujeto utiliza o no el conteo en la asignación de posiciones ordinales.

†Las preguntas se formulan cuando el sujeto finaliza las tareas 3ª, 4ª, 7ª y 8ª. Véase la página 399.

‡La descripción y codificación de estas estrategias de realizó en la sección 7.7.3, página 421, capítulo 7.

§Véase de nuevo la sección 7.7.3, página 417 y siguientes, capítulo 7.

¶De acuerdo con las conclusiones obtenidas para el conjunto anterior, nótese que su presencia se reduce a los grupos de edad intermedia o superior

(a)

GED	ECD2					
	C	C1	D	PDI	PID	EE
3AM	0	30	20	10	10	30
4A	10	0	10	20	20	40
4AM	0	40	10	40	0	10
5A	40	0	0	40	10	10
5AM	20	10	10	60	0	0
6A	10	10	10	40	10	20
6AM	25	25	12,5	25	0	12,5
7A	37,5	37,5	12,5	0	0	12,5
<b>Total</b>	17,1	18,4	10,5	30,3	6,6	17,1

(b)

GED	ECD3									
	C	C1	C2	C3	D	PDI	PID	EE	N	X
3AM	20	0	0	0	0	20	10	40	0	10
4A	20	0	0	10	0	30	10	10	10	10
4AM	40	10	0	10	0	40	0	0	0	0
5A	30	40	10	0	0	20	0	0	0	0
5AM	30	0	0	0	10	50	0	10	0	0
6A	30	20	0	0	10	40	0	0	0	0
6AM	12,5	37,5	0	0	12,5	37,5	0	0	0	0
7A	12,5	25	12,5	0	0	37,5	12,5	0	0	0
<b>Total</b>	25,0	15,8	2,6	2,6	3,9	34,2	3,9	7,9	1,3	2,6

(c)

GED	ECD4													
	C	C1	C2	C3	D	D2	ADI	AID	PDI	PID	PIDI	EE	N	X
3AM	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	80
4A	20	10	0	0	0	0	0	0	0	20	0	20	0	30
4AM	10	20	10	10	0	10	0	0	0	20	0	10	10	0
5A	40	30	0	0	0	0	0	10	10	0	0	10	0	0
5AM	40	20	0	0	0	0	0	10	20	10	0	0	0	0
6A	30	30	20	0	0	0	0	10	0	0	0	10	0	0
6AM	25	12,5	0	0	25	12,5	0	12,5	12,5	0	0	0	0	0
7A	25	50	0	0	0	0	12,5	0	0	0	12,5	0	0	0
<b>Total</b>	23,7	22,4	3,9	1,3	2,6	2,6	1,3	5,3	5,3	6,6	2,6	6,6	1,3	14,5

Tabla 8.22. Porcentajes de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Primer subconjunto. (a) Tarea segunda; (b) tercera tarea; (c) cuarta tarea.

(a)

GED	ECD6		
	C	D	EE
3AM	70	20	10
4A	70	20	10
4AM	70	20	10
5A	80	10	10
5AM	90	10	0
6A	90	10	0
6AM	75	12,5	12,5
7A	75	25	0
<b>Total</b>	77,6	15,8	6,6

(b)

GED	ECD7									
	C	C1	C2	D	D1	PID-D	PID	EE	N	X
3AM	0	0	10	0	0	0	0	50	10	30
4A	10	20	10	0	10	0	10	30	10	0
4AM	20	0	0	30	10	0	0	10	30	0
5A	80	0	0	0	0	10	0	10	0	0
5AM	80	0	0	10	0	0	10	0	0	0
6A	60	0	0	30	0	10	0	0	0	0
6AM	75	0	0	0	0	25	0	0	0	0
7A	87,5	0	0	12,5	0	0	0	0	0	0
<b>Total</b>	50	2,6	2,6	10,5	2,6	5,3	2,6	13,2	6,6	3,9

(c)

GED	ECD8										
	C	C1	C2	C3	D	D1	D3	PID	EE	N	X
3AM	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	80
4A	10	0	0	0	0	0	0	10	40	10	30
4AM	20	10	0	0	10	0	0	0	50	10	0
5A	60	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5AM	70	0	0	0	10	10	0	0	10	0	0
6A	40	0	20	10	10	0	0	0	20	0	0
6AM	75	0	12,5	12,5	0	0	0	0	0	0	0
7A	87,5	0	0	0	0	0	12,5	0	0	0	0
<b>Total</b>	43,4	1,3	3,9	2,6	3,9	1,3	1,3	1,3	23,7	2,6	14,5

Tabla 8.23. Porcentajes de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Segundo subconjunto. (a) Tarea Sexta; (b) séptima tarea; (c) octava tarea.

**A) No realización de las tareas. Estrategia X.**

Se constata que también son los sujetos de 3 años y medio y 4 años los que no resuelven las tareas de mayor dificultad, es decir, la 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>; la no realización es altamente significativa en el grupo de menor edad en las tareas 4<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>, las de dificultad máxima.

**B) Ninguna estrategia definida. Estrategia N.**

Se trata de una estrategia *N* (ninguna) que aparece también en las tareas de mayor dificultad, es decir, en la 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>, en las que solamente se observa en los tres grupos de menor edad en porcentajes pequeños del 10 %, salvo puntualmente en el grupo *4AM* en la 7<sup>a</sup> tarea, cuyo porcentaje alcanza el 30 %.

Esta estrategia presenta una incidencia nula en los grupos de edad superior a cuatro años y medio y escasa o muy escasa en los demás grupos.

**C) Ensayo y error. Estrategia EE.**

Aparece en la 2<sup>a</sup> tarea en todos los grupos de edad salvo en el *5AM*, presentando una evolución que es prácticamente monótona decreciente en todas las tareas salvo en la octava\*, al aumentar la edad de los sujetos, y tendiendo a anularse en los grupos de edad superior†.

La aparición de la pieza sobrante en las tareas tercera y octava provoca un aumento apreciable de esta estrategia en los grupos de edad inferior a seis años y medio. Los mayores porcentajes (alrededor del 50 %) se dan en los tres grupos de menor edad (especialmente en las tareas 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>), mientras que los porcentajes globales para toda la muestra decrecen monótonamente desde la segunda tarea (17,1 %) a la cuarta (6,6 %) y crecen monótonamente desde la sexta tarea (6,6 %) a la octava (23,7 %).

Por otra parte, las estrategias no laterales (*N*, *EE*) presentan una evolución similar a la de ensayo y error, decreciente en todas las tareas al avanzar la edad y presente en todos los grupos de edad inferior a cinco años y medio, en los que alcanza en las tareas más complicadas porcentajes del 30 % al 50 %.

La incidencia global del ensayo y error decrece del 17,1 % al 7,9 %, en

\*El comportamiento peculiar de esta estrategia en la octava tarea se debe a la disminución de los porcentajes de incidencia en los dos grupos de edad inferior, disminución que es debida al aumento de los respectivos porcentajes de no realización de dicha tarea en ambos grupos.

†De hecho se anula en los dos grupos de edad superior y en las tareas de mayor dificultad, que exigen mayor concentración.

las tareas 2<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> (por el aprendizaje) y crece del 6,6% al 26,3% en las tareas 6<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> (debido a su progresiva dificultad y a la aparición de una pieza sobrante en la 8<sup>a</sup>). Por tanto, su incidencia es mayor en el segundo subconjunto de tareas.

#### D) Estrategias laterales (ADI, AID, PDI, PID, PIDI, PID-D).

Las estrategias derecha-izquierda *ADI* e izquierda-derecha *AID* solamente se distinguen en la cuarta tarea. El uso de la primera se reduce al grupo de mayor edad (12,5%) y el de la segunda, es muy moderado (con porcentajes alrededor del 10%) y se reduce a los grupos entre los cinco y los seis años y medio de edad, lo que nos lleva a pensar que la lateralidad en este conjunto de tareas se manifiesta mediante las demás estrategias laterales\*.

1. El uso de la estrategia *PIDI* es meramente incidental y se reduce a la cuarta tarea a los dos grupos de menor y de mayor edad. En cuanto a la estrategia *PID-D*, su uso se reduce a la séptima tarea en los grupos de cinco a seis años y medio, siendo remarcable su uso solamente en el grupo *6AM* con un porcentaje del 25%. Creemos que los sujetos que utilizan esta última estrategia lo hacen de forma transitoria hacia las estrategias ordinales.
2. La estrategia *PDI* se utiliza como estrategia dominante en las tareas segunda y tercera (con porcentajes globales del 30,3% y 34,2%) y por los sujetos de cuatro años y medio a seis años (con porcentajes del 20% al 60%), alcanzando su máximo en el grupo *5AM* con porcentajes respectivos del 60% y el 50%. En la cuarta tarea su uso es bastante más moderado, estando presente solo en los grupos de cinco a seis y medio, alcanzando su máximo, de nuevo, en el grupo *5AM* con un porcentaje del 20%. Esta estrategia desaparece sorprendentemente en las tres últimas tareas (quizá debido al aprendizaje o al sentido de la marcha del personaje, que tiene lugar de izquierda a derecha).
3. La estrategia *PID* aparece en todas las tareas salvo en la sexta (por los motivos indicados) con porcentajes que no superan el 20% en ningún grupo de edad, siendo empleada principalmente por los sujetos entre los tres años y medio y los cuatro años y medio.

\*A excepción de la sexta tarea en la que, por su simplicidad (solo dos piezas movibles), no se han manifestado

4. En conjunto, las estrategias laterales tienen una presencia muy relevante en las tareas de la 2<sup>a</sup> a la 4<sup>a</sup> con porcentajes globales del 36,9%, 38,1% y 21,1%, respectivamente, mientras que su presencia en las tareas de la 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup> es escasa. Nótese que en la cuarta tarea, de mayor complejidad, la incidencia de estas estrategias se reduce prácticamente a la mitad en beneficio de las estrategias ordinales, creemos que el aprendizaje y la mayor complejidad de esta tarea parecen estimular el uso de estas últimas.
5. En el primer subconjunto de tareas las estrategias laterales están presentes en todos los grupos de edad, alcanzándose los porcentajes máximos en el grupo 5AM en las tres tareas, con valores respectivos del 60%, 50% y 40% y con valores inferiores en los grupos de edad siguientes. La mayor incidencia de estas estrategias en los grupos 5AM y 6A, especialmente en las tareas 2<sup>a</sup> y 3<sup>a</sup>, contribuye a una evolución no lineal de las valoraciones al aumentar la edad, al igual que sucede en el caso de las tareas de orden con cantidades continuas.
6. En el segundo subconjunto de tareas, la incidencia de las estrategias laterales es poco relevante, con excepción del grupo 6AM en el que alcanza (puntualmente) el 25% en la séptima tarea.
7. Globalmente, como puede observarse, la mayor incidencia de estas estrategias se produce entre los cuatro y los seis años de edad.

(a)

ECD2						
GED	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	30	20	50	20	30	50
4A	10	10	20	40	40	80
4AM	40	10	50	40	10	50
5A	40	0	40	50	10	60
5AM	30	10	40	60	0	60
6A	20	10	30	50	20	70
6AM	50	12,5	62,5	25	12,5	37,5
7A	75	12,5	87,5	0	12,5	12,5
<b>Total</b>	35,5	10,5	46	36,9	17,1	54

(b)

ECD3						
GED	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	20	0	20	30	40	70
4A	30	0	30	40	20	60
4AM	60	0	60	40	0	40
5A	80	0	80	20	0	20
5AM	30	10	40	50	10	60
6A	50	10	60	40	0	40
6AM	50	12,5	62,5	37,5	0	37,5
7A	50	0	50	50	0	50
<b>Total</b>	46	3,9	49,9	38,1	9,2	47,3

(c)

ECD4						
GED	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	10	0	10	10	0	10
4A	30	0	30	20	20	40
4AM	50	10	60	20	20	40
5A	70	0	70	20	10	30
5AM	60	0	60	40	0	40
6A	80	0	80	10	10	20
6AM	37,5	37,5	75	25	0	25
7A	75	0	75	25	0	25
<b>Total</b>	51,3	5,2	56,5	21,1	7,9	29

Tabla 8.24. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Primer subconjunto. (a) segunda tarea; (b) tercera tarea; (c) cuarta tarea.



(a)

ECD6						
GED	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	70	20	90	0	10	10
4A	70	20	90	0	10	10
4AM	70	20	90	0	10	10
5A	80	10	90	0	10	10
5AM	90	10	100	0	0	0
6A	90	10	100	0	0	0
6AM	75	12,5	87,5	0	12,5	12,5
7A	75	25	100	0	0	0
<b>Total</b>	<b>77,6</b>	<b>15,8</b>	<b>93,4</b>	<b>0</b>	<b>6,6</b>	<b>6,6</b>

(b)

ECD7						
GED	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	10	0	10	0	60	60
4A	40	10	50	10	40	50
4AM	20	40	60	0	40	40
5A	80	0	80	10	10	20
5AM	80	10	90	10	0	10
6A	60	30	90	10	0	10
6AM	75	0	75	25	0	25
7A	87,5	12,5	100	0	0	0
<b>Total</b>	<b>55,2</b>	<b>13,1</b>	<b>68,3</b>	<b>7,9</b>	<b>19,8</b>	<b>27,7</b>

(c)

ECD8						
GED	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
3AM	0	0	0	0	20	20
4A	10	0	10	10	50	60
4AM	30	10	40	0	60	60
5A	60	0	60	0	40	40
5AM	70	20	90	0	10	10
6A	70	10	80	0	20	20
6AM	100	0	100	0	0	0
7A	87,5	12,5	100	0	0	0
<b>Total</b>	<b>51,2</b>	<b>6,5</b>	<b>57,7</b>	<b>1,3</b>	<b>26,3</b>	<b>27,6</b>

Tabla 8.25. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas en las tareas de Orden con cantidades discretas por grupos de edad. Segundo subconjunto. (a) sexta tarea; (b) séptima tarea; (c) octava tarea.

**E) Estrategias no ordinales (laterales y no laterales).**

1. Estas estrategias sólo son dominantes frente a las ordinales en la segunda tarea (54% frente al 46%), igualándose prácticamente en la tercera tarea (47,3% frente al 49,9%). En las restantes tareas su uso es notablemente inferior al de las estrategias ordinales, lo que se puede explicar gracias al aprendizaje, la mejor identificación de las estrategias ordinales y la menor participación de los dos grupos de menor edad en las tareas de mayor dificultad.
2. Como se ha indicado anteriormente, las estrategias laterales han tenido una mayor presencia en el primer subconjunto de tareas, mientras que las no laterales, y en particular el ensayo y error, la han tenido en las tareas del segundo subconjunto.
3. Las estrategias no ordinales han tenido una incidencia importante hasta los seis años de edad en el primer subconjunto de tareas, disminuyendo su uso en los dos grupos de edad superior. En la sexta tarea su uso es muy reducido hasta los cinco años de edad, pudiendo aparecer esporádicamente a edades superiores. En las tareas séptima y octava su incidencia es importante hasta los cinco años de edad, presentando una evolución decreciente con la edad.

**F) Estrategias ordinales.**

1. La estrategia decreciente es muy poco utilizada, no superando el 16% de uso global en ninguna de las tareas, aunque se detecta en todas las tareas y en todos los grupos de edad. Como se puede observar en las tablas 8.24 y 8.25, los mayores porcentajes de uso se dan en el grupo *6AM* en la cuarta tarea (37,5%) y en los grupos *4AM* y *6A* en la séptima (40% y 30% respectivamente). Su incidencia es más regular en los tres grupos de menor edad en las tareas más sencillas y más irregular en las demás tareas y grupos.
2. Las estrategias decrecientes con algún error (D1, D3, D3) son muy reducidas (no superando el 12,5%) y esporádicas, pudiendo aparecer en cualquier grupo de edad. Por tanto, la evolución del uso de las estrategias ordinales en las tareas de orden con cantidades discretas, al igual que en el caso de las continuas, está prácticamente determinada por la evolución de la estrategia creciente.
3. Las estrategias crecientes con más de un error (C2, C3) son

también escasas, no superando el 20% (grupo 6A en las tareas 4<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>) por tarea en ningún grupo de edad. Su incidencia global por tarea no supera el 3,9% (tareas 4<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>).

4. La estrategia creciente con un solo error (C1) tiene una incidencia considerable en las tareas del primer subconjunto en todos los grupos de edad, alcanzando el 50% de los sujetos del grupo 7A en la cuarta tarea y porcentajes globales de uso considerablemente menor en las tareas 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup>. Por el contrario, su incidencia en las tareas del segundo subconjunto es puntual, reduciéndose a un solo grupo en cada una de las tareas 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup> con porcentajes moderados (20% para el grupo 4A en la 7<sup>a</sup> y 10% para el grupo 4AM en la 8<sup>a</sup>).
5. La estrategia creciente sin errores (C) es la estrategia dominante en las tareas de la 4<sup>a</sup> a la 8<sup>a</sup>. Su uso es notable en los grupos de cinco años y cinco años y medio en todas las tareas, que no solo suelen superar los porcentajes de los grupos de edad inferior sino que también superan los correspondientes a edades superiores, salvo al del grupo 7A en la séptima tarea y a los dos correspondientes a los grupos 6AM y 7A en la octava que son muy elevados (75% en el 6AM, 8<sup>a</sup> tarea, y 87,5% en el 7A en la 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>). Ésta es la estrategia ordinal más usada en todas las tareas, salvo en la segunda, alcanzando porcentajes globales de uso del 77,6%, 50% y 43,4%, respectivamente, en las tareas 6<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup>. Los resultados muestran que su incidencia es superior en las tareas del segundo subconjunto, como muestran los valores máximos alcanzados en los grupos 5AM y 6A, con el 90% en la 6<sup>a</sup> tarea, y por los sujetos del grupo 7A en las tareas 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup> con el 87,5%. En las tareas del primer subconjunto su uso ha sido más moderado, con porcentajes globales del 17,1%, 25% y 23,7%, respectivamente, en las tareas 2<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup>, alcanzándose valores máximos de uso del 40% en los grupos 5A en la 2<sup>a</sup>, 4AM en la 3<sup>a</sup>, y 5A y 5AM en la 4<sup>a</sup>.
6. Las estrategias ordinales son dominantes a partir de la tercera tarea, tanto en el primer subconjunto, con porcentajes globales de uso alrededor del 50% (49,9% en la 3<sup>a</sup> tarea y 56,5% en la 4<sup>a</sup>), como en el segundo subconjunto, con porcentajes globales respectivos del 93,4%, 68,3% y 57,7% en las tareas 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>. Su uso es elevado a partir de los cuatro años y medio, con valores mínimos del 10% o el 20% en los dos grupos de menor edad y máximos del 100% en el de mayor edad, presentando

una evolución creciente en las tareas 2<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup> y máximos del 80 % en los grupos 5A y 6A en las tareas 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup>. La mayor dificultad se ha constatado en el primer subconjunto de tareas (propriadamente en las tareas de orden con cantidades discretas), lo que está de acuerdo con análisis anteriores.

### G) Estrategias y niveles de resultados.

La tabla 8.26 muestra la evolución de los porcentajes totales por niveles en las tareas de orden con cantidades discretas. Se ha prescindido de los resultados de la sexta tarea dado su carácter elemental. El análisis de los datos de dicha tabla proporciona los siguientes resultados:

1. Se observa un aumento de las estrategias crecientes (TC) y ordinales (TO), al aumentar el nivel de competencias ordinales.
2. La influencia de las estrategias decrecientes (TD) en el nivel de competencias ordinales es escasa en comparación con la influencia de las estrategias crecientes.
3. El uso de las estrategias laterales (TL), no laterales (TNL) y no ordinales (TNO) decrece al aumentar el nivel de competencias ordinales.
4. Las influencias respectivas de las estrategias laterales (TL) y no laterales (TNL) es decisiva en el nivel de competencias ordinales.
5. Excepto en las tareas cuarta y séptima, predominan las estrategias no ordinales en los sujetos del *nivel 1* y las estrategias ordinales en todas las tareas en los niveles 2 y 3.

(a)

<b>ECD2</b>						
<b>GED</b>	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
Nivel 1	28	8	36	42	22	64
Nivel 2	20	40	60	40	0	40
Nivel 3	57,2	9,5	66,7	23,8	9,5	33,3

(b)

<b>ECD3</b>						
<b>GED</b>	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
Nivel 1	34	4	34	48	14	62
Nivel 2	40	20	60	40	0	40
Nivel 3	76,2	9,5	85,7	14,3	0	14,3

(c)

<b>ECD4</b>						
<b>GED</b>	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
Nivel 1	44	2	46	20	22	42
Nivel 2	60	0	60	40	0	40
Nivel 3	66,7	14,3	81	19,2	0	19,2

(d)

<b>ECD7</b>						
<b>GED</b>	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
Nivel 1	34	20	54	12	28	40
Nivel 2	80	0	80	0	20	20
Nivel 3	100	0	100	0	0	0

(e)

<b>ECD8</b>						
<b>GED</b>	TC	TD	TO	TL	TNL	TNO
Nivel 1	28	10	38	2	38	40
Nivel 2	100	0	100	0	0	0
Nivel 3	95,3	0	95,3	0	4,7	4,7

Tabla 8.26. Porcentajes totales de las estrategias utilizadas por niveles en las tareas de Orden con cantidades discretas. (a) Tareas segunda; (b) tercera tarea; (c) cuarta tarea. (d) séptima tarea; (e) octava tarea.

En lo que sigue tendremos en cuenta las tablas D.8 y D.9, del anexo D (pp. 754 y 756), en las que se recogen las estrategias locales (variables  $ECDi$ ) y globales (variables  $Cod24$  y  $Cod68$ ) utilizadas por los sujetos, clasificados por niveles de competencia (valores de la variable  $NivelCD$ ), así como por valoraciones (valores de la variable  $SCCD5$ ). En ellas también figuran la clave identificativa de cada sujeto y los valores respectivos de las variables acumulativas  $SCD24$  y  $SCD68$  que recogen, a su vez, la suma de las valoraciones de las tareas 2<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> y de la 6<sup>a</sup> a la 8<sup>a</sup> respectivamente\*. La tabla D.8 recoge la información correspondiente a los sujetos que no reconocen la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas (para ellos el valor de la variable  $CoefCD$  es 0), mientras que la tabla D.9 recoge, a su vez, la información correspondiente a los sujetos que reconocen la cantidad discreta, parcial o totalmente, en el segundo subconjunto de tareas (para ellos los valores de la variable  $CoefCD$  son 0, 5 ó 1).

#### H) Mantenimiento de estrategias.

El estudio del mantenimiento de estrategias presenta aquí menor interés que en el conjunto anterior (orden con cantidades continuas), ya que el mantenimiento de la estrategia ordinal deja de ser condición suficiente para alcanzar un mayor nivel, como muestra, por ejemplo, el caso del sujeto  $14AM1$  en la tabla D.8<sup>†</sup>. Sin embargo, podemos destacar los siguientes resultados:

1. Según se observa en la tabla D.9 para los sujetos del  $Nivel 3$  y valoraciones superiores a 4, es condición suficiente para alcanzar una valoración o un nivel elevados mantener las estrategias ordinales en la resolución y reconocer la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas. Pero esta condición no es necesaria, como muestran, por ejemplo, los casos de los sujetos  $15AM5$  y  $16AM3$ , que estando en el  $Nivel 3$  cambian de estrategias manteniéndolas como máximo en dos o tres tareas.
2. La condición de reconocer la intervención de la cantidad discreta en el segundo subconjunto no es necesaria para alcanzar el  $Nivel 2$ , pero sí lo es para alcanzar el  $Nivel 3$ ; como muestran, en el primer caso, los sujetos que se hallan en el  $Nivel 2$

\*Nótese que, según se expuso en la sección 7.7.3, página 417 y siguientes del capítulo 7, la valoración global del sujeto en el conjunto de tareas, es decir, el valor de la variable  $SCCD5$  no es la simple suma de los valores de las variables  $SCD24$  y  $SCD68$ , sino que se obtiene mediante la fórmula  $SCCD5 = SumCD24 + SumCD68 \cdot CoefCD$ , en la que se tiene en cuenta si el sujeto reconoce y utiliza o no, mediante la variable  $CoefCD$ , la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas.

<sup>†</sup>Este sujeto mantiene la estrategia creciente en las seis tareas, pero no reconoce la intervención de la cantidad discreta en el segundo subconjunto, hallándose en el  $Nivel 1$  con una valoración inferior a la unidad.

de la tabla D.8, y en el segundo, el que todos los sujetos que se hallan en el *Nivel 3* (tabla D.9) la reconocen.

- Es frecuente el cambio de estrategia en la resolución de las tareas. Sin embargo, los dos niveles inferiores poseen una alta variabilidad, que disminuye en el *Nivel 3*.

		Cod 2-4					
NivelCD	GED	CF	CP-CT	CP	CT	EE	PC
Nivel 1	3AM	0	0	6	0	2	2
	4A	0	0	1	1	4	4
	4AM	1	0	2	3	2	1
	5A	0	1	0	1	1	1
	5AM	0	0	0	3	0	2
	6A	0	1	1	2	2	1
	6AM	0	0	0	2	0	0
	7A	0	0	0	3	0	0
	<b>Total</b>	1	2	10	15	11	11
Nivel 2	4AM	0	0	0	1	0	0
	5A	0	0	0	1	0	0
	5AM	0	0	0	2	0	0
	6A	0	0	0	1	0	0
	<b>Total</b>	0	0	0	5	0	0
Nivel 3	5A	0	0	0	5	0	0
	5AM	0	0	0	3	0	0
	6A	0	0	0	2	0	0
	6AM	0	0	0	6	0	0
	7A	0	0	0	5	0	0
	<b>Total</b>	0	0	0	21	0	0

Tabla 8.27: Frecuencias de las estrategias globales por niveles y grupos de edad en el primer subconjunto de tareas de Orden con cantidades discretas.

A continuación, se realiza el análisis del uso de las estrategias *globales\**, cuyos datos se recogen en las tablas D.6, D.7, D.8 y D.9, en las D.10 y D.11, que recogen la distribución de estas estrategias por niveles y grupos de edad, respectivamente y por separado, y en las 8.27 y 8.28 que las clasifican por niveles y grupos de edad para ambos subconjuntos de tareas. Las tablas con

\*Véase el comienzo de esta sección, así como su definición más completa en la página 421, sección 7.7.3, capítulo 7.

el prefijo “D” se pueden consultar en en la página 747 y siguientes del anexo D. Del contenido de todas ellas destacamos los resultados siguientes.

NivelCD	GED	Cod 6-8							
		CF	CL-CT	CL	CP-CT	CP	CT	EE	PC
1	3AM	0	0	0	0	5	0	5	0
	4A	0	0	3	0	1	0	5	1
	4AM	1	0	3	1	2	0	2	0
	5A	0	1	1	0	1	0	0	1
	5AM	0	0	4	0	0	0	1	0
	6A	0	1	4	0	2	0	0	0
	6AM	0	0	1	0	0	1	0	0
	7A	0	0	1	0	2	0	0	0
	<b>Total</b>	1	2	17	1	13	1	13	2
2	4AM	0	0	0	0	1	0	0	0
	5A	0	0	0	0	0	1	0	0
	5AM	0	0	0	1	0	1	0	0
	6A	0	0	1	0	0	0	0	0
		<b>Total</b>	0	0	1	1	1	2	0
3	5A	0	0	0	0	0	5	0	0
	5AM	0	0	0	0	0	3	0	0
	6A	0	0	0	0	0	2	0	0
	6AM	0	0	0	0	0	6	0	0
	7A	0	0	0	0	0	5	0	0
		<b>Total</b>	0	0	0	0	0	21	0

Tabla 8.28: Frecuencias de las estrategias globales por niveles y grupos de edad en el segundo subconjunto de tareas de Orden con cantidades discretas.

### I) Las estrategias globales y los niveles de competencia.

Del análisis de los datos incluidos en las subtablas D.10(a) y (b) y en las tablas 8.27 y 8.28, destacamos los resultados:

1. En el *Nivel 1* se utilizan todas las estrategias con distintas incidencias cada una, predominando en ambos subconjuntos la comparación de cantidades, tamaños o longitudes (CP o CL), y el ensayo y error (EE). Son escasas, y características de este nivel (junto con el ensayo y error), las incidencias de la comparación de formas (CF), el protoconteo (PC) en el segundo subconjunto, la comparación de longitudes-conteo (CL-CT)



y en ambos subconjuntos de la estrategia mixta comparación-conteo (CP-CT), aunque no es característica de este nivel como muestra su incidencia del 20 % en el *Nivel 2* (subtabla D.10 (b)).

2. El protoconteo (PC) y el conteo (CT) tienen una incidencia significativa en primer subconjunto (tareas con cantidades discretas) y muy escasa en el segundo (tareas con cantidades discretas-continuas), en el que predomina la comparación de longitudes y tamaños. Los sujetos del *Nivel 1* utilizan estas estrategias de forma verbal y no suelen hacerlo para asignar posiciones ordinales\*.
3. Los sujetos del *Nivel 2* usan el conteo como única estrategia en el primer subconjunto de tareas, mientras que en el segundo utilizan la comparación de tamaños y longitudes (20 % respectivamente), la estrategia mixta comparación-conteo (20 %) y el conteo como estrategia individual (40 %), lo que indica que en el segundo subconjunto predominan el uso espontáneo de la comparación y de la estrategia mixta comparación-conteo frente al conteo. En general, los sujetos que se hallan en este nivel comienzan a usar el conteo, incluida la secuencia verbal, para asignar posiciones ordinales en uno sólo de los dos subconjuntos de tareas, o en ambos de forma no sistemática y con errores, mezclado con el conteo verbal.
4. Los sujetos que se hallan en el *Nivel 3* usan el conteo como estrategia exclusiva en ambos subconjuntos de tareas, utilizando espontánea y sistemáticamente el conteo para asignar posiciones ordinales, pero con algún error (en numerosos casos), lo que pone de manifiesto la *lenta adquisición del uso del conteo ordinal como estrategia en la resolución de tareas ordinales*.

#### J) Estrategias globales y grupos de edad.

De las tablas D.11(a) y (b), 8.27 y 8.28, se pueden extraer los siguientes resultados:

1. Los sujetos de los tres primeros grupos de edad utilizan fundamentalmente para ambos subconjuntos de tareas, las estrategias de comparación de cantidades y longitudes (CP y CL), el ensayo y error (EE) y el protoconteo (PC), siendo el conteo (CT) la estrategia individual predominante para los grupos de

\*Los datos de las tablas D.8 y D.9 corroboran también esta afirmación. Véase la página 754 y siguientes, anexo D.

- cuatro años y medio\* (*4AM*) y siguientes en el primer subconjunto.
2. En el grupo de cinco años (*5A*) predomina claramente el conteo (CT) en ambos subconjuntos, siendo un grupo singular en relación con el uso del conteo en el segundo subconjunto (tareas con cantidades discretas–continuas), no detectado en este subconjunto a edades anteriores.
  3. Entre los cuatro años y medio y los cinco años aparecen las estrategias mixtas de comparación–conteo (CP–CT, CL–CT) y el inicio de la transición, que va desde los cuatro años y medio hasta los seis años, a la estrategia de conteo como la estrategia más evolucionada, que no se consolida hasta los seis años y medio o siete años.
  4. Entre los cinco años y medio y los seis años, el conteo no es mayoritario en el segundo subconjunto (tareas con cantidades discretas–continuas), permaneciendo todavía el uso de estrategias de comparación, mixtas, de ensayo y error y protoconteo, y aumentando la comparación de longitudes (CL) en segundo subconjunto, situación indicativa de la transición que se produce en estas edades.
  5. Entre los seis años y medio y los siete años los sujetos utilizan el conteo como estrategia exclusiva en primer subconjunto de tareas o mayoritaria en el segundo, en el que también utilizan estrategias de comparación de forma residual.

### K) El conteo ordinal como estrategia.

El dominio del conteo a nivel verbal no garantiza su uso como estrategia en la asignación de posiciones ordinales en tareas ordinales con cantidades discretas. Para que se utilice esta estrategia es necesario que el sujeto lo haga en combinación con las estrategias ordinales (locales) de modo de modo sistemático.

Por tanto, teniendo en cuenta lo expuesto en los puntos **I** y **J** anteriores, así como la información recogida en las tablas D.8 y D.9 (página 754 y siguientes) y en los histogramas de la Figura 8.6 (página 486), destacamos los siguientes resultados:

1. El conteo ordinal como estrategia en la resolución de tareas ordinales con cantidades discretas comienza en el *Nivel 2* y se consolida lentamente en el *Nivel 3*. En cuanto a la edad,

---

\*En este grupo aparece de manera incidental y aislada la estrategia de comparación de formas en ambos subconjuntos de tareas, con una incidencia muy escasa (10%).

comienza a los cuatro años y medio (10% en el *Nivel 2*) aumentando de forma considerable a los cinco años de edad (50% en el *Nivel 3*), de acuerdo con el inicio de la transición aludida en el punto **J.3**, y decayendo en los grupos de cinco años y medio y seis años debido a la considerable presencia de las estrategias laterales\* (locales), en el primer subconjunto de tareas, y la comparación de longitudes (global) en el segundo subconjunto. El comportamiento descrito se traduce, como se puede apreciar más adelante, en la evolución no lineal de este tipo de competencias ordinales.

2. *El uso del conteo ordinal se empieza a consolidar entre los seis años y medio y los siete años*, edades en las que la mayoría de los sujetos se halla en el *Nivel 3* (el 75% y el 62,5% respectivamente).
3. *El desarrollo de la competencia ordinal en tareas con cantidades discretas no parece que se haya completado a los siete años de edad*. Entre los cinco años y medio y los siete años todavía hay sujetos que se encuentran en el *Nivel 1* (el 70% a los seis años) y no utilizan el conteo ordinal como estrategia o lo utilizan de modo esporádico o simplemente de forma verbal. Ello da idea de la compleja y lenta evolución de las competencias ordinales con cantidades discretas en general.

#### 8.7.1.4 Uso de las piezas sobrantes

Las piezas sobrantes se encuentran en las tareas tercera, cuarta y octava y se han añadido intencionadamente a la colección de piezas a encajar en los huecos de tal forma que su cantidad (discreta o continua-discreta) no se corresponde con la de ninguno de los huecos a cubrir\*. Con ello se pretende estudiar los comportamientos y las respuestas que provoca su presencia así como su influencia en la manera en la que los sujetos establecen las correspondencias objeto-hueco en las tareas.

Los datos relativos al uso de las piezas sobrantes se recogen en la tabla D.12<sup>†</sup>, anexo D, cuyo contenido es el siguiente: la primera columna recoge la clave identificativa del sujeto; las etiquetadas mediante **HPCDi** (con **i**= 3, 4, 8) recogen, a su vez, los números correspondientes a las posiciones en

\*Resultado que está de acuerdo con la mayor incidencia de las estrategias laterales en los grupos de edad intermedia observada en las tareas de orden con cantidades continuas.

\*Recordamos que dichas piezas, en las tareas citadas, son las de mayor cantidad de magnitud.

<sup>†</sup>Véase la página 761 y siguientes.

las que los sujetos intentaron colocar la pieza sobrante\*, de manera que si el intento es contradictorio los números citados vendrán precedidos por una “C” mayúscula†; las columnas etiquetadas mediante **NTar** y **TarU** recogen, respectivamente, el número de tareas en las que el sujeto utilizó la pieza sobrante y el número (o los números) identificativo(s) de la tarea(s) en la(s) que lo intentó, figurando igualmente una “C” mayúscula si el intento es contradictorio‡; finalmente, las columnas etiquetadas mediante **SCCD5** y **NivelCD** corresponden a las variables homónimas anteriormente utilizadas§.

Con los datos de la tabla D.12, descrita, se ha construido la tabla 8.29, que recoge la distribución de los porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según el número de tareas en las que se usa esta pieza (variable **NTar**).

GED	NTar (%)			
	0	1	2	3
3AM	40	60	0	0
4A	30	50	20	0
4AM	60	30	10	0
5A	40	40	10	10
5AM	50	40	10	0
6A	60	30	0	10
6AM	75	12,5	12,5	0
7A	62,5	25	12,5	0
<b>Total</b>	51,3	36,8	9,2	2,6

Tabla 8.29: Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según el número de tareas en las que se usa. Orden con cantidades discretas.

\*Si el sujeto no usa dicha pieza el espacio correspondiente aparecerá en blanco; si intenta colocarla una vez aparecerá un solo número; si los intentos de colocación son reiterados, aparecerá una secuencia numérica, correspondiente a las posiciones citadas.

†Por ejemplo, un valor como 35-C5767 en esta columna, indica que el sujeto realizó dos intentos erróneos en las posiciones 3 y 5, y que dicha pieza no corresponde a dichas posiciones; además indica que el sujeto realizó dos intentos contradictorios tratando de colocar las piezas 5 y 6 en la posición correspondiente a la 7, posición que ya estaba ocupada. Si el sujeto realiza más de dos intentos contradictorios se indica mediante “CM” (múltiples intentos contradictorios) y se suprime la secuencia que sigue a la “C”.

‡Por ejemplo, 34-C8 significa que el sujeto habría utilizado la pieza sobrante en las tareas segunda y tercera, y que en la octava realizó, al menos, un intento contradictorio.

§Recordamos que estas variables almacenan, respectivamente, la valoración total de las respuestas de los sujetos y el correspondiente nivel asociado en estas tareas.

### L) Número de tareas en las que se usa la pieza sobrante.

Del examen de los datos incluidos en la tabla 8.29 se observa que:

1. El uso de la pieza sobrante presenta una tendencia decreciente con la edad debido a su mejor identificación y a la menor incidencia de la estrategia de ensayo y error, al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas.
2. *El comportamiento global de los sujetos es muy similar en las tareas de orden con cantidades continuas y discretas.* Así, el porcentaje de sujetos que no utilizan la pieza sobrante en ninguna de las tareas (total de la columna **0**) es del 51,3% con variaciones notables por grupos de edad, minimizándose su uso en los dos grupos de edad superior; por su parte, el 36,8% la utilizan sólo en una tarea, siendo más elevado entre los tres años y medio y los cinco años y medio, lo que indica que la dificultad de estas tareas es superior a la observada para las tareas de orden con cantidades continuas\*; asimismo, el 9,2% la utiliza en dos tareas con un máximo en el grupo 4A y una evolución decreciente posterior; por último, sólo el 2,6% de los sujetos utiliza la pieza sobrante en las tres tareas de forma incidental y únicamente en los grupos 5A y 6A. Su uso en dos o tres tareas es menor que en el orden con cantidades continuas (21,56% y 5% respectivamente), lo que indica cierto aprendizaje.

GED	TarU (%)						
	3	34	348	38	4	48	8
3AM	60	0	0	0	0	0	0
4A	30	10	0	0	10	10	10
4AM	10	0	0	0	10	10	10
5A	0	10	10	0	0	0	40
5AM	10	0	0	10	0	0	30
6A	10	0	10	0	0	0	40
6AM	12,5	0	0	12,5	0	0	0
7A	12,5	0	0	0	0	12,5	12,5
<b>Total</b>	18,4	2,6	2,6	2,6	2,6	3,9	15,8

Tabla 8.30: Porcentajes de uso de la pieza sobrante por grupos de edad según las tareas y combinaciones de tareas en las que se usa. Orden con cantidades discretas.

\*El 27,19% de media la usaban en una sola tarea

### M) La pieza sobrante en las tareas individuales y en las combinaciones de tareas en las que se usa.

Las tablas 8.30 y 8.31 recogen, respectivamente, los porcentajes de uso de la pieza sobrante según las tareas y grupos de tareas en las que se utiliza\* y en cada una de las tareas individuales en total por grupos de edad.

De la información recogida en ambas tablas se deducen los resultados siguientes:

1. Las piezas sobrantes se utilizan en todas las tareas y combinaciones de tareas en las que interviene, sin embargo, su uso es remarcable en las tareas tercera y octava, y residual en la cuarta y en las demás combinaciones en cualquier grupo de edad<sup>†</sup>. Las tareas tercera y octava son aquellas en las que aparece por primera vez la pieza sobrante en cada uno de los dos subconjuntos de tareas, lo que puede explicar el aumento en la utilización de estas piezas que además disminuye en la cuarta tarea, aún siendo de mayor dificultad que la tercera. Este fenómeno se ha observado, tanto en las tareas de orden con cantidades continuas como en las tareas analizadas en el estudio exploratorio<sup>‡</sup>.
2. Son excepcionalmente altos los porcentajes que se dan en los dos grupos de menor edad (*3AM* y *4A*) en la tercera tarea, en parte debido a lo indicado en el punto anterior, así como en los grupos de cinco a seis años en la octava tarea, en la que la incidencia de las estrategias de comparación (por tamaños o longitudes) es considerable a estas edades, de acuerdo con lo indicado en el punto **K.3**.
3. La evolución decreciente del uso de la pieza sobrante en la tercera tarea y la disminución de su uso en la octava por los dos grupos de edad superior, en relación con los tres anteriores, muestra, al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, los efectos del aprendizaje, el mejor reconocimiento de estas piezas por los grupos de mayor edad y la menor frecuencia de realización de las tareas más complejas por los grupos de edad inferior.

\*En una sola tarea: columnas **3**, **4** y **8**, en dos tareas: columnas **34**, **38** y **48**, y en las tres: columna **348**.

<sup>†</sup>Salvo para el grupo de menor edad *3AM*, cuyos sujetos no realizan con mayor frecuencia las tareas cuarta y octava, dada su mayor dificultad.

<sup>‡</sup>Estos cambios incrementan, de modo observable, la *carga cognitiva intrínseca* de estas tareas según la *teoría de la carga cognitiva*. Véase la sección 4.4.2, página 140, capítulo 4.

GED	Tarea		
	3	4	8
3AM	60	–	–
4A	40	30	20
4AM	10	20	20
5A	20	20	50
5AM	20	0	40
6A	20	10	50
6AM	25	–	12,5
7A	12,5	12,5	25
<b>Total</b>	25,9	11,6	27,2

Tabla 8.31: Porcentajes totales de uso de la pieza sobrante por tareas y grupos de edad. Orden con cantidades discretas.

#### N) Lugares de colocación de la pieza sobrante.

La tabla D.13 del anexo D, sus subtablas\*, y la tabla 8.32 recogen los datos de los intentos de colocación de la pieza sobrante<sup>†</sup>.

Los datos ponen de manifiesto:

1. En las tres tareas predomina la asignación incorrecta de la pieza sobrante (la de mayor cantidad) a la posición correspondiente a la mayor cantidad en cada caso<sup>‡</sup>, es decir, en la tercera tarea los sujetos asignan la pieza de cuatro frutas al árbol con tres huecos, en la cuarta tarea asignan la pieza de cinco frutas a los árboles de tres y cuatro huecos (que es la elección mayoritaria) y en la octava asignan el bloque de seis escalones al hueco de cinco, sin comparar las cantidades con precisión. Ello es debido al uso de las estrategias de ensayo y error por parte de los tres primeros grupos de edad especialmente así como al uso de estrategias locales laterales y globales de comparación de cantidades o longitudes en todos los grupos de edad, especialmente, a partir de los cinco años. El resto de asignaciones son residuales.
2. En los datos de la tabla 8.32 se detecta un intento contradictorio incidental (10%) en la tercera tarea en el grupo de menor

\*Véase la página 762, anexo D. En todas las subtablas la columna denominada “0” recoge los porcentajes de sujetos que no usan la pieza sobrante, así como el porcentaje total correspondiente de los que no la usan.

<sup>†</sup>Véase en la página 362 y siguientes las fichas técnicas de las tareas y en la página 368 la identificación de los huecos que intervienen en cada una de ellas.

<sup>‡</sup>Resultado que coincide con el correspondiente en las tareas de orden con cantidades continuas.

edad (3AM) así como varios en la octava entre los cuatro y los cinco años de edad. Estos intentos pueden ser debidos a alguna dificultad puntual en el uso del ratón, la estrategia de ensayo y error o pérdidas puntuales de atención. Es notable su ausencia a partir de los cinco años.

3. Al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, los sujetos hacen asignaciones en general correctas por comparación visual aproximada (sin llegar a realizarlas con precisión), lo que da lugar a algunos errores y, como consecuencia, quizá también a cierto incremento del uso de estrategias no ordinales y de comparación aproximada\*.

GED	TarU (%)	
	C3	C8
3AM	10	0
4A	0	20
4AM	0	30
5A	0	20
5AM	0	0
6A	0	0
6AM	0	0
7A	0	0
<b>Total</b>	1,3	8,8

Tabla 8.32: Tareas y grupos de edad en los que se han registrado intentos contradictorios. Orden con cantidades discretas.

#### 8.7.1.5 Modelos de ajuste

Al igual que en los dos conjuntos de tareas anteriores, nos hemos interesado por respuesta a la siguiente pregunta: ¿la evolución de las medias de las valoraciones de los resultados por grupos de edad<sup>†</sup> sigue algún modelo matemático?; en el caso en que sea así, ¿con qué grado de ajuste?.

La tabla 8.20, página 483, recoge los estadísticos más relevantes de la variable *SCCD5* y, en particular, los valores de las medias por grupos de

\*De nuevo, este hecho pudiera tener relación con una cierta incidencia a estas edades de la ley de Weber–Fechner: pequeñas diferencias en el estímulo provocan identificaciones perceptivas de objetos distintos, los objetos se perciben como iguales cuando solo son aproximadamente iguales. Véase, de nuevo, la nota al pie en la página 93, sección 3.3, o también la nota al pie en la página 470.

<sup>†</sup>Es decir, las medias de la variable *SCCD5* por grupos de edad.



edad que designaremos como variable *MedCD*. Con dichos valores se ha estudiado el ajuste de dichas medias mediante varios modelos de regresión lineal y no lineal, considerando *MedCD* como variable dependiente y *EDG* (edades de los grupos) como independiente (para más detalles sobre sus definiciones véase la sección 7.7.3, página 417 y siguientes). La tabla 8.33 recoge los resultados de los ajustes al modelo lineal y a los mejores ajustes no lineales\*.

Ecuación	Resumen del modelo				
	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.
Lineal	,719	15,324	1	6	,008
Inversa	<b>,742</b>	<b>17,228</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,006</b>
S	<b>,854</b>	<b>35,210</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,001</b>

Tabla 8.33: Modelos de ajuste de los valores de la variable *MedCD* al variar la edad de los grupos.

Como se aprecia en la tabla 8.33, el mejor ajuste corresponde al modelo de tipo *S*, con  $R^2 = 0,854$  y significación  $p = 0,001 < 0,05$ , seguido del modelo *Inverso*, con  $R^2 = 0,742$  y significación  $p = 0,006 < 0,05$ . De nuevo, el modelo más sencillo, aunque algo menos preciso que el de tipo *S*, corresponde al modelo *Inverso*, en el que las medias de aumentan con la edad según una rama hiperbólica con asíntota horizontal en la recta  $y = b_0 = 5,456$ , que representa la máxima valoración a la que tienden asintóticamente los valores al aumentar las edades. Nótese el excelente grado de aproximación, ya que 5 corresponde a la valoración exacta máxima en este conjunto de tareas.

Las ecuaciones de estos modelos son:

$$\begin{cases} y = b_0 + \frac{b_1}{t} , & \text{para el modelo Inverso} \\ y = e^{(b_0 + \frac{b_1}{t})} \text{ o bien } \ln y = b_0 + \frac{b_1}{t} , & \text{para el modelo S} \end{cases}$$

donde  $b_0$  y  $b_1$  son los parámetros a determinar.

Las tablas D.17 y D.18 de la sección D.5 (páginas 764 y siguientes), recogen las características de los ajustes de ambos modelos, incluyéndose los valores observados de la variable *MedCD*, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95 %.

\*En este caso existen modelos de precisión intermedia entre los de tipo *S* (el de máxima precisión) y el modelo *Inverso*, estos modelos son de tipo potencial o exponencial, siendo su interpretación más complicada y menos adaptada al problema que la correspondiente al modelo inverso; por ejemplo, no son asíntóticos, de ahí que no se tomen en consideración.

Por su parte, la tabla D.16 del mismo anexo muestra los valores obtenidos para los coeficientes del modelo con sus significaciones al 95%. Estos valores son:  $b_0 = 5,456$  y  $b_1 = -18,495$  con significaciones respectivas  $p = 0,001$  y  $p = 0,006$ , para el modelo Inverso, y  $b_0 = 3,334$  y  $b_1 = -15,011$  con significaciones  $p = 0,001$ , en ambos casos, para el modelo de la curva  $S$  o exponencial inversa.

En el gráfico de la Figura D.1, página 765, se representan los valores observados de la variable *MedCD* y los ajustados mediante ambos modelos, lo que pone de manifiesto la bondad de los ajustes. Del mismo modo, el gráfico de la Figura D.2, página 766, muestra la independencia de los errores de ambos modelos de los valores ajustados correspondientes, lo que prueba también la significación de los mismos.

Los resultados obtenidos indican que el desarrollo de la capacidad para establecer órdenes con cantidades discretas se aproxima mejor al comportamiento de un modelo evolutivo no lineal cuya velocidad decrece al aumentar la edad de los sujetos. Al igual que en los anteriores conjuntos de tareas, conjeturamos que *el intervalo de edad en el que se produce la mayor variación es en el que se construyen y consolidan tales capacidades en la mente de los sujetos, por lo que la actuación didáctica a lo largo del mismo puede prevenir y paliar los déficits y dificultades de aprendizaje en este aspecto ordinal y en los aspectos aritméticos que se apoyan en dicha estructura.*

### 8.7.2 Conclusiones del estudio de las tareas de orden con cantidades discretas

Del tratamiento y análisis de los resultados se pueden establecer las siguientes conclusiones agrupadas en torno a los diferentes aspectos analizados (se remite a los distintos epígrafes del apartado 8.7.1 para una información más amplia).

#### 8.7.2.1 En relación con las frecuencias y niveles

- 1<sup>a</sup>. Entre los tres años y medio y los cuatro años y medio se observa una lenta evolución en la capacidad para ordenar y establecer correspondencias seriales que conservan el orden con cantidades discretas. La edad alrededor de cinco años es crítica en la formación de estas capacidades (a esta edad se manifiestan de forma brusca y muy significativa), observándose una disminución a los cinco años y medio que continúa hasta los seis años, aumentando considerablemente a seis años y medio para mantenerse a los siete años.

- 2<sup>a</sup>. La evolución de la capacidad para establecer órdenes con cantidades discretas es más lenta que las correspondientes al orden lineal y al orden con cantidades continuas y posterior a ellas en el tiempo (más tardía). Asimismo, es menos homogénea\* que la correspondiente al orden con cantidades continuas y comparable a la correspondiente al orden lineal, presentando una tendencia creciente en los rangos y desviaciones típicas. El cambio de signo en las asimetrías a los seis años y medio y siete años indica el aumento de estas capacidades a dichas edades.
- 3<sup>a</sup>. La capacidad de ordenar cantidades discretas se desarrolla mayoritariamente pasando por tres niveles y dos períodos de transición:
- *Nivel 1 (3AM-4AM)*: ordenar, como máximo, dos series de dos o tres objetos de forma completa o incompleta;
  - *Transición 1 (4AM-5A)*: paso de ordenar series de tres objetos a ordenar series de cuatro objetos;
  - *Nivel 2 (4AM-6A)*: ordenar series de tres objetos e inicio de la capacidad de ordenar series de cuatro objetos, con permanencia significativa de sujetos que solo ordenan a lo más series de dos o tres objetos de forma completa o incompleta;
  - *Transición 2 (5A-6AM)*: paso de ordenar series de cuatro objetos a ordenar series de cinco objetos de forma completa o incompleta;
  - *Nivel 3 (5AM-6AM)*: capacidad alta o plena para ordenar series discretas de cinco objetos de forma completa o incompleta.
- 4<sup>a</sup>. Entre los seis y los siete años se pueden encontrar sujetos que todavía se hallan en el primer nivel, lo que indica que el desarrollo de esta capacidad es lento y complejo, que no se completa en el periodo de edad considerado y que son necesarios tratamientos didácticos específicos para favorecer la formación de esta capacidad.

#### 8.7.2.2 En relación con las estrategias locales

- 1<sup>a</sup>. La no realización (X), así como la ausencia de estrategia definida (N), se concentran en las tareas de mayor dificultad (3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>) y se producen exclusivamente en los grupos de menor edad, lo que indica que las tareas son adecuadas para el intervalo de edad considerado.
- 2<sup>a</sup>. La incidencia de la ausencia de estrategia definida (N) es muy baja, por lo que la evolución de las estrategias no laterales (N, EE) coincide con la de la estrategia de ensayo y error (EE), que se da en su mayoría

\*En el sentido de que la desviación típica por grupos de edad es mayor.

en los grupos de edad inferior a cinco años y medio, en las tareas de máxima dificultad y en las que incorporan por primera vez la pieza sobrante (4<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>).

- 3<sup>a</sup>. Las estrategias derecha-izquierda (*ADI*) e izquierda-derecha (*AID*) se utilizan de manera incidental a partir de los cinco años, pudiéndose apreciar mejor la lateralidad mediante las demás estrategias laterales claramente observables en todas las tareas.
- 4<sup>a</sup>. Las estrategias *PIDI* y *PID-D* se usan de modo meramente incidental o transitorio y la estrategia *PID*, aún cuando aparece en todas las tareas, presenta un uso muy moderado que se concentra en los sujetos de entre tres años y medio y cuatro años y medio. Sin embargo, la estrategia *PDI* tiene un uso especialmente elevado en las tareas segunda y tercera, en las que es la estrategia dominante, moderándose en la cuarta y desapareciendo en las tres últimas tareas; se da en los grupos de cuatro años y medio a seis años alcanzando máximos en el grupo *5AM*.
- 5<sup>a</sup>. Las estrategias laterales tienen una presencia conjunta relevante en el primer subconjunto de tareas, estando presentes en todos los grupos de edad, alcanzando máximos de uso en el grupo *5AM\**, y escasa en las tareas del segundo subconjunto en las respuestas de los sujetos de cuatro a seis años y medio. Globalmente la mayor incidencia de estas estrategias se produce entre los cuatro y los seis años de edad.
- 6<sup>a</sup>. Las estrategias no ordinales<sup>†</sup> sólo son dominantes frente a las ordinales en la segunda tarea, mientras que las estrategias ordinales son mayoritarias en ambos subconjuntos a partir de la tercera tarea. De ellas, las estrategias laterales han tenido una mayor presencia en el primer subconjunto de tareas, mientras que las no laterales, y en particular el ensayo y error, la han tenido en las tareas del segundo subconjunto. Las estrategias no ordinales han tenido una incidencia importante hasta los seis años de edad en el primer subconjunto de tareas, mientras que en las tareas séptima y octava (del segundo subconjunto) su incidencia es importante hasta los cinco años presentando una evolución decreciente con la edad.
- 7<sup>a</sup>. Las estrategias ordinales tienen un uso muy elevado a partir de los cuatro años y medio, presentando una evolución creciente con la edad en las tareas 2<sup>a</sup> y de la 6<sup>a</sup> a la 8<sup>a</sup> con máximos del 80% en los grupos

---

\*La mayor incidencia de estas estrategias en los grupos *5AM* y *6A*, especialmente en las tareas 2<sup>a</sup> y 3<sup>a</sup>, provoca una disminución apreciable en las respectivas valoraciones de las tareas y contribuye a una evolución no lineal de las mismas al aumentar la edad de los sujetos, resultado que coincide con el observado en el caso de las tareas de orden con cantidades continuas.

<sup>†</sup>Laterales y no laterales conjuntamente.

5A y 6A en las tareas 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup>. Las tareas del primer subconjunto, es decir, propiamente las de orden con cantidades discretas, han presentado mayor dificultad que las del segundo, en las que también se han aplicado las estrategias ordinales al tamaño o a la longitud.

- 8<sup>a</sup>. La incidencia de la estrategia decreciente es reducida, aunque se detecta en todas las tareas y en todos los grupos de edad. Su incidencia es más regular en los tres grupos de menor edad en las tareas más sencillas y más irregular en las demás tareas y grupos. Asimismo, las estrategias decrecientes con algún error (D1, D3, D3) son poco frecuentes, pudiendo aparecer en cualquier grupo de edad, por lo que *la evolución del uso de las estrategias ordinales en las tareas de orden con cantidades discretas, al igual que en el caso de las continuas, está prácticamente determinada por la evolución de la estrategia creciente.*
- 9<sup>a</sup>. La incidencia de las estrategias crecientes con más de un error (C2, C3) es también escasa, esporádica y puede darse en cualquier edad. Por el contrario, la estrategia creciente con un solo error (C1) es frecuente en las tareas del primer subconjunto en todos los grupos de edad, mientras que su incidencia en las tareas del segundo subconjunto es puntual, reduciéndose a un solo grupo de edad en cada una de las tareas 7<sup>a</sup> y 8<sup>a</sup>.
- 10<sup>a</sup>. La estrategia creciente sin errores (C) es la estrategia dominante en las tareas de la 4<sup>a</sup> a la 8<sup>a</sup> y la estrategia ordinal más usada en todas las tareas salvo en la segunda. Es notable el uso de esta estrategia por los grupos de cinco años y cinco años y medio en todas las tareas. Su incidencia ha sido superior en las tareas del segundo subconjunto, en el que también se aplica a la cantidad continua, mientras que en las tareas del primer subconjunto, en el que se aplica exclusivamente a la cantidad discreta, su uso ha sido bastante más moderado.
- 11<sup>a</sup>. En relación con las estrategias y los niveles de competencia, se observa que la evolución del uso de las estrategias ordinales (TO) y la de las estrategias crecientes (TC), viene a ser monótona creciente al aumentar el nivel de competencias ordinales, y que la influencia de las estrategias decrecientes (TD) en el nivel es muy limitada. Asimismo, la evolución del uso de las estrategias laterales (TL), no laterales (TNL) y no ordinales (TNO) es, prácticamente, monótona decreciente al aumentar el nivel de competencias ordinales. En general, se da un claro predominio del uso de las estrategias no ordinales en el *Nivel 1*, pasando a ser mayoritario el uso de las estrategias ordinales en los niveles 2 y 3 en todas las tareas.
- 12<sup>a</sup>. Lo más usual es que los sujetos cambien de estrategia, pero la varia-

bilidad más alta corresponde a sujetos de los niveles inferiores. Para obtener una valoración o nivel elevados en estas tareas, es condición suficiente que se mantenga la estrategia ordinal (o estrategias ordinales) en la resolución y que se manifieste reconocer la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas; sin embargo, esta condición no es necesaria, como tampoco lo es reconocer la intervención de la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas para alcanzar el *Nivel 2*, aunque sí lo es para alcanzar el *Nivel 3*.

### 8.7.2.3 En relación con las estrategias globales

#### 1<sup>a</sup>. Estrategias globales y niveles de competencia:

- **Nivel 1:** Se dan todas las estrategias, predominando la comparación de cantidades, tamaños o longitudes (CP o CL), y el ensayo y error (EE). La estrategia mixta comparación-conteo (CP-CT) es escasa, mientras que la comparación de formas (CF), el protoconteo (PC) en el segundo subconjunto y la mixta comparación de longitudes-conteo (CL-CT) son muy escasas. Sin embargo, el protoconteo (PC) y el conteo (CT) tienen una incidencia significativa en primer subconjunto de tareas, aunque se usan de forma verbal y, salvo en casos aislados y esporádicos, no se utilizan para asignar posiciones ordinales.
- **Nivel 2:** Utilización del conteo como única estrategia en el primer subconjunto de tareas, mientras que en el segundo las estrategias se reparten entre el conteo, como estrategia individual predominante, la comparación de tamaños y longitudes y la estrategia mixta comparación-conteo. Los sujetos del *Nivel 2* comienzan a usar el conteo para asignar posiciones ordinales en uno solo de los subconjuntos de tareas o en ambos, de forma no sistemática y con errores, mezclado con el conteo verbal.
- **Nivel 3:** Utilización espontánea y sistemática del conteo como estrategia exclusiva para asignar posiciones ordinales en ambos subconjuntos de tareas.

#### 2<sup>a</sup>. Estrategias globales y grupos de edad:

- Los sujetos de los tres primeros grupos de edad usan predominantemente las estrategias de comparación de cantidades y longitudes (CP y CL), ensayo y error (EE) y protoconteo (PC).
- El conteo (CT) llega a ser la estrategia predominante para el grupo de cuatro años y medio (4AM) en el primer subconjunto

(tareas con cantidades discretas), en el que es la estrategia individual predominante a partir de dicha edad.

- Para los sujetos de cinco años (5A) predomina el conteo (CT) en ambos subconjuntos, con escasa o nula incidencia de las restantes estrategias. Este grupo es singular en relación con el uso mayoritario del conteo en el segundo subconjunto, lo que no se observa a edades anteriores.
- Entre los cuatro años y medio y los cinco años aparecen las estrategias mixtas de comparación–conteo (CP–CT, CL–CT), hecho que es indicativo del inicio de la transición a la estrategia de conteo como estrategia ordinal más evolucionada. En esta transición, que no se consolida hasta los seis años y medio o siete años, resulta crítico el intervalo de cuatro años y medio a seis años.
- Aunque el conteo es mayoritario a los cinco años y medio y seis años en el primer subconjunto (tareas con cantidades discretas) no lo es en el segundo (tareas con cantidades discretas–continuas), coexistiendo en ambos subconjuntos, con incidencia moderada, estrategias de comparación, mixtas, de ensayo y error y protoconteo, aumentando destacadamente la comparación de longitudes (CL) en segundo el subconjunto\*.
- Finalmente, entre los seis años y medio y los siete años los sujetos utilizan el conteo como estrategia exclusiva en primer subconjunto de tareas y mayoritaria en el segundo, en el que también utilizan estrategias de comparación de forma residual.

3<sup>a</sup>. El conteo ordinal como estrategia:

- El conteo como estrategia ordinal presenta la siguiente evolución: comienza a los cuatro años y medio (*Nivel 2*) aumentando considerablemente a los cinco años y decayendo posteriormente debido a la presencia de las estrategias laterales<sup>†</sup> (locales), en el primer subconjunto de tareas, y de la comparación de longitudes (global) en el segundo subconjunto; finalmente se consolida entre los seis años y medio y los siete años (*Nivel 3*).
- La existencia de porcentajes elevados o considerables de sujetos

---

\*Situación que es indicativa de la transición citada, en la que se hallan los sujetos de estas edades. La incidencia de ambos tipos de estrategias influye decisivamente en la posible evolución no lineal de las competencias ordinales con cantidades discretas.

<sup>†</sup>Resultado que está de acuerdo con la mayor incidencia de las estrategias laterales en los grupos de edad intermedia observada en las tareas de orden con cantidades continuas.

que aún se encuentran en el *Nivel 1* entre los cinco años y medio y los siete años, indica que el uso del conteo por parte de estos sujetos es esporádico, fortuito o simplemente verbal, lo que pone de manifiesto que la evolución de esta capacidad es lenta y compleja.

#### 8.7.2.4 En relación con las piezas sobrantes

- 1<sup>a</sup>. Al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, la asignación predominante se hace colocando pieza sobrante (la de mayor cantidad) a la posición correspondiente a la mayor cantidad, con lo que los sujetos hacen asignaciones correctas por comparación visual aproximada, lo que provoca errores. El resto de asignaciones son residuales y pueden darse en cualquier grupo de edad.
- 2<sup>a</sup>. Las piezas sobrantes se han utilizado en todas las tareas individuales y en las combinaciones que se mencionan en la discusión, sin embargo, su uso es destacable en las tareas tercera y octava, aquellas en las que aparece por primera vez en cada subconjunto, y residual en la cuarta y en las demás combinaciones, en las que se utiliza en cualquier grupo de edad. Creemos que el hecho de encontrarse por primera vez con la pieza sobrante puede ser el motivo del aumento en su utilización. Este fenómeno se repite, tanto en las tareas de orden con cantidades continuas como en las tareas analizadas en el estudio exploratorio\*.
- 3<sup>a</sup>. La evolución decreciente del uso de la pieza sobrante puede ser debido, al igual que en las tareas de orden con cantidades continuas, a los efectos del aprendizaje, el mejor reconocimiento de estas piezas por los grupos de mayor edad y la menor frecuencia de realización de las tareas más complejas por los grupos de menor edad.
- 4<sup>a</sup>. Se detectan intentos contradictorios incidentales en las tareas tercera y octava entre los tres años y medio y los cinco años de edad, que pueden ser debidos a alguna dificultad puntual en el uso del ratón, la estrategia de ensayo y error o a pérdidas puntuales de atención.

#### 8.7.2.5 En relación con los modelos de ajuste

- 1<sup>a</sup>. Las medias de las valoraciones de los resultados por grupos de edad (*MedCD* (dependiente) y las edades de los grupos *EDG* (independiente)) se ajustan a dos modelos de regresión no lineal, denominados Inverso ( $R^2 = 0,742$ , significación  $p = 0,006 < 0,05$ ) y de tipo S ( $R^2 = 0,854$  y significación  $p = 0,001 < 0,05$ ), con un alto grado

\*Estos cambios incrementan, de modo observable, la *carga cognitiva intrínseca* de estas tareas según la *teoría de la carga cognitiva*. Véase la sección 4.4.2, página 140, capítulo 4.



de precisión, independencia de errores y alta significación, lo que confirma la evolución no lineal de la capacidad para establecer órdenes con cantidades discretas al aumentar la edad de los sujetos.

- 2<sup>a</sup>. El modelo Inverso proporciona una interpretación más sencilla; ya que las medias de los grupos aumentan con la edad según una rama de hipérbola con asíntota horizontal en la recta  $y = b_0 = 5,456$  (se recuerda que 5 es la valoración máxima en este conjunto de tareas). Se puede afirmar que la capacidad para establecer órdenes con cantidades discretas se aproxima con notable precisión mediante un modelo evolutivo no lineal cuya velocidad decrece al aumentar la edad.
- 3<sup>a</sup>. El intervalo de edad en el que se produce la mayor variación y en el que se forman las capacidades correspondientes, es el de cuatro años y medio a seis años. De nuevo se incide en la necesidad de la actuación didáctica a lo largo de dicho periodo para prevenir y paliar los déficits y las dificultades que aparezcan en este aspecto ordinal y en los aspectos numéricos y aritméticos que en él se apoyan.

## 8.8 Resultados y conclusiones relativos a las tareas de recursivas

Se presentan a continuación los resultados y conclusiones del cuarto conjunto de tareas correspondientes al estado recursivo del modelo evolutivo propuesto\*. Este conjunto está formado por 7 tareas que se describen en el apartado 7.6.4<sup>†</sup>; de ellas, la primera introductoria y dirigida a que el sujeto conozca el entorno multimedia y las acciones a realizar, mientras que las seis restantes son las que aportan los datos para el estudio.

Las tareas de este cuarto conjunto proceden de la adaptación al estudio definitivo de las tareas de etiquetaje del estudio exploratorio<sup>‡</sup>, una vez se puso de manifiesto cuál era la esencia recursiva de las mismas (veánse las definiciones de las funciones recursivas que intervienen en cada una de ellas en la tabla E.1, página 767 y siguientes, del anexo E). Las fichas técnicas que incluyen su descripción completa pueden verse en la subsección 7.6.4.2, página 402 y siguientes, de las que incluimos a continuación un resumen de sus principales características.

Se trata de tareas de carácter no verbal, con las que se pretende: a) observar y evaluar la capacidad para continuar secuencias seriadas mediante criterios de alternancia cíclica, en las que el sujeto debe identificar, usando colores (las dos primeras tareas) o bien continuando las series por recursión

\*Véase la página 308, Capítulo VI.

<sup>†</sup>Véase la página 399 y siguientes.

<sup>‡</sup>Véase la sección 7.5, página 343, capítulo 7

(todas las tareas), las localizaciones de determinados elementos, b) detectar las edades en las que aparece espontáneamente esta capacidad desligada del uso del color como recurso de identificación (mero etiquetaje); c) identificar distintos niveles evolutivos y distinguir las estrategias que se utilizan, para lo que se usa la variación en la alternancia. Esta variación produce situaciones ontoepistémicas nuevas, de dificultad creciente, que el sujeto debe distinguir y resolver.

El conjunto se divide en dos subconjuntos de tres tareas cada uno; el primero está formado por seriaciones elementales en las que el *operador "siguiente"* actúa dos veces; el segundo, correspondiente a las tres últimas tareas, está formado por tres seriaciones más complejas en las que el *operador "siguiente"* actúa tres veces.

Con objeto de alcanzar los objetivos propuestos, las tareas segunda y tercera coinciden desde el punto de vista de la alternancia, aunque en la segunda las posiciones correctas están etiquetadas mediante el color, lo que no sucede en la tercera. Por último, las tareas se presentan de modo secuencial por grados de dificultad con el fin de observar la evolución de esta capacidad recursiva.

### 8.8.1 Análisis y valoración de las respuestas.

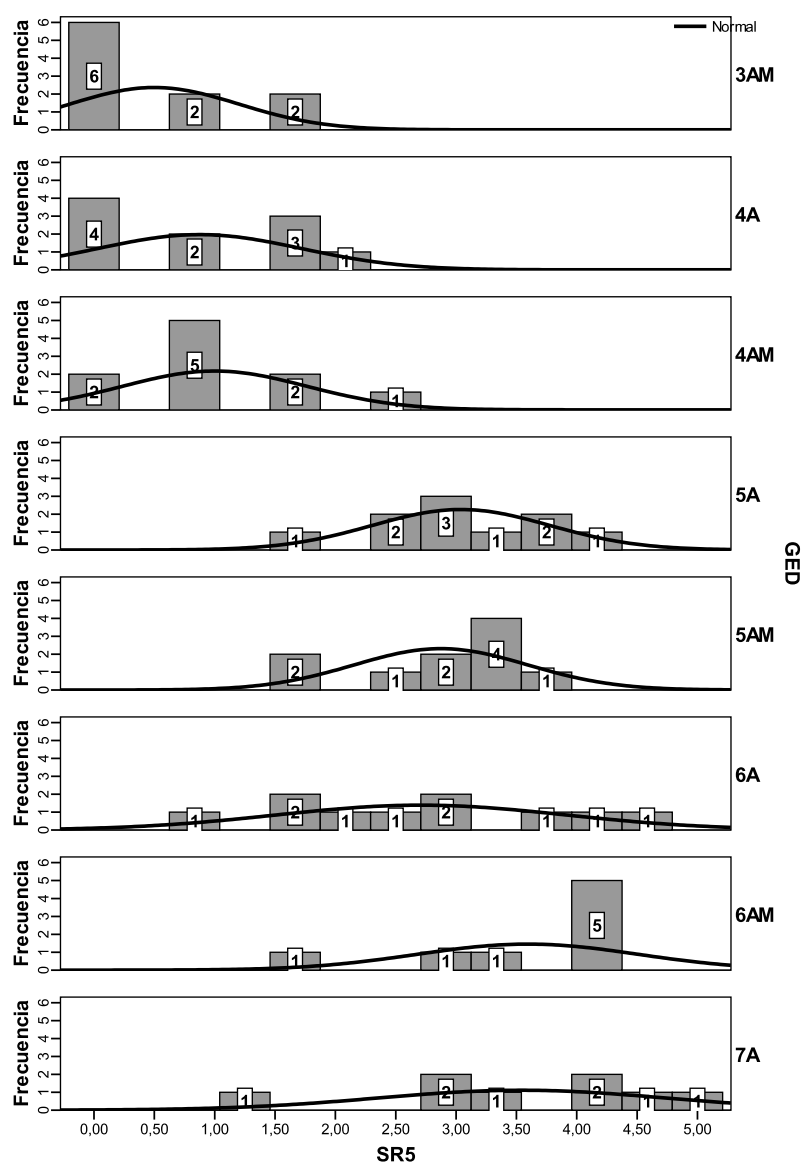
Utilizaremos las variables propias de este conjunto de tareas (subsección 7.7.4, página 422 y siguientes), teniendo en cuenta: las frecuencias de las respuestas, los niveles hallados, las estrategias y, finalmente, los modelos de ajuste para las medias de las valoraciones por grupos de edad.

