



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, ESTADÍSTICA E  
INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y MATEMÁTICA APLICADA

# Esquemas de volúmenes finitos de alto orden: implementación en GPUs y aplicación a la simulación de flujos geofísicos

SERGIO ORTEGA ACOSTA

TESIS DOCTORAL


UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

ENERO 2016



Publicaciones y  
Divulgación Científica

AUTOR: Sergio Ortega Acosta

 <http://orcid.org/0000-0001-7246-2085>

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer obras derivadas.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA): [riuma.uma.es](http://riuma.uma.es)

D. Manuel Jesús Castro Díaz, Profesor Titular del Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, y D. José Manuel González Vida, Profesor Contratado Doctor del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga

CERTIFICAN:

Que D. Sergio Ortega Acosta, Licenciado en Matemáticas, ha realizado en el Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, bajo nuestra dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral, titulado:

**Esquemas de volúmenes finitos de alto orden:  
implementación en GPUs y aplicación a la simulación  
de flujos geofísicos.**

Revisado el presente trabajo, estimamos que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Y para que conste a efectos de lo establecido en el artículo octavo del Real Decreto 778/1998, autorizamos la presentación de este trabajo en la Universidad de Málaga.

Málaga, a 12 de Noviembre de 2015

Dr. Manuel Jesús Castro Díaz

Dr. José Manuel González Vida







# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>1. Problemas unidimensionales</b>	<b>9</b>
1.1. Introducción . . . . .	9
1.2. Soluciones débiles . . . . .	10
1.3. Esquemas numéricos camino-conservativos . . . . .	14
1.4. Buen equilibrado . . . . .	21
1.5. Algunos ejemplos de esquemas camino-conservativos . . . . .	23
1.5.1. Método de Roe . . . . .	23
1.5.2. Resolvedores de Riemann de tipo PVM . . . . .	25
1.5.3. PVM-(N-1)U( $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ) o método de Roe . . . . .	29
1.5.4. Métodos PVM-0( $S_0$ ): Esquemas de Rusanov, Lax-Friedrichs y Lax-Friedrichs modificado . . . . .	29
1.5.5. PVM-1U( $S_L, S_R$ ) o método HLL . . . . .	30
1.5.6. Métodos PVM-2( $S_0$ ) o métodos tipo FORCE . . . . .	31
1.5.7. Método PVM-2U( $S_L, S_R$ ) . . . . .	32
1.5.8. Método IFCP o PVM-2U( $S_L, S_R, S_{int}$ ) . . . . .	33
1.5.9. Métodos PVM-4( $S_L, S_R$ ) y PVM-4( $S_0$ ) . . . . .	38
1.5.10. Difusión numérica . . . . .	39
1.6. Método WAF y extensiones . . . . .	42
1.6.1. Método HLL-WAF . . . . .	44
1.6.2. Método PVM-2U( $S_L, S_R$ )-FL . . . . .	46
1.6.3. Método IFCP-WAF . . . . .	48
1.6.4. Extensión a sistemas no conservativos . . . . .	49
1.7. Extensión de alto orden . . . . .	51
<b>2. Problemas bidimensionales</b>	<b>57</b>
2.1. Introducción . . . . .	57
2.2. Discretización numérica . . . . .	60
2.3. Esquemas de alto orden . . . . .	64
2.3.1. Orden de precisión . . . . .	68

2.3.2.	Buen equilibrado . . . . .	69
2.3.3.	Ejemplos de operadores de reconstrucción . . . . .	70
2.3.3.1.	Operador de reconstrucción de tipo MUSCL . . . . .	70
2.3.3.2.	Reconstrucción Compacta de tercer orden . . . . .	71
<b>3.</b>	<b>Ecuaciones de aguas someras de una capa</b>	<b>77</b>
3.1.	Ecuaciones . . . . .	77
3.2.	Esquemas numéricos de primer orden . . . . .	78
3.2.1.	Definición del flujo usando la invariancia por rotaciones . . . . .	80
3.2.2.	Método HLL . . . . .	82
3.2.3.	Método de tipo FORCE . . . . .	83
3.3.	Extensión del esquema HLL-WAF . . . . .	84
3.4.	Extensión de alto orden . . . . .	86
3.5.	Tratamiento Seco-Mojado . . . . .	88
3.5.1.	Redefinición de los términos de presión . . . . .	89
3.5.2.	Imposición de una condición de contorno de tipo pared . . . . .	89
3.6.	Implementación en CUDA . . . . .	90
3.6.1.	Fuentes de Paralelismo . . . . .	90
3.6.1.1.	Esquemas de primer orden y HLL-WAF . . . . .	90
3.6.1.2.	Esquemas de segundo orden . . . . .	92
3.6.1.3.	Esquemas de tercer orden . . . . .	93
3.6.2.	Detalles de la Implementación . . . . .	94
3.6.2.1.	Implementación de los esquemas de primer orden y WAF por líneas . . . . .	94
3.6.2.2.	Implementación del esquema de segundo orden . . . . .	96
3.6.2.3.	Implementación del esquema de tercer orden . . . . .	97
3.7.	Resultados Experimentales . . . . .	98
3.7.1.	Problema de rotura de presa circular . . . . .	98
3.7.2.	Análisis de precisión . . . . .	99
<b>4.</b>	<b>Versión curvilínea</b>	<b>103</b>
4.1.	Introducción . . . . .	103
4.2.	Discretización . . . . .	105
4.2.1.	Discretización del sistema (4.2.2) . . . . .	105
4.2.2.	Discretización de la tercera ecuación del sistema (4.2.2) . . . . .	109
4.3.	Resultados experimentales . . . . .	111
4.3.1.	Experimento de Monai Valley. Experimento de laboratorio. . . . .	112
4.3.1.1.	Comparación con datos reales . . . . .	113
4.3.2.	Experimento del tsunami en la isla de Okushiri . . . . .	121
4.3.2.1.	Comparación con datos reales . . . . .	121
4.3.3.	Experimento del tsunami de Tohoku, 2011 . . . . .	128



4.3.3.1.	Comparación con datos reales . . . . .	128
4.3.3.2.	Amplitud máxima . . . . .	137
4.3.3.3.	Tiempos de cálculo . . . . .	140

<b>Bibliografía</b>	<b>148</b>
---------------------	------------



# Índice de figuras

1.1.	Gráficos del polinomio asociado al método PVM-0( $S_0$ ).	30
1.2.	Gráficos del polinomio asociado al método PVM-1U( $S_L, S_R$ ).	31
1.3.	Gráficos del polinomio asociado al método PVM-2( $S_0$ ).	32
1.4.	Gráficos del polinomio asociado al método PVM-2U( $S_M, S_m$ ).	33
1.5.	Situación de los autovalores. Caso (a.1).	37
1.6.	Situación de los autovalores. Caso (a.2).	37
1.7.	Situación de los autovalores. Caso (b.1).	37
1.8.	Situación de los autovalores. Caso (b.2).	38
1.9.	Gráficos del polinomio asociado al método PVM-4( $S_L, S_R$ ).	39
1.10.	Comparación de las gráficas del polinomio asociado a PVM- $l$ ( $S_0$ ), $l = 0, 2, 4$ para un $S_0 = S_{LF}$ dado.	40
1.11.	Comparación de las gráficas del polinomio asociado a PVM-1U( $S_L, S_R$ ), PVM-2U( $S_L, S_R$ ) y PVM-2U( $S_L, S_R, S_{int}$ ) (IFCP).	41
1.12.	Malla de cómputo y ondas para el método WAF (en la Figura sólo tenemos en cuenta dos ondas).	43
2.1.	Volúmenes finitos.	61
2.2.	División en subceldas de un volumen finito.	62
2.3.	Stencil de la reconstrucción de segundo orden.	71
2.4.	Stencil usado para aproximar las derivadas de $F(\mathbf{x})$ en $\mathbf{p}_E$ .	72
3.1.	Stencil del método WAF para una arista vertical.	86
3.2.	Puntos de cuadratura de una arista.	88
3.3.	Fuentes de paralelismo de los esquemas de orden 1.	91
3.4.	Algoritmo paralelo implementado en CUDA para el orden 1.	94
3.5.	Diferentes pasos en el procesamiento de las aristas.	95
3.6.	Pasos generales para la implementación en CUDA del esquema HLL de segundo orden.	97
3.7.	Vista desde arriba de la evolución del problema de rotura de presa circular en diferentes instantes de tiempo con una malla de $400 \times 400$ volúmenes. De arriba a abajo: HLL de primer orden, HLL de segundo orden, HLL de tercer orden y WAF.	100

4.1. Parámetros de Okada . . . . .	104
4.2. Máximo runup . . . . .	112
4.3. Simulación en laboratorio . . . . .	113
4.4. Onda entrante que es impuesta como condición de contorno . . . . .	114
4.5. Boyas . . . . .	115
4.6. Serie temporal en la boya 1 . . . . .	116
4.7. Serie temporal en la boya 2 . . . . .	116
4.8. Serie temporal en la boya 3 . . . . .	116
4.9. Extensión de la inundación: Tiempo 15 segundos . . . . .	117
4.10. Extensión de la inundación: Tiempo 15.5 segundos . . . . .	117
4.11. Extensión de la inundación: Tiempo 16 segundos . . . . .	118
4.12. Extensión de la inundación: Tiempo 16.5 segundos . . . . .	118
4.13. Extensión de la inundación: Tiempo 17 segundos . . . . .	119
4.14. Punto de máximo runup: $t=16.5$ segundos . . . . .	120
4.15. Península de Aonae . . . . .	121
4.16. Condición Inicial . . . . .	122
4.17. Minutos 3 y 6 de la simulación completa. . . . .	123
4.18. Zoom en la isla de Okushiri. . . . .	124
4.19. Llegadas de las olas a la península de Aonae en los instantes de tiempo $t = 5$ min y $t = 10$ min. . . . .	125
4.20. Series temporales en Iwanai y Esashi . . . . .	125
4.21. Mapa de inundación de la península de Aonae para $t \leq 12.59$ minutos. La escala de color muestra la profundidad máxima del fluido. . . . .	126
4.22. Mapa de inundación en la costa de Hamatsumae, en una zona vecina al este de la península de Aonae, para $t \leq 14$ minutos. La escala de color muestra la profundidad máxima del fluido. . . . .	126
4.23. Mapa de inundación en el valle al norte de Monai. La escala de color muestra la profundidad máxima del fluido. . . . .	127
4.24. Deformación inicial de la superficie del agua (m) . . . . .	129
4.25. Deformación inicial de la superficie del agua (m) . . . . .	130
4.26. Localización de las boyas DART . . . . .	131
4.27. Comparación de los resultados: DART21418 . . . . .	132
4.28. Comparación de los resultados: boya DART21419 . . . . .	132
4.29. Comparación de los resultados: boya DART21413 . . . . .	132
4.30. Comparación de los resultados: boya DART21415 . . . . .	133
4.31. Comparación de los resultados: boya DART21414 . . . . .	133
4.32. Comparación de los resultados: boya DART52402 . . . . .	133
4.33. Localización de las boyas NOWPHAS . . . . .	134
4.34. Comparación de los resultados: boya 803G . . . . .	135
4.35. Comparación de los resultados: boya 801G . . . . .	135
4.36. Comparación de los resultados: boya 202W . . . . .	135

4.37. Comparación de los resultados: boya 219W . . . . .	136
4.38. Comparación de los resultados: boya 205W . . . . .	136
4.39. Altura máxima resolución 4 arcominutos (7430699 volúmenes) . . . . .	137
4.40. Altura máxima resolución 2 arcominutos (29722796 volúmenes) . . . . .	138
4.41. Altura máxima resolución 1 arcominuto (118891184 volúmenes) . . . . .	139
4.42. Altura máxima resolución 1 arcominuto (118891184 volúmenes) (con la capa de fluido transparente) . . . . .	139
4.43. Tiempo de cómputo . . . . .	141
4.44. Speed-Up . . . . .	142



# Agradecimientos

Es mi deseo expresar en estas líneas mi gratitud hacia todos los que han contribuido en la realización de esta memoria.

En primer lugar, quiero agradecer a Manolo Castro y José Manuel González, directores de esta memoria, toda su ayuda, apoyo y dedicación. Toda la paciencia y horas de correcciones que han dedicado a ayudarme en la elaboración de este trabajo, así como los consejos, el buen ambiente de trabajo que siempre crean, y la humildad y el buen hacer que me han conseguido transmitir.

Gracias también a todos los compañeros del grupo EDANYA con los que he trabajado y compartido grandes e inolvidables momentos, que espero seguir compartiendo por muchos años: Carlos Parés, Jorge Macías, Jose María Gallardo, Mari Luz Muñoz, Tomás Morales, Carlos Sánchez Linares y Marc de la Asunción. Todos han contribuido a generar el mejor ambiente de trabajo en el que hemos convivido varios años.

Mi más sincero agradecimiento a mi mujer, por toda su paciencia en los momentos de nervios y estrés con sus palabras de apoyo, por su entrega y dedicación en mi trabajo, porque casi se sabe toda esta memoria tan bien como yo, y sin la cual habría sido todo mucho más difícil. Por estar siempre ahí.

También todo mi agradecimiento a mi familia y mi familia política, ya de sangre, que desde mi inicio en la carrera investigadora se han interesado por el progreso de mi trabajo.

Gracias a todos.

E.E.





# Introducción

La Mecánica de Fluidos Computacional constituye hoy en día una de las herramientas más importantes para la simulación de multitud de fenómenos que tienen lugar en nuestro entorno. El flujo que se produce tras la rotura de una presa o ante la crecida súbita de un río, la circulación de las masas de agua en el mar, el comportamiento de las corrientes atmosféricas, la evolución de un vertido de contaminantes, la erosión y el transporte de sedimentos, los tsunamis, etc... son fenómenos cuyo estudio tiene un enorme interés puesto que afectan al ser humano de forma determinante. Para reducir los riesgos asociados a este tipo de fenómenos es fundamental la predicción, ya que la predicción de desastres naturales como por ejemplo huracanes o tsunamis y la evaluación de sus posibles consecuencias son importantes objetivos a marcarse, puesto que pueden ayudar a salvar muchas vidas y a reducir daños materiales y económicos. Desafortunadamente, es difícil y costoso realizar estudios de laboratorio mediante modelos a escala para estudiar dichos fenómenos. Además, cualquier modificación en los modelos incrementa aún más el coste. Una alternativa es la simulación por ordenador de los fluidos involucrados.

Como hemos dicho, afrontar los problemas planteados precisa, en primer lugar, desentrañar los aspectos teóricos de la física que subyace tras ellos. En segundo lugar se trata de desarrollar modelos numéricos que proporcionen predicciones fiables de los problemas planteados con la suficiente antelación para permitir la toma de decisiones.

En este contexto de flujos geofísicos, estos presentan la característica de tener unas dimensiones verticales que son despreciables frente a las horizontales (es el caso por ejemplo de los flujos en ríos o en cuencas oceánicas). Esta circunstancia permite simplificar en gran medida la formulación matemática de los modelos a usar para su simulación. Para ello, se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales, que son las ecuaciones más generales de la mecánica de fluidos. Dichas ecuaciones son adimensionalizadas y simplificadas, mediante la supresión de los términos pequeños. El sistema así obtenido es sometido a un proceso de integración vertical, llegándose a un sistema de EDP no lineales bidimensional que recibe el nombre de ecuaciones de aguas someras o de aguas poco profundas. En la literatura anglosajona suelen denominarse “shallow water” (que será el término que usamos en la memoria) y en la literatura francesa, ecuaciones de Saint-Venant, en honor del matemático francés Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) que fue el primero en deducirlas (ver [60]).

Algunas de las aplicaciones de este tipo de modelos son las siguientes:

- Estudio de mareas a escala global o local y su influencia en playas e infraestructuras costeras, como puertos, etc...
- Estudio de flujos en ríos y sus consecuencias en infraestructuras llevadas a cabo por el hombre como puentes, carreteras, parques, etc.
- Erosión, transporte de sedimentos y vertidos de contaminantes.
- Efecto de los vientos en lagos, humedales, etc.
- Roturas de presas, inundaciones, etc.
- Gestión de riesgo de inundaciones.
- Flujos oceánicos.
- Estudio de tsunamis.

En esta memoria se consideran métodos numéricos de volúmenes finitos para resolver problemas que pueden ser formulados como una familia de ecuaciones en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(w) + B(w)\frac{\partial w}{\partial x} = G(w)\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (0.0.1)$$

para el caso de una dimensión, o como

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}(w) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(w) + B_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + B_2(w)\frac{\partial w}{\partial y} = G_1(w)\frac{\partial H}{\partial x} + G_2(w)\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (0.0.2)$$

para el caso de dos dimensiones.

Es bien sabido que los métodos estándar que resuelven correctamente sistemas de leyes de conservación, pueden fallar al resolver (0.0.1) o (0.0.2) cuando se aproximan soluciones de equilibrio o cercanas al equilibrio. En el contexto del análisis numérico de sistemas acoplados de leyes de equilibrio, son muchos los autores que se han centrado en el diseño de esquemas que preservan ciertas soluciones de equilibrio, que denominamos *bien equilibrados* (ver Bouchut [5] para una revisión sobre el tema).

Una de las principales técnicas de derivación de esquemas bien equilibrados consiste en elegir primero un esquema conservativo estándar para la discretización de los términos de flujo y discretizar después los términos fuente y los de acoplamiento de manera adecuada, a fin de obtener un esquema consistente que resuelva correctamente una familia predeterminada de soluciones de equilibrio. La principal desventaja de esta técnica es su falta de generalidad: el cálculo de la discretización correcta del término fuente y de los de acoplamiento depende tanto del problema específico como del esquema numérico elegido para discretizar los flujos.

Una segunda técnica para obtener esquemas bien equilibrados para los sistemas anteriores consiste en resolver de forma exacta o aproximada problemas de Riemann en las interceldas donde todos los términos de la ecuación son tenidos en cuenta: no se establecen así distinciones a priori en el tratamiento numérico de los distintos términos. La dificultad principal de esta técnica desde el punto de vista matemático así como desde el punto de vista numérico reside en la presencia de productos no conservativos, que dificulta la definición de soluciones débiles. Los métodos numéricos presentados en esta memoria siguen esta línea, interpretando los productos no conservativos como medidas de Borel en el sentido dado por Dal Maso, LeFloch, y Murat en [22], para lo que será necesaria la definición de una familia de caminos. Estos métodos fueron propuestos inicialmente por Parés en [55] y reciben el nombre de *camino-conservativos*.

Esta segunda estrategia permite de forma natural la obtención de esquemas de alto orden bien equilibrados, como los descritos en [13], [44], [55].

Uno de los objetivos marcados en esta memoria es el diseño de un operador de reconstrucción bidimensional de tercer orden que, combinado con cualquier esquema bien equilibrado de los descritos en este trabajo, nos permita definir un esquema de alto orden bidimensional y bien equilibrado.

Otra estrategia para mejorar la precisión de los esquemas de primer orden consiste en considerar métodos basados en limitadores de flujo. Estos métodos resultan de combinar un esquema de orden uno TVD (Total Variation Diminishing) con otro de segundo orden (habitualmente Lax-Wendroff) no TVD mediante el uso de limitadores no lineales. Uno de los métodos más populares que aplica esta técnica es el método que se conoce con el nombre de WAF propuesto por Toro en [66] en el marco de sistemas de leyes de conservación. Recientemente en [10], [29], se han propuesto métodos de limitadores de flujo camino-conservativos que son bien equilibrados y que proporcionan una aproximación de segundo orden para problemas unidimensionales.

En esta memoria proponemos un nuevo método de limitadores de flujo basado en la combinación no lineal del método IFCP definido en [30] y el método de Lax-Wendroff. Al igual que en [10] el método resultante es bien equilibrado y de segundo orden para problemas unidimensionales. Este esquema está especialmente bien adaptado para la simulación de flujos geofísicos estratificados, como por ejemplo el sistema de aguas someras bicapa.

La simulación de flujos geofísicos conlleva la resolución de problemas en dominios computacionales de gran tamaño, como puede ser una cuenca oceánica, en el caso de la simulación de tsunamis, y, a veces, para tiempos de simulación grandes, como la simulación de corrientes inducidas por la marea. En ambos casos estas simulaciones imponen una gran demanda computacional, como consecuencia, se requieren simuladores muy eficientes para resolver estos problemas en tiempos razonables.

Dado que en la resolución numérica de los sistemas de aguas someras debe realizarse la misma tarea sobre un conjunto de datos, esto es, presenta un alto grado de paralelismo de datos, se han publicado varios trabajos sobre la aceleración de esta resolución usando arquitecturas paralelas.

Así, por ejemplo, en [14] se presenta el esquema numérico de Roe para la simulación 2D de aguas someras y una implementación paralela de dicho esquema en un clúster de PCs. En [15] se mejora esta implementación paralela mediante el uso de instrucciones optimizadas SSE (Streaming SIMD Extensions) con el objetivo de acelerar los cálculos con matrices y vectores de tamaño pequeño en cada nodo del clúster. A pesar de que estas mejoras hacen posible obtener resultados en menos tiempo computacional, las simulaciones más exigentes todavía requieren demasiado tiempo de ejecución, incluso utilizando clústers con un número elevado de nodos.

Durante los últimos años ha habido una notable evolución en las tarjetas gráficas o Unidades de Procesamiento Gráfico (GPUs), que proporcionan cientos de procesadores optimizados para realizar operaciones aritméticas en paralelo. Esto puede ser una solución para la resolución numérica de diversos problemas en matemáticas e ingeniería, con un bajo coste computacional (véase [53], [59] para una revisión del tema). En [4] puede verse una completa revisión del estado del arte.

Otro de los objetivos que nos hemos marcado en esta memoria es la implementación eficiente de algunos de los métodos propuestos en esta memoria en arquitecturas GPU. En concreto, uno de los retos ha sido el diseño de un esquema numérico y de su implementación eficiente para el sistema de aguas someras de una capa en coordenadas esféricas (longitud/latitud) que permita la simulación de tsunamis en pocos minutos de cómputo, lo que permite obtener una aproximación de los efectos de este tipo de catástrofes naturales con tiempos de cómputo mucho más rápidos que el tiempo real.

## Estructura de la Memoria

La organización de esta memoria es la siguiente:

- En el Capítulo 1 se exponen los fundamentos teóricos necesarios en el diseño de esquemas numéricos de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no conservativos unidimensionales. Se repasan los conceptos de esquema *camino-conservativo* y esquema *bien equilibrado*, así como la extensión de los esquemas numéricos a alto orden, basados en la reconstrucción de estados. En particular se presentan los esquemas de tipo PVM (Polynomial Viscosity Matrix), introducidos en [7], así como diversos esquemas de limitadores de flujo que resultan de la extensión natural del método WAF, utilizando como base algunos esquemas de tipo PVM.
- En el Capítulo 2 se aborda el diseño de esquemas numéricos *camino-conservativos* y *bien equilibrados* de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no conservativos bidimensionales y su extensión a alto orden. En particular se presenta una reconstrucción de estados de tercer orden compacta y que resulta de la combinación WENO de paraboloides y planos.
- El Capítulo 3 se centra en el desarrollo de métodos numéricos para el sistema de aguas someras bidimensional de una capa. En particular se definen esquemas de

primer orden de tipo HLL y FORCE y su extensión a alto orden, un método de limitadores de flujo basado en el esquema HLL-WAF, así como su implementación en arquitecturas de tipo GPU.

- Por último, en el Capítulo 4 se presenta un esquema numérico de orden uno para el sistema de aguas someras de una capa bidimensional en coordenadas esféricas (longitud/latitud), así como la extensión natural del método de limitadores de flujo presentado en el Capítulo 3 a este sistema. Finalmente se presenta la validación del esquema de limitadores de flujo mediante la simulación de tsunamis reales, y la comparación con datos reales.



# Capítulo 1

## Discretización de sistemas hiperbólicos no conservativos unidimensionales mediante esquemas camino-conservativos: conceptos generales

### 1.1. Introducción

En esta sección presentamos un resumen de los resultados obtenidos en [13], [17], [54], [55], útiles para el diseño de esquemas numéricos para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1.1)$$

donde  $W(x, t)$  toma valores en un conjunto convexo  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^M$ , y  $W \in \Omega \mapsto \mathcal{A}(W) \in \mathcal{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$  es una aplicación regular localmente acotada.