#### 8.8.1.1 Frecuencias de las respuestas.

En los histogramas de la Figura 8.7, basados en los datos de la tabla E.2\*, se observa la clasificación, por grupos de edad, de los valores de la variable **SR5** para los sujetos de la muestra. Las líneas continuas en color negro indican, de nuevo, las distribuciones normales aproximadas correspondientes a cada grupo de edad, pudiéndose apreciar los siguientes hechos:

- A los tres primeros grupos de edad les corresponden los valores inferiores de la variable, o lo que es lo mismo: los menores grados de uso de las capacidades recursivas.
- La evolución con la edad hacia valores superiores se produce lentamente en los tres primeros grupos de edad.

\*Esta tabla recoge las valoraciones de las respuestas de los sujetos en este conjunto de tareas según las definiciones de la variables propias que intervienen. Véase la página 771, anexo E.

Fig. 8.7. Frecuencias de valores de *SR5* por grupos de edad

- A los cinco años de edad se produce un salto brusco hacia los valores próximos o superiores a 3, lo que sucede para el 70% de los sujetos de dicho grupo de edad. Ello que indica que a dicha edad se pone de

manifiesto un uso considerable de las capacidades recursivas, lo cual no ocurre en edades anteriores.

- En los dos grupos de edad siguientes, *5AM* y *6A* se observa un estancamiento o ligera disminución en el uso de estas capacidades, mientras que en los dos grupos de mayor edad la evolución se consolida, siendo su uso claramente mayoritario.
- Se observan asimetrías positivas en los tres primeros grupos de edad y en el grupo *6A*, mientras que en todos los demás la asimetría es negativa, lo que indica que la dificultad ha sido mayor para los tres primeros grupos de edad y en el grupo *6A*, sucediendo lo contrario en los demás grupos, que salvo el *6A* son los de mayor edad.
- Los grupos *5A* y *6A* resultan singulares y el intervalo de cinco a seis años parece ser crítico en relación con el uso de las capacidades recursivas.
- La evolución general de las capacidades recursivas resulta ser muy similar a la de las capacidades ordinales con cantidades discretas, si bien es más rápida y homogénea, especialmente a partir de los cinco años. Por otra parte, dicha evolución es diferente a las de las capacidades ordinales con cantidades continuas y a la del orden lineal.
- Se constata la existencia de sujetos de edades superiores a los seis años con valores de la variable *SR5* menores que 3 (algunos claramente inferiores), lo que puede expresar, a nuestro juicio, un déficit en la capacidad de los sujetos para abordar tareas de naturaleza recursiva. La incidencia de este hecho no es elevada, pero sí digna de consideración.

Por otra parte, según el test de Kolmogorov–Smirnov, los datos de la tabla 8.34 no permiten descartar la hipótesis de normalidad en las distribuciones de los resultados ( $\text{Sig} > 0.05$ ) salvo para los grupos de edad *3AM*, *4AM* y *6A* ( $\text{Sig} < 0.05$ ) y, con mayor precisión, para los grupos *3AM*, *4A* y *6AM* ( $\text{Sig} < 0.05$ ), siendo dudosa para el grupo *5AM*, según el test de Shapiro–Wilk. Por tanto, no se puede descartar la normalidad de las distribuciones para la mitad de los grupos de edad, resultado coincidente con el de las cantidades continuas y discretas y en contraste con el caso del orden lineal, en el que solamente para dos grupos no se podía descartar la normalidad.\*. Como se observa en los gráficos de la Figura 8.7, y en los correspondientes a los otros conjuntos de tareas, los grupos para los que se puede descartar la normalidad son los que han tenido mayor dificultad (grupos *3AM* y *4A*) y menor dificultad (*6AM*).

\*Véanse las tablas 8.3, 8.7 y 8.19, en las páginas 434, 444 y 482, respectivamente.

GED	Kolmogorov–Smirnov			Shapiro–Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
3AM	,362	10	,001	,717	10	,001
4A	,250	10	,076	,830	10	,033
4AM	,286	10	,020	,885	10	,149
5A	,167	10	,200	,960	10	,791
5AM	,238	10	,115	,848	10	,055
6A	,131	10	,200	,969	10	,877
6AM	,359	8	,003	,717	8	,004
7A	,199	8	,200	,931	8	,527

Tabla 8.34: Test de normalidad de la variable **SCCD5** por grupos de edad.

En la tabla 8.35 se muestran los estadísticos comunes de la variable **SR5** por grupos de edad, observándose\* una evolución cualitativa muy similar a la correspondiente a las capacidades de orden con cantidades discretas, es decir, un lento crecimiento en los valores de las medias y medianas en los tres primeros grupos de edad, seguido de un llamativo aumento de dichos valores en el grupo **5A**, triplicando los del grupo anterior, continuando con descensos en los dos grupos de edad siguientes y finalizando con aumentos claros en los dos grupos de edad superior, en los que dichos valores parecen estabilizarse.

GED	Media	Med.	Desv. típ.	Rango	Asimetría	Curtosis
3AM	,5000	,0000	,70273	1,67	1,001	-,665
4A	,8750	,8333	,84369	2,08	,133	-1,903
4AM	1,0000	,8333	,76578	2,50	,601	,396
5A	3,0417	2,9167	,73624	2,50	-,266	,014
5AM	2,8750	3,1250	,72035	2,08	-,939	-,249
6A	2,7083	2,7083	1,19880	3,75	,140	-,859
6AM	3,5938	4,1667	,91660	2,50	-1,619	2,165
7A	3,5417	3,7500	1,19937	3,75	-,863	,716
<b>Total</b>	2,1985	2,2917	1,45869	5,00	-,040	-1,159

Tabla 8.35: Estadísticos de la variable **SR5** por grupos de edad.

\*De acuerdo con el análisis inicial de los histogramas de Figura 8.7.

De nuevo, se identifica la edad alrededor de los cinco años como singular o crítica en la formación de las capacidades recursivas, lo que está de acuerdo con lo obtenido en estudio exploratorio. Estas competencias se estancan o retroceden a los cinco años y medio y seis años y no progresan de modo estable hasta los seis años y medio, situación que se debería tener en cuenta en la acción didáctica. Asimismo, se confirman: la evolución más rápida y homogénea (a partir de los cuatro años y medio o cinco años) que en el caso de las capacidades ordinales con cantidades discretas, las diferencias en con respecto a las del orden con cantidades continuas y el orden lineal, y el posible carácter no lineal de la evolución.

Por otra parte, tal y como ocurre en el caso de las capacidades de orden con cantidades discretas, se identifica el intervalo de cinco a seis años como crítico en la formación de las capacidades recursivas y el de cuatro años y medio a cinco años como el de mayor variación en dicho proceso.

El cambio de signo de positivo a negativo en las asimetrías, predominante a partir de los cinco años, indica una tendencia positiva al aumento del uso de las capacidades recursivas, tendencia que se frena singularmente a los seis años. La positividad de las curtosis en los dos grupos de edad superior indica una tendencia clara a la consolidación y estabilización de las capacidades recursivas en estas edades.

#### 8.8.1.2 Caracterización y estudio de los niveles.

Los niveles de competencia en relación con las capacidades recursivas se basan en la clasificación de las respuestas según los valores de la variable **SR5** y su caracterización en los correspondientes valores de las variables **EvRi**. La tabla E.2, página 771 y siguientes, recoge los valores de dichas variables\*, de cuyo análisis (teniendo en cuenta las definiciones de la sección 7.7.4, página 422) se establecen los siguientes niveles:

**Nivel 1.** Se caracteriza por la continuación de dos series de objetos, como máximo, de las seis propuestas. Corresponde a  $SCCD5 \in [0, 2]$ .

---

\*Recordamos que las tareas de este conjunto se dividen en dos subconjuntos de tres tareas: las tres primeras, elementales, son aquellas en las que en la función recursiva que las define el *operador "siguiente"* actúa dos veces, y las tres últimas, más complejas, en las que en la función recursiva que las define el *operador "siguiente"* actúa tres veces. Recordamos, asimismo, que exclusivamente en las tres últimas tareas se ha permitido un solo error (por tarea) valorándolas, en este caso, con 0,5 en lugar de 1 como corresponde a una tarea sin error.

Las respuestas propias del *nivel 1* implican la continuación, como máximo, de dos de las tres series elementales basadas en alternancias del tipo *sí-no-sí-no-sí-no...* ó *no-sí-no-sí-no-sí-no...*, usando normalmente el color como elemento de identificación de las posiciones de los objetos. Si se llega a continuar alguna de las demás series es de manera aislada.

**Nivel 2.** Se caracteriza por la continuación completa o con algún error de más de dos y menos de cuatro series de objetos de las seis propuestas. Corresponde a  $SCCD5 \in (2, 3]$ .

Las respuestas propias del *nivel 2* implican la continuación, al menos, de dos de las tres series elementales (en las que el *operador "siguiente"* actúa dos veces) y una de las tres más complejas (en las que el *operador "siguiente"* actúa tres veces), sin llegar a continuar dos de ellas sin error. Comienzan a utilizar la recursión como alternativa al color como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.

**Nivel 3.** Se caracteriza por la continuación de cuatro o más series de objetos de las seis propuestas. Corresponde a  $SCCD5 \in (3, 5]$ .

Las respuestas propias del *nivel 3* implican la continuación de al menos cuatro series sin error o más de cuatro con o sin error, tanto las series elementales (en las que el *operador "siguiente"* actúa dos veces), como las más complejas (en las que el *operador "siguiente"* actúa tres veces). En este nivel se utiliza la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.

La clasificación de las respuestas por niveles puede verse en la tabla E.3, página 774 y siguientes, y la evolución de los niveles, en porcentajes por grupos de edad, en los histogramas de la Figura 8.8.

En la Figura 8.8 se observa que el **Nivel 1** es mayoritario en los tres grupos de edad inferior (*3AM*, *4A* y *4AM*) con porcentajes del 100% en el primero y del 90% en los dos siguientes. Igualmente se observa una brusca disminución hasta el 10% en el siguiente grupo de edad (*5A*), que vuelve a aumentar en los dos grupos siguientes (*5AM* y *6A*), con porcentajes del 20% y 30% respectivamente, para reducirse significativamente al 12,5% en los dos grupos de edad superior (*6AM* y *7A*).

Este nivel persiste en todo el intervalo de edad estudiado, incluso en los grupos de mayor edad, lo que pudiera ser indicativo de posibles déficits en

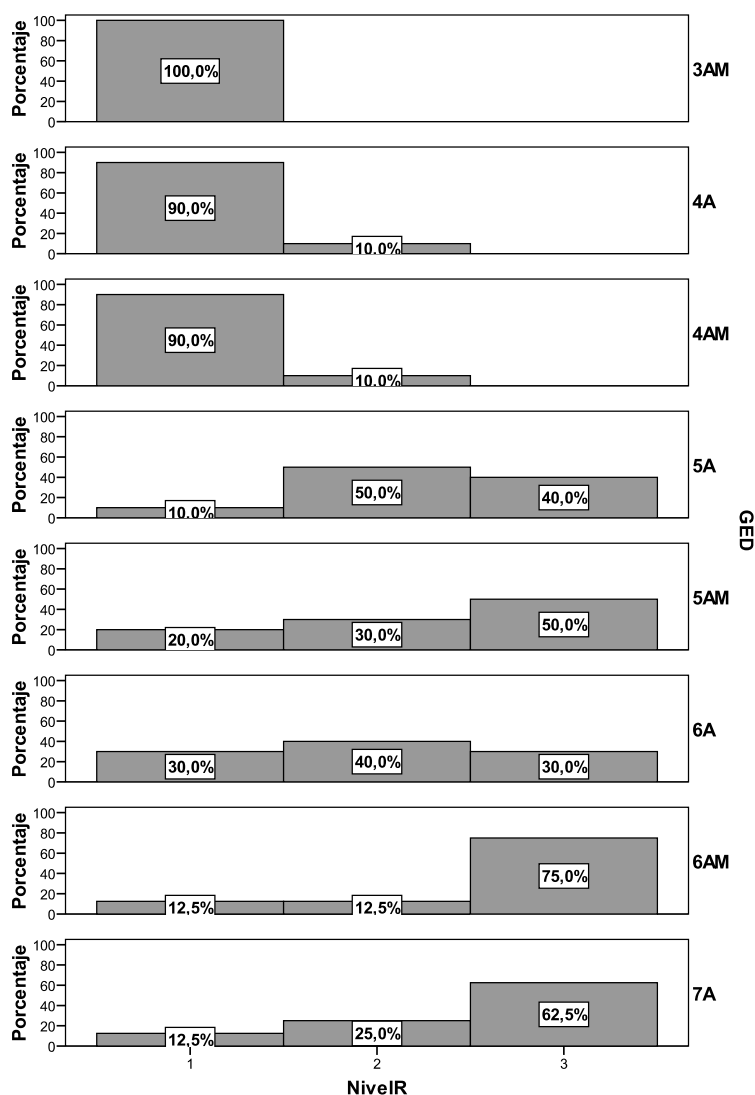


Fig. 8.8. Evolución de los niveles en las tareas recursivas por grupos de edad.

las capacidades recursivas y requerir tratamientos didácticos específicos para optimizar el aprendizaje de los conceptos numéricos y aritméticos básicos.

El Nivel 2 comienza en los grupos 4A y 4AM con un 10%, aumenta significativamente hasta el 50% en el grupo 5A (en el que es mayoritario), y sigue una tendencia decreciente con ligeros repuntes en los grupos 6A y 7A.



La mayor presencia de respuestas de este nivel tiene lugar en los grupos de cinco a seis años de edad, es decir, en el intervalo identificado como crítico en relación con el desarrollo de las capacidades recursivas, produciéndose un repunte a los siete años. La persistencia en los dos grupos de mayor edad pudiera ser también indicativa de los déficits anteriormente aludidos.

El **Nivel 3** comienza a los cinco años de edad (grupo 5A) de forma significativa con un porcentaje del 40%, disminuyendo en el grupo 6A (significativo) y siendo mayoritario en los dos grupos de edad superior con porcentajes del 75% y 62,5% respectivamente.

Por tanto, podemos concluir que:

- De los tres años y medio a los cuatro años y medio las capacidades recursivas se hallan en formación, siendo capaces en general de continuar series elementales (en las que el *operador “siguiente”* actúa dos veces) utilizando fundamentalmente el color como instrumento de identificación;
- Entre los cuatro años y los cuatro años y medio se inicia, muy lentamente, el uso de la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos;
- A los cinco años se produce un aumento brusco de esta capacidad y, como consecuencia, el comienzo de la continuación de series complejas (en las que el *operador “siguiente”* actúa tres veces).
- Entre los cinco y los siete años se observa una tendencia creciente en el uso de las capacidades recursivas y de su aplicación a la continuación de series complejas, si bien, de manera no estable produciéndose una disminución apreciable de dicha capacidad a los seis años;
- La gran mayoría de los sujetos de seis años y medio y siete años usan plenamente estas capacidades;
- El intervalo de cinco a seis años parece ser crítico en lo que se refiere al desarrollo de las capacidades recursivas;
- En el intervalo de cuatro años y medio a cinco años se produce la mayor variación.

Los resultados anteriores confirman los del estudio exploratorio, en el sentido de que las edades alrededor de los cinco años son críticas en lo que se refiere a la adquisición de las capacidades recursivas, confirmándose su estancamiento o retroceso a la edad de seis años, lo que es indicativo de una evolución no lineal. La síntesis del estudio y la caracterización de los niveles se muestra resumida en la tabla 8.36.

Nivel	Caracterización	Edad
1	Capacidad de continuar, como máximo, dos de las tres series elementales usando el color como elemento de identificación de las posiciones de los objetos. Si llegan a continuar alguna de las demás series es de manera aislada.	<p>Los mayores porcentajes se dan para sujetos de entre <i>tres años y medio y cuatro años y medio</i>, disminuyendo considerablemente a partir de los cinco años y permaneciendo residualmente incluso a las edades de seis años y medio y siete años.</p> <p>La aparición en edades superiores a los seis años puede indicar un déficit en las capacidades recursivas del sujeto.</p>
2	Capacidad de continuar al menos dos de las tres series elementales y comenzar a continuar al menos una de las tres más complejas, sin llegar a continuar dos de ellas sin error. Como alternativa al color comienzan a utilizar la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.	<p>Este nivel comienza lentamente para los sujetos de <i>cuatro años y cuatro años y medio</i>, presentando su mayor incidencia entre los <i>cinco y seis años</i> (que es máxima a los <i>cinco años</i>) y permaneciendo en los dos grupos de edad superior de forma residual o moderada.</p> <p>La permanencia en edades superiores a los seis años puede indicar un déficit en las capacidades recursivas del sujeto.</p>
3	Capacidad alta o plena para continuar series elementales o complejas, con o sin errores puntuales, usando la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.	<p>Su incidencia es mayoritaria a los <i>seis años y medio y siete años</i> (75 % y 62,5 % respectivamente), alcanzando su valor máximo a los seis años y medio (75 %). Este nivel se estabiliza en los dos grupos de edad superior, comenzando clara y bruscamente a los <i>cinco años</i>, siguiendo una tendencia creciente hasta los <i>siete</i>, si bien de forma no monótona.</p> <p>Ello es indicativo de la posible evolución no lineal de esta capacidad con la edad de los sujetos.</p>

Tabla 8.36: Caracterización de los niveles recursivos.

### 8.8.1.3 Análisis de las estrategias

Se presentan a continuación los resultados del análisis y estudio de las estrategias utilizadas en la resolución del conjunto de tareas recursivas que se recogen detalladamente en la tabla E.4, del anexo E, clasificados por niveles y según los valores de la variable **SR5**<sup>\*</sup>. Los valores de las variables que aparecen en la cabecera de las columnas se detallan en la sección 7.7.4<sup>†</sup>.

La tabla 8.37 recoge los porcentajes por grupos de edad de cada una de las estrategias en cada una de las tareas del conjunto analizado. Las columnas en las que aparece la letra o prefijo *A* designan la estrategia ascendente, mientras que la *D* designa a la descendente<sup>\*</sup>. La etiqueta *PI* indica que el sujeto comienza la serie en una posición intermedia y la continúa luego en sentido ascendente o descendente sin cometer ningún error<sup>†</sup>, mientras que *EE*, *S*, *SD* y *X* designan, respectivamente, las estrategias de ensayo y error, identificación errónea de todas las posiciones seguidas (sin hacer uso de la alternancia) en el sentido ascendente, la opción análoga a la anterior en el sentido descendente y tarea no realizada<sup>‡</sup>. Posteriormente, dichas estrategias se agruparán en la tabla 8.38 en recursivas (*A*, *D*, *PI*) y no recursivas (*EE*, *S*, *SD*).

Del examen detallado de los datos de las tablas E.4, 8.37 y 8.38, destacamos los siguientes resultados.

#### A) No realización de las tareas. Estrategia X.

Al igual que en los conjuntos anteriores, son los sujetos de 3 años y medio y 4 años los que no resuelven las tareas de mayor dificultad (tareas de la 4<sup>a</sup> a la 6<sup>a</sup>, que son aquellas en las que el operador “siguiente” actúa tres veces en la función recursiva que las define) siguiendo una tendencia creciente en ambos grupos de edad y alcanzando respectivamente el 80% y el 60% en la 6<sup>a</sup> tarea.

#### B) Estrategia SD.

Salvo en la cuarta tarea, esta estrategia es residual no superando el 5,3% en las demás tareas y el 10% en todos los grupos de edad anulándose a partir de los cinco años y medio. En la cuarta tarea tiene

<sup>\*</sup>Véase la página 776 en el anexo citado.

<sup>†</sup>Véase la página 422 y siguientes, capítulo 7.

<sup>\*</sup>Recordamos que el soporte sobre el que se hallan los elementos de estas series es una escalera, por lo que puede “recorrerse” en los dos sentidos, ascendente o descendente, y, en consecuencia, los sujetos utilizan ambos tipos de estrategias para construir las series. Los sujetos que utilizan las estrategias *S* y *SD* hacen clic en todos los escalones seguidos sin tener en cuenta las alternancias.

<sup>†</sup>Recordamos, asimismo, que los sujetos pueden utilizar esta estrategia solamente en las tareas segunda y tercera, en las que deben identificar tres posiciones en la serie. No pueden utilizarla en las demás tareas, ya que en ellas deben identificar solamente dos posiciones.

<sup>‡</sup>Para más detalles, véase de nuevo la sección 7.7.4.

una mayor incidencia entre los cinco y los seis años con porcentajes del 20 % al 30 %, alcanzando un máximo del 30 % en el grupo de cinco años y medio y siendo su presencia residual en los demás grupos de edad. El uso de esta estrategia es indicativo, al igual que el uso de la estrategia S, de la ausencia de comprensión de la tarea. Su uso se incrementa en la cuarta tarea, primera del subconjunto de tareas más complejas, e incide especialmente en los sujetos cuyas edades se hallan en el intervalo crítico mencionado.

(a)

GED	EstR1					EstR2					
	A	D	EE	S	SD	A	D	EE	PI	S	SD
3AM	20	10	30	40	0	10	10	10	10	60	0
4A	30	0	10	60	0	40	0	0	0	50	10
4AM	30	0	20	50	0	60	0	10	0	30	0
5A	60	20	10	10	0	100	0	0	0	0	0
5AM	80	0	0	10	10	90	0	10	0	0	0
6A	60	20	0	20	0	70	0	20	10	0	0
6AM	100	0	0	0	0	87,5	0	0	0	12,5	0
7A	62,5	12,5	25	0	0	100	0	0	0	0	0
<b>Total</b>	<b>53,9</b>	<b>7,9</b>	<b>11,8</b>	<b>25</b>	<b>1,3</b>	<b>68,4</b>	<b>1,3</b>	<b>6,6</b>	<b>2,6</b>	<b>19,7</b>	<b>1,3</b>

(b)

GED	EstR3					EstR4					
	A	EE	PI	S	SD	A	D	EE	S	SD	X
3AM	0	20	0	70	10	0	0	10	30	0	60
4A	20	0	0	80	0	0	0	10	60	10	20
4AM	20	0	0	70	10	0	0	20	70	10	0
5A	90	0	0	0	10	30	10	20	20	20	0
5AM	50	10	10	20	10	40	0	30	0	30	0
6A	60	30	0	10	0	40	0	40	0	20	0
6AM	87,5	12,5	0	0	0	37,5	0	25	25	12,5	0
7A	87,5	12,5	0	0	0	50	0	25	12,5	12,5	0
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>10,5</b>	<b>1,3</b>	<b>32,9</b>	<b>5,3</b>	<b>23,7</b>	<b>1,3</b>	<b>22,4</b>	<b>27,6</b>	<b>14,5</b>	<b>10,5</b>

(c)

GED	EstR5					EstR6					
	A	EE	S	SD	X	A	D	EE	S	SD	X
3AM	0	0	30	0	70	0	0	10	10	0	80
4A	10	10	40	0	40	10	0	10	20	0	60
4AM	10	30	50	10	0	0	0	50	40	10	0
5A	20	70	10	0	0	50	10	20	20	0	0
5AM	50	30	10	10	0	40	10	30	10	10	0
6A	60	20	20	0	0	30	0	40	30	0	0
6AM	62,5	37,5	0	0	0	75	0	0	25	0	0
7A	62,5	25	12,5	0	0	75	12,5	12,5	0	0	0
<b>Total</b>	<b>32,9</b>	<b>27,6</b>	<b>22,4</b>	<b>2,6</b>	<b>14,5</b>	<b>32,9</b>	<b>3,9</b>	<b>22,4</b>	<b>19,7</b>	<b>2,6</b>	<b>18,4</b>

Tabla 8.37. Estrategias en las tareas recursivas. (a) Tareas primera y segunda; (b) tercera y cuarta; (c) quinta y sexta.

**C) Estrategia S.**

Presenta una incidencia elevada en los tres grupos de edad inferior en todas las tareas, descendiendo su uso en los dos primeros grupos y en las tres últimas tareas debido al aumento de la no realización. Su uso es residual o moderado en los demás grupos y tareas con porcentajes entre el 10% y el 25%, destacando el máximo en el grupo 6A en la sexta tarea que alcanza el 30%. Al igual que la anterior, esta estrategia se usa en todas las tareas, pero a diferencia de la anterior, su uso no es residual o puntual, alcanzando porcentajes que varían entre el 19,7% y el 32,9%. No obstante, sigue una tendencia decreciente en las tres tareas de mayor dificultad (entre el 27,6% en la cuarta y el 19,7% en la sexta), debida a la menor realización de estas tareas por los dos grupos de menor edad y al aprendizaje en los grupos de mayor edad. Su uso es indicativo de la ausencia de comprensión de las tareas.

**D) Ensayo y error. Estrategia EE.**

Presenta una incidencia moderada en las tres primeras tareas, con porcentajes globales del 6,6% al 11,8%, pudiendo darse en cualquier grupo de edad con porcentajes máximos de 30% en los grupos 3AM, primera tarea, y 6A, tercera. En las tres últimas aumenta su incidencia con porcentajes globales del 22,4% al 27,6%, siendo considerable a partir de los cuatro años y medio con máximos en los grupos 6A del 40% en la cuarta tarea, 5A del 70% en la quinta y 4AM del 50% en la sexta. Su uso es nulo o residual en los dos grupos de edad superior en la sexta tarea, lo que es indicativo del aprendizaje producido.

**E) Posiciones intermedias. Estrategia PI.**

Estrategia meramente incidental en las tareas segunda y tercera, utilizada por sujetos de los grupos 3AM y 6A en la segunda y del grupo 5AM en la tercera, con porcentajes que no superan el 10%.

**F) Descendente. Estrategia D.**

Esta estrategia no aparece en las tareas tercera y quinta. En las demás su uso es incidental con porcentajes globales comprendidos entre el 1,3% (tareas 2ª y 4ª) y el 7,9% (1ª tarea); puede darse en cualquier grupo de edad y con mayor frecuencia entre los sujetos de cinco a seis años (intervalo crítico). Tanto ésta como la anterior, son estrategias

con una incidencia residual debido a la finitud de las series utilizadas y que deben tender a desaparecer desde un punto de vista evolutivo.

(a)

GED	EstR1		EstR2	
	TR	TNR	TR	TNR
3AM	30	70	30	70
4A	30	70	40	60
4AM	30	70	60	40
5A	80	20	100	0
5AM	80	20	90	10
6A	80	20	80	20
6AM	100	0	87,5	12,5
7A	75	25	100	0
<b>Total</b>	63,13	36,87	73,44	26,56

(b)

GED	EstR3		EstR4	
	TR	TNR	TR	TNR
3AM	0	100	0	40
4A	20	80	0	80
4AM	20	80	0	100
5A	90	10	40	60
5AM	60	40	40	60
6A	60	40	40	60
6AM	87,5	12,5	37,5	62,5
7A	87,5	12,5	50	50
<b>Total</b>	53,13	46,87	25,94	64,06

(c)

GED	EstR5		EstR6	
	TR	TNR	TR	TNR
3AM	0	30	0	20
4A	10	50	10	30
4AM	10	90	0	100
5A	20	80	60	40
5AM	50	50	50	50
6A	60	40	30	70
6AM	62,5	37,5	75	25
7A	62,5	37,5	87,5	12,5
<b>Total</b>	34,38	51,88	39,06	43,44

Tabla 8.38. Porcentajes totales de uso de las estrategias recursivas y no recursivas por grupos de edad. Tareas recursivas. (a) Tareas primera y segunda; (b) tercera y cuarta; (c) quinta y sexta.

**G) Ascendente. Estrategia A.**

Es la estrategia individual predominante en todas las tareas salvo en la cuarta\*, en la que predomina la estrategia S por los motivos anteriormente indicados, con porcentajes globales de uso comprendidos entre el 23,7% (4ª tarea) y el 68,4% (2ª tarea). En las tareas 5ª y 6ª (más complejas) su uso alcanza el 32,9% global.

Se trata de una estrategia que presenta tendencias crecientes con la edad en todas las tareas, alcanzando máximos que predominan en los dos grupos de mayor edad, llegando a alcanzar el 100% (grupo 6AM en la 1ª tarea y grupo 7A en la 2ª) y el 75% (grupos 6AM y 7A en la 2ª). Nótese que en el grupo 5A se alcanzan máximos del 100% y el 90% en las tareas 2ª y 3ª, porcentajes que decaen en las tres tareas de mayor dificultad y que en el grupo 6A se producen descensos significativos de los porcentajes en las tareas 1ª, 2ª y 6ª en relación con los de los dos grupos anteriores. Esta estrategia debe ser la predominante desde un punto de vista evolutivo.

**H) Las estrategias recursivas y no recursivas.**

Las estrategias recursivas son predominantes en las tres primeras tareas, mientras que las no recursivas lo son en las tres últimas, tendiendo a igualarse su uso en la última tarea†.

Por otra parte, dado el carácter incidental de las estrategias PI y D, el análisis de la evolución con la edad del uso de las estrategias recursivas coincide fundamentalmente con el de la estrategia ascendente ya mencionada.

*8.8.1.4 El etiquetaje y la recursión*

Como se ha indicado anteriormente y se detalla en las secciones 7.6.4 y 7.6.4.2, páginas 399 y 402 del capítulo 7, las tareas segunda y tercera son coincidentes salvo las etiquetas de las posiciones que forman la serie solución en la segunda, que no existen en la tercera, debiendo resolverse en este caso usando exclusivamente las capacidades recursivas.

La tabla 8.39 muestra los resultados en ambas tareas expresados en porcentajes así como sus diferencias absolutas y relativas por grupos de edad (D32 y DR32) y por niveles (DN32 y DNR32)‡.

\*Véase la tabla 8.37, página 534.

†Véanse los datos de la tabla 8.38.

‡En ambas tablas, las columnas etiquetadas con 0 y 1 indican, respectivamente, los porcentajes de no resolución y de resolución correcta, en ambas tareas, y las etiquetadas mediante D32 y DN32 las diferencias entre las columnas etiquetadas con 1 correspondientes a las tareas tercera y segunda,

(a)

GED	EvR2		EvR3		D32	DR32
	0	1	0	1		
3AM	70	30	100	0	-30	-100
4A	60	40	80	20	-20	-50
4AM	40	60	80	20	-40	-67
5A	0	100	10	90	-10	-10
5AM	10	90	40	60	-30	-33
6A	20	80	40	60	-20	-25
6AM	12,5	87,5	12,5	87,5	0	0
7A	0	100	12,5	87,5	-12,5	-12,5

(b)

NivelR	EvR2		EvR3		DN32	DNR32
	0	1	0	1		
1	55,6	44,4	80,6	19,4	-25	-56
2	0	100	23,5	76,5	-23,5	-23,5
3	4,3	95,7	17,4	82,6	-13,1	-13,7

Tabla 8.39. Porcentajes de realización de las tareas recursivas segunda y tercera y diferencias entre ellas. (a) Por grupos de edad; (b) Por niveles.

Los datos de las columnas D32 y DR32 en la subtabla 8.39(a), muestran que las mayores disminuciones en los porcentajes de resolución correcta corresponden a los tres primeros grupos de edad y a los grupos 5AM y 6A, siendo residuales o nulas en el grupo 5A y en los dos grupos de edad superior. Por tanto el uso del etiquetaje ha predominado en dichos grupos, mientras que para los sujetos de cinco y de seis años y medio a siete años ha predominado el uso de las capacidades recursivas.

Por otra parte, los datos de las columnas DN32 y DNR32 en la subtabla 8.39(b) muestran, a su vez, que las mayores disminuciones en los porcentajes de resoluciones correctas corresponden a los sujetos de los niveles 1 y 2, siendo la disminución residual para los sujetos del Nivel 3. Por tanto, el uso del etiquetaje, frente al de las capacidades recursivas, corresponde fundamentalmente a los niveles mencionados, lo que confirma lo establecido en la caracterización de los niveles\*.

#### 8.8.1.5 Modelos de ajuste

Al igual que en los demás conjuntos de tareas nos preguntamos aquí si la evolución de las medias de las valoraciones de los resultados por grupos de

es decir indican las diferencias entre los porcentajes de resoluciones correctas, en ambas tareas, por grupos de edad y niveles, DR32 y DNR32 denotan las correspondientes diferencias relativas expresadas en porcentajes.

\*Es máximo para los sujetos del Nivel 1, disminuye considerablemente para los sujetos del Nivel 2 y es residual para los sujetos del Nivel 3



edad\* se comporta de acuerdo a algún modelo matemático lineal o de otro tipo y en caso afirmativo ¿con qué grado de validez?.

La tabla 8.35, página 525, recoge los estadísticos más relevantes de la variable *SR5* y, en particular, los valores de las medias por grupos de edad, variable *MedREC*. Con los valores de esta variable se ha analizado el ajuste mediante varios modelos de regresión lineal y no lineal, considerando la variable *EDG* (edades de los grupos) como variable independiente\*. La tabla 8.40 recoge los resultados del ajuste al modelo lineal y de los mejores ajustes no lineales.

Ecuación	Resumen del modelo				
	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.
Lineal	,842	32,09	1	6	,001
Inversa	<b>,869</b>	<b>39,739</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,001</b>
S	<b>,899</b>	<b>53,660</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>,000</b>

Tabla 8.40: Comparativa de modelos de ajuste de la variable *MedREC* al variar la edad de los grupos.

Como se aprecia en la tabla 8.40, el mejor ajuste corresponde al modelo de tipo *S*, con  $R^2 = 0,899$  y significación  $p = 0,000 < 0,05$ , seguido del modelo *Inverso* con  $R^2 = 0,869$  y significación  $p = 0,001 < 0,05$ . Estos valores indican un alto grado de precisión que supera, en ambos casos, el ajuste del modelo lineal. De nuevo, el modelo más sencillo, aunque algo menos preciso que el de tipo *S*, para describir el fenómeno corresponde al modelo *Inverso*, en el que las medias de los grupos aumentan con la edad según una rama hiperbólica con asíntota horizontal en la recta  $y = b_0 = 7,035$ , que representa la máxima valoración a la que tienden asintóticamente los valores al aumentar las edades. Nótese que en este caso, el valor asintótico supera a la valoración exacta máxima en este conjunto de tareas (5), lo que es debido a la variación más rápida de las medias en relación con las de los conjuntos de tareas anteriores, lo que muestra, a su vez, que la evolución en este caso es diferente tanto desde el punto de vista cualitativo como cuantitativo.

Las ecuaciones de estos modelos son conocidas y pueden examinarse en cualquiera de las secciones correspondientes a los resultados de los anteriores conjuntos de tareas, por ejemplo, en la sección 8.7.1.5, página 512.

Las tablas E.8 y E.9 de la sección E.5, página 778 y siguientes, recogen las características de los ajustes de ambos modelos, incluyéndose los valores

\*Es decir, las medias de la variable *SR5* por grupos de edad.

\*Véanse las descripciones de estas variables en la sección 7.7.4, página 422, del capítulo anterior.

observados de la variable *MedREC*, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95% para ambos modelos.

Por su parte, la tabla E.7 del mismo anexo muestra los valores obtenidos para los coeficientes del modelo con sus significaciones al 95%. Estos valores son:  $b_0 = 7,035$  y  $b_1 = -23,793$  con significaciones respectivas  $p = 0,000$  y  $p = 0,001$ , para el modelo Inverso, y  $b_0 = 3,544$  y  $b_1 = -14,636$  con significaciones  $p = 0,000$  en ambos casos para el modelo de la curva *S* o exponencial inversa.

En el gráfico de la Figura E.1, página 779, se representan los valores observados de la variable *MedREC* y los ajustados mediante ambos modelos, lo que pone de manifiesto la bondad de los ajustes. Del mismo modo, el gráfico de la Figura E.2, página 780, muestra la independencia de los errores de ambos modelos de los valores ajustados correspondientes, lo que prueba también la significación de los mismos.

Por tanto, los resultados obtenidos indican que el desarrollo (medio) de las capacidades recursivas se aproxima mejor al comportamiento de un modelo evolutivo no lineal cuya velocidad decrece con el aumento de la edad. Al igual que en los anteriores conjuntos de tareas, parece que el intervalo de edad en el que se produce la mayor variación es en el que se construyen y consolidan tales capacidades (el intervalo de 4 a 6 años), siendo necesario cuidar la actuación didáctica para prevenir los déficits y dificultades de aprendizaje en dicha etapa.

### 8.8.2 Conclusiones del estudio de las tareas recursivas

Del análisis de los resultados discutidos en el apartado anterior (8.8.1), a cuyos epígrafes nos remitimos, se pueden establecer las conclusiones que se detallan a continuación.

#### 8.8.2.1 En relación con las frecuencias y niveles

- 1<sup>a</sup>. Se observa una evolución de las capacidades recursivas similar a la correspondiente al orden con cantidades discretas, aunque la evolución de las capacidades recursivas es más rápida y homogénea, diferente a las correspondientes al orden con cantidades continuas y al orden lineal.
- 2<sup>a</sup>. La evolución presenta las siguientes características: entre los tres años y medio y los cuatro años y medio se produce una lenta evolución; de los cuatro años y medio a los cinco años se manifiesta un aumento

brusco y muy significativo, resultando críticas las edades en torno a los cinco años; a continuación se produce una disminución hasta los seis años que se consolida hasta los seis años y medio o siete años.

- 3<sup>a</sup>. El cambio de signo (a positivo) en las asimetrías, predominante a partir de los cinco años, indica una tendencia positiva al aumento del uso de las capacidades recursivas mientras que la positividad de las curtosis en los dos grupos de edad superior indica, a su vez, una tendencia clara a la consolidación y estabilización de estas capacidades.
- 4<sup>a</sup>. La capacidad de continuar series recursivas se desarrolla pasando por los siguientes niveles y períodos de transición:
  - *Nivel 1 (3AM-4AM)*: continuar, como máximo, dos series elementales usando el etiquetaje como elemento de identificación de las posiciones correctas;
  - *Transición 1 (4AM-5A)*: paso de continuar series sencillas a continuar series complejas;
  - *Nivel 2 (4A-4AM-6A)*: continuar series elementales y comenzar a continuar series complejas sin llegar a continuarlas sin errores; comenzar la utilización de la recursión en lugar del etiquetaje como instrumento de identificación de las posiciones correctas;
  - *Transición 2 (5A-6AM)*: paso a continuar series complejas, con o sin errores puntuales;
  - *Nivel 3 (5AM-6AM)*: capacidad alta o plena para continuar series elementales o complejas, con o sin errores puntuales, usando la recursión como instrumento de identificación de las posiciones correctas.
- 5<sup>a</sup>. Entre los cinco años y medio y los seis años se pueden encontrar porcentajes significativos de comportamientos que todavía se encuentran en el primer nivel, siendo residuales entre los seis años y medio y los siete años. Ello indica que el desarrollo de esta capacidad es complejo, es decir, que no se completa totalmente en el periodo de edad considerado y que son necesarios tratamientos didácticos específicos para paliar la posible influencia negativa en la construcción de los conceptos numéricos y aritméticos.

#### 8.8.2.2 En relación con las estrategias

- 1<sup>a</sup>. La no realización de las tareas (X), al igual que en los conjuntos anteriores, se concentra en las de mayor dificultad (en las que el *operador*

“siguiente” actúa tres veces), de la 4<sup>a</sup> a la 6<sup>a</sup>, y se produce exclusivamente en los dos grupos de menor y, especialmente, en las tareas 5<sup>a</sup> y 6<sup>a</sup>. Todo ello indica, de nuevo, que las tareas son adecuadas para el intervalo de edad considerado al nivel de las denominadas funciones onto–epistémicas.

- 2<sup>a</sup>. La estrategia SD es residual en todas las tareas y grupos de edad, anulándose a partir de los cinco años y medio, salvo en la 4<sup>a</sup> tarea, en la que presenta una mayor incidencia entre los cinco y los seis años con porcentajes que no superan el 30 %; esta tarea es la inicial del subconjunto de tareas más complejas, lo que incide especialmente en los sujetos cuyas edades se hallan en el intervalo crítico ya mencionado.
- 3<sup>a</sup>. La estrategia S se usa en todas las tareas de manera no residual, alcanzando porcentajes de uso por tarea entre el 19,7 % y el 32,9 %. Su incidencia es elevada en los tres grupos de edad inferior en todas las tareas, descendiendo en los dos primeros y en las tres últimas tareas debido al aumento de la no realización; en los demás grupos de edad y tareas su incidencia es residual o moderada. Su uso, al igual que el de la anterior, es indicativo de la ausencia de comprensión de las tareas.
- 4<sup>a</sup>. La estrategia de ensayo y error (EE) presenta una incidencia moderada en las tres primeras tareas pudiendo darse en cualquier grupo de edad. En las tres últimas tareas su incidencia es considerable desde los cuatro años y medio hasta los seis años, haciéndose su uso nulo o residual al avanzar las tareas en los dos grupos de edad superior.
- 5<sup>a</sup>. La incidencia de la estrategia PI, que se reduce exclusivamente a las tareas segunda y tercera, es residual con porcentajes que no superan el 10 % en los grupos 3AM, 5AM y 6A.
- 6<sup>a</sup>. La estrategia D es igualmente residual y, al igual que la anterior, debe tender a desaparecer desde un punto de vista evolutivo\*.
- 7<sup>a</sup>. La estrategia A es predominante en el conjunto de tareas. Presenta tendencias crecientes alcanzando máximos que predominan en los dos grupos de mayor edad. Su incidencia decae, como es natural, en las tres tareas de mayor dificultad y, de manera especial, en el grupo 6A, en el que se producen descensos significativos en las tareas 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> y 6<sup>a</sup>. Esta estrategia, como indican los datos, es la predominante desde un punto de vista evolutivo.
- 8<sup>a</sup>. Globalmente, las estrategias recursivas son predominantes en las tres

\*Puede darse en cualquier grupo de edad y con mayor frecuencia entre los sujetos de cinco a seis años (intervalo crítico).

primeras tareas, mientras que las no recursivas lo son en las tres últimas, tendiendo a igualarse su incidencia en la última tarea. Dado el carácter incidental de las estrategias PI y D, la evolución de las estrategias recursivas coincide con la de la estrategia ascendente (A).

### 8.8.2.3 Sobre el etiquetaje y la recursión

Del análisis comparativo de las tareas segunda y tercera, realizado en la sección 8.8.1.4, página 535, se concluye:

- 1<sup>a</sup>. El uso del etiquetaje predomina principalmente entre los tres años y medio y los cuatro años y medio\* mientras que para los sujetos de cinco años y de seis años y medio a siete años predomina el uso de las capacidades recursivas.
- 2<sup>a</sup>. El uso del etiquetaje, frente al de las capacidades recursivas, corresponde fundamentalmente a los sujetos del *Nivel 1*, disminuye considerablemente para los sujetos del *Nivel 2* y es residual para los sujetos del *Nivel 3*.

### 8.8.2.4 En relación con los modelos de ajuste

- 1<sup>a</sup>. Las medias de las valoraciones de los resultados por grupos de edad (*MedREC* (dependiente) y las edades de los grupos *EDG* (independiente)) se ajustan a dos modelos conocidos de regresión no lineal, Inverso y de tipo S, con un alto grado de precisión, independencia de errores y alta significación. Ello apoya la hipótesis de una evolución no lineal de la capacidad para continuar series recursivas al aumentar la edad de los sujetos.
- 2<sup>a</sup>. El modelo de mayor grado de precisión corresponde al modelo de tipo S, con  $R^2 = 0,899$  y significación  $p = 0,000 < 0,05$ , seguido del modelo Inverso ( $R^2 = 0,869$ , significación  $p = 0,001 < 0,05$ ). Pero el modelo Inverso, aún cuando presenta una precisión algo menor, es el que proporciona una interpretación más sencilla, ya que las medias de los grupos aumentan con la edad según una rama de hipérbola con asíntota horizontal en la recta  $y = b_0 = 7,035$ , valor que supera la valoración máxima en este conjunto de tareas (5), lo que muestra que la evolución es diferente a las de los conjuntos de tareas anteriores. En cualquier caso, se puede afirmar que la evolución de la capacidad para continuar series recursivas se puede explicar con notable precisión mediante un modelo evolutivo no lineal cuya velocidad decrece al aumentar la edad.

\*Estando presente, en menor medida, en los sujetos de cinco años y medio y seis años de edad.

- 3<sup>a</sup>. El intervalo de edad en el que se produce la mayor variación y en el que se forman las capacidades correspondientes, es el de cuatro años y medio a seis años y medio, con una variación especialmente pronunciada entre los cuatro años y medio y los cinco años. De nuevo se incide en la necesidad de la actuación didáctica a lo largo de dicho periodo para prevenir y paliar los déficits y las dificultades que aparezcan en este aspecto recursivo y en los aspectos numéricos y aritméticos que en él se apoyan.

### 8.9 Estudio comparativo de las tareas

En esta sección se realiza un análisis comparativo de los conjuntos de tareas y se estudia el contraste y grado de validez del modelo evolutivo de competencias ordinales y recursivas que se propone y que se puede consultar en la sección 6.3 del capítulo 6, página 302 y siguientes. Los datos figuran en las tablas F.1 y F.2 (páginas 783 y 785 y siguientes), que recogen, respectivamente, las valoraciones totales de las respuestas de los sujetos y los niveles asignados a dichas respuestas en los cuatro conjuntos de tareas. Asimismo, en las secciones 8.5.1.3, 8.6.1.5, 8.7.1.5 y 8.8.1.5, páginas 440, 471, 512 y 536 y siguientes y en los anexos citados en ellas se incluyen las características detalladas de los modelos de ajuste encontrados en cada caso para las medias de las valoraciones por grupos de edad en cada conjunto de tareas. A partir de la información mencionada se realiza el análisis que se describe en los apartados que siguen.

#### 8.9.1 Análisis comparativo

La tabla F.3 recoge las medias de las valoraciones de las respuestas de los sujetos por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas mientras que los gráficos de la Figura F.1 reflejan las distribuciones de las medias de las valoraciones por grupos de edad para los tres conjuntos de tareas ordinales\*. Del mismo modo, los gráficos de la Figura 8.9 muestran la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad, junto a los ajustes de las mismas obtenidos mediante los modelos inversos correspondientes y mediante los modelos más precisos encontrados para cada conjunto de tareas<sup>†</sup>. Recor-

\*Véase la página 786 y siguientes, anexo F.

<sup>†</sup>Recordamos que los modelos más precisos encontrados para estos tres conjuntos de tareas son, respectivamente, los modelos S (orden lineal), Inverso (orden con cantidades discretas) y S (orden con cantidades continuas).

damos que los modelos de interpretación más sencilla, y a la vez con grados de precisión muy bueno o excelente, son los modelos inversos\*.

El análisis de los resultados citados y la información mostrada en los gráficos de la Figura 8.9 confirman la existencia de un desfase entre la evolución con la edad de las capacidades ordinales con cantidades discretas y con cantidades continuas y se observa una evolución lenta y diferenciada de las capacidades ordinales relativas a la cantidad continua y discreta, aunque en grados inferiores a las capacidades ordinales correspondientes a las tareas de orden lineal.

La singularidad del valor correspondiente al grupo de cinco años en las tareas de orden con cantidades discretas, también se observó en el grupo de cinco años y medio en las mismas tareas del estudio exploratorio. Creemos que dicho comportamiento viene a expresar el aumento brusco en estas edades de las capacidades ordinales con cantidades discretas y su consolidación en edades posteriores. Por tanto, podemos concluir que:

la evolución de las capacidades ordinales por grupos de edad para se produce según el modelo evolutivo propuesto (gráfico 8.9(a)), lo que confirman los ajustes correspondientes a los modelos no lineales encontrados (gráficos 8.9(b) y 8.9(c)).

Las conclusiones anteriores se deducen también de los gráficos de la Figura 8.10\*, en los que se incluyen los niveles asignados a los sujetos en los tres conjuntos de tareas ordinales.

Del mismo modo, los gráficos de la Figura 8.11 confirman la diferente evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad en las tareas recursivas en relación con las ordinales y por encima de las correspondientes al orden con cantidades discretas, llegando a superar las correspondientes al orden con cantidades continuas en algunos grupos de edad a partir de los cinco años. Este resultado pone de manifiesto la intervención de capacidades especiales, como son el reconocimiento de patrones y la recursividad,

\*La determinación más exacta de los modelos correspondientes deberá realizarse en estudios posteriores con mayor tamaño muestral. Sin embargo, con las limitaciones de la investigación, los valores asintóticos que proporcionan los modelos inversos son próximos a las valoraciones máximas (5) en cada conjunto de tareas, lo que no sucede con los modelos de tipo S y, especialmente, en las tareas de orden con cantidades discretas y en las recursivas, cuyos valores asintóticos respectivos son  $e^{b_0} = e^{3,334} = 28,05$  y  $e^{b_0} = e^{3,544} = 34,61$ , muy alejados de las valoraciones máximas respectivas y que expresan la fuerte variación de las medias que se produce, en ambos casos, alrededor de los cinco años de edad.

\*Nótese que en el cálculo de las modas se toma el menor valor de los niveles si la distribución resulta bimodal. Así, por ejemplo, la distribución **NivelIL** para los sujetos de cuatro años es bimodal con valores 2 y 3 tomándose el valor 2 como moda. Para los sujetos de cinco años la distribución **NivelICC** es también bimodal con valores 1 y 2, tomándose como moda el valor 1 en este caso.

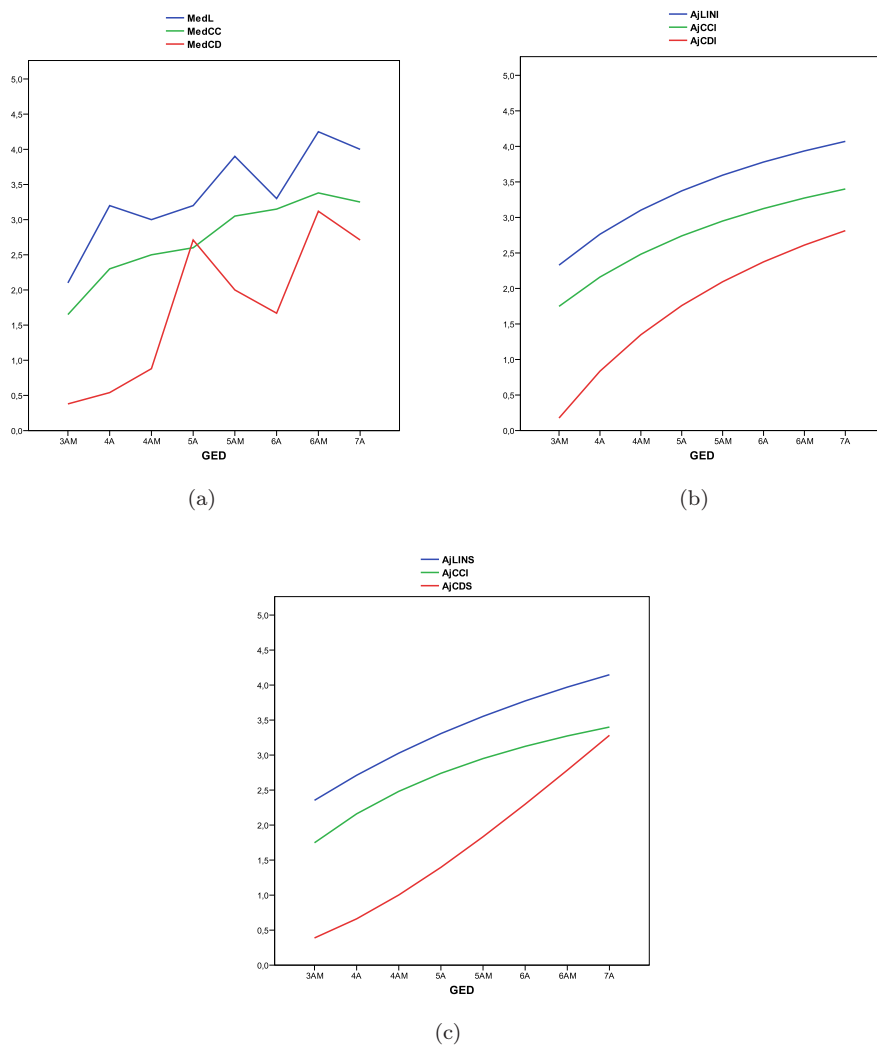


Fig. 8.9. Evolución de las medias por grupos de edad para los tres conjuntos de tareas ordinales. (a) Valores obtenidos. (b) Ajustes según los modelos *inversos*. (c) Ajustes según los modelos más precisos.

con componentes perceptivas y lógico-matemáticas diferentes a las correspondientes a los tres conjuntos de tareas ordinales, como son la antisimetría y transitividad, en las que priman los componentes verbales y lógicos. Este comportamiento evolutivo diferente *distingue las capacidades recursivas de las propiamente ordinales*, lo que debe tenerse en cuenta en la didáctica de estos conceptos y de sus relaciones, tanto desde el punto de vista matemático



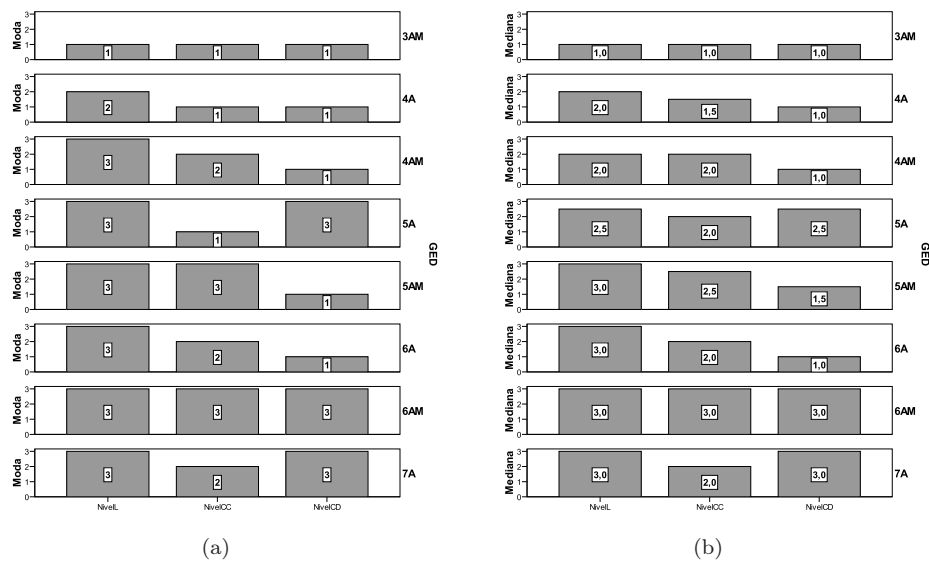


Fig. 8.10. Distribuciones de las modas y medianas de los niveles por grupos de edad en los tres conjuntos de tareas ordinales. (a) Modas (b) Medianas.

como desde el papel que juegan el orden y la recursividad en la formación de las ideas de cantidad y número.

En definitiva, se concluye que:

la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad para las capacidades ordinales y recursivas se produce según el modelo evolutivo propuesto (gráfico 8.11(a)), lo que confirman los ajustes correspondientes a los modelos no lineales encontrados (gráficos 8.11(b) y 8.11(c)).

Por otra parte, los gráficos de la Figura 8.11 muestran, además de las diferencias entre los tipos de tareas, la semejanza evolutiva entre las capacidades ordinales con cantidades discretas y las capacidades recursivas (más rápida), aunque evolucionando estas de una forma más rápida. Se puede decir que existe una influencia mutua entre la evolución del orden con cantidades discretas y el reconocimiento de patrones recursivos en los sujetos, lo que pone de manifiesto el valor del coeficiente de correlación lineal de Pearson entre ambas medias por grupos de edad, que es 0,968 con significación bilateral 0,000 al 99 %.

Del mismo modo, las correlaciones de la edad con las valoraciones de los sujetos, con las medias de las valoraciones por grupos de edad y con los

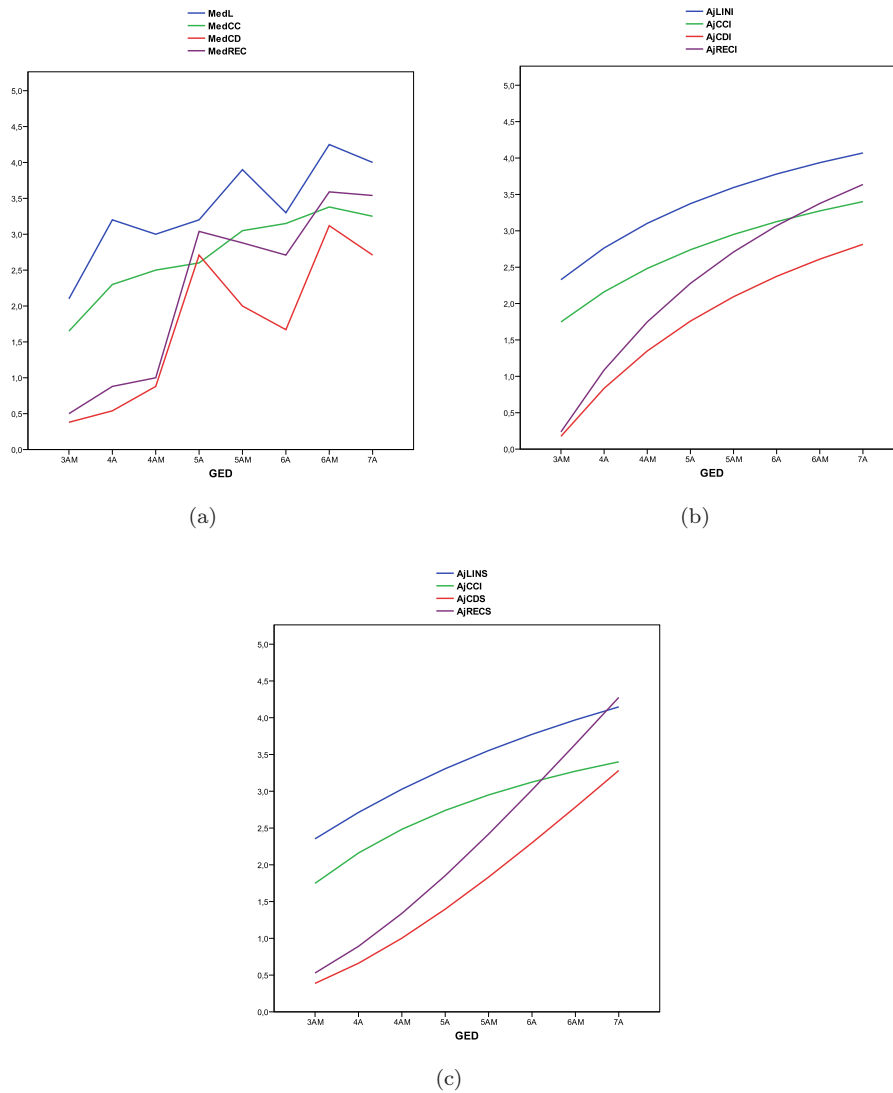


Fig. 8.11. Evolución de las medias por grupos de edad para los cuatro conjuntos de tareas (incluyendo las recursivas). (a) Valores obtenidos. (b) Ajustes de las medias según los modelos *inversos*. (c) Ajustes de las medias según los modelos más precisos.

niveles de los sujetos y de ellas entre sí en los cuatro conjuntos de tareas son, en ocasiones, elevadas y altamente significativas, como muestra la tabla F.7, lo que confirma la evolución conjunta e interdependiente de las capacidades analizadas\*.

\*En particular, se han hallado interdependencias altamente significativas de tipo logarítmico

Por su parte, el gráfico 8.11(a) muestra los descensos relativos que se producen a los seis años de edad en las medias en orden lineal, orden con cantidades discretas y tareas recursivas, muy pronunciado en el caso del orden con cantidades discretas; este hecho, que también se observó en el estudio exploratorio, puede ser indicativo de que las capacidades correspondientes se consolidan a edades posteriores a los seis años, a pesar de que exista un desarrollo significativo entre los cuatro años y medio y los cinco años y medio.

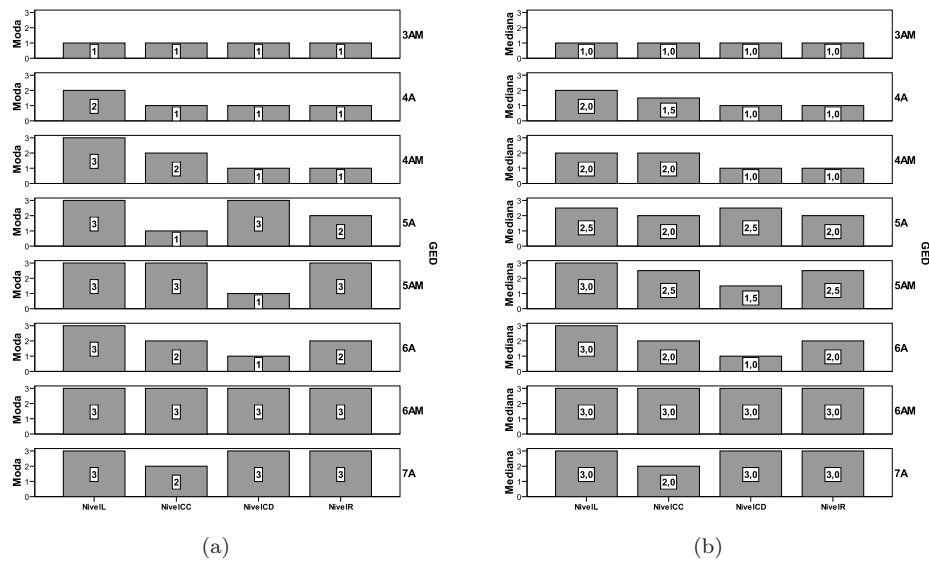


Fig. 8.12. Distribuciones de las modas y medianas de los niveles por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. (a) Modas (b) Medianas.

De las tablas F.2, F.4 y F.5\*, y teniendo en cuenta la información de la Figura 8.12, se deducen las consideraciones que se mencionan a continuación sobre la distribución de los niveles<sup>†</sup> y el cuadro evolutivo que se incluye más adelante:

- Los sujetos de **tres años y medio** se hallan mayoritariamente en el primer nivel de competencias en los cuatro aspectos estudiados. A esta edad se manifiesta claramente el inicio del nivel 2 en el orden lineal y en el orden con cantidades continuas.
- Los sujetos de **cuatro años** se hallan mayoritariamente en los niveles

y logístico entre las variables **MedCD** y **MedREC**, entre otras, lo que deberá ser analizado en estudios posteriores.

\*Véanse las páginas 785, 787 y 788, anexo F.

<sup>†</sup>Véase la caracterización y descripción de los mismos en la páginas: 436, orden lineal; 447, orden con cantidades continuas; 484, orden con cantidades discretas; 526, tareas recursivas.

2 y 3 en orden lineal, en los niveles 1 y 2 en orden con cantidades continuas y en el nivel 1 en las demás capacidades. A esta edad se manifiesta claramente el inicio del nivel 3 en orden lineal así como, testimonialmente, los niveles 3 en orden con cantidades continuas y 2 en las capacidades recursivas, siendo mayoritario el nivel 2 en el orden lineal.

- Los sujetos de **cuatro años y medio** se hallan mayoritariamente en el nivel 3 del orden lineal, en el nivel 2 del orden con cantidades continuas, con presencia significativa de los niveles anteriores en ambos casos, y en el nivel 1 en las demás competencias. A esta edad aparece por primera vez el nivel 2 en orden con cantidades discretas.
- Los sujetos de **cinco años** se hallan mayoritariamente en el nivel 3 del orden lineal, con presencia significativa de los niveles anteriores, en los niveles 1 y 2 en orden con cantidades continuas, en los niveles 1 y 3 en orden con cantidades discretas y en los niveles 2 y 3 en las capacidades recursivas. A esta edad aparece por primera vez y con claridad el nivel 3 en orden con cantidades discretas y en capacidades recursivas, y alcanza el máximo el nivel 2 en capacidades recursivas.
- Los sujetos de **cinco años y medio** se hallan mayoritariamente en el nivel 3 en orden lineal y en orden con cantidades continuas, con presencia significativa de los niveles anteriores en este último caso, en el nivel 1 en orden con cantidades discretas, con presencia significativa de los niveles superiores, y en el nivel 3 en capacidades recursivas, con presencia significativa de los niveles anteriores. A esta edad alcanza el máximo el nivel 2 en orden con cantidades discretas. Se confirma la conjetura realizada en el estudio exploratorio que afirmaba que a esta edad los niveles más frecuentes son: el nivel 3 en orden lineal, los niveles 2 o 3 en orden con cantidades continuas, el nivel 3 en capacidades recursivas y el nivel 2 en orden con cantidades discretas.
- Los sujetos de **seis años** se hallan mayoritariamente en el nivel 3 en orden lineal, en el nivel 2 en orden con cantidades continuas con una incidencia significativa, en el nivel 1 en orden con cantidades discretas y en el nivel 2 en capacidades recursivas, lo que supone un descenso relativo de las capacidades ordinales y recursivas y confirma, de acuerdo con lo indicado en el estudio exploratorio, que los niveles no se consolidan simplemente al aumentar la edad hasta edades inmediatamente próximas, sino a edades posteriores. Este hecho puede tener repercusiones negativas en el aprendizaje de la cantidad, el número y

la aritmética.

- Los sujetos de **seis años y medio** se hallan mayoritariamente en el nivel 3 de capacidades en los cuatro aspectos estudiados, alcanzándose a esta edad la máxima incidencia de dicho nivel.
- Los sujetos de **siete años** se hallan mayoritariamente en el nivel 3 en orden lineal, en el nivel 2 en orden con cantidades continuas, cuya incidencia es máxima a esta edad, en el nivel 3 en orden con cantidades discretas y en el nivel 3 en capacidades recursivas. El descenso en orden con cantidades continuas y la presencia significativa del nivel 1 en orden con cantidades discretas constatan la falta de consolidación anteriormente aludida y la evolución no lineal de estas capacidades.

Asimismo, de acuerdo con la distribución anteriormente descrita, la tabla 8.41 recoge la situación de los niveles por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas según las medidas centrales de las distribuciones respectivas\*.

	Situación de los niveles							
	3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A	6AM	7A
NivelL	1	2	2-3	2-3	3	2-3	3	3
NivelCC	1	1-2	2	1-2	2-3	2	3	2
NivelCD	1	1	1	2-3	1-2	1-2	3	2-3
NivelR	1	1	1	2	2-3	2	3	3

Tabla 8.41: Situación de los niveles por grupos de edad según las medidas centrales de las distribuciones respectivas en los cuatro conjuntos de tareas.

En la misma se observa:

- ❖ El *nivel 3* en orden lineal comienza a manifestarse significativamente a partir de los cuatro años y medio y es predominante a partir de los cinco años y medio.
- ❖ El *nivel 3* en orden con cantidades continuas comienza a manifestarse significativamente a partir de los cinco años y medio y es predominante a los seis años y medio.
- ❖ El *nivel 3* en orden con cantidades discretas, aún cuando se manifiesta significativamente a los cinco años, no es predominante hasta los seis años y medio.
- ❖ El *nivel 3* en capacidades recursivas comienza a manifestarse signifi-

\*Esta tabla resume los valores de la tabla F.6, página 789, anexo F.

cativamentea partir de los cinco años y medio y es predominante a partir de los seis años y medio.

- ❖ Con ello, la transición entre el *nivel 3* en orden lineal y *nivel 3* en orden con cantidades continuas se produce a partir de los cinco años y medio y entre este último y el *nivel 3* en orden con cantidades discretas a partir de los seis años y medio.
- ❖ El desarrollo significativo de las capacidades recursivas a partir de los cinco años y medio parece apoyar\* el predominio del *nivel 3* en orden con cantidades discretas a partir de los seis años y medio.

Por último, la tabla 8.42 resume las capacidades ordinales y recursivas según los niveles más frecuentes por grupos de edad anteriormente detallados.

GED	O. Lin.	O. C. Cont.	O. C. Disc.	C. Rec.
3AM	<p>Capacidad para aplicar o identificar, de forma aislada o por ensayo y error, como máximo, dos conceptos ordinales infralógicos: alguno de los conceptos antes que o después que o una combinación de uno de ellos con la identificación de una de las series de tres o cuatro elementos.</p> <p>Inicio de la capacidad para identificar una serie sencilla de tres elementos ordenados linealmente y de aplicar, no sin fallos, los conceptos antes que y después que.</p>	<p>Capacidad para ordenar por longitudes series de dos objetos en posible combinación con la ordenación incompleta de series de más objetos por ensayo y error.</p> <p>Inicio de la capacidad para ordenar por longitudes series de dos y tres objetos, éstas últimas de forma completa o incompleta</p>	<p>Capacidad para ordenar, como máximo, dos series sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, reconociendo las cantidades discretas solo en tareas aisladas.</p>	<p>Capacidad para continuar, como máximo, dos de las tres series elementales, usando el color como elemento de identificación de las posiciones de los objetos. Si llegan a continuar alguna de las demás series es de manera aislada.</p>

Continúa en la página siguiente ...

Tabla 8.42: Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.

\*Véanse en la tabla F.7, página 790, anexo F, las elevadas correlaciones existentes en las valoraciones medias por grupos de edad y en los niveles de los sujetos entre ambos conjuntos de tareas.

... viene de la página anterior.

GED	O. Lin.	O. C. Cont.	O. C. Disc.	C. Rec.
4A	<p>Capacidad para identificar una serie sencilla de tres elementos ordenados linealmente y de aplicar, no sin fallos, los conceptos antes que y después que. Comienzo de la identificación de series de cuatro elementos ordenados con criterios verbales infralógicos.</p> <p>Inicio de la capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos antes que y después que y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.</p>	<p>Capacidad para ordenar por longitudes series de dos objetos en posible combinación con la ordenación incompleta de series de más objetos por ensayo y error.</p> <p>Inicio de la capacidad para ordenar por longitudes series de dos y tres objetos, estas últimas de forma completa o incompleta</p>	<p>Capacidad para ordenar, como máximo, dos series sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, reconociendo las cantidades discretas solo en tareas aisladas.</p>	<p>Capacidad para continuar, como máximo, dos de las tres series elementales, usando el color como elemento de identificación de las posiciones de los objetos. Si llegan a continuar alguna de las demás series es de manera aislada.</p>
4AM	<p>Capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos antes que y después que y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.</p>	<p>Capacidad para ordenar por longitudes series de dos y tres objetos, éstas últimas de forma completa o incompleta. Inicio de la capacidad para ordenar por longitudes series de cuatro objetos.</p>	<p>Capacidad para ordenar, como máximo, dos series sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, reconociendo las cantidades discretas solo en tareas aisladas.</p>	<p>Capacidad para continuar, como máximo, dos de las tres series elementales, usando el color como elemento de identificación de las posiciones de los objetos. Si llegan a continuar alguna de las demás series es de manera aislada.</p>

Continúa en la página siguiente ...

Tabla 8.42: Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.

... viene de la página anterior.

GED	O. Lin.	O. C. Cont.	O. C. Disc.	C. Rec.
5A	Capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos antes que y después que y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.	Capacidad para ordenar por longitudes series de dos objetos en posible combinación con la ordenación incompleta de series de más objetos por ensayo y error.  Capacidad moderada para ordenar por longitudes series de dos y tres objetos, estas últimas de forma completa o incompleta. Inicio de la capacidad para ordenar por longitudes series de cuatro objetos.	Capacidad para ordenar, como máximo, dos series sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, reconociendo las cantidades discretas solo en tareas aisladas.  Inicio de la capacidad alta o plena para ordenar series de cantidades discretas de forma completa o incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando la intervención de las cantidades discretas en cualquiera de las situaciones tratadas.	Capacidad para continuar al menos dos de las tres series elementales y comenzar a continuar al menos una de las tres más complejas, sin llegar a continuar dos de ellas sin error. Comienzan a utilizar la recursión, como alternativa al color, como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.  Inicio de la capacidad alta o plena para continuar series elementales o complejas, con o sin errores puntuales, usando la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.

Continúa en la página siguiente ...

Tabla 8.42: Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.



... viene de la página anterior.

GED	O. Lin.	O. C. Cont.	O. C. Disc.	C. Rec.
5AM	Capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos antes que y después que y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.	Capacidad alta o plena para ordenar por longitudes, de forma completa, series de dos y tres objetos y de ordenar por longitudes series de cuatro objetos de forma completa o incompleta.	Capacidad para ordenar, como máximo, dos series sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, reconociendo las cantidades discretas solo en tareas aisladas.  En transición a la capacidad alta o plena para ordenar series de cantidades discretas de forma completa o incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando la intervención de las cantidades discretas en cualquiera de las situaciones tratadas.	Capacidad alta o plena para continuar series elementales o complejas, con o sin errores puntuales, usando la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.

Continua en la página siguiente ...

Tabla 8.42: Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.

... viene de la página anterior.

GED	O. Lin.	O. C. Cont.	O. C. Disc.	C. Rec.
6A	Capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos antes que y después que y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.	Capacidad para ordenar por longitudes series de dos y tres objetos, éstas últimas de forma completa o incompleta.  Inicio de la capacidad para ordenar por longitudes series de cuatro objetos.	Capacidad para ordenar, como máximo, dos series sencillas de cantidades discretas, con o sin objeto sobrante, de forma completa o incompleta, reconociendo las cantidades discretas solo en tareas aisladas.  En transición a la capacidad alta o plena para ordenar series de cantidades discretas de forma completa o incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando la intervención de las cantidades discretas en cualquiera de las situaciones tratadas.	Capacidad para continuar al menos dos de las tres series elementales y comenzar a continuar al menos una de las tres más complejas, sin llegar a continuar dos de ellas sin error. Comienzan a utilizar la recursión, como alternativa al color, para identificar las posiciones de los objetos.  En transición a la capacidad alta o plena para continuar series elementales o complejas, con o sin errores puntuales, usando la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.
6AM	Capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos antes que y después que y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.	Capacidad alta o plena para ordenar por longitudes, de forma completa, series de dos y tres objetos y de ordenar por longitudes series de cuatro objetos de forma completa o incompleta.	Capacidad alta o plena para ordenar series de cantidades discretas de forma completa o incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando la intervención de las cantidades discretas en cualquiera de las situaciones tratadas.	Capacidad alta o plena para continuar series elementales o complejas, con o sin errores puntuales, usando la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.

Continúa en la página siguiente ...

Tabla 8.42: Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.

... viene de la página anterior.

GED	O. Lin.	O. C. Cont.	O. C. Disc.	C. Rec.
7A	Capacidad alta o plena para aplicar correctamente los conceptos antes que y después que y para identificar series de tres o cuatro objetos ordenados linealmente mediante criterios verbales infralógicos.	Capacidad para ordenar por longitudes series de dos y tres objetos, éstas últimas de forma completa o incompleta.  Inicio de la capacidad para ordenar por longitudes series de cuatro objetos.	Capacidad alta o plena para ordenar series de cantidades discretas de forma completa o incompleta, con o sin objeto sobrante, identificando la intervención de las cantidades discretas en cualquiera de las situaciones tratadas.	Capacidad alta o plena para continuar series elementales o complejas, con o sin errores puntuales, usando la recursión como instrumento de identificación de las posiciones de los objetos.

Tabla 8.42: Capacidades según los niveles más frecuentes por grupos de edad.

### 8.9.1.1 Ajustes al modelo evolutivo

Para analizar el ajuste de la evolución observada al modelo propuesto, designaremos con **1**, **2** y **3** las valoraciones respectivas en orden lineal, en orden con cantidades continuas y en orden con cantidades discretas. Partiendo de los datos de la tabla F.1, la subtabla 8.43(a) recoge los porcentajes de sujetos por grupos de edad, cuya valoración es la mayor de las tres posibles en los tres conjuntos de tareas ordinales\*, de manera que un sujeto cuya evolución se adapta exactamente al modelo propuesto debe tener una valoración en orden lineal mayor o igual que la obtenida en orden con cantidades continuas y ésta debe ser mayor o igual que la obtenida en orden con cantidades discretas. Designaremos esta situación mediante la secuencia **123**, de modo que las distintas permutaciones de dichos números designan todas las situaciones posibles en relación con el seguimiento del modelo y las desviaciones posibles. Estas situaciones se recogen en porcentajes por grupos de edad en la subtabla 8.43(b).

Del análisis de la información recogida en la subtabla 8.43(a), destacamos los siguientes resultados:

\*Así, por ejemplo, la primera fila de la subtabla 8.43(a) indica que el 80% de las sujetos de tres años y medio obtienen la mayor valoración en orden lineal, el 20% en orden con cantidades continuas y ninguno obtiene una valoración en orden con cantidades discretas mayor que las anteriores.

(a)

GED	ModTipo		
	1	2	3
3AM	80,0	20,0	,0
4A	90,0	10,0	,0
4AM	70,0	30,0	,0
5A	40,0	20,0	40,0
5AM	70,0	10,0	20,0
6A	60,0	40,0	,0
6AM	75,0	12,5	12,5
7A	75,0	25,0	,0
<b>Total</b>	<b>69,7</b>	<b>21,1</b>	<b>9,2</b>

(b)

GED	ModTipoC					
	123	132	213	231	312	321
3AM	60,0	20,0	20,0	,0	,0	,0
4A	90,0	,0	10,0	,0	,0	,0
4AM	70,0	,0	20,0	10,0	,0	,0
5A	30,0	10,0	10,0	10,0	40,0	,0
5AM	70,0	,0	10,0	,0	10,0	10,0
6A	40,0	20,0	20,0	20,0	,0	,0
6AM	62,5	12,5	12,5	,0	12,5	,0
7A	25,0	50,0	25,0	,0	,0	,0
<b>Total</b>	<b>56,6</b>	<b>13,2</b>	<b>15,8</b>	<b>5,3</b>	<b>7,9</b>	<b>1,3</b>

Tabla 8.43. (a) Porcentajes de sujetos por grupos de edad cuya valoración es mayor en cada uno de los tres conjuntos de tareas ordinales; (b) porcentajes de sujetos por grupos de edad según la secuencia ordenada obtenida en las valoraciones correspondientes a las tareas ordinales.

- ❖ El 69,7% de los sujetos alcanzan la mayor valoración en orden lineal y son una amplia mayoría en todos los grupos de edad, salvo en el grupo de cinco años, en el que el porcentaje se iguala al correspondiente al orden con cantidades discretas. A esta edad comienzan a manifestarse de forma brusca e importante las capacidades ordinales referidas a la cantidad discreta, que no se consolidan hasta edades posteriores (seis años y medio o siete años).
- ❖ El 21,1% de los sujetos alcanzan su mayor valoración en orden con cantidades continuas en todos los grupos de edad, con mayor incidencia en los grupos de cuatro años y medio, seis y siete años. Esta situación puede indicar cierto déficit en las capacidades ordinales a nivel verbal.

- ❖ El 9,2% de los sujetos alcanzan su mayor valoración en orden con cantidades discretas, situación que se produce únicamente en los grupos de cinco años y cinco y medio, grupos en los que estas capacidades comienzan a manifestarse para consolidarse en el grupo de seis años y medio.

Igualmente, de los datos de la subtabla 8.43(b), destacamos:

- ❖ El 56,6% de los sujetos siguen exactamente el modelo evolutivo propuesto con mayoría en todos los grupos de edad salvo en los de cinco y siete años: en el primero por los motivos ya citados, y en el segundo debido a que el 50% de los sujetos de este grupo obtienen mayor valoración en orden con cantidades discretas que en orden con cantidades continuas, cuya evolución es menos estable.
- ❖ Los grupos de edad en los que se observa mayor diversidad de situaciones son los de cinco a seis años, intervalo crítico en el que las capacidades ordinales y recursivas se hallan en transición o consolidación, por lo que la acción didáctica en todos estos aspectos debería comenzar con anterioridad.
- ❖ Las situaciones en las que se produce un solo “adelanto” de las capacidades ordinales según el modelo propuesto, corresponden a las situaciones **132** y **213** indicadas en la tabla. La primera incide principalmente en los tres grupos de mayor edad, para los que puede producirse cierta confluencia en las capacidades ordinales con cantidades continuas y discretas; la segunda tiene una incidencia moderada o residual en todos los grupos de edad por los motivos anteriormente indicados. Las incidencias globales respectivas son el 13,2% y el 15,8% y la conjunta el 29%.
- ❖ Para las dos situaciones anteriores el modelo propuesto se adapta parcialmente, haciéndolo de forma total para el 85,6% de los sujetos, es decir en 65 de los 76 sujetos de la muestra.
- ❖ Las situaciones restantes tienen una incidencia pequeña o residual a excepción de la **312** en el grupo de cinco años (40%), se producen solo en grupos de edad determinados (entre los cuatro años y medio y los seis y medio) y expresan, según la evolución más frecuente observada, déficits o retraso en las capacidades ordinales verbales (situación **231**) y retraso en las capacidades verbales y de orden con cantidades continuas (situaciones **312** y **321**). La situación excepcional mencionada, creemos que es debida a la emergencia brusca y no estable en dicho grupo de edad de las capacidades ordinales referentes a la cantidad discreta.

### 8.9.2 Sobre la antisimetría

La Tabla 8.44 muestra las valoraciones, en porcentajes por grupos de edad, de las tareas con solo dos piezas móviles: segunda tarea de orden con cantidades continuas (EvCC2) y sexta tarea de orden con cantidades discretas (EvCD6). Las columnas etiquetadas con “0” indican los porcentajes de resoluciones erróneas y las etiquetadas con “1” los de resoluciones correctas. La tabla citada muestra también los totales correspondientes.

El análisis de dicho datos muestra que todos los sujetos de cinco años y medio y siete años resuelven correctamente ambas tareas y que para todos los demás grupos de edad los porcentajes de resoluciones incorrectas son residuales, pudiendo darse en cualquier grupo de edad.

GED	EvCC2		EvCD6	
	0	1	0	1
3AM	30	70	10	90
4A	0	100	10	90
4AM	10	90	10	90
5A	0	100	10	90
5AM	0	100	0	100
6A	10	90	0	100
6AM	0	100	12,5	87,5
7A	0	100	0	100
<b>Total</b>	6,6	93,4	6,6	93,4

Tabla 8.44: Valoraciones en porcentajes por grupos de edad de las tareas con solo dos piezas móviles: segunda tarea de orden con cantidades continuas (EvCC2) y sexta tarea de orden con cantidades discretas (EvCD6).

La resolución de estas tareas con solo dos piezas móviles debe realizarse mediante comparaciones que requieren exclusivamente el uso de la antisimetría ordinal, por lo que se concluye, de acuerdo con Castro, Del Olmo, y Castro (2002, p. 46), que los sujetos utilizan la antisimetría en un grado muy elevado a partir de los tres años y medio y que la lenta evolución observada de las capacidades ordinales podría estar relacionada con formación de la inferencia transitiva, que según Piaget y Inhelder (1975) no se consolida sino partir de los 7 años.

### 8.9.3 Conclusiones del estudio comparativo de las tareas

Como conclusiones generales de este apartado, obtenemos las siguientes:

- 1<sup>a</sup>. La evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad para las capacidades ordinales y recursivas se produce según el modelo evolutivo propuesto.
- 2<sup>a</sup>. La evolución de las valoraciones de los sujetos en las capacidades ordinales estudiadas se produce según el modelo evolutivo propuesto, para una amplia mayoría de los sujetos. Las desviaciones observadas son debidas a déficits individuales o a singularidades en el proceso evolutivo\*.
- 3<sup>a</sup>. La transición entre las *capacidades máximas (nivel 3)* del primer estado del modelo (Orden Lineal) y las del segundo (Orden con Cantidades Continuas) se produce a partir de los cinco años y medio y entre las *capacidades máximas* de este último y las del tercer estado del modelo (Orden con Cantidades Discretas) a partir de los seis años y medio.
- 4<sup>a</sup>. Dadas las correlaciones existentes entre las capacidades recursivas y las ordinales relativas a la cantidad discreta, el desarrollo significativo de las primeras a partir de los cinco años y medio parece apoyar el predominio las *capacidades máximas (nivel 3)* en orden con cantidades discretas a partir de los seis años y medio.
- 5<sup>a</sup>. La evolución de las capacidades ordinales y recursivas se detalla, en extenso, en la secciones correspondientes dedicadas a su estudio y, resumidamente, en la tabla 8.42<sup>†</sup>.
- 6<sup>a</sup>. El uso de la antisimetría es muy elevado a partir de los tres años y medio, por lo que la lenta evolución observada de las capacidades ordinales podría estar relacionada con formación de la inferencia transitiva, que según Piaget e Inhelder (1975) no se consolida sino partir de los 7 años.
- 7<sup>a</sup>. Los déficits, singularidades y disfunciones mencionados, muestran la complejidad de la evolución individual de las capacidades ordinales y recursivas estudiadas. Éstas no son independientes sino que, como se ha visto por sus correlaciones y de acuerdo con González (1998, p. 184), “... debe darse una cierta relación temporal en la construcción individual de estos conceptos, las relaciones entre ellos son muy es-

\*Véase la tabla 8.42, página 555 y siguientes

<sup>†</sup>Véase la página 555 y siguientes.

*trechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás”.*

- 8<sup>a</sup>. La evolución individual requiere, según los estudios neurocientíficos actuales\*, la intervención y el concurso de diferentes regiones cerebrales del sujeto, por lo que la complejidad y variabilidad citadas pueden ser la expresión de los diferentes grados de maduración de las regiones cerebrales implicadas y, como consecuencia, de diferentes estilos evolutivos y de aprendizaje.
- 9<sup>a</sup>. Es clave iniciar la acción didáctica, en los aspectos ordinales y recursivos estudiados, con anterioridad a la edad de cinco años, para paliar o tratar de evitar los efectos negativos que pueden ocasionar las disfunciones observadas en el aprendizaje de la cantidad, el número y la aritmética.

---

\*Véase la sección 3.3 dedicada a la neurociencia, en la página 91 y siguientes, capítulo 3.



## 9

# CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

### 9.1 Introducción

La investigación que se presenta se sitúa en el campo de los estudios del grupo de investigación en Didáctica de la Matemática conocido como Pensamiento Numérico y más concretamente, en el ámbito de la línea de investigación Pensamiento Numérico Inductivo y Ordinal. La meta principal es el análisis de la evolución de algunas capacidades relacionadas con el pensamiento ordinal prenumérico en escolares de 3 a 7 años mediante el uso de una metodología basada en la tecnología multimedia, adaptada a las características psicoafectivas y psicomotrices de los sujetos, preparada para satisfacer la motivación y la participación y para recoger y tratar automáticamente la información, optimizando la objetividad de los datos y minimizando la interacción investigador–sujeto.

Al no ser el propósito del estudio establecer conclusiones generales válidas para toda la población, sino la de realizar una indagación profunda y detallada para conocer y organizar el campo de estudio, se han utilizado muestras intencionales y un elaborado procedimiento para responder al problema planteado.

A pesar de las condiciones señaladas y de las limitaciones propias de una aproximación de este tipo, de las que se indican algunas en el apartado 9.5, conjeturamos que los resultados obtenidos pueden ser similares en estudios con muestras más amplias procedentes de otros tipos de Centros. Por otra parte, el estudio aporta un marco teórico y metodológico que puede desarrollarse para otros conocimientos y en otras condiciones con una eficacia que creemos que puede ser similar a la que se pone de manifiesto en el presente estudio. Queda así planteada esta conjetura para su puesta a prueba en estudios posteriores.

En el presente capítulo se exponen las conclusiones y perspectivas futuras del estudio realizado junto a una breve y completa revisión del proceso seguido. En los apartados que siguen se tratan, en el orden indicado, los siguientes aspectos:

- ❖ La formulación de los elementos básicos del estudio, como son: la descripción del problema de investigación, los objetivos específicos, las hipótesis y la metodología utilizada.
- ❖ Un resumen global del proceso seguido.
- ❖ Una síntesis de los resultados y conclusiones más relevantes que se han obtenido en los estudios teóricos y empíricos realizados en las diferentes partes del trabajo.
- ❖ Una revisión sobre la verificación de las hipótesis y su incidencia en la consecución de los objetivos.
- ❖ Unas indicaciones acerca de las principales limitaciones del estudio realizado.
- ❖ Algunas líneas y temas de interés para investigaciones futuras.

## 9.2 El problema de investigación: definición y elementos básicos

Formalmente, el estudio queda delimitado mediante la descripción y definición de los componentes o elementos básicos que se detallan en los apartados y epígrafes siguientes.

El problema de investigación, que se expone con detalle en el apartado 1.4 del capítulo 1, es el siguiente: analizar y conocer una parte de la evolución del Pensamiento Ordinal prenumérico y recursivo en escolares de 3 a 7 años y comprobar si la utilización de una metodología de investigación basada en la tecnología multimedia (Metodología Multimedia) proporciona información válida y relevante sobre dicha evolución.

La resolución del problema persigue alcanzar los siguientes fines y objetivos:

### 1. Fines de la investigación (aptdo. 1.4.1, cap. 1)

- 1º. Configurar y someter a prueba una nueva metodología multimedia para la investigación en Educación Matemática.
- 2º. Continuar la línea de investigación sobre la evolución del Pensamiento Numérico entre 3 y 7 años en las etapas prenumérica y preinductiva.
- 3º. Iniciar una línea de investigación sobre el uso de la tecnología multimedia en Educación Matemática.

Para su consecución y la resolución del problema planteado, se han establecido los siguientes:

## 2. Objetivos específicos (aptdo. 1.4.3, cap. 1)

- O1:** Clarificar los fundamentos matemáticos, epistemológicos y fenomenológicos del orden y la recursión como elementos básicos en la construcción del número natural.
- O2:** Construir y validar una nueva metodología de investigación en Educación Matemática basada en la tecnología multimedia (Metodología Multimedia).
- O3:** Comprobar la idoneidad, eficacia y validez de la metodología multimedia para el registro y análisis de las respuestas de sujetos de 3 a 7 años ante la realización de tareas lógico-matemáticas relacionadas con el orden y la recursión.
- O4:** Configurar y contrastar la validez, mediante la metodología multimedia, de un modelo evolutivo sobre el Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años de edad, constituido por estados de desarrollo caracterizados por capacidades ordinales y recursivas empleadas en la realización de actividades específicas.
- O5:** Construir un instrumento multimedia adaptado a las características de los sujetos y a los estados del modelo evolutivo propuesto, que permita observar, registrar y analizar las regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo y contrastar la bondad del modelo en los siguientes términos:
  - O5.1:** Identificar y caracterizar niveles de competencia y/o de desarrollo.
  - O5.2:** Identificar y caracterizar las estrategias de resolución y las regularidades existentes.
  - O5.3:** Describir la evolución con la edad de las estrategias, capacidades y competencias que intervienen; en particular
    - O5.3.1:** Determinar las edades a las que se produce el uso espontáneo de las capacidades recursivas frente al mero etiquetaje.
    - O5.3.2:** Identificar el intervalo de edad y las circunstancias en las que se produce la diferenciación entre cantidad continua y discreta.

**O5.3.3:** Identificar el intervalo de edad y las circunstancias en las que se produce el uso espontáneo del conteo ordinal frente a otras estrategias.

**O5.4:** Construir distintos modelos funcionales de ajuste para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas y analizar su grado de precisión y su adecuación a los fenómenos observados.

Para la consecución de estos objetivos se han sometido a prueba las siguientes:

### 3. Hipótesis (aptdo. 1.4.4, cap. 1)

**H1:** El orden y la recursión se encuentran estrechamente relacionados con la construcción matemática del número natural y de los conceptos comparativos y métricos.

**H2:** Las capacidades ordinales y recursivas propias del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años se desarrollan de acuerdo a un modelo evolutivo con tres estados ordinales: orden lineal, orden con cantidades continuas y orden con cantidades discretas, y un estado recursivo.

**H3:** La tecnología multimedia permite crear escenarios o entornos virtuales multimedia:

**H3.1:** adaptados a las características psicoafectivas y psicomotrices de niños y niñas de 3 a 7 años.

**H3.2:** que favorecen la motivación y la participación activa de los sujetos.

**H4:** Los entornos virtuales multimedia:

**H4.1:** son idóneos para la construcción de tareas centradas en un contenido lógico-matemático concreto.

**H4.2:** permiten analizar la interacción de los sujetos con el entorno mediante la recogida y el tratamiento automático de informaciones puntuales sobre dichas interacciones, maximizando la objetividad de los datos recogidos.

**H4.3:** permiten minimizar la interacción investigador-sujeto.

**H5:** El entorno multimedia permite configurar una metodología de investigación, Metodología Multimedia, centrada en los dos elementos siguientes: a) un modelo general para el diseño del ítem o tarea multimedia que optimiza las características del

entorno virtual; b) un instrumento multimedia constituido por ítems o tareas graduadas en dificultad y organizadas en conjuntos y subconjuntos ordenados.

**H6:** La Metodología Multimedia es idónea para el estudio de las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y, por tanto, para el contraste del modelo evolutivo correspondiente mediante un instrumento constituido por cuatro conjuntos de tareas que se corresponden con los estados del modelo. En particular, la Metodología Multimedia hace posible:

**H6.1:** Identificar y caracterizar las estrategias de resolución y los niveles de competencia y/o de desarrollo para cada estado del modelo.

**H6.2:** Detectar las edades a las que aparece el uso de capacidades recursivas frente al mero etiquetaje, la distinción entre cantidad continua y discreta en tareas ordinales y la aparición del conteo ordinal frente a otras estrategias en tareas ordinales con cantidades discretas.

**H6.3:** Determinar y describir la evolución general de las capacidades, competencias y estrategias asociadas a los estados del modelo.

**H6.4:** Establecer modelos de ajuste no lineales para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas, de mayor precisión y adecuación que los lineales.

Para contrastar estas hipótesis se han utilizado las siguientes:

#### 4. Metodologías y técnicas metodológicas (aptdo. 1.5, cap. 1)

- Análisis de los antecedentes de la línea de investigación (Hernández, 2005; Memoria del Tercer Ciclo, capítulo 1; capítulos 2, 3, 4 y 5 de la memoria).
- Estudio teórico sobre el impacto y la relevancia de la tecnología multimedia en los procesos cognitivos y en el desarrollo del Pensamiento Matemático (Hernández, 2005) (Memoria del Tercer Ciclo, capítulo 1).
- Construcción de los instrumentos multimedia para selección de la muestra y la observación y recogida de los datos correspondientes al estudio exploratorio (capítulo 5).

- Estudio teórico sobre las relaciones entre la tecnología multimedia y los procesos cognitivos, las teorías y principios del aprendizaje multimedia y la interacción ordenador–sujeto (capítulo 4).
- Estudio epistemológico de la estructura ordinal desde los puntos de vista matemático, histórico y psicogenético y estudio fenomenológico de la estructura ordinal en relación con los conceptos de magnitud, cantidad y medida (capítulo 2).
- Análisis Didáctico (González, 1998; Gallardo y González (2013)) de los antecedentes relativos a las investigaciones cognitivas sobre el aprendizaje del número, sobre el número y el orden desde la perspectiva neuropsicológica, así como los propios de la línea de investigación (capítulo 3).
- Estudios teóricos para el desarrollo de los marcos teórico y metodológico de la investigación (capítulo 6), incluyendo:
  - La determinación del Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR).
  - La construcción del Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM).
  - La delimitación de la metodología de investigación en Educación Matemática, denominada *Metodología Multimedia*.
  - El diseño y construcción del instrumento multimedia para la observación y recogida de datos.
- Estudios, a lo largo de todo el proceso, sobre el diseño y la construcción de interfaces y programación orientada a objetos en entornos multimedia.
- Estudios empíricos con técnicas cuantitativas:
  - Estudio de la escalabilidad de Cronbach aplicada a la selección de ítems (capítulo 7).
  - Análisis descriptivo global, puntual y comparativo de las valoraciones de las respuestas de los cuatro conjuntos de tareas multimedia (capítulo 8).
  - Tests de Kolmogorov–Smirnov y Shapiro–Wilk para estudiar la normalidad de las distribuciones de las valoraciones de las respuestas por grupos de edad en cada uno de los cuatro conjuntos de tareas (capítulo 8).
  - Estudio de modelos de ajuste lineales y no lineales en el estudio de la evolución las medias de las valoraciones

por grupos de edad en cada conjunto de tareas (capítulo 8).

- Estudios empíricos cualitativos:
  - Estudio Exploratorio: análisis cualitativo de respuestas, tiempos e intentos de los cuatro conjuntos de tareas multimedia (capítulo 5).
  - Segundo Estudio Empírico:
    - ◇ Análisis cualitativo de las valoraciones de las respuestas de los cuatro conjuntos de tareas: análisis evolutivo y caracterización de niveles de competencia (capítulo 8).
    - ◇ Análisis cualitativo de las estrategias empleadas y de su evolución, de los errores cometidos y del uso de determinados elementos singulares (capítulo 8).
    - ◇ Análisis de las respuestas a un cuestionario sobre el reconocimiento de la intervención de la cantidad discreta en el tercer conjunto de tareas: análisis de estrategias y errores (capítulo 8).

Desarrollándose la investigación mediante el siguiente:

## 5. Proceso metodológico (aptdo. 1.5.3, cap. 1)

Se utiliza una combinación de estudios de naturaleza teórica, (capítulos 2, 3, 4, 5 y 6), y estudios de naturaleza empírica, (capítulos 5, 7 y 8), en un proceso dividido en tres fases: Estudio Exploratorio, fase teórica y fase empírica. Veamos una breve descripción de cada una de ellas\*.

El estudio exploratorio, que se detalla extensamente en el capítulo 5, puso de manifiesto la necesidad de modificar el modelo evolutivo inicial de competencias ordinales y el instrumento multimedia (apartado 5.12 del capítulo 5), lo que a su vez, requirió de una revisión profunda de los antecedentes, la realización de un estudio epistemológico y fenomenológico de la estructura ordinal en relación con los conceptos de magnitud, cantidad y medida, capítulo 2, el análisis didáctico (González, 1998; Gallardo y González (2013)) de los antecedentes sobre el aprendizaje del número, sobre el número y el orden

\*Véase su descripción en la Figura 1.2, página 29. capítulo 1.

desde la perspectiva neuropsicológica así como de los propios de la línea de investigación, capítulo 3, y un estudio de las relaciones entre la tecnología multimedia y los procesos cognitivos, el aprendizaje multimedia, y la interacción ordenador–sujeto (capítulo 4).

Las conclusiones del estudio exploratorio junto a los resultados de los estudios posteriores mencionados permitieron desarrollar los marcos teórico y metodológico de la investigación y concluir la fase teórica del estudio (capítulo 6) con la aportación del Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR), el Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM), la delimitación de la Metodología Multimedia, y su aplicación al problema evolutivo ordinal y recursivo y el diseño y construcción del instrumento multimedia para la recogida de datos y selección de la muestra.

Partiendo de dichos marcos y elementos se procedió al desarrollo de la fase empírica en tres etapas:

- **1ª Etapa:** preparatoria y motivadora de las siguientes.
- **2ª Etapa:** dedicada a la aplicación de las las tareas iniciales y a la selección de la muestra.
- **3ª Etapa:** dedicada a las entrevistas individuales y la recogida de datos mediante el instrumento multimedia construido.

El diseño del estudio empírico se detalla ampliamente en el capítulo 7, del que destacamos, entre otros aspectos, la descripción exhaustiva de todos los ítems o tareas que integran el instrumento multimedia (apartado 7.6), incluyendo sus fichas técnicas completas. El desarrollo y resultados del estudio empírico se recogen en el capítulo 8, en el que se tratan extensamente sendos análisis cualitativos de las respuestas, estrategias observadas y errores constatados, los estudios sobre los modelos de ajuste y sobre la validez y fiabilidad de los instrumentos.

### 9.3 Resultados y conclusiones

La consecución de los objetivos propuestos, mediante la confirmación de las hipótesis expuestas, es consecuencia de un dilatado proceso, en varias etapas, que se ha materializado en las consideraciones que se exponen en los capítulos segundo a octavo de esta memoria. Los principales resultados y conclusiones que se han obtenido en cada una de dichas etapas se exponen a continuación manteniendo un orden relativo a los momentos del proceso en los que se culminaron los estudios correspondientes.



### 9.3.1 Análisis Didáctico de antecedentes

La revisión y el análisis de los antecedentes comenzó en el estudio exploratorio y se culminó posteriormente durante el proceso de continuación del estudio. La reflexión y el análisis realizado en este aspecto ha proporcionado los siguientes resultados.

#### 9.3.1.1 Análisis epistemológico y fenomenológico sobre estructura ordinal

Se realizó un análisis de las construcciones del número natural y del papel del orden en las mismas. Se analizaron las siguientes construcciones:

- ❖ Las que se basan en la axiomática NBG o ZF de la teoría de conjuntos, en las que se construyen primero los números ordinales y se definen los números naturales como los ordinales finitos, o bien, se construye ordinalmente el conjunto  $\mathbb{N}$  y se definen los números naturales como los elementos de este conjunto. La construcción cardinal requiere el concepto previo de número ordinal, simplificándose notablemente si se admite el axioma de elección. En ella se hace patente la identidad de los ordinales y los cardinales finitos así como la doble interpretación cardinal–ordinal del número natural. En cualquier caso, el concepto primario es el de número ordinal, con lo que la aritmética básica es también la ordinal, que se basa, a su vez, en la existencia y el uso de las funciones recursivas y del principio de inducción como teoremas de la teoría.
- ❖ La construcción basada en la axiomática de Bourbaki, que toma como concepto básico el número cardinal. No se construyen explícitamente los números ordinales, aunque al admitir el axioma de elección se usan implícitamente sus propiedades. Para definir los números naturales como cardinales finitos se admite el axioma de infinitud y se usa de modo esencial la relación de orden definida sobre los cardinales. La aritmética natural se establece haciendo uso de los teoremas de recursión y del principio de inducción, que es también un teorema de la teoría.
- ❖ En todas las construcciones, así como en las aritméticas correspondientes, las relaciones de orden desempeñan un papel esencial. La recursión es la herramienta constructiva y el principio de inducción es la principal herramienta demostrativa.
- ❖ Desde el punto de vista matemático es posible adoptar cualquiera de las axiomáticas, siendo los resultados válidos en el sistema adoptado.
- ❖ Desde el punto de vista epistemológico las diferencias entre ambos

sistemas son claras; parten de la tradición logicista y se consolidan en el estudio del problema de los fundamentos de la Matemática durante la primera mitad del siglo XX.

- ❖ Desde el punto de vista didáctico, la ausencia del estudio de los fundamentos en las licenciaturas de matemáticas y el predominio de la interpretación cardinal, pueden haber ocasionado cierto desconocimiento de la relevancia didáctica de la interpretación ordinal. El predominio de la interpretación cardinal alcanza también a las investigaciones cognitivas sobre el aprendizaje del número, quedando relegadas a un segundo plano las investigaciones centradas en los aspectos ordinales del número.
- ❖ Desde el punto de vista histórico, la postura convencionalista basa la construcción del número natural en los aspectos ordinales. El soporte inicial es la acción de contar y la verbalización de la secuencia numérica. Los numerales y los signos numéricos son convenciones que actúan mediante criterios determinados. Por lo tanto, *“hay una relación clara entre los supuestos y principios del marco epistemológico convencionalista y el conocimiento lógico que el niño debe imponer a los objetos para inferir que uno es anterior/siguiente a otro”*.
- ❖ En la corriente logicista, los trabajos de Dedekind, Peano y Russell fueron fundamentales para aclarar la esencia recursiva e inductiva y el doble carácter, cardinal y ordinal, del número natural. Por otra parte hay construcciones ordinales, recursivas e inductivas del número natural que no precisan de la definición previa de los términos numéricos en el sentido de Russell y son, por tanto, independientes del número cardinal.
- ❖ Para la epistemología genética el número natural es síntesis de dos estructuras operatorias: clasificación y seriación. Como consecuencia, el número natural es cardinal y ordinal, “produciéndose simultáneamente la psicogénesis de ambos aspectos”. La estructura operatoria de seriación se basa en la ordenación y en la recursión, por lo que la secuencia numérica en este modelo se trata como una serie, es decir como una sucesión en los términos matemáticos actuales.

Por otra parte, el análisis fenomenológico ayuda a clarificar las relaciones existentes entre las cantidades, los números y las medidas (González, 1998):

- ❖ Los conceptos métricos se generan en una síntesis entre los conceptos comparativos y los números. Las medidas constituyen así elementos que integran los aspectos cualitativos y cuantitativos de la realidad.

Los primeros son consustanciales a los segundos, previos y necesarios para la existencia de estos e independientes de ellos.

- ❖ La separación entre las cantidades (dominio de las experiencias físicas), las medidas elementales y los números (dominio de las matemáticas), aunque formal, conceptual y epistemológicamente correcta, no puede plantearse en términos analíticos en los inicios de la educación del pensamiento numérico. De hecho, a un nivel formal y una vez establecido un concepto métrico, el isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo; pero ello ocurre en un nivel de abstracción superior al del propio proceso de formación de dicho concepto métrico.
- ❖ Desde el punto de vista del aprendizaje matemático cabría interpretarse, en virtud de los isomorfismos existentes, que *debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos comparativos, numéricos y métricos*; las relaciones entre los tres son muy estrechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás.
- ❖ Los conceptos ordinales se hallan en la base de los conceptos comparativos, numéricos y métricos, por lo que la evolución individual de aquellos debe influir en la de estos.
- ❖ En el ámbito de los fenómenos reales, los conjuntos numéricos constituyen modelos matemáticos para determinadas cualidades metrizable y, al mismo tiempo, las series ordenadas de estados de cantidades constituyen modelos cualitativos, experimentales y manipulativos en términos didácticos, de ejemplificación de los conjuntos numéricos. Ambos sistemas son isomorfos y se sustentan mutuamente a nivel de la acción práctica y, posiblemente, a nivel de la construcción de dichos conceptos por parte del sujeto individual.
- ❖ Tiene interés, desde el punto de vista didáctico, estudiar el problema de la evolución de los conceptos ordinales en relación con los conceptos numéricos y métricos, utilizando para ello cantidades ordenadas. Pero las cantidades discretas se refieren a conceptos métricos naturales mientras que las magnitudes continuas se entenderán como conceptos comparativos, centrándonos, para ambos tipos de magnitudes en la aplicación y la evolución de la conservación del orden sin tener en cuenta la aditividad de las medidas.

### 9.3.1.2 Análisis de los antecedentes sobre estudios cognitivos relacionados con la línea de investigación

Son escasas las investigaciones relativas a las capacidades ordinales y recursivas en niños de corta edad, lo que es sumamente sorprendente si tenemos en cuenta el papel esencial que juegan los aspectos ordinales y recursivos tanto en la construcción del número natural como objeto matemático como en la construcción de la aritmética natural y que estas capacidades se hallan presentes con especial relevancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje del número.

En relación con los *estudios cognitivos* sobre el número natural extraemos las siguientes conclusiones:

- ❖ La mayoría de las investigaciones enfatizan los aspectos operativos y heurísticos del número natural tomando como referencia su aspecto cardinal en detrimento del ordinal. Son estudios que se dirigen más a la detección de la precocidad de aspectos numéricos concretos que a la determinación de las condiciones que hagan posible la adquisición del número natural desde un punto de vista matemático, es decir, integrando su carácter recursivo con sus aspectos cardinal y ordinal.
- ❖ Los estudios destacan la importancia del conteo y su carácter funcional e instrumental en la adquisición de relaciones numéricas por parte de los sujetos.
- ❖ La secuencia numérica se analiza como componente del conteo pero sin tener en cuenta las relaciones ordinales y recursivas que existen entre sus términos. En este modelo, las investigaciones sobre la funcionalidad del conteo apuntan hacia el “Operador Cuantificador”, comparando los números cardinales para posteriormente localizarlos en la secuencia.

En relación con las *investigaciones neuropsicológicas*, destacamos las siguientes conclusiones:

- ❖ El concepto de número utilizado en neuropsicología coincide fundamentalmente con el utilizado por las teorías cognitivas (procesamiento de la información).
- ❖ Existe una relación profunda entre capacidades numéricas y visuoespaciales, como lo prueba el hecho de que niños de diferentes culturas aprendan a contar con los dedos.
- ❖ Los adultos tienden a representar mentalmente los números naturales en una línea orientada de izquierda a derecha, no como símbolos sino

como cantidades analógicas o continuas. Aún cuando el hemisferio cerebral izquierdo se encarga de la aritmética exacta mientras que el derecho lo hace de la aproximada.

- ❖ Algunas técnicas aritméticas, como el aprendizaje y uso de las tablas de multiplicar, se codifican verbalmente mientras que las comparaciones y las aproximaciones o estimaciones de cantidades parecen ser independientes del lenguaje.
- ❖ Las actividades numéricas y, en general, las actividades matemáticas son formas de conocimiento superior cuya realización requiere de la colaboración de, entre otras, las áreas cerebrales visuoespacial, lingüística, cuantitativa y lógica, de las áreas implicadas en los distintos tipos de memoria y en la coordinación de todas ellas, además de la interacción de estas con las áreas atencionales y motivacionales. Este hecho avala la adecuación y la validez de la metodología multimedia en el tratamiento de la información numérica, dadas las grandes facilidades que ofrece para implementar correspondencias y relaciones visuales, espaciales y numéricas, así como representaciones virtuales de cantidades reales con las que el sujeto puede interactuar y quedar fácilmente registrado.

En relación con el trabajo de Ortiz (1997) hemos de resaltar las siguientes conclusiones:

- ❖ Un planteamiento evolutivo de la construcción del número por los sujetos ha de considerar las referencias espaciales y temporales. El orden numérico y la linealidad quedan patentes en las representaciones gráficas de las relaciones numéricas.
- ❖ El sujeto puede llegar, mediante inferencias inductivas, al descubrimiento, interpretación y significación de los conocimientos numéricos y aritméticos.
- ❖ En los sujetos de menor edad se observan esquemas arraigados que indican el origen de sus rutinas aritméticas. Se trata de dos tipos de esquemas:
  - *Esquemas infralógicos* subyacentes a la propia construcción del número natural, tales como los que se refieren a aspectos topológicos intuitivos como la orientación en la recta numérica (atrás, bajando, saltarse números, hacia abajo, etc).
  - *Esquemas de aprendizaje memorístico* de la serie de los números naturales, considerada como una lista almacenada en la memoria. Aquí se incluye la acción denominada *contar ordinal*

como estrategia recursiva utilizada por una amplia mayoría de los sujetos de menor edad.

- Las respuestas más frecuentes obtenidas en los distintos ítems de los estudios empíricos son las que señalan la tendencia general en las distintas edades y niveles, lo cual significa que la evolución que se estudia se puede caracterizar en términos de los esquemas subyacentes a dichas respuestas.
- Debe estudiarse la existencia de un nivel inductivo numerativo duradero y persistente y anterior al nivel aditivo, cuyo inicio debe situarse en Educación Infantil y cuya culminación se produce en Educación Primaria. Este problema debe abordarse estudiando el origen del número en sus aspectos preinductivos no justificados por el inductivismo, los inicios de la acción de contar y el estudio de tareas propias de los estados preinductivos del modelo teórico de Ortiz (op. Cit.), del que son especialmente relevantes para nuestra investigación los cinco primeros estados.

Del trabajo de Fernández (2001) son especialmente relevantes tanto las conclusiones de sus estudios exploratorio y empírico cualitativo como los niveles evolutivos de su modelo teórico.

De ambos autores se concluye que *los modelos evolutivos son útiles no sólo como fuentes de tareas destinadas a contrastar las capacidades de los sujetos, sino también como marcos interpretativos de las acciones y de las capacidades de los mismos.*

### 9.3.1.3 Análisis de los antecedentes sobre la Tecnología Multimedia en relación con la cognición y el aprendizaje

En relación con el término *multimedia* y con la interacción sujeto–ordenador obtenemos las conclusiones siguientes:

- ❖ De las numerosas acepciones del término *multimedia*, adoptamos en este trabajo la aproximación que se refiere a un *entorno virtual creado y ejecutado por un ordenador que incluye todos o algunos de los siguientes componentes multimodales: espacial y visual, lingüístico, audio, gestual y de movimiento.* Pero, además, el entorno está dotado de un sistema automático de registro y almacenamiento de la interacción del sujeto con dicho entorno.
- ❖ La interacción es un proceso complejo en el que el sujeto puede hacer uso de varios tipos o formas de inteligencia: lingüística, lógico–

matemática, cinestésica-corporal, espacial, sonora, interpersonal e intrapersonal, Gardner (1983).

- ❖ Consideramos que los ordenadores actuales son tanto dispositivos cognitivos como dispositivos de simulación, dotados de funciones epistémicas y ontológicas en el sentido de Brey (2005).
- ❖ Es posible, y relativamente sencillo, construir escenarios o entornos multimedia que incluyan funciones epistémicas (cognitivas) y funciones ontológicas (simulación de realidades virtuales). Estas últimas permiten incorporar a tales escenarios elementos visuoespaciales, sensoriomotores, sonoros, afectivos y emocionales, adaptados a las características psicológicas de los sujetos del intervalo de edad que se considera.
- ❖ Dada la importancia del juego a estas edades, Bishop (1999) y Hirsch (1998), es posible y adecuado construir escenarios multimedia con formato de juegos virtuales que incluyan componentes afectivas y emocionales y que, además de dirigirse al problema cognitivo planteado, estimulen la motivación, la atención y la imaginación de los sujetos.
- ❖ La inclusión de las capacidades visuoespaciales está avalada por las consideraciones realizadas sobre la neurociencia y por su relación con las sensoriomotrices. Y la inclusión de estas últimas lo está por las características de la etapa cognitiva en la que se hallan los sujetos, que es la etapa sensoriomotriz piagetiana.
- ❖ Tanto el aspecto lúdico como las habilidades visuoespaciales, sensoriomotrices, sonoras, afectivas y emocionales, pueden tener relación con las habilidades primarias (innatas) en el sentido de Geary (1995). Lo que justifica de nuevo su inclusión.
- ❖ Las capacidades o competencias ordinales que investigamos no forman parte del currículo escolar, por lo que en su formación pueden intervenir habilidades primarias, el propio desarrollo sensoriomotriz del niño y la interacción de ambos con el medio social en el que vive.
- ❖ Como se ha visto en la subsección dedicada a la neurociencia, no parece posible que la cognición y el aprendizaje puedan desarrollarse adecuadamente mediante el uso del hemisferio cerebral izquierdo exclusivamente sin conexión con el hemisferio derecho; ello puede indicar que en la cognición y en el aprendizaje, además de componentes racionales intervienen componentes afectivos y emocionales que aconsejan aún más su inclusión en el escenario de aprendizaje.
- ❖ Estas conclusiones permiten redefinir e interpretar, en nuestro caso, las funciones epistémicas, ontológicas y onto-epistémicas de Brey (2005) en el siguiente sentido:

- ◆ Las *funciones epistémicas* definirán el problema cognitivo ordinal que tendrán que resolver los sujetos en cada caso.
- ◆ Las *funciones ontológicas* establecerán los entornos virtuales interactivos que se construyan para observar y evaluar las anteriores.
- ◆ Las *funciones onto-epistémicas*, como conjunción de las dos anteriores, establecerán el diseño y guiarán el desarrollo de los ítems concretos con los que el sujeto va a interactuar.
- ❖ El registro y el almacenamiento automáticos de la interacción sujeto–escenario multimedia permite reducir al mínimo la del investigador–sujeto. Todo ello redundará en la calidad, la cantidad y la objetividad de la información recogida. Tales características de la información pueden verse mermadas en las metodologías de investigación en las que la recogida no es automática.
- ❖ Los escenarios multimedia están mejor adaptados que otros a las características de los sujetos del intervalo de edad considerado, ya que permite incorporar tareas o ítems bien adaptadas a sus características cognitivas y psicoafectivas. Pensamos, en definitiva, que puede basarse en ellos una metodología de investigación válida y novedosa para la investigación en Educación Matemática.

En relación con las teorías y principios del aprendizaje multimedia (Mayer, 2005a) se concluye:

- ❖ De los niveles teóricos citados en la sección 4.4\*, en esta investigación interesan especialmente las llamadas teorías del segundo nivel, como son: la *Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia* de Mayer (TCAM), el *Modelo Integrado de la Comprensión de Texto y Gráficos* de Schnotz (MICTG) y la *Teoría de la Carga Cognitiva* de Sweller (TCC).
- ❖ Todas ellas asumen la existencia de:
  - ◆ Distintos tipos de memoria: sensorial, de trabajo y a largo plazo.
  - ◆ Canales duales: los seres humanos poseemos canales separados para el proceso de la información visual y auditiva, tanto a nivel sensorial como en el tratamiento de la información en la memoria de trabajo.
  - ◆ Capacidad limitada: la cantidad de información que puede procesar cada canal, en cada momento es limitada.

\*Véase la página 135.



- ◆ Proceso activo: los seres humanos participamos activamente en el aprendizaje atendiendo a la información de entrada que es relevante, organizando la información seleccionada en representaciones mentales coherentes e integrando las representaciones mentales con el conocimiento del que ya disponemos.
- ❖ Cada una propone mecanismos para la comprensión y el aprendizaje que destacan particularmente alguno de los aspectos anteriores y proponen principios para el aprendizaje multimedia como son los que se describen en la sección 4.5.2\*.
- ❖ En nuestro caso, tales principios no se usarán como principios de aprendizaje en sí; sino, de acuerdo con Mayer (2001), como principios fundamentales a tener en cuenta en la construcción de tareas e ítems multimedia que formarán parte de una metodología de investigación.
- ❖ Con ello, asumiendo la capacidad limitada de los canales en los niveles sensoriales y en la memoria de trabajo, nuestro objetivo será, en el lenguaje de la TCC, reducir al máximo la carga cognitiva extrínseca y potenciar las cargas intrínseca y efectiva en los sujetos.
- ❖ Resaltamos el interés que tiene para esta investigación el *Principio de las diferencias individuales*, que afirma, apoyándose en evidencia empírica, que las actividades multimedia son especialmente eficaces para los aprendices (no siendo así para las personas con un grado de conocimientos relativamente alto), entre los cuales se encuentran los sujetos de menor edad y, en particular, los sujetos del intervalo de edad que tratamos.
- ❖ Consideramos que las teorías y principios anteriores descuidan los aspectos atencionales, afectivos y emocionales implicados en el aprendizaje y la cognición, aspectos que nuestro escenario tendrá muy en cuenta por estar dirigido exclusivamente a sujetos de corta edad.

### 9.3.2 Estudio Exploratorio

En el capítulo 5 de la presente memoria, al que nos remitimos para una información más detallada, se recogen (apartados 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10) los análisis de las respuestas, niveles, estrategias, tiempos de respuesta y número de intentos, junto con las respectivas conclusiones, para cada uno de los conjuntos de tareas asociados a las capacidades ordinales estudiadas. En los apartados que siguen se detallan los principales resultados y conclusiones generales de dicho estudio.

\*Véase la página 152 y siguientes, capítulo 4

**En relación con los objetivos del estudio:**

- 1<sup>a</sup>. Se ha construido un instrumento multimedia formado por 26 ítems o tareas para evaluar el estado de las cuatro competencias del modelo evolutivo propuesto para niños de 3 a 6 años.
- 2<sup>a</sup>. Se ha obtenido evidencia empírica sobre las competencias del modelo evolutivo e información esencial para el ajuste del mismo.
- 3<sup>a</sup>. Se ha comprobado el grado de adecuación de las tareas multimedia, tanto desde el punto de vista de los sujetos como de la implementación del instrumento, y se ha obtenido la información necesaria para su optimización.
- 4<sup>a</sup>. Se han analizado los datos obtenidos y se han extraído los resultados y conclusiones pertinentes.
- 5<sup>a</sup>. Se ha recogido la información relevante y útil para la realización de estudios posteriores.

En definitiva, se alcanzaron los objetivos propuestos.

**En relación con la metodología:**

- 1<sup>a</sup>. Dado su carácter exploratorio, el estudio es de tipo cualitativo, transversal y aplicado a un muestra reducida de sujetos.
- 2<sup>a</sup>. El sistema de entrevistas clínicas individualizadas basadas en el material multimedia constituye una técnica metodológica adecuada para la recogida de la información con sujetos de corta edad, permite minimizar la interacción investigador-sujeto y maximizar la objetividad de la información recogida.
- 3<sup>a</sup>. La metodología utilizada favorece la motivación y la participación de los sujetos en todas las etapas del proceso.
- 4<sup>a</sup>. Para la continuación del estudio y la simplificación de las primeras etapas, se ha de modificar la duración de la película inicial y eliminar la realización de las actividades manuales complementarias, menos motivadoras que el material multimedia.
- 5<sup>a</sup>. En la segunda etapa es de destacar el efecto positivo de la presentación de las tareas iniciales en presencia de todos los sujetos.
- 6<sup>a</sup>. En la tercera etapa, para asegurar una atención adecuada por parte del investigador, no deben participar más de 6 sujetos

en la realización de las tareas iniciales para la selección de la muestra. La duración recomendada para estas sesiones se estima en media hora para los grupos de edad superior y en tres cuartos de hora para los de edad inferior.

- 7<sup>a</sup>. La tercera etapa es fundamental para los sujetos de tres años y medio\*, ya que a partir de los cuatro años no hay problemas destacados en el manejo del ratón.
- 8<sup>a</sup>. La cuarta etapa, correspondiente a las entrevistas individualizadas, debe realizarse en una sala que favorezca la concentración de los sujetos. La intervención del investigador debe reducirse a aclarar dudas, prestar una ayuda puntual, insistir de modo imparcial en las cuestiones planteadas, animar a continuar con la tarea y observar el desarrollo del proceso.
- 9<sup>a</sup>. Los intervalos de seis meses de edad son adecuados para el estudio pues permiten una buena discriminación de las capacidades y competencias.
- 10<sup>a</sup>. Se ha comprobado la viabilidad y fiabilidad de la recogida y almacenamiento automáticos de la información.

#### **En relación con las tareas y su diseño:**

Además de las conclusiones establecidas con respecto a los resultados y niveles, el análisis temporal y el número de intentos, podemos mencionar las siguientes:

- 1<sup>a</sup>. Las tareas iniciales destinadas a la selección de la muestra son adecuadas, contribuyen a la motivación y están bien adaptadas a las características psicoafectivas y psicomotrices de los sujetos. No precisan modificaciones esenciales, salvo el aumento del número de píxels atractivos en determinados huecos para no forzar a los sujetos a la colocación innecesariamente exacta de algunas de las piezas.
- 2<sup>a</sup>. Los elementos comunes de las tareas propias del estudio: interfaces, elementos de interacción y navegación y diagrama de flujo, se adaptan bien a las características de los sujetos y no requieren modificaciones esenciales.
- 3<sup>a</sup>. Se puede eliminar la parte de las tareas de orden lineal que dominan mayoritariamente los sujetos, lo que reduciría el nú-

---

\*Aún cuando se han detectado sujetos de edad inferior que manejan el ratón sin dificultades e incluso sujetos de 3 años y 7 u 8 meses que han realizado todas las tareas iniciales, incluso las de mayor dificultad, no puede asegurarse que *normalmente* un sujeto de tres años y medio utilice un ratón sin dificultad.

- mero de ítems, igualándolo al de los demás bloques de tareas, y acortando la duración de la entrevista.
- 4<sup>a</sup>. Debe modificarse el sistema de registro de la información en las tareas de orden con cantidades continuas y discretas para discriminar intentos, niveles y resultados y, por tanto, determinar las capacidades y competencias asociadas.
  - 5<sup>a</sup>. Es necesario revisar el conjunto de tareas de “etiquetaje” de acuerdo con la singularidad encontrada y con su probable naturaleza recursiva.
  - 6<sup>a</sup>. Las tareas permiten distinguir niveles de capacidades y competencias, por lo que pueden servir de punto de partida para estudios posteriores.
  - 7<sup>a</sup>. Se ha observado que en todas las tareas utilizadas intervienen significativamente formas de comunicación e información no verbales así como diversas “formas de la inteligencia” (Gardner, 1983).

#### **En relación con el modelo evolutivo propuesto:**

- 1<sup>a</sup>. Las tareas de etiquetaje presentan una evolución singular respecto a la de las demás competencias estudiadas y no siguen el modelo propuesto. Este hecho puede deberse a la naturaleza más recursiva que propiamente ordinal de este conjunto de tareas.
- 2<sup>a</sup>. Los demás conjuntos de tareas, salvo las de orden con cantidades discretas para el caso de los sujetos de cinco años y medio de edad, siguen con notable precisión las líneas generales del modelo, tanto a nivel de resultados medios por grupos de edad como a nivel individual, siguiéndolo el 76 % del total de la muestra. Las desviaciones individuales ofrecen casos particulares para el diagnóstico de posibles disfunciones o retrasos evolutivos.
- 3<sup>a</sup>. Los resultados positivos son indicativos y alentadores, pero no pueden confirmar la validez del modelo parcial para las tres tareas ordinales, que sigue siendo hipotética y cuya comprobación queda pendiente para estudios posteriores (ver capítulos 6 y 7 de la presente memoria).

**En relación con la continuación del estudio:**

- 1<sup>a</sup>. En estudios posteriores se debe utilizar una muestra de sujetos de mayor tamaño sin alcanzar las exigencias de un estudio cuantitativo y sin salir del ámbito de los estudios cualitativos en muestras pequeñas. Los nuevos estudios se orientarán a analizar con mayor precisión las tendencias observadas y contrastar las hipótesis mediante análisis estadístico. Un estudio de masas podría ser prematuro en la situación actual de la investigación y podría realizarse en una tercera etapa.
- 2<sup>a</sup>. Como condición previa a la adaptación o modificación del modelo evolutivo en estudios posteriores, se observa la necesidad de realizar una ampliación del análisis epistemológico y fenomenológico del orden y la recursión y su contribución a la formación de las ideas de cantidad y número, tanto desde el punto de vista matemático como desde el de la formación de tales ideas en los sujetos\*.
- 3<sup>a</sup>. Es necesario estudiar la interacción ordenador–sujeto y las características de la tecnología multimedia desde el punto de vista del diseño y construcción de los ítems.
- 4<sup>a</sup>. Parece conveniente estudiar el posible carácter no lineal de los patrones evolutivos con la edad de todas las competencias tratadas y decidir si la no linealidad que sugieren los resultados es debida al azar o es intrínseca a dicha evolución.
- 5<sup>a</sup>. En las tareas de orden con cantidades discretas, es conveniente incorporar algún procedimiento que permita decidir si los sujetos utilizan estrategias continuas, discretas o de otro tipo al resolver las tareas del segundo subconjunto.
- 6<sup>a</sup>. Algunos sujetos utilizan el conteo como estrategia al resolver las tareas de orden con cantidades discretas, por lo que en estudios posteriores habría que observar la aparición y evolución con la edad de esta estrategia poderosa y fundamental.

---

\*Ver el capítulo 2 de la presente memoria.

### 9.3.3 Resultados y conclusiones de los estudios teóricos y su incidencia en los Marcos teórico y metodológico

En los capítulos 2, 3, 4 y 6 se exponen los estudios teóricos realizados y la configuración del marco teórico y metodológico de la investigación, a los que nos remitimos para una información más detallada. A continuación se destacan los principales resultados y conclusiones de los estudios y reflexiones teóricas desarrolladas.

#### A) Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR) (apartado 6.3, capítulo 6).

El modelo evolutivo que se propone y se somete a comprobación empírica en el estudio se caracteriza por los estados siguientes:

##### Estado 1: Orden lineal infralógico

El primer soporte intuitivo relativo a la idea de orden está relacionado con el concepto espacial de línea y, en particular, con el concepto de orden espacio-temporal de un conjunto finito de puntos pertenecientes a una línea. En consecuencia, consideraremos ordenaciones basadas en aspectos perceptivos (infralógicos) en las que no intervienen las distancias y la línea no tiene porqué ser recta (orden topológico). Este soporte intuitivo se caracteriza por la diferenciación entre los puntos y por la aparición de un lenguaje específico: *primero, último, siguiente, anterior, posterior, entre, después, luego*.

La diferenciación y el dominio del lenguaje asociado a tales estructuras ordinales topológicas caracterizarán a los sujetos capaces de establecer lo que denominamos órdenes lineales infralógicos.

##### Estado 2: Orden con cantidades continuas

En este segundo estado, más evolucionado que el anterior, el atributo a comparar es una cantidad continua y el orden se establece por comparación grosera o aproximada de cantidades continuas perceptibles o atribuibles a los objetos que intervienen con independencia de su situación en el espacio.

Además, teniendo en cuenta que las comparaciones y las estimaciones de cantidades parecen ser independientes del lenguaje (Dehaene, 1997), trataremos el orden en este estado haciendo intervenir las relaciones lógicas asociadas a los términos: *más que, menos que, mayor que, menor que*, referidas a la comparación no verbal de cantidades lineales sin la intervención de aspectos numéricos.

Las respuestas propias de este estado quedarán caracterizadas me-

dian­te la capacidad para ordenar objetos por cantidades conti­nuas no numéricas, para lo que utilizaremos la longitud.

### Estado 3: Orden orden con cantidades discretas

La ordenación de cantidades discretas en colecciones de objetos separados puede realizarse por comparación grosera de atributos: numerosidad, tamaño, compensación o subitizing, o mediante el establecimiento de correspondencias seriales que conserven el orden inducido por el uso del conteo\*, incluyendo la interpretación cardinal de la cantidad o del número natural (acumulatividad en el conteo). La variedad de estrategias, incluyendo la aparición espontánea del conteo como estrategia ordinal en los sujetos, distingue este estado más evolucionado que el anterior.

El orden se refiere aquí a aspectos protonuméricos, haciendo intervenir las relaciones lógicas: *más que*, *menos que*, *mayor que*, *menor que*. El sujeto puede ordenar distintas representaciones de cantidades discretas e interpretar las cantidades como discretas o continuas y elegir distintos criterios para su ordenación.

Las respuestas propias de este estado quedarán caracterizadas por la posibilidad de establecer órdenes utilizando distintas representaciones de cantidades discretas.

### Estado Recursivo

Este estado se caracteriza por el grado de reconocimiento, localización y diferenciación de ciertos elementos colocados recursivamente en un determinado contexto que será progresivamente más complejo.

Los niveles elementales de este estado están ligados al *reconocimiento de patrones*, por lo que no es necesario que los sujetos tengan conocimientos numéricos. El sujeto puede hacer referencias ordinales para determinar un lugar o un término de una colección recursiva: *el primero*, *el último*, *el siguiente a*, *el anterior a*, *el que está antes que*, *el que está después que*, ya que tales colecciones heredan el orden impuesto por la función que las define.

La caracterización de los distintos niveles de competencia y/o de desarrollo identificados para cada estado del modelo, se describe en las tablas 8.5, 8.9, 8.21 y 8.36, páginas 440, 452, 489 y 530, respectivamente.

---

\*Contar es establecer una correspondencia biunívoca, que conserva el orden, entre un subconjunto natural y cualquier otro conjunto de objetos.

## B) Modelo general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM) (apartado 6.4, capítulo 6).

El modelo se describe en el apartado citado así como en la Figura 6.3\* del capítulo 6 y se configura en las dos partes o fases siguientes:

### 1ª Fase: fundamentación del ítem.

En esta fase se analizan y determinan los siguientes elementos:

**Características de los sujetos.** , tales como: la edad, la situación de sus capacidades en relación con las conceptos o conocimientos a observar y sus habilidades cinestésicas como *hacer clic* y *arrastrar y soltar*.

**Función epistémica.** La *función epistémica*, cuya evaluación (mediante la función onto–epistémica) es el objetivo principal del ítem, está determinada por los conceptos concretos cuya disponibilidad se desea observar o investigar.

**Representaciones.** Descriptiva, icónica o ambas, que se pretendan para la función ontológica así como el grado en el que deban participar.

**Función ontológica.** Partiendo de las representaciones elegidas, la *función ontológica* se determinará un mediante guión interactivo (p.e. una simulación o un juego), pudiendo incluir componentes afectivo–emocionales destinados a favorecer la motivación y la atención y procurando minimizar la *carga cognitiva extrínseca* (Sweller, 2005) a la que se expone al sujeto.

**Función onto–epistémica.** La conjunción de la función ontológica del ítem (o del conjunto de ítems) con su función epistémica determinará la función *onto–epistémica* en forma de situación problemática global que el sujeto debe resolver.

### 2ª Fase: construcción del ítem.

Se pretende implementar el ítem en un soporte informático específico tomando la función onto–epistémica como punto de partida y guía de su construcción práctica. Los elementos que intervienen son los siguientes:

**Principios constructivos.** Los principios del aprendizaje multimedia (Mayer, 2005a) son útiles para la implementación de secuencias de aprendizaje y la construcción de ítems o tareas que pongan en juego destrezas de naturaleza cognitiva. Los siguientes principios constructivos pueden aplicarse a la

\*Véase la página 310.



construcción y a la selección de los elementos multimedia: principios de contigüidad espacial y temporal, de coherencia, de modalidad, de redundancia, de las diferencias individuales y de la atención dividida.

**Elementos multimedia.** Para la selección de los elementos multimedia se tendrá en cuenta la edad y las características psicomotrices de los sujetos, dotando de la mayor ergonomía posible a los objetos gráficos encargados de recoger la información procedente de la interacción de los sujetos con el instrumento, facilitando dicha interacción todo lo posible y procurando, de nuevo, minimizar la *carga cognitiva extrínseca* a la que se expone al sujeto.

**Registro de la información.** Para cada ítem se programan y utilizan registros (variables en programación) encargados de recoger la información procedente de la interacción con los sujetos, cuya determinación vendrá dada por la función ontológica del ítem. Dichos registros tratarán de discriminar en lo posible los intentos nulos o no válidos que se produzcan en dicha interacción.

**Almacenamiento de la información.** Se realiza mediante la escritura del contenido de los registros en archivos de texto, en bases de datos o, incluso, mediante páginas web conectadas a bases de datos para su análisis posterior. Dichas páginas podrán actuar como soportes de la interfaz de los ítems y actuar, por tanto, como agentes para la recogida de la información.

**Programación o construcción práctica de ítem.** Se lleva a cabo mediante el programa de autoría multimedia o sistema de programación que se elija.

### C) Metodología Multimedia: nueva metodología de investigación en Educación Matemática (apartado 6.7, capítulo 6).

En la sección mencionada así como en el esquema de la Figura 6.8 se presenta un proceso que contempla la particularización y adaptación del modelo general para el diseño del ítem multimedia (MGDIM) al problema concreto analizado y a las características de los sujetos que intervienen en la investigación. Se determinan las funciones ontológicas y epistémicas pertinentes y se construye un instrumento multimedia integrado. Se trata de una metodología adaptada al problema específico a abordar que reúne todas las condiciones de un nuevo método de investigación en Educación Matemática.

El uso de esta metodología presenta, entre otras, las siguientes ventajas contrastadas en la investigación que nos ocupa:

- ❖ Su aplicabilidad a numerosos problemas de investigación en Educación Matemática así como a sujetos de un amplio intervalo de edades (al menos de tres a catorce años de edad).
- ❖ Su posible aplicación, mediante el uso de pantallas táctiles, a sujetos por debajo de tres años y medio.
- ❖ Su sintonía con otros entornos multimedia ampliamente extendidos, como son el uso de videoconsolas, ordenadores, teléfonos móviles, tabletas digitales, etcétera.
- ❖ Permite integrar los ítems en cuestionarios electrónicos multimedia con contenidos lúdicos adaptados a las características psicomotrices y psicoafectivas de los sujetos y que favorecen su motivación e implicación.
- ❖ Los cuestionarios electrónicos constituyen escenarios virtuales con los que el sujeto interacciona con una riqueza superior a la del típico cuestionario de lápiz y papel y más allá del uso del binomio estímulo–respuesta.
- ❖ Los escenarios virtuales permiten plantear a los sujetos cuestiones de elevada dificultad con extrema sencillez y naturalidad, permitiendo incluir componentes visoespaciales, afectivas y emocionales presentes en la actividad cognitiva.
- ❖ El registro de la interacción de los sujetos así como el correspondiente almacenamiento de la información es automático, lo que facilita su procesamiento y análisis posterior.
- ❖ Permite maximizar la objetividad de la información y minimizar la interacción investigador–sujeto.
- ❖ Permite llevar a cabo estudios cualitativos y cuantitativos o de masas, sin más que implementar los cuestionarios multimedia en páginas web conectadas a bases de datos.
- ❖ Los resultados de la investigación pueden aplicarse de modo directo y riguroso a la fundamentación y construcción de nuevas secuencias multimedia de aprendizaje, pudiendo aplicarse también a secuencias de aprendizaje que no hagan uso de esta tecnología.

**D) Diseño y construcción del instrumento multimedia** (capítulos 6 y 7).

En el apartado 6.5 del capítulo 6, página 314 y siguientes, se detallan los siguientes aspectos relativos al diseño y construcción del instrumento adaptado a los cuatro estados del MECOR:

- ❖ La estructura de las interfaces de los conjuntos de tareas (5.5.2, página 175 y siguientes, capítulo 5).
- ❖ Los elementos multimodales que se integran en cada parte de dichas interfaces (véanse los esquemas de las Figuras 6.6 y 6.5, páginas 315 y 313, respectivamente).
- ❖ El número total de ítems integrados en el instrumento y su distribución en los conjuntos de tareas, resultando un total de 27 ítems, 5 de ellos son introductorios y 22 que aportan datos al estudio (Tabla 6.1, 315).
- ❖ El contexto general y las funciones ontológicas para cada uno de los conjuntos de tareas (apartado 6.5.1).
- ❖ La aplicación del MGDIM a la implementación del instrumento (apartado 6.5.2).

Asimismo, en el apartado 7.6 del capítulo 7, página 344 y siguientes, en los subapartados respectivos de cada conjunto, se detallan también:

- ❖ Las características generales del conjunto incluyendo las funciones epistémicas de cada ítem.
- ❖ La descripción de cada ítem o tarea incluyendo su ficha técnica completa.
- ❖ Los registros\* encargados de recoger los datos de la interacción sujeto-instrumento para cada ítem, clasificados según su función.

**E) Aplicación de la Metodología Multimedia al problema ordinal en estudio** (capítulos 6 y 7).

La aplicación de la Metodología Multimedia al problema ordinal en estudio, en las tres etapas que la constituyen (Tabla 6.2), se detalla en el apartado 6.6 del capítulo 6, página 322 y siguientes, así como en apartado 7.3.2 del capítulo 7, página 332 y siguientes, en el que también se especifica el procedimiento metodológico completo utilizado para el diseño del estudio empírico mediante el esquema de la Figura 7.1. El instrumento multimedia anteriormente descrito se integra en la tercera etapa de esta metodología.

En relación con la segunda etapa, dedicada a la selección de la muestra, se

\*Estos registros se denominan variables locales o globales en programación.

ha diseñado y construido un conjunto de tareas constituido por 8 ítems que puede considerarse parte de la instrumentación multimedia necesaria para el estudio. Estas tareas, que hemos denominado tareas iniciales, se describen en el apartado 5.5.1, página 170 y siguientes, del capítulo 5 y sus ventanas de planteamiento y solución se muestran en el apartado A.1, página 613 y siguientes, del anexo A. Por su excelente adecuación se utilizaron en la selección de las muestras que intervienen tanto en el estudio exploratorio como en el estudio empírico posterior.

### ***9.3.4 Resultados y conclusiones del Estudio Empírico***

Este estudio se describe ampliamente en los capítulos 7, en lo referente a su diseño, y 8, en lo que se refiere a su desarrollo y resultados. A continuación se detallan las conclusiones y resultados más relevantes, que están directamente relacionados con el contraste de las hipótesis en las que intervienen.