Supondremos que el sistema (1.1.1) es estrictamente hiperbólico, es decir, para cada  $W \in \Omega$ ,  $\mathcal{A}(W)$  tiene  $M$  autovalores reales y distintos  $\lambda_1(W) < \dots < \lambda_M(W)$ , con autovectores asociados  $\mathcal{R}_1(W), \dots, \mathcal{R}_M(W)$ . Suponemos además que para cada  $i = 1, \dots, M$ , el campo característico  $\mathcal{R}_i(W)$  es o bien genuinamente no lineal:

$$\nabla \lambda_i(W) \cdot \mathcal{R}_i(W) \neq 0, \quad \forall W \in \Omega,$$

o bien linealmente degenerado:

$$\nabla \lambda_i(W) \cdot \mathcal{R}_i(W) = 0, \quad \forall W \in \Omega.$$

Los métodos numéricos presentados en esta sección se aplicarán a sistemas que se expresan como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(w) + B(w) \frac{\partial w}{\partial x} = G(w) \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1.1.2)$$

donde  $w(x, t)$  toma valores en un conjunto abierto y convexo  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^N$ ;  $F$  es una función regular de  $\mathcal{O}$  a  $\mathbb{R}^N$ ;  $B$ , una función matricial de  $\mathcal{O}$  a  $\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ ;  $G$ , una función de  $\mathcal{O}$  a  $\mathbb{R}^N$ ; y  $H(x)$ , una función conocida de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ . Nótese que el sistema (1.1.2) puede considerarse un caso particular de (1.1.1). En efecto, si añadimos al sistema la ecuación trivial

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1.1.3)$$

(1.1.2), (1.1.3) pueden escribirse en la forma (1.1.1), con  $M = N + 1$ ,

$$W = \begin{bmatrix} w \\ H \end{bmatrix} \in \Omega = \mathcal{O} \times \mathbb{R},$$

y  $\mathcal{A}(W)$  la función matricial cuya estructura de bloques viene dada por:

$$\mathcal{A}(W) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{J}(w) + B(w) & -G(w) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \quad (1.1.4)$$

siendo  $\mathcal{J}(w)$  la matriz jacobiana de  $F(w)$ .

Obsérvese que (1.1.2) engloba casos particulares como las leyes de conservación ( $B \equiv 0$  y  $G \equiv 0$ ), las leyes de equilibrio ( $B \equiv 0$ ) o los sistemas acoplados de leyes de equilibrio. Tales sistemas aparecen con frecuencia en modelos simplificados de la dinámica de fluidos, como los sistemas de aguas someras de una capa (ley de equilibrio) o dos capas homogéneas e inmiscibles (sistema acoplado de dos leyes de equilibrio). Sistemas de similares características también aparecen en otros modelos como los de fluidos multifásicos.

## 1.2. Soluciones débiles

A fin de introducir la noción de solución débil para sistemas no conservativos, recordemos en primer lugar cómo se define para problemas conservativos:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(W) = 0. \quad (1.2.1)$$

Como es bien sabido, dada una solución débil  $W$  de (1.2.1), el término  $F(W)_x$  debe entenderse como una distribución. Esto no ocurre, sin embargo, para el producto no conservativo  $\mathcal{A}(W)W_x$ : en el caso en que una solución débil  $W$  de (1.1.1) presente discontinuidades no se puede dar sentido a dicho producto como distribución. No obstante, siguiendo la teoría desarrollada por Dal Maso, Lefloch y Murat [22] es posible dar una definición rigurosa de



solución débil para el problema (1.1.1) que generaliza el concepto de solución débil para sistemas de leyes de conservación. Para ello, los productos no conservativos se interpretan como medidas de Borel, cuya definición requiere la elección de una familia de caminos en el espacio de fases.

En el caso particular de una solución débil de (1.2.1) regular a trozos, dado  $t > 0$ , la distribución  $[F(W(\cdot, t))_x]$  se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle [F(W(\cdot, t))_x], \phi \rangle = & \\ & \int_{\mathbb{R}} F(W(x, t))_x \phi(x) dx \\ & + \sum_l (F(W_l^+) - F(W_l^-)) \phi(x_l(t)), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

donde la derivada que aparece en el término integral de la última expresión debe entenderse en el sentido clásico; el índice  $l$  de la suma corresponde a las discontinuidades existentes en la solución;  $x_l(t)$  es la posición en el instante  $t$  de la  $l$ -ésima discontinuidad;  $W_l^-$  y  $W_l^+$ , los límites de la solución a la izquierda y a la derecha de la  $l$ -ésima discontinuidad en el instante  $t$ ; finalmente,  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  representa el conjunto de funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y de soporte compacto.

La distribución  $[F(W(\cdot, t))_x]$  puede ser interpretada como una medida de Borel cuya descomposición de Lebesgue es  $\mu_a + \mu_s$ , donde  $\mu_a$  viene dada por:

$$\mu_a(E) = \int_E F(W(x, t))_x dx$$

para cada conjunto de Borel  $E$ , siendo  $F(W(x, t))_x$  la derivada puntual, y

$$\mu_s = \sum_l (F(W_l^+) - F(W_l^-)) \delta_{x=x_l(t)}, \quad (1.2.3)$$

donde  $\delta_{x=a}$  es la medida de Dirac en  $x = a$ . Dado un conjunto de Borel  $E$ , denotaremos su medida mediante:

$$\langle [F(W(\cdot, t))_x], 1_E \rangle = \mu_a(E) + \mu_s(E).$$

La idea clave para generalizar esta interpretación de soluciones débiles reside en expresar cualquier diferencia de flujos  $F(W_R) - F(W_L)$  en términos de la matriz jacobiana  $\mathcal{J}(W)$  mediante la introducción de un camino arbitrario  $\Phi(\cdot; W_L, W_R) : [0, 1] \mapsto \Omega$  tal que:

$$\Phi(0; W_L, W_R) = W_L; \quad \Phi(1; W_L, W_R) = W_R;$$

de la siguiente manera:

$$F(W_R) - F(W_L) = \int_0^1 \mathcal{J}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

Esto anterior nos va a permitir definir el producto no conservativo  $\mathcal{A}(W)W_x$  en el sistema (1.1.1) para funciones regulares a trozos de nuevo como una medida, cuya parte regular se calcula integrando la función  $\mathcal{A}(W)W_x$  y cuya parte singular resulta de sustituir las diferencias de flujo en (1.2.3) por integrales de línea, como veremos a continuación.

La herramienta básica empleada en la teoría desarrollada en [22] para interpretar los productos no conservativos como medidas es una *familia de caminos*, definida como sigue:

**Definición 1.2.1.** Una *familia de caminos* en  $\Omega \subset \mathbb{R}^M$  es una aplicación localmente de Lipschitz

$$\Phi: [0, 1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$$

tal que:

- $\Phi(0; W_L, W_R) = W_L$  y  $\Phi(1; W_L, W_R) = W_R$ , para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ;
- para cada conjunto acotado arbitrario  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , existe una constante  $k$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) \right| \leq k|W_R - W_L|,$$

para cada  $W_L, W_R \in \mathcal{O}$  y cada  $s \in [0, 1]$ ;

- para cada conjunto acotado  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , existe una constante  $K$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^1, W_R^1) - \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^2, W_R^2) \right| \leq K(|W_L^1 - W_L^2| + |W_R^1 - W_R^2|),$$

para cada  $W_L^1, W_R^1, W_L^2, W_R^2 \in \mathcal{O}$  y cada  $s \in [0, 1]$ .

Una vez elegida una familia de caminos  $\Phi$  en  $\Omega$ , el producto no conservativo puede interpretarse como una medida de Borel en  $(L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+))^M$ , denotada por  $[\mathcal{A}(W)W_x]_\Phi$ . Dada una solución débil  $W$  de (1.1.1) regular a trozos, la medida de Borel correspondiente al producto no conservativo se define como:

$$\begin{aligned} \langle [\mathcal{A}(W(\cdot, t))W_x(\cdot, t)]_\Phi, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(W(x, t))W_x(x, t)\phi(x) dx \\ &+ \sum_l \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_l^-, W_l^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_l^-, W_l^+) ds \right) \phi(x_l(t)), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

que, obviamente, generaliza a (1.2.2). En la igualdad anterior, la expresión  $W_x$  de la primera integral representa de nuevo la derivada puntual de  $W(\cdot, t)$ ;  $x_l(t)$ , la posición de la  $l$ -ésima discontinuidad de  $W$  en el instante  $t$ ;  $W_l^-, W_l^+$ , los límites de  $W$  a la izquierda y a la derecha de la  $l$ -ésima discontinuidad en el instante  $t$ ; y  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ , el conjunto de las funciones continuas y de soporte compacto.

Obsérvese que la medida puede descomponerse como una suma  $\mu_a^\Phi + \mu_s^\Phi$  donde:

$$\mu_a^\Phi(E) = \int_E \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx,$$

para cada conjunto de Borel  $E$ , entendiendo a la derivada en sentido puntual, y:

$$\mu_s^\Phi = \sum_l \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_l^-, W_l^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_l^-, W_l^+) ds \right) \delta_{x=x_l(t)}. \quad (1.2.5)$$

A través de una discontinuidad con velocidad  $\xi$ , una solución débil debe satisfacer la condición de Rankine-Hugoniot generalizada

$$\int_0^1 (\xi \cdot Id - \mathcal{A}(\Phi(s; W^-, W^+))) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W^-, W^+) ds = 0, \quad (1.2.6)$$

donde  $Id$  es la matriz identidad y  $W^-$ ,  $W^+$  son los límites a la izquierda y a la derecha de la solución en la discontinuidad. Obsérvese que en el caso particular de un sistema de leyes de conservación, esta condición de Rankine-Hugoniot es independiente de la familia de caminos elegida y se reduce a la condición usual:

$$F(W^+) - F(W^-) = \xi(W^+ - W^-). \quad (1.2.7)$$

Igual que en el caso conservativo, no toda discontinuidad que verifique la condición anterior es admisible. Es necesario, además, adoptar un concepto de solución entrópica, como los siguientes:

**Definición 1.2.2.** Se dice que una solución débil es una solución entrópica en el sentido de Lax si, en cada discontinuidad, existe  $i \in \{1, \dots, M\}$  tal que

$$\lambda_i(W^+) < \xi < \lambda_{i+1}(W^+) \quad \text{y} \quad \lambda_{i-1}(W^-) < \xi < \lambda_i(W^-)$$

si el  $i$ -ésimo campo característico es genuinamente no lineal o

$$\lambda_i(W^-) = \xi = \lambda_i(W^+)$$

si el  $i$ -ésimo campo característico es linealmente degenerado.

**Definición 1.2.3.** Dado un par de entropía  $(\eta, \mathcal{G})$  para (1.1.1), es decir, un par de funciones regulares de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$\nabla \mathcal{G}(W) = \nabla \eta(W) \cdot \mathcal{A}(W), \quad \forall W \in \Omega,$$

se dice que una solución débil es entrópica si satisface la desigualdad:

$$\partial_t \eta(W) + \partial_x \mathcal{G}(W) \leq 0,$$

en el sentido de las distribuciones.

### 1.3. Esquemas numéricos camino-conservativos

El eje central de la teoría en la que se apoya esta memoria para la resolución numérica de sistemas hiperbólicos no conservativos es el concepto de esquema numérico *camino-conservativo* introducido en [55]. Este concepto generaliza el de esquema conservativo para sistemas de leyes de conservación, como vemos a continuación.

Una solución débil de (1.2.1) satisface la igualdad:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} F(W(a, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} F(W(b, t)) dt \right), \quad (1.3.1)$$

para cada rectángulo  $[a, b] \times [t_0, t_1]$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , siendo  $\Delta x = b - a$  y  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

Como es bien sabido, los esquemas conservativos se basan en la igualdad anterior. Primero se consideran celdas computacionales  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Supondremos por simplicidad que todas las celdas tienen el mismo tamaño  $\Delta x$  y que  $x_{i+1/2} = i\Delta x$ . Definamos el centro de la celda  $I_i$  como  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$ . Sea  $\Delta t$  el paso temporal, también constante, y definamos  $t^n = n\Delta t$ . Denotemos por  $W_i^n$  a la aproximación de los promedios de la solución exacta en la celda  $I_i$  proporcionados por el esquema numérico, esto es,

$$W_i^n \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t^n) dx.$$

Entonces, la expresión de un esquema numérico conservativo es:

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i-1/2} - \mathcal{F}_{i+1/2}), \quad (1.3.2)$$

donde

$$\mathcal{F}_{i+1/2} \cong \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

Claramente, la expresión del esquema es el equivalente discreto a la igualdad (1.3.1) correspondiente al rectángulo  $I_i \times [t^n, t^{n+1}]$ .

Esta sencilla interpretación de un esquema numérico conservativo no es fácilmente adaptable al caso de sistemas no conservativos, donde no aparece una función de flujo  $F$ . Por ello, reescribimos (1.3.1) basándonos en la interpretación de  $[F(W)_x]$  como medida:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} \langle [F(W(\cdot, t))_x], 1_{[a,b]} \rangle dt \right). \quad (1.3.3)$$

A continuación, definimos la función constante a trozos  $W^n$  cuyo valor en la celda  $I_i$  es la aproximación  $W_i^n$ . El equivalente discreto a (1.3.3) sería:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle [F(W^n)_x], 1_{I_i} \rangle, \quad (1.3.4)$$

pero esta definición no corresponde a un esquema conservativo (1.3.2). En efecto, como  $W^n$  es constante a trozos, la medida  $[F(W^n)_x]$  sólo consta de la parte singular

$$\sum_i (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Pero, puesto que las celdas  $I_i$  se han definido como intervalos cerrados, en (1.3.4) la masa puntual situada en  $x_{i+1/2}$  debería contribuir a las dos celdas  $I_i$  y  $I_{i+1}$ . En este sentido, el esquema numérico conservativo (1.3.2) puede interpretarse como una *corrección* de (1.3.4): el flujo numérico se usa para descomponer las medidas de Dirac situadas en las interceldas de la siguiente manera:

$$(F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}} = (F(W_{i+1}^n) - \mathcal{F}_{i+1/2}) \delta_{x=x_{i+1/2}} + (\mathcal{F}_{i+1/2} - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

El primer sumando contribuye a la celda  $I_{i+1}$  y el segundo a la celda  $I_i$ :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((F(W_i^n) - \mathcal{F}_{i-1/2}) + (\mathcal{F}_{i+1/2} - F(W_i^n))), \quad (1.3.5)$$

que obviamente equivale a (1.3.2).

Volvamos nuevamente al sistema no conservativo (1.1.1) y supongamos que se ha elegido una familia de caminos  $\Phi$  para definir las soluciones débiles. Dado un rectángulo  $[a, b] \times [t_0, t_1]$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , una solución débil de (1.1.1) satisface la igualdad:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} \langle [\mathcal{A}(W(\cdot, t))W_x(\cdot, t)]_{\Phi}, 1_{[a,b]} \rangle dt \right), \quad (1.3.6)$$

que generaliza (1.3.1).

El equivalente discreto de (1.3.6) es ahora:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle [\mathcal{A}(W^n)W_x]_{\Phi}, 1_{I_i} \rangle,$$

donde, de nuevo,  $W^n$  es la función constante a trozos que toma el valor  $W_i^n$  en la celda  $I_i$ . La medida  $[\mathcal{A}(W^n)W_x]_{\Phi}$  vuelve a constar únicamente de la parte singular:

$$\sum_i \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_i^n, W_{i+1}^n)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i^n, W_{i+1}^n) ds \right) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Por tanto, las masas puntuales situadas en las interceldas deben descomponerse en dos términos  $\mathcal{D}_{i+1/2}^-$  y  $\mathcal{D}_{i+1/2}^+$ , que contribuyen a las celdas  $I_i$  e  $I_{i+1}$  respectivamente. Esta idea conduce a la siguiente definición:

**Definición 1.3.1.** Dada una familia de caminos  $\Phi$ , se dice que un esquema numérico es  $\Phi$ -conservativo si puede escribirse de la siguiente manera:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^-), \quad (1.3.7)$$

donde

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{D}^\pm(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n),$$

siendo  $\mathcal{D}^-$  y  $\mathcal{D}^+$  dos funciones continuas de  $\Omega^{p+q+1}$  a  $\Omega$  verificando:

$$\mathcal{D}^\pm(W, \dots, W) = 0, \quad \forall W \in \Omega, \quad (1.3.8)$$

y

$$\mathcal{D}^-(W_{-q}, \dots, W_p) + \mathcal{D}^+(W_{-q}, \dots, W_p) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_0, W_1) ds, \quad (1.3.9)$$

para cada  $W_{-q}, \dots, W_p \in \Omega$ .

Esta definición generaliza el concepto usual de esquema numérico conservativo para sistemas de leyes de conservación (ver [55]):

**Proposición 1.3.1.** *Supongamos que (1.1.1) es un sistema de leyes de conservación, es decir,  $\mathcal{A}$  es la matriz jacobiana de una función de flujo  $F$ . Entonces, todo esquema numérico  $\Phi$ -conservativo para alguna familia de caminos  $\Phi$  es consistente y conservativo en el sentido usual. Recíprocamente, todo esquema numérico conservativo y consistente es  $\Phi$ -conservativo para cada familia de caminos  $\Phi$ .*

**Observación 1.3.1.** Nótese que la condición (1.3.9) juega un doble papel. Por un lado, se usa para aproximar las masas puntuales asociadas a las discontinuidades. Por otro lado, junto con (1.3.8), es un requisito de consistencia para soluciones regulares. En efecto, si  $W$  y  $\mathcal{A}(W)$  son suficientemente regulares y  $\mathcal{D}^\pm(W_{-q}, \dots, W_p)$  son también regulares, de (1.3.8) y (1.3.9) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (\mathcal{D}^+(W(x_{i-q-1}, t), \dots, W(x_{i+p-1}, t)) + \mathcal{D}^-(W(x_{i-q}, t), \dots, W(x_{i+p}, t))) \\ = \mathcal{A}(W(x_i, t))W_x(x_i, t) + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Los esquemas numéricos camino-conservativos satisfacen cierta propiedad de *conservación*. En efecto, si  $W$  es una solución débil de (1.1.1) correspondiente a una condición inicial  $W_0$  tal que:

$$W_0(x) = W_L, \quad \forall x < -A; \quad W_0(x) = W_R, \quad \forall x > A, \quad (1.3.10)$$

para algún  $A > 0$ , dados  $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$ ,  $W$  satisfice:

$$\int_{\mathbb{R}} (W(x, t_1) - W(x, t_0)) dx = - \int_{t_0}^{t_1} \langle [\mathcal{A}(W(\cdot, t))W_x(\cdot, t)]_{\Phi}, 1 \rangle dt. \quad (1.3.11)$$

Supongamos ahora que aplicamos un esquema  $\Phi$ -conservativo para aproximar esta solución y que  $W^n$  es la función constante a trozos cuyos valores en la celda  $I_i$  es  $W_i^n$ . Teniendo en cuenta (1.2.4) y (1.3.9), de (1.3.11) llegamos a la igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} (W^{n+1}(x) - W^n(x)) dx = -\Delta t \langle [\mathcal{A}(W^n)W_x^n]_{\Phi}, 1 \rangle \quad (1.3.12)$$

que es claramente una aproximación de (1.3.11).

Como hemos visto, los esquemas camino-conservativos para una familia de caminos  $\Phi$  generaliza el concepto usual de esquema numérico para sistemas de leyes de conservación.

Es bien sabido (teorema de Lax-Wendroff) que si las aproximaciones obtenidas por un esquema numérico conservativo convergen (en un sentido a precisar), el límite es una solución débil del problema de valores iniciales asociado al sistema de leyes de conservación. Por tanto, si las soluciones numéricas proporcionadas por un esquema numérico camino-conservativo convergen a una función discontinua, sus discontinuidades deben satisfacer las condiciones de Rankine-Hugoniot (1.2.7).

Nos preguntamos ahora si los esquemas  $\Phi$ -conservativos satisfacen un resultado similar para sistemas (1.1.1). En [19] se probó el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.2.** *Sea  $W_{\Delta x}$  la aproximación numérica obtenida de un esquema numérico  $\Phi$ -conservativo aplicado a la condición inicial*

$$W_i^0 \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_0(x) dx,$$

*Supongamos que existe una función  $W \in (L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, \infty)))^M$  tal que, para cada  $t \in [0, \infty)$ ,*

(H1)  $W_{\Delta x}(\cdot, t) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} W(\cdot, t)$  uniformemente en el sentido de los grafos,

*y que existe una constante  $C$  tal que*

(H2)  $\|W_{\Delta x}(\cdot, t)\|_{\infty(\mathbb{R})} \leq C$  para todo  $t \in [0, \infty)$ , con  $\Delta x > 0$

*y*

(H3)  $TV(W_{\Delta x}(\cdot, t)) \leq C$  para todo  $t \in [0, \infty)$ , con  $\Delta x > 0$ .

Entonces  $W$  es una  $\Phi$ -solución del sistema (1.1.1) con condición inicial  $W(x, 0) = W_0(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

Sin embargo, la convergencia en el sentido de los grafos es demasiado fuerte (véase [19] y [22] para más detalles) y sólo esquemas como los de Glimm y *front tracking* la satisfacen. En general, las aproximaciones de esquemas  $\Phi$ -conservativos convergen a soluciones débiles de un sistema perturbado de (1.1.1): aparece un término fuente que corresponde a una medida del error de la convergencia con soporte en las discontinuidades (véase [19]).

Desde el punto de vista práctico, este error se traduce en que la velocidad y la amplitud de los choques simulados dependen tanto de la familia de caminos como de la viscosidad numérica del esquema (ver [19]). Como consecuencia, no sólo dos esquemas que sean camino-conservativos para diferentes familias de caminos, sino también dos esquemas numéricos diferentes basados en la misma familia de caminos, pueden dar diferentes aproximaciones de un choque (ver ejemplos en [19] y [58]). De hecho, este inconveniente parece extenderse a todos los métodos que presentan alguna viscosidad numérica.

En ciertas situaciones especiales, la medida del error de convergencia es idénticamente cero. Este es el caso de los sistemas de leyes de equilibrio, en los que pueden aparecer dos tipos de discontinuidades en las soluciones débiles: choques que avanzan en regiones donde el término fuente es continuo y que satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot usuales; y discontinuidades de contacto estacionarias situadas sobre las discontinuidades del término fuente. Si la familia de caminos  $\Phi$  elegida para construir el esquema  $\Phi$ -conservativo se elige convenientemente, todas las discontinuidades son aproximadas correctamente y las soluciones numéricas convergen a las soluciones correctas. No obstante, los sistemas de leyes de equilibrio pueden también presentar una dificultad adicional (el problema de resonancia) si uno de los autovalores de la matriz Jacobiana se anula. En este caso, las soluciones débiles no están determinadas de manera única por los datos iniciales, y los límites de las soluciones numéricas pueden depender al mismo tiempo de la familia de caminos y del propio esquema numérico.

Con el objetivo de asegurar la convergencia de las soluciones numéricas hacia una función que sea solución clásica, que sea regular y cuyas discontinuidades concuerden con la física del problema, debemos llevar a cabo los siguientes pasos:

- Elegir una regularización del sistema hiperbólico que sea compatible con la física del problema.
- Calcular una familia de caminos compatible con esta regularización.



- Considerar un esquema numérico cuyas soluciones converjan a la solución débil correspondiente a la familia de caminos.

En la práctica, este enfoque puede resultar muy costoso y difícil de llevar a cabo. El cálculo efectivo de una familia de caminos compatible con una regularización dada requiere el cálculo de los correspondientes choques regularizados. Por otro lado, como hemos mencionado en líneas anteriores, la convergencia de las soluciones numéricas hacia las soluciones débiles correctas sólo está garantizada para los métodos de Glimm y *front tracking* cuya implementación puede también ser muy costosa y tediosa, ya que requiere el conocimiento explícito de la solución del problema de Riemann. De hecho, cuando tomamos el modelo no conservativo como una versión simplificada de uno más complejo (pero conservativo), la estrategia mencionada puede terminar siendo más costosa que resolver directamente el problema complejo en sí.

Por estas razones, el uso de estrategias numéricas basadas en una directa discretización del sistema no conservativo está completamente justificado. En este caso, la elección de esquemas numéricos camino-conservativos tiene las siguientes ventajas:

- Las soluciones numéricas satisfacen la *propiedad conservativa* (1.3.11) compatible con la definición rigurosa de producto no conservativo. En particular, si el sistema tiene un subsistema conservativo, el esquema numérico es conservativo para ese subsistema en el sentido usual.
- Como originalmente se apunta en [37], el error de convergencia sólo se aprecia en general para mallas muy finas, para discontinuidades de gran amplitud y/o para tiempos de simulación prolongados.
- La estrategia es fácilmente aplicable a métodos de alto orden o a problemas multi-dimensionales.

Recientemente se han presentado esquemas numéricos camino-conservativos que permiten disminuir considerablemente el error de convergencia (véase [12]). Estos esquemas son la generalización de los esquemas que preservan la entropía (“entropy-preservative”) introducidos por Tadmor en [65], a problemas no conservativos.

En la práctica, se puede elegir una familia de caminos simple para diseñar esquemas numéricos y, posteriormente, se pueden comparar los resultados que ofrecen dichos esquemas con datos experimentales para validar el modelo resultante. La elección canónica de una familia de caminos viene dada por la familia de segmentos

$$\Phi(s; W_L, W_R) = W_L + s(W_R - W_L).$$

Con esta elección, la definición de productos no conservativos es equivalente a la propuesta por Volpert en [73].