#### **A) En relación con la sexta hipótesis de la investigación.**

- 1<sup>a</sup>. Se ha aplicado la Metodología Multimedia al estudio de las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y al contraste del MECOR, como se indica en el apartado 7.3.2, página 332 y siguientes del capítulos 7, y según lo indicado en el punto **D)** del apartado 9.3.3 anterior.
- 2<sup>a</sup>. Se ha construido un instrumento multimedia, que cumple fielmente las especificaciones que al respecto se establecen en los capítulos 6 y 7 y se resumen en el punto **D)** del apartado 9.3.3 anterior, constituido por 22 ítems, más otros 5 introductorios, distribuidos en cuatro conjuntos de tareas que se corresponden con los estados del MECOR.
- 3<sup>a</sup>. Dicho instrumento se ha integrado, según lo previsto, en la tercera fase del procedimiento metodológico propio del estudio empírico y se ha aplicado al estudio del del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y al contraste del MECOR.
- 4<sup>a</sup>. Mediante esta metodología se ha seleccionado una muestra de 76 sujetos, según los criterios citados en el apartado 7.3.3 del capítulo 7, cuyas características se detallan, a su vez, en el apartado 8.3 del capítulo 8\* y cuyo desarrollo se describe el apartado 8.2<sup>†</sup> del mismo capítulo 8.
- 5<sup>a</sup>. Se han realizado entrevistas individuales a los sujetos de la muestra,

\*Véanse, respectivamente, las páginas 334 y 428 y siguientes.

†Página 426 y siguientes.

en consonancia con lo indicado en la tercera fase del proceso metodológico empleado, aplicando el protocolo indicado en el apartado 7.3.4 del capítulo 7 y cuyo desarrollo se describe en el apartado 8.4 del capítulo 8, mediante las que se ha obtenido información y datos cuyo tratamiento y análisis aportan suficiente evidencia empírica para (apartados 8.5 a 8.9 del capítulo 8, correspondientes al análisis de los resultados de cada conjunto de tareas y en concreto los subapartados 8.5.2, 8.6.2, 8.7.2, 8.8.2 y 8.9.3 correspondientes a las conclusiones respectivas):

- a. Describir la evolución de las frecuencias de las valoraciones de las respuestas de los sujetos en cada conjunto de tareas asociado al correspondiente estado del MECOR (apartados 8.5.1.1, 8.6.1.1, 8.6.1.1 y 8.8.1.1 del capítulo 8).
- b. Identificar y caracterizar niveles de competencia y/o de desarrollo para cada estado del modelo, describir su evolución e identificar las edades a las que se producen los cambios de nivel y estado (tablas 8.5, 8.9, 8.21 y 8.36, en las páginas 440, 452, 489 y 530, y subapartados de conclusiones anteriormente citados).
- c. Identificar y caracterizar las estrategias de resolución para cada estado del modelo\* así como la evolución de su uso por grupos de edad (subapartados 8.6.1.3, 8.7.1.3, 8.8.1.3, y subapartados de conclusiones anteriormente citados).
- d. Detectar las edades a las que aparece espontáneamente:
  - I. La distinción entre cantidad continua y discreta en la resolución de tareas ordinales. El comienzo de esta competencia se produce a los *cuatro años y medio* con una fuerte y brusca incidencia a los cinco años, disminuyendo entre los cinco años y medio y seis años y aumentando y tendiendo a consolidarse en los dos grupos de edad superior, de seis años y medio y siete años, sin llegar a conseguirse de modo completo (Niveles 2 y 3 de la Tabla 8.21, página 489 y subapartado de conclusiones 8.7.2).
  - II. El conteo ordinal frente a otras estrategias en la resolución de tareas ordinales con cantidades discretas. Presenta, lógicamente, una evolución muy similar a la an-

\*Salvo para el primero en el que no ha lugar dicha identificación, por reducirse la resolución de las tareas a una simple elección del sujeto

terior: comienza a los *cuatro años y medio* aumentando de forma considerable a los cinco años de edad y se empieza a consolidar entre los seis años y medio y los siete años, sin que se haya completado a los siete años de edad (Punto **K**) del apartado 8.7.1.3 y subapartado de conclusiones 8.7.2).

- III. El uso de capacidades recursivas frente al mero etiquetaje. El uso del etiquetaje, frente al de las capacidades recursivas, corresponde fundamentalmente a los sujetos de tres años y medio a cuatro años y medio, disminuye considerablemente para los sujetos de cinco años y medio y seis años de edad y es residual para los sujetos de cinco y de seis años y medio a siete años, para los que predomina el uso de las capacidades recursivas (subapartado 8.8.1.4 y subapartado de conclusiones 8.8.2).
- e. Describir la evolución general de las capacidades, competencias y estrategias asociadas a los estados del modelo (Tabla 8.42, página 555 y siguientes, y apartado 8.9).
- f. Determinar modelos de ajuste no lineales para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas de mayor precisión y adecuación que los lineales, lo que apoya la idea de una evolución no lineal de las mismas (subapartados 8.5.1.3, 8.6.1.5, 8.7.1.5, 8.8.1.5, y subapartados de conclusiones citados al comienzo).
- g. Confirmar la validez del MECOR para un sujeto epistémico así como para los sujetos individuales en los términos que se indican en el análisis y conclusiones correspondientes, que se exponen en los apartados 8.9 y 8.9.3 del capítulo 8.

### **B) En relación con las hipótesis tercera y cuarta.**

Para la realización del estudio empírico se ha creado un escenario o entorno virtual, mediante tecnología multimedia, con las siguientes características:

- 1<sup>a</sup>. Está adaptado a las características psicoafectivas y psicomotrices de niños y niñas de 3 a 7 años.  
Desde el punto de vista teórico o del diseño, lo indicado en los apartados 6.5 del capítulo 6 y 7.6 del capítulo 7 corrobora esta conclusión. Desde el punto de vista empírico la corroboran los resultados correspondientes a las fases segunda y tercera del protocolo utilizado para

la recogida de la información, que se detallan en el apartado 8.4 del capítulo 8.

- 2<sup>a</sup>. Favorece la motivación y la participación activa de los sujetos. Esta conclusión está corroborada por la elevada participación de los sujetos en la resolución de los conjuntos de tareas: en el primer conjunto, el 100% de los sujetos de la muestra intenta resolver todas las tareas; en los otros tres, solamente los sujetos de tres años y medio, con porcentajes elevados, y cuatro años, con porcentajes más moderados, renuncian a la resolución de **las tareas finales de cada conjunto**, por estar referidas a niveles de dificultad que no alcanzan como lo prueba el hecho de que el 100% de los sujetos intenta resolver las tareas anteriores. Véanse las conclusiones relativas a las tareas de orden lineal en el apartado 8.5.2 así como las respectivas columnas etiquetadas con **X** (renuncian a la resolución de la tarea) en las tablas 8.10, 8.22, 8.23 y 8.37 (páginas 454, 491, 492 y 532, respectivamente). Estos resultados corroboran, asimismo, la primera conclusión.

Este entorno virtual multimedia:

- 1<sup>a</sup>. Incorpora tareas centradas en un contenido lógico-matemático concreto. En los apartados 7.6.1, 7.6.2, 7.6.3 y 7.6.4 del capítulo 7 se detallan las funciones epistémicas, onto-epistémicas y la ficha técnica completa para cada tarea, que corroboran esta conclusión. Del mismo modo el entorno multimedia puede adaptarse a contenidos lógico-matemáticos muy variados y a un amplio intervalo de edades.
- 2<sup>a</sup>. Permite analizar la interacción de los sujetos con el entorno mediante la recogida y el tratamiento automático de informaciones puntuales sobre dichas interacciones, maximizando la objetividad de los datos recogidos. En los mismos apartados anteriores se detalla, para cada conjunto de tareas, el registro automático de la interacción sujeto-entorno, en el apartado 7.7 las variables del estudio definidas a partir de dichos registros y en los apartados 8.5 a 8.9, del capítulo 8, los análisis de la información correspondiente a los cuatro conjunto de tareas y al estudio comparativo de las mismas. El diseño, implementación y los resultados correspondientes corroboran esta conclusión.
- 3<sup>a</sup>. Permiten minimizar la interacción investigador-sujeto. El protocolo descrito el apartado 7.3.4 del capítulo 7, el procedimiento

empleado para la recogida y tratamiento de la información (apartado 7.3.5 del mismo capítulo), junto con el desarrollo de las entrevistas individuales que los incorporan y que se detalla en el apartado 8.4 del capítulo 8, corroboran esta conclusión.

### C) Otras conclusiones del estudio.

- 1<sup>a</sup>. En relación con las piezas sobrantes incluidas en las tareas de orden con cantidades continuas y discretas (apartados 8.6.1.3 y 8.7.1.3, y 8.6.2, 8.8 correspondientes a los resultados y conclusiones de ambos conjuntos de tareas, capítulo 8):
  - a. En ambos conjuntos de tareas, la asignación predominante se hace colocando pieza sobrante (la de mayor cantidad) a la posición correspondiente a la mayor cantidad, con lo que los sujetos hacen asignaciones correctas por comparación visual aproximada, lo que provoca errores. El resto de asignaciones son residuales y pueden darse en cualquier grupo de edad.
  - b. Las piezas sobrantes se han utilizado en todas las tareas individuales y en las combinaciones que se mencionan en la discusión, sin embargo su uso es destacable en aquellas en las que aparece por primera vez. Creemos que el hecho de encontrarse por primera vez con la pieza sobrante puede ser el motivo del aumento en su utilización. Este fenómeno se repite en ambos conjuntos de tareas así como en las tareas analizadas en el estudio exploratorio.
  - c. La evolución decreciente del uso de la pieza sobrante puede ser debido, en ambos conjuntos, a los efectos del aprendizaje, el mejor reconocimiento de estas piezas por los grupos de mayor edad y la menor frecuencia de realización de las tareas más complejas por los grupos de menor edad.
  - d. Se han detectado intentos contradictorios incidentales en algunas tareas de ambos conjuntos, que pueden ser debidos a alguna dificultad puntual en el uso del ratón, la estrategia de ensayo y error o a pérdidas puntuales de atención.
- 2<sup>a</sup>. En relación con el estudio comparativo de las tareas (apartados 8.9 y 8.9.3, capítulo 8):
  - a. Las diferencias entre categorías son mayores en las edades inferiores, disminuyendo considerablemente en todos los casos a partir de los cinco años de edad. La evolución se hace más lenta, moderada y próxima con resultados medios por debajo del



- máximo valor de la escala a partir de la edad mencionada, lo que está de acuerdo con la afirmación de Dehaene (1997), en el sentido de que las competencias ordinales son de evolución tardía, lenta y variable individualmente.
- b. El uso de la antisimetría es muy elevado a partir de los tres años y medio, por lo que la lenta evolución observada de las capacidades ordinales podría estar relacionada con formación de la inferencia transitiva, que según Piaget e Inhelder (1975) no se consolida sino partir de los 7 años.
  - c. La transición entre las *capacidades máximas (nivel 3)* del primer estado del modelo (Orden Lineal) y las del segundo (Orden con Cantidades Continuas) se produce a partir de los cinco años y medio y entre las *capacidades máximas* de este último y las del tercer estado del modelo (Orden con Cantidades Discretas) a partir de los seis años y medio.
  - d. Dadas las correlaciones existentes entre las capacidades recursivas y las ordinales relativas a la cantidad discreta, el desarrollo significativo de las primeras a partir de los cinco años y medio parece apoyar el predominio las *capacidades máximas (nivel 3)* en orden con cantidades discretas a partir de los seis años y medio.
  - e. Los déficits, singularidades y disfunciones respecto del MECOR, aludidos al final del apartado 8.9, muestran la complejidad de la evolución individual de las capacidades ordinales y recursivas estudiadas. Éstas no son independientes sino que, como se ha visto por sus correlaciones y de acuerdo con González (1998, p. 184): “debe darse una cierta relación temporal en la construcción individual de estos conceptos, las relaciones entre ellos son muy estrechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás”.
  - f. La evolución individual requiere, según los estudios neurocientíficos actuales, la intervención y el concurso de diferentes regiones cerebrales. La complejidad y variabilidad citadas pueden ser la expresión de los diferentes grados de maduración de las regiones cerebrales implicadas y, como consecuencia, de diferentes estilos evolutivos y de aprendizaje.
  - g. Los resultados obtenidos vienen a confirmar que la edad, siendo importante, no es el único factor evolutivo para el desarrollo de estas capacidades.

- h. Es fundamental iniciar la acción didáctica en los aspectos ordinales y recursivos estudiados, con anterioridad a la edad de cinco años, para paliar o tratar de evitar los efectos negativos que pueden ocasionar las disfunciones observadas en el aprendizaje de la cantidad, el número y la aritmética.

#### 9.4 Logros y hallazgos

En la investigación se han conseguido logros y aportado argumentos en favor de la bondad de las hipótesis sometidas a prueba, de lo que se deduce, como se verá, la consecución de los objetivos planteados. Veamos en lo que sigue una revisión del proceso seguido en términos de los logros y hallazgos mencionados.

##### 9.4.1 Generales

Con el estudio se ha conseguido:

- 1<sup>a</sup>. Establecer el Modelo Evolutivo de Capacidades Ordinales y Recursivas (MECOR), que ofrece un marco interpretativo de las características, regularidades y evolución del Pensamiento Ordinal Preinductivo de las capacidades en escolares de 3 a 7 años en un entorno multimedia.
- 2<sup>a</sup>. Determinar el Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM), que ofrece un método para el diseño y construcción de este tipo de ítems.
- 3<sup>a</sup>. Construir ejemplos prácticos de ítems multimedia.
- 4<sup>a</sup>. Construir la Metodología Multimedia como una nueva metodología para la investigación en Educación Matemática.
- 5<sup>a</sup>. Aplicar la metodología multimedia al caso de la evolución de las capacidades ordinales y recursivas en escolares de 3 a 7 años.
- 6<sup>a</sup>. Caracterizar niveles de competencia y determinar las edades en las que tienen lugar los cambios de nivel.
- 7<sup>a</sup>. Detectar los errores cometidos y las estrategias utilizadas en la resolución de tareas ordinales y recursivas.
- 8<sup>a</sup>. Detectar las edades a las que aparece *espontáneamente* el uso de capacidades recursivas frente al mero etiquetaje, la distinción entre cantidad continua y discreta en la resolución de tareas ordinales y el conteo ordinal frente a otras estrategias en la resolución de tareas ordinales con cantidades discretas.

- 9<sup>a</sup>. Obtener una descripción general de las capacidades, competencias y estrategias asociadas a los estados y niveles del modelo.
- 10<sup>a</sup>. Determinar modelos de ajuste para la evolución de las medias de las valoraciones por grupos de edad para cada una de las capacidades tratadas.

#### 9.4.2 Validación/verificación de las hipótesis

**H1:** *El orden y la recursión se encuentran estrechamente relacionados con la construcción matemática del número natural y el orden lo está con la construcción de los conceptos comparativos y métricos.*

El procedimiento seguido para la confirmación de esta hipótesis ha sido completamente reflexivo, a partir de información de tipo documental, y se ha llevado a cabo dentro del proceso de análisis didáctico. Los resultados y conclusiones del capítulo 2 basados en los análisis epistemológico y fenomenológico aportan evidencias que sostienen **H1**.

**H2:** *Las capacidades ordinales y recursivas propias del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años se desarrollan de acuerdo a un modelo evolutivo con tres estados ordinales: orden lineal, orden con cantidades continuas y orden con cantidades discretas, y un estado recursivo.*

La validación de la hipótesis **H2** se ha realizado en dos etapas: la primera corresponde a la construcción del MECOR y la segunda a la valoración empírica del mismo.

❖ **Primera etapa.** De acuerdo con los resultados obtenidos en las conclusiones del capítulo 5, Hernández y González (2011) y Hernández y González (2014), se realiza un análisis epistemológico y fenomenológico de la estructura de orden y la recursión (capítulo 2) así como un Análisis Didáctico de los antecedentes en las áreas cognitiva y neuropsicológica, referentes a la propia línea de investigación y, en particular, de los conocimientos sobre modelos evolutivos en el ámbito de la educación matemática, que sirven de referentes para la construcción de uno nuevo (Ortiz, 1997), que fundamenta y justifica el significado del modelo construido (MECOR) y su estructuración así como la racionalidad del mismo (capítulo 3).

Por tanto, la confirmación de la bondad de la primera parte de la hipótesis **H2** se basa en los resultados y conclusiones de los

capítulos 5, 2 y 3.

- ❖ *Segunda etapa.* Se orienta al contraste empírico del modelo, mediante la construcción de un instrumento y una metodología adaptados al mismo así como a las características propias de los niños y niñas de 3 a 7 años.

La confirmación de la bondad de la segunda parte de la hipótesis **H2** se logra mediante la confirmación de la bondad de la hipótesis **H6**.

**H3:** *La tecnología multimedia permite crear escenarios o entornos virtuales:*

**H3.1:** *adaptados a las características psicoafectivas y psicomotrices de niños y niñas de 3 a 7 años.*

**H3.2:** *que favorecen la motivación y la participación activa de los sujetos.*

**H4:** *Los entornos virtuales multimedia:*

**H4.1:** *son idóneos para la construcción de tareas centradas en un contenido lógico-matemático concreto.*

**H4.2:** *permiten analizar la interacción de los sujetos con el entorno mediante la recogida y el tratamiento automático de informaciones puntuales sobre dichas interacciones, maximizando la objetividad de los datos recogidos.*

**H4.3:** *permiten minimizar la interacción investigador-sujeto.*

La validez de las hipótesis **H3** y **H4** está avalada por resultados teóricos: Modelo General para el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM) y por el diseño y construcción del instrumento multimedia (capítulos 6 y 7) así como por resultados empíricos: conclusiones del estudio exploratorio (capítulo 5) y apartado **B**) correspondiente a las conclusiones del estudio empírico (apartado 9.3.4, capítulo 9).

**H5:** *El entorno multimedia permite construir una metodología de investigación, metodología multimedia, centrada en un modelo general para el diseño del ítem o tarea multimedia, que optimiza las características del entorno virtual, y en la construcción de un instrumento multimedia constituido por ítems o tareas graduadas en dificultad y organizadas en conjuntos y subconjuntos ordenados.*

La bondad de esta hipótesis se confirma por los resultados de las reflexiones teóricas basadas en la definición del Modelo General para

el Diseño del Ítem Multimedia (MGDIM) y el diseño y construcción del instrumento multimedia, que permiten, a su vez, la determinación de esta metodología (capítulo 6).

**H6:** *La Metodología Multimedia puede aplicarse al estudio de las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y al contraste del modelo evolutivo correspondiente mediante un instrumento constituido por cuatro conjuntos de tareas que se corresponden con los estados del modelo. Esta aplicación particular permite:*

**H6.1:** *Identificar y caracterizar las estrategias de resolución y los niveles de competencia y/o de desarrollo para cada estado del modelo.*

**H6.2:** *Detectar las edades a las que aparece espontáneamente el uso de capacidades recursivas frente al mero etiquetaje, la distinción entre cantidad continua y discreta en la resolución de tareas ordinales y el conteo ordinal frente a otras estrategias en la resolución de tareas ordinales con cantidades discretas.*

**H6.3:** *Describir la evolución general de las capacidades, competencias y estrategias asociadas a los estados del modelo.*

**H6.4:** *Determinar modelos de ajuste no lineales para la evolución de las valoraciones medias por grupos de edad de las capacidades estudiadas de mayor precisión y adecuación que los lineales.*

En el proceso de validación de la hipótesis **H6** se distinguen dos etapas:

❖ **Primera etapa:** Diseño y construcción efectiva del instrumento asociado al modelo (MECOR) y su integración en la Metodología Multimedia (capítulos 6 y 7).

Por tanto, la bondad de la primera parte de la hipótesis **H6** se basa en los constructos teórico-prácticos correspondientes de los capítulos 6 y 7.

❖ **Segunda etapa:** Aplicación de los mismos al estudio de las características y regularidades del Pensamiento Ordinal Preinductivo en sujetos de 3 a 7 años y al contraste del modelo evolutivo (MECOR) (capítulo 8).

La confirmación de la bondad de la segunda parte de la hipótesis **H6**, y de las sub-hipótesis **H6.1** a **H6.4**, está avalada por los resultados del apartado **A)** de conclusiones del Estudio Empírico (apartado 9.3.4, capítulo 9).

### 9.4.3 Consecución de fines y objetivos

La comprobación de la bondad de las hipótesis nos permite asegurar que se han alcanzado los objetivos planteados así como los fines establecidos\*. En definitiva, podemos considerar positivamente resuelto el problema de investigación planteado en los términos utilizados en el capítulo 1:

*Comprobar si la utilización de una metodología de investigación basada en la tecnología multimedia (Metodología Multimedia) proporciona información válida y relevante sobre la evolución del Pensamiento Ordinal prenumérico y recursivo en escolares de 3 a 7 años.*

O en los términos equivalentes utilizados en el apartado 9.2 del presente capítulo:

*Analizar y conocer una parte de la evolución del Pensamiento Ordinal prenumérico y recursivo en escolares de 3 a 7 años y comprobar si la utilización de una metodología de investigación basada en la tecnología multimedia (Metodología Multimedia) proporciona información válida y relevante sobre dicha evolución.*

## 9.5 Limitaciones de la investigación

Se exponen a continuación algunas de las limitaciones de la investigación, que, de acuerdo con Ortiz (2014), pueden considerarse como temas de estudio para el futuro.

- ❖ En relación con las valoraciones e interpretaciones:
  - ◆ La valoración, entendida como interpretación de acciones observables realizadas por terceros, ha de ser necesariamente abierta ya que ninguna cantidad de evidencia podría aportar la certeza suficiente para admitir que no existe otra interpretación distinta, alternativa e igualmente correcta (Dancy, 1993, referenciado en Ortiz (2014)).
  - ◆ La valoración depende, además, del propósito del investigador, de los modelos adoptados como referencias teóricas y de la metodología empleada en las fases empíricas de las investigaciones.
- ❖ En relación con las tareas y los escenarios:

---

\*Véanse el apartado 1.4, página 22 y siguientes, del capítulo 1 o el apartado 9.2, página 562, del capítulo actual.

- ◆ Las tareas utilizadas, aunque elegidas cuidadosamente al amparo de un modelo evolutivo fundamentado, son una representación del universo de tareas posibles y constituyen un condicionante de primer orden para la valoración e interpretación. Con otras tareas supuestamente equivalentes se podrían obtener resultados distintos a los obtenidos aquí, extremo este que también debería ser investigado en futuros estudios.
- ◆ Las funciones ontológicas y escenarios multimedia asociados a los conjuntos de tareas son algunos de los posibles escenarios en los que se puede plantear la resolución. Los utilizados en la investigación son escenarios lúdicos que incorporan componentes afectivas y emocionales que pretenden dotar de una motivación intrínseca a las tareas, características distintivas y diferentes de las que caracterizan a otros tipos de escenarios.
- ❖ El alcance de los resultados de la investigación está limitado por el tamaño y las características de la muestra empleada. Nuevos estudios deberían comprobar si los resultados que se exponen en la presente memoria son generalizables a muestras más amplias y a toda la población de sujetos de las edades consideradas.

## 9.6 Perspectivas futuras

Además de las anteriormente indicadas, señalamos las siguientes líneas de interés para investigaciones futuras.

### 9.6.1 En relación con la continuación de la investigación

- ❖ Completar el estudio de los tiempos de respuesta y número de intentos, iniciado con las tareas de orden lineal (apartados B.2 y B.3 del anexo B), para los restantes conjuntos de tareas, ya que pueden aportar información de interés sobre los procesos evolutivos en estudio, así como información sobre obstáculos epistemológicos y diferentes estilos evolutivos y de aprendizaje.
- ❖ Realizar un estudio comparativo de género, a partir de la información obtenida, para averiguar si se producen semejanzas y/o diferencias en los procesos evolutivos de las capacidades estudiadas entre niños y niñas.
- ❖ Se han encontrado coeficientes alfa de Cronbach con valores 0,9 y

0,934 para las medias de las valoraciones de las respuestas por grupos de edad en los tres conjuntos de tareas ordinales y en los cuatro conjuntos de tareas, respectivamente. Asimismo, dicho coeficiente alcanza un valor de 0,765 para los 19 ítems que se obtienen al no considerar los del segundo subconjunto de orden con cantidades discretas, por realizarse su valoración de forma distinta a los demás\*, valor que aumenta a 0,783 si se elimina uno de los ítems de orden con cantidades continuas. Estos valores indican que se dispone una base de ítems muy aceptable de cara a conseguir una escala de Cronbach para la evolución de las capacidades ordinales y recursivas estudiadas. Por lo que la continuación de la investigación en esta dirección podría ofrecer resultados de interés.

- ❖ Replicar el estudio con mayores tamaños muestrales, ya que se podría obtener información importante relacionada con lo indicado en el punto anterior y confirmar y precisar o, por el contrario, rebatir algunos de los resultados obtenidos en la presente investigación.
- ❖ A partir de los resultados y de la información obtenida, desarrollar un estudio estadístico cuantitativo sobre las capacidades estudiadas implementando los ítems en páginas web conectadas a bases de datos y adaptando a dicho estudio la metodología multimedia desarrollada.

### *9.6.2 En relación con otras investigaciones*

- ❖ Completar los estudios de la línea de investigación sobre Pensamiento Ordinal y Numérico que viene desarrollándose en el Departamento, en sujetos de 3 a 7 años mediante un estudio que relacione los resultados de la presente investigación con los obtenidos en el trabajo de Fernández (2001) y, en particular, someter a prueba la conjetura de que los sujetos que se hallan en el nivel 3 en orden con cantidades discretas y en capacidades recursivas, se hallan también en los niveles superiores del modelo evolutivo establecido en dicho trabajo.
- ❖ Aplicar la Metodología Multimedia a otros problemas o campos de investigación en Educación Matemática con escolares de Educación Infantil y Primaria, ya que, como se ha comprobado, posee un alto potencial de desarrollo y adaptabilidad. Esta metodología puede adaptarse tanto a estudios de tipo cualitativo como a estudios cuantitativos o de masas.

\*Dicha valoración depende de si el sujeto distingue o no la cantidad discreta en dicho subconjunto de tareas. Véase la sección 7.7.3, en la página 417 y siguientes, capítulo 7.



- ❖ Continuar la línea de investigación iniciada sobre el uso de la tecnología multimedia en Educación Matemática.

### 9.6.3 Aplicabilidad de los resultados

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la utilidad del MECOR para describir e interpretar la evolución de las capacidades ordinales y recursivas estudiadas y muestran la complejidad de la evolución individual de dichas capacidades, que pueden dar lugar a diferentes estilos evolutivos y de aprendizaje en los que la edad es un factor importante pero no único para el desarrollo de las mismas. Por ello, es clave iniciar la acción didáctica, orientada a su desarrollo, con anterioridad a la edad de cinco años para paliar o tratar de evitar los efectos negativos que pueden ocasionar las disfunciones observadas en el aprendizaje por los sujetos de la cantidad, el número y la aritmética. En este aspecto, el MECOR ofrece ayuda para detectarlas así como orientaciones para diseñar y construir las actividades o secuencias de enseñanza y aprendizaje, que pueden ser o no de tipo multimedia, necesarias para abordar su tratamiento. Consideramos, por tanto, que los maestros y maestras pueden utilizarlo en todas sus posibilidades.

En relación con la Metodología Multimedia desarrollada, los resultados obtenidos permiten afirmar su amplia aplicabilidad en el ámbito educativo, no solo en Educación Matemática, tanto desde el punto de vista de las investigaciones a realizar como, aprovechando los resultados de las mismas, en el diseño y construcción posterior de secuencias de enseñanza y aprendizaje consecuentes con ellos.



## Referencias

- Alekseevskij, D. V., Vinogradov, A. M., y Lygachin, V. V. (1991). *Geometry I. Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry* (Vol. 28; R. V. Gramkrelidze, Ed.). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Alonso, D., y Fuentes, L. J. (2001). Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático. *Revista de Neurología*, 33(6), 568–576.
- Andrés, M. (1952). Determinación experimental del rendimiento escolar. *Revista Española de Pedagogía*, Año 10 Vol 40, 539-550.
- Atkinson, C., y Shiffrin, R. M. (1971). The control of short-term memory. *Scientific American*, 225, 82-90.
- Baddeley, A. D. (1986). *Working memory*. Oxford: Oxford University Press.
- Baddeley, A. D. (1992). Working memory. *Science*, 255, 556–559.
- Baddeley, A. D. (1997). *Human memory: Theory and practice (rev. ed.)*. Hove, UK: Psychology Press.
- Baddeley, A. D. (1999). *Human memory*. Boston: Allyn & Bacon.
- Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Aprendizaje Visor.
- Bechtel, W., y Abrahamsen, A. (1991). *Connectionism and the mind: An introduction to parallel procesing in networks*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.
- Bermejo, V., y Lago, M. (1994). Conceptualización del desarrollo. En V. Bermejo (Ed.), *Desarrollo cognitivo*. Madrid: Síntesis.
- Bishop, A. (1997). Educating the Mathematical enculturators. *Papua New*

*Guinea Journal of Teacher Education*, 4(2), 17-20.

- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa: guía práctica*. Barcelona: CEAC.
- Blanco, A., y Prieto, T. (2000). *Diseños de entrevistas*. Curso de doctorado, Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.
- Bliss, J. (1987). *La entrevista*. Documento del curso sobre "Métodos de investigación en didáctica de las ciencias experimentales", curso 86-87, Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.
- Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 57(4), 221-232.
- Bourbaki, N. (1970). *Théorie des Ensembles*. Paris: C.C.L.S.
- Boysen, S., y Hallbert, K. (2000). Primate numerical competence: Contributions toward understanding nonhuman cognition. *Cognitive Science*, 24(3), 423-443.
- Brey, P. (2005). The Epistemology and Ontology of Human-Computer Interaction. *Minds and Machines*, 15, 383-398.
- Brooks, D. W. (1997). *Web-teaching: A guide to designing interactive teaching for the World Wide Web*. New York: Plenum.
- Brueckner, L., y Bond, G. (1984). *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*. Madrid: RIALP.
- Brunschvicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*. Buenos Aires: Lautaro.
- Carpenter, T. P. (1980). Research in cognitive development. *Research in Mathematics Education*, 146-206.
- Cartier, P. (2000). Grothendieck et les motifs. En *Notes sur L'Histoire et la Philosophie des Mathématiques IV* (p. 1-33). Bures-sur-Yvette: IHES.
- Castro, E., Del Olmo, M. A., y Castro, E. (2002). *Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil*. Granada. España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

- Chamorro, C., y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.
- Chandler, P., y Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and Instruction*, 8, 293–332.
- Claparède, E. (1976). *Le langage et la pensée chez l'enfant* (9.<sup>a</sup> ed.). Neuchâtel: Delanchoix et Niestlé.
- Clark, A. (1990). *Microcognition*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Clark, J. M., y Paivio, A. (1991). Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review*, 3, 149–210.
- Clark, R. E., y Feldon, D. F. (2005). Five common but questionable principles of Multimedia Learning. En R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (p. 97-115). New York: Cambridge University Press.
- Cohen, L., y Dehaene, S. (1996). Cerebral networks for number processing: Evidence from a case of posterior callosal lesion. *NeuroCase*, 2, 155–174.
- Cohen, L., y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: Muralla.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*. London: New Fetter Lane.
- Cook, L. K., y Mayer, R. E. (1988). Teaching readers about the structure of scientific text. *Journal of Educational Psychology*, 80, 448–456.
- Cowan, R. (1987). When do children trust counting as a basis for relative number judgment? *Journal of Experimental Child Psychology*, 43, 325–328.
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Dehaene, S., y Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, 1, 83–120. (Psychology Press, 27 Church Road, Hove, East Sussex, BN3 2FA, UK. ISBN: 0-86377-418-0)
- Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Madrid: Alianza Universidad.

- Doolittle, P. E. (2002). Multimedia Learning: Empirical Results and Practical Applications. En *The proceedings of the irish educational technology users'conference*.
- Ewald, W. (1996). *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. 2). New York: Oxford University Press. (Reimpresión de 2005)
- Fernández, A. (1995). Metodologías de la Investigación en Educación Matemática. En L. Berenguer y P. Flores. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas* (p. 47-65). Sevilla: S.A.E.M. Thales.
- Fernández, C. (2001). *Relaciones Lógicas-Ordinales entre los términos de la Secuencia Numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.
- Fernández, C., y Ortiz, A. (2008). La evolución del pensamiento ordinal en los escolares de 3 a 6 años. *Infancia y Aprendizaje*, 31(1), 107-130.
- Fernández, C. M., y González, J. L. (Eds.). (2014). *Aprendizaje y Razonamiento matemático*. Málaga: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga.
- Ferreirós, J. (2000). *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and his Role in Modern Mathematics*. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag AG.
- Floridi, L. (1999). *Philosophy and computing. an introduction*. London and New York: Routledge.
- Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
- Fuson, K., y Hall, J. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (p. 49-107). New York: Academic Press.
- Fuson, K., Richards, J., y Briars, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. En C. J. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development* (p. 33-92). New York: Springer-Verlag.
- Gallardo, J., y González, J. L. (2013). Análisis Didáctico como método para

el tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática. En L. Rico, J. L. Lupiañez, y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (p. 415-432). Granada: Comares.

García, J., y García, A. (2001). *Teoría de la educación II*. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: the theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.

Geary, D. C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition: Implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist*, 50, 24-37.

Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. En W. Damon y R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of Child Psychology* (6.<sup>a</sup> ed., Vols. 2: Cognition, perception and lenguaje, pp. 777-810). John Wiley & Sons, Inc.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., y DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition. contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88(2), 121-151.

Gelman, R., y Gallistel, C. (2004). Lenguaje and the Origin of Numerical Concepts. *Science*, 306, 441-443.

Gelman, R., y Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R., y Meck, E. (1986). The notion of principle: The case of counting. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics* (p. 29-57). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gitelman, D. R. (2003). Acalculia: A Disorder of Numerical Cognition. En M. D'Esposito (Ed.), *Neurological Foundations of Cognitive Neuroscience* (p. 129-163). Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.

Godement, R. (1974). *Álgebra*. Madrid: Tecnos.

González, J. L. (1998). *Números naturales relativos*. Granada: Ed. Comares.

- González, J. L. (1999). Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática SEIEM* (p. 14-30). Valladolid: Universidad de Valladolid.
- González, J. L., y Ortiz, A. (2000). La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: estructura y fundamentos. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent, y M. Sierra (Eds.), *IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (p. 131-146). Huelva: Universidad de Huelva.
- Greenlaw, R., y Hepp, E. (1999). *In-line / On-line: Fundamentals of the Internet and the World Wide Web*. Boston: McGraw-Hill.
- Hadamard, J. (1954). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications. (Lectura online permitida en <https://archive.org/details/eassayonthepsych006281mbp>)
- Hardy, T., y Jackson, R. (1998). *Aprendizaje y cognición* (4.<sup>a</sup> ed.). Madrid: Prentice Hall.
- Helmholtz, H. (1887). Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet. *Philosophische Aufsätze für E. Zeller*, 70-108. (References to [Helmholtz 1921]. English trans, in [Ewald 1996], vol.2.)
- Hernández, P. (2005). *Desarrollo metodológico multimedia para la evaluación del Pensamiento Numérico Ordinal en escolares de 3 a 6 años*. Memoria de tercer ciclo, Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.
- Hernández, P., y González, J. L. (2010). Application of Multimedia Technology to Study of Ordinal Competences of Children from 3 to 7 years old. En J. G. et al. (Ed.), *Proceedings of time 2010*. Málaga. Descargado de <http://www.time2010.uma.es/Proceedings/>
- Hernández, P., y González, J. L. (2011). Application of Multimedia Technology to Study the Ordinal Competences of Children from 3 to 7 years old. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 18(3), 127-135.
- Hernández, P., y González, J. L. (2014). Pensamiento ordinal elemental: un estudio con multimedia. En C. M. Fernández y J. L. González



(Eds.), *Aprendizaje y Razonamiento matemático* (p. 13-56). Málaga: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga.

- Hirsch, E. D. J. (1996). *The schools we need and why we don't have them*. Michigan University: Doubleday.
- Hirsch, E. D. J. (1998). *Los colegios que necesitamos y por qué no los tenemos*. Descargado de [http://www.cepchile.cl/dms/lang\\_1/doc\\_1587.html](http://www.cepchile.cl/dms/lang_1/doc_1587.html)
- Hrbacek, K., y Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Inhelder, B., Sinclair, H., y Bovet, M. (1974). *Apprentissage et structures de la connaissance*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Ivorra, C. (2008). *Lógica y teoría de conjuntos*. eBook. Valencia. Descargado de <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf>
- Izard, V. (2006). *Interactions entre les Représentations Numériques verbales et non-verbales: Étude théorique et expérimentale*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6.
- Klarhr, D., y Wallace, J. G. (1973). The role of quantification operators in the development of conservation. *Cognitive Psychology*, 4(3), 301-327.
- Kneebone, G. T. (1963). *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*. London: D. Van Nostrand Company Limited.
- Kobayashi, T., Hiraki, K., Mugitani, R., y Hasegawa, T. (2004). Baby arithmetic: one objet plus one tone. *Cognition*, 91, 23-34.
- Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain*. Cambridge, MA: MIT Press.
- le Boulch, J. (1995). *El desarrollo psicomotor desde el nacimiento hasta los seis años: Consecuencias*. Barcelona: Paidós Iberica.
- Maddux, C., Johnson, D., y Willis, J. (2001). *Educational computer: Learning with tomorrow's technologies*. Boston: Allyn and Bacon.
- Manin, Y. I., y Panchishkin, A. A. (2005). *Introduction to Modern Number Theory* (2.<sup>a</sup> ed.). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Mathias, A. R. D. (2004). La ignorancia de Bourbaki. *La Gaceta de la RSME*, 7(3), 727-748.
- Matsuzawa, T. (1985). Use of number by a chimpanzee. *Nature*, 312.

- Mayer, R. E. (2001). *Multimedia Learning*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. (Ed.). (2005a). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*. New York: Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. (2005b). Cognitive Theory of Multimedia Learning. En R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (p. 31-48). New York: Cambridge University Press.
- Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63, 81-97.
- Nieder, A., y Miller, E. (2004). A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *PNAS*, 101(19), 7457-7462.
- Norman, D. (1993). *Things that Make us Smart: Defending Human Attributes in the Age of the Machine*. Reading, MA: Addison Wesley.
- Ortiz, A. (1993). *Series numéricas y razonamiento inductivo*. Memoria de tercer ciclo, Universidad de Granada.
- Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Una experiencia con escolares de Educación Primaria*. Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Ortiz, A. L. (2014). *Comprensión de los sistemas de numeración. Un estudio en el Grado de Maestro en Educación Primaria*. Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.
- Paivio, A. (1986). *Mental representation: A dual coding approach*. New York: Oxford University Press.
- Penney, C. G. (1989). Modality effects and the structure of short-term verbal memory. *Memory and Cognition*, 17, 398-422.
- Pescador, D. (2000). *Director 8*. Madrid: Anaya Multimedia.
- Piaget, J. (1987). *La Epistemología Genética*. Madrid: Debate.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1975). *Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales. Clasificaciones y Seriaciones*. Buenos Aires: Guadalupe.
- Piaget, J., y Szeminska, A. (1982). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.

- Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (p. 61-94). Barcelona: Horsori.
- Rosenzweig, G. (2002). *Director 8.5*. Madrid: Anaya Multimedia.
- Russell, B. (1982). *Los Principios de la Matemática*. Madrid: Espasa Calpe. (Versión original de 1903)
- Saxe, G. (1979). Developmental relations between notational counting and number conservation. *Child Development*, 50, 180-187.
- Saxe, G., Guberman, S., y Gearhart, M. (1987). Social processes in early number development. En *Monographs of the Society for Research in Child Development* (Vol. 52). Society for Research in Child Development.
- Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. En R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). New York: Cambridge University Press.
- Schnotz, W., y Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning for multiple representations. *Learning and Instruction*, 13, 141-156.
- Schwartz, J. E., y Beichner, R. J. (1999). *Essentials of educational technology*. Boston: Allyn and Bacon.
- Serrano, J. M., y Denia, A. M. (1987). Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción. *Infancia y Aprendizaje*, 39, 57-69.
- Song, M. J., y Ginsburg, H. P. (1988). The effect of the Korean number system on young children's counting: A natural experiment in numerical bilingualism. *International Journal of Psychology*, 23, 319-332.
- Sophian, C. (1988). Limitations on preschool children's knowledge about counting: Using counting to compare two sets. *Development Psychology*, 24(5), 634-640.
- Stegmüller, W. (1979). *Teoría y experiencia*. Barcelona: Ariel.
- Sternberg, R. J. (1990). *Metaphors of mind: Conceptions of the nature of intelligence*. New York: Cambridge University Press.
- Sweller, J. (2003). Evolution of human cognitive architecture. En B. Ross (Ed.), *The Psychology of Learning and Motivation* (Vol. 43, p. 215-

- 266). San Diego, CA: Academic Press.
- Sweller, J. (2005). Implications of Cognitive Load Theory for Multimedia Learning. En R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 19–30). New York: Cambridge University Press.
- Turkle, S. (1995). *Life on the Screen; Identity in the Age of the Internet*. New York: Simon & Schuster.
- van Dijk, T. A., y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.
- van Merriënboer, J. J. G., y Kester, L. (2005). The four–component instructional design model: Principles in environments for complex learning. En R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 71–93). New York: Cambridge University Press.
- Vinh-Bang. (1966). *La méthode clinique et la recherche en psychologie de l'enfant*. Paris: Dunod.
- von Neumann, J. (1958). *The Computer and the Brain*. New Haven/London: Yale University Press.
- Wagner, S., y Walters, J. A. (1982). A longitudinal analysis of early number concepts: From numbers to number. En G. Forman (Ed.), *Action and Thought* (p. 137-161). New York: Academic Press.
- Way, J. (2003). *Multimedia Learning Objects in Mathematics Education* (Electronic article). Sydney: <http://www.thelearningfederation.edu.au>, University of Western Sydney.
- Wittrock, M. C. (1989). Generative processes of comprehension. *Educational Psychologist*, 24, 345-376.
- Wynn, K. (1998). Psychological foundations of number: numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Sciences*, 2(8), 296-303.
- Wynn, K., Bloom, P., y Chiang, W. (2002). Enumeration of collective entities by 5-month-old infants. *Cognition*, 83, 55-62.

# Anexo A

## DATOS COMPLEMENTARIOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

### A.1 Tareas iniciales. Ventanas de planteamiento y solución

Ventana inicial desde la que se accede a las tres tareas.



### Tarea personajes

Las ventanas de planteamiento y solución que se muestran en cada una de las partes pueden verse en la figura A.1.

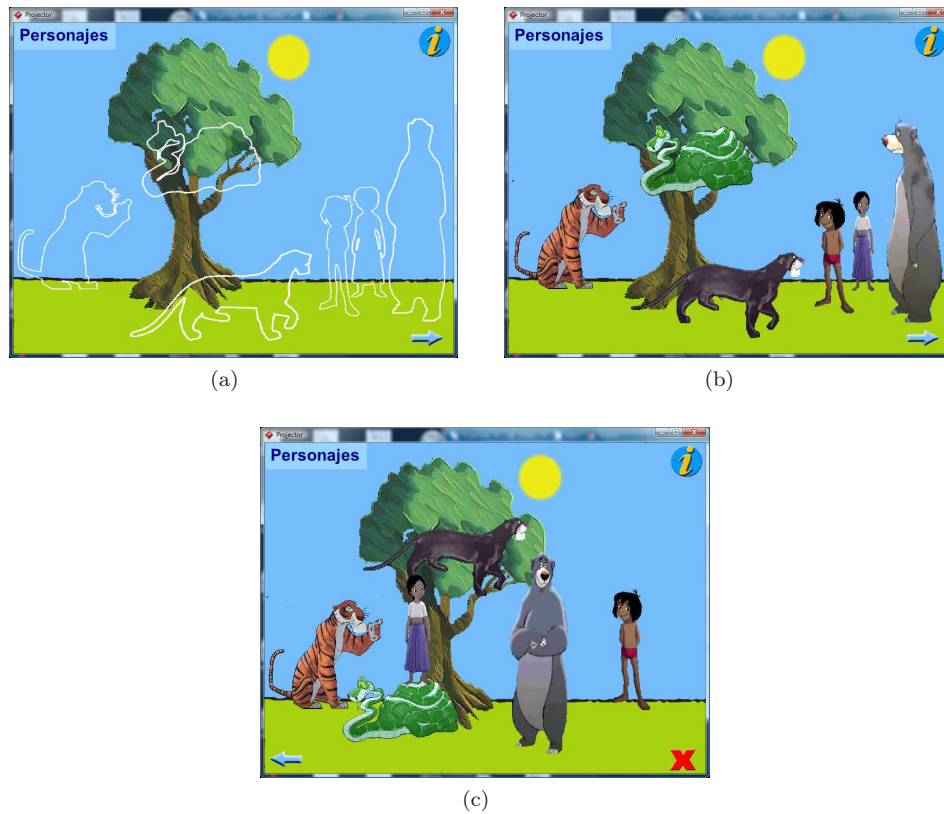


Fig. A.1. Tarea Personajes. (a) Ventana de planteamiento de la primera parte; (b) Ventana de solución de la primera parte; (c) Ventanas de planteamiento y solución de la segunda parte.

## Tarea Baloo

Las ventanas de planteamiento y solución se muestran en la figura A.2.

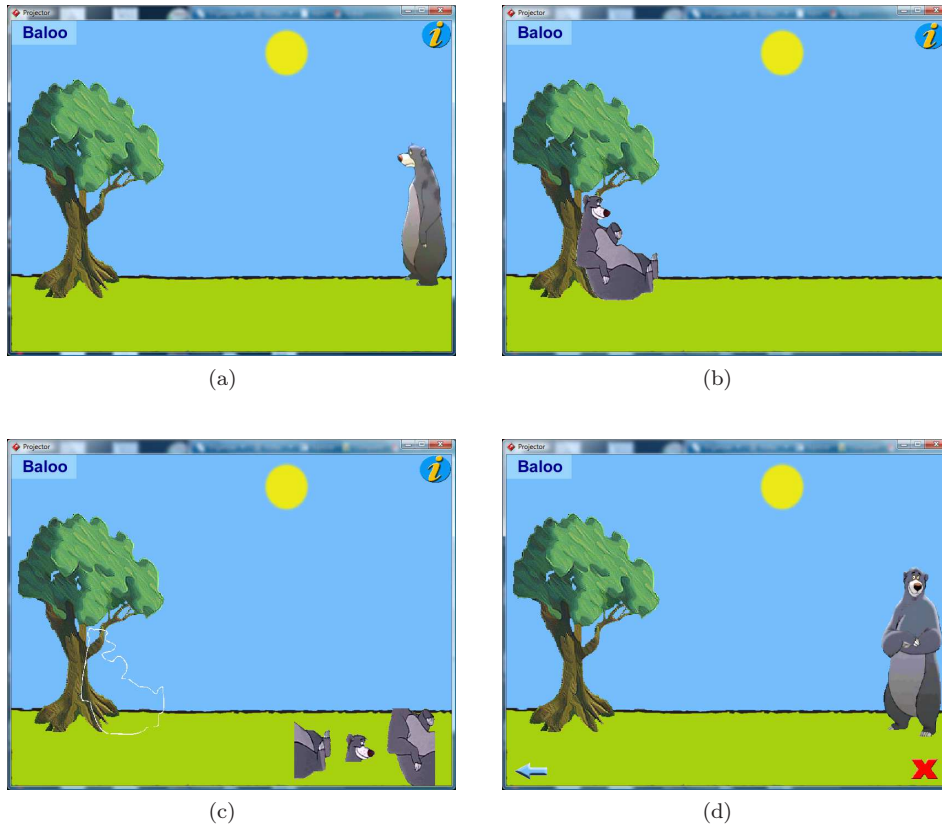


Fig. A.2. Tarea Baloo. Ventanas de planteamiento: (a) Primera parte, (b) Segunda parte, (c) Tercera parte. (d) Ventana de solución de la tercera parte.

### Tarea Mowgli

Las sucesivas ventanas de planteamiento y solución pueden verse en la figura A.3.

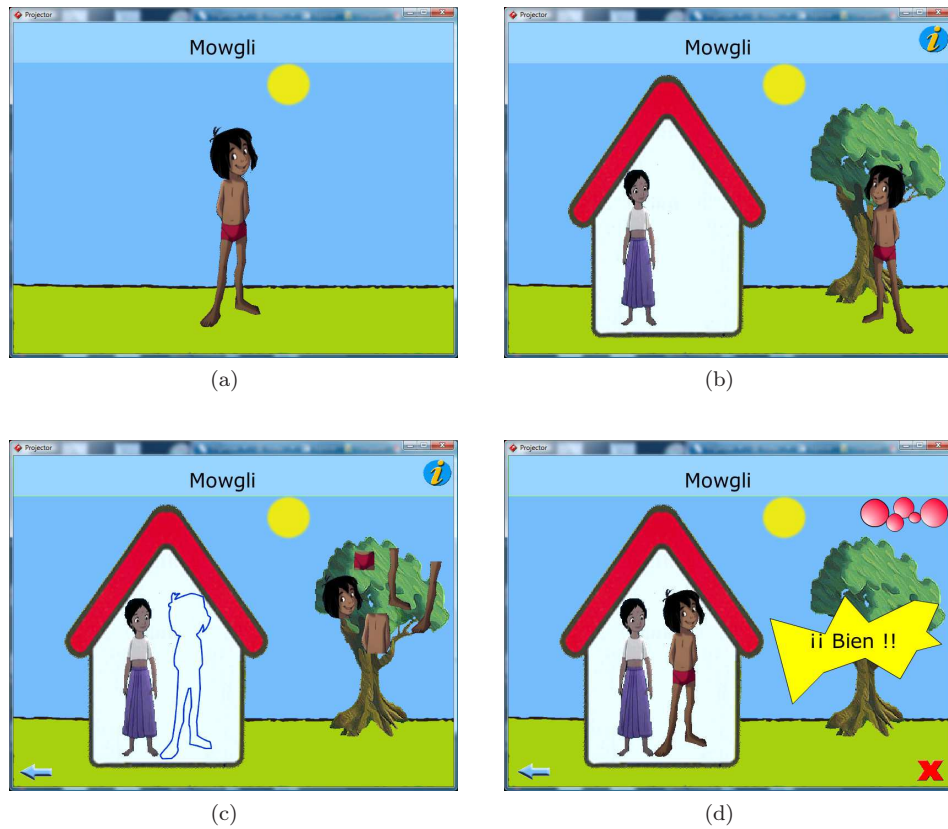


Fig. A.3. Tarea Mowgli. Ventanas de planteamiento: (a) Primera parte, (b) Segunda parte, (c) Tercera parte. (d) Ventana de solución de la tercera parte.



## A.2 Tareas de orden lineal

### A.2.1 Ventanas de planteamiento y solución

La figura A.4 muestra la ventana inicial del conjunto.



Fig. A.4. Ventana inicial, tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.

Las ventanas de planteamiento y solución de la primera tarea, introductoria, se muestran en la figura A.5.

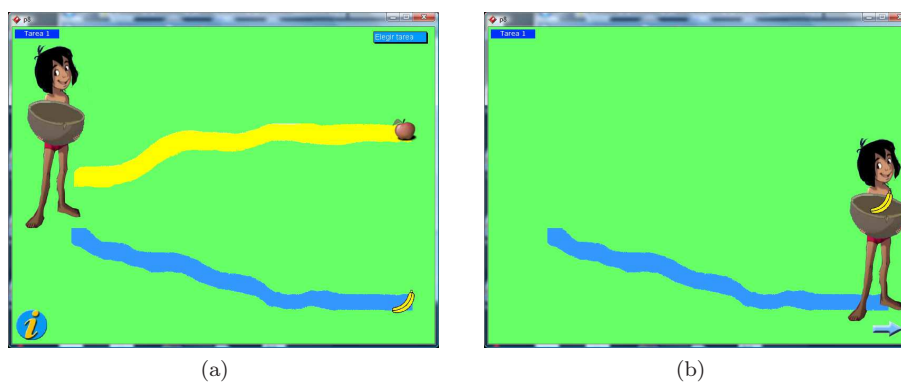


Fig. A.5. Primera tarea de orden lineal. Estudio exploratorio. (a) Ventana de planteamiento. (b) Ventana de solución.

Ventanas de planteamiento y solución, tareas segunda a cuarta: figura A.6.

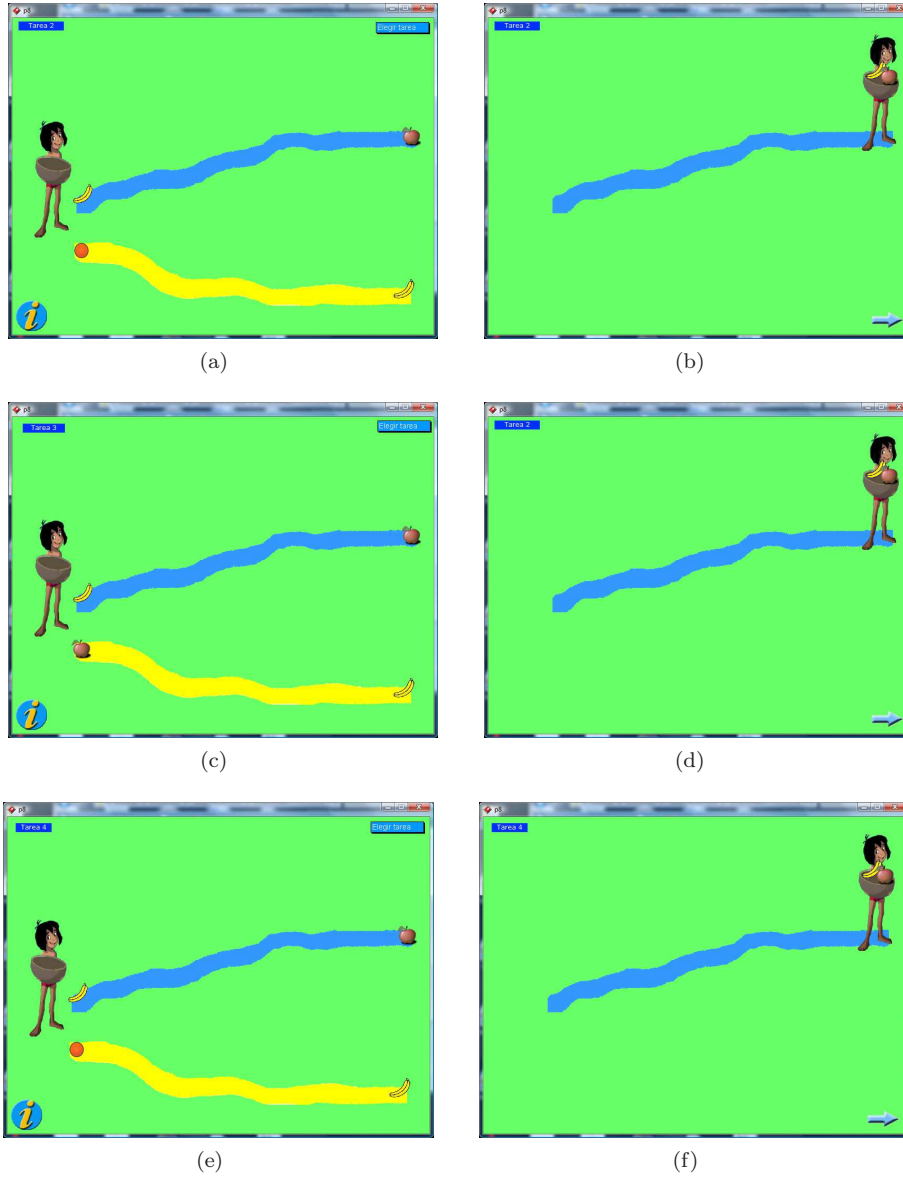


Fig. A.6. Tareas segunda a cuarta de orden lineal. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

Ventanas de planteamiento y solución, tareas quinta a séptima: figura A.7.

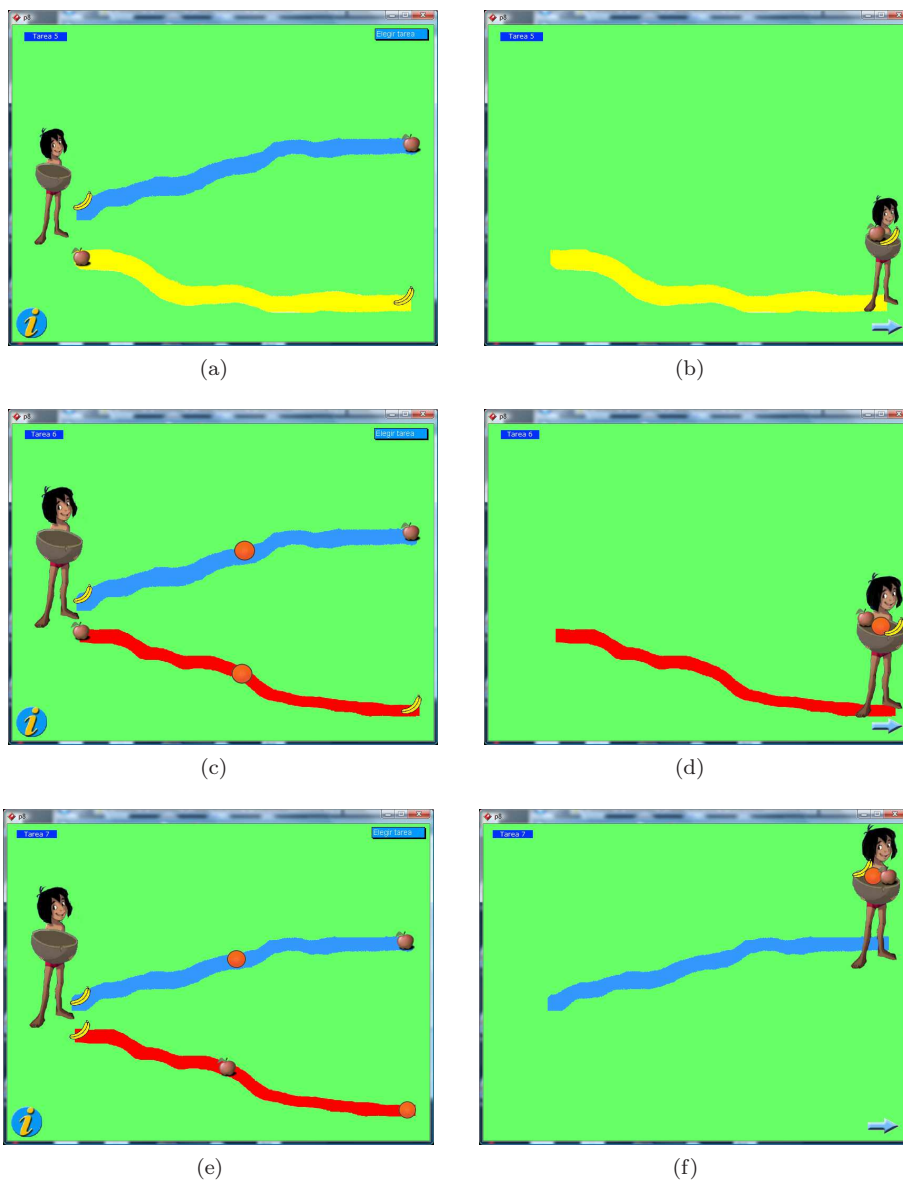


Fig. A.7. Tareas quinta a séptima de orden lineal. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

Ventanas de planteamiento y solución, tareas octava a décima: figura A.8.

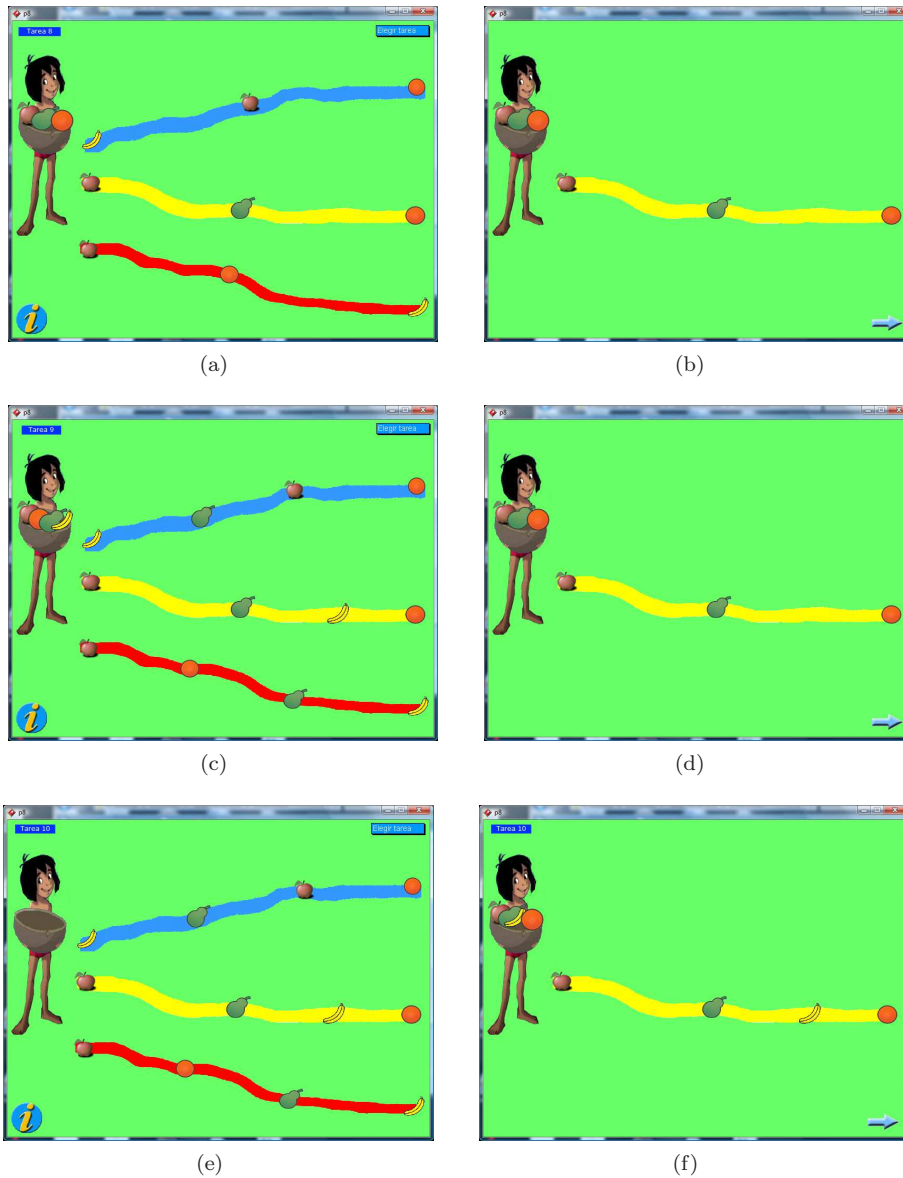


Fig. A.8. Tareas octava a décima de orden lineal. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

### A.2.2 Codificación y valoración de las respuestas

La tabla siguiente recoge la codificación y la valoración de las respuestas de este conjunto. En la primera columna figura el código asignado a cada bloque de tareas, las siguientes recogen la clave asignada a cada una de las situaciones posibles, la valoración numérica asignada y la descripción de las situaciones.

Bloque	Clave	Valoración	Situación
<b>L1A</b>	L1A0	0	No realiza ninguna de las tareas segunda y tercera.
	L1A1	0	Realiza ambas tareas segunda y tercera al azar (más de dos intentos en cada una).
	L1A2	0	Realiza la segunda al primer intento y la tercera con más de dos. Realiza ambas tareas segunda y tercera con dos intentos.
	L1A3	0,5	Realiza la segunda con más de dos intentos y la tercera al primero. Realiza la segunda al primer intento y la tercera al segundo intento. Realiza la segunda al segundo intento y la tercera al primero.
	L1A4	1	Realiza ambas tareas al primer intento.
<b>L2A</b>	L2A0	0	No realiza ninguna de las tareas cuarta y quinta.
	L2A1	0	Realiza ambas tareas cuarta y quinta al azar (más de dos intentos en cada una).
	L2A2	0	Realiza la cuarta al primer intento y la quinta con más de dos. Realiza ambas tareas cuarta y quinta con dos intentos.
	L2A3	0,5	Realiza la cuarta con más de dos intentos y la quinta al primero. Realiza la cuarta al primer intento y la quinta al segundo intento. Realiza la cuarta al segundo intento y la quinta al primero.
	L2A4	1	Realiza ambas tareas al primer intento.
<b>L3</b>	L30	0	No realiza la sexta tarea.
	L31	0	Realiza la sexta tarea al azar (más de dos intentos).
	L32	0,5	Realiza la sexta tarea al segundo intento.
	L33	1	Realiza la sexta tarea al primer intento.
<b>L4</b>	L40	0	No realiza la séptima tarea.

Continúa en la página siguiente ...

Tabla A.1: Codificación. Tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.

... viene de la página anterior.

Tarea	Clave	Valoración	Situación
	L41	0	Realiza la séptima tarea al azar (más de dos intentos).
	L42	0,5	Realiza la séptima tarea al segundo intento.
	L43	1	Realiza la séptima tarea al primer intento.
<b>L5</b>	L50	0	No realiza la octava tarea.
	L51	0	Realiza la octava tarea al azar (más de dos intentos).
	L52	0,5	Realiza la octava tarea al segundo intento.
	L53	1	Realiza la octava tarea al primer intento.
<b>L6</b>	L60	0	No realiza la novena tarea.
	L61	0	Realiza la novena tarea al azar (más de dos intentos).
	L62	0,5	Realiza la novena tarea al segundo intento.
	L63	1	Realiza la novena tarea al primer intento.
<b>L7</b>	L70	0	No realiza la décima tarea.
	L71	0	Realiza la décima tarea al azar (más de dos intentos).
	L72	0,5	Realiza la décima tarea al segundo intento.
	L73	1	Realiza la décima tarea al primer intento.

Tabla A.1: Codificación. Tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio. (Continuación).

La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos por los sujetos de la muestra, según la valoración anterior, en cada uno de los siete bloques de tareas. Además, la primera columna recoge el código de identificación asignado a cada sujeto, cuyo último índice en cada grupo de edad crece con la edad real del mismo; las tres últimas recogen, respectivamente, la suma de las valoraciones para cada sujeto, la misma suma convertida a una escala de 0 a 5 unidades (variable SumaL) y las medias de ésta última para cada grupo de edad.

Clave	L1A	L2A	L3	L4	L5	L6	L7	Suma	SumaL	MediaL
3AM1	1	0	0,5	0	0	0	0	1,5	1	
3AM2	1	1	1	0,5	0	0,5	0,5	4,5	3	
3AM3	0	1	1	0	0	0	0	2	1	
3AM4	0	1	1	0	0	0	0	2	1	1,5
4A1	0	1	1	1	0	1	1	5	4	
4A2	0,5	1	1	1	0,5	0	0	4	3	
4A3	0	1	1	1	0	1	0	4	3	
4A4	0	0	0,5	0,5	0	0	0	1	1	
4A5	0	1	1	1	0	1	1	5	4	3
4AM1	0,5	1	1	0	0,5	1	1	5	4	
4AM2	0	0,5	1	1	0,5	1	1	5	4	
4AM3	0	0	1	1	0	0,5	0	2,5	2	
4AM4	1	1	0,5	1	0	0	0	3,5	3	3,25
5A1	0	0,5	1	0,5	1	1	0	4	3	
5A2	1	1	1	1	1	1	1	7	5	
5A3	0,5	1	1	1	0,5	1	0	5	4	
5A4	0	0,5	1	1	1	0	0,5	4	3	3,75
5AM1	0,5	1	1	1	1	1	1	6,5	5	
5AM2	0,5	1	1	1	1	1	0	5,5	4	
5AM3	1	1	0,5	1	0	1	1	5,5	4	
5AM4	1	1	1	1	1	1	1	7	5	4,5
6A1	1	1	1	0,5	0	0	0	3,5	3	
6A2	1	0	1	1	1	1	1	6	4	
6A3	0	1	0	1	1	1	1	5	4	
6A4	0,5	1	1	0	0	1	0,5	4	3	3,5
SumaT	11	19,5	22	18	10	16	11,5	Media	3,24	

Tabla A.2: Valoración. Tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.

La siguiente tabla A.3 muestra los niveles asignados a los sujetos de la muestra según los criterios que se establecen en el apartado 5.7.3, página 205, del capítulo V.

Nivel	clave	SumaL
1	3AM1	1
	3AM3	1
	3AM4	1
	4A4	1
	4AM3	2
2	3AM2	3
	4A2	3
	4A3	3
	4AM4	3
	5A1	3
	5A4	3
	6A1	3
	6A4	3
3	4A1	4
	4A5	4
	4AM1	4
	4AM2	4
	5A2	5
	5A3	4
	5AM1	5
	5AM2	4
	5AM3	4
	5AM4	5
	6A2	4
	6A3	4

Tabla A.3: Niveles en las tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.



### A.2.3 Análisis temporal

La tabla siguiente recoge el tiempo, en segundos, empleado por cada sujeto en cada tarea. En minutos, recoge también el tiempo total empleado por cada sujeto, los tiempos medios para cada grupo de edad, los tiempos totales empleados en cada tarea por todos los sujetos, el tiempo total empleado en todas las tareas por todos los sujetos de la muestra y el tiempo medio de un sujeto de la muestra.

clave	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	Total (min)	MTGed
3AYM1	13	9	12	56	26	55	62	0	0	3,9	
3AYM2	35	92	10	29	26	26	32	23	56	5,5	
3AYM3	19	26	14	18	13	19	47	16	0	2,9	
3AYM4	68	86	19	35	25	28	78	0	0	5,7	4,5
4A1	13	12	24	10	9	10	26	26	14	2,4	
4A2	40	11	22	11	13	18	30	48	26	3,7	
4A3	18	22	11	10	13	12	25	18	34	2,7	
4A4	37	26	12	17	13	19	25	19	33	3,4	
4A5	17	67	21	17	12	16	93	29	22	4,9	3,42
4AYM1	40	9	11	10	11	61	17	13	14	3,1	
4AYM2	11	21	10	15	13	10	20	32	25	2,6	
4AYM3	21	18	19	18	13	17	30	22	36	3,2	
4AYM4	18	28	16	12	51	50	67	59	0	5	3,475
5A1	3	11	11	6	5	10	11	9	13	1,3	
5A2	9	11	16	11	24	13	17	16	22	2,3	
5A3	17	10	14	11	10	11	17	14	35	2,3	
5A4	29	14	33	13	5	13	12	25	26	2,8	2,175
5AYM1	38	12	13	25	65	14	19	37	42	4,4	
5AYM2	32	12	11	10	9	12	17	13	61	3	
5AYM3	11	7	17	8	33	12	28	10	11	2,3	
5AYM4	9	11	13	13	38	47	13	49	41	3,9	3,4
6A1	9	9	12	10	11	14	21	68	35	3,2	
6A2	14	12	17	18	13	15	22	17	15	2,4	
6A3	38	17	14	11	14	11	19	15	14	2,6	
6A4	17	9	13	11	15	18	18	16	19	2,3	2,625
<b>TotalT</b>	9,6	9,4	6,4	6,8	8	8,9	13	9,9	9,9	81,8	3,3
										<b>TotalG</b>	<b>MG</b>

Tabla A.4: Tiempos en las tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.