En [9] se prueba la siguiente propiedad de aproximación de los segmentos:

**Teorema 1.3.3.** *Supongamos que  $\mathcal{A} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{M \times M}$  tiene derivadas de segundo orden. Sean  $W_L$  y  $W_R$  un par de estados en  $\Omega$  tales que existe  $\lambda$  satisfaciendo*

$$\lambda(W_R - W_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(s; W_L, W_R)) \Psi_s(s; W_L, W_R) ds.$$

*Dada cualquier otra familia de caminos  $\Phi : [0, 1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$  con derivadas de segundo orden continuas, entonces*

$$\lambda(W_R - W_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \Phi_s(s; W_L, W_R) ds + O(|W_R - W_L|^3).$$

**Demostración.-** Denotamos

$$\gamma \in [0, L] \mapsto \phi(\gamma)$$

el arco cuya parametrización es:

$$s \in [0, 1] \mapsto \Phi(s; W_L, W_R),$$

y cuya longitud denotaremos por  $L$ . Aplicando la regla del punto medio y usando el desarrollo de Taylor obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \Phi_s(s; W_L, W_R) ds \\ &= \int_0^L \mathcal{A}(\phi(\gamma)) \phi'(\gamma) d\gamma \\ &= LA \left( \phi \left( \frac{L}{2} \right) \right) \phi' \left( \frac{L}{2} \right) + O(L^3) \\ &= A \left( \phi \left( \frac{L}{2} \right) \right) (\phi(L) - \phi(0)) + O(L^3) \\ &= A \left( \phi \left( \frac{L}{2} \right) \right) (W_R - W_L) + O(L^3) \\ &= A \left( \frac{1}{2}(\phi(0) + \phi(L)) \right) (W_R - W_L) + (W_R - W_L)O(L^2) + O(L^3) \\ &= A \left( \frac{1}{2}(W_L + W_R) \right) (W_R - W_L) + (W_R - W_L)O(L^2) + O(L^3). \end{aligned}$$

De la definición de una familia de caminos, existe una constante  $K$  tal que:

$$|\partial_s \Phi(s; W_L, W_R)| \leq K|W_R - W_L|, \quad \forall s.$$

Integrando en  $[0, 1]$  obtenemos:

$$L \leq K|W_R - W_L|.$$

De donde deducimos la siguiente igualdad:

$$\int_0^1 A(\Phi(s; W_L, W_R))\Phi_s(s; W_L, W_R) = A\left(\frac{1}{2}(W_L + W_R)\right)(W_R - W_L) + O(|W_R - W_L|^3) \quad (1.3.13)$$

para toda familia de caminos suficientemente regular. En particular, esto es cierto para  $\Psi$ :

$$\int_0^1 A(\Psi(s; W_L, W_R))\Psi_s(s; W_L, W_R) = A\left(\frac{1}{2}(W_L + W_R)\right)(W_R - W_L) + O(|W_R - W_L|^3) \quad (1.3.14)$$

Podemos, pues, terminar la demostración teniendo en cuenta (1.3.13) y (1.3.14):

$$\begin{aligned} \lambda(W_R - W_L) &= \int_0^1 A(\Psi(s; W_L, W_R))\Psi_s(s; W_L, W_R) \\ &= A\left(\frac{1}{2}(W_L + W_R)\right)(W_R - W_L) + O(|W_R - W_L|^3) \\ &= \int_0^1 A(\Phi(s; W_L, W_R))\Phi_s(s; W_L, W_R) + O(|W_R - W_L|^3). \end{aligned}$$

■

Por último, hay que reseñar que los métodos camino-conservativos descritos en esta memoria verifican que la matriz de viscosidad conmuta con  $\mathcal{A}(W)$ . En tal caso, Alouges-Merlet [1] demostraron que las soluciones numéricas proporcionadas por diferentes esquemas numéricos no difieren excesivamente unas de otras ya que las curvas de Hugoniot asociadas a cada esquema numérico son prácticamente idénticas.

## 1.4. Buen equilibrado

El buen equilibrado está relacionado con la capacidad de un esquema numérico para aproximar el equilibrio, es decir, las soluciones estacionarias. El sistema (1.1.1) sólo puede poseer soluciones estacionarias no triviales si posee algún campo linealmente degenerado: si  $W(x)$  es una solución estacionaria, satisface

$$\mathcal{A}(W(x)) \cdot W'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si  $W'(x) \neq 0$ , entonces 0 es un autovalor de  $\mathcal{A}(W(x))$  para todo  $x$  y  $W'(x)$  es un autovector asociado. Por tanto,  $x \mapsto W(x)$  puede interpretarse como una parametrización de una

curva integral de un campo característico linealmente degenerado cuyo correspondiente autovalor toma el valor 0 a lo largo de la curva.

Para introducir el concepto de buen equilibrado, en [54] se considera el conjunto  $\Gamma$  de todas las curvas integrales  $\gamma$  de un campo linealmente degenerado de  $\mathcal{A}(W)$  tales que su correspondiente autovalor se anula en  $\gamma$ .

**Definición 1.4.1.** Dada una curva  $\gamma \in \Gamma$ , decimos que un esquema numérico para resolver (1.1.1):

$$W_j^{n+1} = W_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} H(W_{j-p}^n, \dots, W_{j+q}^n) \quad (1.4.1)$$

es exactamente bien equilibrado para  $\gamma$  si, para cada función  $x \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \mapsto W(x) \in \Omega$  de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que

$$W(x) \in \gamma, \quad \forall x \in (\alpha, \beta), \quad (1.4.2)$$

y  $p + q + 1$  puntos en  $(\alpha, \beta)$   $x_{-p}, \dots, x_q$  tales que:

$$x_{-p} < \dots < x_q; \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x, \quad i = -p, \dots, q - 1, \quad (1.4.3)$$

se tiene que:

$$H(W(x_{-p}), \dots, W(x_q)) = 0. \quad (1.4.4)$$

Decimos que el esquema es bien-equilibrado con orden  $k$  para  $\gamma$  si, para cada función  $W$  de clase  $\mathcal{C}^{k+1}$  y para cada conjunto de puntos  $\{x_{-q}, \dots, x_p\}$  verificando (1.4.2), (1.4.3), se tiene que:

$$|H(W(x_{-p}), \dots, W(x_q))| = O(\Delta x^{k+1}). \quad (1.4.5)$$

Finalmente, decimos que el esquema es exactamente bien equilibrado o bien equilibrado con orden  $k$  si estas propiedades se satisfacen para toda curva de  $\Gamma$ .

Aunque se han considerado esquemas de un paso y mallas uniformes para evitar un exceso de notación, la definición puede extenderse fácilmente a esquemas más generales.

La propiedad de buen equilibrado de un esquema está directamente relacionada con su capacidad para aproximar discontinuidades de contacto estacionarias. A este respecto, tenemos por ejemplo la siguiente proposición (ver [55]):

**Proposición 1.4.1.** *Dado un esquema numérico de la forma (1.4.1) con  $q = 0$  y  $p = 1$  y una curva  $\gamma \in \Gamma$ , el esquema numérico es exactamente bien equilibrado para  $\gamma$  si y sólo si resuelve de forma exacta cada discontinuidad de contacto estacionaria que conecta dos estados pertenecientes a  $\gamma$ .*

**Observación 1.4.1.** Como se vio en [19], dados dos estados  $W_L$  y  $W_R$  en  $\gamma$  con  $\gamma \in \Gamma$ , si el camino  $\Phi(s, W_L, W_R)$  que los conecta es una parametrización del arco  $\gamma$ , entonces el esquema resultante es bien equilibrado para  $\Gamma$ .

**Observación 1.4.2.** Para esquemas numéricos con valores arbitrarios de  $p$  y  $q$ , la implicación directa de la Proposición (1.4.1) también es válida. Obsérvese primero que un esquema numérico es exactamente equilibrado para  $\gamma$  si y sólo si:

$$H(W_{-q}, \dots, W_p) = 0,$$

para cada conjunto *ordenado* de estados  $\{W_{-q}, \dots, W_p\}$  de  $\gamma$ , donde algunos de los estados pueden estar repetidos. Entonces, puede probarse fácilmente que esta propiedad implica que el esquema numérico resuelve exactamente las discontinuidades de contacto que conectan dos estados en  $\gamma$ .

## 1.5. Algunos ejemplos de esquemas camino-conservativos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de esquemas camino-conservativos para el sistema (1.1.2) que usaremos en esta memoria.

### 1.5.1. Método de Roe

Recordemos la definición de matriz de Roe generalizada definida por Toumi en [70]: Dada una familia de caminos  $\Phi$ , una función  $\mathcal{A}_\Phi: \Omega \times \Omega \mapsto \mathcal{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$  es una linealización de Roe si verifica las siguientes propiedades:

- para cualquier  $W_L, W_R \in \Omega$ ,  $\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)$  tiene  $M$  autovalores reales y distintos,

- para cualquier  $W \in \Omega$ ,

$$\mathcal{A}_\Phi(W, W) = \mathcal{A}(W); \quad (1.5.1)$$

- para cualesquiera  $W_L, W_R \in \Omega$ ,

$$\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) \cdot (W_R - W_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds. \quad (1.5.2)$$

Siguiendo [54], consideramos las matrices de Roe para el sistema (1.1.2) definidas como:

$$\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) & -G_\Phi(W_L, W_R) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \quad (1.5.3)$$

donde

$$\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) = \mathcal{J}(w_L, w_R) + B_\Phi(W_L, W_R). \quad (1.5.4)$$

Aquí,  $\mathcal{J}(w_L, w_R)$  es una linealización de Roe del jacobiano del flujo  $F$  en el sentido usual:

$$\mathcal{J}(w_L, w_R) \cdot (w_R - w_L) = F(w_R) - F(w_L); \quad (1.5.5)$$

$B_\Phi(W_L, W_R)$  es una matriz que satisface:

$$B_\Phi(W_L, W_R) \cdot (w_R - w_L) = \int_0^1 B(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi_w}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds; \quad (1.5.6)$$

y  $G_\Phi(W_L, W_R)$  es un vector que satisface:

$$G_\Phi(W_L, W_R)(H_R - H_L) = \int_0^1 G(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi_H}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds, \quad (1.5.7)$$

donde hemos utilizado que

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_w \\ \Phi_H \end{bmatrix}.$$

Puede probarse que la matriz definida por (1.5.3)-(1.5.7) es una linealización de Roe, supuesto que tenga  $M$  autovalores reales y distintos.

Definimos ahora  $\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm$  como

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{A}_\Phi^\pm(W_i^n, W_{i+1}^n) \cdot (W_{i+1}^n - W_i^n), \quad (1.5.8)$$

donde

$$\mathcal{A}_\Phi^\pm(W_i, W_{i+1}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1}) \pm |\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1})|) \quad (1.5.9)$$

con

$$|\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1})| = \mathcal{K}_\Phi(W_i, W_{i+1}) |\mathcal{L}(W_i, W_{i+1})| \mathcal{K}_\Phi^{-1}(W_i, W_{i+1})$$

siendo  $|\mathcal{L}(W_i, W_{i+1})|$  la matriz diagonal cuyos coeficientes son los valores absolutos de los autovalores de  $\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1})$  y  $\mathcal{K}_\Phi(W_i, W_{i+1})$  es la matriz cuya  $i$ -ésima columna es un autovector asociado al  $i$ -ésimo autovalor.

Finalmente, teniendo en cuenta la estructura de las matrices  $\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1})$  y  $|\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1})|$  podemos escribir el esquema numérico en términos de las variables  $w_i$  como sigue:

$$w_i^{n+1} = w_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i-1/2}^+ + D_{i+1/2}^-)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^\pm(w_i, w_{i+1}, H_i, H_{i+1}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1})(w_{i+1} - w_i) - G_\Phi(W_i, W_{i+1})(H_{i+1} - H_i) \\ &\pm |\mathcal{A}_\Phi(W_i, W_{i+1})|(w_{i+1} - w_i - A_\Phi^{-1}(W_i, W_{i+1})G_\Phi(W_i, W_{i+1})(H_{i+1} - H_i)) \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Usando ahora la propiedad de Roe (1.5.5) y la estructura de la matriz  $A_\Phi(W_i, W_{i+1})$  podemos reescribir (1.5.10) como

$$\begin{aligned}
D_{i+1/2}^{\pm}(w_i, w_{i+1}, H_i, H_{i+1}) &= \frac{1}{2}(F(w_{i+1}) - F(w_i) + B_{\Phi}(W_i, W_{i+1})(w_{i+1} - w_i) \\
&\quad - G_{\Phi}(W_i, W_{i+1})(H_{i+1} - H_i) \pm |A_{\Phi}(W_i, W_{i+1})|(w_{i+1} - w_i \\
&\quad - A_{\Phi}^{-1}(W_i, W_{i+1})G_{\Phi}(W_i, W_{i+1})(H_{i+1} - H_i)).
\end{aligned}$$

Finalmente, puede probarse fácilmente que  $D_{i+1/2}^{\pm}$  puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
D_{i+1/2}^{\pm}(w_i, w_{i+1}, H_i, H_{i+1}) &= P_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1})(F(w_{i+1}) - F(w_i) + B_{\Phi}(W_i, W_{i+1})(w_{i+1} - w_i) \\
&\quad - G_{\Phi}(W_i, W_{i+1})(H_{i+1} - H_i))
\end{aligned}$$

donde

$$P_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1}) = \frac{1}{2}(K_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) (Id \pm \text{sgn}(L_{\Phi}(W_i, W_{i+1})))K_{\Phi}^{-1}(W_i, W_{i+1}))$$

siendo  $Id$  la matriz identidad,  $L_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$  la matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores de la matriz  $A_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$  y  $K_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$  la matriz cuyas columnas son los autovectores asociados a dichos autovalores.

### 1.5.2. Resolvedores de Riemann de tipo PVM

En esta sección presentaremos una clase de resolvedores de volúmenes finitos denominados PVM (Polynomial Viscosity Matrix), introducidos en [7], para leyes de equilibrio o, más generalmente, para sistemas hiperbólicos no conservativos. Estos resolvedores se definen en términos de matrices de viscosidad calculadas mediante una evaluación polinómica de una matriz de Roe. Estos métodos tienen la ventaja de que se definen usando sólo alguna información sobre los autovalores del sistema, y por tanto, en general, no es necesaria una descomposición espectral de la matriz de Roe. Como consecuencia, son, en general, más rápidos que el método de Roe. Estos métodos son una generalización de los esquemas introducidos por Degond et al. en [24] para leyes de equilibrio y sistemas no conservativos. Además permiten escribir de forma unificada algunos resolvedores conocidos como Rusanov, Lax-Friedrichs, FORCE (ver [18], [68]), GFORCE (ver [18], [69]) o HLL (ver [36]).

Hemos visto en la sección anterior que el método de Roe para el sistema (1.1.2) se define como

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^{\pm} = \mathcal{D}_{i+1/2}^{\pm}(W_i, W_{i+1}) = \mathcal{A}_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1})(W_{i+1} - W_i)$$

donde  $\mathcal{A}_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1})$  es una descomposición de la matriz de Roe  $\mathcal{A}_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$  definida como

$$\mathcal{A}_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) \pm |\mathcal{A}_{\Phi}(W_i, W_{i+1})|).$$

En esta sección vamos a considerar esquemas definidos como

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^{\pm} = \widehat{\mathcal{A}}_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1})(W_{i+1} - W_i)$$

donde  $\widehat{\mathcal{A}}_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1})$  es una descomposición de la matriz de Roe definida como

$$\widehat{\mathcal{A}}_{\Phi}^{\pm}(W_i, W_{i+1}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) \pm \mathcal{Q}_{\Phi}(W_i, W_{i+1}))$$

donde

$$\mathcal{Q}_{\Phi}(W_L, W_R) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) & \mathcal{Q}_{\Phi}(W_i, W_{i+1})\mathcal{A}_{\Phi}^{-1}(W_i, W_{i+1})G_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Al igual que hicimos con el método de Roe, podemos reescribir el esquema numérico en términos de las variables  $w_i$  como sigue:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(D_{i-1/2}^+ + D_{i+1/2}^-), \quad (1.5.11)$$

donde

$$D_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}) - F(w_i) + B_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i) \pm Q_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i - A_{i+1/2}^{-1}G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)) \right), \quad (1.5.12)$$

donde  $B_{i+1/2} = B_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$ ,  $G_{i+1/2} = G_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$ ,  $A_{i+1/2} = A_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$  y  $Q_{i+1/2} = Q_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$ .

Obsérvese que obtendremos distintos esquemas numéricos eligiendo diferentes matrices de viscosidad. Por ejemplo, el esquema de Roe corresponde a la elección

$$Q_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) = |A_{\Phi}(W_i, W_{i+1})|, \quad (1.5.13)$$

El esquema de Lax-Friedrichs corresponde a la elección

$$Q_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} Id, \quad (1.5.14)$$



siendo  $Id$  la matriz identidad.

Los esquemas FORCE y GFORCE (véase [18], [68] y [69]), corresponden a la elección

$$Q_{\Phi}(W_i, W_{i+1}) = (1 - \omega) \frac{\Delta x}{\Delta t} Id + \omega \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{\Phi}^2(W_i, W_{i+1}), \quad (1.5.15)$$

con  $\omega = 0.5$  y  $\omega = \frac{1}{1 + \gamma}$ , respectivamente, siendo  $\gamma$  el parámetro CFL (1.5.19).

Nótese que en la definición de (1.5.12) el término

$$C = Q_{i+1/2} A_{i+1/2}^{-1} G_{i+1/2} (H_{i+1} - H_i),$$

que puede interpretarse como la parte *upwinding* de la discretización del término fuente, no tiene sentido si uno de los autovalores de  $A_{i+1/2}$  se anula. En este caso, dos autovalores de  $A_{\Phi}(W_i^n, W_{i+1}^n)$  se anulan y el problema se dice que es resonante. Los problemas resonantes exhiben una dificultad adicional, y en muchos casos no hay unicidad de solución débil, por lo que las soluciones numéricas pueden depender tanto de la familia de caminos como del esquema numérico. Este problema queda fuera del ámbito de esta memoria. Aquí usaremos la estrategia descrita en [18] que permite eliminar formalmente esta dificultad. Al final de esta sección describiremos la estrategia empleada.

Nos centraremos aquí en la definición de  $Q_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$ . En particular, en [7] los autores proponen definir las matrices  $Q_{\Phi}$  mediante la evaluación polinómica de una matriz de Roe  $A_{\Phi}(W_i, W_{i+1})$ :

$$Q_{i+1/2} = P_l^{i+1/2}(A_{i+1/2}), \quad (1.5.16)$$

siendo  $P_l^{i+1/2}(x)$  un polinomio de grado  $l$ ,

$$P_l^{i+1/2}(x) = \sum_{j=0}^l \alpha_j^{i+1/2} x^j. \quad (1.5.17)$$

Teniendo en cuenta (1.5.16) y haciendo uso de (1.5.4)-(1.5.5),  $D_{i+1/2}^{\pm}$  puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^{\pm} &= \frac{\pm \alpha_0^{i+1/2}}{2} (w_{i+1} - w_i - A_{i+1/2}^{-1} G_{i+1/2} (H_{i+1} - H_i)) \\ &+ \sum_{j=1}^l \frac{\delta_{j,1} \pm \alpha_j^{i+1/2}}{2} A_{i+1/2}^{(j-1)} \left( F(w_{i+1}) - F(w_i) + B_{i+1/2} (w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2} (H_{i+1} - H_i) \right) \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

donde

$$\delta_{j,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La definición del polinomio (1.5.17) estará relacionada con la estabilidad y la difusión numérica del esquema. Por otra parte, si  $\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq P_l^{i+1/2}(\lambda_{j,i+1/2}) \geq |\lambda_{j,i+1/2}|$ ,  $j = 1, \dots, N$ , siendo  $\lambda_{1,i+1/2} < \lambda_{2,i+1/2} < \dots < \lambda_{N,i+1/2}$  los autovalores de  $A_{i+1/2}$ , entonces el esquema numérico (1.6.18), (1.5.18) es linealmente  $L^\infty$ -estable bajo la condición CFL usual.

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i,j} |\lambda_{j,i+1/2}| = \gamma \leq 1. \quad (1.5.19)$$

Por consiguiente, una condición suficiente para asegurar que el esquema numérico es linealmente  $L^\infty$ -estable es que (véase [24])

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq P_l^{i+1/2}(x) \geq |x| \quad \forall x \in [\lambda_{1,i+1/2}, \lambda_{N,i+1/2}]. \quad (1.5.20)$$

Consideremos la siguiente notación: denotaremos por  $PVM-l(S_0, \dots, S_k)$  a un esquema numérico cuya matriz de viscosidad  $Q_{i+1/2}$  se define usando un polinomio de grado  $l$  cuyos coeficientes dependen de los parámetros  $S_0, \dots, S_k$ . En la práctica, los parámetros  $S_0, \dots, S_k$  están relacionados con las aproximaciones de algunas velocidades de propagación de las ondas. Así, por ejemplo, Lax-Friedrichs corresponde a  $PVM-0(S_0)$ , siendo  $S_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , donde  $\Delta t$  está relacionado con el máximo de la velocidad de propagación de las ondas mediante la condición CFL (1.5.19).

**Definición 1.5.1.** Un método PVM se dice que es *upwind* si

$$P_l^{i+1/2}(A_{i+1/2}) = \begin{cases} A_{i+1/2} & \text{si } \lambda_{1,i+1/2} > 0 \\ -A_{i+1/2} & \text{si } \lambda_{N,i+1/2} < 0, \end{cases} \quad (1.5.21)$$

y lo denotamos como  $PVM-lU$ .

Por tanto, si

$$P_l^{i+1/2}(x) = \begin{cases} x & \text{si } \lambda_{1,i+1/2} > 0 \\ -x & \text{si } \lambda_{N,i+1/2} < 0, \end{cases} \quad (1.5.22)$$

el método PVM resultante es un método *upwind*.

**Observación 1.5.1.** Si  $\alpha_1 = 0$ , entonces el método PVM resultante no es un esquema *upwind*.

En las siguientes secciones vamos a ver algunos ejemplos de métodos de tipo PVM. En particular, veremos que algunos métodos clásicos se pueden reescribir como un método de tipo PVM.

En lo que sigue, y para simplificar la notación, eliminaremos la dependencia de  $i + 1/2$  de los polinomios y sus coeficientes. Esto es, notaremos  $P_l(x)$  en lugar de  $P_l^{i+1/2}$  y  $\alpha_j$  en lugar de  $\alpha_j^{i+1/2}$ .

### 1.5.3. PVM-(N-1)U( $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ) o método de Roe

Recordemos que el método de Roe corresponde a la elección

$$Q_{i+1/2} = |A_{i+1/2}|.$$

Para reescribir el método de Roe como un método PVM basta con imponer

$$|A_{i+1/2}| = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j A_{i+1/2}^j,$$

donde  $\alpha_j, j = 0, \dots, N-1$  son solución del sistema lineal siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| \\ |\lambda_2| \\ \vdots \\ |\lambda_N| \end{pmatrix}, \quad (1.5.23)$$

siendo  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  los autovalores de la matriz  $A_{i+1/2}$ . Nótese que el sistema (1.5.23) tiene una única solución, si  $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i = 1, \dots, N$ . Por tanto, el método de Roe puede reescribirse como un método de tipo PVM donde  $Q_{i+1/2} = P_{N-1}(A_{i+1/2})$ , siendo  $P_{N-1}(x)$  el polinomio cuyos coeficientes se definen en (1.5.23).

### 1.5.4. Métodos PVM-0( $S_0$ ): Esquemas de Rusanov, Lax-Friedrichs y Lax-Friedrichs modificado

La elección más simple para un método PVM corresponde a

$$P_0(x) = S_0. \quad (1.5.24)$$

Esto es,  $y = P_0(x)$  es una línea horizontal (véase la Figura 1.1). Los requisitos de estabilidad implican que

$$\max_j |\lambda_{j,i+1/2}| \leq S_0 \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Así, algunas elecciones interesantes para  $S_0$  serían

$$S_0 \in \{S_{Rus}, S_{LF}, S_{LF}^{mod}\}, \quad (1.5.25)$$

donde

$$S_{Rus} = \max_j |\lambda_{j,i+1/2}|, \quad S_{LF} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{y} \quad S_{LF}^{mod} = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.5.26)$$

Nótese que el esquema de Rusanov corresponde a la elección  $S_0 = S_{Rus}$ , Lax-Friedrichs a  $S_0 = S_{LF}$  y Lax-Friedrichs modificado a  $S_0 = S_{LF}^{mod}$ .

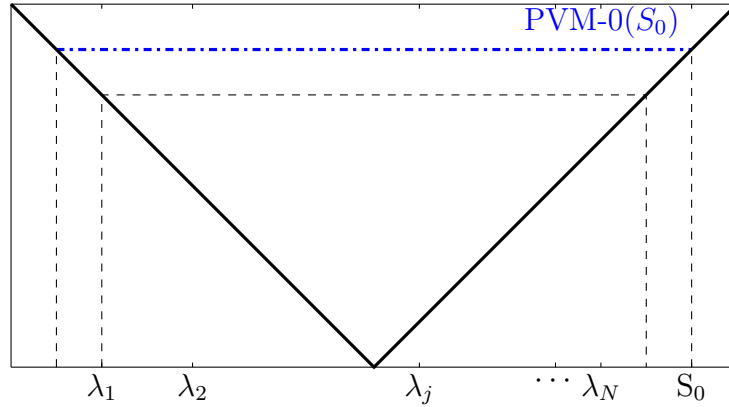


Figura 1.1: Gráficos del polinomio asociado al método PVM-0( $S_0$ ).

### 1.5.5. PVM-1U( $S_L, S_R$ ) o método HLL

Consideramos en esta sección un método PVM definido a partir de un polinomio de grado 1, esto es (véase la Figura 1.2),

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x. \quad (1.5.27)$$

Para definir los coeficientes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  imponemos las dos condiciones siguientes:

$P_1(S_L) = |S_L|$  y  $P_1(S_R) = |S_R|$ , donde  $S_L$  (respectivamente  $S_R$ ) es una aproximación del mínimo (respectivamente máximo) de la velocidad de propagación de las ondas. Una posibilidad es tomar  $S_L = \lambda_{1,i+1/2}$ ,  $S_R = \lambda_{N,i+1/2}$ , aunque también podría utilizarse la propuesta por Davis [23]:

$$S_L = \min(\lambda_{1,i+1/2}, \lambda_{1,i}), \quad S_R = \max(\lambda_{N,i+1/2}, \lambda_{N,i+1}),$$

siendo  $\lambda_{i,1} < \dots < \lambda_{i,N}$  los autovalores de la matriz  $A_\Phi(W_i, W_i)$ .

Tras unos sencillos cálculos se obtiene

$$\alpha_0 = \frac{S_R|S_L| - S_L|S_R|}{S_R - S_L}, \quad \alpha_1 = \frac{|S_R| - |S_L|}{S_R - S_L}. \quad (1.5.28)$$

**Observación 1.5.2.** Nótese que si  $S_L > 0 \Rightarrow P_1(x) = x$  y si  $S_R < 0 \Rightarrow P_1(x) = -x$ . Es decir, el método resultante es *upwind*.

**Observación 1.5.3.** Si (1.1.2) es conservativo ( $B = 0$  y  $G = 0$ ), entonces el flujo conservativo  $\phi_{i+1/2} = D_{i+1/2}^- + F(w_i)$ , donde  $D_{i+1/2}^-$  viene dado por (1.5.18), usando

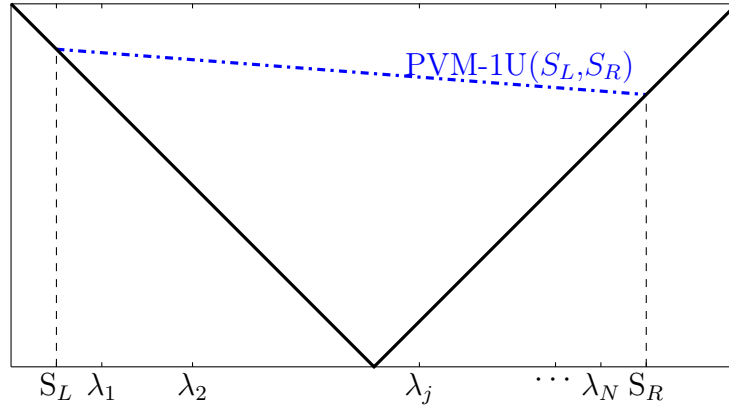


Figura 1.2: Gráficas del polinomio asociado al método PVM-1U( $S_L, S_R$ ).

$Q_{i+1/2} = P_1(J(w_i, w_{i+1}))$ , siendo  $J(w_i, w_{i+1})$  una matriz de Roe para el flujo  $F(w)$ , coincide con el método HLL. Efectivamente, usando la expresión de  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  se obtiene que

$$\phi_{i+1/2} = \left( F(w_i)(S_R + |S_R| - S_L - |S_L|) + F(w_{i+1})(S_R - |S_R| - S_L + |S_L|) - (S_R|S_L| - S_L|S_R|)(w_{i+1} - w_i) \right) / (2S_R - 2S_L),$$

que es una definición compacta del flujo numérico HLL (véase [36]).

Así, el esquema HLL usual coincide con PVM-1U( $S_L, S_R$ ) en el caso de un sistema conservativo y, por tanto, PVM-1U( $S_L, S_R$ ) proporciona una generalización natural del método HLL para problemas no conservativos. Nótese que PVM-1U( $S_L, S_R$ ) es un esquema *upwind*, en el sentido de la Definición 1.5.1. Finalmente, obsérvese que si  $S_L = -S_R$ , entonces PVM-1U( $S_L, S_R$ ) coincide con PVM-0( $S_{Rus}$ ).

### 1.5.6. Métodos PVM-2( $S_0$ ) o métodos tipo FORCE

En esta subsección estudiaremos los métodos PVM correspondientes a un polinomio de segundo grado de la forma (véase la Figura 1.3)

$$P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2, \text{ tal que } P_2(S_0) = S_0, \quad P_2'(S_0) = 1, \quad (1.5.29)$$

donde  $S_0$  viene dado por (1.5.25).

Obsérvese que, como  $\alpha_1 = 0$ , PVM-2( $S_0$ ) no es *upwind* en el sentido de la Definición 1.5.1.

Tras unos sencillos cálculos obtenemos

$$\alpha_0 = \frac{S_0}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2S_0}. \quad (1.5.30)$$

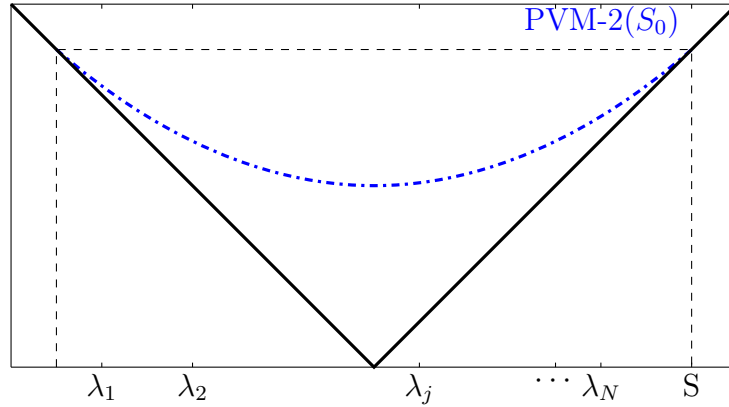


Figura 1.3: Gráficas del polinomio asociado al método PVM-2( $S_0$ ).

Nótese que si  $S_0 = S_{LF}$ , entonces PVM-2( $S_{LF}$ ) coincide con el esquema FORCE (véase [18], [68]) mientras los otros dos pueden verse como esquemas tipo FORCE.

**Observación 1.5.4.** El esquema GFORCE se obtiene imponiendo

$$P_2(S_{LF}^{mod}) = S_{LF}^{mod}, \quad P_2'(S_{LF}^{mod}) = \frac{2\alpha}{1+\alpha},$$

de donde se obtiene que

$$\alpha_0 = \frac{S_{LF}^{mod}}{1+\alpha}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{S_{LF}^{mod}} \frac{\alpha}{1+\alpha}. \quad (1.5.31)$$

Es fácil probar que  $P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2$  con  $\alpha_0, \alpha_2$  definidos en (1.5.30) o (1.5.31) verifica que  $P_2(x) \geq |x|$ ,  $\forall x \in [\lambda_{1,i+1/2}, \lambda_{N,i+1/2}] \subset [-S_0, S_0]$ , y, por consiguiente, el método resultante es linealmente  $L^\infty$ -estable con la condición CFL usual.

**Observación 1.5.5.** Nótese que si  $S_0 = S_{LF}$  o  $S_0 = S_{LF}^{mod}$ , entonces los coeficientes  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$  dados en (1.5.30) dependen de  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  y PVM-2( $S_0$ ) puede interpretarse como una combinación de los esquemas Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff (véase [18],[68]).

### 1.5.7. Método PVM-2U( $S_L, S_R$ )

En [24] Degond et al. proponen un esquema numérico para sistemas conservativos, que pueden extenderse fácilmente a sistemas no conservativos considerando un método PVM asociado al polinomio (véase la Figura 1.4)

$$P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \quad (1.5.32)$$

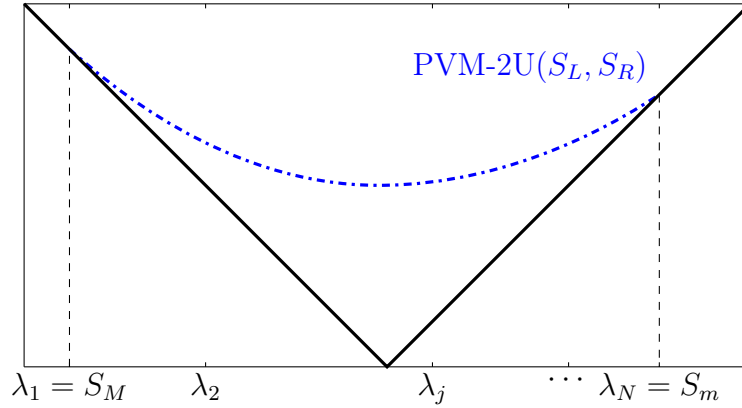


Figura 1.4: Gráficas del polinomio asociado al método PVM-2U( $S_M, S_m$ ).

tal que  $P_2(S_L) = |S_L|$ ,  $P_2(S_R) = |S_R|$ ,  $P_2'(S_M) = \text{sgn}(S_M)$ , donde

$$S_M = \begin{cases} S_L & \text{si } |S_L| \geq |S_R|, \\ S_R & \text{si } |S_L| < |S_R|. \end{cases} \quad (1.5.33)$$

Es fácil comprobar que los coeficientes  $\alpha_i, i = 0, 1, 2$  resultantes son:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{(S_M)^2 S_m (\text{sgn}(S_m) - \text{sgn}(S_M))}{(S_m - S_M)^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{S_M (|S_M| - |S_m|) + S_m (\text{sgn}(S_M) S_m - S_M \text{sgn}(S_m))}{(S_m - S_M)^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{S_m (\text{sgn}(S_m) - \text{sgn}(S_M))}{(S_m - S_M)^2}. \end{aligned}$$

donde

$$S_m = \begin{cases} S_R & \text{si } |S_L| \geq |S_R|, \\ S_L & \text{si } |S_L| < |S_R|. \end{cases}$$

Es fácil probar que  $P_2(\lambda_{j,i+1/2}) \geq |\lambda_{j,i+1/2}| \forall j = 1, \dots, N$ , por lo que PVM-2U( $S_L, S_R$ ) es linealmente  $L^\infty$ -estable. Por otra parte,  $P_2(x)$  verifica (1.5.22), en consecuencia PVM-2U( $S_L, S_R$ ) es *upwind*. Finalmente, obsérvese que si  $S_L = -S_R$ , entonces PVM-2U( $S_L, S_R$ ) coincide con PVM-2( $S_{Rus}$ ).

### 1.5.8. Método IFCP o PVM-2U( $S_L, S_R, S_{int}$ )

Este método fue propuesto por E. Fernández, M.J. Castro y C. Parés en [30] para la resolución del sistema de aguas someras bicapa. Presentamos aquí una escritura más

general del mismo que hace posible su aplicación al sistema general considerado en (1.1.2). Este método se define a partir del polinomio de grado 2

$$P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \quad (1.5.34)$$

imponiendo las siguientes condiciones:

$$P_2(S_L) = |S_L|, P_2(S_R) = |S_R| \text{ y } P_2(S_{int}) = |S_{int}|,$$

donde  $S_L$  (respectivamente  $S_R$ ) es una aproximación del mínimo (respectivamente máximo) de la velocidad de propagación de las ondas y  $S_{int}$  se define como

$$S_{int} = \mathcal{S}_{ext} \cdot \max\{|\lambda_{2,i+1/2}|, \dots, |\lambda_{N-1,i+1/2}|\},$$

siendo

$$\mathcal{S}_{ext} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(S_R + S_L), & \text{si } (S_R + S_L) \neq 0, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.5.35)$$

La expresión de los coeficientes  $\alpha_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  es:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \delta_L S_R S_{int} + \delta_R S_L S_{int} + \delta_{int} S_L S_R, \\ \alpha_1 &= -S_L(\delta_R + \delta_{int}) - S_R(\delta_L + \delta_{int}) - S_{int}(\delta_L + \delta_R), \\ \alpha_2 &= \delta_L + \delta_R + \delta_{int}, \end{aligned} \quad (1.5.36)$$

donde

$$\delta_L = \frac{|S_L|}{(S_L - S_R)(S_L - S_{int})}, \quad \delta_R = \frac{|S_R|}{(S_R - S_L)(S_R - S_{int})}, \quad \delta_{int} = \frac{|S_{int}|}{(S_{int} - S_L)(S_{int} - S_R)}.$$

**Observación 1.5.6.** Nótese que para que el método esté bien definido es necesario que  $S_L < S_{int} < S_R$ . En caso contrario tendríamos que usar un método de 2-ondas o 1-onda.

Puede probarse el siguiente resultado de estabilidad

**Teorema 1.5.1.** *El esquema IFCP es linealmente  $L^\infty$ -estable bajo la condición CFL usual.*

**Demostración.-** En primer lugar notemos que  $Q_{i+1/2}$  tiene los mismos autovectores que  $A_{i+1/2}$ , y que si  $\lambda_{l,i+1/2}$  es un autovalor de  $A_{i+1/2}$  entonces  $P_2(\lambda_{l,i+1/2})$  es un autovalor de  $Q_{i+1/2}$ .

Denotemos por  $\lambda_{Q,j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , los autovalores de la matriz  $Q_{i+1/2}$ , entonces, se tiene que

$$\lambda_{Q,j} = P_2(\lambda_j) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_j + \alpha_2 \lambda_j^2, \quad j = 1, \dots, N.$$



Probemos que  $\lambda_{Q,j} \geq |\lambda_j|$ . Por construcción, esto se cumple para  $j = 1$  y  $j = N$ , así que demostraremos que  $\lambda_{Q,j} \geq |\lambda_j|$ , para  $j = 2, \dots, N - 1$ . Obsérvese además que, por construcción,  $S_L \leq \lambda_1 < S_{int} < \lambda_N \leq S_R$ .

- ▶ Supongamos en primer lugar, que  $0 \leq S_L \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N \leq S_R$ , luego  $0 \leq S_L \leq \lambda_1 < S_{int} < \lambda_N \leq S_R$ . En tal caso, el polinomio  $P_2(\lambda)$  es una parábola que pasa por los puntos  $(S_L, S_L)$ ,  $(S_{int}, S_{int})$  y  $(S_R, S_R)$ . Por tanto se tiene  $P_2(x) = x$ , lo que prueba el resultado.
- ▶ El caso  $S_L \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N \leq S_R \leq 0$  es análogo y se tiene  $P_2(x) = -x$ , lo que prueba el resultado.
- ▶ Supongamos ahora que  $S_L < 0$  y  $S_R > 0$ .

El caso  $S_{int} = 0$  es trivial ya que si  $S_{int} = 0$ , implica que  $\lambda_2 = \dots = \lambda_{N-1} = 0$  y  $P_2(\lambda)$  es la parábola que pasa por los puntos  $(S_L, -S_L)$ ,  $(0, 0)$  y  $(S_R, S_R)$ . Por tanto  $P_2(\lambda_j) = |\lambda_j|$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Consideremos, pues, que  $S_{int} \neq 0$ .

- Supongamos que  $|S_L| > |S_R|$  (el otro caso es análogo). En tal caso,  $S_{int} < 0$ .

Vamos a probar que  $P_2(\lambda) \geq |\lambda|$  para todo  $\lambda \in [S_{int}, -S_{int}] \cap [S_{int}, S_R]$ .

Analicemos en primer lugar el signo de  $\alpha_2$ . Para ello escribimos  $\alpha_2 = \beta\gamma_2$ , con

$$\beta = \frac{1}{(S_L - S_R)(S_L - S_{int})(S_{int} - S_R)} \quad (1.5.37)$$

y

$$\gamma_2 = |S_L|(S_{int} - S_R) + |S_{int}|(S_R - S_L) + |S_R|(S_L - S_{int}). \quad (1.5.38)$$

Es claro, por la definición de  $S_{int}$ , que  $\beta < 0$ .

Por otro lado, como  $S_{int} < 0$ , podemos escribir

$$\gamma_2 = S_R(|S_{int}| - |S_L|) + |S_R|(S_L - S_{int}),$$

y nuevamente, haciendo uso de la definición de  $S_{int}$ , tenemos que  $\gamma_2 < 0$ . De donde concluimos que  $\alpha_2 > 0$ .

Estudiemos ahora el signo de  $\alpha_1$ . Del mismo modo que antes, escribimos  $\alpha_1 = -\beta\gamma_1$ , con

$$\gamma_1 = (|S_L| - |S_R|)(|S_L| - |S_{int}|)(|S_R| - |S_{int}|). \quad (1.5.39)$$

De nuevo, usando de la definición de  $S_{int}$ , tenemos que

$$\text{sgn}(\alpha_1) = \text{sgn}(\gamma_1) = \text{sgn}(|S_R| - |S_{int}|).$$

Además,

$$P_2'(S_{int}) + 1 = \frac{2S_R(S_{int} - S_L)}{(S_L - S_R)(S_{int} - S_R)}, \quad (1.5.40)$$

$$P_2'(S_R) - 1 = \frac{-2S_L S_{int} + 2S_R^2}{(S_L - S_R)(S_{int} - S_R)}. \quad (1.5.41)$$

(a) Supongamos que  $|S_R| \geq |S_{int}|$ , por tanto  $\alpha_1 \geq 0$ . Entonces, para  $\lambda \geq 0$ ,

$$P_2(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 \geq \alpha_0 - \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 = P_2(-\lambda).$$

Luego  $P_2(\lambda) \geq P_2(-\lambda)$  para todo  $\lambda \in [0, S_{int}]$ . Por tanto, es suficiente probar

$$P_2(\lambda) \geq -\lambda = |\lambda|, \quad \forall \lambda \in [S_{int}, 0].$$

Sea  $\lambda_v = \frac{-2\alpha_1}{\alpha_2} \leq 0$  el vértice de la parábola. Además,  $\lambda_v$  es el punto donde  $P_2(\lambda)$  alcanza su mínimo absoluto, ya que  $\alpha_2 > 0$ .

(a.1) Supongamos que  $\lambda_v \leq S_{int}$ . Como la parábola es creciente para todo  $\lambda \geq \lambda_v$ , entonces

$$P_2(\lambda) \geq P_2(S_{int}) = |S_{int}| \geq |\lambda|, \quad \forall \lambda \in [S_{int}, 0] \quad (\text{véase Figura 1.5}).$$

(a.2) Supongamos que  $\lambda_v > S_{int}$ . Como  $P_2(S_{int}) = -S_{int}$ ,  $P_2'(\lambda_v) = 0$  y usando (1.5.40), tenemos que  $P_2'(S_{int}) \geq -1$ , y se tiene que  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [S_{int}, \lambda_v]$ .

Además,  $P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_v) \geq |\lambda_v| \geq |\lambda| \quad \forall \lambda \in [\lambda_v, 0]$ , ya que  $P_2(\lambda)$  es creciente  $\forall \lambda \geq \lambda_v$ .

Por tanto,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [S_{int}, 0]$  (véase Figura 1.6).

(b) Supongamos ahora que  $|S_R| < |S_{int}|$ . Entonces  $\alpha_1 < 0$ , luego  $\lambda_v > 0$ .

(b.1) Supongamos que  $\lambda_v \geq S_R$ . Por lo anterior,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [S_{int}, 0]$ .

Por otro lado, por ser  $P_2(\lambda)$  decreciente para todo  $\lambda \leq \lambda_v$ , se tiene que

$$P_2(\lambda) \geq P_2(S_R) = S_R \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [0, S_R] \quad (\text{véase Figura 1.7}).$$

(b.2) Supongamos que  $0 < \lambda_v < S_R$ . Por lo anterior,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [S_{int}, 0]$ .

Usando ahora (1.5.41), tenemos  $P_2'(S_R) \leq 1$ . Como además,  $P_2(S_R) = S_R$  y  $P_2'(\lambda_v) = 0$ , tenemos que  $P_2(\lambda) \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [\lambda_v, S_R]$ .

Por último,  $P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_v) \geq \lambda_v \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_v]$ , ya que  $P_2(\lambda)$  es decreciente  $\forall \lambda \leq \lambda_v$ . (véase Figura 1.8). ■

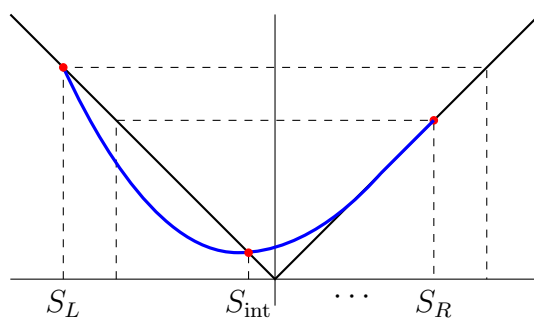


Figura 1.5: Situación de los autovalores. Caso (a.1).

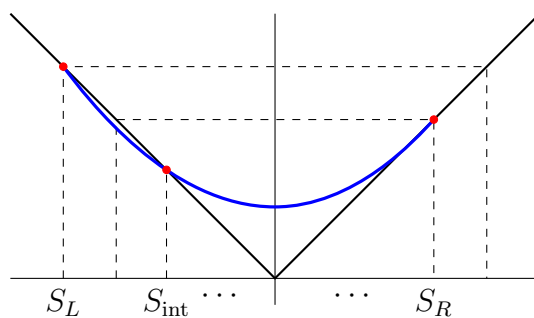


Figura 1.6: Situación de los autovalores. Caso (a.2).

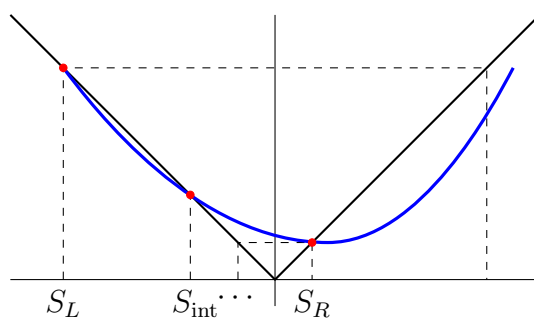


Figura 1.7: Situación de los autovalores. Caso (b.1).

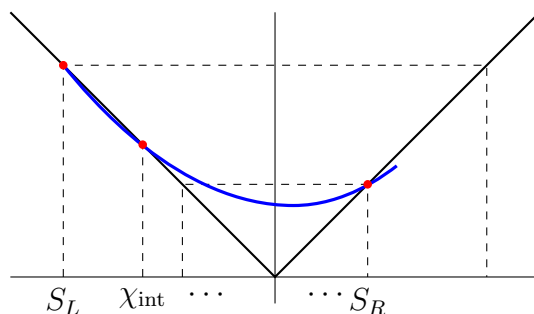


Figura 1.8: Situación de los autovalores. Caso (b.2).

### 1.5.9. Métodos PVM-4( $S_L, S_R$ ) y PVM-4( $S_0$ )

En esta sección presentamos métodos PVM definidos por los polinomios bicuadráticos dados por (véase la Figura 1.9)

$$P_4(x) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4, \text{ tal que } P_4(S_M) = |S_M|, \quad P_4(S_I) = S_I, \quad P_4'(S_I) = 1, \quad (1.5.42)$$

donde  $S_M$  viene dado por (1.5.33) y

$$S_I = \begin{cases} \max_{2 \leq j \leq N} (|\lambda_{j,i+1/2}|) & \text{si } |S_L| \geq |S_R|, \\ \max_{1 \leq j \leq (N-1)} (|\lambda_{j,i+1/2}|) & \text{si } |S_L| < |S_R|. \end{cases} \quad (1.5.43)$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{|S_M||S_I|(|S_I| + 2|S_M|)}{2(|S_I| + |S_M|)^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2|S_M|} + \frac{|S_M|}{(|S_I| + |S_M|)^2}, \\ \alpha_4 &= \frac{-1}{2|S_M|(|S_I| + |S_M|)^2}. \end{aligned} \quad (1.5.44)$$

Obsérvese que  $\alpha_0$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$  están también definidos si  $S_M = S_I = S_0$ . En ese caso, los coeficientes se reducen a

$$\alpha_0 = \frac{3S_0}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4S_0}, \quad \alpha_4 = \frac{-1}{8S_0^3}, \quad (1.5.45)$$

y el método que resulta lo denotamos por PVM-4( $S_0$ ).