### A.2.4 Número de intentos

Los números de intentos erróneos se recogen en la siguiente tabla.

clave	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	Suma	Media GED
3AM1	0	0	0	4	1	6	9	13	0	33	16,5
3AM2	0	0	0	0	0	1	2	1	1	5	
3AM3	0	2	0	0	0	3	4	0	0	9	
3AM4	2	7	0	0	0	3	7	0	0	19	
4A1	2	3	0	0	0	0	8	0	0	13	14,6
4A2	3	0	0	0	0	0	1	4	2	10	
4A3	0	2	0	0	0	0	2	0	3	7	
4A4	3	5	0	2	1	1	2	2	4	20	
4A5	0	10	0	0	0	0	13	0	0	23	12
4AM1	1	0	0	0	0	5	1	0	0	7	
4AM2	0	2	0	1	0	0	1	0	0	4	
4AM3	0	2	0	3	0	0	3	1	3	12	
4AM4	0	0	0	0	1	0	14	10	0	25	6,25
5A1	0	2	1	0	0	1	0	0	2	6	
5A2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5A3	1	0	0	0	0	0	1	0	3	5	
5A4	0	3	7	0	0	0	0	3	1	14	4,75
5AM1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
5AM2	4	0	0	0	0	0	0	0	10	14	
5AM3	0	0	0	0	1	0	2	0	0	3	
5AM4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7,25
6A1	0	0	0	0	0	1	3	8	3	15	
6A2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	
6A3	1	1	0	0	2	0	0	0	0	4	
6A4	3	0	0	0	0	2	2	0	1	8	33
<b>Total</b>	22	39	8	12	6	23	75	42	33		

Tabla A.5: Intentos en las tareas de orden lineal. Estudio Exploratorio.

### A.3 Tareas de orden con cantidades continuas

#### A.3.1 Ventanas de planteamiento y solución

La primera ventana, de presentación, se muestra en la figura A.9.



Fig. A.9. Ventana inicial, tareas de orden no numérico. Estudio Exploratorio.

Ventanas de planteamiento y solución de las tres primeras tareas: figura A.10.

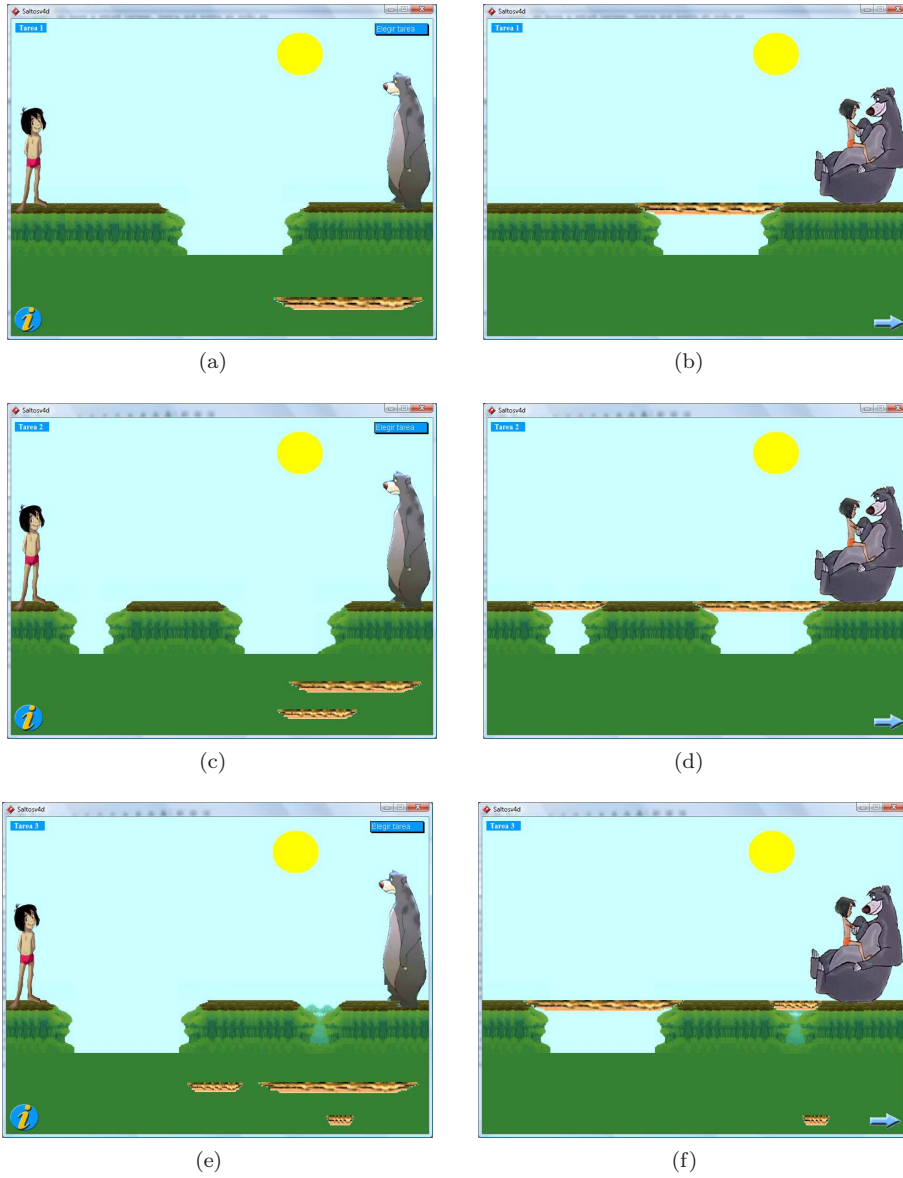


Fig. A.10. Primeras tres tareas de orden no numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

Ventanas de planteamiento y solución de las tres últimas tareas: figura A.11.



Fig. A.11. Tareas cuarta a sexta de orden no numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

*A.3.2 Codificación y valoración de las respuestas*

Tarea	Clave	Valoración	Situación
<b>ECC2</b>	2N	0	No realiza la tarea. Comete múltiples fallos.
	2N1C	1	Falla solo en una pieza más de una vez. Estrategia creciente.
	2N1D	1	Falla solo en una pieza más de una vez. Estrategia decreciente.
	2N1FC	2	Falla en una pieza solo una vez. Estrategia creciente.
	2N1FD	2	Falla en una pieza solo una vez. Estrategia decreciente.
	2C	3	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
	2D	3	Realiza la tarea. Estrategia decreciente.
<b>ECC3</b>	3N	0	No realiza la tarea. Comete múltiples fallos.
	3NSC	1	Utiliza la pieza sobrante u otra más de una vez y termina por realizar la tarea. Estrategia creciente.
	3NSD	1	Utiliza la pieza sobrante u otra más de una vez y termina por realizar la tarea. Estrategia decreciente.
	3NC	1	Falla más de una vez en más de una pieza. No utiliza la sobrante. Estrategia creciente.
	3ND	1	Falla más de una vez en más de una pieza. No utiliza la sobrante. Estrategia decreciente.
	3N1SC	2	Utiliza la pieza sobrante solo una vez y realiza la tarea. Estrategia creciente.
	3N1SD	2	Utiliza la pieza sobrante solo una vez y realiza la tarea. Estrategia decreciente.
	3N1FC	3	No utiliza la pieza sobrante, comete un solo fallo y realiza la tarea. Estrategia creciente.
	3N1FD	3	No utiliza la pieza sobrante, comete un solo fallo y realiza la tarea. Estrategia decreciente.
	3C	4	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
	3D	4	Realiza la tarea. Estrategia decreciente.
<b>ECC4</b>	4N	0	No realiza la tarea. Comete múltiples fallos.
	4NSC	1	Utiliza la pieza sobrante una o más veces y termina por realizar la tarea. Estrategia creciente.
	4NSD	1	Utiliza la pieza sobrante una o más veces y termina por realizar la tarea. Estrategia decreciente.
	4NC	2	No utiliza la pieza sobrante, comete un fallo en dos piezas o más de uno en una sola. Realiza la tarea. Estrategia creciente.
	4ND	2	No utiliza la pieza sobrante, comete un fallo en dos piezas o más de uno en una sola. Realiza la tarea. Estrategia decreciente.
	4N1FC	3	No utiliza la pieza sobrante, comete un solo fallo y realiza la tarea. Estrategia creciente.

Continúa en la página siguiente ...

Tabla A.6: Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

... viene de la página anterior.

Tarea	Clave	Valoración	Situación
	4N1FD	3	No utiliza la pieza sobrante, comete un solo fallo y realiza la tarea. Estrategia decreciente.
	4C	4	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
	4D	4	Realiza la tarea. Estrategia decreciente.
<b>ECC5</b>	5N	0	No realiza la tarea. Comete múltiples fallos.
	5NID	0	Utiliza la estrategia izquierda-derecha.
	5NDI	0	Utiliza la estrategia derecha-izquierda.
	5NS2C	1	Utiliza la pieza sobrante una o más veces y realizara la tarea con algún fallo más. Estrategia creciente.
	5NS2D	1	Utiliza la pieza sobrante una o más veces y realizara la tarea con algún fallo más. Estrategia decreciente.
	5N1S1FC	2	Utiliza la pieza sobrante solo una vez y realiza la tarea solo con un fallo más. Estrategia creciente.
	5N1S1FD	2	Utiliza la pieza sobrante solo una vez y realiza la tarea solo con un fallo más. Estrategia decreciente.
	5SC	3	Utiliza la pieza sobrante una o dos veces y realiza la tarea sin más fallos. Estrategia creciente.
	5SD	3	Utiliza la pieza sobrante una o dos veces y realiza la tarea sin más fallos. Estrategia decreciente.
	5C	4	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
	5D	4	Realiza la tarea. Estrategia decreciente.
<b>ECC6</b>	6N	0	No realiza la tarea. Comete múltiples fallos.
	6NID	0	Estrategia izquierda-derecha.
	6N3FC	1	No utiliza la pieza sobrante y realiza la tarea con más de dos fallos. Estrategia creciente.
	6N3FD	1	No utiliza la pieza sobrante y realiza la tarea con más de dos fallos. Estrategia decreciente.
	6N1S1FC	2	Utiliza la pieza sobrante solo una vez y realiza la tarea solo con un fallo más. Est creciente.
	6N1S1FD	2	Utiliza la pieza sobrante solo una vez y realiza la tarea solo con un fallo más. Est decreciente.
	6N2FC	3	No utiliza la pieza sobrante, comete dos fallos en la realización de la la tarea. Estrategia creciente.
	6N2FD	3	No utiliza la pieza sobrante, comete dos fallos en la realización de la la tarea. Estrategia decreciente.
	6N1FC	4	No utiliza la pieza sobrante, comete un solo fallo y realiza la tarea. Estrategia creciente.
	6N1FD	4	No utiliza la pieza sobrante, comete un solo fallo y realiza la tarea. Estrategia decreciente.

Tabla A.6: Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio. (Continuación).

Clave	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6
3AM1	2N1C	3N	4N	5N	6N
3AM2	2N	3NSD	4N	5N	6N
3AM3	2N	3N1SD	4D	5D	6N
3AM4	2N	3N	4N	5N	6N
4A1	2C	3N	4N	5N	6N
4A2	2N1D	3D	4N	5N1S1FD	6N
4A3	2N1FD	3N1FD	4N	5SD	6N3FD
4A4	2N1FC	3ND	4N	5NS2C	6N
4A5	2N1FC	3N	4NC	5N	6N
4AM1	2C	3N	4N	5N	6N
4AM2	2N1D	3NSD	4N	5N	6N
4AM3	2N1FC	3D	4N1FD	5D	6N1D
4AM4	2N	3N	4N	5N	6N
5A1	2C	3NSD	4N	5N1D	6N
5A2	2N1FC	3N	4NC	5N	6N2FC
5A3	2N1D	3N1FC	4C	5N1S1FD	6N1S1FD
5A4	2C	3N	4N	5D	6N
5AM1	2C	3NSC	4D	5SD	6N
5AM2	2N1FC	3NSC	4ND	5N1D	6N2FC
5AM3	2N	3D	4N	5N	6N
5AM4	2N1C	3NSD	4N	5NDI	6N
6A1	2D	3D	4NSD	5SD	6N
6A2	2N	3NSD	4NSD	5N	6N2FD
6A3	2D	3N	4N	5NDI	6N
6A4	2N1FC	3N	4N	5N	6N1FC

Tabla A.7: Codificación de las respuestas de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.



Clave	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	C	D	Total	CB	CB3
3AM1	C	N	N	N	N	1		1		
3AM2	N	D	N	N	N		1	1		
3AM3	N	D	D	D	N		3	3	N	N
3AM4	N	N	N	X	X			0		
4A1	C	N	X	X	X	1		1		
4A2	D	D	N	D	N		3	3	N	
4A3	D	D	N	D	D		4	4	N	N
4A4	C	D	N	C	N	2	1	3	S	
4A5	C	N	C	N	X	2		2	N	
4AM1	C	N	N	N	N	1		1		
4AM2	D	D	N	N	N		2	2	N	
4AM3	C	D	D	D	ID	1	3	4	S	S
4AM4	N	N	N	X	X			0		
5A1	C	D	N	ID	N	1	1	2	S	
5A2	C	N	C	N	C	3		3	N	N
5A3	D	C	C	D	D	2	3	5	S	S
5A4	C	N	N	D	N	1	1	2	S	
5AM1	C	C	D	D	N	2	2	4	S	N
5AM2	C	C	D	ID	C	3	1	4	S	S
5AM3	N	D	N	N	N		1	1		
5AM4	C	D	N	DI	N	1	1	2	S	
6A1	D	D	D	D	N		4	4	N	N
6A2	N	D	D	N	D		3	3	N	N
6A3	D	N	N	DI	N		1	1		
6A4	C	N	N	N	C	2		2	N	

Tabla A.8: Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

Clave	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6
3AM1	S	S	S	S
3AM2	S	S	S	S
3AM3	S	N	N	S
3AM4	S	S	X	X
4A1	S	X	X	X
4A2	N	S	S	S
4A3	N	S	S	N
4A4	N	S	S	N
4A5	S	N	S	X
4AM1	S	S	S	N
4AM2	S	S	S	S
4AM3	N	N	N	N
4AM4	S	S	X	X
5A1	S	S	S	N
5A2	S	N	S	N
5A3	N	N	S	S
5A4	S	S	N	S
5AM1	S	N	S	S
5AM2	S	N	S	N
5AM3	N	S	S	S
5AM4	S	S	S	S
6A1	N	S	S	S
6A2	S	S	S	N
6A3	S	S	N	S
6A4	S	N	N	N

Tabla A.9: Uso de las piezas sobrantes. Tareas de orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

Clave	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	SumaCC	MCCGED
3AM1	0,33	0	0	0	0	0,33	
3AM2	0	0,25	0	0	0	0,25	
3AM3	0	0,5	1	1	0	2,5	
3AM4	0	0	0	0	0	0	0,77
4A1	1	0	0	0	0	1	
4A2	0,33	1	0	0,5	0	1,83	
4A3	0,67	0,75	0	0,75	0,25	2,42	
4A4	0,67	0,25	0	0,25	0	1,17	
4A5	0,67	0	0,5	0	0	1,17	1,52
4AM1	1	0	0	0	0	1	
4AM2	0,33	0,25	0	0	0	0,58	
4AM3	0,67	1	0,75	1	0	3,42	
4AM4	0	0	0	0	0	0	1,25
5A1	1	0,25	0	0	0	1,25	
5A2	0,67	0	0,5	0	0,75	1,92	
5A3	0,33	0,75	1	0,5	0,5	3,08	
5A4	1	0	0	1	0	2	2,06
5AM1	1	0,25	1	0,75	0	3	
5AM2	0,67	0,25	0,5	0	0,5	1,92	
5AM3	0	1	0	0	0	1	
5AM4	0,33	0,25	0	0	0	0,58	1,63
6A1	1	1	0,25	0,75	0	3	
6A2	0	0,25	0,25	0	0,75	1,25	
6A3	1	0	0	0	0	1	
6A4	0,67	0	0	0	1	1,67	1,73
<b>TotalT</b>	13,34	8	5,75	6,5	3,75	37,34	1,49

Tabla A.10: Valoración. Tareas de orden con cantidades continuas.  
Estudio exploratorio.

Clave	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	SumaCC	NivelCC
3AM1	0,33	0	0	0	0	0,33	1
3AM2	0	0,25	0	0	0	0,25	1
3AM3	0	0,5	1	1	0	2,5	2
3AM4	0	0	0	0	0	0	1
4A1	1	0	0	0	0	1	1
4A2	0,33	1	0	0,5	0	1,83	2
4A3	0,67	0,75	0	0,75	0,25	2,42	2
4A4	0,67	0,25	0	0,25	0	1,17	1
4A5	0,67	0	0,5	0	0	1,17	1
4AM1	1	0	0	0	0	1	1
4AM2	0,33	0,25	0	0	0	0,58	1
4AM3	0,67	1	0,75	1	0	3,42	3
4AM4	0	0	0	0	0	0	1
5A1	1	0,25	0	0	0	1,25	1
5A2	0,67	0	0,5	0	0,75	1,92	2
5A3	0,33	0,75	1	0,5	0,5	3,08	3
5A4	1	0	0	1	0	2	2
5AM1	1	0,25	1	0,75	0	3	3
5AM2	0,67	0,25	0,5	0	0,5	1,92	2
5AM3	0	1	0	0	0	1	1
5AM4	0,33	0,25	0	0	0	0,58	1
6A1	1	1	0,25	0,75	0	3	3
6A2	0	0,25	0,25	0	0,75	1,25	2
6A3	1	0	0	0	0	1	1
6A4	0,67	0	0	0	1	1,67	2

Tabla A.11: Niveles en orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

## A.3.3 Análisis temporal

Clave	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	SumaTCC	PTGECC
3AM1	0,5	0,9	1,9	1,8	0,0	5,1	
3AM2	1,1	1,5	1,8	1,8	1,2	7,5	
3AM3	1,2	0,6	0,5	0,5	1,3	4,1	5,5
4A2	0,6	0,3	1,4	0,8	1,8	4,9	
4A3	0,7	0,5	2,6	0,8	1,5	6,1	
4A4	0,3	0,3	0,6	0,4	0,5	2,1	
4A5	0,3	1,7	0,7	2,2	0,0	4,8	4,5
4AM1	0,4	0,7	0,5	0,6	0,7	2,8	
4AM2	1,0	1,2	1,5	2,0	1,1	6,6	
4AM3	0,2	0,3	0,7	0,4	0,5	2,1	3,8
5A1	0,6	1,3	1,6	0,9	1,0	5,4	
5A2	0,5	0,6	0,9	0,6	0,9	3,5	
5A3	0,6	0,3	0,3	0,6	0,7	2,5	
5A4	0,3	0,6	0,6	0,2	0,4	2,1	3,3
5AM1	0,3	0,7	0,5	0,6	0,9	3,0	
5AM2	0,4	0,6	0,5	0,4	0,7	2,5	
5AM3	0,7	0,2	1,4	0,8	1,0	4,1	
5AM4	0,7	0,7	1,1	0,5	1,2	4,1	3,4
6A1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,6	1,9	
6A2	0,7	0,8	0,9	0,7	1,0	4,0	
6A3	0,3	1,1	1,9	0,4	0,7	4,5	
6A4	0,3	0,9	1,0	0,5	0,7	3,4	3,4
<b>Total</b>	11,6	16,0	23,0	17,9	18,2	86,8	3,9

Tabla A.12: Tiempos. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

*A.3.4 Número de intentos*

Clave	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	SumaICC	PIGECC
3AM1	4	7	13	19	6	49	
3AM2	4	4	6	10	9	33	
3AM3	5	3	3	3	9	23	35
4A2	5	2	6	5	11	29	
4A3	3	3	17	4	9	36	
4A4	3	4	7	6	5	25	
4A5	3	11	7	17	0	38	32
4AM1	2	5	5	5	5	22	
4AM2	5	7	9	13	9	43	
4AM3	3	2	4	3	4	16	27
5A1	2	5	8	5	7	27	
5A2	3	4	5	5	5	22	
5A3	6	3	3	6	6	24	
5A4	2	5	7	3	5	22	24
5AM1	2	4	3	4	7	20	
5AM2	3	6	5	4	6	24	
5AM3	5	2	8	4	6	25	
5AM4	4	4	6	4	8	26	24
6A1	2	2	5	5	7	21	
6A2	7	5	6	6	7	31	
6A3	2	5	9	3	6	25	
6A4	3	9	8	4	4	28	26
<b>TotalInt</b>	78	102	150	138	141	609	28
<b>IntMin</b>	44	44	66	66	88		

Tabla A.13: Intentos totales. Orden con cantidades continuas. Estudio exploratorio.

## A.4 Tareas de Etiquetaje

## A.4.1 Ventanas de planteamiento y solución

Ventanas de planteamiento y solución de las tres primeras tareas: figura A.12.

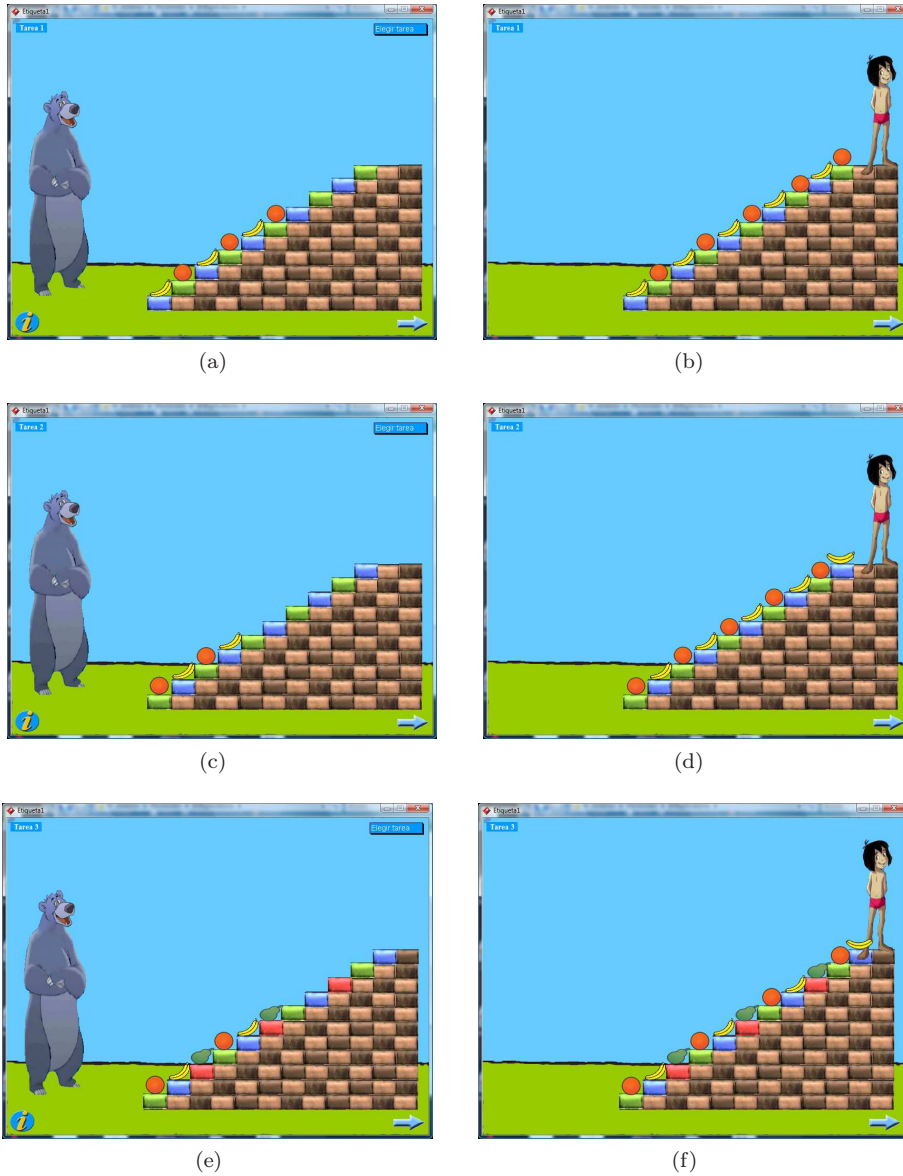


Fig. A.12. Primeras tres tareas de etiquetaje. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

Ventanas de planteamiento y solución de las tres últimas tareas: figura A.13.

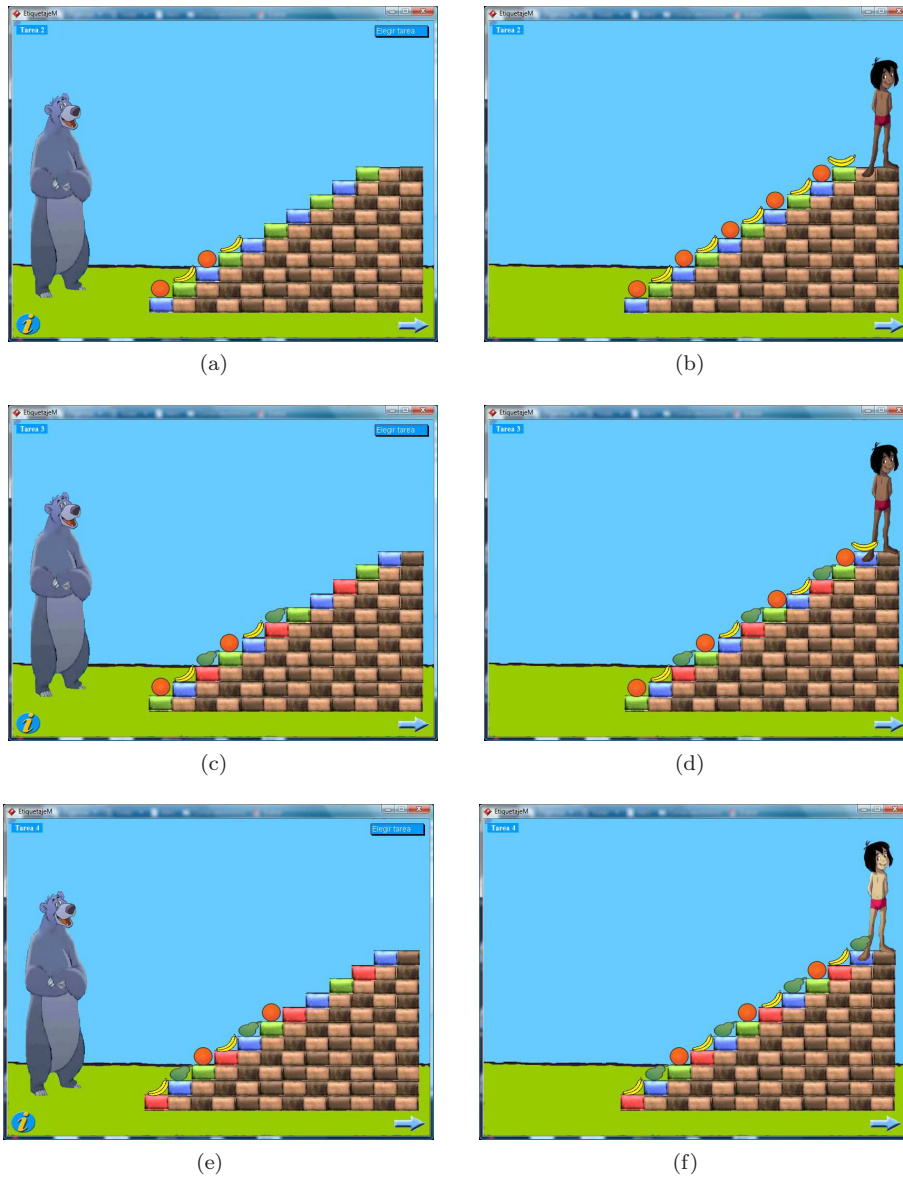


Fig. A.13. Tareas cuarta a sexta de etiquetaje. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).



## A.4.2 Estrategias

Clave	EE1	EE2	EE3	EE4	EE5	EE6	TEt
3AM1	N	N	N	X	X	X	NE
3AM2	N	A	A	X	X	X	1C
3AM3	N	A	D	X	X	X	1C
3AM4	N	N	N	X	X	X	NE
4A1	A	A	D	X	X	X	1C
4A2	N	A	A	X	X	X	1C
4A3	N	N	N	A	N	N	NE
4A4	N	N	N	X	X	X	NE
4A5	N	N	N	X	X	X	NE
4AM1	N	A	N	A	N	N	NE
4AM2	A	N	D	N	N	D	1C
4AM3	A	A	A	A	A	A	SC
4AM4	N	N	N	X	X	X	NE
5A1	N	D	D	N	A	A	S
5A2	D	N	A	N	A	A	S
5A3	N	A	A	N	A	N	1C
5A4	N	A	A	A	A	A	SC
5AM1	A	A	D	D	N	D	S
5AM2	A	D	A	A	N	A	S
5AM3	D	A	A	N	A	A	S
5AM4	A	A	D	A	N	A	S
6A1	N	N	A	N	N	A	NE
6A2	D	A	A	A	D	A	SC
6A3	A	A	D	N	D	D	S
6A4	A	A	A	N	A	N	1C

Tabla A.14: Estrategias en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.

*A.4.3 Valoración de las respuestas*

Clave	EE1	EE2	EE3	EE4	EE5	EE6	SumE5	MEEGED
3AM1	0	0	0	0	0	0	0	
3AM2	0	1	1	0	0	0	1,7	
3AM3	0	1	1	0	0	0	1,7	
3AM4	0	0	0	0	0	0	0	0,85
4A1	1	0,5	1	0	0	0	2,1	
4A2	0	1	1	0	0	0	1,7	
4A3	0	0	0	1	0	0	0,8	
4A4	0	0	0	0	0	0	0	
4A5	0	0	0	0	0	0	0	0,92
4AM1	0	0,5	0	1	0	0	1,3	
4AM2	1	0	0,5	0	0	1	2,1	
4AM3	1	1	1	1	1	1	5	
4AM4	0	0	0	0	0	0	0	2,1
5A1	0	0,5	1	0	1	1	2,9	
5A2	1	0	1	0	1	1	3,3	
5A3	0	0,5	1	0	1	0	2,1	
5A4	0	1	1	1	1	1	4,2	3,125
5AM1	1	1	0,5	1	0	0,5	3,3	
5AM2	1	1	1	1	0	1	4,2	
5AM3	1	1	1	0	1	1	4,2	
5AM4	1	1	1	0,5	0	1	3,8	3,875
6A1	0	0	1	0	0	0,5	1,3	
6A2	1	1	1	1	1	1	5	
6A3	1	1	1	0	1	1	4,2	
6A4	1	0,5	1	0	0,5	0	2,5	3,25
ValTEti	11	13,5	17	7,5	8,5	11		

Tabla A.15: Valoración de las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.

NivelEti	Clave	SumE5	TEt
1	3AM1	,0	NE
	3AM4	,0	NE
	4A3	,8	NE
	4A4	,0	NE
	4A5	,0	NE
	4AM1	1,3	NE
	4AM4	,0	NE
	6A1	1,3	NE
2	3AM2	1,7	1C
	3AM3	1,7	1C
	4A1	2,1	1C
	4A2	1,7	1C
	4AM2	2,1	1C
	5A3	2,1	1C
	6A4	2,5	1C
3	4AM3	5,0	SC
	5A1	2,9	S
	5A2	3,3	S
	5A4	4,2	SC
	5AM1	3,3	S
	5AM2	4,2	S
	5AM3	4,2	S
	5AM4	3,8	S
	6A2	5,0	SC
	6A3	4,2	S

Tabla A.16: Niveles en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.

*A.4.4 Análisis temporal*

Clave	EE1	EE2	EE3	EE4	EE5	EE6	STETi	PTGeTi
3AM1	45	37	32	0	0	0	1,9	
3AM2	98	82	56	0	0	0	3,93	
3AM3	30	46	41	0	0	0	1,95	
3AM4	8	21	11	0	0	0	0,67	2,11
4A1	24	21	20	0	0	0	1,08	
4A2	45	53	20	0	0	0	1,97	
4A3	21	35	34	21	31	35	2,95	
4A4	35	25	22	0	0	0	1,37	
4A5	21	29	24	0	0	0	1,23	1,72
4AM1	65	45	60	32	32	43	4,62	
4AM2	35	11	73	48	28	11	3,43	
4AM3	17	20	13	18	16	18	1,7	
4AM4	36	55	54	0	0	0	2,42	3,04
5A1	36	12	28	19	17	13	2,08	
5A2	17	21	20	35	14	9	1,93	
5A3	35	23	12	29	26	43	2,8	
5A4	24	26	19	17	18	16	2	2,2
5AM1	25	24	24	26	29	19	2,45	
5AM2	18	24	4	18	23	18	1,75	
5AM3	25	29	24	38	21	17	2,57	
5AM4	25	24	24	34	27	23	2,62	2,35
6A1	11	23	14	25	29	20	2,03	
6A2	25	24	21	25	21	23	2,32	
6A3	24	20	22	51	23	18	2,63	
6A4	13	10	12	16	18	23	1,53	2,13
TiempTT	12,63	12,33	11,4	7,53	6,22	5,82	55,93	2,26

Tabla A.17: Tiempos en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.

## A.4.5 Número de intentos

Clave	EE1	EE2	EE3	EE4	EE5	EE6	IESEti	PEGeEti
3AM1	1	3	3	X	X	X	2,33	
3AM2	1	4	0	X	X	X	1,67	
3AM3	1	0	0	X	X	X	0,33	
3AM4	1	2	3	X	X	X	2	1,58
4A1	0	1	0	X	X	X	0,33	
4A2	1	0	0	X	X	X	0,33	
4A3	1	3	3	0	3	3	2,17	
4A4	1	3	3	X	X	X	2,33	
4A5	1	3	3	X	X	X	2,33	1,5
4AM1	1	1	3	0	2	3	1,67	
4AM2	0	0	2	3	3	0	1,33	
4AM3	0	0	0	0	0	0	0	1
5A1	4	2	0	6	0	0	2	
5A2	0	0	0	0	0	0	0	
5A3	1	1	0	3	2	3	1,67	
5A4	1	0	0	0	0	0	0,17	0,96
5AM1	0	0	1	0	3	1	0,83	
5AM2	0	0	0	0	2	0	0,33	
5AM3	0	0	0	2	0	0	0,33	
5AM4	0	0	1	1	2	0	0,67	0,54
6A1	1	2	0	3	3	1	1,67	
6A2	0	0	0	0	0	0	0	
6A3	0	0	0	3	0	0	0,5	
6A4	0	1	0	3	1	3	1,33	0,88
IETEti	0,67	1,08	0,92	1,5	1,31	0,88	1,1	

Tabla A.18: Intentos de los sujetos en las tareas de etiquetaje. Estudio Exploratorio.

## A.5 Tareas de orden con cantidades discretas

### A.5.1 Ventanas de planteamiento y solución

Ventanas de planteamiento y solución de las tres primeras tareas: figura A.14.

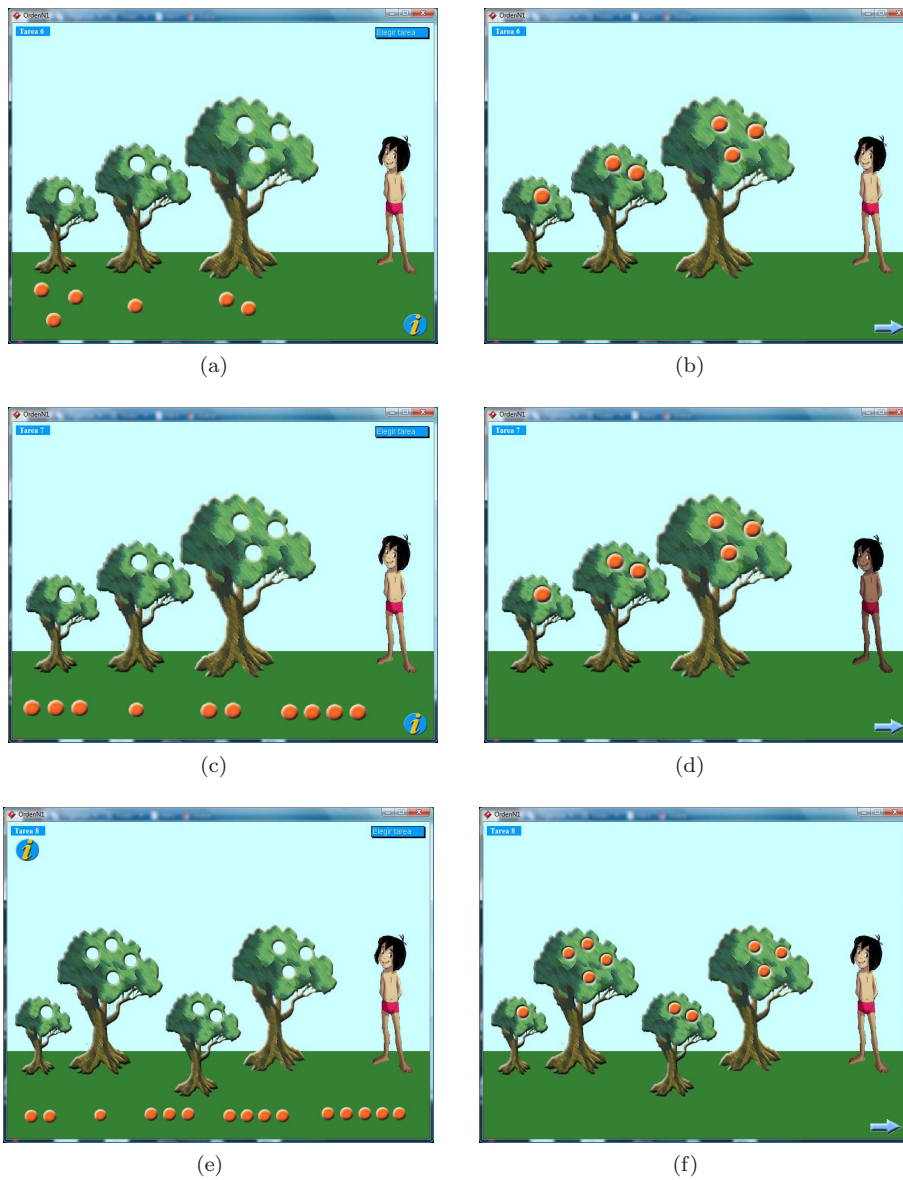


Fig. A.14. Primeras tres tareas de orden numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

Ventanas de planteamiento y solución de las tres últimas tareas: figura A.15.

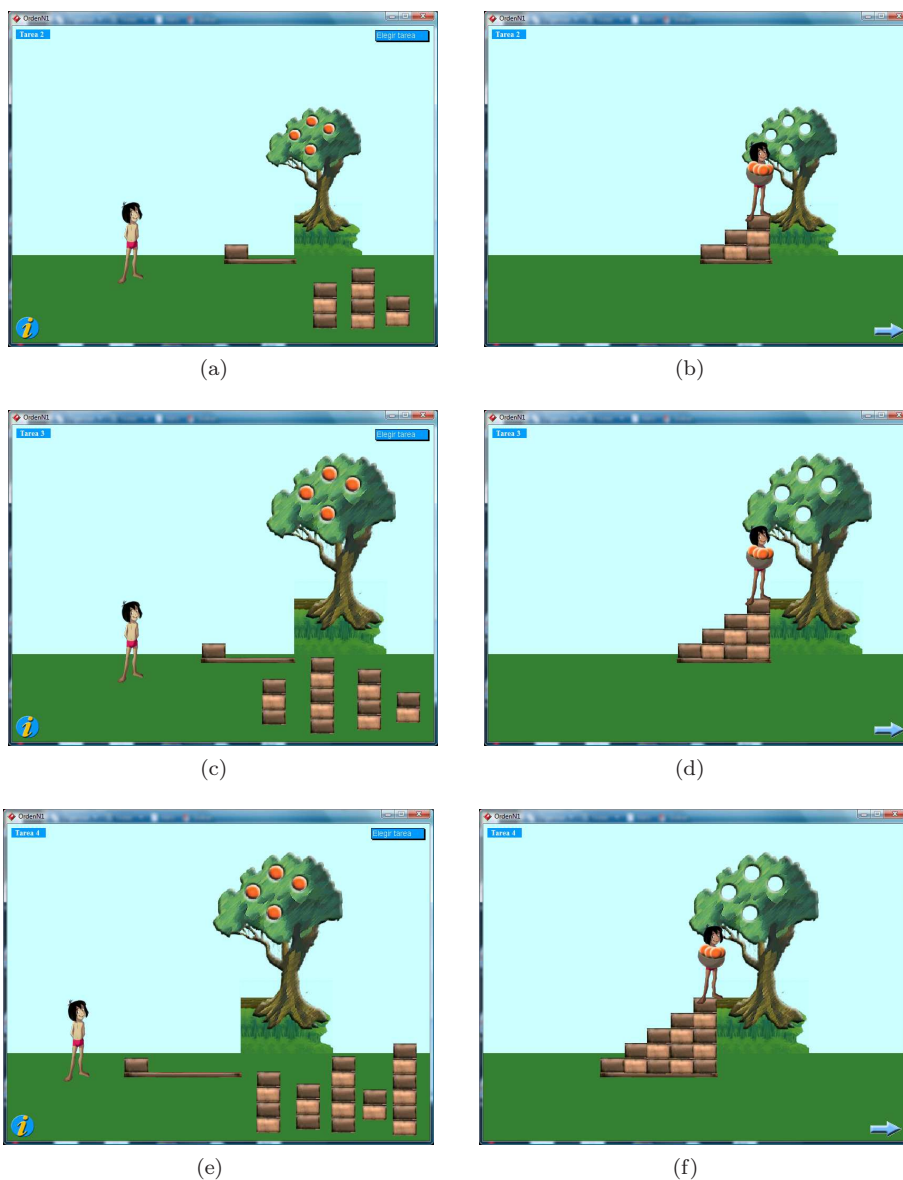


Fig. A.15. Tareas cuarta a sexta de orden numérico. Estudio exploratorio. Ventanas de planteamiento, en la primera columna: (a), (c), (e). Ventanas de solución, en la segunda columna: (b), (d), (f).

*A.5.2 Codificación y valoración de las respuestas*

Tarea	Clave	Valoración	Situación
<b>ECD1</b>	N	0	No realiza la tarea. (No hay sobrante).
	ND	1	No realiza la tarea. Estrategia decreciente.
	SC	5	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
	SD	5	Realiza la tarea. Estrategia decreciente.
<b>ECD2</b>	X	0	Renuncia a realizar la tarea.
	4N	0	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	4NC	1	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia creciente
	N	2	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	ND	3	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia decreciente.
	4SC	4	Utiliza la pieza sobrante una vez y realiza la tarea correctamente. Estrategia creciente
	SC	5	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
<b>ECD3</b>	X	0	Renuncia a realizar la tarea.
	5N	0	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	5NC	1	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia creciente.
	N	2	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	NC	3	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia creciente.
	ND	3	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia decreciente.
<b>ECD4</b>	X	0	Renuncia a realizar la tarea.
	3N	0	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	3ND	1	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia decreciente
	NC	3	No realiza la tarea. Estrategia creciente.
	ND	3	No realiza la tarea. Estrategia decreciente.
	SC	5	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
	SD	5	Realiza la tarea. Estrategia decreciente.

Continúa en la página siguiente . . .

Tabla A.19: Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.



... viene de la página anterior.

Tarea	Clave	Valoración	Situación
<b>ECD5</b>	X	0	Renuncia a realizar la tarea.
	4N	0	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	4ND	1	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia decreciente
	N	2	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	4SC	4	Utiliza la pieza sobrante una vez y realiza la tarea correctamente. Estrategia creciente
	SC	5	Realiza la tarea. Estrategia creciente.
<b>ECD6</b>	X	0	Renuncia a realizar la tarea.
	5N	0	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	5ND	1	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia decreciente
	5NO	1	Utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia ordinal cambiante.
	N	2	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea.
	NO	2	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia ordinal cambiante.
	NC	3	No utiliza la pieza sobrante y no realiza la tarea. Estrategia ordinal creciente
	SC	5	Realiza la tarea. Estrategia creciente.

Tabla A.19: Codificación y valoración de las respuestas en las tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio. (Continuación).

Clave	ECD1	ECD2	ECD3	ECD4	ECD5	ECD6
3AM1	ND	4N	5N	3N	X	X
3AM2	N	4N	X	3N	4N	X
3AM3	ND	4SC	5NC	3N	4ND	X
3AM4	N	X	X	3ND	X	X
4A1	X	X	X	ND	N	X
4A2	N	4N	5NC	3N	X	X
4A3	N	4N	X	3N	4N	X
4A4	N	4SC	5NC	3N	4N	X
4A5	N	SC	NC	NC	4N	X
4AM1	N	N	ND	3N	4N	N
4AM2	SC	4NC	5N	3ND	4N	5ND
4AM3	SD	4N	NC	SC	4N	5NO
4AM4	N	X	X	X	X	X
5A1	N	4N	5N	3N	4SC	NO
5A2	N	4NC	NC	SD	SC	SC
5A3	N	4NC	5N	3N	4N	NC
5A4	N	4N	NC	3N	4N	5N
5AM1	SC	4N	N	ND	4SC	SC
5AM2	SD	4NC	N	ND	4SC	SC
5AM3	ND	N	N	3N	SC	NO
5AM4	N	ND	N	SD	4SC	SC
6A1	N	4N	5N	ND	4SC	5NO
6A2	N	N	NC	3N	SC	NO
6A3	N	N	5N	SC	SC	SC
6A4	N	4N	5N	ND	4N	N

Tabla A.20: Codificación de los resultados de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

Clave	ECD1	ECD2	ECD3	ECD4	ECD5	ECD6
3AM1	D	PDI	PDI	N	X	X
3AM2	PDI	N	X	PID	N	X
3AM3	D	C	C	PDI	D	X
3AM4	N	X	X	D	X	X
4A1	X	X	X	D	N	X
4A2	PDI	N	C	N	X	X
4A3	N	N	X	N	N	X
4A4	PDI	C	C	N	N	X
4A5	PID	C	C	C	PDI	X
4AM1	PDI	PDI	D	PDI	N	N
4AM2	C	C	N	D	PID	D
4AM3	D	N	C	C	PID	N
4AM4	N	X	X	X	X	X
5A1	N	N	PID	PID	C	N
5A2	N	C	C	D	C	C
5A3	N	C	N	PID	N	C
5A4	PDI	PDI	C	N	PID	N
5AM1	C	N	N	D	C	C
5AM2	D	C	PDI	D	C	C
5AM3	D	PDI	N	PID	C	N
5AM4	PDI	D	N	D	C	C
6A1	N	PDI	PDI	D	C	N
6A2	PDI	PDI	C	N	C	N
6A3	N	PDI	N	C	C	C
6A4	N	N	N	D	PDI	N

Tabla A.21: Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

Clave	C	D	Total	PID	PDI	N	X
3AM1		1	1		2	1	2
3AM2				1	1	2	2
3AM3	2	2	4		1		1
3AM4		1	1			1	4
4A1		1	1			1	4
4A2	1		1		1	2	2
4A3						4	2
4A4	2		2		1	2	1
4A5	3		3	1	1		1
4AM1		1	1		3	2	
4AM2	2	2	4	1		1	
4AM3	2	1	3	1		2	
4AM4						1	5
5A1	1		1	2		3	
5A2	4	1	5			1	
5A3	2		2	1		3	
5A4	1		1	1	2	2	
5AM1	3	1	4			2	
5AM2	3	2	5		1		
5AM3	1	1	2	1	1	2	
5AM4	2	2	4		1	1	
6A1	1	1	2		2	2	
6A2	2		2		2	2	
6A3	3		3		1	2	
6A4		1	1		1	4	
SumE	35	18	53	9	21	43	24
%Est	23	12	35,3	6	14	29	16

Tabla A.22: Resumen numérico de las estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

Clave	ECD2	ECD3	ECD4	ECD5	ECD6
3AM1	S	S	S	X	X
3AM2	S	X	S	S	X
3AM3	S	S	S	S	X
3AM4	X	X	S	X	X
4A1	X	X	N	N	X
4A2	S	S	S	X	X
4A3	S	X	S	S	X
4A4	S	S	S	S	X
4A5	N	N	N	S	X
4AM1	N	N	S	S	N
4AM2	S	S	S	S	S
4AM3	S	N	N	S	S
4AM4	X	X	X	X	X
5A1	S	S	S	S	N
5A2	S	N	N	N	N
5A3	S	S	S	S	N
5A4	S	N	S	S	S
5AM1	S	N	N	S	N
5AM2	S	N	N	S	N
5AM3	N	N	S	N	N
5AM4	N	N	N	S	N
6A1	S	S	N	S	S
6A2	N	N	S	N	N
6A3	N	S	N	N	N
6A4	S	S	N	S	N

Tabla A.23: Uso de las piezas sobrantes por los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

Clave	ECD1	ECD2	ECD3	ECD4	ECD5	ECD6	SECD	PGECD
3AM1	0,2	0	0	0	0	0	0,17	
3AM2	0	0	0	0	0	0	0	
3AM3	0,2	0,8	0,2	0	0,2	0	1,17	
3AM4	0	0	0	0,2	0	0	0,17	0,38
4A1	0	0	0	0,6	0,4	0	0,83	
4A2	0	0	0,2	0	0	0	0,17	
4A3	0	0	0	0	0	0	0	
4A4	0	0,8	0,2	0	0	0	0,83	
4A5	0	1	0,6	0,6	0	0	1,83	0,73
4AM1	0	0,4	0,6	0	0	0,4	1,17	
4AM2	1	0,2	0	0,2	0	0,2	1,33	
4AM3	1	0	0,6	1	0	0,2	2,33	
4AM4	0	0	0	0	0	0	0	1,21
5A1	0	0	0	0	0,8	0,4	1	
5A2	0	0,2	0,6	1	1	1	3,17	
5A3	0	0,2	0	0	0	0,6	0,67	
5A4	0	0	0,6	0	0	0	0,5	1,34
5AM1	1	0	0,4	0,6	0,8	1	3,17	
5AM2	1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	3,33	
5AM3	0,2	0,4	0,4	0	1	0,4	2	
5AM4	0	0,6	0,4	1	0,8	1	3,17	2,92
6A1	0	0	0	0,6	0,8	0,2	1,33	
6A2	0	0,4	0,6	0	1	0,4	2	
6A3	0	0,4	0	1	1	1	2,83	
6A4	0	0	0	0,6	0	0,4	0,83	1,75
TotalT	4,6	5,6	5,8	8	8,6	8,2	34	1,39

Tabla A.24: Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

Nivel	Clave	SECD
1	3AM1	0,17
	3AM2	0
	3AM3	1,17
	3AM4	0,17
	4A1	0,83
	4A2	0,17
	4A3	0
	4A4	0,83
	4A5	1,83
	4AM1	1,17
	4AM2	1,33
	4AM4	0
	5A1	1
	5A3	0,67
	5A4	0,5
	6A1	1,33
	6A4	0,83
2	4AM3	2,33
	5AM3	2
	6A2	2
	6A3	2,83
3	5A2	3,17
	5AM1	3,17
	5AM2	3,33
	5AM4	3,17

Tabla A.25: Niveles en orden con cantidades discretas. Estudio Exploratorio.

*A.5.3 Análisis temporal*

Clave	ECD1	ECD2	ECD3	ECD4	ECD5	ECD6	STECD	PTGECD
3AM1	0,7	0,9	1,9	1,8	0	0	5,3	
3AM2	1,4	2,8	0	1,6	1,8	0	7,6	
3AM3	1,5	1,2	0,9	0,9	2,4	0	6,9	6,6
4A2	1,1	1,8	1,8	1,6	0	0	6,3	
4A3	2	1,1	0	1,2	1	0	5,3	
4A4	0,4	0,7	1,1	0,6	0,7	0	3,5	
4A5	1	1	1,1	1,4	1,7	0	6,2	5,33
4AM1	0,7	0,9	1,2	0,7	0,8	0,8	5,1	
4AM2	0,6	1,2	0,9	0,6	0,8	1	5,1	
4AM3	0,5	1,1	0,6	0,3	0,8	1,2	4,5	4,9
5A1	1,7	1,3	0,9	0,7	0,4	0,6	5,6	
5A2	0,6	3,1	2,1	0,5	0,4	0,5	7,2	
5A3	1	1,5	1,2	0,5	1	0,6	5,8	
5A4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,4	0,8	2,9	5,38
5AM1	0,7	1,3	1,2	0,5	0,5	0,6	4,8	
5AM2	0,5	1,1	0,7	0,5	0,6	0,5	3,9	
5AM3	1	1,1	0,9	1,2	0,4	1,5	6,1	
5AM4	0,5	1,3	1,2	0,5	0,7	0,6	4,8	4,9
6A1	0,3	0,8	0,5	0,3	0,3	0,4	2,6	
6A2	1	0,7	0,8	0,6	0,5	1	4,6	
6A3	0,9	0,9	1,3	0,3	0,6	0,5	4,5	
6A4	0,6	0,8	0,6	0,7	1	2	5,7	4,35
<b>TotalTT</b>	19,1	27	21,3	17,5	16,8	12,6	114,3	5,20

Tabla A.26: Tiempos en minutos. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.



## A.5.4 Número de intentos

Clave	ECD1	ECD2	ECD3	ECD4	ECD5	ECD6	SIECD	PSIGECD
3AM1	6	12	14	16	X	X	48	
3AM2	5	11	X	6	3	X	25	
3AM3	6	4	6	3	10	X	29	34
4A2	5	4	6	13	X	X	28	
4A3	10	9	X	9	9	X	37	
4A4	4	8	14	10	10	X	46	
4A5	7	3	7	8	11	X	36	37
4AM1	3	6	5	5	7	6	32	
4AM2	3	10	6	4	8	8	39	
4AM3	3	11	5	2	7	11	39	37
5A1	8	11	7	8	4	6	44	
5A2	3	17	10	2	3	4	39	
5A3	9	14	10	6	10	6	55	
5A4	4	5	6	7	6	11	39	44
5AM1	3	9	6	5	4	4	31	
5AM2	3	8	6	6	5	4	32	
5AM3	5	5	5	7	3	11	36	
5AM4	3	5	4	2	4	4	22	30
6A1	3	9	5	4	5	6	32	
6A2	4	5	6	6	3	8	32	
6A3	3	3	6	2	3	4	21	
6A4	3	8	5	7	8	15	46	33
<b>TotalInt</b>	103	177	139	138	123	108	788	
<b>IntMín</b>	66	66	80	44	60	60	376	

Tabla A.27: Intentos totales. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

Clave	ECD1	ECD2	ECD3	ECD4	ECD5	ECD6	PIntS	PIGECD
3AM1	6	12	14	16	X	X	12	
3AM2	5	11	X	6	3	X	6,3	
3AM3	6	4	6	3	10	X	5,8	8,03
4A2	5	4	6	13	X	X	7	
4A3	10	9	X	9	9	X	9,3	
4A4	4	8	14	10	10	X	9,2	
4A5	7	3	7	8	11	X	7,2	8,18
4AM1	3	6	5	5	7	6	5,3	
4AM2	3	10	6	4	8	8	6,5	
4AM3	3	11	5	2	7	11	6,5	6,1
5A1	8	11	7	8	4	6	7,3	
5A2	3	17	10	2	3	4	6,5	
5A3	9	14	10	6	10	6	9,2	
5A4	4	5	6	7	6	11	6,5	7,38
5AM1	3	9	6	5	4	4	5,2	
5AM2	3	8	6	6	5	4	5,3	
5AM3	5	5	5	7	3	11	6	
5AM4	3	5	4	2	4	4	3,7	5,05
6A1	3	9	5	4	5	6	5,3	
6A2	4	5	6	6	3	8	5,3	
6A3	3	3	6	2	3	4	3,5	
6A4	3	8	5	7	8	15	7,7	5,45
PTTSuj	4,68	8,05	6,95	6,27	6,15	7,20	39,3	
PTMSuj	3	3	4	2	3	4	19	

Tabla A.28: Promedios de intentos totales por sujetos y grupos de edad según el número de tareas que realizan; y por tareas según los sujetos que las realizan. Tareas de orden con cantidades discretas. Estudio exploratorio.

### A.6 Estudio comparativo de las tareas

GED	Edad	MediaL	MCCGED	MEEGED	PGECD
3AM	3,50	1,50	0,77	0,85	0,38
4A	4,00	3,00	1,52	0,92	0,73
4AM	4,50	3,25	1,25	2,10	1,21
5A	5,00	3,75	2,06	3,13	1,34
5AM	5,50	4,50	1,62	3,88	2,92
6A	6,00	3,50	1,73	3,25	1,75

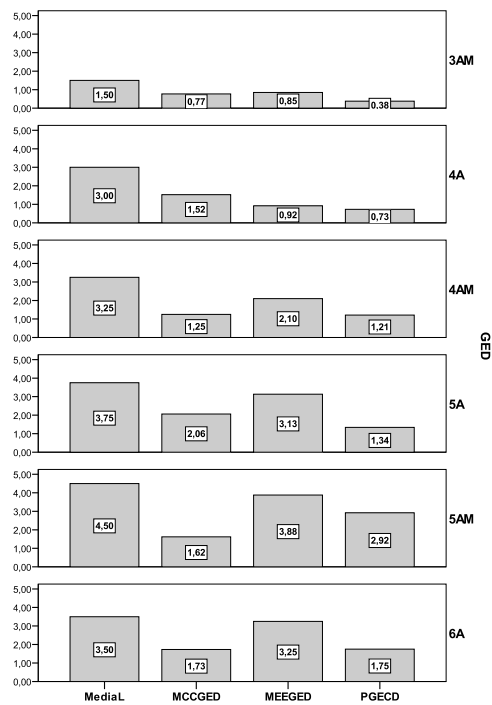
Tabla A.29: Medias de las valoraciones de las respuestas de los sujetos por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. Estudio exploratorio.

Clave	GED	EDG	SumaL	SumaCC	SumEti	SECD
3AM1	3AM	3,5	1,1	0,33	0,0	0,17
3AM2	3AM	3,5	3,2	0,25	1,7	0,00
3AM3	3AM	3,5	1,4	2,50	1,7	1,17
3AM4	3AM	3,5	1,4	0,00	0,0	0,17
4A1	4A	4,0	3,6	1,00	2,1	0,83
4A2	4A	4,0	2,9	1,83	1,7	0,17
4A3	4A	4,0	2,9	2,42	0,8	0,00
4A4	4A	4,0	0,7	1,17	0,0	0,83
4A5	4A	4,0	3,6	1,17	0,0	1,83
4AM1	4AM	4,5	3,6	1,00	1,3	1,17
4AM2	4AM	4,5	3,6	0,58	2,1	1,33
4AM3	4AM	4,5	1,8	3,42	5,0	2,33
4AM4	4AM	4,5	2,5	0,00	0,0	0,00
5A1	5A	5,0	2,9	1,25	2,9	1,00
5A2	5A	5,0	5,0	1,92	3,3	3,17
5A3	5A	5,0	3,6	3,08	2,1	0,67
5A4	5A	5,0	2,9	2,00	4,2	0,50
5AM1	5AM	5,5	4,6	3,00	3,3	3,17
5AM2	5AM	5,5	3,9	1,92	4,2	3,33
5AM3	5AM	5,5	3,9	1,00	4,2	2,00
5AM4	5AM	5,5	5,0	0,58	3,8	3,17
6A1	6A	6,0	2,5	3,00	1,3	1,33
6A2	6A	6,0	4,3	1,25	5,0	2,00
6A3	6A	6,0	3,6	1,00	4,2	2,83
6A4	6A	6,0	2,9	1,67	2,5	0,83

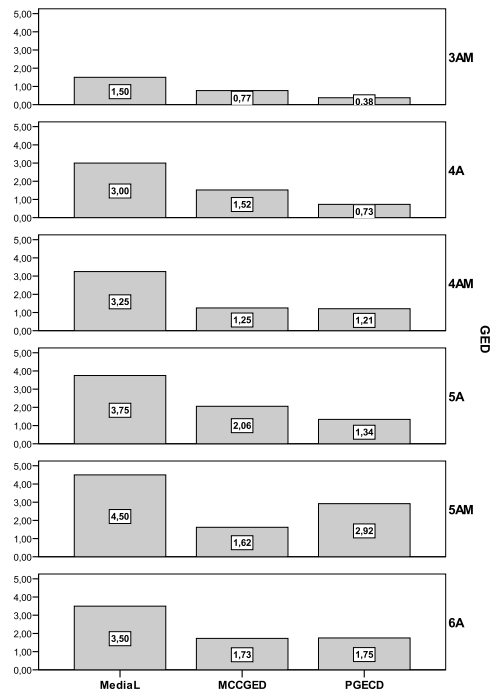
Tabla A.30: Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas. Estudio exploratorio.

Clave	GED	Edad	NivelL	NivelCC	NivelEti	NivelCD
3AM1	3AM	3,50	1	1	1	1
3AM2	3AM	3,50	2	1	2	1
3AM3	3AM	3,50	1	2	2	1
3AM4	3AM	3,50	1	1	1	1
4A1	4A	4,00	3	1	2	1
4A2	4A	4,00	2	2	2	1
4A3	4A	4,00	2	2	1	1
4A4	4A	4,00	1	1	1	1
4A5	4A	4,00	3	1	1	1
4AM1	4AM	4,50	3	1	1	1
4AM2	4AM	4,50	3	1	2	1
4AM3	4AM	4,50	1	3	3	2
4AM4	4AM	4,50	2	1	1	1
5A1	5A	5,00	2	1	3	1
5A2	5A	5,00	3	2	3	3
5A3	5A	5,00	3	3	2	1
5A4	5A	5,00	2	2	3	1
5AM1	5AM	5,50	3	3	3	3
5AM2	5AM	5,50	3	2	3	3
5AM3	5AM	5,50	3	1	3	2
5AM4	5AM	5,50	3	1	3	3
6A1	6A	6,00	2	3	1	1
6A2	6A	6,00	3	2	3	2
6A3	6A	6,00	3	1	3	2
6A4	6A	6,00	2	2	2	1

Tabla A.31: Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas. Estudio exploratorio.



(a)



(b)

Fig. A.16. Distribuciones de las medias de las valoraciones por grupos de edad. Estudio exploratorio. (a) Para los cuatro conjuntos de tareas. (b) Excluyendo el conjunto de tareas de Etiquetaje.

(a)

	EDG	SumaL	SumaCC	SumEti	SECD
EDG	1	,566(**) ,003	,286 ,166	,666(**) ,000	,603(**) ,001
SumaL	,566(**) ,003	1	,050 ,813	,545(**) ,005	,624(**) ,001
SumaCC	,286 ,166	,050 ,813	1	,340 ,096	,271 ,191
SumEti	,666(**) ,000	,545(**) ,005	,340 ,096	1	,663(**) ,000
SECD	,603(**) ,000	,624(**) ,001	,271 ,191	,663(**) ,000	1

(b)

	Edad	MediaL	MCCGED	MEEGED	PGECD
Edad	1	,802 ,055	,715 ,110	,919(**) ,010	,814(*) ,049
MediaL	,802 ,055	1	,797 ,058	,865(*) ,026	,879(*) ,021
MCCGED	,715 ,110	,797 ,058	1	,695 ,125	,512 ,299
MEEGED	,919(**) ,010	,865(*) ,026	,695 ,125	1	,905(*) ,013
PGECD	,814(*) ,049	,879(*) ,021	,512 ,299	,905(*) ,013	1

(c)

	Edad	NivelL	NivelCC	NivelEti	NivelCD
Edad	1	,544(**) ,005	,348 ,088	,561(**) ,004	,522(**) ,007
NivelL	,544(**) ,005	1	-,033 ,874	,393 ,052	,454(*) ,023
NivelCC	,348 ,088	-,033 ,874	1	,237 ,253	,237 ,254
NivelEti	,561(**) ,004	,393 ,052	,237 ,253	1	,693(**) ,000
NivelCD	,522(**) ,007	,454(*) ,023	,237 ,254	,693(**) ,000	1

Tabla A.32. Correlaciones de Pearson entre resultados de los cuatro conjuntos de tareas. Estudio Exploratorio. (a) Edad y Valoraciones de las respuestas; (b) Edad (EDG) y Valoraciones medias por grupos de edad; (c) Edad y Niveles de los sujetos.

(\*\*) La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral), (\*) la correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral). El número que está debajo de cada coeficiente indica su significación bilateral.





## Anexo B

### DATOS COMPLEMENTARIOS DE LAS TAREAS DE ORDEN LINEAL

#### B.1 Valoración de las tareas.

##### *B.1.1 Clasificación de los sujetos según los valores de la variable SumaL.*

SumaL - Casos	EvL2	EvL3	EvL4	EvL5	EvL6	Clave
0	1	0	0	0	0	26A1
<b>Total</b>						<b>1</b>
1	1	0	1	0	0	13AM1
	2	0	1	0	0	13AM3
	3	0	1	0	0	23AM2
	4	1	0	0	0	24AM3
	5	1	0	0	0	24AM6
	6	0	1	0	0	25A5
	7	0	0	1	0	25AM3
	8	0	0	1	0	26A3
<b>Total</b>						<b>8</b>
2	1	0	1	0	1	13AM4
	2	0	1	0	0	23AM3
	3	1	0	1	0	23AM5
	4	1	0	0	1	14A2
	5	0	1	0	1	24A4
	6	0	1	1	0	14AM1
	7	0	1	0	1	25A4

Continúa en la página siguiente ...

Tabla B.1: Evaluación de los sujetos en las tareas de orden lineal.

... viene de la página anterior.

	SumaL - Casos	EvL2	EvL3	EvL4	EvL5	EvL6	Clave
	8	1	1	0	0	0	25AM5
	9	0	0	1	1	0	16AM5
	10	0	1	1	0	0	17A6
	<b>Total</b>						<b>10</b>
3	1	1	1	1	0	0	13AM2
	2	1	0	1	1	0	13AM5
	3	1	0	1	0	1	23AM4
	4	1	1	1	0	0	23AM6
	5	1	1	0	0	1	14A3
	6	1	1	1	0	0	14A5
	7	1	0	1	0	1	24A1
	8	0	1	1	0	1	24A5
	9	1	1	1	0	0	14AM2
	10	1	0	1	0	1	24AM2
	11	1	1	1	0	0	24AM4
	12	1	0	1	1	0	15A3
	13	0	1	1	0	1	25A1
	14	0	1	1	1	0	25A2
	15	1	1	1	0	0	15AM3
	16	1	0	0	1	1	16A6
	17	0	1	1	1	0	26A5
	18	1	1	1	0	0	17A9
	<b>Total</b>						<b>18</b>
4	1	1	1	1	1	0	14A4
	2	1	1	1	1	0	14A6
	3	1	1	1	1	0	24A3
	4	1	1	1	1	0	24A6
	5	1	1	1	1	0	14AM3
	6	1	1	1	0	1	14AM4
	7	1	1	1	1	0	14AM5
	8	1	0	1	1	1	15A1
	9	0	1	1	1	1	15A2
	10	1	1	1	1	0	15A4
	11	1	1	0	1	1	15A5
	12	0	1	1	1	1	25A3
	13	0	1	1	1	1	15AM2

Continúa en la página siguiente ...

Tabla B.1: Evaluación de los sujetos en las tareas de orden lineal.

... viene de la página anterior.

SumaL - Casos	EvL2	EvL3	EvL4	EvL5	EvL6	Clave
14	1	1	1	0	1	25AM4
15	1	0	1	1	1	16A2
16	0	1	1	1	1	16A5
17	1	1	1	1	0	26A2
18	1	1	1	0	1	26A4
19	1	0	1	1	1	16AM1
20	1	1	1	1	0	16AM2
21	0	1	1	1	1	16AM7
22	1	1	1	1	0	17A1
23	0	1	1	1	1	17A4
24	1	1	1	1	0	17A8
<b>Total</b>						<b>24</b>
5	1	1	1	1	1	24AM1
	2	1	1	1	1	15AM1
	3	1	1	1	1	15AM4
	4	1	1	1	1	15AM5
	5	1	1	1	1	25AM1
	6	1	1	1	1	25AM6
	7	1	1	1	1	16A3
	8	1	1	1	1	16A4
	9	1	1	1	1	16AM3
	10	1	1	1	1	16AM4
	11	1	1	1	1	16AM6
	12	1	1	1	1	16AM8
	13	1	1	1	1	17A10
	14	1	1	1	1	17A3
	15	1	1	1	1	17A7
<b>Total</b>						<b>15</b>
<b>Total</b>	<b>N</b>	<b>76</b>	<b>76</b>	<b>76</b>	<b>76</b>	<b>76</b>

Tabla B.1: Evaluación de los sujetos en las tareas de orden lineal (Continuación).

### *B.1.2 Información complementaria relativa a los niveles en orden lineal infralógico.*

En el *nivel 1* encontramos las siguientes categorías de sujetos:

- ❖ Un único sujeto de la muestra, de seis años de edad, con clave *26A1*, del cual haremos mención expresa, que no realizó correctamente (al primer intento) ninguno de los cinco ítems o tareas del conjunto. Es decir, que no demostró ninguna competencia en las tareas de orden verbal infralógico.
- ❖ Ocho sujetos que aplicaron correctamente uno solo de los cinco conceptos ordinales en las tareas del conjunto. De ellos, dos aplicaron correctamente el concepto *antes que*, los dos del grupo de cuatro años y medio; cuatro aplicaron correctamente el concepto *después que*, tres de tres años y medio y uno de cinco años; y otros dos, de cinco años y medio y seis años, identificaron correctamente una serie sencilla de tres elementos. Ninguno identificó correctamente series de cuatro elementos.
- ❖ Diez sujetos que aplicaron correctamente dos de los cinco conceptos ordinales. De ellos, nueve aplicaron correctamente los conceptos *antes que* o *después que*: uno aplica correctamente los dos; otro el concepto *antes que* y la identificación de la serie de tres elementos; otro el concepto *antes que* y la identificación de la serie de cuatro elementos; dos el concepto *después que* y la identificación de la serie de tres elementos; tres el concepto *después que* y la identificación de la serie de cuatro elementos; y solo uno el concepto *después que* y la identificación de la serie de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias. Un solo sujeto, de seis años y medio y clave *16AM5*, identifica correctamente las series de tres y de cuatro elementos.

Ninguno identifica correctamente la serie de cuatro elementos y la otra serie de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias, tampoco se identifican la serie de tres elementos y la de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias, ni el concepto *antes que* y la serie de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias.

De las diez combinaciones posibles solo se han encontrado siete, sin que podamos relacionar la edad con la frecuencia de tales combinaciones.

En el mismo hallamos 19 sujetos de la muestra, de los que 11 tienen edades inferiores o iguales a los cuatro años y medio, y 8 tienen edades comprendidas

entre los cinco y los siete años. Pensamos que estos ocho sujetos presentan un déficit específico en este aspecto ordinal.

En el **Nivel 2** encontramos 18 sujetos de la muestra. Todos aplicaron correctamente los conceptos *antes que* o *después que*: 8 aplicaron ambos, 6 solo el primero y 4 solo la el segundo. El concepto *antes que* se aplica correctamente por 14 de los 18 sujetos; el concepto *después que* por 12; la serie de tres elementos es identificada correctamente por 16, este es el ítem de mayor frecuencia en el nivel; la de cuatro elementos por 5 y la de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias, por 7 sujetos.

De los 18 sujetos, 11 identifican correctamente alguna de las series de cuatro elementos o la de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias. Un solo sujeto de 6 años, identifica ambas y aplica correctamente el concepto *antes que*; los otros cuatro sujetos que identifican la serie de cuatro elementos, identificaron también la de tres; de los seis sujetos que identifican correctamente la serie de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias, cinco identificaron también la de tres, y solo uno, de cuatro años, no lo hace. Este sujeto aplicó correctamente los conceptos *antes que* y *después que*, por lo que es probable que la identificación de la serie de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias se haya resuelto por ensayo y error, es decir, que el sujeto se halle realmente en un nivel inferior.

Ninguno de los sujetos aplica correctamente los conceptos *antes que* y *después que* y además identifica la serie de cuatro elementos, sin identificar la de tres; tampoco ninguno aplica correctamente el concepto *después que* e identifica además las dos series de cuatro elementos, sin identificar la de tres; y tampoco ninguno identifica exclusivamente las tres series.

En este nivel es menor la incidencia de la estrategia de ensayo y error.

Por tanto, podemos concluir que los sujetos del *nivel 2* identifican correctamente la serie de tres elementos en combinación con la aplicación correcta de uno o de los dos conceptos *antes que* y *después que* o la identificación correcta de una de las series de cuatro elementos.

Las frecuencias y las distribuciones por edad de las 10 combinaciones de respuestas posibles, son las siguientes\*:

- **2–3–4**. Frecuencia 7: dos sujetos del grupo *3AM*, uno de *4A*, dos de *4AM*, uno de *5AM* y uno de *7A*.
- **2–3–5**. Frecuencia 0. No hay sujetos con esta combinación.

---

\*Las secuencias numéricas utilizadas para identificar las distintas combinaciones, corresponden a los números de los ítems o tareas realizados correctamente por el sujeto. Así, por ejemplo, la combinación **2–3–4**, indica que el sujeto realizó correctamente las tareas segunda, tercera y cuarta.

- **2–3–6.** Frecuencia 1: un sujeto del grupo  $4A$ . Probablemente la sexta tarea se haya realizado por ensayo y error.
- **2–4–5.** Frecuencia 2: un sujeto de  $3AM$  y otro de  $5A$ .
- **2–4–6.** Frecuencia 3: un sujeto de  $3AM$ , otro de  $4A$  y otro de  $4AM$ . En la combinación puede intervenir el ensayo y error, pero también el aprendizaje conseguido a medida que se va desarrollando el conjunto de tareas.
- **2–5–6.** Frecuencia 1: Un sujeto del grupo  $6A$ . Dada la edad del sujeto, nos inclinamos por la intervención del aprendizaje en la resolución y por la posibilidad de que este sujeto se halle en un nivel superior, aún cuando le haya costado entender o adaptarse al conjunto de tareas.
- **3–4–5.** Frecuencia 2: un sujeto de  $5A$  y otro de  $6A$ .
- **3–4–6.** Frecuencia 2: un sujeto de  $4A$  y otro de  $5A$ .
- **3–5–6.** Frecuencia 0. No hay sujetos con esta combinación.
- **4–5–6.** Frecuencia 0. No hay sujetos con esta combinación.

La distribución de los 18 sujetos que encontramos en el *nivel 2* por grupos de edad es la siguiente: 4 pertenecen al grupo  $3AM$ , 4 al  $4A$ , 3 al  $4AM$ , 3 al  $5A$ , 1 al  $5AM$ , 2 al  $6A$  y 1 al  $7A$ . Consideramos que los cuatro sujetos con edades superiores a cinco años presentan un déficit específico en este aspecto ordinal.

Las frecuencias y las distribuciones por edad de las 5 combinaciones de respuestas posibles para los 24 sujetos que identificaron correctamente cuatro de los cinco conceptos ordinales (**nivel 3**), son:

- **Fallo en la segunda tarea.** Frecuencia 6: dos sujetos del grupo  $5A$  y uno en cada uno de los grupos  $5AM$ ,  $6A$ ,  $6AM$  y  $7A$ .
- **Fallo en la tercera tarea.** Frecuencia 3: uno en cada uno de los grupos  $5A$ ,  $6A$  y  $6AM$ .
- **Fallo en la cuarta tarea.** Frecuencia 1: un sujeto del grupo  $5A$ .
- **Fallo en la quinta tarea.** Frecuencia 3: uno en cada uno de los grupos  $4AM$ ,  $5AM$  y  $6A$ .
- **Fallo en la sexta tarea.** Frecuencia 11: cuatro del grupo  $4A$ , dos del  $4AM$ , uno en cada uno de los grupos  $5A$ ,  $6A$ ,  $6AM$  y dos del grupo  $7A$ .

Con estos datos y para estos sujetos, la frecuencia relativamente alta de fallos en la aplicación correcta del concepto *antes que* puede ser indicativa de alguna dificultad de comprensión o de atención en el inicio de las tareas,

dificultad que se supera en el desarrollo de las tareas posteriores. Probablemente estos sujetos sean capaces de aplicar e identificar los cinco conceptos ordinales.

Las frecuencias relativamente bajas de fallos en la aplicación correcta del concepto *antes que*, y en la identificación de las series de tres y cuatro elementos, revela pérdidas puntuales de atención o dificultades en la comprensión de alguna tarea aislada.

Mientras que la alta frecuencia de fallos en la identificación de la serie de cuatro elementos partiendo de posiciones intermedias, aproximadamente el 46% de los 24 sujetos; se debe, además de las causas anteriores, a la mayor dificultad del ítem. Ello viene avalado por una mayor incidencia de este fallo en los sujetos de menor edad, cuatro en el grupo *4A* y dos en el *4AM*.

La distribución de los 24 sujetos que encontramos en esta situación por grupos de edad es la siguiente: 4 pertenecen al grupo *4A*, 3 al *4AM*, 5 al *5A*, 2 al *5AM*, 4 al *6A*, 3 al *6AM* y 3 al *7A*.

Por otra parte, encontramos 15 sujetos que aplican e identifican correctamente los cinco conceptos ordinales infralógicos. Se distribuyen por grupos de edad del siguiente modo: 1 del grupo *4AM*, 5 del *5AM*, 2 del *6A*, 4 del *6AM* y 3 del grupo *7A*.

Por tanto, podemos concluir que los sujetos del *nivel 3* aplican e identifican correctamente cuatro o los cinco conceptos ordinales infralógicos. Si se produce algún fallo, es debido bien a una falta de atención o de comprensión en una tarea puntual o bien, si se produce en la sexta tarea, a la mayor dificultad de la misma.

### B.1.3 Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad en orden lineal.

Los datos que aparecen a continuación muestran las características de los ajustes de la variable *MediaL* en función de la edad de los grupos mediante los modelos Inverso y de la curva *S*.

Modelo	$R$	$R^2$	Error típico de la estimación
Inverso	,885	,783	,344
Curva S	,886	,785	,111

Tabla B.2: Ajuste de *MediaL* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los datos del análisis de la varianza en ambos casos se recogen en la tabla B.3.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
<b>Inverso</b>					
Regresión	2,555	1	2,555	21,604	,004
Residual	,710	6	,118		
Total	3,265	7			
<b>Curva S</b>					
Regresión	,270	1	,270	21,853	,003
Residual	,074	6	,012		
Total	,344	7			

Tabla B.3: ANOVA de los ajustes de *MediaL* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los coeficientes del modelo junto con sus significaciones al 95 % se muestran a continuación en la tabla B.4.

	Coeficientes no estandarizados		t	Sig.
	B	Error típico		
<b>Inverso</b>				
1 / EDG	-12,196	2,624	-4,648	,004
Constante	5,813	,540	10,770	,000
<b>Curva S</b>				
1 / EDG	-3,965	,848	-4,675	,003
Constante	1,989	,174	11,401	,000

Tabla B.4: Coeficientes del ajuste de *MediaL* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Las tablas B.5 y B.6 recogen las edades de los grupos, los valores observados de la variable *MediaL*, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95 % para ambos modelos.



EDG	MediaL	AjusteI	ErrorI	EIIC95I	ESIC95I
3,50	2,10	2,32811	-,22811	1,28084	3,37538
4,00	3,20	2,76369	,43631	1,81601	3,71138
4,50	3,00	3,10248	-,10248	2,19899	4,00597
5,00	3,20	3,37351	-,17351	2,48096	4,26607
5,50	3,90	3,59527	,30473	2,69479	4,49575
6,00	3,30	3,78006	-,48006	2,86162	4,69850
6,50	4,25	3,93642	,31358	2,99517	4,87767
7,00	4,00	4,07045	-,07045	3,10448	5,03642

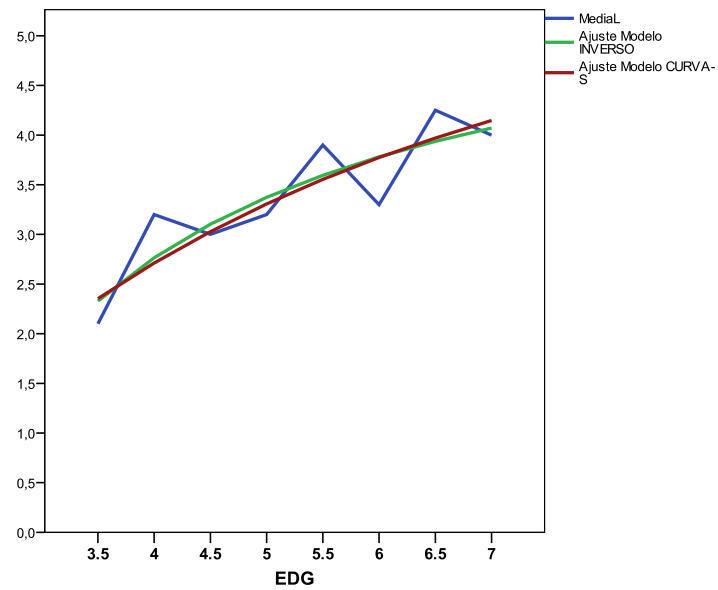
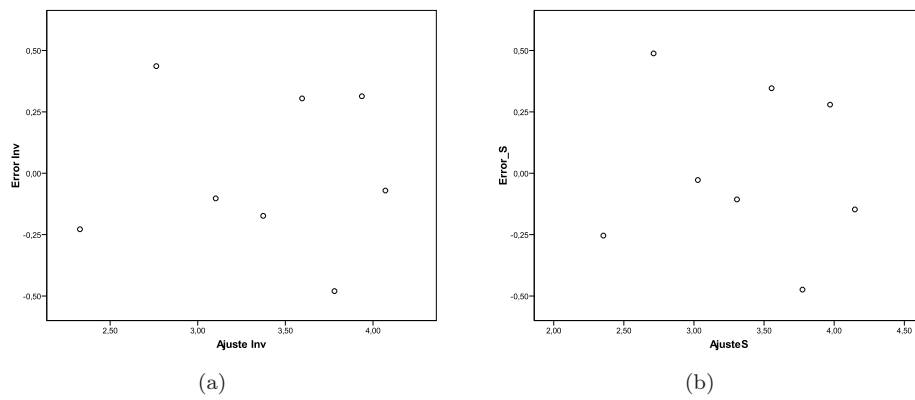
Tabla B.5: Datos del ajuste de *MediaL* mediante el modelo Inverso

EDG	MediaL	AjusteS	ErrorS	EIIC95S	ESIC95S
3,50	2,10	2,35386	-,25386	1,67789	3,30216
4,00	3,20	2,71195	,48805	1,99639	3,68399
4,50	3,00	3,02771	-,02771	2,26090	4,05459
5,00	3,20	3,30660	-,10660	2,47790	4,41244
5,50	3,90	3,55378	,34622	2,65632	4,75445
6,00	3,30	3,77382	-,47382	2,80446	5,07823
6,50	4,25	3,97061	,27939	2,92903	5,38259
7,00	4,00	4,14745	-,14745	3,03512	5,66742

Tabla B.6: Datos del ajuste de *MediaL* mediante la curva *S*

En el gráfico de la Figura B.1 se representan los valores observados de la variable *MediaL* y los ajustados mediante ambos modelos.

Finalmente, el gráfico de la Figura B.2 muestra la independencia de los errores de los modelos y de los valores ajustados, lo que prueba también su significación.

Fig. B.1. Ajuste de *MediaL* mediante el modelo *S*.Fig. B.2. Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva *S* para *MediaL*.

## B.2 Análisis de los tiempos de respuesta

Las variables temporales que intervienen en este estudio son las siguientes: para cada sujeto, intervienen los registros temporales  $ti$ , donde  $i$  varía de 2 a 6\*; la variable  $ttotal$  almacena la suma de los tiempos  $ti$  que cada sujeto ha invertido en la realización del conjunto de tareas. A la media y la mediana de la variable  $ttotal$ , las llamaremos *MediaTL* y *MedianaTL*.

Se analizan a continuación los intervalos temporales por grupos de edad y su relación con los resultados, así como la relación existente entre los promedios de los resultados y los promedios temporales por grupos de edad. En la tabla B.9 siguiente, se recoge la clasificación de los sujetos por intervalos temporales empleados en la resolución de las tareas, junto con los correspondientes valores de las variables  $ti$  y  $ttotal$ .

El conjunto de histogramas de la Figura B.3, muestra la distribución de resultados y tiempos totales por grupos de edad.

Por otra parte, la tabla B.7 muestra los porcentajes de sujetos por grupos de edad cuyos tiempos se hallan en los intervalos temporales indicados, poniéndose de manifiesto la disminución de la longitud de los intervalos a medida que aumenta la edad.

GED	% de sujetos	Intervalo temporal (min)
3AM	90	[2'5, 5]
4A	100	[2, 5]
4AM	90	[2, 4]
5A	90	[1'5, 3'5]
5AM	80	[1, 2'5]
6A	80	[1, 3]
6AM	100	[1, 2]
7A	75	[1, 2]

Tabla B.7: Intervalos temporales por grupos de edad en orden lineal

En la disminución del tiempo empleado en la respuesta pueden incidir los dos factores siguientes: la mayor habilidad psicomotriz de los sujetos de mayor edad, que les permite emplear menos tiempo en la resolución, y el déficit atencional que lleva al sujeto a decidir una respuesta rápida e insuficientemente meditada y, por tanto, a obtener peores resultados. Este puede ser

\*Véase la subsección 7.6.1.1 en la página 346 y siguientes.

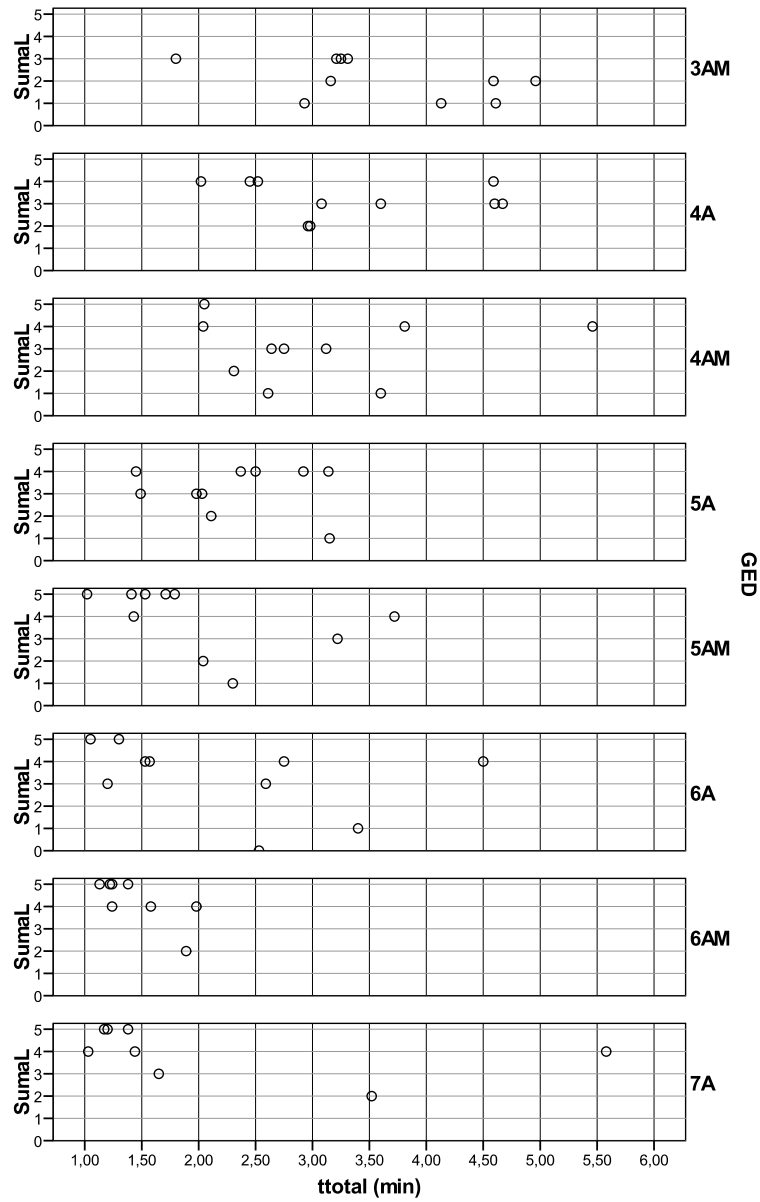


Fig. B.3. Distribuciones tttotal-SumaL por grupos de edad en orden lineal.

el caso de los sujetos de cinco o más años, cuyos tiempos de respuesta son reducidos y, sin embargo, solo alcanzan el *Nivel 1* en los resultados.

El fenómeno contrario, es decir, el de aquellos sujetos que alcanzan el *Nivel 3* en tiempos claramente superiores a los empleados por la mayoría de los sujetos de su mismo grupo de edad, también se puede observar en el gráfico de la Figura B.3.

En general se comprueba que todos los sujetos que han resuelto correctamente todas las tareas, lo han hecho en un intervalo de 1 a 2 minutos, de los que se deduce que los sujetos que consiguen mejores resultados emplean también menos tiempo en la resolución de las tareas. Es clara la tendencia (Figura B.3) a la obtención de mejores resultados en menos tiempo a medida que aumenta la edad de los sujetos.

Los estadísticos para la variable *ttotal* se recogen en la tabla B.8, en la que se aprecia que todas las asimetrías, salvo en el grupo *3AM*, son positivas, lo que acredita que en dichos grupos se encuentran algunos tiempos significativamente mayores que la media, en consonancia con el análisis realizado en los párrafos anteriores.

GED	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
3AM	3,5950	3,2800	,96446	-,241	-,240
4A	3,3470	3,0300	,97380	,371	-1,383
4AM	3,0390	2,6950	1,03876	1,525	2,617
5A	2,3140	2,2400	,61873	,061	-1,169
5AM	2,0170	1,7500	,85101	1,156	,580
6A	2,2420	2,0500	1,11824	,888	,173
6AM	1,4575	1,3100	,32499	,865	-,937
7A	2,1213	1,4100	1,60799	1,848	2,816
Total	2,5549	2,4100	1,16448	,720	-,228

Tabla B.8: Estadísticos más relevantes de la variable *ttotal*

Por otra parte, las medias y las medianas de los tiempos totales por grupos de edad admiten ajustes significativos en función de las edades medias de los grupos mediante modelos logarítmicos e inversos. Estos ajustes se representan en los gráficos de las figuras B.4 y B.5\* y sus características pueden examinarse en la subsección B.2.3, página 682 y siguientes.

Los valores de  $R^2$  en el ajuste de las medias temporales por grupos de edad son:  $R^2 = 0,837$ , para el modelo logarítmico, y  $R^2 = 0,856$ , para el modelo

\*Véanse las páginas 683 y 685.

inverso. En el ajuste de las medianas estos valores son:  $R^2 = 0,938$ , para el modelo logarítmico, y  $R^2 = 0,930$ , para el modelo inverso.

Se concluye, pues, que las medias y medianas temporales por grupos de edad disminuyen al aumentar la edad, de acuerdo con alguno de los modelos mencionados.

Por último, se han encontrado ajustes significativos mediante modelos lineales entre los valores de la variable *MediaL*, media de resultados por grupos de edad, en función de los valores de *MediaTL*, medias temporales por grupos de edad, y de *MedianaTL*, medianas temporales por grupos de edad. Los resultados se muestran en los gráficos de las figuras B.6 y B.7 (páginas 686 y 688) y en la subsección B.2.3, página 682 y siguientes, con valores de  $R^2 = 0,778$ , para el ajuste *MediaL–MediaTL*, y  $R^2 = 0,845$ , para el *MediaL–MedianaTL*.

Se concluye, por tanto, que la disminución de las medias de los resultados por grupos de edad al aumentar las medias y medianas temporales, admite una buena aproximación mediante dichos modelos lineales.

### B.2.1 Conclusiones

Del estudio temporal se obtienen las conclusiones siguientes:

- 1<sup>a</sup>. La duración de los tiempos de respuesta, en minutos, disminuye por grupos de edad.
- 2<sup>a</sup>. Los sujetos que consiguen mejores resultados emplean también menos tiempo en la resolución de las tareas.
- 3<sup>a</sup>. Se observan déficits atencionales o pérdidas puntuales que llevan al sujeto a decidir una respuesta rápida e insuficientemente meditada y obtener peores resultados. Por ejemplo, hay sujetos de cinco o más años, cuyos tiempos se hallan en los intervalos propios de su edad y que alcanzan solamente el *Nivel 1* en los resultados.
- 4<sup>a</sup>. Las asimetrías positivas en los tiempos medios por grupos de edad, muestran la existencia de sujetos con tiempos de realización significativamente mayores que la media del grupo de edad correspondiente.
- 5<sup>a</sup>. Los sujetos que solo alcanzan el *Nivel 1* en tiempos considerablemente mayores que los del intervalo temporal característico de su grupo de edad, pueden necesitar tratamiento en este aspecto ordinal.
- 6<sup>a</sup>. Es conveniente observar y, en su caso, tratar a los sujetos que alcanzan el *Nivel 3* en tiempos muy superiores a los del intervalo temporal característico de su grupo de edad.

- 7<sup>a</sup>. Con independencia de los resultados, la disminución de los tiempos medios de resolución de las tareas con las edades medias de los grupos admite una buena aproximación mediante ajustes logarítmico e inverso.
- 8<sup>a</sup>. La disminución de las medias en los resultados por grupos de edad al aumentar las correspondientes medias y medianas temporales admite una buena aproximación mediante modelos lineales.

### B.2.2 Datos complementarios

IntTemp	t2	t3	t4	t5	t6	ttotal	clave
[1, 2)	1	,37	,38	,25	,57	,23	1,80 23AM4
	2	,18	,20	,25	,25	,57	1,45 15A4
	3	,65	,23	,38	,45	,27	1,98 25A1
	4	,30	,27	,27	,28	,37	1,49 25A2
	5	,17	,13	,18	,27	,27	1,02 15AM1
	6	,48	,28	,45	,25	,25	1,71 15AM4
	7	,53	,28	,22	,22	,28	1,53 15AM5
	8	,28	,33	,20	,25	,35	1,41 25AM1
	9	,40	,23	,27	,28	,25	1,43 25AM4
	10	,35	,25	,22	,25	,72	1,79 25AM6
	11	,28	,52	,27	,25	,25	1,57 16A2
	12	,23	,20	,18	,22	,22	1,05 16A3
	13	,27	,20	,22	,23	,38	1,30 16A4
	14	,22	,30	,28	,43	,30	1,53 26A4
	15	,30	,15	,22	,20	,33	1,20 26A5
	16	,22	,80	,35	,28	,33	1,98 16AM1
	17	,18	,17	,22	,22	,45	1,24 16AM2
	18	,25	,32	,20	,22	,25	1,24 16AM3
	19	,27	,25	,20	,28	,22	1,22 16AM4
	20	,73	,33	,23	,25	,35	1,89 16AM5
	21	,28	,25	,22	,28	,35	1,38 16AM6
	22	,38	,20	,23	,25	,52	1,58 16AM7
	23	,22	,17	,18	,23	,33	1,13 16AM8
	24	,22	,15	,23	,20	,23	1,03 17A1
	25	,47	,22	,20	,22	,27	1,38 17A10
	26	,40	,15	,17	,23	,25	1,20 17A3
	27	,43	,25	,23	,23	,30	1,44 17A4

Continúa en la página siguiente . . .

Tabla B.9: Clasificación de los sujetos por intervalos temporales en orden lineal.

... viene de la página anterior.

IntTemp	t2	t3	t4	t5	t6	ttotal	clave
28	,23	,20	,22	,27	,25	1,17	17A7
29	,18	,23	,28	,58	,38	1,65	17A9
<b>Total</b>							29
<b>[2, 3)</b>	1	1,23	,43	,37	,52	,38	2,93 13AM1
	2	,20	1,63	,37	,78	,00	2,98 14A2
	3	,37	,37	,27	,38	1,13	2,52 14A4
	4	,22	,25	1,35	,43	,20	2,45 14A6
	5	,73	,25	,77	,48	,73	2,96 24A4
	6	,55	,33	,32	,37	,45	2,02 24A6
	7	,48	,20	,30	,78	,55	2,31 14AM1
	8	,42	,38	,28	,95	,72	2,75 14AM2
	9	,37	,27	,30	,32	,78	2,04 14AM3
	10	,58	,30	,35	,35	,47	2,05 24AM1
	11	,85	,33	,42	,48	,53	2,61 24AM3
	12	,60	,42	,38	,82	,42	2,64 24AM4
	13	,75	,50	,77	,43	,47	2,92 15A1
	14	,93	,28	,37	,42	,50	2,50 15A2
	15	,38	,40	,22	,43	,60	2,03 15A3
	16	,58	,22	,92	,28	,37	2,37 15A5
	17	,50	,27	,75	,27	,32	2,11 25A4
	18	,82	,32	,25	,68	,23	2,30 25AM3
	19	,32	,27	,48	,45	,52	2,04 25AM5
	20	1,87	,17	,22	,22	,27	2,75 16A5
	21	,42	,40	,92	,42	,43	2,59 16A6
	22	,60	,30	,40	,85	,38	2,53 26A1
<b>Total</b>							22
<b>[3, 4)</b>	1	,42	,35	,38	1,22	,88	3,25 13AM2
	2	,90	,17	,72	,85	,52	3,16 13AM4
	3	,48	1,20	,38	,50	,65	3,21 13AM5
	4	,60	,23	,37	,43	1,68	3,31 23AM6
	5	,48	1,07	,40	,75	,38	3,08 14A5
	6	,43	,43	,68	1,18	,88	3,60 24A5
	7	,98	,62	,68	1,20	,33	3,81 14AM4
	8	,48	,75	,37	1,20	,32	3,12 24AM2
	9	,23	,82	,62	1,23	,70	3,60 24AM6
	10	1,60	,43	,38	,30	,43	3,14 25A3

Continúa en la página siguiente ...

Tabla B.9: Clasificación de los sujetos por intervalos temporales en orden lineal.



... viene de la página anterior.

<b>IntTemp</b>	<b>t2</b>	<b>t3</b>	<b>t4</b>	<b>t5</b>	<b>t6</b>	<b>ttotal</b>	<b>clave</b>	
11	,53	,38	,52	,75	,97	3,15	25A5	
12	,82	,32	,28	1,18	1,12	3,72	15AM2	
13	,43	,18	1,08	,53	1,00	3,22	15AM3	
14	1,43	,37	,40	,45	,75	3,40	26A3	
15	1,87	,30	,50	,37	,48	3,52	17A6	
<b>Total</b>							15	
<b>[4, 5)</b>	1	,73	,48	1,25	1,47	,68	4,61	13AM3
	2	1,45	,38	,50	,85	,95	4,13	23AM2
	3	1,35	,73	1,33	1,10	,45	4,96	23AM3
	4	,62	1,12	,55	1,17	1,13	4,59	23AM5
	5	,33	,37	,35	2,82	,80	4,67	14A3
	6	1,20	1,72	,55	,85	,28	4,60	24A1
	7	,47	,70	,50	1,10	1,82	4,59	24A3
	8	,25	,30	,37	,45	3,13	4,50	26A2
<b>Total</b>								8
<b>[5, 6]</b>	1	1,48	,63	,62	,98	1,75	5,46	14AM5
	2	,80	1,73	,25	,33	2,47	5,58	17A8
<b>Total</b>								2
<b>Total</b>	N	76	76	76	76	76	76	76

Tabla B.9: Clasificación de los sujetos por intervalos temporales en orden lineal (Continuación).

*B.2.3 Datos sobre modelos de ajuste***AJUSTE MediaTL-EDG****Modelo Logarítmico****Resumen del modelo**

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,915	,837	,810	,321

**ANOVA**

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	3,164	1	3,164	30,754	,001
Residual	,617	6	,103		
Total	3,782	7			

**Coefficientes**

	Coef. no estandarizados		Coef. estand.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
ln(EDG)	-2,785	,502	-,915	-5,546	,001
(Constante)	7,067	,828		8,533	,000

**Modelo Inverso****Resumen del modelo**

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,925	,856	,832	,301

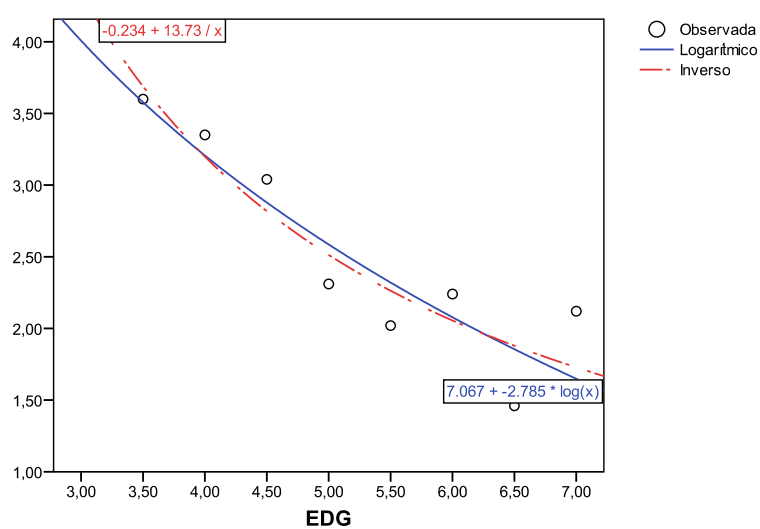
## ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	3,238	1	3,238	35,738	,001
Residual	,544	6	,091		
Total	3,782	7			

## Coeficientes

	Coef. no estandarizados		Coef. Estand.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
1 / EDG	13,730	2,297	,925	5,978	,001
(Constante)	-,234	,472		-,495	,638

## MediaTL

Fig. B.4. Ajuste *MediaTL-EDG* mediante modelos logarítmico e inverso.

**AJUSTE MedianaTL–EDG****Modelo Logarítmico****Resumen del modelo**

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,968	,938	,927	,197

**ANOVA**

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	3,511	1	3,511	90,183	,000
Residual	,234	6	,039		
Total	3,744	7			

**Coefficientes**

	Coeficientes no estandarizados		Coef. Estand.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
ln(EDG)	-2,934	,309	-,968	-9,496	,000
(Constante)	7,013	,509		13,768	,000

**Modelo Inverso****Resumen del modelo**

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,964	,930	,918	,210

**ANOVA**

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	3,481	1	3,481	79,207	,000
Residual	,264	6	,044		
Total	3,744	7			

### Coefficientes

	Coefficients no estandarizados		Coef. Estand.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
1 / EDG	14,235	1,600	,964	8,900	,000
(Constante)	-,631	,329		-1,919	,103

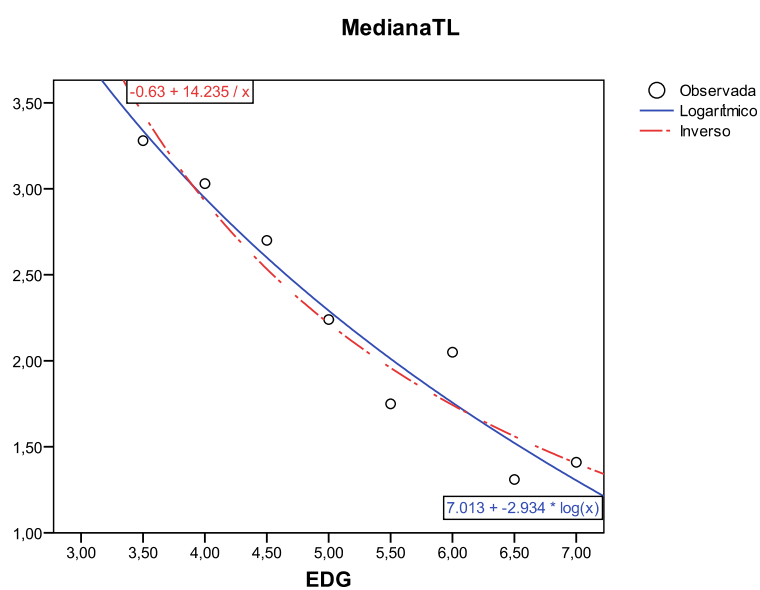


Fig. B.5. Ajuste *MedianaTL-EDG* mediante modelos logarítmico e inverso.

### AJUSTE MediaL-MediaTL

#### Modelo Lineal

#### Resumen del modelo

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,882	,778	,741	,347

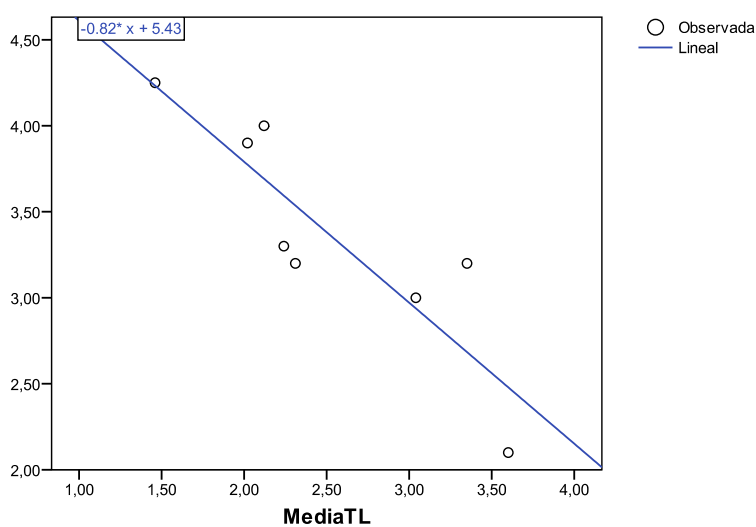
## ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	2,541	1	2,541	21,050	,004
Residual	,724	6	,121		
Total	3,265	7			

## Coeficientes

	Coeficientes no estandarizados		Coef. Estand.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
MediaTL	-,820	,179	-,882	-4,588	,004
(Constante)	5,432	,466		11,652	,000

## MediaL

Fig. B.6. Ajuste *MediaL*–*MediaTL* mediante un modelo lineal.

## AJUSTE MediaL–MedianaTL

### Modelo Lineal

#### Resumen del modelo

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,919	,845	,819	,291

### ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	2,757	1	2,757	32,604	,001
Residual	,507	6	,085		
Total	3,265	7			

### Coefficientes

	Coeficientes no estandarizados		Coef. Estand.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
MedianaTL	-,858	,150	-,919	-5,710	,001
(Constante)	5,275	,349		15,102	,000

El ajuste se muestra en el gráfico B.7 siguiente.

## B.3 Estudio sobre el número de intentos

Las variables analizadas en este apartado se describen a continuación.

En este caso intervienen los registros *n22*, *n32*, *n42*, *n43*, *n52*, *n53*, *n62* y *n63*, que almacenan los intentos erróneos de los sujetos en los caminos incorrectos de las tareas correspondientes\*. Consideramos también los registros *n4*, *n5* y *n6*, que almacenan, para cada sujeto, el total de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta. Son, pues, suma de las correspondientes parejas *nij*.

Además, consideramos como variables *SumaInt*, que almacena el total de

\*Véase la subsección 7.6.1.3, página 354 y siguientes.

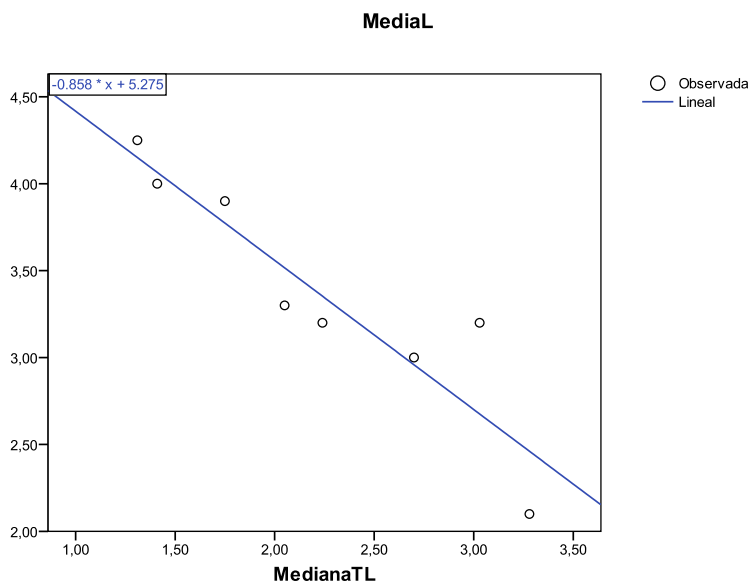


Fig. B.7. Ajuste *MediaL*–*MedianaTL* mediante un modelo lineal.

intentos erróneos para cada sujeto, y *MErrores*, la correspondiente media por grupos de edad.

En la tabla B.31 se recogen las respuestas de los sujetos según el total de intentos erróneos realizados y según el total de tareas realizadas correctamente y en la tabla B.32 se desglosan los números de intentos erróneos cometidos por el sujeto en cada camino para las tareas cuarta, quinta y sexta\*. En los Histogramas de la Figura B.8 se representan las distribuciones que relacionan los números totales de intentos erróneos con los resultados de los sujetos por grupos de edad.

En el gráfico mencionado se observa una reducción del número total de intentos al aumentar la edad. En este sentido, la tabla B.28 refleja el porcentaje de sujetos de cada grupo de edad cuyos intentos erróneos se encuentran entre los valores indicados en cada caso.

\*Véase más adelante la página 694 y siguientes.



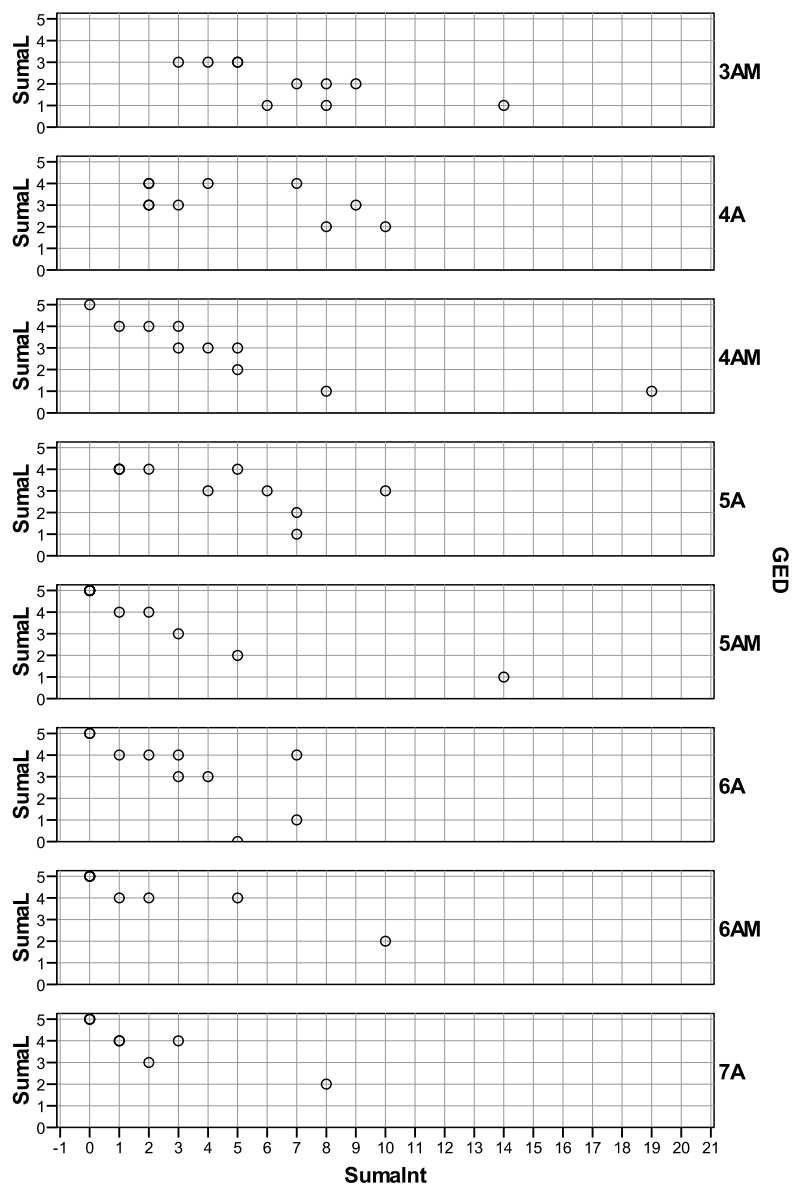


Fig. B.8. Distribuciones  $SumaInt-SumaL$  por grupos de edad en orden lineal.

GED	% de sujetos	Intervalo Intentos err.
3AM	90	[3, 9]
4A	90	[2, 9]
4AM	90	[0, 8]
5A	90	[1, 7]
5AM	90	[0, 5]
6A	80	[0, 5]
6AM	87'5	[0, 5]
7A	87'5	[0, 3]

Tabla B.28: Intervalos de intentos erróneos por grupos de edad en orden lineal

En la misma tabla se observa también que las longitudes de los intervalos disminuyen al aumentar la edad y que el extremo inferior de los mismos se desplaza hacia el 0. Igualmente se observa un salto cuantitativo y cualitativo claro a partir de los cinco años de edad. Este comportamiento se debe, no solamente a la mejora de resultados propia del aumento de la edad, sino también a un mejor reconocimiento de los errores por parte de los sujetos.

En el gráfico de la Figura B.8 y con más precisión en la tabla B.31, encontramos sujetos en los niveles inferiores con un elevado número de intentos erróneos en las dos primeras tareas, normalmente uno en cada grupo de edad\*. Así mismo se observa que el *Nivel 3* se alcanza por algunos sujetos con un elevado número de intentos erróneos *en una sola tarea*, es decir, por sujetos que insisten en los errores sin reconocerlos†. Este patrón corresponde al *Patrón 3* identificado en el estudio exploratorio; se confirma por tanto la existencia de este patrón en el presente estudio. Las tareas multimedia realizadas con ordenadores revelan claramente este fenómeno. No creemos que sea característico de las mismas; creemos, sin embargo, que el reconocimiento de los errores es esencial para el aprendizaje, por lo que llamamos la atención sobre el fenómeno que, aunque es más acusado en los sujetos del nivel inferior, se produce también en los del nivel superior.

La tabla B.29 recoge las sumas de intentos erróneos por grupos de edad en cada una de las tareas.

\*Para más detalles, véase la observación al pie de la tabla B.31, página 697

†Se trata de ocho sujetos, frente a los treinta y uno del mismo nivel sin intentos erróneos o, a lo más, con dos.

GED	n22	n32	n4	n5	n6
3AM	12	5	10	27	15
4A	3	9	3	10	24
4AM	2	13	5	17	13
5A	20	2	11	2	9
5AM	9	1	1	9	5
6A	11	5	3	4	9
6AM	6	9	0	0	3
7A	6	0	0	1	8
<b>Total</b>	69	44	33	70	86

Tabla B.29: Sumas de intentos erróneos por grupos de edad las tareas de orden lineal.

Como se puede apreciar directamente, la mayor cantidad de intentos erróneos se ha producido en la segunda tarea y en las dos últimas tareas, que son las que tienen mayor grado de dificultad. Como se esperaba, los intentos erróneos de la segunda tarea son debidos a la necesaria adaptación de los sujetos al entorno virtual y a las acciones a realizar en el conjunto. Sin embargo, el aprendizaje reduce los intentos erróneos en las tareas siguientes.

Por otra parte, en tres grupos de edad se producen más intentos erróneos en la tercera que en la segunda. Consideramos que ello es debido a pérdidas de atención o al incremento en la carga cognitiva que se producen al pasar de una tarea a otra de entorno virtual formalmente idéntico, aunque conceptualmente distintas\*.

Las medias de intentos erróneos por grupos de edad se muestran en los gráficos de la Figura B.9, para las tareas segunda y tercera, y de la Figura B.10, para la cuarta, quinta y sexta (páginas 702 y 703) y la tabla B.30 muestra sus estadísticos.

En dicha tabla se observa que las asimetrías son positivas para todos los grupos de edad, lo que significa que en todos los grupos de edad hay números de intentos erróneos significativamente mayores que la media correspondiente.

\*Una pregunta por el concepto *antes que* y la otra por el concepto *después que*.

GED	Media	Mediana	Desv. t $\acute{p}$ .	Asimetría	Curtosis
3AM	6,90	6,50	3,143	1,215	2,131
4A	4,90	3,50	3,247	,550	-1,655
4AM	5,00	3,50	5,416	2,219	5,678
5A	4,40	4,50	3,134	,376	-,911
5AM	2,50	,50	4,378	2,408	6,194
6A	3,20	3,00	2,573	,311	-1,039
6AM	2,25	,50	3,576	1,828	3,006
7A	1,88	1,00	2,696	2,042	4,494
Total	3,97	3,00	3,833	1,356	2,422

Tabla B.30: Estadísticos más relevantes de *MErrores*. Tareas de Orden lineal infralógico.

Finalizamos esta subsección estudiando varios ajustes de la media de intentos erróneos por grupos de edad, variable *MErrores*, en relación con las edades medias de los grupos, con las medias de resultados y con los tiempos medios por grupos de edad invertidos en la realización del conjunto de tareas.

La bondad y las características de estos ajustes pueden verse en la subsección B.3.3 siguiente, página 704 y siguientes.

El gráfico de la Figura B.11, página 705, muestra el primero de los ajustes, para el que hemos seleccionado por su mayor bondad dos modelos, uno logarítmico y otro inverso. Las ecuaciones correspondientes figuran también en dicho gráfico.

Los valores de  $R^2$  en el ajuste de las medias de intentos erróneos por grupos de edad son:  $R^2 = 0,914$ , para el modelo logarítmico, y  $R^2 = 0,920$ , para el modelo inverso.

Concluimos, pues, que las medias de intentos erróneos por grupos de edad, independientemente de los resultados, disminuyen al aumentar la edad siguiendo, con gran aproximación, uno de estos modelos.

Los gráficos de las figuras B.12 y B.13, páginas 707 y 708, muestran los ajustes de las medias de los resultados en función de los números medios de errores, y de éstos en función de los tiempos medios por grupos de edad, mediante modelos lineales. Las ecuaciones de los mismos figuran también en los gráficos. De nuevo, la bondad y las características de estos ajustes puede verse en la subsección B.3.3, página 704 y siguientes, resultando los valores  $R^2 = 0,921$ , para el primero, y  $R^2 = 0,815$ , para el segundo.

Para terminar, concluimos que las medias de resultados disminuyen al aumentar el número medio de intentos erróneos por grupos de edad, y que éstos, aumentan al aumentar los tiempos medios por grupos de edad de acuerdo con los modelos empleados.

### B.3.1 Conclusiones

Del estudio del número de intentos erróneos extraemos las conclusiones siguientes:

- 1<sup>a</sup>. Existe una tendencia evolutiva clara según la cual, al aumentar la edad, se reduce en número total de intentos erróneos con una mejora en los resultados.
- 2<sup>a</sup>. Se produce un salto cuantitativo y cualitativo a partir de los cinco años de edad en la disminución de los números de intentos erróneos con mejora en los resultados que se obtiene,.
- 3<sup>a</sup>. Las longitudes de los intervalos de intentos erróneos disminuyen al aumentar la edad, comenzando en el [3, 9] para el grupo 3A y finalizando en el [0, 3] para el grupo 7A.
- 4<sup>a</sup>. Las asimetrías positivas en los números medios de intentos erróneos para todos los grupos de edad, muestran que en todos ellos hay sujetos para los cuales los números de intentos erróneos son significativamente mayores que la media del correspondiente grupo de edad.
- 5<sup>a</sup>. Con independencia del nivel, hay sujetos con un elevado número de intentos erróneos *en una sola*, o en dos tareas, que insisten sin reconocer los intentos erróneos como tales. Las respuestas de estos sujetos corresponden al *Patrón 3* hallado en el estudio exploratorio, cuya existencia se confirma en el presente estudio. Es conveniente observar y, en su caso, tratar a estos sujetos.
- 6<sup>a</sup>. Las medias de intentos erróneos por grupos de edad, con independencia de los resultados, disminuyen al aumentar la edad siguiendo, con gran aproximación, un modelo logarítmico o un modelo inverso.
- 7<sup>a</sup>. Las medias de resultados disminuyen al aumentar el número medio de intentos erróneos por grupos de edad, y éstos aumentan al aumentar los tiempos medios por grupos de edad siguiendo, con gran aproximación, modelos lineales.

### B.3.2 Datos complementarios

En la tabla B.31 se da una clasificación de los sujetos según los valores de las variables *SumaInt* y *SumaL*, es decir, según el total de intentos erróneos realizados y según el total de tareas realizadas correctamente por el sujeto en el conjunto de tareas. Se muestran también los intentos erróneos totales en cada tarea y la clave del sujeto.

Y en la tabla B.32, página 701 y siguientes, además de los valores de de las variables *SumaInt* y *SumaL*, se desglosan los intentos erróneos cometidos por el sujeto en cada camino para las tareas cuarta, quinta y sexta, y se muestra también la clave del sujeto.

SumaInt	SumaL		n22	n32	n4	n5	n6	clave
0	5,00	1	0	0	0	0	0	24AM1
		2	0	0	0	0	0	15AM1
		3	0	0	0	0	0	15AM4
		4	0	0	0	0	0	15AM5
		5	0	0	0	0	0	25AM1
		6	0	0	0	0	0	25AM6
		7	0	0	0	0	0	16A3
		8	0	0	0	0	0	16A4
		9	0	0	0	0	0	16AM3
		10	0	0	0	0	0	16AM4
		11	0	0	0	0	0	16AM6
		12	0	0	0	0	0	16AM8
		13	0	0	0	0	0	17A10
		14	0	0	0	0	0	17A3
		15	0	0	0	0	0	17A7
Total N								15
1	4,00	1	0	0	0	0	1	14AM5
		2	0	1	0	0	0	15A1
		3	0	0	0	0	1	15A4
		4	1	0	0	0	0	25A3
		5	0	0	0	1	0	25AM4
		6	0	0	0	1	0	26A4
		7	0	0	0	0	1	16AM2
		8	1	0	0	0	0	17A4
		9	0	0	0	0	1	17A8

Continúa en la página siguiente . . .

Tabla B.31: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.

... viene de la página anterior.

SumaInt	SumaL		n22	n32	n4	n5	n6	clave	
		Total N							9
2	3,00	1	0	0	1	1	0	14A3	
		2	1	0	0	1	0	24A5	
		3	0	0	0	0	2	17A9	
		Total N							3
	4,00	1	0	0	0	0	2	14A6	
		2	0	0	0	0	2	24A6	
		3	0	0	0	0	2	14AM3	
		4	2	0	0	0	0	15A2	
		5	2	0	0	0	0	15AM2	
		6	0	2	0	0	0	16A2	
		7	2	0	0	0	0	16AM7	
		Total N							7
		Total N							10
3	3,00	1	0	1	0	2	0	23AM4	
		2	0	0	0	1	2	14A5	
		3	0	2	0	1	0	24AM2	
		4	0	0	0	2	1	15AM3	
		5	0	1	2	0	0	16A6	
		Total N							5
	4,00	1	0	0	0	3	0	14AM4	
		2	0	0	0	0	3	26A2	
		3	0	0	0	0	3	17A1	
		Total N							3
		Total N							8
4	3,00	1	0	2	0	0	2	13AM5	
		2	0	0	0	2	2	14AM2	
		3	0	1	0	0	3	15A3	
		4	1	0	0	0	3	26A5	
		Total N							4
	4,00	1	0	0	0	0	4	24A3	
		Total N							1
		Total N							5
5	3,00	1	0	0	0	4	1	13AM2	
		2	0	0	0	2	3	23AM6	

Continúa en la página siguiente ...

Tabla B.31: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.

... viene de la página anterior.

SumaInt	SumaL		n22	n32	n4	n5	n6	clave	
		3	0	0	0	4	1	24AM4	
		Total N							3
	2,00	1	2	0	0	2	1	14AM1	
		2	0	0	1	2	2	25AM5	
		Total N							2
	4,00	1	0	0	5	0	0	15A5	
		2	0	5	0	0	0	16AM1	
		Total N							2
	0	1	1	1	1	1	1	26A1	
		Total N							1
		Total N							8
6	1,00	1	1	0	1	2	2	13AM1	
		Total N							1
	3,00	1	3	0	0	0	3	25A2	
		Total N							1
		Total N							2
7	2,00	1	4	0	1	0	2	13AM4	
		2	2	0	4	0	1	25A4	
		Total N							2
	4,00	1	0	0	0	0	7	14A4	
		2	7	0	0	0	0	16A5	
		Total N							2
	1,00	1	3	0	2	1	1	25A5	
		2	2	1	0	2	2	26A3	
		Total N							2
		Total N							6
8	1,00	1	3	0	1	2	2	23AM2	
		2	0	1	1	3	3	24AM3	
		Total N							2
	2,00	1	3	0	3	2	0	23AM3	
		2	2	0	1	0	5	24A4	
		3	5	0	0	1	2	17A6	
		Total N							3
		Total N							5
9	2,00	1	0	2	0	5	2	23AM5	

Continúa en la página siguiente ...

Tabla B.31: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.



... viene de la página anterior.

SumaInt	SumaL		n22	n32	n4	n5	n6	clave
		Total N						1
	3,00	1	0	2	0	7	0	24A1
		Total N						1
		Total N						2
10	2,00	1	0	7	1	0	2	14A2
		2	4	4	0	0	2	16AM5
		Total N						2
	3,00	1	9	0	0	1	0	25A1
		Total N						1
		Total N						3
14	1,00	1	1	0	4	8	1	13AM3
		2	7	1	0	4	2	25AM3
		Total N						2
19	1,00	1	0	10	4	2	3	24AM6
		Total N						1
	Total							76

Tabla B.31: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal.

SumaInt – SumaL		n42	n43	n52	n53	n62	n63	clave
0--5	1	0	0	0	0	0	0	24AM1
	2	0	0	0	0	0	0	15AM1
	3	0	0	0	0	0	0	15AM4
	4	0	0	0	0	0	0	15AM5
	5	0	0	0	0	0	0	25AM1
	6	0	0	0	0	0	0	25AM6
	7	0	0	0	0	0	0	16A3
	8	0	0	0	0	0	0	16A4
	9	0	0	0	0	0	0	16AM3
	10	0	0	0	0	0	0	16AM4
	11	0	0	0	0	0	0	16AM6
	12	0	0	0	0	0	0	16AM8
	13	0	0	0	0	0	0	17A10
	14	0	0	0	0	0	0	17A3
	15	0	0	0	0	0	0	17A7
Total N								15
1--4	1	0	0	0	0	0	1	14AM5
	2	0	0	0	0	0	0	15A1
	3	0	0	0	0	0	1	15A4
	4	0	0	0	0	0	0	25A3
	5	0	0	1	0	0	0	25AM4
	6	0	0	1	0	0	0	26A4
	7	0	0	0	0	0	1	16AM2
	8	0	0	0	0	0	0	17A4
	9	0	0	0	0	0	1	17A8
Total N								9
2--3	1	1	0	1	0	0	0	14A3
	2	0	0	1	0	0	0	24A5
	3	0	0	0	0	0	2	17A9
Total N								3
2--4	1	0	0	0	0	1	1	14A6
	2	0	0	0	0	2	0	24A6
	3	0	0	0	0	0	2	14AM3
	4	0	0	0	0	0	0	15A2
	5	0	0	0	0	0	0	15AM2

Continúa en la página siguiente . . .

Tabla B.32: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.

... viene de la página anterior.

<b>SumaInt</b> – <b>SumaL</b>		<b>n42</b>	<b>n43</b>	<b>n52</b>	<b>n53</b>	<b>n62</b>	<b>n63</b>	<b>clave</b>
	6	0	0	0	0	0	0	16A2
	7	0	0	0	0	0	0	16AM7
	Total N							7
	Total N							10
3--3	1	0	0	2	0	0	0	23AM4
	2	0	0	1	0	1	1	14A5
	3	0	0	1	0	0	0	24AM2
	4	0	0	2	0	0	1	15AM3
	5	0	2	0	0	0	0	16A6
	Total N							5
3--4	1	0	0	3	0	0	0	14AM4
	2	0	0	0	0	0	3	26A2
	3	0	0	0	0	0	3	17A1
	Total N							3
	Total N							8
4--3	1	0	0	0	0	1	1	13AM5
	2	0	0	0	2	2	0	14AM2
	3	0	0	0	0	0	3	15A3
	4	0	0	0	0	3	0	26A5
	Total N							4
4--4	1	0	0	0	0	1	3	24A3
	Total N							1
	Total N							5
5--3	1	0	0	3	1	0	1	13AM2
	2	0	0	2	0	0	3	23AM6
	3	0	0	4	0	0	1	24AM4
	Total N							3
5--2	1	0	0	1	1	0	1	14AM1
	2	0	1	2	0	0	2	25AM5
	Total N							2
5--4	1	0	5	0	0	0	0	15A5
	2	0	0	0	0	0	0	16AM1
	Total N							2
5--0	1	0	1	0	1	0	1	26A1

Continúa en la página siguiente ...

Tabla B.32: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.

... viene de la página anterior.

<b>SumaInt</b>		<b>n42</b>	<b>n43</b>	<b>n52</b>	<b>n53</b>	<b>n62</b>	<b>n63</b>	<b>clave</b>
<b>-</b>								
<b>SumaL</b>								
	Total N							1
	Total N							8
6--1	1	0	1	1	1	1	1	13AM1
	Total N							1
6--3	1	0	0	0	0	0	3	25A2
	Total N							1
	Total N							2
7--2	1	1	0	0	0	2	0	13AM4
	2	1	3	0	0	1	0	25A4
	Total N							2
7--4	1	0	0	0	0	4	3	14A4
	2	0	0	0	0	0	0	16A5
	Total N							2
7--1	1	1	1	0	1	1	0	25A5
	2	0	0	1	1	1	1	26A3
	Total N							2
	Total N							6
8--1	1	1	0	0	2	2	0	23AM2
	2	1	0	2	1	3	0	24AM3
	Total N							2
8--2	1	0	3	2	0	0	0	23AM3
	2	1	0	0	0	4	1	24A4
	3	0	0	0	1	1	1	17A6
	Total N							3
	Total N							5
9--2	1	0	0	5	0	1	1	23AM5
	Total N							1
9--3	1	0	0	7	0	0	0	24A1
	Total N							1
	Total N							2
10--2	1	0	1	0	0	0	2	14A2
	2	0	0	0	0	2	0	16AM5
	Total N							2
10--3	1	0	0	0	1	0	0	25A1

Continúa en la página siguiente ...

Tabla B.32: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.

... viene de la página anterior.

SumaInt		n42	n43	n52	n53	n62	n63	clave
–								
SumaL								
	Total N							1
	Total N							3
14--1	1	4	0	2	6	0	1	13AM3
	2	0	0	2	2	0	2	25AM3
	Total N							2
19--1	1	4	0	1	1	3	0	24AM6
	Total N							1
Total								76

Tabla B.32: Clasificación de los sujetos según los valores de SumaInt y SumaL en orden lineal. Desglose de intentos erróneos en las tareas cuarta, quinta y sexta.

**Observación.** En el gráfico B.8 y con más precisión en la tabla B.31, observamos que solamente seis sujetos cometen diez o más errores. éstos, además del sujeto del grupo 7A que comete ocho errores, presentan las máximas desviaciones respecto de los intervalos de errores correspondientes a los respectivos grupos de edad. Y todos se hallan en el *nivel 1* en lo que a los resultados se refiere, salvo el sujeto del grupo 5A que se halla en el *nivel 2*. Todos ellos cometieron siete o más errores en una sola tarea, normalmente en la segunda o la tercera, salvo el sujeto del grupo 6AM que cometió cuatro en ambas y otro del grupo 3AM que cometió ocho en la quinta.

Por tanto es característico de estos sujetos cometer un elevado número de errores en una o dos tareas, normalmente en las dos primeras, insistiendo sin reconocer tales errores. Todos alcanzan el *nivel 1*, salvo un sujeto que alcanza el *nivel 2* y, salvo en el 6A, encontramos uno de estos sujetos en cada grupo de edad.

Por otra parte, el *nivel 3* en los resultados se alcanza excepcionalmente por dos sujetos de cuatro y seis años, que cometen siete errores en una sola tarea, la última y la primera respectivamente.

Este nivel se alcanza también por sujetos que cometen cinco errores, dos sujetos; cuatro errores, un sujeto; tres errores, tres sujetos, *en una sola tarea*, es decir, por sujetos que insisten en los errores sin reconocerlos.

Son en total ocho sujetos, frente a los treinta y uno del mismo nivel que no cometen errores o cometen, a lo más, dos.

Las tareas multimedia realizadas con ordenadores revelan claramente este

comportamiento. No creemos que sea característico de las mismas; creemos, sin embargo, que el reconocimiento de los errores es esencial para el aprendizaje, por lo que llamamos la atención sobre este fenómeno que, aunque es más acusado en los sujetos del nivel inferior, se produce también en los del nivel superior.

Los siguientes gráficos, B.9 y B.10, muestran los números medios de intentos erróneos por grupos de edad en las tareas de orden lineal.

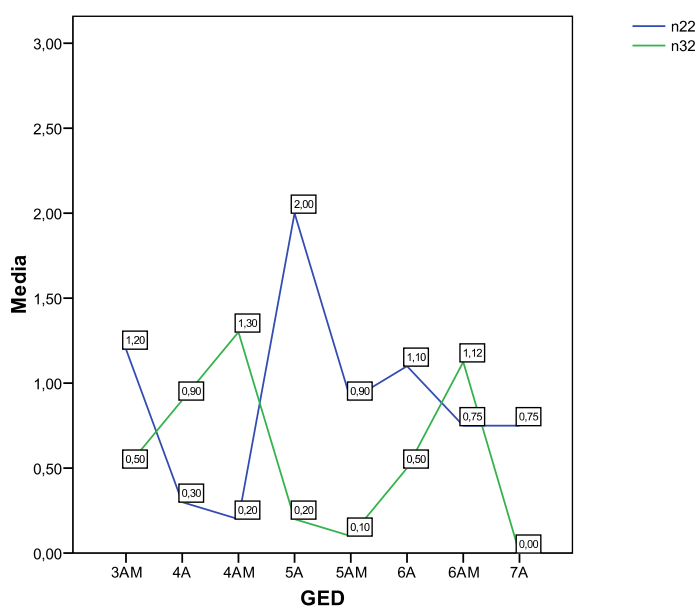


Fig. B.9. Números medios de intentos erróneos por grupos de edad en las tareas segunda y tercera de orden lineal.

Nótese que a partir de los cinco años, salvo en el grupo *6AM* que presenta una leve oscilación, las medias de errores son apreciablemente mayores en la segunda tarea, concepto *antes que*, que en la tercera, concepto *después que*. Pensamos que ello es debido al aprendizaje conseguido por los sujetos.

El grupo *3AM* sigue el mismo patrón anterior. Sin embargo, en los grupos *4A* y *4AM*, como en el *6AM*, sucede lo contrario. Consideramos que esto es debido a pérdidas de atención o al incremento en la carga cognitiva que se producen al pasar de una tarea a otra de entorno virtual formalmente idéntico, siendo conceptualmente distintas. La segunda plantea la aplicación correcta del concepto *antes que* y la tercera la del concepto *después que*.

En las tres tareas de reconocimiento de series, la tendencia en las medias

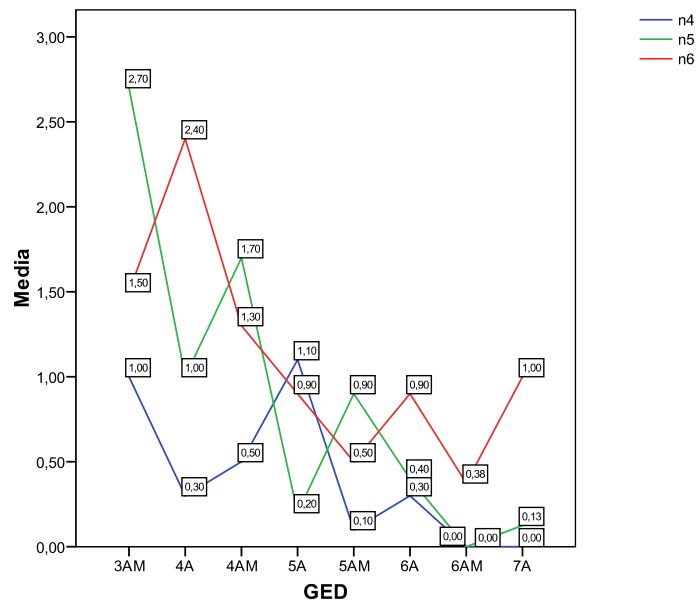


Fig. B.10. Números medios de intentos erróneos por grupos de edad en las tareas cuarta, quinta y sexta de orden lineal.

de errores consiste en que las más bajas se producen en la cuarta tarea, identificación de la serie de tres elementos, las intermedias en la quinta, identificación de la serie de cuatro, y las más altas en la sexta, identificación de la serie de cuatro partiendo de posiciones intermedias.

Son excepción a esta regla, el grupo *5A* con las mayores medias de errores en la identificación de la serie de tres elementos; y los grupos *3AM*, *4AM* y *5AM* con las mayores medias de errores en la identificación de la serie de cuatro. Pensamos que ello es debido, en el primer grupo, a pérdidas de atención o al incremento en la carga cognitiva que se producen en el cambio de tipo tareas, identificación de series mediante un elemento (*conceptos antes que y después que* frente a la identificación de series completas; y en los otros tres, a los mismos motivos, debido al aumento en la cantidad de información a analizar en el cambio en la identificación de la serie de tres a la de cuatro elementos.

El aprendizaje conseguido disminuye la media de errores *en la tarea siguiente* en los cuatro grupos de edad\*.

\*Nótese que para el grupo *5A* vuelve a producirse un incremento en la media de errores en la sexta tarea, lo que apunta a las limitaciones de la memoria de trabajo de los sujetos

*B.3.3 Datos sobre modelos de ajuste***AJUSTE EDG-MErrores****Modelo Logarítmico****Resumen del modelo**

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,956	,914	,900	,545

**ANOVA**

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	18,928	1	18,928	63,744	,000
Residual	1,782	6	,297		
Total	20,709	7			

**Coefficientes**

	Coeficientes no estandarizados		Coef. Est.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
ln(EDG)	-6,812	,853	-,956	-7,984	,000
(Constante)	15,005	1,407		10,666	,000

**Modelo Inverso****Resumen del modelo**

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,959	,920	,907	,526



## ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	19,050	1	19,050	68,872	,000
Residual	1,660	6	,277		
Total	20,709	7			

## Coeficientes

	Coeficientes no estandarizados		Coef. Est.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
1 / EDG	33,302	4,013	,959	8,299	,000
(Constante)	-2,795	,825		-3,386	,015

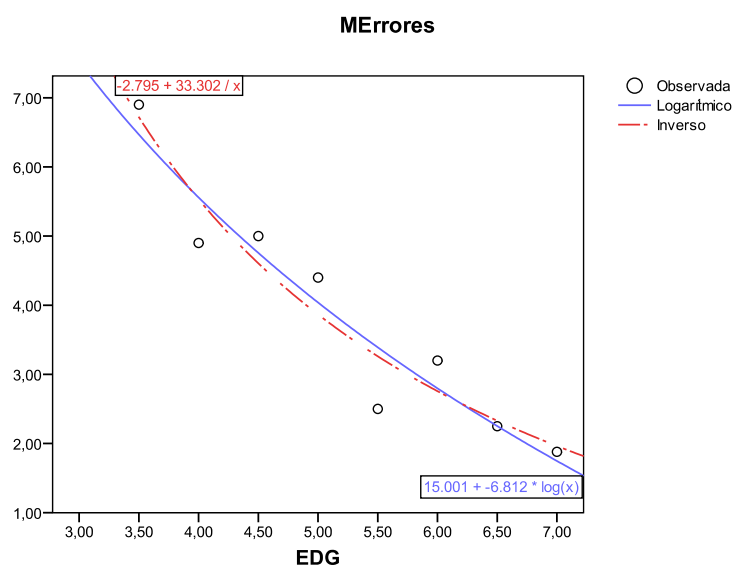


Fig. B.11. Ajuste de *EDG-MErreros* mediante modelos logarítmico e inverso en orden lineal.