Se tiene el siguiente resultado de estabilidad

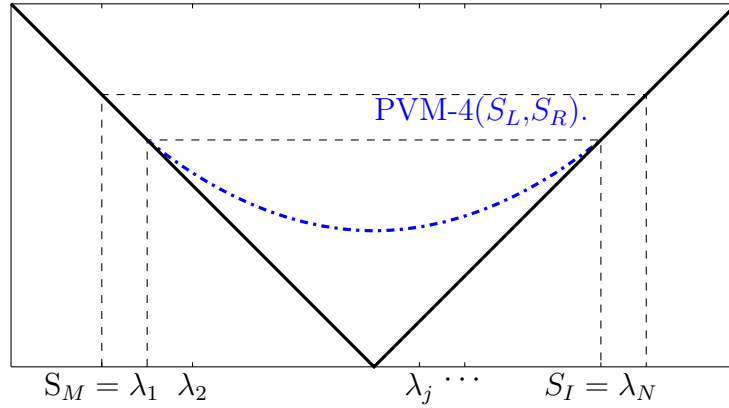


Figura 1.9: Gráficas del polinomio asociado al método  $PVM-4(S_L, S_R)$ .

**Teorema 1.5.2.** *El esquema numérico  $PVM-4(S_L, S_R)$  es linealmente  $L^\infty$  estable bajo la condición CFL usual.*

**Demostración.-** Como  $P_4(x)$  dado por (1.5.42) es simétrico con respecto a 0 y  $P_4(S_M) = |S_M|$ , por la definición de  $S_I$  es suficiente probar que  $P_4(x) \geq x$ ,  $\forall x \in [0, S_I]$ .

Nótese que,  $P_4'(x)$  es cero en  $x = 0$  y  $x_a^\pm = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_2}{2\alpha_4}}$ , y  $P_4''(x)$  es cero en  $x_b^\pm = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_2}{6\alpha_4}}$ .

Nótese que, como  $|S_M| \geq |S_I|$ , entonces

$$\frac{-\alpha_2}{6\alpha_4} = \frac{3S_I^2 + S_M^2 + 2|S_M||S_I|}{6} \geq S_I^2.$$

Por tanto,

$$S_I \leq x_b^+ \leq x_a^+.$$

Concluimos que  $P_4'(x)$  es creciente en  $[0, S_I]$ . Por otro lado, como  $P_4'(0) = 0$ ,  $P_4(0) > 0$ ,  $P_4'(S_I) = 1$ , y  $P_4(S_I) = S_I$  entonces  $P_4(x) \geq x$  para  $x \in [0, S_I]$ , lo que concluye la demostración. ■

### 1.5.10. Difusión numérica

En esta sección realizamos un simple análisis de la difusión numérica de algunos de los esquemas PVM. Consideremos la ecuación de advección lineal

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad \lambda > 0. \quad (1.5.46)$$

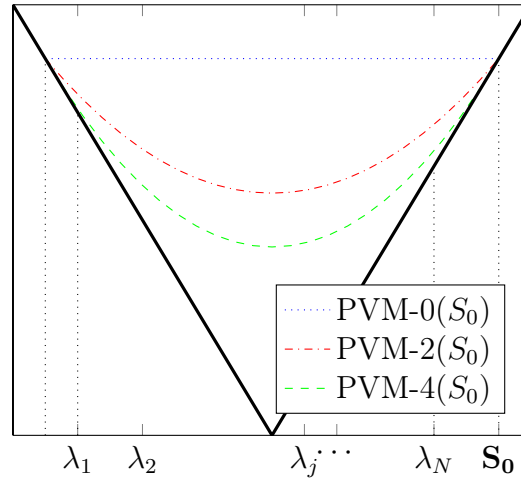


Figura 1.10: Comparación de las gráficas del polinomio asociado a  $PVM-l(S_0)$ ,  $l = 0, 2, 4$  para un  $S_0 = S_{LF}$  dado.

Es fácil probar que la viscosidad numérica de los métodos  $PVM-l(S_0)$ ,  $l = 0, 2, 4$ , cuando son aplicados a la ecuación (1.5.46) viene dada por

$$\nu_N = \frac{\Delta x}{2} (P_l(\lambda) - \alpha\lambda), \quad (1.5.47)$$

donde  $\frac{\Delta t}{\Delta x}\lambda = \alpha$ , y  $P_l(x)$  son los polinomios asociados a los métodos  $PVM-l(S_0)$ ,  $l = 0, 2, 4$  dados por (1.5.24), (1.5.29), y (1.5.42) respectivamente. Es evidente, por (1.5.47) que  $\nu_N$  será más pequeño cuanto más pequeño sea  $P_l(\lambda)$ ,  $l = 0, 2, 4$ . Nótese que  $P_l(S_{Rus}) = \lambda$  y  $P_l(S_{LF}^{mod}) = \lambda$ ,  $l = 0, 2, 4$  y  $PVM-l(S_{Rus})$  ( $PVM-l(S_{LF}^{mod})$ ) respectivamente,  $l = 0, 2, 4$  coincide con el esquema CIR (véase [21]) para el sistema (1.5.46). Si  $S_0 = S_{LF}$ , entonces

$$P_0(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad P_2(\lambda) = \lambda \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha}, \quad P_4(\lambda) = \lambda \frac{3 + 6\alpha^2 - \alpha^4}{8\alpha}.$$

Por lo tanto,  $\nu_N$  es mínimo cuando  $S_0 = S_{Rus}$  o  $S_0 = S_{LF}^{mod}$ . Si usamos  $S_{LF}$ , entonces  $PVM-4(S_{LF})$  es el que tiene menos viscosidad numérica entre los esquemas  $PVM-l(S_{LF})$ ,  $l = 0, 2, 4$ . Es también fácil probar que  $P_0(x) \geq P_2(x) \geq P_4(x)$ ,  $x \in [-S_0, S_0]$ . La Figura 1.10 muestra las gráficas del polinomio  $P_l(x)$ ,  $l = 0, 2, 4$ , para un  $S_{LF}$  dado. Finalmente, es también fácil comprobar que  $PVM-l(S_0)$ ,  $l = 0, 2, 4$  con  $S_0$  dado por (1.5.25) son esquemas monótonos cuando son aplicados a la ecuación (1.5.46).

Sobre  $PVM-1U(S_L, S_R)$  y  $PVM-2U(S_L, S_R)$ , es también fácil probar que  $P_1(x) \geq P_2(x)$ ,  $\forall x \in [\lambda_{1,i+1/2}, \lambda_{N,i+1/2}]$ , donde  $P_1(x)$  y  $P_2(x)$  se definen en (1.5.27) y (1.5.32), respectivamente. Por lo tanto, la viscosidad numérica de  $PVM-2U(S_L, S_R)$  es más pequeña que la de  $PVM-1U(S_L, S_R)$ . La Figura 1.11 muestra las gráficas de los polinomios  $P_1(x)$  y  $P_2(x)$  definidos por (1.5.27) y (1.5.32).

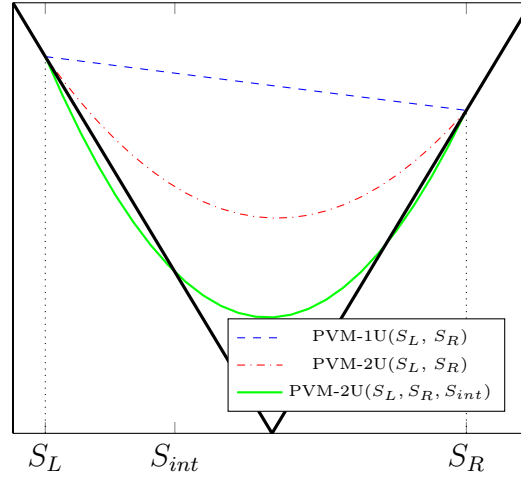


Figura 1.11: Comparación de las gráficas del polinomio asociado a  $PVM-1U(S_L, S_R)$ ,  $PVM-2U(S_L, S_R)$  y  $PVM-2U(S_L, S_R, S_{int})$  (IFCP).

En general, la difusión numérica de los esquemas PVM serán relevantes para las ondas internas. Supongamos que los autovalores internos ( $\lambda_{int}$ ) del sistema considerado son cercanos a cero. En ese caso,  $P_l(0) = \alpha_0$  proporciona una aproximación de  $P_l(\lambda_{int})$ . Por lo tanto, en este caso,  $P_l(0)$  es un buen indicador para estudiar la difusión numérica del esquema. Así, si consideramos  $PVM-0(S_0)$ ,  $PVM-2(S_0)$  y  $PVM-4(S_0)$ , entonces

$$\alpha_0^0 = S_0, \quad \alpha_0^2 = \frac{S_0}{2} \quad \text{y} \quad \alpha_0^4 = \frac{3S_0}{8},$$

respectivamente.

Con el fin de comparar el valor de  $\alpha_0$  para  $PVM-1U(S_L, S_R)$ ,  $PVM-2U(S_M, S_m)$  y  $PVM-4(S_M, S_I)$ , consideremos una situación donde  $S_L < 0$ ,  $S_R > 0$  y  $|S_L| > |S_R|$ . En ese caso  $S_M = S_L$  y  $S_m = S_R$ . Supongamos también que  $S_I = S_R$ . Entonces,  $\alpha_0$  es dado por

$$\alpha_0^{1U} = \frac{2S_R S_L}{S_L - S_R}, \quad \alpha_0^{2U} = \frac{2S_L^2 S_R}{(S_L - S_R)^2} \quad \text{y} \quad \alpha_0^4 = \frac{-S_L S_R (S_R - 2S_L)}{2(S_L - S_R)^2},$$

donde  $\alpha_0^{1U}$  corresponde al esquema  $PVM-1U(S_L, S_R)$ ,  $\alpha_0^{2U}$  al  $PVM-2U(S_M, S_m)$  y  $\alpha_0^4$  a  $PVM-4(S_M, S_I)$ . Pueden probarse las siguientes relaciones:

$$\alpha_0^{2U} = \alpha_0^{1U} \beta_2, \quad \text{con} \quad \beta_2 = \frac{-S_L}{S_R - S_L} \in (0, 1),$$

y

$$\alpha_0^4 = \alpha_0^{2U} - \beta_4, \quad \text{con} \quad \beta_4 = \frac{S_L S_R^2 + 2S_L^2 S_R}{2(S_L - S_R)^2} > 0.$$

## 1.6. Métodos con limitadores de flujo basados en esquemas de tipo PVM: Método WAF y extensiones.

En primer lugar vamos a presentar un breve resumen del método WAF introducido por E.F. Toro en [66]. Consideremos el sistema conservativo:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(W) = 0, x \in [0, L], t \in [0, T],$$

donde  $W(x, t)$  toma valores en un conjunto abierto y convexo  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$  y  $F$  es una función regular de  $\mathcal{O}$  a  $\mathbb{R}^N$ .

Consideremos un esquema conservativo de la forma

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i-1/2}^n - \mathcal{F}_{i+1/2}^n) \quad (1.6.1)$$

con flujo numérico  $\mathcal{F}_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(W_i^n, W_{i+1}^n)$ .

Consideremos el problema de Riemann asociado a (1.6.1) con datos iniciales  $W_i^n$  y  $W_{i+1}^n$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(W) = 0, \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_i & \text{si } x < 0, \\ W_{i+1} & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.6.2)$$

A partir de este punto eliminaremos el superíndice  $n$  para simplificar la notación. Denotamos por  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  las aproximaciones de las velocidades características y consideremos el rectángulo  $V = [-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}] \times [0, \Delta t]$ . El flujo numérico del método WAF se obtiene integrando el flujo en  $V$ , usando la regla del punto medio para la integral en tiempo, esto es, evaluando el flujo en  $t = \frac{\Delta t}{2}$ , obtenemos:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{WAF} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} F(\tilde{W}(x, \frac{\Delta t}{2})) dx,$$

siendo  $\tilde{W}$  una solución aproximada del problema de Riemann (1.6.2). Suponemos que  $\tilde{W}(x, t)$  viene definido en términos de  $N + 1$  estados constantes.

Definimos  $\omega_k$ ,  $k = 0, \dots, N + 1$  (véase la Figura 1.12) como:

$$\omega_k = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), \text{ donde } c_0 = -1, c_{N+1} = 1, \text{ y } c_l = \frac{\Delta t}{\Delta x} S_l, \text{ para } 1 \leq l \leq N,$$



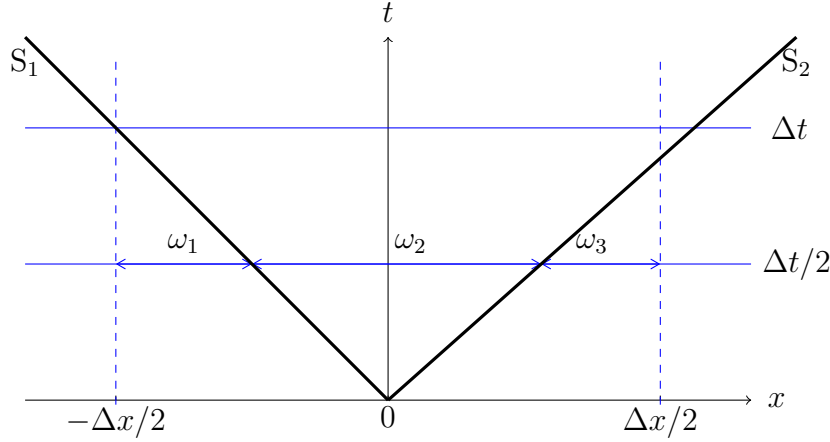


Figura 1.12: Malla de cómputo y ondas para el método WAF (en la Figura sólo tenemos en cuenta dos ondas).

donde  $N$  es el número de ondas. Por tanto, podemos escribir el flujo numérico como sigue:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{WAF} = \sum_{k=1}^{N+1} \omega_k F_{i+1/2}^{(k)}, \quad (1.6.3)$$

siendo  $F_{i+1/2}^{(k)}$  el valor de la función flujo en el intervalo  $k$ . Teniendo en cuenta la definición de  $\omega_k$ , podemos escribir el flujo WAF como sigue:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{WAF} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N c_k \Delta F_{i+1/2}^{(k)},$$

donde  $\Delta F_{i+1/2}^{(k)} = F_{i+1/2}^{(k+1)} - F_{i+1/2}^{(k)}$ , y  $F_i = F(W_i)$ . El esquema WAF es un método de segundo orden en espacio y tiempo, por lo que, de acuerdo con el teorema de Godunov, puede generar oscilaciones espurias en las proximidades de una discontinuidad, o, en general, en zonas donde el gradiente de la solución es grande. Para evitarlo, tomamos una estabilización TVD. Si denotamos por  $\chi(v)$  y definimos una función limitadora del flujo,

$$\Psi(v, c) = 1 - (1 - |c|)\chi(v),$$

podemos definir el esquema TVD-WAF como sigue:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{TVD-WAF} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sgn}(c_k) \Psi_k \Delta F_{i+1/2}^{(k)},$$

donde

$$\Psi_k = \Psi(v^{(k)}, c_k) = 1 - (1 - |c_k|)\chi(v^{(k)}).$$

Algunas elecciones adecuadas de  $\chi$  pueden encontrarse en [67]. Las utilizadas en esta memoria se describirán en el capítulo correspondiente.

Finalmente, usando las definiciones de  $\Psi_k$  y  $c_k$  podemos escribir el flujo TVD-WAF como sigue:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{TVD-WAF} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sgn}(S_k)(1 - \chi_k)\Delta F_{i+1/2}^{(k)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^N S_k \chi_k \Delta F_{i+1/2}^{(k)},$$

donde  $\chi_k = \chi(v^{(k)})$ .

### 1.6.1. Método HLL-WAF

Consideramos en esta sección un método TVD-WAF de dos ondas propuesto por E.F. Toro en [66]. Denotamos por  $S_L = S_1$  y  $S_R = S_N$ . Análogamente, denotamos  $\chi_L$  y  $\chi_R$  a las correspondientes evaluaciones de los limitadores de flujo. Ahora, usando el flujo HLL para el flujo intermedio  $F_{i+1/2}^{(2)}$ ,

$$F_{i+1/2}^{(2)} = \frac{S_R F_i - S_L F_{i+1} + S_R S_L (W_{i+1} - W_i)}{S_R - S_L},$$

y teniendo en cuenta que  $F_{i+1/2}^{(1)} = F_i = F(W_i)$  y  $F_{i+1/2}^{(3)} = F_{i+1} = F(W_{i+1})$ , el método TVD-WAF de dos ondas puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{HLL-WAF} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) &- \frac{1}{2}(\nu_1(\chi_L, \chi_R)(w_{i+1} - w_i) + \nu_2(\chi_L, \chi_R)(F_{i+1} - F_i)) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mu_1(\chi_L, \chi_R)(w_{i+1} - w_i) + \mu_2(\chi_L, \chi_R)(F_{i+1} - F_i)), \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \nu_1(\chi_L, \chi_R) &= \frac{S_L S_R ((1 - \chi_L) \text{sgn}(S_L) - (1 - \chi_R) \text{sgn}(S_R))}{S_R - S_L} \\ \nu_2(\chi_L, \chi_R) &= \frac{(1 - \chi_R)|S_R| - (1 - \chi_L)|S_L|}{S_R - S_L} \\ \mu_1(\chi_L, \chi_R) &= \frac{S_L S_R (S_L \chi_L - S_R \chi_R)}{S_R - S_L} \\ \mu_2(\chi_L, \chi_R) &= \frac{S_R^2 \chi_R - S_L^2 \chi_L}{S_R - S_L}. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Ahora vamos a escribir el esquema HLL-WAF de dos ondas como un Q-esquema de la forma

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{HLL-WAF} = \frac{1}{2}(F_{i+1} - F_i) - \frac{1}{2}Q_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i),$$

es decir, vamos a identificar la matriz de viscosidad numérica  $Q_{i+1/2}$  para el método HLL-WAF. Usando la propiedad de Roe

$$F_{i+1} - F_i = A_{i+1/2}(W_{i+1} - W_i).$$

podemos escribir

$$Q_{i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) = Q_{o1,i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) + \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{o2,i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R). \quad (1.6.6)$$

con

$$\begin{aligned} Q_{o1,i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) &= \nu_1(\chi_L, \chi_R)Id + \nu_2(\chi_L, \chi_R)A_{i+1/2} \\ Q_{o2,i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) &= \mu_1(\chi_L, \chi_R)Id + \mu_2(\chi_L, \chi_R)A_{i+1/2}. \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Obsérvese que el método HLL-WAF usual (1.6.4) puede verse como una extensión de los métodos PVM asociado a los polinomios de grado 1:

$$P_1^{o1}(x) = \nu_1(\chi_L, \chi_R) + \nu_2(\chi_L, \chi_R)x \text{ y } P_1^{o2}(x) = \mu_1(\chi_L, \chi_R) + \mu_2(\chi_L, \chi_R)x.$$

Puede probarse que

$$\begin{aligned} Q_{o1,i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) &= \frac{\text{sgn}(S_L)(1 - \chi_L) + \text{sgn}(S_R)(1 - \chi_R)}{2} A_{i+1/2} \\ &+ \frac{\text{sgn}(S_R)(1 - \chi_R)}{2} P_{1M}(A_{i+1/2}) - \frac{\text{sgn}(S_L)(1 - \chi_L)}{2} P_{1M}(A_{i+1/2}). \\ Q_{o2,i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) &= \frac{S_L \chi_L + S_R \chi_R}{2} A_{i+1/2} + \frac{S_R \chi_R}{2} P_{1M}(A_{i+1/2}) - \frac{S_L \chi_L}{2} P_{1M}(A_{i+1/2}), \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

donde

$$P_{1M}(x) = \frac{-2S_R S_L}{S_R - S_L} + \frac{S_R + S_L}{S_R - S_L} x. \quad (1.6.9)$$

Nótese que para el caso  $S_L < 0 < S_R$ , tenemos que  $P_{1M}(x) = P_{1U}(x)$ , siendo

$$P_{1U}(x) = \frac{S_R |S_L| - S_L |S_R|}{S_R - S_L} + \frac{|S_R| - |S_L|}{S_R - S_L}, \quad (1.6.10)$$

el polinomio asociado al método HLL (véase la Sección 1.5.5 para más detalles). Por otra parte, es fácil probar que

$$P_{1U}(x) = \frac{\text{sgn}(S_L) + \text{sgn}(S_R)}{2}x + \frac{\text{sgn}(S_R) - \text{sgn}(S_L)}{2}P_{1M}(x). \quad (1.6.11)$$

**Observación 1.6.1.** Nótese que:

- Si  $\chi_L = \chi_R = 0$ , entonces  $Q_{i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) = Q_{o1, i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L = 0, \chi_R = 0)$  y  $\mathcal{F}_{i+1/2}^{HLL-WAF}$  se reduce al flujo HLL usual.
- Si  $\chi_L = \chi_R = 1$ , entonces  $Q_{i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L, \chi_R) = \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{o1, i+1/2}^{HLL-WAF}(\chi_L = 1, \chi_R = 1)$ . Entonces, si  $N = 2$ ,  $\mathcal{F}_{i+1/2}^{HLL-WAF}$  se reduce al método Lax-Wendroff usual. Por tanto, el método HLL-WAF es de segundo orden en espacio y tiempo para sistemas 1D 2x2.

### 1.6.2. Método PVM-2U( $S_L, S_R$ )-FL

En esta sección presentamos un método nuevo de limitadores de flujo para dos ondas que tiene como método base el esquema PVM-2U( $S_L, S_R$ ) y que ha sido presentado en [10] con las siguientes propiedades:

- El método se reduce al método de primer orden PVM-2U en las zonas no regulares.
- El método se reduce al método Lax-Wendroff usual para  $N \geq 2$ , en las zonas suaves.

Recordemos que el método PVM-2U se define por el polinomio de segundo grado  $P_{2U}(x)$  que satisface (véase la Sección 1.5.7):

$$P_{2U}(S_L) = |S_L|, P_{2U}(S_R) = |S_R| \text{ y } P'_{2U}(S_M) = \text{sgn}(S_M),$$

donde

$$S_M = \begin{cases} S_L & \text{si } |S_L| \geq |S_R|, \\ S_R & \text{si } |S_L| < |S_R|. \end{cases}$$

Es fácil probar que:

$$P_{2U}(x) = \frac{\text{sgn}(S_L) + \text{sgn}(S_R)}{2}x + \frac{\text{sgn}(S_R) - \text{sgn}(S_L)}{2}P_{2,\alpha}(x). \quad (1.6.12)$$

donde

$$P_{2,\alpha}(x) = \alpha P_{2M}(x) + (1 - \alpha)P_{1M}(x), \quad (1.6.13)$$

siendo  $P_{1M}$  el polinomio definido en (1.6.9),  $P_{2M}$  el polinomio

$$P_{2M}(x) = -\frac{S_R + S_L}{S_R - S_L}x + \frac{2}{S_R - S_L}x^2$$

y

$$\alpha = \frac{(S_R - S_L)\text{sgn}(S_M) - (S_R + S_L)}{4S_M - 2(S_L + S_R)}. \quad (1.6.14)$$

Como hemos visto en la sección anterior el método HLL-WAF se puede definir en términos de las matrices de viscosidad  $Q_{o1}^{HLL-WAF}$  y  $Q_{o2}^{HLL-WAF}$  que, a su vez, se definen en términos del polinomio  $P_{1M}$  (1.6.9). Proponemos aquí un nuevo método de limitadores de flujo con una estructura similar al anterior y que resulta de sustituir en los anteriores el polinomio  $P_{1M}$  por el polinomio  $P_{2,\alpha}$  para una definición adecuada del parámetro  $\alpha$ . Así, usando la misma notación que en la sección anterior consideramos el siguiente flujo numérico:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{2U-FL} = \frac{F_i + F_{i+1}}{2} - \frac{1}{2}Q_{i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L, \chi_R)(w_{i+1} - w_i),$$

donde  $Q_{i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L, \chi_R)$  se define como:

$$Q_{i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L, \chi_R) = Q_{o1,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L, \chi_R) + \frac{\Delta t}{\Delta x}Q_{o2,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L, \chi_R), \quad (1.6.15)$$

con

$$\begin{aligned} Q_{o1,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L, \chi_R) &= \frac{\text{sgn}(S_L)(1 - \chi_L) + \text{sgn}(S_R)(1 - \chi_R)}{2}A_{i+1/2} \\ &+ \frac{\text{sgn}(S_R)(1 - \chi_R)}{2}P_{2,\alpha_R}(A_{i+1/2}) - \frac{\text{sgn}(S_L)(1 - \chi_L)}{2}P_{2,\alpha_L}(A_{i+1/2}), \end{aligned}$$

y

$$Q_{o2,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L, \chi_R) = \frac{S_L\chi_L + S_R\chi_R}{2}A_{i+1/2} + \frac{S_R\chi_R}{2}P_{2,\alpha_R}(A_{i+1/2}) - \frac{S_L\chi_L}{2}P_{2,\alpha_L}(A_{i+1/2}),$$

donde

$$\alpha_K = 1 - (1 - \chi_K)(1 - \alpha), \quad K = L, R,$$

con  $\alpha$  definido por (1.6.14).

**Proposición 1.6.1.** *Tenemos los siguientes resultados:*

- a) Si  $\chi_L = \chi_R = 0$ , entonces  $Q_{i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L = 0, \chi_R = 0) = Q_{o1,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L = 0, \chi_R = 0) = P_{2U}(A_{i+1/2})$ . Por tanto, el método se reduce al esquema de primer orden PVM-2U.

- b) Si  $\chi_L = \chi_R = 1$ , entonces  $Q_{i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L = 1, \chi_R = 1) = \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{o2,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L = 1, \chi_R = 1) = \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1/2}^2$ . Esto es, el método se reduce al esquema Lax-Wendroff.

**Demostración.-** Supongamos que  $\chi_R = \chi_L = 0$ , entonces  $\alpha_L = \alpha_R = \alpha$ . Por tanto, usando las ecuaciones (1.6.13) y (1.6.14) tenemos que  $P_{2,\alpha_L}(x) = P_{2,\alpha_R}(x) = \alpha P_{2M}(x) + (1 - \alpha)P_{1M}(x) = P_{2,\alpha}(x)$ . Entonces, por (1.6.12) obtenemos que

$$Q_{o1,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L = 0, \chi_R = 0) = P_{2U}(A_{i+1/2}).$$

Si  $\chi_R = \chi_L = 1$ , entonces  $\alpha_R = \alpha_L = 1$ , por tanto  $P_{2,\alpha_L} = P_{2,\alpha_R} = P_{2M}(x)$ . Y  $P_{2M}(x)$  es el polinomio tal que  $Q_{o2,i+1/2}^{2U-FL}(\chi_L = 1, \chi_R = 1) = A_{i+1/2}^2$ . ■

**Observación 1.6.2.** Nótese que si establecemos  $\alpha_L = \alpha_R = 0$ , entonces  $P_{2,\alpha_L}(x) = P_{2,\alpha_R}(x) = P_{1M}(x)$ . Entonces, recuperamos el método HLL-WAF clásico (véanse las ecuaciones (1.6.13) y (1.6.8)).

### 1.6.3. Método IFCP-WAF

En esta sección presentaremos un método de limitadores de flujo para tres ondas que tiene como método de base el esquema IFCP o PVM-2U( $S_L, S_R, S_{int}$ ) con las siguientes propiedades:

- El método se reduce al método IFCP en las zonas no regulares.
- El método se reduce al método de Lax-Wendroff normal para  $N \geq 2$  en las zonas suaves.

Recordamos que el método IFCP se define por el polinomio de segundo grado definido en (1.5.34) y (1.5.36):

$$P_{IFCP}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

y el polinomio asociado al método de Lax-Wendroff es

$$P_{LW} = \frac{\Delta t}{\Delta x} x^2.$$

Con el fin de obtener un método de limitadores de flujo basado en el método IFCP y LW vamos a definir el polinomio de segundo grado  $P_{IFCP-WAF}(x; \chi_L, \chi_R)$  en términos de los limitadores de flujo  $\chi_L, \chi_R$  como sigue:

$$P_{IFCP-WAF}(x; \chi_L, \chi_R) = \alpha_0(\chi_L, \chi_R) + \alpha_1(\chi_L, \chi_R)x + \alpha_2(\chi_L, \chi_R)x^2$$

donde  $\alpha_0(\chi_L, \chi_R)$ ,  $\alpha_1(\chi_L, \chi_R)$ ,  $\alpha_2(\chi_L, \chi_R)$  son solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & S_L & S_L^2 \\ 1 & S_R & S_R^2 \\ 1 & S_{int} & S_{int}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(S_L, \chi_L) \\ \Lambda(S_R, \chi_R) \\ \Lambda\left(S_{int}, \frac{\chi_L + \chi_R}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (1.6.16)$$

y donde  $\Lambda(\lambda, \chi) = (1 - \chi)|\lambda| + \chi \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \lambda^2$ .

Obsérvese que  $\Lambda(\lambda, 0) = |\lambda|$  y  $\Lambda(\lambda, 1) = \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda^2$ . Es fácil ver que  $\alpha_0(\chi_L, \chi_R)$ ,  $\alpha_1(\chi_L, \chi_R)$  y  $\alpha_2(\chi_L, \chi_R)$  están definidos como en el método IFCP por la expresión (1.5.36) donde ahora

$$\delta_L = \frac{\Lambda(S_L, \chi_L)}{(S_L - S_R)(S_L - S_{int})}, \delta_R = \frac{\Lambda(S_R, \chi_R)}{(S_R - S_L)(S_R - S_{int})}, \delta_{int} = \frac{\Lambda\left(S_{int}, \frac{\chi_L + \chi_R}{2}\right)}{(S_{int} - S_L)(S_{int} - S_R)}.$$

Es claro, por construcción, que si  $\chi_L = \chi_R = 0$ , entonces el polinomio de segundo grado  $P_{IFCP-WAF}(x)$  coincide con el polinomio asociado al método IFCP, y si  $\chi_L = \chi_R = 1$ , entonces el polinomio de segundo grado se reduce al polinomio  $P_{LW}(x)$ .

#### 1.6.4. Extensión a sistemas no conservativos

Veremos ahora la extensión de los diferentes métodos de limitadores de flujo de dos ondas a sistemas no conservativos de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(w) + B(w) \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = G(w) \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1.6.17)$$

Siguiendo [7] y [18], una extensión natural de estos métodos con limitadores de flujo para sistemas no conservativos sería la siguiente:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((D_{i+1/2}^{FL})^+ + (D_{i+1/2}^{FL})^-), \quad (1.6.18)$$

donde  $(D_{i+1/2}^{FL})^\pm = (D(w_i, w_{i+1}, H_i, H_{i+1})^{FL})^\pm$ ,

$$\begin{aligned} (D_{i+1/2}^{FL})^\pm &= \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}) - F(w_i) + B_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i) \right. \\ &\quad \left. \pm Q_{i+1/2}^{FL}(\chi_L, \chi_R)(w_{i+1} - w_i - A_{i+1/2}^{-1} G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)) \right), \end{aligned}$$

con  $B_{i+1/2} = B_\Phi(W_i, W_{i+1})$ ,  $G_{i+1/2} = G_\Phi(W_i, W_{i+1})$ ,  $A_{i+1/2} = A_\Phi(W_i, W_{i+1})$  y donde  $Q_{i+1/2}^{FL}(\chi_L, \chi_R)$  corresponderían a las diferentes matrices de difusión asociadas a los métodos HLL-WAF, PVM-2U( $S_L, S_R$ )-FL o IFCP-WAF.

Sin embargo, como puede verse en [18], el método no alcanza el segundo orden de precisión cuando  $Q_{i+1/2}^{FL} = \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1/2}^2$ , como en el caso conservativo. De acuerdo con [18] consideramos la siguiente modificación del esquema numérico:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((D_{i+1/2}^{FL})^+ + (D_{i+1/2}^{FL})^-) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} \left( \mathcal{R}(\chi_L, \chi_R)_{i-1/2} + \mathcal{R}(\chi_L, \chi_R)_{i+1/2} \right) \quad (1.6.19)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\chi_L, \chi_R)_{i+1/2} = & \frac{1}{2} \left( \chi_L DA(w_i) [A_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i), w_{i+1} - w_i] \right. \\ & + \chi_R DA(w_{i+1}) [A_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i), w_{i+1} - w_i] \\ & - \chi_L DA(w_i) [w_{i+1} - w_i, A_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)] \\ & - \chi_R DA(w_{i+1}) [w_{i+1} - w_i, A_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)] \\ & - \chi_L G_w(w_i) (A_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)) (H_{i+1} - H_i) \\ & - \chi_R G_w(w_{i+1}) (A_{i+1/2}(w_{i+1} - w_i) \\ & \left. - G_{i+1/2}(H_{i+1} - H_i)) (H_{i+1} - H_i) \right) \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

con  $DA(w)[u, v] = \left( \sum_{l=1}^N u_l \partial_{w_l} A(w) \right) v$  y  $\partial_{w_l} A(w)$  es la  $N \times N$  matriz cuyo elemento  $(i, j)$  es  $\partial_{w_l} a_{ij}(W)$  (véase [18]).  $G_w(w)$  denota la matriz jacobiana de  $G(w)$ .

Nótese que si  $\chi_L = \chi_R = 1$  entonces  $\mathcal{R}(\chi_L = 1, \chi_R = 1)_{i+1/2} / \Delta x^2$  es una aproximación de segundo orden del término

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(w) = & DA(w) [A(w)w_x - G(w)H_x, w_x] - DA(w) [w_x, A(w)w_x - G(w)H_x] \\ & - G_w(w) (A(w)w_x - G(w)H_x) H_x, \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

lo que garantiza que si  $Q_{i+1/2}^{FL}$  coincide con  $\frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1/2}^2$ , el método resultante sería de segundo orden en espacio y tiempo, como en el caso conservativo.



## 1.7. Extensión de alto orden

En el caso de sistemas de leyes de conservación (1.2.1), es posible construir métodos de alto orden basados en la reconstrucción de estados mediante el siguiente procedimiento: Dado un esquema de primer orden con función de flujo numérico  $G(U, V)$ , consideramos un operador de reconstrucción de orden  $p$ , esto es, un operador que asocia a una sucesión dada  $\{W_i\}$  de valores en las celdas dos nuevas sucesiones  $\{W_{i+1/2}^-\}$ ,  $\{W_{i+1/2}^+\}$  de tal manera que, siempre que

$$W_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} W(x) dx, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

para alguna función regular  $W$ , entonces:

$$W_{i+1/2}^\pm = W(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^p), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

A continuación, usamos el método de líneas: discretizamos el sistema únicamente en espacio, y lo mantenemos continuo en tiempo. Obsérvese primero que, si denotamos por  $\overline{W}_i(t)$  al promedio en la celda  $I_i$  de una solución regular  $W$  de (1.2.1) en el instante  $t$ :

$$\overline{W}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t) dx,$$

integrando (1.2.1), se obtiene la siguiente ecuación para los promedios:

$$\overline{W}'_i(t) = \frac{1}{\Delta x} (F(W(x_{i-1/2}, t)) - F(W(x_{i+1/2}, t))). \quad (1.7.1)$$

La idea es ahora aproximar esta ecuación utilizando al mismo tiempo el esquema de primer orden elegido y el operador de reconstrucción como sigue:

$$W'_i(t) = \frac{1}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i-1/2} - \mathcal{F}_{i+1/2}), \quad (1.7.2)$$

con

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(W_{i+1/2}^-(t), W_{i+1/2}^+(t)), \quad (1.7.3)$$

siendo  $W_i(t)$  la aproximación de  $\overline{W}_i(t)$  y  $\{W_{j+1/2}^\pm(t)\}$  las reconstrucciones asociadas a la sucesión  $\{W_j(t)\}$ . Puede probarse que (1.7.2)-(1.7.3) proporciona un método semidiscreto de orden  $p$  para (1.2.1).

Nótese que (1.7.2) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que puede ser resuelto con un método numérico estándar. En el contexto de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación es habitual el uso de métodos Runge-Kutta TVD (ver [32]).

Introduzcamos una interpretación de (1.7.2) en términos de medidas de Borel, como se hizo en la Sección 1.2, para facilitar la generalización al caso de sistemas no conservativos. Primero, obsérvese que (1.7.1) puede escribirse bajo la forma:

$$\overline{W}'_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} \langle [F(W(\cdot, t))]_x, 1_{I_i} \rangle. \quad (1.7.4)$$

A continuación, elegimos en cada celda  $I_i$  y en cada instante  $t > 0$  una función regular  $P_i^t$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-1/2}^+} P_i^t(x) = W_{i-1/2}^+(t); \quad \lim_{x \rightarrow x_{i+1/2}^-} P_i^t(x) = W_{i+1/2}^-(t). \quad (1.7.5)$$

Consideramos ahora la aproximación de  $W(\cdot, t)$  dada por la función regular a trozos  $W^t$  cuya restricción a  $I_i$  es  $P_i^t$ . Usando esta función, (1.7.4) puede aproximarse mediante:

$$W'_i = -\frac{1}{\Delta x} \langle [F(W^t)]_x, 1_{I_i} \rangle. \quad (1.7.6)$$

Nótese que, en este caso,  $[F(W^t)]_x$  es la suma de una medida regular cuya derivada de Radon-Nykodim en la celda  $I_i$  es  $F(P_i^t)_x$  y una medida singular:

$$\sum_i \left( F(W_{i+1/2}^+(t)) - F(W_{i+1/2}^-(t)) \right) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Si, de nuevo, el flujo numérico del esquema de primer orden se emplea para separar las medidas de Dirac situadas en las interceldas:

$$\begin{aligned} & \left( F(W_{i+1/2}^+(t)) - F(W_{i+1/2}^-(t)) \right) \delta_{x=x_{i+1/2}} = \\ & \left( F(W_{i+1/2}^+(t)) - \mathcal{F}_{i+1/2} \right) \delta_{x=x_{i+1/2}} + \left( \mathcal{F}_{i+1/2} - F(W_{i+1/2}^-(t)) \right) \delta_{x=x_{i+1/2}}, \end{aligned}$$

y el primer y segundo sumandos se asignan respectivamente a las celdas  $I_{i+1}$  y  $I_i$ , obtenemos de (1.7.6):

$$\begin{aligned} W'_i = -\frac{1}{\Delta x} & \left( F(W_{i-1/2}^+(t)) - \mathcal{F}_{i-1/2} + \mathcal{F}_{i+1/2} - F(W_{i+1/2}^-(t)) \right. \\ & \left. + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(P_i^t(x))_x dx \right), \quad (1.7.7) \end{aligned}$$

que obviamente es equivalente a (1.7.2).

Centrémonos ahora en el problema general (1.1.1). En este caso, la ecuación para los promedios en la celda es la siguiente:

$$W'_i = -\frac{1}{\Delta x} \langle [\mathcal{A}(W_i(t))W_i(t)]_x, 1_{I_i} \rangle. \quad (1.7.8)$$

Siguiendo [55], [13], presentamos a continuación la escritura general de una aproximación semidiscreta de alto orden basada en un esquema de primer orden camino-conservativo (1.3.7) con  $q = 0$  y  $p = 1$ , esto es,

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{D}^\pm(W_i^n, W_{i+1}^n),$$

y un operador de reconstrucción de orden  $p$ . La extensión natural de (1.7.7) es:

$$W'_i = -\frac{1}{\Delta x} \left( \mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^- + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(P_i^t(x)) \frac{dP_i^t}{dx}(x) dx \right), \quad (1.7.9)$$

con

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{D}^\pm(W_{i+1/2}^-, W_{i+1/2}^+). \quad (1.7.10)$$

En (1.7.9) los términos integrales son aproximaciones de la parte regular de la descomposición de Lebesgue de  $[\mathcal{A}(W(\cdot, t))W_x(\cdot, t)]_\Phi$ , mientras que los términos  $\mathcal{D}_{i-1/2}^\pm$  corresponden a la parte singular.

Obsérvese que hay una diferencia importante entre los casos conservativo y no conservativo: mientras que en el caso conservativo el esquema numérico no depende de las funciones  $P_i^t$  elegidas (sólo se tienen en cuenta los estados reconstruidos en las intercel-das), esto no ocurre para sistemas no conservativos. En consecuencia, el orden del método es  $p$  en el primer caso y dependiente de la elección de las funciones  $P_i^t$  en el segundo.

En la práctica, la definición del operador de reconstrucción proporciona una elección natural de las funciones  $P_i^t$ . El procedimiento usual para definir un operador de reconstrucción es el siguiente: dada una sucesión  $\{W_i\}$  de valores en las celdas, la función aproximante en cada celda  $I_i$ ,  $P_i^t$ , se calcula usando los valores  $W_j$  en un *stencil*:

$$P_i(x; W_{i-l}, \dots, W_{i+r}),$$

siendo  $l, r$  dos números naturales prefijados. Las reconstrucciones  $W_{i+1/2}^\pm$  se obtienen tomando los límites de estas funciones en las intercel-das. Estas funciones aproximantes se calculan generalmente utilizando técnicas de interpolación o aproximación.

De aquí en adelante, supondremos que el operador de reconstrucción se ha construido siguiendo este procedimiento. Por tanto, la elección natural de  $P_i^t$  es:

$$P_i^t(x) = P_i(x; W_{i-l}(t), \dots, W_{i+r}(t)). \quad (1.7.11)$$

En la literatura se pueden encontrar distintos operadores de reconstrucción. En la práctica los más utilizados son: la reconstrucción tipo MUSCL ([71]), reconstrucciones ENO y WENO ([38], [43], [62], [63]), reconstrucción hiperbólica ([45]), etc.

Se puede probar el siguiente resultado sobre el orden del método:

**Teorema 1.7.1.** *Supongamos que  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{D}^\pm$  son regulares y con derivadas acotadas. Supongamos también que el operador de reconstrucción es de orden  $p$  y que, dada una sucesión definida mediante*

$$W_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} W(x) dx$$

para alguna función regular  $W$ , se verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} W_{i+1/2}^+ - W_{i+1/2}^- &= \mathcal{O}(\Delta x^{p+1}), \\ P_i(x; W_{i-l}, \dots, W_{i+r}) &= W(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{s_1}), \quad \forall x \in I_i, \\ \frac{d}{dx} P_i(x; W_{i-l}, \dots, W_{i+r}) &= W'(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{s_2}), \quad \forall x \in I_i. \end{aligned}$$

Entonces (1.7.9) es una aproximación del sistema (1.7.8) para soluciones regulares  $W$ , de orden al menos  $s = \min(p, s_1, s_2)$  en el sentido siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left( \mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^- + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(P_i^t(x)) \frac{dP_i^t}{dx}(x) dx \right) \\ = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx \right) + \mathcal{O}(\Delta x^s), \quad (1.7.12) \end{aligned}$$

para cada solución  $W$  suficientemente regular, siendo  $\{W_{i+1/2}^\pm(t)\}$  las reconstrucciones correspondientes a la sucesión  $\{W_i(t)\}$  y  $P_i^t$  la función definida en (1.7.11).

La prueba es idéntica a la del caso particular estudiado en [13], donde se presentaron métodos basados en una generalización de Roe.

**Observación 1.7.1.** Para las técnicas de reconstrucción usuales se suele tener  $s_2 \leq s_1 < p$ , luego el orden teórico de (1.7.9) es  $s_2$  para sistemas no conservativos y  $p$  para sistemas de leyes de conservación. En consecuencia, puede perderse exactitud cuando se aplica una técnica de reconstrucción de orden  $p$  para leyes de conservación a un problema no conservativo. No obstante, esta cota de error es pesimista: en los ejemplos numéricos se suele medir un orden  $s_2 + 1$  para soluciones regulares. Por otra parte, en [49] se emplea una técnica para el cálculo de las integrales mediante el método de extrapolación de Richardson que garantiza el orden  $s_2 + 1$ .

Finalmente, podemos escribir el esquema numérico en términos de la variable  $w_i$  como sigue:

$$\begin{aligned} w_i' = -\frac{1}{\Delta x} \left( D_{i+1/2}^-(w_{i+1/2}^-, w_{i+1/2}^+, H_{i+1/2}^-, H_{i+1/2}^+) + D_{i-1/2}^+(w_{i-1/2}^-, w_{i-1/2}^+, H_{i-1/2}^-, H_{i-1/2}^+) \right) \\ + F(w_{i+1/2}^-) - F(w_{i-1/2}^+) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} B(P_i(x)) \partial_x P_i(x) dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} B(P_H(x)) \partial_x P_H(x) dx \quad (1.7.13) \end{aligned}$$

donde  $w_{i+1/2}^{\pm}$  son las reconstrucciones a derecha e izquierda de  $x_{i+1/2}$  de los  $w(x, t)$  y  $H_{i+1/2}^{\pm}$  son las reconstrucciones del dato  $H(x)$  en  $x_{i+1/2}$ . Las funciones  $P_{w,i}(x)$  y  $P_{H,i}(x)$  se definen de forma análoga a las funciones  $P_i^t(x)$  (1.7.11) tomando respectivamente  $\bar{w}_{i-l}(t), \dots, \bar{w}_{i+r}(t)$  y  $\bar{H}_{i-l}, \dots, \bar{H}_{i+r}$ .

Al igual que en problemas conservativos, se utiliza un método de Runge-Kutta TVD ([32], [62], [64]) para la aproximación numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente, se necesita usar una fórmula de cuadratura para aproximar la integral que aparece en (1.7.13).

Con el fin de obtener esquemas numéricos camino-conservativos de alto orden que sean bien equilibrados, será necesario considerar en primer lugar operadores de reconstrucción que sean bien equilibrados en el siguiente sentido:

**Definición 1.7.1.** Dada una solución estacionaria regular de (1.1.1), se dice que un operador de reconstrucción es bien-equilibrado para  $W(x)$  si las funciones de aproximación  $P_i(x)$  asociadas a los valores promedio  $\{W_i\}$  son también soluciones estacionarias del sistema, es decir,

$$\mathcal{A}(P_i(x)) \frac{\partial P_i}{\partial x}(x) = 0, \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], i = 1, \dots, NV.$$

**Teorema 1.7.2.** Sea  $\gamma \in \Gamma$ . Supongamos que el método camino-conservativo de primer orden y el operador de reconstrucción son exactamente bien-equilibrados para  $\gamma$ . Entonces el esquema numérico (1.7.13) es también exactamente bien-equilibrado para  $\gamma$ .

**Teorema 1.7.3.** Bajo las hipótesis del teorema (1.7.1), el esquema (1.7.13) es bien-equilibrado con orden al menos  $\alpha = \min(p, s_1, s_2)$ .



# Capítulo 2

## Discretización de sistemas hiperbólicos no conservativos bidimensionales mediante esquemas camino-conservativos: conceptos generales

### 2.1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es presentar los conceptos básicos necesarios para el diseño de esquemas de volúmenes finitos camino-conservativos para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}(w) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(w) + B_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + B_2(w)\frac{\partial w}{\partial y} = G_1(w)\frac{\partial H}{\partial x} + G_2(w)\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (2.1.1)$$

siendo  $w(\mathbf{x}, t): D \times (0, T) \mapsto \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ , donde  $D$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^2$ ;  $\mathcal{O}$ , un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^N$ ;  $F_i: \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}^N$ ,  $B_i: \mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}_{N \times N}$  y  $G_i: \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ , son funciones regulares y localmente acotadas. Finalmente  $H: D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  es una función conocida.

El sistema (2.1.1) puede escribirse en la forma equivalente:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + A_2(w)\frac{\partial w}{\partial y} = G_1(w)\frac{\partial H}{\partial x} + G_2(w)\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (2.1.2)$$

siendo:

$$A_j(w) = \mathcal{J}_j(w) + B_j(w), \quad j = 1, 2,$$

donde  $\mathcal{J}_j(w) = \frac{\partial F_j}{\partial w}(w)$ ,  $j = 1, 2$  es el jacobiano de  $F_j$ .

Dado un vector unitario  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ , definimos la matriz

$$A(w, \boldsymbol{\eta}) = A_1(w)\eta_1 + A_2(w)\eta_2. \quad (2.1.3)$$

Supondremos además que para todo  $w \in \mathcal{O}$  y  $\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$ , la matriz  $A(w, \boldsymbol{\eta})$  tiene  $N$  autovalores reales y distintos

$$\lambda_1(w, \boldsymbol{\eta}) < \dots < \lambda_N(w, \boldsymbol{\eta}),$$

y  $R_j(w, \boldsymbol{\eta})$ ,  $j = 1, \dots, N$  son autovectores asociados. En consecuencia  $A(w, \boldsymbol{\eta})$  es diagonalizable:

$$A(w, \boldsymbol{\eta}) = K(w, \boldsymbol{\eta})L(w, \boldsymbol{\eta})K^{-1}(w, \boldsymbol{\eta}),$$

siendo  $L(w, \boldsymbol{\eta})$  la matriz diagonal cuyos coeficientes son los autovalores de  $A(w, \boldsymbol{\eta})$  y  $K(w, \boldsymbol{\eta})$  es una matriz cuyas columnas son los vectores  $R_j(w, \boldsymbol{\eta})$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

Si se añade al sistema la ecuación trivial

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

y se considera  $H$  como una nueva incógnita del problema (cuyo valor queda determinado por la condición inicial), el sistema puede ser reescrito también en la forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}_1(W)\frac{\partial W}{\partial x} + \mathcal{A}_2(W)\frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad (2.1.4)$$

donde  $W$  es el vector aumentado:

$$W = \begin{bmatrix} w \\ H \end{bmatrix},$$

y la estructura de bloques de las matrices  $\mathcal{A}_j(W) \in \mathcal{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ ,  $j = 1, 2$ ,  $M = N + 1$ , viene dada por

$$\mathcal{A}_j(W) = \left[ \begin{array}{c|c} A_j(w) & -G_j(w) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], j = 1, 2. \quad (2.1.5)$$

Si los autovalores de la matriz  $A(W, \boldsymbol{\eta})$  no se anulan, el sistema (2.1.4) sigue siendo estrictamente hiperbólico: dado un vector unitario  $\boldsymbol{\eta}$ , los autovalores de la matriz:

$$A(W, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{A}_1(W)\eta_1 + \mathcal{A}_2(W)\eta_2,$$

son:

$$\lambda_1(w, \boldsymbol{\eta}), \dots, \lambda_N(w, \boldsymbol{\eta}), 0$$

con autovectores asociados:

$$\mathcal{R}_1(W, \boldsymbol{\eta}), \dots, \mathcal{R}_M(W, \boldsymbol{\eta}),$$



dados por

$$\mathcal{R}_i(W, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} R_i(w, \boldsymbol{\eta}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N; \quad \mathcal{R}_M(W, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} A(w, \boldsymbol{\eta})^{-1} \cdot G(w, \boldsymbol{\eta}) \\ 1 \end{bmatrix},$$

siendo

$$G(w, \boldsymbol{\eta}) = G_1(w)\eta_1 + G_2(w)\eta_2.$$

Nótese que, como en el caso presentado en el Capítulo 1, los productos no conservativos  $\mathcal{A}_k(W)W_{x_k}$  pueden no tener sentido en general en el marco de la teoría de distribuciones en el caso de presentar  $W$  discontinuidades. Por tanto, se hace necesaria también aquí la definición de una *familia de caminos* (véase [8]).