**AJUSTE MErrores-MediaL****Modelo Lineal****Resumen del modelo**

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,960	,921	,908	,208

**ANOVA**

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	3,006	1	3,006	69,679	,000
Residual	,259	6	,043		
Total	3,265	7			

**Coefficientes**

	Coeficientes no estandarizados		Coefi. Est.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
MErrores	-,381	,046	-,960	-8,347	,000
(Constante)	4,846	,192		25,288	,000

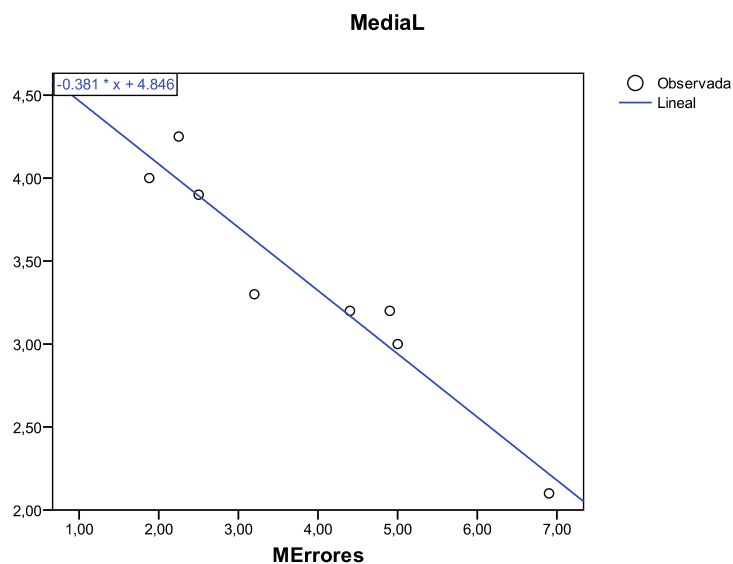


Fig. B.12. Ajuste de *MErrores*-*MediaL* mediante un modelo lineal. Tareas de orden lineal infralógico.

### AJUSTE MediaTL-MErrores

#### Modelo Lineal

#### Resumen del modelo

R	R <sup>2</sup>	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
,903	,815	,784	,799

#### ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	16,879	1	16,879	26,443	,002
Residual	3,830	6	,638		
Total	20,709	7			

#### Coefficientes

	Coefficients no estandarizados		Coef. est.	t	Sig.
	B	Error típico	Beta	B	Error típico
MediaTL	2,113	,411	,903	5,142	,002
(Constante)	-1,440	1,072		-1,343	,228

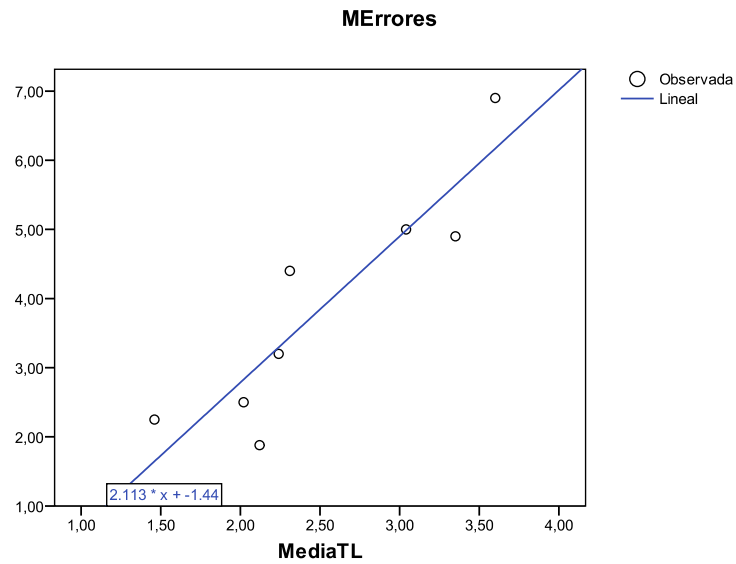


Fig. B.13. Ajuste de *MErreros*–*MediaTL* mediante mediante un modelo lineal. Tareas de orden lineal infralógico.

## Anexo C

# DATOS COMPLEMENTARIOS DE LAS TAREAS DE ORDEN CON CANTIDADES CONTINUAS

### C.1 Valoración de las tareas.

SumCC-Casos	EvCC2	EvCC3	EvCC4	EvCC5	EvCC6	Clave
0	1	0	0	0	0	23AM2
<b>Total N</b>						<b>1</b>
1	1	1	0	0	0	13AM1
	2	1	0	0	0	13AM2
	3	0	1	0	0	13AM3
	4	0	1	0	0	23AM6
	5	1	0	0	0	14A6
	6	1	0	0	0	15AM2
<b>Total N</b>						<b>6</b>
1,5	1	1	0	0,5	0	14AM3
	2	1	0	0	0	0,5 24AM2
	3	0	0	0,5	0	1 24AM6
	4	1	0	0,5	0	15A1
	5	1	0	0	0	0,5 15A3
	6	1	0	0,5	0	25AM5
<b>Total N</b>						<b>6</b>
2	1	1	1	0	0	13AM5
	2	1	1	0	0	23AM3
	3	1	0	0	0,5	0,5 14A2
	4	1	1	0	0	14A3
	5	1	1	0	0	14A4

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.1: Valoración de las respuestas de los sujetos en las tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

SumCC-Casos	EvCC2	EvCC3	EvCC4	EvCC5	EvCC6	Clave
6	1	1	0	0	0	14A5
7	1	1	0	0	0	15A2
8	1	0	1	0	0	25A1
9	1	1	0	0	0	25AM3
10	1	1	0	0	0	26A1
11	1	0	1	0	0	16AM2
<b>Total N</b>						<b>11</b>
2,5	1	1	0,5	0	0	13AM4
2	1	0	0,5	1	0	24A1
3	1	0	0,5	0	1	24A3
4	1	1	0,5	0	0	24A5
5	1	1	0,5	0	0	14AM1
6	1	0	0,5	1	0	14AM2
7	1	0	1	0,5	0	14AM4
8	1	1	0	0,5	0	24AM4
9	1	1	0	0	0,5	26A5
10	1	1	0,5	0	0	16AM8
<b>Total N</b>						<b>10</b>
3	1	1	0,5	0,5	0	23AM4
2	1	0	1	0	1	23AM5
3	1	1	0	0,5	0,5	24A6
4	1	1	0,5	0,5	0	14AM5
5	1	0	1	1	0	15A5
6	1	1	1	0	0	25A2
7	1	1	1	0	0	25A3
8	1	1	1	0	0	25A5
9	1	1	0	0,5	0,5	15AM4
10	1	1	1	0	0	25AM4
11	1	1	1	0	0	16A3
12	1	1	1	0	0	16A4
13	1	1	1	0	0	16A5
14	1	1	1	0	0	26A3
15	0	1	0,5	1	0,5	26A4
16	1	1	1	0	0	16AM4
17	1	1	0,5	0	0,5	17A10
18	1	1	1	0	0	17A4

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.1: Valoración de las respuestas de los sujetos en las tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.						
SumCC-Casos	EvCC2	EvCC3	EvCC4	EvCC5	EvCC6	Clave
19	1	1	1	0	0	17A6
20	1	1	1	0	0	17A7
21	1	1	1	0	0	17A8
<b>Total N</b>						<b>21</b>
3,5	1	1	0,5	1	0	24A4
2	1	1	1	0,5	0	24AM1
3	1	1	0,5	0,5	0,5	15A4
4	1	1	1	0,5	0	25A4
5	1	0	0,5	1	1	25AM1
6	1	1	1	0,5	0	16A6
7	1	1	1	0	0,5	16AM1
8	1	1	1	0	0,5	16AM5
9	1	0	1	1	0,5	17A1
10	1	1	1	0	0,5	17A3
<b>Total N</b>						<b>10</b>
4	1	1	1	0	1	24AM3
2	1	1	1	0,5	0,5	15AM3
3	1	0	1	1	1	15AM5
4	1	1	1	0,5	0,5	25AM6
5	1	1	0,5	1	0,5	26A2
6	1	1	1	0,5	0,5	16AM6
7	1	1	1	1	0	16AM7
8	1	0	1	1	1	17A9
<b>Total N</b>						<b>8</b>
4,5	1	1	1	1	0,5	15AM1
2	1	1	1	1	0,5	16A2
3	1	1	1	1	0,5	16AM3
<b>Total N</b>						<b>3</b>
<b>Total</b>						<b>76</b>

Tabla C.1: Valoración de las respuestas de los sujetos en las tareas de orden con cantidades continuas.

### C.2 Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.

Niv.	SCC	Caso	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	Clave
1	,0	1	,0	,0	,0	,0	,0	23AM2
		<b>Total</b>						<b>1</b>
	1	1	1	0	0	0	0	13AM1
		2	1	0	0	0	0	13AM2
		3	0	1	0	0	0	13AM3
		4	0	1	0	0	0	23AM6
		5	1	0	0	0	0	14A6
		6	1	0	0	0	0	15AM2
		<b>Total</b>						<b>6</b>
	1,5	1	1	0	0,5	0	0	14AM3
		2	1	0	0	0	0,5	24AM2
		3	0	0	0,5	0	1	24AM6
		4	1	0	0,5	0	0	15A1
		5	1	0	0	0	0,5	15A3
		6	1	0	0,5	0	0	25AM5
		<b>Total</b>						<b>6</b>
	2	1	1	1	0	0	0	13AM5
		2	1	1	0	0	0	23AM3
		3	1	0	0	0,5	0,5	14A2
		4	1	1	0	0	0	14A3
		5	1	1	0	0	0	14A4
		6	1	1	0	0	0	14A5
		7	1	1	0	0	0	15A2
		8	1	0	1	0	0	25A1
		9	1	1	0	0	0	25AM3
		10	1	1	0	0	0	26A1
		11	1	0	1	0	0	16AM2
		<b>Total</b>						<b>11</b>
	<b>Total</b>							<b>24</b>
2	2,5	1	1	1	0,5	0	0	13AM4
		2	1	0	0,5	1	0	24A1
		3	1	0	0,5	0	1	24A3
		4	1	1	0,5	0	0	24A5

Continúa en la página siguiente . . .

Tabla C.2: Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.



... viene de la página anterior.

Niv.	SCC	Caso	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	Clave
		5	1	1	0,5	0	0	14AM1
		6	1	0	0,5	1	0	14AM2
		7	1	0	1	0,5	0	14AM4
		8	1	1	0	0,5	0	24AM4
		9	1	1	0	0	0,5	26A5
		10	1	1	0,5	0	0	16AM8
		<b>Total</b>						<b>10</b>
3		1	1	1	0,5	0,5	0	23AM4
		2	1	0	1	0	1	23AM5
		3	1	1	0	0,5	0,5	24A6
		4	1	1	0,5	0,5	0	14AM5
		5	1	0	1	1	0	15A5
		6	1	1	1	0	0	25A2
		7	1	1	1	0	0	25A3
		8	1	1	1	0	0	25A5
		9	1	1	0	0,5	0,5	15AM4
		10	1	1	1	0	0	25AM4
		11	1	1	1	0	0	16A3
		12	1	1	1	0	0	16A4
		13	1	1	1	0	0	16A5
		14	1	1	1	0	0	26A3
		15	0	1	0,5	1	0,5	26A4
		16	1	1	1	0	0	16AM4
		17	1	1	0,5	0	0,5	17A10
		18	1	1	1	0	0	17A4
		19	1	1	1	0	0	17A6
		20	1	1	1	0	0	17A7
		21	1	1	1	0	0	17A8
		<b>Total</b>						<b>21</b>
	<b>Total</b>							<b>31</b>
3	3,5	1	1	1	0,5	1	0	24A4
		2	1	1	1	0,5	0	24AM1
		3	1	1	0,5	0,5	0,5	15A4
		4	1	1	1	0,5	0	25A4
		5	1	0	0,5	1	1	25AM1
		6	1	1	1	0,5	0	16A6

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.2: Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

Niv.	SCC	Caso	ECC2	ECC3	ECC4	ECC5	ECC6	Clave
		7	1	1	1	0	0,5	16AM1
		8	1	1	1	0	0,5	16AM5
		9	1	0	1	1	0,5	17A1
		10	1	1	1	0	0,5	17A3
		<b>Total</b>						<b>10</b>
	4	1	1	1	1	0	1	24AM3
		2	1	1	1	0,5	0,5	15AM3
		3	1	0	1	1	1	15AM5
		4	1	1	1	0,5	0,5	25AM6
		5	1	1	0,5	1	0,5	26A2
		6	1	1	1	0,5	0,5	16AM6
		7	1	1	1	1	0	16AM7
		8	1	0	1	1	1	17A9
		<b>Total</b>						<b>8</b>
	4,5	1	1	1	1	1	0,5	15AM1
		2	1	1	1	1	0,5	16A2
		3	1	1	1	1	0,5	16AM3
		<b>Total</b>						<b>3</b>
	<b>Total</b>							<b>21</b>
	<b>Total</b>							<b>76</b>

Tabla C.2: Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades continuas.

**C.3 Estrategias de los sujetos en orden con cantidades continuas.**

Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6	SumCC	NivelCC
13AM1	3AM	D	EE	EE	N	X	1,00	1
13AM2	3AM	C	EE	N	X	X	1,00	1
13AM3	3AM	EE	D	N	ID	X	1,00	1
13AM4	3AM	D	D	D	EE	X	2,50	2
13AM5	3AM	D	D	EE	N	X	2,00	1
23AM2	3AM	EE	EE	EE	X	X	,00	1
23AM3	3AM	D	D	EE	EE	X	2,00	1
23AM4	3AM	D	C	D1	C1	N	3,00	2
23AM5	3AM	C	EE	C	EE	D	3,00	2
23AM6	3AM	EE	D	EE	EE	X	1,00	1
14A2	4A	C	EE	EE	C	C1	2,00	1
14A3	4A	D	D	EE	EE	X	2,00	1
14A4	4A	D	D	EE	ID	X	2,00	1
14A5	4A	D	D	EE	C1	N	2,00	1
14A6	4A	D	EE	EE	X	X	1,00	1
24A1	4A	D	EE	D1	C	EE	2,50	2
24A3	4A	D	EE	D	DI	D	2,50	2
24A4	4A	D	C	D	C	D1	3,50	3
24A5	4A	C	D	C1	ID	EE	2,50	2
24A6	4A	D	D	EE	C1	C1	3,00	2
14AM1	4AM	D	D	D1	ID	ID	2,50	2
14AM2	4AM	C	EE	D1	C	N	2,50	2
14AM3	4AM	D	EE	D	ID	N	1,50	1
14AM4	4AM	D	EE	D	C1	ID	2,50	2
14AM5	4AM	D	D	D	C1	N	3,00	2
24AM1	4AM	D	D	C	C1	N	3,50	3
24AM2	4AM	C	EE	EE	EE	D2	1,50	1
24AM3	4AM	C	C	C	N	C	4,00	3
24AM4	4AM	D	D	EE	D	N	2,50	2
24AM6	4AM	EE	EE	C	EE	C	1,50	1
15A1	5A	C	EE	D	ID	ID	1,50	1
15A2	5A	C	D	EE	EE	ID	2,00	1
15A3	5A	D	EE	EE	DI	D1	1,50	1
15A4	5A	C	D	D	D	C1	3,50	3
15A5	5A	C	EE	C	C	N	3,00	2

Continua en la página siguiente ...

Tabla C.3: Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6	SumCC	NivelCC
25A1	5A	C	EE	D	ID	ID	2,00	1
25A2	5A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
25A3	5A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
25A4	5A	C	D	D	C1	C1	3,50	3
25A5	5A	C	D	D	ID	DI	3,00	2
15AM1	5AM	D	D	D	D	D1	4,50	3
15AM2	5AM	C	EE	EE	ID	N	1,00	1
15AM3	5AM	C	D	D	C1	C1	4,00	3
15AM4	5AM	C	D	N	C	C1	3,00	2
15AM5	5AM	C	EE	C	C	C	4,00	3
25AM1	5AM	C	EE	C	C	C	3,50	3
25AM3	5AM	D	D	N	ID	ID	2,00	1
25AM4	5AM	C	D	D	ID	ID	3,00	2
25AM5	5AM	C	EE	D	ID	ID	1,50	1
25AM6	5AM	C	D	D	C1	D2	4,00	3
16A2	6A	D	C	C	C	C1	4,50	3
16A3	6A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
16A4	6A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
16A5	6A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
16A6	6A	C	D	C	C1	DI	3,50	3
26A1	6A	D	C	N	DI	C1	2,00	1
26A2	6A	D	D	C1	C	C1	4,00	3
26A3	6A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
26A4	6A	EE	D	D	D	C2	3,00	2
26A5	6A	C	D	N	ID	C1	2,50	2
16AM1	6AM	D	D	D	DI	D2	3,50	3
16AM2	6AM	C	EE	D	ID	ID	2,00	1
16AM3	6AM	C	C	C	C	C1	4,50	3
16AM4	6AM	C	D	D	ID	ID	3,00	2
16AM5	6AM	C	D	D	ID	D1	3,50	3
16AM6	6AM	C	D	C	C1	C1	4,00	3
16AM7	6AM	C	D	D	C	EE	4,00	3
16AM8	6AM	D	D	D	ID	ID	2,50	2
17A1	7A	C	EE	C	C	C1	3,50	3
17A10	7A	C	D	D1	ID	D1	3,00	2
17A3	7A	C	D	D	ID	C1	3,50	3

Continua en la página siguiente ...

Tabla C.3: Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6	SumCC	NivelCC
17A4	7A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
17A6	7A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
17A7	7A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
17A8	7A	C	D	D	ID	ID	3,00	2
17A9	7A	C	EE	C	C	C	4,00	3

Tabla C.3: Estrategias de los sujetos. Tareas de orden con cantidades continuas. (Continuación).

SumCC	Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6
,00	23AM2	3AM	EE	EE	EE	X	X
1,00	13AM1	3AM	D	EE	EE	N	X
	13AM2	3AM	C	EE	N	X	X
	13AM3	3AM	EE	D	N	ID	X
	23AM6	3AM	EE	D	EE	EE	X
	14A6	4A	D	EE	EE	X	X
	15AM2	5AM	C	EE	EE	ID	N
1,50	14AM3	4AM	D	EE	D	ID	N
	24AM2	4AM	C	EE	EE	EE	D2
	24AM6	4AM	EE	EE	C	EE	C
	15A1	5A	C	EE	D	ID	ID
	15A3	5A	D	EE	EE	DI	D1
	25AM5	5AM	C	EE	D	ID	ID
2,00	13AM5	3AM	D	D	EE	N	X
	23AM3	3AM	D	D	EE	EE	X
	14A2	4A	C	EE	EE	C	C1
	14A3	4A	D	D	EE	EE	X
	14A4	4A	D	D	EE	ID	X
	14A5	4A	D	D	EE	C1	N
	15A2	5A	C	D	EE	EE	ID
	25A1	5A	C	EE	D	ID	ID
	25AM3	5AM	D	D	N	ID	ID
	26A1	6A	D	C	N	DI	C1
	16AM2	6AM	C	EE	D	ID	ID

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.4: Estrategias de los sujetos según los valores de la variable *SumaCC*. Tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

SumCC	Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6
2,50	13AM4	3AM	D	D	D	EE	X
	24A1	4A	D	EE	D1	C	EE
	24A3	4A	D	EE	D	DI	D
	24A5	4A	C	D	C1	ID	EE
	14AM1	4AM	D	D	D1	ID	ID
	14AM2	4AM	C	EE	D1	C	N
	14AM4	4AM	D	EE	D	C1	ID
	24AM4	4AM	D	D	EE	D	N
	26A5	6A	C	D	N	ID	C1
	16AM8	6AM	D	D	D	ID	ID
3,00	23AM4	3AM	D	C	D1	C1	N
	23AM5	3AM	C	EE	C	EE	D
	24A6	4A	D	D	EE	C1	C1
	14AM5	4AM	D	D	D	C1	N
	15A5	5A	C	EE	C	C	N
	25A2	5A	C	D	D	ID	ID
	25A3	5A	C	D	D	ID	ID
	25A5	5A	C	D	D	ID	DI
	15AM4	5AM	C	D	N	C	C1
	25AM4	5AM	C	D	D	ID	ID
	16A3	6A	C	D	D	ID	ID
	16A4	6A	C	D	D	ID	ID
	16A5	6A	C	D	D	ID	ID
	26A3	6A	C	D	D	ID	ID
	26A4	6A	EE	D	D	D	C2
	16AM4	6AM	C	D	D	ID	ID
	17A10	7A	C	D	D1	ID	D1
	17A4	7A	C	D	D	ID	ID
	17A6	7A	C	D	D	ID	ID
	17A7	7A	C	D	D	ID	ID
17A8	7A	C	D	D	ID	ID	
3,50	24A4	4A	D	C	D	C	D1
	24AM1	4AM	D	D	C	C1	N
	15A4	5A	C	D	D	D	C1
	25A4	5A	C	D	D	C1	C1
	25AM1	5AM	C	EE	C	C	C

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.4: Estrategias de los sujetos según los valores de la variable *SumaCC*. Tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

SumCC	Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6
	16A6	6A	C	D	C	C1	DI
	16AM1	6AM	D	D	D	DI	D2
	16AM5	6AM	C	D	D	ID	D1
	17A1	7A	C	EE	C	C	C1
	17A3	7A	C	D	D	ID	C1
4,00	24AM3	4AM	C	C	C	N	C
	15AM3	5AM	C	D	D	C1	C1
	15AM5	5AM	C	EE	C	C	C
	25AM6	5AM	C	D	D	C1	D2
	26A2	6A	D	D	C1	C	C1
	16AM6	6AM	C	D	C	C1	C1
	16AM7	6AM	C	D	D	C	EE
	17A9	7A	C	EE	C	C	C
4,50	15AM1	5AM	D	D	D	D	D1
	16A2	6A	D	C	C	C	C1
	16AM3	6AM	C	C	C	C	C1

Tabla C.4: Estrategias de los sujetos según los valores de la variable *SumaCC*. Tareas de orden con cantidades continuas.

NivelCC	Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6
1	13AM1	3AM	D	EE	EE	N	X
	13AM2	3AM	C	EE	N	X	X
	13AM3	3AM	EE	D	N	ID	X
	13AM5	3AM	D	D	EE	N	X
	23AM2	3AM	EE	EE	EE	X	X
	23AM3	3AM	D	D	EE	EE	X
	23AM6	3AM	EE	D	EE	EE	X
	14A2	4A	C	EE	EE	C	C1
	14A3	4A	D	D	EE	EE	X
	14A4	4A	D	D	EE	ID	X
	14A5	4A	D	D	EE	C1	N
	14A6	4A	D	EE	EE	X	X
	14AM3	4AM	D	EE	D	ID	N
	24AM2	4AM	C	EE	EE	EE	D2

Continua en la página siguiente ...

Tabla C.5: Estrategias de los sujetos según los valores de la variable *NivelCC*. Tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

NivelCC	Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6
	24AM6	4AM	EE	EE	C	EE	C
	15A1	5A	C	EE	D	ID	ID
	15A2	5A	C	D	EE	EE	ID
	15A3	5A	D	EE	EE	DI	D1
	25A1	5A	C	EE	D	ID	ID
	15AM2	5AM	C	EE	EE	ID	N
	25AM3	5AM	D	D	N	ID	ID
	25AM5	5AM	C	EE	D	ID	ID
	26A1	6A	D	C	N	DI	C1
	16AM2	6AM	C	EE	D	ID	ID
<b>2</b>	13AM4	3AM	D	D	D	EE	X
	23AM4	3AM	D	C	D1	C1	N
	23AM5	3AM	C	EE	C	EE	D
	24A1	4A	D	EE	D1	C	EE
	24A3	4A	D	EE	D	DI	D
	24A5	4A	C	D	C1	ID	EE
	24A6	4A	D	D	EE	C1	C1
	14AM1	4AM	D	D	D1	ID	ID
	14AM2	4AM	C	EE	D1	C	N
	14AM4	4AM	D	EE	D	C1	ID
	14AM5	4AM	D	D	D	C1	N
	24AM4	4AM	D	D	EE	D	N
	15A5	5A	C	EE	C	C	N
	25A2	5A	C	D	D	ID	ID
	25A3	5A	C	D	D	ID	ID
	25A5	5A	C	D	D	ID	DI
	15AM4	5AM	C	D	N	C	C1
	25AM4	5AM	C	D	D	ID	ID
	16A3	6A	C	D	D	ID	ID
	16A4	6A	C	D	D	ID	ID
	16A5	6A	C	D	D	ID	ID
	26A3	6A	C	D	D	ID	ID
	26A4	6A	EE	D	D	D	C2
	26A5	6A	C	D	N	ID	C1
	16AM4	6AM	C	D	D	ID	ID
	16AM8	6AM	D	D	D	ID	ID

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.5: Estrategias de los sujetos según los valores de la variable *NivelCC*. Tareas de orden con cantidades continuas.



... viene de la página anterior.

NivelCC	Clave	GED	SCC2	SCC3	SCC4	SCC5	SCC6
	17A10	7A	C	D	D1	ID	D1
	17A4	7A	C	D	D	ID	ID
	17A6	7A	C	D	D	ID	ID
	17A7	7A	C	D	D	ID	ID
	17A8	7A	C	D	D	ID	ID
<b>3</b>	24A4	4A	D	C	D	C	D1
	24AM1	4AM	D	D	C	C1	N
	24AM3	4AM	C	C	C	N	C
	15A4	5A	C	D	D	D	C1
	25A4	5A	C	D	D	C1	C1
	15AM1	5AM	D	D	D	D	D1
	15AM3	5AM	C	D	D	C1	C1
	15AM5	5AM	C	EE	C	C	C
	25AM1	5AM	C	EE	C	C	C
	25AM6	5AM	C	D	D	C1	D2
	16A2	6A	D	C	C	C	C1
	16A6	6A	C	D	C	C1	DI
	26A2	6A	D	D	C1	C	C1
	16AM1	6AM	D	D	D	DI	D2
	16AM3	6AM	C	C	C	C	C1
	16AM5	6AM	C	D	D	ID	D1
	16AM6	6AM	C	D	C	C1	C1
	16AM7	6AM	C	D	D	C	EE
	17A1	7A	C	EE	C	C	C1
	17A3	7A	C	D	D	ID	C1
	17A9	7A	C	EE	C	C	C

Tabla C.5: Estrategias de los sujetos según los valores de la variable *NivelCC*. Tareas de orden con cantidades continuas.

## C.4 Uso de las piezas sobrantes

Clave	HPC3	HPC4	HPC5	HPC6	NTar	TarU	SumCC	NivelCC
13AM1		6	4		2	45	1,0	1
13AM2	3	6			2	34	1,0	1
13AM3			6		1	5	1,0	1
13AM4					0		2,5	2
13AM5		6			1	4	2,0	1
23AM2	4	5			2	34	,00	1
23AM3		65C46	465		2	45-C4	2,0	1
23AM4					0		3,0	2
23AM5	4		4		2	35	3,0	2
23AM6		65	4		2	45	1,0	1
14A2	34	6			2	34	2,0	1
14A3		6	6		2	45	2,0	1
14A4		6	6		2	45	2,0	1
14A5		6			1	4	2,0	1
14A6		6			1	4	1,0	1
24A1	3			C47	1	3-C6	2,5	2
24A3	4	6			2	34	2,5	2
24A4		5			1	4	3,5	3
24A5					0		2,5	2
24A6		6			1	4	3,0	2
14AM1					0		2,5	2
14AM2	3				1	3	2,5	2
14AM3	3	6			2	34	1,5	1
14AM4	3				1	3	2,5	2
14AM5		6			1	4	3,0	2
24AM1					0		3,5	3
24AM2	3	6	6		3	345	1,5	1
24AM3					0		4,0	3
24AM4		6			1	4	2,5	2
24AM6	3	6	5		3	345	1,5	1
15A1	3	6	6		3	345	1,5	1
15A2		6			1	4	2,0	1
15A3	3	6			2	34	1,5	1
15A4		6	6		2	45	3,5	3
15A5	4				1	3	3,0	2

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.6: Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

Clave	HPC3	HPC4	HPC5	HPC6	NTar	TarU	SumCC	NivelCC
25A1	34				1	3	2,0	1
25A2					0		3,0	2
25A3					0		3,0	2
25A4				C36	0	C6	3,5	3
25A5					0		3,0	2
15AM1					0		4,5	3
15AM2	3	6		8	3	346	1,0	1
15AM3					0		4,0	3
15AM4		6	6		2	45	3,0	2
15AM5	3				1	3	4,0	3
25AM1	3	C24			1	3-C4	3,5	3
25AM3		6	6		2	45	2,0	1
25AM4					0		3,0	2
25AM5	4	6			2	34	1,5	1
25AM6					0		4,0	3
16A2					0		4,5	3
16A3					0		3,0	2
16A4					0		3,0	2
16A5					0		3,0	2
16A6					0		3,5	3
26A1		6			1	4	2,0	1
26A2					0		4,0	3
26A3					0		3,0	2
26A4		6			1	4	3,0	2
26A5					0		2,5	2
16AM1					0		3,5	3
16AM2					0		2,0	1
16AM3					0		4,5	3
16AM4					0		3,0	2
16AM5					0		3,5	3
16AM6					0		4,0	3
16AM7				8	1	6	4,0	3
16AM8		6	6		2	45	2,5	2
17A1	34				1	3	3,5	3
17A10					0		3,0	2
17A3					0		3,5	3

Continúa en la página siguiente ...

Tabla C.6: Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades continuas.

... viene de la página anterior.

Clave	HPC3	HPC4	HPC5	HPC6	NTar	TarU	SumCC	NivelCC
17A4					0		3,0	2
17A6					0		3,0	2
17A7					0		3,0	2
17A8					0		3,0	2
17A9	4				1	3	4,0	3
<b>Total</b>	21	31	14	4	76	76		

Tabla C.6: Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades continuas. (Continuación).

(a)

GED	HPC3			
	0	3	34	4
3AM	70,0	10,0	,0	20,0
4A	70,0	10,0	10,0	10,0
4AM	50,0	50,0	,0	,0
5A	60,0	20,0	10,0	10,0
5AM	60,0	30,0	,0	10,0
6A	100,0	,0	,0	,0
6AM	100,0	,0	,0	,0
7A	75,0	,0	12,5	12,5
Total	72,4	15,8	3,9	7,9

(b)

GED	HPC4					
	0	5	6	65	65C46	C24
3AM	40,0	10,0	30,0	10,0	10,0	,0
4A	20,0	10,0	70,0	,0	,0	,0
4AM	50,0	,0	50,0	,0	,0	,0
5A	60,0	,0	40,0	,0	,0	,0
5AM	50,0	,0	40,0	,0	,0	10,0
6A	80,0	,0	20,0	,0	,0	,0
6AM	87,5	,0	12,5	,0	,0	,0
7A	100,0	,0	,0	,0	,0	,0
Total	59,2	2,6	34,2	1,3	1,3	1,3

(c)

GED	HPC5				
	0	4	465	5	6
3AM	50,0	30,0	10,0	,0	10,0
4A	80,0	,0	,0	,0	20,0
4AM	80,0	,0	,0	10,0	10,0
5A	80,0	,0	,0	,0	20,0
5AM	80,0	,0	,0	,0	20,0
6A	100,0	,0	,0	,0	,0
6AM	87,5	,0	,0	,0	12,5
7A	100,0	,0	,0	,0	,0
Total	81,6	3,9	1,3	1,3	11,8

(d)

GED	HPC6			
	0	8	C36	C47
3AM	100,0	,0	,0	,0
4A	90,0	,0	,0	10,0
4AM	100,0	,0	,0	,0
5A	90,0	,0	10,0	,0
5AM	90,0	10,0	,0	,0
6A	100,0	,0	,0	,0
6AM	87,5	12,5	,0	,0
7A	100,0	,0	,0	,0
Total	94,7	2,6	1,3	1,3

Tabla C.7. Destinos de las piezas sobrantes. Orden con cantidades continuas.  
Tareas: (a) tercera; (b) cuarta; (c) quinta; (d) sexta.

### C.5 Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad en orden con cantidades continuas

Los datos que aparecen a continuación muestran las características de los ajustes de la variable *MedCC* en función de la edad de los grupos mediante los modelos Inverso y de la curva *S*.

Modelo	$R$	$R^2$	$R^2$ corregida	Error típico de la estimación
Inverso	,980	,961	,954	,125
Curva <i>S</i>	,970	,941	,931	,063

Tabla C.8: Ajuste de *MedCC* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los datos del análisis de la varianza en ambos casos se recogen en la tabla C.9.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
<b>Inverso</b>					
Regresión	2,299	1	2,299	147,811	,000
Residual	,093	6	,016		
Total	2,393	7			
<b>Curva <i>S</i></b>					
Regresión	,375	1	,375	95,572	,000
Residual	,024	6	,004		
Total	,398	7			

Tabla C.9: ANOVA de los ajustes de *MedCC* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los coeficientes del modelo junto con sus significaciones al 95 % se muestran a continuación en la tabla C.10.

	Coeficientes no estandarizados		t	Sig.
	B	Error típico		
<b>Inverso</b>				
1 / EDG	-11,570	,952	-12,158	,000
Constante	5,053	,196	25,818	,000
<b>Curva S</b>				
1 / EDG	-4,671	,478	-9,776	,000
Constante	1,919	,098	19,529	,000

Tabla C.10: Coeficientes del ajuste de *MedCC* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Las tablas C.11 y C.12 recogen las edades de los grupos, los valores observados de la variable *MedCC*, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95 % para ambos modelos.

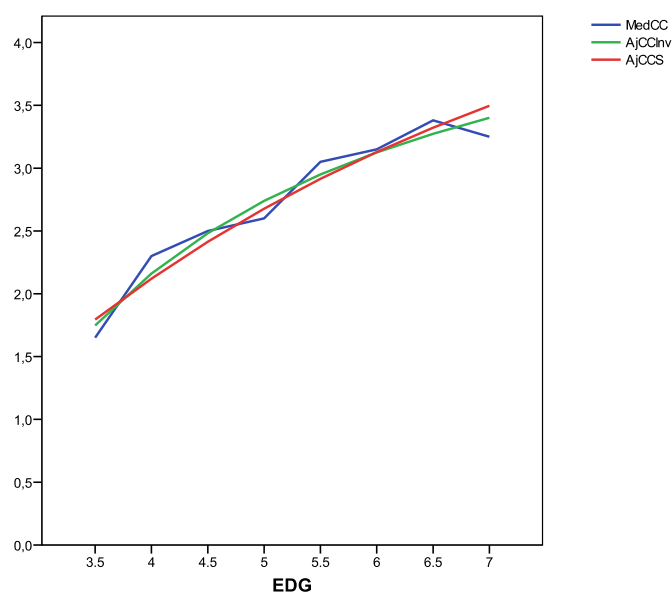
EDG	MedCC	AjCCI	ErrCCI	EICC95I	ESCC95I
3,5	1,65	1,74782	-,09782	1,36802	2,12763
4,0	2,30	2,16103	,13897	1,81734	2,50472
4,5	2,50	2,48241	,01759	2,15475	2,81008
5,0	2,60	2,73952	-,13952	2,41582	3,06322
5,5	3,05	2,94988	,10012	2,62331	3,27645
6,0	3,15	3,12518	,02482	2,79209	3,45826
6,5	3,38	3,27351	,10649	2,93215	3,61487
7,0	3,25	3,40065	-,15065	3,05032	3,75097

Tabla C.11: Datos del ajuste de *MedCC* mediante el modelo Inverso

EDG	MedCC	AjCCS	ErrCCS	EICC95S	ESCC95S
3,5	1,65	1,79421	-,14421	1,48274	2,17111
4,0	2,30	2,11990	,18010	1,78394	2,51912
4,5	2,50	2,41357	,08643	2,04748	2,84511
5,0	2,60	2,67753	-,07753	2,27593	3,14999
5,5	3,05	2,91483	,13517	2,47407	3,43412
6,0	3,15	3,12858	,02142	2,64682	3,69802
6,5	3,38	3,32163	,05837	2,79850	3,94255
7,0	3,25	3,49656	-,24656	2,93266	4,16891

Tabla C.12: Datos del ajuste de *MedCC* mediante la curva *S*

En el gráfico de la Figura C.1 se representan los valores observados de la variable *MedCC* y los ajustados mediante ambos modelos.

Fig. C.1. Ajuste de *MedCC* mediante los modelos Inverso y *S*.



Finalmente, el gráfico de la Figura C.2 muestra la independencia de los errores de los modelos y de los valores ajustados, lo que prueba también su significación.

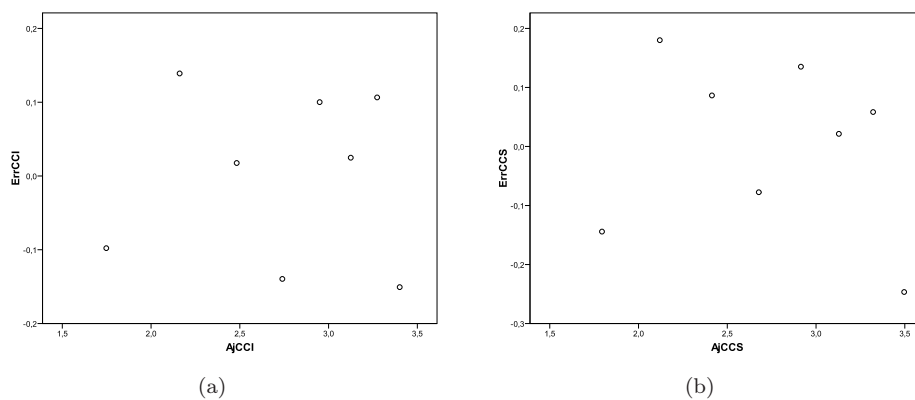


Fig. C.2. Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva  $S$  para *MedCC*.



## Anexo D

# DATOS COMPLEMENTARIOS DE LAS TAREAS DE ORDEN CON CANTIDADES DISCRETAS

### D.1 Valoración de las tareas.

SCCD5	Casos	EvCDi, i=2, 3, 4, 6, 7, 8						CoefCD	Clave
		2	3	4	6	7	8		
,0	1	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	13AM3
	2	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	13AM4
	3	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	23AM4
	4	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	23AM5
	5	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	23AM6
	6	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	14A3
	7	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	14A5
	8	,0	,0	,0	1,0	,50	,0	,0	14A6
	9	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	24A6
	10	,0	,0	,0	1,0	,50	1,0	,0	14AM3
	11	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	24AM1
	12	,0	,0	,0	,0	,0	,0	,0	24AM6
	13	,0	,0	,0	1,0	1,0	,50	,0	25AM4
	14	,0	,0	,0	1,0	1,0	,0	,0	26A2
<b>Total</b>								<b>14</b>	
,42	1	,0	,0	,50	1,0	,0	,0	,0	13AM1
	2	,0	,5	,0	1,0	,0	,0	,0	23AM2
	3	,5	,0	,0	1,0	,50	,0	,0	14A2
	4	,0	,0	,50	1,0	,50	,0	,0	14AM5
	5	,0	,0	,50	1,0	1,0	,0	,0	16A2
	6	,0	,0	,50	,0	,0	,0	,0	16AM5

Continúa en la página siguiente . . .

Tabla D.1: Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

SCCD5	Casos	EvCDi, i=2, 3, 4, 6, 7, 8						CoefCD	Clave
		2	3	4	6	7	8		
	7	,5	,0	,0	1,0	1,0	1,0	,0	17A10
	<b>Total</b>								<b>7</b>
,83	1	1,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	13AM5
	2	1,0	,0	,0	1,0	,0	,0	,0	23AM3
	3	,0	,0	,0	1,0	,0	,0	1,0	14A4
	4	,0	,0	1,0	1,0	1,0	,0	,0	24A3
	5	,0	,0	1,0	1,0	,50	,50	,0	24A4
	6	,0	1,0	,0	1,0	,0	,0	,0	24A5
	7	,5	,5	,0	1,0	1,0	1,0	,0	14AM1
	8	,0	1,0	,0	1,0	,50	,0	,0	24AM2
	9	,0	1,0	,0	1,0	,0	,0	,0	25A4
	10	,0	,0	1,0	1,0	1,0	,50	,0	15AM1
	11	,0	,0	1,0	1,0	,50	,0	,0	15AM2
	12	,5	,0	,50	1,0	,50	,50	,0	15AM3
	13	,0	,0	1,0	1,0	,0	,50	,0	15AM4
	14	,0	,5	,50	1,0	1,0	1,0	,0	16A4
	15	,0	,0	1,0	1,0	,50	1,0	,0	26A5
	16	,5	,0	,50	1,0	1,0	1,0	,0	17A6
	<b>Total</b>								<b>16</b>
1,25	1	,5	1,0	,0	1,0	,0	,0	,0	13AM2
	2	,5	1,0	,0	1,0	,50	,0	,0	14AM4
	3	,0	,0	,50	1,0	,50	,50	,50	24AM3
	4	1,0	,5	,0	,0	1,0	,0	,0	15A2
	5	,0	,0	,50	1,0	,50	,50	,50	25A1
	6	,5	,5	,50	1,0	,0	,0	,0	16A6
	7	,0	,0	,50	1,0	1,0	,0	,50	26A1
	8	1,0	,0	,50	1,0	1,0	,0	,0	17A9
	<b>Total</b>								<b>8</b>
1,67	1	1,0	1,0	,0	1,0	,0	,0	,0	24A1
	2	,5	1,0	,50	1,0	,0	,0	,0	24AM4
	3	,0	,5	,50	1,0	,0	,0	1,0	25A5
	4	1,0	1,0	,0	1,0	1,0	,0	,0	26A3
	5	,0	,0	,0	1,0	,0	1,0	1,0	16AM8
	<b>Total</b>								<b>5</b>

Continua en la página siguiente ...

Tabla D.1: Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

SCCD5	Casos	EvCDi, i=2, 3, 4, 6, 7, 8						CoefCD	Clave
		2	3	4	6	7	8		
2,08	1	,0	,0	,0	1,0	1,0	,50	1,0	15A1
	<b>Total</b>								<b>1</b>
2,50	1	1,0	1,0	1,0	1,0	,0	,50	,0	14AM2
	2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	,0	16A5
	<b>Total</b>								<b>2</b>
2,92	1	1,0	1,0	,0	1,0	1,0	1,0	,50	25AM1
	2	,0	,0	,50	1,0	1,0	1,0	1,0	25AM5
	<b>Total</b>								<b>2</b>
3,33	1	,0	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	15A4
	2	,0	1,0	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	25AM6
	3	,5	,5	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	16AM1
	4	,0	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	16AM3
	5	1,0	,0	1,0	1,0	1,0	,0	1,0	16AM6
	6	,5	1,0	,0	1,0	,50	1,0	1,0	16AM7
	7	,5	,5	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	17A1
	8	,0	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	17A8
<b>Total</b>								<b>8</b>	
3,75	1	1,0	,5	1,0	1,0	1,0	,0	1,0	15A3
	2	,0	,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	25A2
	3	1,0	,5	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	15AM5
	4	,5	1,0	,50	1,0	1,0	,50	1,0	25AM3
	5	,0	1,0	,50	1,0	1,0	1,0	1,0	26A4
	6	1,0	,0	,50	1,0	1,0	1,0	1,0	17A4
<b>Total</b>								<b>6</b>	
4,17	1	1,0	1,0	,50	1,0	,50	1,0	1,0	15A5
	2	,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	16A3
	3	1,0	1,0	,50	1,0	1,0	,50	1,0	17A7
<b>Total</b>								<b>3</b>	
4,58	1	1,0	,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	16AM4
	2	1,0	,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	17A3
<b>Total</b>								<b>2</b>	
5,0	1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	25A3
	2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	16AM2
<b>Total</b>								<b>2</b>	

Continua en la página siguiente ...

Tabla D.1: Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

		EvCDi, i=2, 3, 4, 6, 7, 8							
SCCD5	Casos	2	3	4	6	7	8	CoefCD	Clave
<b>Total</b>									<b>76</b>

Tabla D.1: Valoración de las respuestas. Tareas de orden con cantidades discretas.

## D.2 Clasificación de las respuestas por niveles en orden con cantidades discretas.

		EvCDi, i=2, 3, 4, 6, 7, 8								
NivelCD	SCCD5	Caso	2	3	4	6	7	8	CoefCD	Clave
1	,00	1	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	13AM3
		2	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	13AM4
		3	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	23AM4
		4	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	23AM5
		5	,0	,0	,00	,0	,00	,00	,00	23AM6
		6	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	14A3
		7	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	14A5
		8	,0	,0	,00	1,0	,50	,00	,00	14A6
		9	,0	,0	,00	,0	,00	,00	,00	24A6
		10	,0	,0	,00	1,0	,50	1,00	,00	14AM3
		11	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	24AM1
		12	,0	,0	,00	,0	,00	,00	,00	24AM6
		13	,0	,0	,00	1,0	1,00	,50	,00	25AM4
		14	,0	,0	,00	1,0	1,00	,00	,00	26A2
<b>Total</b>									<b>14</b>	
	,42	1	,0	,0	,50	1,0	,00	,00	,00	13AM1
		2	,0	,5	,00	1,0	,00	,00	,00	23AM2
		3	,5	,0	,00	1,0	,50	,00	,00	14A2
		4	,0	,0	,50	1,0	,50	,00	,00	14AM5
		5	,0	,0	,50	1,0	1,00	,00	,00	16A2
		6	,0	,0	,50	,0	,00	,00	,00	16AM5
		7	,5	,0	,00	1,0	1,00	1,00	,00	17A10
<b>Total</b>									<b>7</b>	
	,83	1	1,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	13AM5
		2	1,0	,0	,00	1,0	,00	,00	,00	23AM3
		3	,0	,0	,00	1,0	,00	,00	1,00	14A4

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.2: Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

NivelCD	SCCD5	Caso	EvCDi, i=2, 3, 4, 6, 7, 8						CoefCD	Clave
			2	3	4	6	7	8		
		4	,0	,0	1,00	1,0	1,00	,00	,00	24A3
		5	,0	,0	1,00	1,0	,50	,50	,00	24A4
		6	,0	1,0	,00	1,0	,00	,00	,00	24A5
		7	,5	,5	,00	1,0	1,00	1,00	,00	14AM1
		8	,0	1,0	,00	1,0	,50	,00	,00	24AM2
		9	,0	1,0	,00	1,0	,00	,00	,00	25A4
		10	,0	,0	1,00	1,0	1,00	,50	,00	15AM1
		11	,0	,0	1,00	1,0	,50	,00	,00	15AM2
		12	,5	,0	,50	1,0	,50	,50	,00	15AM3
		13	,0	,0	1,00	1,0	,00	,50	,00	15AM4
		14	,0	,5	,50	1,0	1,00	1,00	,00	16A4
		15	,0	,0	1,00	1,0	,50	1,00	,00	26A5
		16	,5	,0	,50	1,0	1,00	1,00	,00	17A6
		<b>Total</b>								<b>16</b>
1,25		1	,5	1,0	,00	1,0	,00	,00	,00	13AM2
		2	,5	1,0	,00	1,0	,50	,00	,00	14AM4
		3	,0	,0	,50	1,0	,50	,50	,50	24AM3
		4	1,0	,5	,00	,0	1,00	,00	,00	15A2
		5	,0	,0	,50	1,0	,50	,50	,50	25A1
		6	,5	,5	,50	1,0	,00	,00	,00	16A6
		7	,0	,0	,50	1,0	1,00	,00	,50	26A1
		8	1,0	,0	,50	1,0	1,00	,00	,00	17A9
		<b>Total</b>								<b>8</b>
1,67		1	1,0	1,0	,00	1,0	,00	,00	,00	24A1
		2	,5	1,0	,50	1,0	,00	,00	,00	24AM4
		3	,0	,5	,50	1,0	,00	,00	1,00	25A5
		4	1,0	1,0	,00	1,0	1,00	,00	,00	26A3
		5	,0	,0	,00	1,0	,00	1,00	1,00	16AM8
		<b>Total</b>								<b>5</b>
<b>2</b>	<b>2,08</b>	<b>Total</b>								<b>50</b>
		1	,0	,0	,00	1,0	1,00	,50	1,00	15A1
		<b>Total</b>								<b>1</b>
	2,50	1	1,0	1,0	1,00	1,0	,00	,50	,00	14AM2
		2	1,0	1,0	1,00	1,0	1,00	1,00	,00	16A5

Continua en la página siguiente ...

Tabla D.2: Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

NivelCD	SCCD5	Caso	EvCDi, i=2, 3, 4, 6, 7, 8						CoefCD	Clave
			2	3	4	6	7	8		
<b>Total</b>									<b>2</b>	
2,92	1	1	1,0	1,0	,00	1,0	1,00	1,00	,50	25AM1
		2	,0	,0	,50	1,0	1,00	1,00	1,00	25AM5
<b>Total</b>									<b>2</b>	
<b>Total</b>									<b>5</b>	
3	3,33	1	,0	,0	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	15A4
		2	,0	1,0	,00	1,0	1,00	1,00	1,00	25AM6
		3	,5	,5	,00	1,0	1,00	1,00	1,00	16AM1
		4	,0	,0	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	16AM3
		5	1,0	,0	1,00	1,0	1,00	,00	1,00	16AM6
		6	,5	1,0	,00	1,0	,50	1,00	1,00	16AM7
		7	,5	,5	,00	1,0	1,00	1,00	1,00	17A1
		8	,0	,0	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	17A8
<b>Total</b>									<b>8</b>	
3,75	1	1	1,0	,5	1,00	1,0	1,00	,00	1,00	15A3
		2	,0	,5	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	25A2
		3	1,0	,5	,00	1,0	1,00	1,00	1,00	15AM5
		4	,5	1,0	,50	1,0	1,00	,50	1,00	25AM3
		5	,0	1,0	,50	1,0	1,00	1,00	1,00	26A4
		6	1,0	,0	,50	1,0	1,00	1,00	1,00	17A4
<b>Total</b>									<b>6</b>	
4,17	1	1	1,0	1,0	,50	1,0	,50	1,00	1,00	15A5
		2	,0	1,0	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	16A3
		3	1,0	1,0	,50	1,0	1,00	,50	1,00	17A7
<b>Total</b>									<b>3</b>	
4,58	1	1	1,0	,5	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	16AM4
		2	1,0	,5	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	17A3
<b>Total</b>									<b>2</b>	
5,00	1	1	1,0	1,0	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	25A3
		2	1,0	1,0	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	16AM2
<b>Total</b>									<b>2</b>	
<b>Total</b>									<b>21</b>	
<b>Total</b>									<b>76</b>	

Tabla D.2: Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas de orden con cantidades discretas.



### D.3 Estrategias de los sujetos en las tareas de orden con cantidades discretas.

Clave	GED	ECDi, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8						SCCD5	NivelCD
		2	3	4	6	7	8		
13AM1	3AM	PDI	PDI	C1	C	EE	X	,42	1
13AM2	3AM	C1	C	X	C	EE	EE	1,25	1
13AM3	3AM	PID	EE	X	C	C2	EE	,00	1
13AM4	3AM	EE	PID	X	C	X	X	,00	1
13AM5	3AM	D	PDI	PIDI	C	N	X	,83	1
23AM2	3AM	C1	C	X	C	EE	X	,42	1
23AM3	3AM	D	EE	X	D	X	X	,83	1
23AM4	3AM	EE	EE	X	D	EE	X	,00	1
23AM5	3AM	C1	EE	X	C	EE	X	,00	1
23AM6	3AM	EE	X	X	EE	X	X	,00	1
14A2	4A	D	PDI	C1	D	C1	EE	,42	1
14A3	4A	PDI	EE	X	D	N	X	,00	1
14A4	4A	PID	PID	EE	C	PID	EE	,83	1
14A5	4A	EE	N	X	C	EE	X	,00	1
14A6	4A	EE	X	X	C	C1	X	,00	1
24A1	4A	C	C	PID	C	D1	EE	1,67	1
24A3	4A	EE	PDI	C	C	C	N	,83	1
24A4	4A	EE	PDI	C	C	C2	C	,83	1
24A5	4A	PDI	C	PID	C	EE	EE	,83	1
24A6	4A	PID	C3	EE	EE	EE	PID	,00	1
14AM1	4AM	C1	C1	C1	C	C	C	,83	1
14AM2	4AM	D	C	C	C	N	C1	2,50	2
14AM3	4AM	PDI	PDI	C3	C	C	D	,00	1
14AM4	4AM	C1	C	PID	D	D	EE	1,25	1
14AM5	4AM	PDI	PDI	C1	C	D1	EE	,42	1
24AM1	4AM	PDI	PDI	PID	C	N	EE	,00	1
24AM2	4AM	C1	C	EE	C	D	EE	,83	1
24AM3	4AM	PDI	PDI	D2	D	D	C	1,25	1
24AM4	4AM	C1	C	C2	C	EE	EE	1,67	1
24AM6	4AM	EE	C3	N	EE	N	N	,00	1
15A1	5A	PDI	PDI	PDI	C	C	C	2,08	2
15A2	5A	C	C1	EE	EE	C	EE	1,25	1
15A3	5A	C	C1	C	D	C	EE	3,75	3

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.3: Estrategias locales de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	ECDi, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8						SCCD5	NivelCD
		2	3	4	6	7	8		
15A4	5A	PDI	PDI	C	C	C	C	3,33	3
15A5	5A	C	C	C1	C	C	C	4,17	3
25A1	5A	PID	C2	C1	C	C	C	1,25	1
25A2	5A	PDI	C1	C	C	C	C	3,75	3
25A3	5A	C	C	C	C	C	C	5,00	3
25A4	5A	PDI	C	AID	C	EE	EE	,83	1
25A5	5A	EE	C1	C1	C	PID-D	EE	1,67	1
15AM1	5AM	PDI	PDI	C	C	C	C	,83	1
15AM2	5AM	PDI	PDI	C	C	C	EE	,83	1
15AM3	5AM	C1	PDI	C1	D	D	D1	,83	1
15AM4	5AM	PDI	PDI	C	C	PID	D	,83	1
15AM5	5AM	D	D	PDI	C	C	C	3,75	3
25AM1	5AM	C	C	AID	C	C	C	2,92	2
25AM3	5AM	C	C	C1	C	C	C	3,75	3
25AM4	5AM	PDI	EE	PDI	C	C	C	,00	1
25AM5	5AM	PDI	PDI	C	C	C	C	2,92	2
25AM6	5AM	PDI	C	PID	C	C	C	3,33	3
16A2	6A	PDI	PDI	C1	C	C	C2	,42	1
16A3	6A	PID	C	C	C	C	C	4,17	3
16A4	6A	PDI	C1	C2	C	C	C	,83	1
16A5	6A	D	D	C	C	C	C	2,50	2
16A6	6A	C1	C1	C2	C	PID-D	C2	1,25	1
26A1	6A	PDI	PDI	C1	C	C	C3	1,25	1
26A2	6A	EE	PDI	EE	C	D	EE	,00	1
26A3	6A	C	C	AID	D	D	EE	1,67	1
26A4	6A	EE	C	C1	C	C	C	3,75	3
26A5	6A	PDI	PDI	C	C	D	D	,83	1
16AM1	6AM	C1	C1	D2	C	C	C	3,33	3
16AM2	6AM	D	D	D	C	C	C	5,00	3
16AM3	6AM	PDI	C1	D	D	C	C	3,33	3
16AM4	6AM	C	C1	C	C	C	C	4,58	3
16AM5	6AM	EE	PDI	C1	EE	PID-D	C3	,42	1
16AM6	6AM	C	PDI	C	C	C	C2	3,33	3
16AM7	6AM	C1	C	AID	C	C	C	3,33	3
16AM8	6AM	PDI	PDI	PDI	C	PID-D	C	1,67	1

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.3: Estrategias locales de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

ECDi, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8									
Clave	GED	2	3	4	6	7	8	SCCD5	NivelCD
17A1	7A	C1	C1	ADI	C	C	C	3,33	3
17A10	7A	C1	PDI	PIDI	C	C	C	,42	1
17A3	7A	C	C1	C	C	C	C	4,58	3
17A4	7A	C	PDI	C1	C	C	C	3,75	3
17A6	7A	C1	PDI	C1	D	C	C	,83	1
17A7	7A	C	C	C1	C	C	C	4,17	3
17A8	7A	EE	C2	C	C	C	C	3,33	3
17A9	7A	D	PID	C1	D	D	D3	1,25	1

Tabla D.3: Estrategias locales de los sujetos. Tareas de orden con cantidades discretas.

ECDi, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8									
SCCD5	Clave	GED	2	3	4	6	7	8	
,00	13AM3	3AM	PID	EE	X	C	C2	EE	
	13AM4	3AM	EE	PID	X	C	X	X	
	23AM4	3AM	EE	EE	X	D	EE	X	
	23AM5	3AM	C1	EE	X	C	EE	X	
	23AM6	3AM	EE	X	X	EE	X	X	
	14A3	4A	PDI	EE	X	D	N	X	
	14A5	4A	EE	N	X	C	EE	X	
	14A6	4A	EE	X	X	C	C1	X	
	24A6	4A	PID	C3	EE	EE	EE	PID	
	14AM3	4AM	PDI	PDI	C3	C	C	D	
	24AM1	4AM	PDI	PDI	PID	C	N	EE	
	24AM6	4AM	EE	C3	N	EE	N	N	
	25AM4	5AM	PDI	EE	PDI	C	C	C	
	26A2	6A	EE	PDI	EE	C	D	EE	
,42	13AM1	3AM	PDI	PDI	C1	C	EE	X	
	23AM2	3AM	C1	C	X	C	EE	X	
	14A2	4A	D	PDI	C1	D	C1	EE	
	14AM5	4AM	PDI	PDI	C1	C	D1	EE	
	16A2	6A	PDI	PDI	C1	C	C	C2	
	16AM5	6AM	EE	PDI	C1	EE	PID-D	C3	
	17A10	7A	C1	PDI	PIDI	C	C	C	

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.4: Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable *SCCD5*. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

SCCD5	Clave	GED	ECDi, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8					
			2	3	4	6	7	8
,83	13AM5	3AM	D	PDI	PIDI	C	N	X
	23AM3	3AM	D	EE	X	D	X	X
	14A4	4A	PID	PID	EE	C	PID	EE
	24A3	4A	EE	PDI	C	C	C	N
	24A4	4A	EE	PDI	C	C	C2	C
	24A5	4A	PDI	C	PID	C	EE	EE
	14AM1	4AM	C1	C1	C1	C	C	C
	24AM2	4AM	C1	C	EE	C	D	EE
	25A4	5A	PDI	C	AID	C	EE	EE
	15AM1	5AM	PDI	PDI	C	C	C	C
	15AM2	5AM	PDI	PDI	C	C	C	EE
	15AM3	5AM	C1	PDI	C1	D	D	D1
	15AM4	5AM	PDI	PDI	C	C	PID	D
	16A4	6A	PDI	C1	C2	C	C	C
	26A5	6A	PDI	PDI	C	C	D	D
17A6	7A	C1	PDI	C1	D	C	C	
1,25	13AM2	3AM	C1	C	X	C	EE	EE
	14AM4	4AM	C1	C	PID	D	D	EE
	24AM3	4AM	PDI	PDI	D2	D	D	C
	15A2	5A	C	C1	EE	EE	C	EE
	25A1	5A	PID	C2	C1	C	C	C
	16A6	6A	C1	C1	C2	C	PID-D	C2
	26A1	6A	PDI	PDI	C1	C	C	C3
	17A9	7A	D	PID	C1	D	D	D3
1,67	24A1	4A	C	C	PID	C	D1	EE
	24AM4	4AM	C1	C	C2	C	EE	EE
	25A5	5A	EE	C1	C1	C	PID-D	EE
	26A3	6A	C	C	AID	D	D	EE
	16AM8	6AM	PDI	PDI	PDI	C	PID-D	C
2,08	15A1	5A	PDI	PDI	PDI	C	C	C
2,50	14AM2	4AM	D	C	C	C	N	C1
	16A5	6A	D	D	C	C	C	C
2,92	25AM1	5AM	C	C	AID	C	C	C
	25AM5	5AM	PDI	PDI	C	C	C	C

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.4: Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable *SCCD5*. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

SCCD5	Clave	GED	ECDi, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8					
			2	3	4	6	7	8
3,33	15A4	5A	PDI	PDI	C	C	C	C
	25AM6	5AM	PDI	C	PID	C	C	C
	16AM1	6AM	C1	C1	D2	C	C	C
	16AM3	6AM	PDI	C1	D	D	C	C
	16AM6	6AM	C	PDI	C	C	C	C2
	16AM7	6AM	C1	C	AID	C	C	C
	17A1	7A	C1	C1	ADI	C	C	C
	17A8	7A	EE	C2	C	C	C	C
3,75	15A3	5A	C	C1	C	D	C	EE
	25A2	5A	PDI	C1	C	C	C	C
	15AM5	5AM	D	D	PDI	C	C	C
	25AM3	5AM	C	C	C1	C	C	C
	26A4	6A	EE	C	C1	C	C	C
	17A4	7A	C	PDI	C1	C	C	C
4,17	15A5	5A	C	C	C1	C	C	C
	16A3	6A	PID	C	C	C	C	C
	17A7	7A	C	C	C1	C	C	C
4,58	16AM4	6AM	C	C1	C	C	C	C
	17A3	7A	C	C1	C	C	C	C
5,00	25A3	5A	C	C	C	C	C	C
	16AM2	6AM	D	D	D	C	C	C

Tabla D.4: Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable *SCCD5*. Tareas de orden con cantidades discretas.

NivelCD	Clave	GED	ECDi, I = 2, 3, 4, 6, 7, 8					
			2	3	4	6	7	8
1	13AM1	3AM	PDI	PDI	C1	C	EE	X
	13AM2	3AM	C1	C	X	C	EE	EE
	13AM3	3AM	PID	EE	X	C	C2	EE
	13AM4	3AM	EE	PID	X	C	X	X
	13AM5	3AM	D	PDI	PIDI	C	N	X
	23AM2	3AM	C1	C	X	C	EE	X
	23AM3	3AM	D	EE	X	D	X	X
	23AM4	3AM	EE	EE	X	D	EE	X
	23AM5	3AM	C1	EE	X	C	EE	X
	23AM6	3AM	EE	X	X	EE	X	X
	14A2	4A	D	PDI	C1	D	C1	EE
	14A3	4A	PDI	EE	X	D	N	X
	14A4	4A	PID	PID	EE	C	PID	EE
	14A5	4A	EE	N	X	C	EE	X
	14A6	4A	EE	X	X	C	C1	X
	24A1	4A	C	C	PID	C	D1	EE
	24A3	4A	EE	PDI	C	C	C	N
	24A4	4A	EE	PDI	C	C	C2	C
	24A5	4A	PDI	C	PID	C	EE	EE
	24A6	4A	PID	C3	EE	EE	EE	PID
	14AM1	4AM	C1	C1	C1	C	C	C
	14AM3	4AM	PDI	PDI	C3	C	C	D
	14AM4	4AM	C1	C	PID	D	D	EE
	14AM5	4AM	PDI	PDI	C1	C	D1	EE
	24AM1	4AM	PDI	PDI	PID	C	N	EE
	24AM2	4AM	C1	C	EE	C	D	EE
	24AM3	4AM	PDI	PDI	D2	D	D	C
	24AM4	4AM	C1	C	C2	C	EE	EE
	24AM6	4AM	EE	C3	N	EE	N	N
	15A2	5A	C	C1	EE	EE	C	EE
	25A1	5A	PID	C2	C1	C	C	C
	25A4	5A	PDI	C	AID	C	EE	EE
	25A5	5A	EE	C1	C1	C	PID-D	EE
	15AM1	5AM	PDI	PDI	C	C	C	C
	15AM2	5AM	PDI	PDI	C	C	C	EE

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.5: Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable *NivelCD*. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

NivelCD	Clave	GED	ECDi, I = 2, 3, 4, 6, 7, 8					
			2	3	4	6	7	8
	15AM3	5AM	C1	PDI	C1	D	D	D1
	15AM4	5AM	PDI	PDI	C	C	PID	D
	25AM4	5AM	PDI	EE	PDI	C	C	C
	16A2	6A	PDI	PDI	C1	C	C	C2
	16A4	6A	PDI	C1	C2	C	C	C
	16A6	6A	C1	C1	C2	C	PID-D	C2
	26A1	6A	PDI	PDI	C1	C	C	C3
	26A2	6A	EE	PDI	EE	C	D	EE
	26A3	6A	C	C	AID	D	D	EE
	26A5	6A	PDI	PDI	C	C	D	D
	16AM5	6AM	EE	PDI	C1	EE	PID-D	C3
	16AM8	6AM	PDI	PDI	PDI	C	PID-D	C
	17A10	7A	C1	PDI	PIDI	C	C	C
	17A6	7A	C1	PDI	C1	D	C	C
	17A9	7A	D	PID	C1	D	D	D3
<b>2</b>	14AM2	4AM	D	C	C	C	N	C1
	15A1	5A	PDI	PDI	PDI	C	C	C
	25AM1	5AM	C	C	AID	C	C	C
	25AM5	5AM	PDI	PDI	C	C	C	C
	16A5	6A	D	D	C	C	C	C
<b>3</b>	15A3	5A	C	C1	C	D	C	EE
	15A4	5A	PDI	PDI	C	C	C	C
	15A5	5A	C	C	C1	C	C	C
	25A2	5A	PDI	C1	C	C	C	C
	25A3	5A	C	C	C	C	C	C
	15AM5	5AM	D	D	PDI	C	C	C
	25AM3	5AM	C	C	C1	C	C	C
	25AM6	5AM	PDI	C	PID	C	C	C
	16A3	6A	PID	C	C	C	C	C
	26A4	6A	EE	C	C1	C	C	C
	16AM1	6AM	C1	C1	D2	C	C	C
	16AM2	6AM	D	D	D	C	C	C
	16AM3	6AM	PDI	C1	D	D	C	C
	16AM4	6AM	C	C1	C	C	C	C
	16AM6	6AM	C	PDI	C	C	C	C2

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.5: Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable *NivelCD*. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

NivelCD	Clave	GED	ECDi, I = 2, 3, 4, 6, 7, 8					
			2	3	4	6	7	8
	16AM7	6AM	C1	C	AID	C	C	C
	17A1	7A	C1	C1	ADI	C	C	C
	17A3	7A	C	C1	C	C	C	C
	17A4	7A	C	PDI	C1	C	C	C
	17A7	7A	C	C	C1	C	C	C
	17A8	7A	EE	C2	C	C	C	C

Tabla D.5: Estrategias locales de los sujetos según los valores de la variable *NivelCD*. Tareas de orden con cantidades discretas.



Clave	GED	Estrategia 2-4	Cod 2-4
13AM1	3AM	"Tiene muchas", "tiene pocas".	CP
13AM2	3AM	"Es más chiquitito", "es más grande".	CP
13AM3	3AM	"Es más grande", "es más pequeño".	CP
13AM4	3AM	"Hay más", "hay menos".	CP
13AM5	3AM	"Había más huecos", "había menos huecos".	CP
23AM2	3AM	"Un abujejerito", "tres abujejeritos".	PC
23AM3	3AM	No responde.	EE
23AM4	3AM	Porque cabe.	CP
23AM5	3AM	Indica con los dedos que hay tres y que hay dos (tarea 3). No hace la tarea 4.	PC
23AM6	3AM	No responde.	EE
14A2	4A	"Tiene dos boquetes", señalando al que tiene tres.	CP
14A3	4A	"No sé".	EE
14A4	4A	"Tiene dos", "tiene tres". No establece las correspondencias.	PC
14A5	4A	No contesta.	EE
14A6	4A	"No lo sé".	EE
24A1	4A	"Había dos bujeritos", "porque hay tres". No completa la cuarta tarea.	PC
24A3	4A	"No sé".	EE
24A4	4A	"Porque tiene dos huecos", "tiene tres". Hace la cuarta tarea.	CT
24A5	4A	"Había dos sitios", "había tres", "había su forma".	PC
24A6	4A	"Hay una", "hay dos", "hay tres". Sin aplicarlo correctamente a las correspondencias.	PC
14AM1	4AM	"Porque cabe".	CP
14AM2	4AM	"Hay dos", "hay tres".	CT
14AM3	4AM	"No lo sé".	EE
14AM4	4AM	"Hay dos abujeros", "hay tres". Hace la cuarta con algún error.	CT
14AM5	4AM	"Es más grande", "es más pequeño".	CP
24AM1	4AM	"Hay tres", "una", "dos".	CT
24AM2	4AM	"Es su sitio, tiene su forma", "tiene su forma".	CF
24AM3	4AM	"Hay dos", "hay tres", "hay una". En la cuarta tarea usa el conteo sin orden.	PC

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.6: Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 2 a 4 de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	Estrategia 2-4	Cod 2-4
24AM4	4AM	"Había dos", "había tres".	CT
24AM6	4AM	"No lo entiendo".	EE
15A1	5A	"Porque son dos", "porque son tres".	CT
15A2	5A	"Es así", "es así".	EE
15A3	5A	"Porque hay un hueco", "porque hay dos", "hay tres".	CT
15A4	5A	"Porque hay dos agujeros", "porque hay tres", "hay uno".	CT
15A5	5A	"Hay tres", "hay una", "hay dos".	CT
25A1	5A	Tarea 4: "Son tres", "es uno". Con errores en las anteriores.	PC
25A2	5A	"Son tres", "es una", "son dos".	CT
25A3	5A	"Es su sitio, lleva tres", "lleva dos".	CT
25A4	5A	Tarea3: "Es pequeño (el árbol)", "es grande". Tarea 4: "Hay tres", "hay dos".	CP-CT
25A5	5A	"Había tres", "había dos".	CT
15AM1	5AM	"Hay tres agujeros", "hay dos".	CT
15AM2	5AM	"Porque hay tres", "porque hay dos".	CT
15AM3	5AM	"Hay tres", "hay dos".	CT
15AM4	5AM	"Hay tres agujeros", "hay dos". Tareas 2 y 3 sin orden.	PC
15AM5	5AM	"Porque hay tres agujeros", "porque hay dos agujeros".	CT
25AM1	5AM	"Había un boquete y una naranja, dos boquetes y dos naranjas...".	CT
25AM3	5AM	"Aquí va tres y ahí dos".	CT
25AM4	5AM	Tarea 4: "Hay un boquete", "hay tres". En las tareas 2 y 3 no procede con orden.	PC
25AM5	5AM	"Porque son tres, uno, dos".	CT
25AM6	5AM	"Había tres, una, dos (naranjas)".	CT
16A2	6A	"No lo sé", "no sé".	EE
16A3	6A	"Hay tres, hay dos, hay cuatro".	CT
16A4	6A	No contesta. Procede por ensayo y error.	EE
16A5	6A	"Hay los mismos agujeros: dos, tres, cuatro".	CT
16A6	6A	"Son tres, son dos, son cuatro".	CT

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.6: Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 2 a 4 de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	Estrategia 2-4	Cod 2-4
26A1	6A	"Había tres, he contado", "son cuatro y he contado".	CT
26A2	6A	"La más grande, la chica, la mediana".	CP
26A3	6A	"Hay tres", "hay dos". Tarea 4: establece las correspondencias sin orden.	PC
26A4	6A	"Tiene tres, tiene dos, tiene cuatro".	CT
26A5	6A	"Son los mismos", "son los mismos".	CP-CT
16AM1	6AM	"Hay tres agujeros para colocar tres naranjas", "hay dos para colocar dos", ....	CT
16AM2	6AM	"Tiene tres, tiene dos, tiene cuatro".	CT
16AM3	6AM	"Hay uno, dos, tres huecos".	CT
16AM4	6AM	"Hay tres, hay dos, hay cuatro".	CT
16AM5	6AM	"Tiene tres, tiene dos, tiene cuatro".	CT
16AM6	6AM	"Hay tres boquetes", "hay dos", "hay uno".	CT
16AM7	6AM	"Hay tres naranjas y tres huecos", "dos naranjas y dos huecos", ....	CT
16AM8	6AM	"Hay tres huecos", "hay dos", "hay cuatro".	CT
17A1	7A	"Hay tres", "hay uno", "hay dos".	CT
17A10	7A	"Porque eran tres", "porque eran dos", "porque eran cuatro".	CT
17A3	7A	Cuenta en voz alta al realizar la tarea. No es necesario preguntarle.	CT
17A4	7A	"Son tres y hay tres huecos", "es una y un hueco", "son dos y hay dos huecos".	CT
17A6	7A	"Hay tres, hay dos, hay una".	CT
17A7	7A	"Tiene tres boquetes, tiene dos, tiene uno".	CT
17A8	7A	"Hay tres", "hay dos", "hay cuatro".	CT
17A9	7A	"Porque hay tres", "hay uno", "hay dos".	CT

Tabla D.6: Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 2 a 4 de orden con cantidades discretas.