**Definición 2.1.1.** Una *familia de caminos* en  $\Omega \subset \mathbb{R}^M$  es una función localmente Lipschitz

$$\Phi: [0, 1] \times \Omega \times \Omega \times \mathcal{S}^1 \rightarrow \Omega,$$

donde  $\mathcal{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  denota la esfera unidad, satisfaciendo las siguientes propiedades:

1.  $\Phi(0; W_L, W_R, \boldsymbol{\eta}) = W_L$  y  $\Phi(1; W_L, W_R, \boldsymbol{\eta}) = W_R$ , para cualquier  $W_L, W_R \in \Omega$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{S}^1$ .
2.  $\Phi(s; W_L, W_R, \boldsymbol{\eta}) = \Phi(1 - s; W_R, W_L, -\boldsymbol{\eta})$ , para cualquier  $W_L, W_R \in \Omega$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{S}^1$ .
3. Dado un conjunto arbitrario acotado  $\mathcal{B} \subset \Omega$ , existe una constante  $k$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R, \boldsymbol{\eta}) \right| \leq k|W_L - W_R|,$$

para cualquier  $W_L, W_R \in \mathcal{B}$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{S}^1$ .

4. Para cualquier conjunto acotado  $\mathcal{B} \subset \Omega$ , existe una constante  $K$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^1, W_R^1, \boldsymbol{\eta}) - \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^2, W_R^2, \boldsymbol{\eta}) \right| \leq K(|W_L^1 - W_L^2| + |W_R^1 - W_R^2|),$$

para cada  $W_L^1, W_R^1, W_L^2, W_R^2 \in \mathcal{B}$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{S}^1$ .

**Observación 2.1.1.** En la definición anterior podemos eliminar la dependencia de  $\boldsymbol{\eta}$  en la definición de caminos para sistemas invariantes por rotación. De hecho, en [22] las familias de caminos introducidas para definir los productos no conservativos en el caso multidimensional no dependen de  $\boldsymbol{\eta}$ .

Supóngase que tenemos una familia de caminos  $\Phi$  en  $\Omega$ . Entonces, los productos no conservativos en (2.1.4) pueden ser interpretados como una medida de Borel y podemos dar una definición rigurosa de solución débil (véase [22] para más detalles). De acuerdo con esta definición, una función regular a trozos  $W$  es una solución débil si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

- (i)  $W$  es una solución clásica donde es continua.
- (ii) Para cada punto de una discontinuidad,  $W$  satisface la condición de salto

$$\int_0^1 (\sigma Id - \mathcal{A}(\Phi(s; W^-, W^+, \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W^-, W^+, \boldsymbol{\eta}) ds = 0, \quad (2.1.6)$$

donde  $Id$  es la matriz identidad;  $\sigma$ , la velocidad de propagación de la discontinuidad;  $\boldsymbol{\eta}$  un vector normal unitario ortogonal a la discontinuidad en el punto considerado; y  $W^-, W^+$ , los límites laterales de la solución en la discontinuidad.

Junto a la definición de soluciones débiles, debemos escoger una noción de entropía. Suponemos aquí que el sistema puede ser dotado con un par de entropía  $(\eta, \mathbf{G})$ , es decir, un par de funciones regulares  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que:

$$\nabla \mathcal{G}_i(W) = \nabla \eta(W) \cdot \mathcal{A}_i(W), \quad \forall W \in \Omega, \quad i = 1, 2.$$

**Definición 2.1.2.** Decimos que una solución débil es una solución entrópica si satisface la inecuación siguiente:

$$\frac{\partial \eta(W)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}_1(W)}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_2(W)}{\partial x_2} \leq 0,$$

en el sentido de las distribuciones.

Las consideraciones para la elección del camino son iguales a las realizadas en el capítulo anterior para problemas unidimensionales.

## 2.2. Discretización numérica

A fin de discretizar el sistema (2.1.4), el dominio computacional se descompone en celdas o volúmenes finitos,  $V_i \subset \mathbb{R}^2$ , que supondremos polígonos cerrados. Como es habitual, suponemos que la intersección de dos celdas es, o bien vacía, o bien una arista común. Denotaremos por  $\mathcal{T}$  al conjunto de celdas. De aquí en adelante usaremos la siguiente notación: dado un volumen finito  $V_i$ ,  $N_i \in \mathbb{R}^2$  designa a su centro;  $\mathcal{N}_i$  es el conjunto de índices  $j$  tales que  $V_j$  es un vecino de  $V_i$ ;  $E_{ij}$  es la arista común de dos celdas vecinas  $V_i$  y  $V_j$ , y  $|E_{ij}|$  es su longitud;  $\boldsymbol{\eta}_{ij} = (\eta_{ij,1}, \eta_{ij,2})$  es el vector unitario normal a la arista  $E_{ij}$

y que apunta hacia la celda  $V_j$  (ver Figura 2.1). Cada celda a su vez será subdividida en subceldas  $\{V_{ij}\}_{j \in \mathcal{N}_i}$  (ver Figura 2.2).  $V_{ij}$  es el triángulo formado por el vértice  $N_i$  con la arista  $E_{ij}$ . Denotaremos por  $|V_i|$  y  $|V_{ij}|$  respectivamente el volumen de la celda  $V_i$  y la subcelda  $V_{ij}$ . Finalmente,  $W_i^n$  representará la aproximación del promedio de la solución exacta en la celda  $V_i$  en el tiempo  $t^n$ :

$$W_i^n \cong \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} W_i(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x}.$$

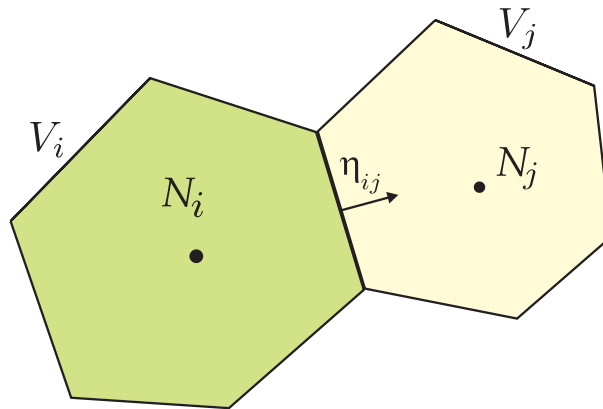


Figura 2.1: Volúmenes finitos.

Para la derivación de los esquemas de primer orden se utilizará el *método de líneas* (véase [26] y [72]), que consiste en considerar una familia de problemas de Riemann proyectados en la dirección normal a cada arista del mallado de volúmenes finitos considerado. Estos problemas se aproximan mediante revolvedores de Riemann aproximados. Las soluciones aproximadas de estos problemas 1D se promedian en cada celda del mallado para avanzar en tiempo.

Supongamos que las aproximaciones en las celdas en el instante de tiempo  $n$ ,  $\{W_i^n\}$ , son conocidas. Para progresar en el tiempo, consideramos en cada arista  $E_{ij}$  el siguiente problema de Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}_1(W)W_x + \mathcal{A}_2(W)\frac{\partial W}{\partial y} = 0, \\ W(x, y, t^n) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } \eta_{ij,1}x + \eta_{ij,2}y < k_{ij}, \\ W_j^n & \text{si } \eta_{ij,1}x + \eta_{ij,2}y > k_{ij}, \end{cases} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

siendo  $k_{ij} \in \mathbb{R}$  tal que  $E_{ij}$  está contenida en la línea recta de ecuación:

$$\eta_{ij,1}x + \eta_{ij,2}y = k_{ij}. \quad (2.2.2)$$

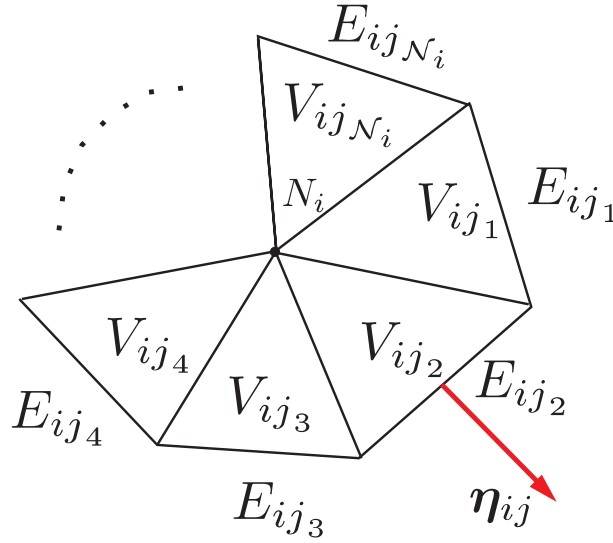


Figura 2.2: División en subceldas de un volumen finito.

Puede probarse que la solución de este problema de Riemann viene dada por:

$$W(x, y, t) = U(\eta_{ij,1}x + \eta_{ij,2}y, t) \quad (2.2.3)$$

donde  $U$  es la solución del problema de Riemann 1D siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}(U, \boldsymbol{\eta}_{ij}) \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \\ U(\xi, t^n) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } \xi < k_{ij}, \\ W_j^n & \text{si } \xi > k_{ij}, \end{cases} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Obsérvese que el problema (2.2.4) es del tipo de los estudiados en la Sección 1.3. Elegimos a continuación un método camino-conservativo como los definidos en el capítulo anterior para obtener la aproximación  $U_{ij}^{n+1}$  del promedio de  $W(x, t^{n+1})$  en la subcelda  $V_{ij}$

$$U_{ij}^{n+1} \cong \frac{1}{|V_{ij}|} \int_{V_{ij}} W(x, t^{n+1}) dx.$$

Finalmente, calcularemos  $W_i^{n+1}$  promediando las aproximaciones de las subceldas:

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |V_{ij}| U_{ij}^{n+1}. \quad (2.2.5)$$

Nótese que  $U_{ij}^{n+1}$  se define como

$$U_{ij}^{n+1} = W_i^n - \frac{2\Delta t}{d_{ij}} \mathcal{D}_{ij}^-(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij}), \quad (2.2.6)$$

donde  $d_{ij} = d(N_i, E_{ij})$  y  $\mathcal{D}_{ij}^-$  es un esquema camino-conservativo como los definidos en la Sección 1.3. Concretamente  $D_{ij}^\pm$  verifica que

$$\mathcal{D}_{ij}^\pm(W, W; \boldsymbol{\eta}_{ij}) = 0, \forall W \in \Omega \text{ y}$$

$$\mathcal{D}_{ij}^+(W_0, W_1; \boldsymbol{\eta}_{ij}) + \mathcal{D}_{ij}^-(W_0, W_1; \boldsymbol{\eta}_{ij}) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_0, W_1, \boldsymbol{\eta}_{ij})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_0, W_1, \boldsymbol{\eta}_{ij}) ds.$$

Ahora, sustituyendo (2.2.6) en la expresión (2.2.5), y teniendo en cuenta que  $|V_{ij}| = \frac{d_{ij}}{2} |E_{ij}|$  se tiene que

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| \mathcal{D}_{ij}^-(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij}).$$

Por último, si usamos algunos de los esquemas presentados en la Sección 1.5 podemos escribir la expresión anterior en términos de las variables  $w_i$ :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| D_{ij}^-(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij}), \quad (2.2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{ij}^-(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij}) &= \frac{1}{2} (A_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(w_j^n - w_i^n) - G_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i) \\ &\quad - Q_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(w_j^n - w_i^n - A_\Phi^{-1}(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})G_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i))), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

siendo  $Q_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  la matriz de viscosidad asociada al método y la matriz  $A_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  se define de manera análoga a (1.5.4) y  $G_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  de forma análoga a (1.5.7).

Usando ahora la propiedad de Roe generalizada

$$A_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(w_j^n - w_i^n) = F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_j^n) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_i^n) + B_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(w_j^n - w_i^n) \quad (2.2.9)$$

donde

$$F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W) = F_1(W)\eta_{ij,1} + F_2(W)\eta_{ij,2}$$

y  $B_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  es la matriz que se define de forma equivalente a (1.5.6), (2.2.8) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} D_{ij}^-(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij}) &= \frac{1}{2} (F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_j^n) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_i^n) + B_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(w_j^n - w_i^n) \\ &\quad - G_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i) \\ &\quad - Q_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(w_j^n - w_i^n - A_\Phi^{-1}(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})G_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i))). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

## 2.3. Esquemas de alto orden

Presentaremos en esta sección la extensión a alto orden mediante un operador de reconstrucción de estados, tal como se describe en el artículo [8].

A modo de ejemplo, consideremos primero el caso de sistemas de leyes de conservación

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}(W) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(W) = 0. \quad (2.3.1)$$

Estos sistemas pueden ser considerados como casos particulares del sistema (2.1.4) en el que las matrices  $A_i(W)$ ,  $i = 1, 2$  son los Jacobianos:

$$A_i(W) = \frac{\partial F_i}{\partial W}, \quad i = 1, 2.$$

Los esquemas de alto orden para (2.3.1) basados en la reconstrucción de estados pueden definirse mediante el siguiente procedimiento: dado un esquema conservativo de primer orden con función de flujo numérico  $\mathcal{F}(U, V; \boldsymbol{\eta})$ , consideremos un operador de reconstrucción de orden  $p$ , esto es, un operador que asocia a una familia dada  $\{W_{ij}\}_{i=1}^{NV}$  de valores en las celdas dos familias de funciones definidas en las aristas:

$$\gamma \in E_{ij} \rightarrow W_{ij}^\pm(\gamma),$$

de forma que, siempre que

$$W_i = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} W(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.3.2)$$

para alguna función continua  $W$ , entonces

$$W_{ij}^\pm(\gamma) = W(\gamma) + O(\Delta x^p), \quad \forall \gamma \in E_{ij}.$$

Una vez que han sido elegidos el esquema de primer orden y el operador de reconstrucción, usamos el método de líneas para obtener esquemas de alto orden para (2.3.1): la idea es discretizar sólo en espacio, dejando el problema continuo en el tiempo. Este procedimiento conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que tiene que ser resuelto numéricamente. La elección del esquema numérico es importante: Una discretización linealmente estable del tiempo que no es TVD (*Total Variation Diminishing*) puede generar oscilaciones espurias incluso para la discretización espacial TVD. Por tanto, consideraremos en los tests numéricos los métodos TVD Runge-Kutta introducidos en [64]. Véase también [32], [62].

Denotemos por  $\bar{W}_i(t)$  el promedio en la celda de una solución regular  $W$  de (2.3.1) sobre la celda  $V_i$  en el instante  $t$ :

$$\bar{W}_i(t) = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} W(x, t) dx.$$

Los promedios en las celdas satisfacen la siguiente ecuación:

$$\bar{W}_i'(t) = -\frac{1}{|V_i|} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} F_{\mathbf{n}_{ij}}(W(\gamma, t)) d\gamma \right). \quad (2.3.3)$$

El esquema de primer orden y las reconstrucciones se usan para aproximar los valores de los flujos en las aristas

$$W_i'(t) = -\frac{1}{|V_i|} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} \mathcal{F}(W_{ij}^-(\gamma, t), W_{ij}^+(\gamma, t); \mathbf{n}_{ij}) d\gamma \right), \quad (2.3.4)$$

siendo  $W_i(t)$  la aproximación de  $\bar{W}_i(t)$  proporcionada por el esquema y  $W_{ij}^\pm(\gamma, t)$  la reconstrucción en  $\gamma \in E_{ij}$  correspondiente a la familia  $\{W_i(t)\}_{i=1}^{NV}$ .

En la práctica, los términos integrales en (2.3.4) se aproximan por medio de una cuadratura numérica de orden, al menos,  $\bar{r} \geq p$ :

$$\int_a^b f(s) ds = (b-a) \left( \sum_{l=1}^{n(\bar{r})} \omega_l f(x_l) \right) + O(\Delta x^{\bar{r}}), \quad (2.3.5)$$

donde  $n(\bar{r})$  denota el número de puntos,  $\omega_l$  son los pesos, y  $x_l = a + s_l(b-a)$  con  $s_l \in [0, 1]$ , representan los puntos de cuadratura. La expresión del esquema numérico semi-discreto resultante es:

$$W_i'(t) = -\frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| \left( \sum_{l=1}^{n(\bar{r})} \omega_l \mathcal{F}(W_{ij,l}^-(t), W_{ij,l}^+(t); \mathbf{n}_{ij}) \right). \quad (2.3.6)$$

donde

$$W_{ij,l}^\pm(t) = W_{ij}^\pm(a_{ij} + s_l(b_{ij} - a_{ij}), t), \quad (2.3.7)$$

siendo  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  los extremos de la arista  $E_{ij}$ .

Generalicemos ahora los esquemas semi-discretos (2.3.4) o (2.3.6) al sistema no conservativo (2.1.4). Suponemos que las reconstrucciones se calculan como sigue: dada la familia  $\{W_i\}_{i=1}^{NV}$  de valores en las celdas, primero construimos una función de aproximación en cada celda  $V_i$ , basada en los valores de  $W_i$  en algunas de las celdas cercanas a  $V_i$  (el *stencil*):

$$P_i(\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x}; \{W_j\}_{j \in \mathcal{B}_i}),$$

para algún conjunto de índices  $\mathcal{B}_i$ . Si, por ejemplo, la reconstrucción sólo depende de las celdas vecinas de  $V_i$ , entonces  $\mathcal{B}_i = \mathcal{N}_i \cup \{i\}$ . Estas funciones de aproximación son calculadas normalmente por medio de una interpolación o un procedimiento de aproximación.

Una vez que estas funciones se han construido, las reconstrucciones en  $\gamma \in E_{ij}$  se definen como:

$$W_{ij}^-(\gamma) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \gamma} P_i(\mathbf{x}), \quad W_{ij}^+(\gamma) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \gamma} P_j(\mathbf{x}). \quad (2.3.8)$$

Claramente, para cualquier  $\gamma \in E_{ij}$  se satisfacen las siguientes igualdades:

$$W_{ij}^-(\gamma) = W_{ji}^+(\gamma); \quad W_{ij}^+(\gamma) = W_{ji}^-(\gamma).$$

Suponemos además que el operador de reconstrucción satisface las siguientes propiedades:

(HP1) Es conservativo, es decir, la siguiente igualdad se cumple para cualquier celda  $V_i$ :

$$W_i = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} P_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.3.9)$$

(HP2) Si el operador es aplicado a una secuencia  $\{W_i\}$  satisfaciendo (2.3.2) para alguna función continua  $W(\mathbf{x})$ , entonces

$$W_{ij}^\pm(\gamma) = W(\gamma) + O(\Delta x^p), \quad \forall \gamma \in E_{ij},$$

y

$$W_{ij}^+(\gamma) - W_{ij}^-(\gamma) = O(\Delta x^{p+1}), \quad \forall \gamma \in E_{ij}.$$

(HP3) Es de orden  $q$  en el interior de las celdas, es decir, si el operador es aplicado a una secuencia  $\{W_i\}$  satisfaciendo (2.3.2) para alguna función continua  $W(\mathbf{x})$ , entonces:

$$P_i(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) + O(\Delta x^q), \quad \forall \mathbf{x} \in \text{int}(V_i). \quad (2.3.10)$$

(HP4) Bajo suposición de la propiedad anterior, el gradiente de  $P_i$  proporciona una aproximación de orden  $m$  del gradiente de  $W$ :

$$\nabla P_i(\mathbf{x}) = \nabla W(\mathbf{x}) + O(\Delta x^m), \quad \forall \mathbf{x} \in \text{int}(V_i). \quad (2.3.11)$$

**Observación 2.3.1.** Nótese que, en general,  $m \leq q \leq p$ . Si, por ejemplo, las funciones de aproximación son polinomios de grado  $p$  obtenidos interpolando en los valores de las celdas de un stencil fijado, entonces  $m = p - 1$  y  $q = p$ . En el caso de las reconstrucciones tipo WENO (véase [62]), las funciones de aproximación son obtenidas como una combinación lineal de los polinomios de aproximación cuya precisión es mayor en la frontera que en el interior de la celda: en este caso  $q < p$ .



Denotemos por  $P_i^t$  a las funciones de aproximación correspondientes a las aproximaciones de los promedios de las celdas  $W_i(t)$ , es decir,

$$P_i^t(\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x}; \{W_j(t)\}_{j \in \mathcal{B}_i}).$$

$W_{ij}^-(\gamma, t)$  y  $W_{ij}^+(\gamma, t)$  están definidos como

$$W_{ij}^-(\gamma, t) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \gamma} P_i^t(\mathbf{x}), \quad W_{ij}^+(\gamma, t) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \gamma} P_j^t(\mathbf{x}). \quad (2.3.12)$$

Usando el teorema de la divergencia, podemos reescribir (2.3.4) como sigue:

$$\begin{aligned} W_i'(t) &= -\frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} (\mathcal{F}(W_{ij}^-(\gamma, t), W_{ij}^+(\gamma, t), \boldsymbol{\eta}_{ij}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_{ij}^-)) d\gamma \\ &\quad - \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} (F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_{ij}^-(\gamma, t))) d\gamma \\ &= -\frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} (\mathcal{F}(W_{ij}^-(\gamma, t), W_{ij}^+(\gamma, t), \boldsymbol{\eta}_{ij}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_{ij}^-)) d\gamma \\ &\quad - \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla \cdot (F \circ P_i^t)(\mathbf{x}) dx \\ &= -\frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} (\mathcal{F}(W_{ij}^-(\gamma, t), W_{ij}^+(\gamma, t), \boldsymbol{\eta}_{ij}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_{ij}^-)) d\gamma \\ &\quad - \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \left( A_1(P_i^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i^t}{\partial x}(\mathbf{x}) + A_2(P_i^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i^t}{\partial y}(\mathbf{x}) \right) dx. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Nótese que ahora (2.3.4) puede generalizarse para obtener un esquema numérico para (2.1.4). En concreto, sólo hay que sustituir

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} (F_{ij}(W_{ij}^-(\gamma, t), W_{ij}^+(\gamma, t); \boldsymbol{\eta}_{ij}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(W_{ij}^-(\gamma, t))) d\gamma$$

por el correspondiente esquema camino-conservativo. De esta forma, el esquema resultante puede escribirse como

$$W_i' = -\frac{1}{|V_i|} \left[ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} \mathcal{D}_{ij}^-(W_{ij}^-(\gamma, t), W_{ij}^+; \boldsymbol{\eta}_{ij}) d\gamma + \int_{V_i} \left( A_1(P_i^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i^t}{\partial x}(\mathbf{x}) + A_2(P_i^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i^t}{\partial y}(\mathbf{x}) \right) dx \right]. \quad (2.3.14)$$

Al igual que antes, podemos escribir el esquema anterior en términos de las variables  $w_i$ ,  $H_i$  y  $D_{ij}^-$ :

$$w_i' = -\frac{1}{|V_i|} \left[ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} D_{ij}^-(w_{ij}^-(\gamma, t), w_{ij}^+(\gamma, t), H_{ij}^-(\gamma), H_{ij}^+(\gamma); \boldsymbol{\eta}_{ij}) d\gamma \right. \\ \left. + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w_{ij}^-(\gamma, t)) d\gamma + \int_{V_i} \left( B_1(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_{w,i}^t(\mathbf{x})}{\partial x} + B_1(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_{w,i}^t(\mathbf{x})}{\partial x} \right) d\mathbf{x} - \right. \\ \left. \int_{V_i} \left( G_1(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_{H,i}^t(\mathbf{x})}{\partial x} + G_2(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_{H,i}^t(\mathbf{x})}{\partial y} \right) d\mathbf{x} \right],$$

donde  $P_{w,i}^t$  y  $P_{H,i}^t$  son, respectivamente, las reconstrucciones de las variables  $w$  y  $H$  en el instante  $t$ .

Las integrales que aparecen en la expresión anterior se aproximan mediante fórmulas de cuadratura, con la precisión suficiente para que su uso no destruya el orden de aproximación del operador de reconstrucción.