Clave	GED	Estrategia 7-8	Cod 6-8	CoefCD
13AM1	3AM	“Es más grande”, “es más pequeño”.	CP	,00
13AM2	3AM	“La mediana”, “la chiquitita”.	CP	,00
13AM3	3AM	“Es más grande”, “falta el más grande”.	CP	,00
13AM4	3AM	“Porque es más grande”, “porque es más pequeño”.	CP	,00
13AM5	3AM	No responde.	EE	,00
23AM2	3AM	“Uno pequeñito y otro grande”. “El pequeñito”, “el grande”.	CP	,00
23AM3	3AM	No responde.	EE	,00
23AM4	3AM	No responde.	EE	,00
23AM5	3AM	No responde.	EE	,00
23AM6	3AM	No responde.	EE	,00
14A2	4A	“Porque tiene que subir”. Compara Tamaños.	CP	,00
14A3	4A	“No sé”.	EE	,00
14A4	4A	“Tiene dos”, “tiene tres”, pero no sigue el orden.	PC	1,00
14A5	4A	No contesta.	EE	,00
14A6	4A	“No lo sé”.	EE	,00
24A1	4A	“Así puede escalar, es más alta”, “así puede subir, es más baja”. No completa la octava tarea.	CL	,00
24A3	4A	“No sé”.	EE	,00
24A4	4A	“La más alta aquí”, “es más baja”, “es más alta”.	CL	,00
24A5	4A	“Es más alta”, “es más baja”.	CL	,00
24A6	4A	“No lo sé”.	EE	,00
14AM1	4AM	“Es más alta”, “es más baja”.	CL	,00
14AM2	4AM	“Esta es más grande”. “Esta es más pequeña”.	CP	,00
14AM3	4AM	“No lo sé”.	EE	,00
14AM4	4AM	“Es más grande”, “es más chica”.	CP	,00
14AM5	4AM	“Es más grande”, “es más pequeña”.	CP	,00
24AM1	4AM	“Es mas grande”, “ésta es más baja”.	CL	,00
24AM2	4AM	“Es más grande”, “tiene la forma”.	CF	,00

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.7: Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	Estrategia 7-8	Cod 6-8	CoefCD
24AM3	4AM	Tarea7: "Es más grande", "es más pequeña". Tarea 8: "tiene dos", "tiene cuatro".	CP-CT	,50
24AM4	4AM	"Es más larga", "es más corta".	CL	,00
24AM6	4AM	"No entiendo".	EE	,00
15A1	5A	"Porque son tres", "son dos".	CT	1,00
15A2	5A	"Es más largo", "es más corto", "para formar la escalera".	CL	,00
15A3	5A	"Porque hay tres", "porque hay dos".	CT	1,00
15A4	5A	"Hay tres", "hay dos".	CT	1,00
15A5	5A	"Porque son tres", "porque son dos".	CT	1,00
25A1	5A	"Son tres", "es mas baja", "son dos".	CL-CT	,50
25A2	5A	"Son tres", "son dos".	CT	1,00
25A3	5A	"Hay tres", "hay dos", "hay cuatro".	CT	1,00
25A4	5A	"Es grande", "es mediano".	CP	,00
25A5	5A	Tarea 7: "Primero había uno, luego dos y luego tres". Sin embargo realiza la octava tarea por ensayo y error.	PC	1,00
15AM1	5AM	"Es más alta", "es más baja".	CL	,00
15AM2	5AM	No contesta. Procede por ensayo y error.	EE	,00
15AM3	5AM	"Es más larga", "es más corta", "para hacer la escalera".	CL	,00
15AM4	5AM	"Es más larga", "es más corta", "es mediana".	CL	,00
15AM5	5AM	"Hay tres", "hay dos", "hay cuatro".	CT	1,00
25AM1	5AM	"Es más pequeña, tiene dos y la otra tres".	CP-CT	,50
25AM3	5AM	"Aquí va tres, aquí dos y aquí cuatro".	CT	1,00
25AM4	5AM	"Este es más alto", "este es más alto que ese".	CL	,00
25AM5	5AM	"Porque son dos, tres, cuatro".	CT	1,00
25AM6	5AM	"Tiene tres", "tiene dos", "tenía cuatro".	CT	1,00

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.7: Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	Estrategia 7-8	Cod 6-8	CoefCD
16A2	6A	"Esta es más alta", "esta es menos alta".	CL	,00
16A3	6A	"Hay tres, hay dos, hay cuatro".	CT	1,00
16A4	6A	"Es más larga", "es más corta", "es mediana".	CL	,00
16A5	6A	"Es más alta", "es más baja", "es mediana".	CL	,00
16A6	6A	"Es más alta", "es más baja".	CL	,00
26A1	6A	"Son tres, es más alta", "es más baja", "es mediana".	CL-CT	,50
26A2	6A	"Es más grande", "la chica", "la pequeña (refiriéndose a la intermedia)".	CP	,00
26A3	6A	"Es más alta que las otras". "La más alta", "la más pequeña", "la mediana".	CL	,00
26A4	6A	"Tiene tres", "tiene dos", "tiene cuatro".	CT	1,00
26A5	6A	"Porque tiene que llegar aquí".	CP	,00
16AM1	6AM	"La grande tiene tres, la mediana dos". Tarea 8: "la grande tiene 5".	CT	1,00
16AM2	6AM	"Tiene tres", "tiene dos", "tiene cuatro".	CT	1,00
16AM3	6AM	"Hay una, después dos, después tres,...".	CT	1,00
16AM4	6AM	"Hay tres, hay dos, hay cuatro".	CT	1,00
16AM5	6AM	"Es más larga", "es más corta", "es mediana".	CL	,00
16AM6	6AM	"Tiene tres", "tiene dos", "tiene cuatro". En la tarea 8 lleva el bloque de 6 escalones al hueco de 5, tras el error razona espontáneamente que debe llevar el de 5.	CT	1,00
16AM7	6AM	"Tiene tres escalones, tiene dos, tiene cuatro...".	CT	1,00
16AM8	6AM	"Hay tres, hay dos, hay cuatro".	CT	1,00
17A1	7A	"Tiene tres", "tiene dos". Preguntado sobre porqué el bloque de dos escalones no se pone en el lugar correspondiente al de tres responde: "porque no tiene tres".	CT	1,00

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.7: Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	Estrategia 7-8	Cod 6-8	CoefCD
17A10	7A	“Es la más larga”, “es la mas corta”, “es la mediana”.	CL	,00
17A3	7A	Cuenta en voz alta al realizar la tarea. No es necesario preguntarle.	CT	1,00
17A4	7A	“Es de tres”, “es de dos”, “es de cuatro”.	CT	1,00
17A6	7A	“Es más grande”, “es más chica”.	CP	,00
17A7	7A	“Tiene tres escalones, tiene dos, tiene cuatro”.	CT	1,00
17A8	7A	“Hay un tercer escalón, un segundo, un quinto”.	CT	1,00
17A9	7A	“Es más grande”, “es más chica”, “es mediana”.	CP	,00

Tabla D.7: Respuestas de los sujetos al cuestionario y estrategias globales. Tareas 6 a 8 de orden con cantidades discretas.

NivelCD	SCCD5	Clave	ECDi, i=2, 3, 4			ECDi, i=6, 7, 8			Cod68	SCD68			
			2	3	4	Cod24	SCD24	6			7	8	
1	,00	13AM3	PID	EE	X	CP	,0	C	C2	EE	CP	1,0	
		13AM4	EE	PID	X	CP	,0	C	X	X	CP	1,0	
		23AM4	EE	EE	X	CP	,0	D	EE	X	EE	1,0	
		23AM5	C1	EE	X	PC	,0	C	EE	X	EE	1,0	
		23AM6	EE	X	X	EE	,0	EE	X	X	EE	,0	
		14A3	PDI	EE	X	EE	,0	D	N	X	EE	1,0	
		14A5	EE	N	X	EE	,0	C	EE	X	EE	1,0	
		14A6	EE	X	X	EE	,0	C	C1	X	EE	1,5	
		24A6	PID	C3	EE	PC	,0	EE	EE	PID	EE	,0	
		14AM3	PDI	PDI	C3	EE	,0	C	C	D	EE	2,5	
		24AM1	PDI	PDI	PID	CT	,0	C	N	EE	CL	1,0	
		24AM6	EE	C3	N	EE	,0	EE	N	N	EE	,0	
		25AM4	PDI	EE	PDI	PC	,0	C	C	C	CL	2,5	
		26A2	EE	PDI	EE	CP	,0	C	D	EE	CP	2,0	
		,42	13AM1	PDI	PDI	C1	CP	,5	C	EE	X	CP	1,0
			23AM2	C1	C	X	PC	,5	C	EE	X	CP	1,0
	14A2		D	PDI	C1	CP	,5	D	C1	EE	CP	1,5	
	14AM5		PDI	PDI	C1	CP	,5	C	D1	EE	CP	1,5	
	16A2		PDI	PDI	C1	EE	,5	C	C	C2	CL	2,0	
	16AM5		EE	PDI	C1	CT	,5	EE	PID-D	C3	CL	,0	
	17A10		C1	PDI	PIDI	CT	,5	C	C	C	CL	3,0	

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.8: Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que no reconocen la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas con cantidades discretas (variable  $CoefCD=0$ ).



... viene de la página anterior.

NivelCD	SCCD5	Clave	ECDi, i=2, 3, 4			ECDi, i=6, 7, 8						
			2	3	4	Cod24	SCD24	6	7	8	Cod68	SCD68
	,83	13AM5	D	PDI	PIDI	CP	1,0	C	N	X	EE	1,0
		23AM3	D	EE	X	EE	1,0	D	X	X	EE	1,0
		24A3	EE	PDI	C	EE	1,0	C	C	N	EE	2,0
		24A4	EE	PDI	C	CT	1,0	C	C2	C	CL	2,0
		24A5	PDI	C	PID	PC	1,0	C	EE	EE	CL	1,0
		14AM1	C1	C1	C1	CP	1,0	C	C	C	CL	3,0
		24AM2	C1	C	EE	CF	1,0	C	D	EE	CF	1,5
		25A4	PDI	C	AID	CP-CT	1,0	C	EE	EE	CP	1,0
		15AM1	PDI	PDI	C	CT	1,0	C	C	C	CL	2,5
		15AM2	PDI	PDI	C	CT	1,0	C	C	EE	EE	1,5
		15AM3	C1	PDI	C1	CT	1,0	D	D	D1	CL	2,0
		15AM4	PDI	PDI	C	PC	1,0	C	PID	D	CL	1,5
		16A4	PDI	C1	C2	EE	1,0	C	C	C	CL	3,0
		26A5	PDI	PDI	C	CP-CT	1,0	C	D	D	CP	2,5
		17A6	C1	PDI	C1	CT	1,0	D	C	C	CP	3,0
			1,25	13AM2	C1	C	X	CP	1,5	C	EE	EE
14AM4	C1			C	PID	CT	1,5	D	D	EE	CP	1,5
15A2	C			C1	EE	EE	1,5	EE	C	EE	CL	1,0
16A6	C1			C1	C2	CT	1,5	C	PID-D	C2	CL	1,0

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.8: Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que no reconocen la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas con cantidades discretas (variable  $CoefCD=0$ ).

... viene de la página anterior.

NivelCD	SCCD5	Clave	ECDi, i=2, 3, 4			ECDi, i=6, 7, 8						
			2	3	4	Cod24	SCD24	6	7	8	Cod68	SCD68
		17A9	D	PID	C1	CT	1,5	D	D	D3	CP	2,0
	1,67	24A1	C	C	PID	PC	2,0	C	D1	EE	CL	1,0
		24AM4	C1	C	C2	CT	2,0	C	EE	EE	CL	1,0
		26A3	C	C	AID	PC	2,0	D	D	EE	CL	2,0
2	2,50	14AM2	D	C	C	CT	3,0	C	N	C1	CP	1,5
		16A5	D	D	C	CT	3,0	C	C	C	CL	3,0

Tabla D.8: Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que no reconocen la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas con cantidades discretas (variable  $CoefCD=0$ ).

NivelCD	SCCD5	Clave	ECDi, i= 2, 3, 4			Cod24	SCD24	ECDi, i= 6, 7, 8			Cod68	SCD68
			2	3	4			6	7	8		
1	,83	14A4	PID	PID	EE	PC	,0	C	PID	EE	PC	1,0
	1,25	24AM3	PDI	PDI	D2	PC	,5	D	D	C	CP-CT	2,0
		25A1	PID	C2	C1	PC	,5	C	C	C	CL-CT	2,0
		26A1	PDI	PDI	C1	CT	,5	C	C	C3	CL-CT	2,0
	1,67	25A5	EE	C1	C1	CT	1,0	C	PID-D	EE	PC	1,0
		16AM8	PDI	PDI	PDI	CT	,0	C	PID-D	C	CT	2,0
2	2,08	15A1	PDI	PDI	PDI	CT	,0	C	C	C	CT	2,5
	2,92	25AM1	C	C	AID	CT	2,0	C	C	C	CP-CT	3,0
		25AM5	PDI	PDI	C	CT	,5	C	C	C	CT	3,0
3	3,33	15A4	PDI	PDI	C	CT	1,0	C	C	C	CT	3,0
		25AM6	PDI	C	PID	CT	1,0	C	C	C	CT	3,0
		16AM1	C1	C1	D2	CT	1,0	C	C	C	CT	3,0
		16AM3	PDI	C1	D	CT	1,0	D	C	C	CT	3,0
		16AM6	C	PDI	C	CT	2,0	C	C	C2	CT	2,0
		16AM7	C1	C	AID	CT	1,5	C	C	C	CT	2,5
		17A1	C1	C1	ADI	CT	1,0	C	C	C	CT	3,0
		17A8	EE	C2	C	CT	1,0	C	C	C	CT	3,0
	3,75	15A3	C	C1	C	CT	2,5	D	C	EE	CT	2,0
25A2		PDI	C1	C	CT	1,5	C	C	C	CT	3,0	

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.9: Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que reconocen parcial o totalmente la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas (valores de la variable *CoeffCD* iguales a 0,5 ó 1).

... viene de la página anterior.

NivelCD	SCCD5	Clave	ECDi, i= 2, 3, 4			Cod24	SCD24	ECDi, i= 6, 7, 8			Cod68	SCD68
			2	3	4			6	7	8		
		15AM5	D	D	PDI	CT	1,5	C	C	C	CT	3,0
		25AM3	C	C	C1	CT	2,0	C	C	C	CT	2,5
		26A4	EE	C	C1	CT	1,5	C	C	C	CT	3,0
		17A4	C	PDI	C1	CT	1,5	C	C	C	CT	3,0
	4,17	15A5	C	C	C1	CT	2,5	C	C	C	CT	2,5
		16A3	PID	C	C	CT	2,0	C	C	C	CT	3,0
		17A7	C	C	C1	CT	2,5	C	C	C	CT	2,5
	4,58	16AM4	C	C1	C	CT	2,5	C	C	C	CT	3,0
		17A3	C	C1	C	CT	2,5	C	C	C	CT	3,0
	5,00	25A3	C	C	C	CT	3,0	C	C	C	CT	3,0
		16AM2	D	D	D	CT	3,0	C	C	C	CT	3,0

Tabla D.9: Estrategias locales y globales de los sujetos por niveles y valoraciones. Sujetos que reconocen parcial o totalmente la cantidad discreta en el segundo subconjunto de tareas de orden con cantidades discretas (valores de la variable *CoefCD* iguales a 0, 5 ó 1).

(a)

		Cod2-4				
Nivel	CF	CP-CT	CP	EE	PC	CT
Nivel 1	2	4	20	22	22	30
Nivel 2	0	0	0	0	0	100
Nivel 3	0	0	0	0	0	100

(b)

		Cod6-8						
Nivel	CF	CL-CT	CL	CP-CT	CP	EE	PC	CT
Nivel 1	2	4	34	2	26	26	4	2
Nivel 2	0	0	20	20	20	0	0	40
Nivel 3	0	0	0	0	0	0	0	100

Tabla D.10. Porcentajes de uso de las estrategias globales por niveles en las tareas de Orden con cantidades discretas. (a) Primer subconjunto; (b) Segundo subconjunto.

(a)

GED	Cod2-4					
	CF	CP-CT	CP	EE	PC	CT
3AM	0	0	60	20	20	0
4A	0	0	10	40	40	10
4AM	10	0	20	20	10	40
5A	0	10	0	10	10	70
5AM	0	0	0	0	20	80
6A	0	10	10	20	10	50
6AM	0	0	0	0	0	100
7A	0	0	0	0	0	100

(b)

GED	Cod6-8							
	CF	CL-CT	CL	CP-CT	CP	EE	PC	CT
3AM	0	0	0	0	50	50	0	0
4A	0	0	30	0	10	50	10	0
4AM	10	0	30	10	30	20	0	0
5A	0	10	10	0	10	0	10	60
5AM	0	0	40	10	0	10	0	40
6A	0	10	50	0	20	0	0	20
6AM	0	0	12,5	0	0	0	0	87,5
7A	0	0	12,5	0	25	0	0	62,5

Tabla D.11. Porcentajes de uso de las estrategias globales por grupos de edad en las tareas de Orden con cantidades discretas. (a) Primer subconjunto; (b) Segundo subconjunto.

## D.4 Uso de las piezas sobrantes

Clave	HPCDi, i=3, 4, 8			NTar	TarU	SCCD5	NivelCD
	3	4	8				
13AM1	6			1	3	,42	1
13AM2				0		1,25	1
13AM3	6			1	3	,00	1
13AM4				0		,00	1
13AM5				0		,83	1
23AM2	6			1	3	,42	1
23AM3	6			1	3	,83	1
23AM4	6			1	3	,00	1
23AM5	6C34			1	3-C3	,00	1
23AM6				0		,00	1
14A2				0		,42	1
14A3	6			1	3	,00	1
14A4		68		1	4	,83	1
14A5	6			1	3	,00	1
14A6				0		,00	1
24A1		7	8	2	48	1,67	1
24A3	6			1	3	,83	1
24A4				0		,83	1
24A5			67-CM	1	8-C8	,83	1
24A6	46	7	C2747	2	34-C8	,00	1
14AM1				0		,83	1
14AM2				0		2,50	2
14AM3		8		1	4	,00	1
14AM4				0		1,25	1
14AM5				0		,42	1
24AM1			C3536	0	C8	,00	1
24AM2		87	5-C16	2	48-C8	,83	1
24AM3				0		1,25	1
24AM4			5-CM	1	8-C8	1,67	1
24AM6	6			1	3	,00	1
15A1			8	1	8	2,08	2
15A2	6	8	8	3	348	1,25	1
15A3			8	1	8	3,75	3
15A4				0		3,33	3

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.12: Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades discretas.

... viene de la página anterior.

Clave	HPCDi, i=3, 4, 8			NTar	TarU	SCCD5	NivelCD
	3	4	8				
15A5				0		4,17	3
25A1	6	8		2	34	1,25	1
25A2				0		3,75	3
25A3				0		5,00	3
25A4			8-C38	1	8-C8	,83	1
25A5			8-C27	1	8-C8	1,67	1
15AM1			8	1	8	,83	1
15AM2			8	1	8	,83	1
15AM3				0		,83	1
15AM4			8	1	8	,83	1
15AM5	6			1	3	3,75	3
25AM1				0		2,92	2
25AM3				0		3,75	3
25AM4	46		8	2	38	,00	1
25AM5				0		2,92	2
25AM6				0		3,33	3
16A2			8	1	8	,42	1
16A3				0		4,17	3
16A4				0		,83	1
16A5				0		2,50	2
16A6				0		1,25	1
26A1				0		1,25	1
26A2	6	6	6	3	248	,00	1
26A3			78	1	8	1,67	1
26A4				0		3,75	3
26A5	6			1	3	,83	1
16AM1				0		3,33	3
16AM2				0		5,00	3
16AM3	6			1	3	3,33	3
16AM4				0		4,58	3
16AM5	6		8	2	38	,42	1
16AM6				0		3,33	3
16AM7				0		3,33	3
16AM8				0		1,67	1
17A1				0		3,33	3

Continúa en la página siguiente ...

Tabla D.12: Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades discretas.



... viene de la página anterior.

Clave	HPCDi, i=3, 4, 8			NTar	TarU	SCCD5	NivelCD
	3	4	8				
17A10				0		,42	1
17A3				0		4,58	3
17A4				0		3,75	3
17A6				0		,83	1
17A7			8	1	8	4,17	3
17A8	6			1	3	3,33	3
17A9		8	8	2	48	1,25	1

Tabla D.12: Uso de la pieza sobrante. Tareas de orden con cantidades discretas.

(a)

GED	HPCD3			
	0	46	6	6-C34
3AM	40	0	50	10
4A	60	10	30	0
4AM	90	0	10	0
5A	80	0	20	0
5AM	80	10	10	0
6A	80	0	20	0
6AM	75	0	25	0
7A	87,5	0	12,5	0
Total	73,7	2,6	22,4	1,3

(b)

GED	HPCD4					
	0	6	68	7	78	8
3AM	100	0	0	0	0	0
4A	70	0	10	20	0	0
4AM	80	0	0	0	10	10
5A	80	0	0	0	0	20
5AM	100	0	0	0	0	0
6A	90	10	0	0	0	0
6AM	100	0	0	0	0	0
7A	87,5	0	0	0	0	12,5
Total	88,2	1,3	1,3	2,6	1,3	5,3

(c)

GED	HPCD8										
	0	5-C16	5-CM	6	67-CM	78	8-C27	8-C38	8	C2747	C3536
3AM	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4A	70	0	0	0	10	0	0	0	10	10	0
4AM	70	10	10	0	0	0	0	0	0	0	10
5A	50	0	0	0	0	0	10	10	30	0	0
5AM	60	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
6A	70	0	0	10	0	10	0	0	10	0	0
6AM	87,5	0	0	0	0	0	0	0	12,5	0	0
7A	75	0	0	0	0	0	0	0	25	0	0
Total	72,4	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	15,8	1,3	1,3

Tabla D.13. Destinos de las piezas sobrantes. Orden con cantidades discretas.

Tareas: (a) tercera; (b) cuarta; (c) octava.

### D.5 Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad en orden con cantidades discretas

Los datos que aparecen a continuación muestran las características de los ajustes de la variable *MedCD* en función de la edad de los grupos mediante los modelos Inverso y de la curva *S*.

Modelo	$R$	$R^2$	$R^2$ corregida	Error típico de la estimación
Inverso	,862	,742	,699	,583
Curva <i>S</i>	,924	,854	,830	,332

Tabla D.14: Ajuste de *MedCD* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los datos del análisis de la varianza en ambos casos se recogen en la tabla D.15.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
<b>Inverso</b>					
Regresión	8,876	1	5,876	17,288	,006
Residual	2,039	6	,340		
Total	7,915	7			
<b>Curva <i>S</i></b>					
Regresión	3,870	1	3,870	35,210	,001
Residual	,660	6	,011		
Total	4,530	7			

Tabla D.15: ANOVA de los ajustes de *MedCD* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los coeficientes del modelo junto con sus significaciones al 95 % se muestran a continuación en la tabla D.16.

	Coeficientes no estandarizados		t	Sig.
	B	Error típico		
<b>Inverso</b>				
1 / EDG	-18,495	4,448	-4,158	,006
Constante	5,456	,915	5,964	,001
<b>Curva S</b>				
1 / EDG	-15,011	2,530	-5,934	,001
Constante	3,334	,520	6,408	,001

Tabla D.16: Coeficientes del ajuste de *MedCD* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Las tablas D.17 y D.18 recogen las edades de los grupos, los valores observados de la variable *MedCD*, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95 % para ambos modelos.

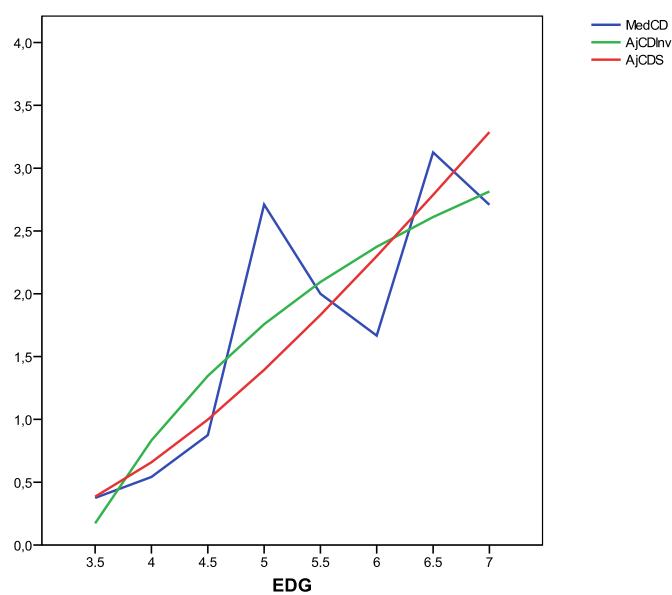
EDG	MedCD	AjCDI	ErrCDI	EICD95I	ESCD95I
3,5	,375	,17218	,20282	-1,60316	1,94752
4,0	,542	,83272	-,29072	-,77380	2,43924
4,5	,875	1,34647	-,47147	-,18513	2,87807
5,0	2,710	1,75747	,95253	,24441	3,27054
5,5	2,000	2,09375	-,09375	,56725	3,62025
6,0	1,667	2,37398	-,70698	,81703	3,93092
6,5	3,125	2,61109	,51391	1,01548	4,20671
7,0	2,708	2,81434	-,10634	1,17681	4,45186

Tabla D.17: Datos del ajuste de *MedCD* mediante el modelo Inverso

EDG	MedCD	AjCDS	ErrCDS	EICD95S	ESCD95S
3,5	,375	,38499	-,00999	,14028	1,05663
4,0	,542	,65808	-,11608	,26394	1,64079
4,5	,875	,99853	-,12353	,41792	2,38581
5,0	2,710	1,39390	1,31610	,58957	3,29552
5,5	2,000	1,83130	,16870	,76868	4,36287
6,0	1,667	2,29897	-,63197	,94842	5,57269
6,5	3,125	2,78683	,33817	1,12467	6,90548
7,0	2,708	3,28661	-,57861	1,29513	8,34032

Tabla D.18: Datos del ajuste de *MedCD* mediante la curva *S*

En el gráfico de la Figura D.1 se representan los valores observados de la variable *MedCD* y los ajustados mediante ambos modelos.

Fig. D.1. Ajuste de *MedCD* mediante los modelos Inverso y *S*.

Finalmente, el gráfico de la Figura D.2 muestra la independencia de los errores de los modelos y de los valores ajustados, lo que prueba también su significación.

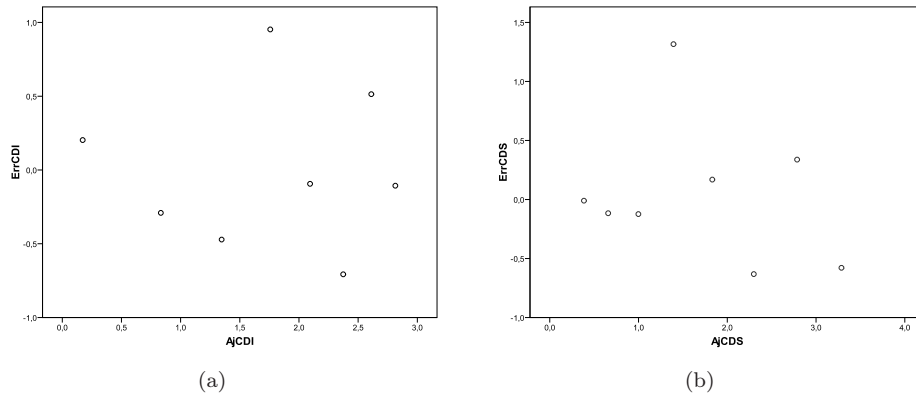


Fig. D.2. Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva  $S$  para *MedCD*.

## Anexo E

# DATOS COMPLEMENTARIOS EN LAS TAREAS RECURSIVAS

### E.1 Definiciones recursivas de las funciones que intervienen en las tareas

Las posiciones de los plátanos en cada una de las tareas del conjunto están definidas por los valores o imágenes de las siguientes funciones recursivas:

Tarea	Función
<b>Primera:</b>	$\begin{cases} \alpha_1 : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \\ 1 \rightarrow \alpha_1(1) = 1 \\ n \rightarrow \alpha_1(n) = s^2(\alpha_1(n-1)) \end{cases}$ <p>Imágenes: 1, 3, 5, 7, 9, ...</p>
<b>Segunda:</b>	$\alpha_2 :=$ fórmula coincidente con $\alpha_1$ , tomando $\alpha_2(1) = 2$ . <p>Imágenes: 2, 4, 6, 8, 10, ...</p>
<b>Tercera:</b>	$\alpha_3 = \alpha_2$ . Imágenes: 2, 4, 6, 8, 10, ...
Siendo $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ , $s(n)$ la función sucesor u operador siguiente y $s^2(n) = s(s(n))$ , la composición de $s$ consigo misma.	
<b>Cuarta:</b>	$\begin{cases} \beta_1 : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \\ 1 \rightarrow \beta_1(1) = 1 \\ n \rightarrow \beta_1(n) = s^3(\beta_1(n-1)) \end{cases}$ <p>Imágenes: 1, 4, 7, 10, 13, ...</p>

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.1: Definiciones recursivas de las funciones que intervienen en las tareas.

... viene de la página anterior.

Tarea	Función
<b>Quinta:</b>	$\beta_2 :=$ fórmula coincidente con $\beta_1$ , tomando $\beta_2(1) = 2$ . Imágenes: 2, 5, 8, 11, 14, ...
<b>Sexta:</b>	$\beta_3 :=$ fórmula coincidente con $\beta_1$ , tomando $\beta_3(1) = 3$ . Imágenes: 3, 6, 9, 12, 15, ...
Siendo $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ , $s(n)$ la función sucesor u operador siguiente y $s^3(n) = s(s(s(n)))$ la composición de $s$ consigo misma tres veces.	

Tabla E.1: Definiciones recursivas de las funciones que intervienen en las tareas.



## E.2 Valoración de las tareas

SR5	Casos	EvRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6						Clave
		1	2	3	4	5	6	
0	1	0	0	0	0	0	0	13AM1
	2	0	0	0	0	0	0	13AM2
	3	0	0	0	0	0	0	13AM3
	4	0	0	0	0	0	0	13AM5
	5	0	0	0	0	0	0	23AM3
	6	0	0	0	0	0	0	23AM4
	7	0	0	0	0	0	0	14A2
	8	0	0	0	0	0	0	14A3
	9	0	0	0	0	0	0	14A5
	1	0	0	0	0	0	0	24A1
	11	0	0	0	0	0	0	24AM1
	12	0	0	0	0	0	0	24AM3
<b>Total</b>								<b>12</b>
,83	1	1	0	0	0	0	0	13AM4
	2	0	1	0	0	0	0	23AM2
	3	1	0	0	0	0	0	14A4
	4	0	1	0	0	0	0	24A5
	5	0	1	0	0	0	0	14AM3
	6	0	0	1	0	0	0	14AM4
	7	0	1	0	0	0	0	14AM5
	8	0	0	1	0	0	0	24AM2
	9	0	1	0	0	0	0	24AM6
	1	0	0	1	0	0	0	26A2
<b>Total</b>								<b>1</b>
1,25	1	0	1	0	0	0	0,5	17A3
	<b>Total</b>							
1,67	1	1	1	0	0	0	0	23AM5
	2	1	1	0	0	0	0	23AM6
	3	1	1	0	0	0	0	14A6
	4	1	1	0	0	0	0	24A3
	5	0	0	1	0	0	1	24A4
	6	1	1	0	0	0	0	14AM2
	7	1	1	0	0	0	0	24AM4

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.2: Valoración de las respuestas. Tareas recursivas.

... viene de la página anterior.

		EvRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6						
SR5	Casos	1	2	3	4	5	6	Clave
	8	0	1	1	0	0	0	25A1
	9	1	1	0	0	0	0	15AM1
	1	1	1	0	0	0	0	25AM3
	11	1	1	0	0	0	0	16A4
	12	1	0	1	0	0	0	26A4
	13	1	0	1	0	0	0	16AM5
<b>Total</b>								<b>13</b>
<b>2,08</b>	1	0	1	1	0	0,5	0	24A6
	2	1	1	0	0	0,5	0	26A1
<b>Total</b>								<b>2</b>
<b>2,50</b>	1	1	1	0	0	1	0	14AM1
	2	1	1	1	0	0	0	25A3
	3	1	1	1	0	0	0	25A4
	4	1	1	0	0,5	0,5	0	15AM2
	5	0	1	1	1	0	0	16A6
<b>Total</b>								<b>5</b>
<b>2,92</b>	1	0	1	1	1	0	0,5	15A1
	2	1	1	1	0	0,5	0	15A2
	3	1	1	0	1	0	0,5	25A5
	4	0	1	1	0	0,5	1	15AM4
	5	1	1	1	0	0,5	0	25AM5
	6	1	1	1	0	0,5	0	26A3
	7	1	1	1	0	0,5	0	26A5
	8	1	1	1	0	0,5	0	16AM6
	9	1	1	1	0	0	0,5	17A4
	1	1	1	1	0	0,5	0	17A9
<b>Total</b>								<b>1</b>
<b>3,33</b>	1	1	1	1	0	0	1	15A5
	2	0	0	1	1	1	1	15AM3
	3	1	1	0	1	0	1	15AM5
	4	1	1	1	0	0	1	25AM1
	5	1	1	1	0	0	1	25AM4
	6	1	1	1	0	0	1	16AM7
	7	1	1	1	0	0	1	17A1

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.2: Valoración de las respuestas. Tareas recursivas.

... viene de la página anterior.

		EvRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6						
SR5	Casos	1	2	3	4	5	6	Clave
<b>Total</b>								<b>7</b>
<b>3,75</b>	1	1	1	1	0	0,5	1	15A3
	2	1	1	1	1	0	0,5	25A2
	3	1	1	1	1	0,5	0	25AM6
	4	1	1	0	1	0,5	1	16A3
<b>Total</b>								<b>4</b>
<b>4,17</b>	1	1	1	1	1	0	1	15A4
	2	1	1	0	1	1	1	16A5
	3	1	1	0	1	1	1	16AM1
	4	1	1	1	1	0	1	16AM2
	5	1	1	1	0	1	1	16AM3
	6	1	1	1	0	1	1	16AM4
	7	1	1	1	0,5	0,5	1	16AM8
	8	0	1	1	1	1	1	17A1
	9	1	1	1	1	0,5	0,5	17A6
<b>Total</b>								<b>9</b>
<b>4,58</b>	1	1	1	1	1	0,5	1	16A2
	2	1	1	1	1	0,5	1	17A7
<b>Total</b>								<b>2</b>
<b>5,00</b>	1	1	1	1	1	1	1	17A8
	<b>Total</b>							
<b>Total</b>								<b>76</b>

Tabla E.2: Valoración de las respuestas. Tareas recursivas.

### E.3 Clasificación de las respuestas por niveles en las tareas recursivas.

		EvRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6							
NivelR	SR5	Casos	1	2	3	4	5	6	Clave
<b>1</b>	<b>0,0</b>	1	0	0	0	0	0	0	13AM1
		2	0	0	0	0	0	0	13AM2
		3	0	0	0	0	0	0	13AM3
		4	0	0	0	0	0	0	13AM5

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.3: Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.

... viene de la página anterior.

NivelR	SR5	Casos	EvRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6						Clave
			1	2	3	4	5	6	
		5	0	0	0	0	0	0	23AM3
		6	0	0	0	0	0	0	23AM4
		7	0	0	0	0	0	0	14A2
		8	0	0	0	0	0	0	14A3
		9	0	0	0	0	0	0	14A5
		10	0	0	0	0	0	0	24A1
		11	0	0	0	0	0	0	24AM1
		12	0	0	0	0	0	0	24AM3
		<b>Total</b>							<b>12</b>
	<b>,83</b>	1	1	0	0	0	0	0	13AM4
		2	0	1	0	0	0	0	23AM2
		3	1	0	0	0	0	0	14A4
		4	0	1	0	0	0	0	24A5
		5	0	1	0	0	0	0	14AM3
		6	0	0	1	0	0	0	14AM4
		7	0	1	0	0	0	0	14AM5
		8	0	0	1	0	0	0	24AM2
		9	0	1	0	0	0	0	24AM6
		10	0	0	1	0	0	0	26A2
		<b>Total</b>							<b>10</b>
	<b>1,25</b>	1	0	1	0	0	0	0,5	17A3
		<b>Total</b>							<b>1</b>
	<b>1,67</b>	1	1	1	0	0	0	0	23AM5
		2	1	1	0	0	0	0	23AM6
		3	1	1	0	0	0	0	14A6
		4	1	1	0	0	0	0	24A3
		5	0	0	1	0	0	1	24A4
		6	1	1	0	0	0	0	14AM2
		7	1	1	0	0	0	0	24AM4
		8	0	1	1	0	0	0	25A1
		9	1	1	0	0	0	0	15AM1
		10	1	1	0	0	0	0	25AM3
		11	1	1	0	0	0	0	16A4
		12	1	0	1	0	0	0	26A4

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.3: Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.

... viene de la página anterior.

NivelR	SR5	Casos	EvRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6						Clave
			1	2	3	4	5	6	
		13	1	0	1	0	0	0	16AM5
		<b>Total</b>							<b>13</b>
		<b>Total</b>							<b>36</b>
<b>2</b>	<b>2,08</b>	1	0	1	1	0	0,5	0	24A6
		2	1	1	0	0	0,5	0	26A1
		<b>Total</b>							<b>2</b>
<b>2,50</b>		1	1	1	0	0	1	0	14AM1
		2	1	1	1	0	0	0	25A3
		3	1	1	1	0	0	0	25A4
		4	1	1	0	0,5	0,5	0	15AM2
		5	0	1	1	1	0	0	16A6
		<b>Total</b>							<b>5</b>
<b>2,92</b>		1	0	1	1	1	0	0,5	15A1
		2	1	1	1	0	0,5	0	15A2
		3	1	1	0	1	0	0,5	25A5
		4	0	1	1	0	0,5	1	15AM4
		5	1	1	1	0	0,5	0	25AM5
		6	1	1	1	0	0,5	0	26A3
		7	1	1	1	0	0,5	0	26A5
		8	1	1	1	0	0,5	0	16AM6
		9	1	1	1	0	0	0,5	17A4
		10	1	1	1	0	0,5	0	17A9
		<b>Total</b>							<b>10</b>
		<b>Total</b>							<b>17</b>
<b>3</b>	<b>3,75</b>	1	1	1	1	0	0,5	1	15A3
		2	1	1	1	1	0	0,5	25A2
		3	1	1	1	1	0,5	0	25AM6
		4	1	1	0	1	0,5	1	16A3
		<b>Total</b>							<b>4</b>
<b>4,17</b>		1	1	1	1	1	0	1	15A4
		2	1	1	0	1	1	1	16A5
		3	1	1	0	1	1	1	16AM1
		4	1	1	1	1	0	1	16AM2
		5	1	1	1	0	1	1	16AM3

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.3: Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.

... viene de la página anterior.

NivelR	SR5	Casos	EvRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6						Clave
			1	2	3	4	5	6	
		6	1	1	1	0	1	1	16AM4
		7	1	1	1	0,5	0,5	1	16AM8
		8	0	1	1	1	1	1	17A10
		9	1	1	1	1	0,5	0,5	17A6
		<b>Total</b>							<b>9</b>
<b>3,33</b>		1	1	1	1	0	0	1	15A5
		2	0	0	1	1	1	1	15AM3
		3	1	1	0	1	0	1	15AM5
		4	1	1	1	0	0	1	25AM1
		5	1	1	1	0	0	1	25AM4
		6	1	1	1	0	0	1	16AM7
		7	1	1	1	0	0	1	17A1
		<b>Total</b>							<b>7</b>
<b>4,58</b>		1	1	1	1	1	0,5	1	16A2
		2	1	1	1	1	0,5	1	17A7
		<b>Total</b>							<b>2</b>
<b>5</b>		1	1	1	1	1	1	1	17A8
		<b>Total</b>							<b>1</b>
<b>Total</b>		<b>Total</b>							<b>23</b>

Tabla E.3: Clasificación de las respuestas por niveles. Tareas recursivas.

#### E.4 Estrategias de los sujetos en las tareas recursivas

NivelR	SR5	Clave	GED	EstRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6					
				1	2	3	4	5	6
1	,00	13AM1	3AM	EE	S	S	X	X	X
		13AM2	3AM	S	S	S	X	X	X
		13AM3	3AM	S	S	S	X	X	X
		13AM5	3AM	S	S	EE	X	X	X
		23AM3	3AM	EE	EE	SD	X	X	X
		23AM4	3AM	S	S	S	S	S	S
		14A2	4A	S	S	S	X	X	X

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.4: Estrategias de los sujetos por niveles y según los valores de la variable **SR5**. Tareas recursivas.

... viene de la página anterior.

NivelR	SR5	Clave	GED	EstRi, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6					
				1	2	3	4	5	6
		14A3	4A	S	S	S	S	X	X
		14A5	4A	S	S	S	X	X	X
		24A1	4A	S	SD	S	S	X	X
		24AM1	4AM	EE	S	S	S	S	S
		24AM3	4AM	EE	EE	SD	SD	EE	SD
	,83	13AM4	3AM	D	S	S	X	X	X
		23AM2	3AM	EE	D	EE	EE	X	X
		14A4	4A	A	S	S	SD	S	X
		24A5	4A	S	A	S	S	S	S
		14AM3	4AM	S	A	S	S	S	S
		14AM4	4AM	S	S	A	S	S	EE
		14AM5	4AM	S	A	S	EE	EE	EE
		24AM2	4AM	S	S	A	EE	S	EE
	24AM6	4AM	S	A	S	S	S	S	
	26A2	6A	S	EE	A	EE	S	EE	
	1,25	17A3	7A	EE	A	EE	SD	EE	A
	1,67	23AM5	3AM	A	A	S	S	S	X
		23AM6	3AM	A	PI	S	S	S	EE
		14A6	4A	A	A	S	S	S	X
		24A3	4A	A	A	S	S	S	S
24A4		4A	EE	S	A	EE	EE	A	
14AM2		4AM	A	A	S	S	SD	EE	
24AM4		4AM	A	A	S	S	EE	S	
25A1		5A	EE	A	A	SD	EE	EE	
15AM1		5AM	A	A	EE	EE	EE	EE	
25AM3		5AM	A	A	SD	SD	SD	SD	
16A4		6A	A	A	EE	SD	EE	EE	
26A4		6A	A	EE	A	EE	EE	EE	
16AM5	6AM	A	S	A	EE	EE	S		
2	2,08	24A6	4A	S	A	A	S	A	EE
		26A1	6A	A	PI	EE	SD	A	EE
	2,50	14AM1	4AM	A	A	S	S	A	EE
		25A3	5A	A	A	A	S	EE	S
		25A4	5A	A	A	A	SD	EE	S
		15AM2	5AM	A	A	S	A	A	EE

Continúa en la página siguiente ...

Tabla E.4: Estrategias de los sujetos por niveles y según los valores de la variable **SR5**. Tareas recursivas.

... viene de la página anterior.

NivelR	SR5	Clave	GED	EstR <sub>i</sub> , i = 1, 2, 3, 4, 5, 6					
				1	2	3	4	5	6
		16A6	6A	S	A	A	A	S	S
	2,92	15A1	5A	S	A	A	A	EE	A
		15A2	5A	A	A	A	EE	A	EE
		25A5	5A	D	A	SD	D	EE	D
		15AM4	5AM	S	A	A	EE	A	A
		25AM5	5AM	A	A	A	SD	A	EE
		26A3	6A	D	A	A	EE	A	S
		26A5	6A	D	A	A	EE	A	S
		16AM6	6AM	A	A	A	S	A	S
		17A4	7A	A	A	A	EE	S	D
		17A9	7A	A	A	A	S	A	EE
3	3,33	15A5	5A	A	A	A	S	S	A
		15AM3	5AM	SD	EE	PI	A	A	A
		15AM5	5AM	A	A	S	A	EE	A
		25AM1	5AM	A	A	A	SD	S	A
		25AM4	5AM	A	A	A	EE	EE	D
		16AM7	6AM	A	A	A	SD	EE	A
		17A1	7A	A	A	A	EE	EE	A
	3,75	15A3	5A	D	A	A	EE	A	A
		25A2	5A	A	A	A	A	EE	A
		25AM6	5AM	A	A	A	A	A	S
		16A3	6A	A	A	S	A	A	A
	4,17	15A4	5A	A	A	A	A	EE	A
		16A5	6A	A	A	EE	A	A	A
		16AM1	6AM	A	A	EE	A	A	A
		16AM2	6AM	A	A	A	A	EE	A
		16AM3	6AM	A	A	A	S	A	A
		16AM4	6AM	A	A	A	EE	A	A
		16AM8	6AM	A	A	A	A	A	A
		17A10	7A	EE	A	A	A	A	A
		17A6	7A	A	A	A	A	A	A
	4,58	16A2	6A	A	A	A	A	A	A
		17A7	7A	A	A	A	A	A	A
	5,00	17A8	7A	D	A	A	A	A	A

Tabla E.4: Estrategias de los sujetos por niveles y según los valores de la variable **SR5**. Tareas recursivas.



### E.5 Datos de los ajustes de las medias por grupos de edad en las tareas recursivas.

Los datos que aparecen a continuación muestran las características de los ajustes de la variable *MedREC* en función de la edad de los grupos mediante los modelos Inverso y de la curva *S*.

Modelo	$R$	$R^2$	$R^2$ corregida	Error típico de la estimación
Inverso	,932	,869	,847	,495
Curva <i>S</i>	,948	,899	,883	,262

Tabla E.5: Ajuste de *MedREC* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los datos del análisis de la varianza en ambos casos se recogen en la tabla D.15.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
<b>Inverso</b>					
Regresión	9,724	1	9,724	39,739	,001
Residual	1,468	6	,245		
Total	11,192	7			
<b>Curva <i>S</i></b>					
Regresión	3,680	1	3,680	53,660	,000
Residual	,411	6	,069		
Total	4,091	7			

Tabla E.6: ANOVA de los ajustes de *MedREC* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Los coeficientes del modelo junto con sus significaciones al 95 % se muestran a continuación en la tabla E.7.

	Coeficientes no estandarizados		t	Sig.
	B	Error típico		
<b>Inverso</b>				
1 / EDG	-23,793	3,774	-6,304	,001
Constante	7,035	,776	9,063	,000
<b>Curva S</b>				
1 / EDG	-14,636	1,998	-7,325	,000
Constante	3,544	,411	8,624	,000

Tabla E.7: Coeficientes del ajuste de *MedREC* mediante los modelos Inverso y de la curva *S*

Las tablas E.8 y E.9 recogen las edades de los grupos, los valores observados de la variable *MedREC*, los correspondientes valores ajustados, los errores del ajuste y los extremos superiores e inferiores de los respectivos intervalos de confianza al 95 % para ambos modelos.

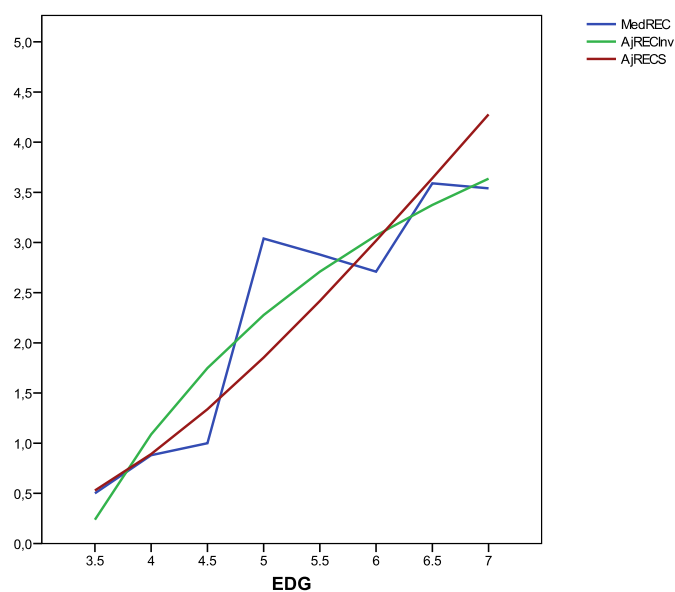
EDG	MedREC	AjRECI	ErrRECI	EIREC95I	ESREC95I
3,5	,50	,23742	,26258	-1,26894	1,74377
4	,88	1,08716	-,20716	-,27596	2,45027
4,5	1,00	1,74807	-,74807	,44852	3,04761
5	3,04	2,27679	,76321	,99298	3,56061
5,5	2,88	2,70939	,17061	1,41417	4,00460
6	2,71	3,06988	-,35988	1,74884	4,39093
6,5	3,59	3,37492	,21508	2,02106	4,72878
7	3,54	3,63638	-,09638	2,24696	5,02580

Tabla E.8: Datos del ajuste de *MedREC* mediante el modelo Inverso

EDG	MedREC	AjRECS	ErrRECS	EIREC95S	ESREC95S
3,5	,50	,52843	-,02843	,23805	1,17304
4	,88	,89126	-,01126	,43313	1,83399
4,5	1,00	1,33837	-,33837	,67267	2,66288
5	3,04	1,85281	1,18719	,93901	3,65587
5,5	2,88	2,41771	,46229	1,21793	4,79938
6	2,71	3,01797	-,30797	1,49966	6,07344
6,5	3,59	3,64089	-,05089	1,77805	7,45542
7	3,54	4,27622	-,73622	2,04937	8,92276

Tabla E.9: Datos del ajuste de *MedREC* mediante la curva *S*

En el gráfico de la Figura E.1 se representan los valores observados de la variable *MedREC* y los ajustados mediante ambos modelos.

Fig. E.1. Ajuste de *MedREC* mediante los modelos Inverso y *S*.

Finalmente, el gráfico de la Figura E.2 muestra la independencia de los errores de los modelos y de los valores ajustados, lo que prueba también su significación.

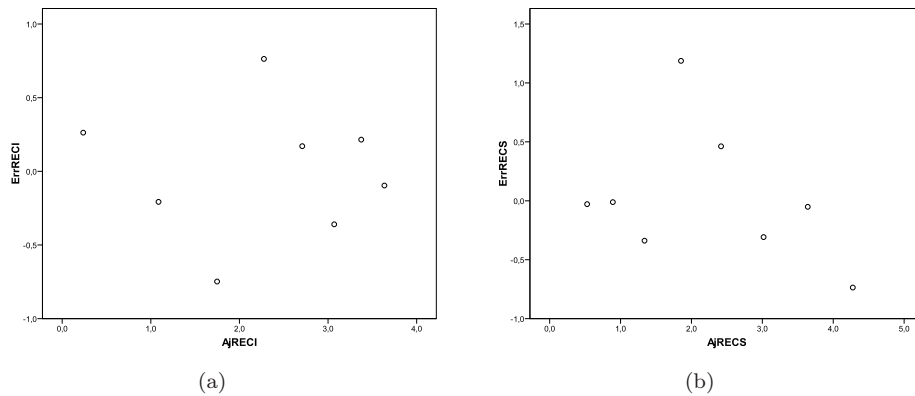


Fig. E.2. Errores frente a valores ajustados en los modelos Inverso y de la curva  $S$  para *MedREC*.

## Anexo F

### DATOS COMPLEMENTARIOS DEL ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS CUATRO CONJUNTOS DE TAREAS

**F.1 Valoraciones totales y niveles en los cuatro conjuntos de tareas**

Clave	GED	EDG	SumL	SumCC	SCCD5	SR5
13AM1	3AM	3,5	1,0	1,00	,42	,00
13AM2	3AM	3,5	3,0	1,00	1,25	,00
13AM3	3AM	3,5	1,0	1,00	,00	,00
13AM4	3AM	3,5	2,0	2,50	,00	,83
13AM5	3AM	3,5	3,0	2,00	,83	,00
23AM2	3AM	3,5	1,0	,00	,42	,83
23AM3	3AM	3,5	2,0	2,00	,83	,00
23AM4	3AM	3,5	3,0	3,00	,00	,00
23AM5	3AM	3,5	2,0	3,00	,00	1,67
23AM6	3AM	3,5	3,0	1,00	,00	1,67
14A2	4A	4,0	2,0	2,00	,42	,00
14A3	4A	4,0	3,0	2,00	,00	,00
14A4	4A	4,0	4,0	2,00	,83	,83
14A5	4A	4,0	3,0	2,00	,00	,00
14A6	4A	4,0	4,0	1,00	,00	1,67
24A1	4A	4,0	3,0	2,50	1,67	,00
24A3	4A	4,0	4,0	2,50	,83	1,67
24A4	4A	4,0	2,0	3,50	,83	1,67
24A5	4A	4,0	3,0	2,50	,83	,83
24A6	4A	4,0	4,0	3,00	,00	2,08
14AM1	4AM	4,5	2,0	2,50	,83	2,50
14AM2	4AM	4,5	3,0	2,50	2,50	1,67

Continúa en la página siguiente ...

Tabla F.1: Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	EDG	SumL	SumCC	SCCD5	SR5
14AM3	4AM	4,5	4,0	1,50	,00	,83
14AM4	4AM	4,5	4,0	2,50	1,25	,83
14AM5	4AM	4,5	4,0	3,00	,42	,83
24AM1	4AM	4,5	5,0	3,50	,00	,00
24AM2	4AM	4,5	3,0	1,50	,83	,83
24AM3	4AM	4,5	1,0	4,00	1,25	,00
24AM4	4AM	4,5	3,0	2,50	1,67	1,67
24AM6	4AM	4,5	1,0	1,50	,00	,83
15A1	5A	5,0	4,0	1,50	2,08	2,92
15A2	5A	5,0	4,0	2,00	1,25	2,92
15A3	5A	5,0	3,0	1,50	3,75	3,75
15A4	5A	5,0	4,0	3,50	3,33	4,17
15A5	5A	5,0	4,0	3,00	4,17	3,33
25A1	5A	5,0	3,0	2,00	1,25	1,67
25A2	5A	5,0	3,0	3,00	3,75	3,75
25A3	5A	5,0	4,0	3,00	5,00	2,50
25A4	5A	5,0	2,0	3,50	,83	2,50
25A5	5A	5,0	1,0	3,00	1,67	2,92
15AM1	5AM	5,5	5,0	4,50	,83	1,67
15AM2	5AM	5,5	4,0	1,00	,83	2,50
15AM3	5AM	5,5	3,0	4,00	,83	3,33
15AM4	5AM	5,5	5,0	3,00	,83	2,92
15AM5	5AM	5,5	5,0	4,00	3,75	3,33
25AM1	5AM	5,5	5,0	3,50	2,92	3,33
25AM3	5AM	5,5	1,0	2,00	3,75	1,67
25AM4	5AM	5,5	4,0	3,00	,00	3,33
25AM5	5AM	5,5	2,0	1,50	2,92	2,92
25AM6	5AM	5,5	5,0	4,00	3,33	3,75
16A2	6A	6,0	4,0	4,50	,42	4,58
16A3	6A	6,0	5,0	3,00	4,17	3,75
16A4	6A	6,0	5,0	3,00	,83	1,67
16A5	6A	6,0	4,0	3,00	2,50	4,17
16A6	6A	6,0	3,0	3,50	1,25	2,50
26A1	6A	6,0	,0	2,00	1,25	2,08
26A2	6A	6,0	4,0	4,00	,00	,83
26A3	6A	6,0	1,0	3,00	1,67	2,92

Continúa en la página siguiente ...

Tabla F.1: Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	EDG	SumL	SumCC	SCCD5	SR5
26A4	6A	6,0	4,0	3,00	3,75	1,67
26A5	6A	6,0	3,0	2,50	,83	2,92
16AM1	6AM	6,5	4,0	3,50	3,33	4,17
16AM2	6AM	6,5	4,0	2,00	5,00	4,17
16AM3	6AM	6,5	5,0	4,50	3,33	4,17
16AM4	6AM	6,5	5,0	3,00	4,58	4,17
16AM5	6AM	6,5	2,0	3,50	,42	1,67
16AM6	6AM	6,5	5,0	4,00	3,33	2,92
16AM7	6AM	6,5	4,0	4,00	3,33	3,33
16AM8	6AM	6,5	5,0	2,50	1,67	4,17
17A1	7A	7,0	4,0	3,50	3,33	3,33
17A10	7A	7,0	5,0	3,00	,42	4,17
17A3	7A	7,0	5,0	3,50	4,58	1,25
17A4	7A	7,0	4,0	3,00	3,75	2,92
17A6	7A	7,0	2,0	3,00	,83	4,17
17A7	7A	7,0	5,0	3,00	4,17	4,58
17A8	7A	7,0	4,0	3,00	3,33	5,00
17A9	7A	7,0	3,0	4,00	1,25	2,92

Tabla F.1: Valoraciones totales de las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.

Clave	GED	EDG	NivelL	NivelCC	NivelCD	NivelR
13AM1	3AM	3,5	1	1	1	1
13AM2	3AM	3,5	2	1	1	1
13AM3	3AM	3,5	1	1	1	1
13AM4	3AM	3,5	1	2	1	1
13AM5	3AM	3,5	2	1	1	1
23AM2	3AM	3,5	1	1	1	1
23AM3	3AM	3,5	1	1	1	1
23AM4	3AM	3,5	2	2	1	1
23AM5	3AM	3,5	1	2	1	1
23AM6	3AM	3,5	2	1	1	1
14A2	4A	4,0	1	1	1	1
14A3	4A	4,0	2	1	1	1
14A4	4A	4,0	3	1	1	1

Continúa en la página siguiente ...

Tabla F.2: Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.

... viene de la página anterior.

Clave	GED	EDG	NivelL	NivelCC	NivelCD	NivelR
14A5	4A	4,0	2	1	1	1
14A6	4A	4,0	3	1	1	1
24A1	4A	4,0	2	2	1	1
24A3	4A	4,0	3	2	1	1
24A4	4A	4,0	1	3	1	1
24A5	4A	4,0	2	2	1	1
24A6	4A	4,0	3	2	1	2
14AM1	4AM	4,5	1	2	1	2
14AM2	4AM	4,5	2	2	2	1
14AM3	4AM	4,5	3	1	1	1
14AM4	4AM	4,5	3	2	1	1
14AM5	4AM	4,5	3	2	1	1
24AM1	4AM	4,5	3	3	1	1
24AM2	4AM	4,5	2	1	1	1
24AM3	4AM	4,5	1	3	1	1
24AM4	4AM	4,5	2	2	1	1
24AM6	4AM	4,5	1	1	1	1
15A1	5A	5,0	3	1	2	2
15A2	5A	5,0	3	1	1	2
15A3	5A	5,0	2	1	3	3
15A4	5A	5,0	3	3	3	3
15A5	5A	5,0	3	2	3	3
25A1	5A	5,0	2	1	1	1
25A2	5A	5,0	2	2	3	3
25A3	5A	5,0	3	2	3	2
25A4	5A	5,0	1	3	1	2
25A5	5A	5,0	1	2	1	2
15AM1	5AM	5,5	3	3	1	1
15AM2	5AM	5,5	3	1	1	2
15AM3	5AM	5,5	2	3	1	3
15AM4	5AM	5,5	3	2	1	2
15AM5	5AM	5,5	3	3	3	3
25AM1	5AM	5,5	3	3	2	3
25AM3	5AM	5,5	1	1	3	1
25AM4	5AM	5,5	3	2	1	3
25AM5	5AM	5,5	1	1	2	2

Continúa en la página siguiente ...

Tabla F.2: Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.



... viene de la página anterior.

Clave	GED	EDG	NivelL	NivelCC	NivelCD	NivelR
25AM6	5AM	5,5	3	3	3	3
16A2	6A	6,0	3	3	1	3
16A3	6A	6,0	3	2	3	3
16A4	6A	6,0	3	2	1	1
16A5	6A	6,0	3	2	2	3
16A6	6A	6,0	2	3	1	2
26A1	6A	6,0	1	1	1	2
26A2	6A	6,0	3	3	1	1
26A3	6A	6,0	1	2	1	2
26A4	6A	6,0	3	2	3	1
26A5	6A	6,0	2	2	1	2
16AM1	6AM	6,5	3	3	3	3
16AM2	6AM	6,5	3	1	3	3
16AM3	6AM	6,5	3	3	3	3
16AM4	6AM	6,5	3	2	3	3
16AM5	6AM	6,5	1	3	1	1
16AM6	6AM	6,5	3	3	3	2
16AM7	6AM	6,5	3	3	3	3
16AM8	6AM	6,5	3	2	1	3
17A1	7A	7,0	3	3	3	3
17A10	7A	7,0	3	2	1	3
17A3	7A	7,0	3	3	3	1
17A4	7A	7,0	3	2	3	2
17A6	7A	7,0	1	2	1	3
17A7	7A	7,0	3	2	3	3
17A8	7A	7,0	3	2	3	3
17A9	7A	7,0	2	3	1	2

Tabla F.2: Niveles asignados a las respuestas de los sujetos en los cuatro conjuntos de tareas.

## F.2 Valoraciones medias por grupos de edad

GED	Edad	MedL	MedCC	MedCD	MedREC
3AM	3,5	2,10	1,65	,38	,50
4A	4,0	3,20	2,30	,54	,88
4AM	4,5	3,00	2,50	,88	1,00
5A	5,0	3,20	2,60	2,71	3,04
5AM	5,5	3,90	3,05	2,00	2,88
6A	6,0	3,30	3,15	1,67	2,71
6AM	6,5	4,25	3,38	3,12	3,59
7A	7,0	4,00	3,25	2,71	3,54

Tabla F.3: Medias de las valoraciones de las respuestas de los sujetos por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas.

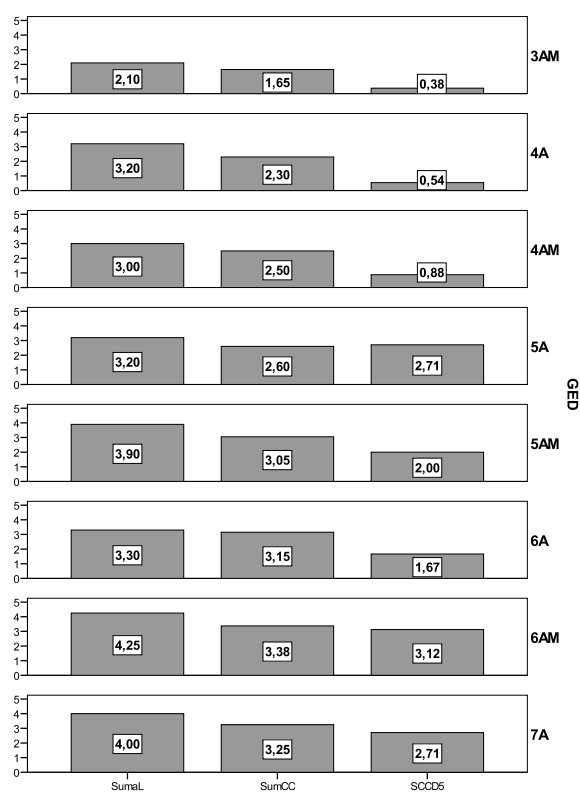


Fig. F.1. Distribuciones de las medias de las valoraciones por grupos de edad para los tres conjuntos de tareas ordinales.

## F.3 Niveles por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas

GED	NivelL		
	1	2	3
3AM	60,0	40,0	,0
4A	20,0	40,0	40,0
4AM	30,0	30,0	40,0
5A	20,0	30,0	50,0
5AM	20,0	10,0	70,0
6A	20,0	20,0	60,0
6AM	12,5	,0	87,5
7A	12,5	12,5	75,0
Total	25,0	23,7	51,3

GED	NivelCC		
	1	2	3
3AM	70,0	30,0	,0
4A	50,0	40,0	10,0
4AM	30,0	50,0	20,0
5A	40,0	40,0	20,0
5AM	30,0	20,0	50,0
6A	10,0	60,0	30,0
6AM	12,5	25,0	62,5
7A	,0	62,5	37,5
Total	31,6	40,8	27,6

GED	NivelCD		
	1	2	3
3AM	100,0	,0	,0
4A	100,0	,0	,0
4AM	90,0	10,0	,0
5A	40,0	10,0	50,0
5AM	50,0	20,0	30,0
6A	70,0	10,0	20,0
6AM	25,0	,0	75,0
7A	37,5	,0	62,5
Total	65,8	6,6	27,6

GED	NivelR		
	1	2	3
3AM	100,0	,0	,0
4A	90,0	10,0	,0
4AM	90,0	10,0	,0
5A	10,0	50,0	40,0
5AM	20,0	30,0	50,0
6A	30,0	40,0	30,0
6AM	12,5	12,5	75,0
7A	12,5	25,0	62,5
Total	47,4	22,4	30,3

Tabla F.4. Porcentajes de los niveles asignados por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. (a) Orden lineal; (b) orden con cantidades continuas; (c) orden con cantidades discretas; (d) tareas recursivas.

(a)

		Grupo de Edad (%)							
Competencia	Nivel	3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A	6AM	7A
O. Lineal	1	60							
	2	40							
	3		40						
O. C. Cont.	1	70							
	2	30							
	3		10						
O. C. Disc.	1	100							
	2			10					
	3				50				
Recursivas	1	100							
	2		10						
	3				40				

(b)

		Grupo de Edad (%)							
Competencia	Nivel	3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A	6AM	7A
O. Lineal	1	60							
	2		40						
	3							87,5	
O. C. Cont.	1	70							
	2						60		62,5
	3							62,5	
O. C. Disc.	1	100							
	2					20			
	3							75	
Recursivas	1	100							
	2				50				
	3							75	

Tabla F.5. Evolución, en porcentajes, de los tres niveles en cada uno de los cuatro conjuntos de tareas. (a) Edades en las que aparecen por primera vez; (b) Edades a las que se hacen más frecuentes.

(a)

		Media							
		3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A	6AM	7A
NivelL		1	2	2	2	3	2	3	3
NivelCC		1	2	2	2	2	2	3	2
NivelCD		1	1	1	2	2	2	3	2
NivelR		1	1	1	2	2	2	3	3

(b)

		Mediana							
		3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A	6AM	7A
NivelL		1	2	2	3	3	3	3	3
NivelCC		1	2	2	2	3	2	3	2
NivelCD		1	1	1	3	2	1	3	3
NivelR		1	1	1	2	3	2	3	3

(c)

		Moda							
		3AM	4A	4AM	5A	5AM	6A	6AM	7A
NivelL		1	2	3	3	3	3	3	3
NivelCC		1	1	2	1	3	2	3	2
NivelCD		1	1	1	3	1	1	3	3
NivelR		1	1	1	2	3	2	3	3

Tabla F.6. Evolución de las medidas centrales de los niveles por grupos de edad en los cuatro conjuntos de tareas. (a) Medias; (b) medianas; (c) modas;

#### F.4 Correlaciones de Pearson entre resultados de los cuatro conjuntos de tareas

(a)

	Edad	SumaL	SumCC	SCCD5	SR5
Edad	1	,428(**) ,000	,539(**) ,000	,539(**) ,000	,752(**) ,000
SumaL	,428(**) ,000	1	,406(**) ,000	,365(**) ,001	,413(**) ,000
SumCC	,539(**) ,000	,406(**) ,000	1	,274(*) ,017	,411(**) ,000
SCCD5	,539(**) ,000	,365(**) ,001	,274(*) ,017	1	,577(**) ,000
SR5	,752(**) ,000	,413(**) ,000	,411(**) ,000	,577(**) ,000	1

(b)

	EDG	MedL	MedCC	MedCD	MedREC
EDG	1	,860(**) ,006	,948(**) ,000	,848(**) ,008	,918(**) ,001
MedL	,860(**) ,006	1	,927(**) ,001	,799(*) ,017	,840(**) ,009
MedCC	,948(**) ,000	,927(**) ,001	1	,808(*) ,015	,889(**) ,003
MedCD	,848(**) ,008	,799(*) ,017	,808(*) ,015	1	,968(**) ,000
MedREC	,918(**) ,001	,840(**) ,009	,889(**) ,003	,968(**) ,000	1

(c)

	Edad	NivelL	NivelCC	NivelCD	NivelR
Edad	1	,404(**) ,000	,467(**) ,000	,502(**) ,000	,658(**) ,000
NivelL	,404(**) ,000	1	,263(*) ,022	,420(**) ,000	,391(**) ,000
NivelCC	,467(**) ,000	,263(*) ,022	1	,248(*) ,031	,346(**) ,002
NivelCD	,502(**) ,000	,420(**) ,000	,248(*) ,031	1	,566(**) ,000
NivelR	,658(**) ,000	,391(**) ,000	,346(**) ,002	,566(**) ,000	1

Tabla F.7. Correlaciones de Pearson entre resultados de los cuatro conjuntos de tareas. (a) Edad y valoraciones de las respuestas; (b) Edad (EDG) y valoraciones medias por grupos de edad; (c) Edad y niveles de los sujetos.

(\*\*) La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral), (\*) la correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral). El número que está debajo de cada coeficiente indica su significación bilateral.

METODOLOGÍA MULTIMEDIA  
Y EVOLUCIÓN DEL PENSAMIENTO  
MATEMÁTICO ORDINAL  
PRENUMÉRICO  
EN ESCOLARES DE 3 A 7 AÑOS

Pedro Hernández Hernández

Director: Dr. D. José Luis González Marí

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS  
CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

UMA-ESPAÑA