### 2.3.1. Orden de precisión

Los promedios en las celdas de una solución continua de (2.1.4),  $\bar{W}_i(t)$ , satisface:

$$\bar{W}_i'(t) = -\frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \left( \mathcal{A}_1(W(\mathbf{x})) \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + \mathcal{A}_2(W(\mathbf{x})) \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial y} \right) d\mathbf{x}. \quad (2.3.15)$$

Así, se espera que (2.3.14) sea una aproximación de (2.3.15). Este hecho se expresa en el siguiente resultado, cuya demostración es similar al resultado correspondiente para los problemas 1D (véase [13]):

**Teorema 2.3.1.** *Supongamos que  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  son de clase  $\mathcal{C}^2$  con derivadas acotadas y  $\mathcal{A}_\Phi$  es acotado para todo  $i, j$ ; supongamos también que el operador de reconstrucción satisface las hipótesis (HP1)-(HP4). Entonces (2.3.14) es una aproximación de orden al menos  $\alpha = \min(p, q, m)$  para el sistema (2.3.15) en el sentido siguiente:*

$$\frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[ \int_{E_{ij}} \mathcal{D}_{ij}^-(W_{ij}^-, W_{ij}^+; \boldsymbol{\eta}_{ij}) d\gamma \right. \\ \left. + \int_{V_i} \left( \mathcal{A}_1(P_i^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i^t(\mathbf{x})}{\partial x} + \mathcal{A}_2(P_i^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i^t(\mathbf{x})}{\partial y} \right) d\mathbf{x} \right] \\ = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{V_i} \left( \mathcal{A}_1(W(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \mathcal{A}_2(W(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right) d\mathbf{x} + O(\Delta x^\alpha), \quad (2.3.16)$$

para toda solución  $W$  suficientemente continua, siendo  $W_{ij}^\pm(\gamma, t)$  las reconstrucciones asociadas y  $P_i^t$  las funciones de aproximación correspondientes a la familia

$$\bar{W}_i(t) = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} W(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

**Observación 2.3.2.** De acuerdo a la observación (2.3.1) el orden esperado para el esquema numérico es  $m$ . Sin embargo, este resultado teórico es más bien pesimista: en la práctica, como veremos, a menudo lograremos un orden  $q$ .

### 2.3.2. Buen equilibrado

Presentamos en esta sección las propiedades de buen equilibrado de los esquemas (2.3.14). Véase [8] para más detalles.

**Definición 2.3.1.** Consideramos un método semi-discreto para aproximar (2.1.4):

$$\begin{cases} W_i'(t) = \frac{1}{|V_i|} \mathcal{H}(\mathbf{W}_j(t), j \in \mathcal{B}_i), \\ \mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_0, \end{cases} \quad (2.3.17)$$

donde  $\mathbf{W}(t) = \{W_i(t)\}_{i=1}^{NV}$  representa el vector de las aproximaciones a los valores promediados de la solución exacta;  $\mathbf{W}_0 = \{W_i^0\}$  es el vector de condiciones iniciales; y  $\mathcal{B}_i$  el stencil asociado a la celda  $V_i$ . Dada una solución regular estacionaria  $W$  del sistema, el esquema numérico será bien-equilibrado para  $W$  si el vector o su promedio en las celdas es un punto crítico de (2.3.17), es decir,

$$\mathcal{H}(\mathbf{W}_j, j \in \mathcal{B}_i) = 0, \quad (2.3.18)$$

y se dice que es bien-equilibrado de orden  $p$  si

$$\mathcal{H}(\mathbf{W}_j, j \in \mathcal{B}_i) = \mathcal{O}(\Delta x^{p+2}). \quad (2.3.19)$$

Presentamos ahora el concepto de un operador de reconstrucción bien-equilibrado:

**Definición 2.3.2.** Dada una solución estacionaria regular de (2.1.4), se dice que un operador de reconstrucción es bien-equilibrado para  $W(\mathbf{x})$  si las funciones de aproximación  $P_i(\mathbf{x})$  asociadas a los valores promedios  $W$  son también soluciones estacionarias del sistema, es decir,

$$\mathcal{A}_1(P_i(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_2(P_i(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V_i, \quad i = 1, \dots, NV.$$

Se tienen los siguientes resultados:

**Teorema 2.3.2.** *Sea  $W$  una solución estacionaria regular de (2.1.4). Supongamos que el método camino-conservativo de primer orden y el operador de reconstrucción elegido son exactamente bien-equilibrados para  $W$ . Entonces el esquema numérico (2.3.14) es también exactamente bien-equilibrado para  $W$  (véase [54]).*

**Teorema 2.3.3.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.1, el esquema (2.3.14) es bien-equilibrados con orden al menos  $\alpha = \min(p, q, m)$  (véase [54]).*

### 2.3.3. Ejemplos de operadores de reconstrucción

Presentaremos en esta sección dos operadores de reconstrucción que usaremos en esta memoria para mallados cuadrangulares. El primero de ellos es bien conocido, se trata del operador de reconstrucción de tipo MUSCL y el segundo es una aportación original que ha sido publicada en el trabajo [31].

#### 2.3.3.1. Operador de reconstrucción de tipo MUSCL

Consideramos aquí el operador de reconstrucción de segundo orden definido en la celda  $V_i$  por

$$W_i(\mathbf{x}, t) = W_i(t) + \left(\frac{\partial W}{\partial x}(t)\right)_i(x - x_i) + \left(\frac{\partial W}{\partial y}(t)\right)_i(y - y_i), \quad (2.3.20)$$

donde  $W_i(t)$  es el promedio en la celda de la solución en el instante  $t$  proporcionado por el esquema numérico y  $\left(\frac{\partial W}{\partial x}(t)\right)_i$  (respectivamente  $\left(\frac{\partial W}{\partial y}(t)\right)_i$ ) es una aproximación constante de la derivada parcial de la solución con respecto a  $x$  (respectivamente  $y$ ). Aquí usamos la reconstrucción de tipo MUSCL descrita en [71] donde

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}(t)\right)_i = \minmod \left( \theta \frac{W_i - W_{i,W}}{\Delta x}, \frac{W_{i,E} - W_{i,W}}{2\Delta x}, \theta \frac{W_{i,W} - W_i}{\Delta x} \right), \quad \theta \in [1, 2], \quad (2.3.21)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}(t)\right)_i = \minmod \left( \theta \frac{W_i - W_{i,S}}{\Delta y}, \frac{W_{i,N} - W_{i,S}}{2\Delta y}, \theta \frac{W_{i,N} - W_i}{\Delta y} \right), \quad \theta \in [1, 2], \quad (2.3.22)$$

siendo

$$\minmod(z_1, z_2, \dots) = \begin{cases} \min_j z_j & \text{si } z_j > 0 \forall j, \\ \max_j z_j & \text{si } z_j < 0 \forall j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.3.23)$$

$W_{i,l}$ ,  $l = E, W, S, N$  son los que aparecen en la Figura 2.3. El parámetro  $\theta$  se utilizará para controlar la cantidad de viscosidad numérica presente en el esquema resultante: valores más altos de  $\theta$  dan como resultado esquemas menos disipativos, pero, en general, más oscilatorio.

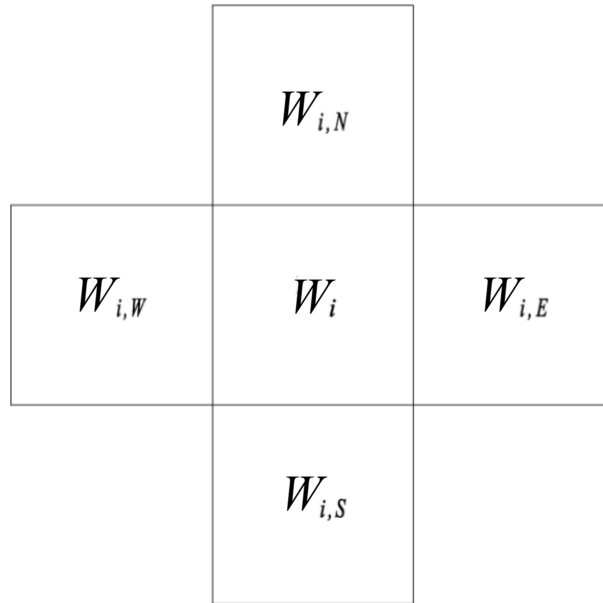


Figura 2.3: Stencil de la reconstrucción de segundo orden.

### 2.3.3.2. Reconstrucción Compacta de tercer orden

En esta sección presentamos un operador de reconstrucción de tipo polinómico introducido en [31] que proporciona una aproximación de tercer orden para mallas de celdas cuadrangulares. Detallamos aquí su construcción en mallados estructurados. Por otro lado, es importante hacer ver que las mallas uniformes rectangulares son muy apropiadas para la implementación del método en GPUs, que es uno de los fines de este trabajo.

Suponemos que el dominio computacional está compuesto por celdas rectangulares uniformes de tamaño  $\Delta x \times \Delta y$ . Dada una celda  $V$  (eliminamos la dependencia del subíndice  $i$  por comodidad), consideramos nueve celdas vecinas que conformarán el stencil  $\{V_i; i = 0, \dots, 8\}$  y denotaremos por  $V_4 = V$ . Denotemos los puntos medios de cada arista de  $V_4$ ,  $\mathbf{p}_N$ ,  $\mathbf{p}_S$ ,  $\mathbf{p}_E$  y  $\mathbf{p}_W$  (véase la Figura 2.4).

Sea  $W(\mathbf{x})$  una función suficientemente regular para ser reconstruida en  $V$ , y sea  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Para cada  $\mathbf{p}_R = (x_R, y_R)$ ,  $R \in \{N, S, E, W\}$ , consideramos el desarrollo de

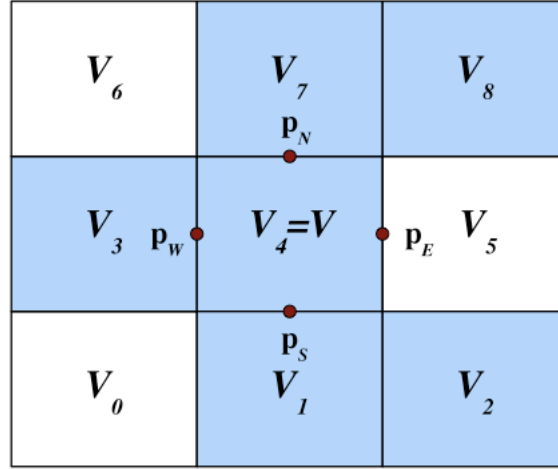


Figura 2.4: Stencil usado para aproximar las derivadas de  $F(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{p}_E$ .

Taylor de segundo orden de  $W(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{p}_R$

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{x}) &= W(\mathbf{p}_R) + \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{p}_R)(x - x_R) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{p}_R)(y - y_R) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(\mathbf{p}_R)(x - x_R)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}_R)(x - x_R)(y - y_R) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(\mathbf{p}_R)(y - y_R)^2 + \mathcal{O}(\Delta^3),
 \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

donde  $\Delta$  es el diámetro de  $V$ . Para aproximar las derivadas de  $W(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{p}_R$  aplicaremos el procedimiento presentado en [61], que discutiremos brevemente en esta sección.

Integrando la expresión anterior sobre  $V$  y dividiendo por el área de la celda  $|V|$ , obtenemos una expresión para la media,  $\bar{W}_i$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{W}_i &= W(\mathbf{p}_R) + \alpha_i \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{p}_R) + \beta_i \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{p}_R) + \gamma_i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(\mathbf{p}_R) \\
 &+ \delta_i \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}_R) + \epsilon_i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(\mathbf{p}_R) + \mathcal{O}(\Delta^3).
 \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

En mallas no estructuradas, los coeficientes  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  y  $\epsilon_i$  sólo dependen de la geometría de la malla, por lo que pueden ser calculados y guardados en un paso de preprocesamiento.

Después, las derivadas de  $W(\mathbf{x})$  en cada  $\mathbf{p}_R$  pueden aproximarse mediante una combinación lineal apropiada de los promedios en las celdas del stencil. Nos fijaremos en el punto  $\mathbf{p}_E$ , siendo el cálculo análogo para los demás puntos. Para aproximar  $\frac{\partial W}{\partial x \partial x}(\mathbf{p}_E)$ ,

consideraremos una igualdad de la forma

$$\sum_j \mu_j \bar{W}_j = \frac{\partial W}{\partial x \partial x}(\mathbf{p}_E) + \sum_j \mu_j \mathcal{O}(\Delta^3)$$

donde  $j$  es un índice local que especificaremos más adelante. Obtenemos esta igualdad si se cumple la condición

$$A\mu = b, \quad (2.3.26)$$

donde la  $j$ -ésima columna de  $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$  es  $(1, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \epsilon_j)^T$  y  $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 2, 0, 0)^T$ .

Para satisfacer (2.3.26) es preciso un stencil de seis puntos. Como se indica en [61], el stencil más natural,  $\{V_j; j = 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ , formado por los seis puntos más cercanos a  $\mathbf{p}_E$ , no es adecuado, ya que para mallas uniformes el sistema (2.3.26) es indeterminado. Este problema puede arreglarse cambiando una de las celdas; en este caso, si elegimos el stencil  $\{V_j; j = 1, 2, 3, 4, 7, 8\}$  (véase la Figura 2.4), entonces (2.3.26) tiene una única solución, que lleva a

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x \partial x}(\mathbf{p}_E) := \frac{-\bar{W}_1 + \bar{W}_2 + 2\bar{W}_3 - 2\bar{W}_4 - \bar{W}_7 + \bar{W}_8}{2\Delta x^2} \approx \frac{\partial W}{\partial x \partial x}(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta) \quad (2.3.27)$$

De manera similar se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}_E) &:= \frac{\bar{W}_1 - \bar{W}_2 - \bar{W}_7 + \bar{W}_8}{2\Delta x \Delta y} \approx \frac{\partial W}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta) \\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y \partial y}(\mathbf{p}_E) &:= \frac{\bar{W}_1 - 2\bar{W}_4 + \bar{W}_7}{\Delta y^2} \approx \frac{\partial W}{\partial y \partial y}(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta) \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Podemos aplicar el mismo procedimiento para obtener aproximaciones de las derivadas de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}(\mathbf{p}_E) &:= \frac{-\bar{W}_1 + \bar{W}_2 - \bar{W}_7 + \bar{W}_8}{2\Delta x} \approx \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta^2) \\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y}(\mathbf{p}_E) &:= \frac{-\bar{W}_1 - \bar{W}_2 + \bar{W}_7 + \bar{W}_8}{2\Delta y} \approx \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta^2) \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

y también para el valor en el punto:

$$\tilde{W}(\mathbf{p}_E) := \frac{1}{24}(-5\bar{W}_1 + 4\bar{W}_2 - 4\bar{W}_3 + 30\bar{W}_4 - 5\bar{W}_7 + 4\bar{W}_8) \approx W(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta^3). \quad (2.3.30)$$

Podemos proceder de forma análoga para obtener las aproximaciones en cada punto  $\mathbf{p}_R$ ,  $R \in N, S, W$ .

Definimos ahora los polinomios de grado 2

$$\begin{aligned}
P_R(\mathbf{x}) &= \tilde{W}(\mathbf{p}_R) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}(\mathbf{p}_R)(x - x_R) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y}(\mathbf{p}_R)(y - y_R) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x^2}(\mathbf{p}_R)(x - x_R)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}_R)(x - x_R)(y - y_R) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial y^2}(\mathbf{p}_R)(y - y_R)^2, R \in N, S, E, W,
\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

que nos dan una aproximación de tercer orden de  $W(\mathbf{x})$  en la celda  $V$ . Puede probarse fácilmente que estas reconstrucciones son *conservativas*, es decir,

$$\frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} P_R(\mathbf{x}) = \bar{W}_i.$$

En presencia de choques, las aproximaciones de segundo orden de las derivadas incluyen stencils que contienen celdas a ambos lados de la discontinuidad: esto produce pequeñas pero indeseables perturbaciones. Para evitar este comportamiento y obtener una buena resolución de los choques, en lugar de (2.3.31) consideraremos truncamientos de primer orden. Para mantener la conservación y obtener una reconstrucción de segundo orden de  $V$ , debemos recalcular los coeficientes de los polinomios de primer grado; por ejemplo, consideramos las siguientes aproximaciones para el punto  $\mathbf{p}_E$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}(\mathbf{p}_E) &:= \frac{\bar{W}_2 - 2\bar{W}_4 + \bar{W}_8}{2\Delta x} \approx \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta), \\
\frac{\partial \tilde{W}}{\partial y}(\mathbf{p}_E) &:= \frac{-\bar{W}_2 + \bar{W}_8}{2\Delta y} \approx \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta), \\
\tilde{W}(\mathbf{p}_E) &:= \frac{\bar{W}_2 + 2\bar{W}_4 + \bar{W}_8}{4} \approx W(\mathbf{p}_E) + \mathcal{O}(\Delta^2).
\end{aligned} \tag{2.3.32}$$

El paso siguiente consiste en combinar los polinomios  $P_R(\mathbf{x})$  de la misma manera que en los métodos de tipo WENO (véase [63] para más detalles). Para ello, en primer lugar, consideramos los indicadores

$$\begin{aligned}
\beta_R &= \iint_V \Delta x \Delta y \left( \frac{\partial \tilde{W}^2}{\partial x}(\mathbf{p}_R) + \frac{\partial \tilde{W}^2}{\partial y}(\mathbf{p}_R) \right) d\mathbf{x} \\
&= \Delta x^2 \Delta y \frac{\partial \tilde{W}^2}{\partial x}(\mathbf{p}_R) + \Delta x \Delta y^2 \frac{\partial \tilde{W}^2}{\partial y}(\mathbf{p}_R),
\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

que se usan para detectar posibles discontinuidades en el stencil. Nótese que las derivadas de segundo orden no intervienen en (2.3.33), pues los stencils usados para calcularlos



siempre dejan celdas a ambos lados de una discontinuidad, lo que produciría términos del mismo orden para cada uno de los indicadores de regularidad  $\beta_R$ .

Definimos los pesos no lineales  $\omega_R$  como

$$\omega_R = \frac{\alpha_R}{\alpha_N + \alpha_S + \alpha_E + \alpha_W}$$

donde

$$\alpha_R = \frac{\lambda_R}{(\epsilon + \beta_R)^r}.$$

Todos los pesos  $\lambda_R$  toman el valor  $1/4$ , pues aquí no son definidos para mejorar la precisión como en el método WENO 1D. En la práctica se usan los siguientes valores para las constantes:  $\epsilon = 10^{-6}$  y  $r = 4$ .

Finalmente, el operador de reconstrucción  $P(\mathbf{x})$  en  $V$  se define como

$$P(\mathbf{x}) = \omega_N P_N(\mathbf{x}) + \omega_S P_S(\mathbf{x}) + \omega_E P_E(\mathbf{x}) + \omega_W P_W(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in V. \quad (2.3.34)$$

Resumimos aquí todos los pasos para la reconstrucción:

- (1) Para cada  $R \in \{N, S, E, W\}$ , se construyen las aproximaciones  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}(\mathbf{p}_R)$  y  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial y}(\mathbf{p}_R)$  como en (2.3.29).
- (2) Construir los indicadores  $\beta_R$  usando la fórmula (2.3.33).
- (3) Si cada  $\beta_R$  es menor que la tolerancia  $(\max(\Delta x, \Delta y))^4$ , calculamos  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x \partial x}(\mathbf{p}_R)$ ,  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}_R)$ ,  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial y \partial y}(\mathbf{p}_R)$  y  $\tilde{W}(\mathbf{p}_R)$  como en (2.3.27), (2.3.28) y (2.3.29). Tras esto usamos (2.3.31) para definir los polinomios de segundo orden  $P_R(\mathbf{x})$ .
- (4) Si  $\beta_R > tol$  para algún  $R$ , calculamos  $\tilde{W}(\mathbf{p}_R)$ ,  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}(\mathbf{p}_R)$  y  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial y}(\mathbf{p}_R)$  como en (2.3.32), para cada índice  $R$ . Construimos entonces los correspondientes polinomios de primer orden  $P_R(\mathbf{x})$  donde eliminamos los términos de segundo orden (2.3.31).
- (5) Finalmente, definimos el operador de reconstrucción  $P(\mathbf{x})$  usando la fórmula (2.3.34).

Para funciones regulares, el operador de reconstrucción  $P(\mathbf{x})$  verifica las hipótesis (H1) – (H4) con  $p = q = 3$  y  $m = 2$ . Teniendo en cuenta la observación (2.3.2), el orden esperado para el método de alto orden (2.3.6) es entonces igual a  $\min(p, q) = 3$ .



# Capítulo 3

## Ecuaciones de aguas someras de una capa

### 3.1. Ecuaciones

Suponemos aquí que el movimiento de una capa de fluido homogéneo incompresible y no viscoso está gobernado por las ecuaciones de aguas someras de una capa, formuladas como una ley de conservación con término fuente o ley de equilibrio:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}(w) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(w) = G_1(w) \frac{\partial H}{\partial x} + G_2(w) \frac{\partial H}{\partial y} + G^F(w), \quad (3.1.1)$$

con  $w = (h \ q_x \ q_y)^T$ , donde  $h(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = (q_x(\mathbf{x}, t), q_y(\mathbf{x}, t))$  son, respectivamente, el espesor y el caudal del fluido en el punto  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$  en el instante  $t$ , y están relacionados con el promedio de la velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_x(\mathbf{x}, t), u_y(\mathbf{x}, t))$ , mediante la igualdad:  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)h(\mathbf{x}, t)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $H(\mathbf{x})$  es la función de profundidad medida a partir de un nivel de referencia. Las funciones  $F_1(w)$  y  $F_2(w)$  se definen como

$$F_1(w) = \left( q_x \quad \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \quad \frac{q_x q_y}{h} \right)^T,$$
$$F_2(w) = \left( q_y \quad \frac{q_x q_y}{h} \quad \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T,$$

$G_1(w)$  y  $G_2(w)$ , son los términos fuente relacionados con la variación de la batimetría:

$$G_1(w) = (0 \ gh \ 0)^T, \quad G_2(w) = (0 \ 0 \ gh)^T.$$

Finalmente,  $G^F(w)$ , parametriza los términos de fricción. En esta memoria usamos la

ley de fricción de Manning:

$$G^F(w) = \left( 0 \quad -gh \frac{n^2 \|\mathbf{u}\| u_x}{h^{4/3}} \quad -gh \frac{n^2 \|\mathbf{u}\| u_y}{h^{4/3}} \right)^T,$$

siendo  $n$  el coeficiente de Manning. Este término lo discretizamos de forma semi-implícita como en [7]. Por tanto, supondremos que  $G^F(w) = 0$  en esta sección.

Definamos las matrices jacobianas de los flujos  $F_k$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\mathcal{J}_k(w) = \frac{\partial F_k}{\partial w}(w)$ . Sea  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$  un vector unitario arbitrario y definamos  $A(w, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{J}_1(w)\eta_1 + \mathcal{J}_2(w)\eta_2$ . Los autovalores de  $A(w, \boldsymbol{\eta})$  son

$$\lambda_1 = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad \lambda_3 = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} + \sqrt{gh}.$$

Obsérvese que el sistema (3.1.1) verifica la propiedad de invariancia por rotaciones. Efectivamente, si definimos

$$T_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix},$$

y denotamos por  $F_{\boldsymbol{\eta}}(w) = F_1(w)\eta_1 + F_2(w)\eta_2$  y  $\mathbf{G}(w) = (G_1(w), G_2(w))$  entonces

$$F_{\boldsymbol{\eta}}(w) = T_{\boldsymbol{\eta}}^{-1} F_1(T_{\boldsymbol{\eta}} w), \quad T_{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{G}(w) \cdot \boldsymbol{\eta} = G_1(T_{\boldsymbol{\eta}} w). \quad (3.1.2)$$

Por otra parte, es fácil comprobar que  $T_{\boldsymbol{\eta}} w$  verifica el sistema

$$\partial_t(T_{\boldsymbol{\eta}} w) + \partial_{\boldsymbol{\xi}} F_1(T_{\boldsymbol{\eta}} w) = G_1(T_{\boldsymbol{\eta}} w) \partial_{\boldsymbol{\xi}} H + Q_{\boldsymbol{\eta}^\perp}, \quad (3.1.3)$$

donde  $Q_{\boldsymbol{\eta}^\perp} = T_{\boldsymbol{\eta}} \left( -\partial_{\boldsymbol{\xi}^\perp} F_{\boldsymbol{\eta}^\perp}(w) + \mathbf{G}(w) \cdot \boldsymbol{\eta}^\perp \partial_{\boldsymbol{\xi}^\perp} H \right)$ .

## 3.2. Esquemas numéricos de primer orden

Como vimos en el capítulo anterior, un esquema de volúmenes finitos de primer orden para el sistema (3.1.1) puede escribirse como en (2.2.7):

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| D_{ij}^-(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij}), \quad (3.2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{ij}^-(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij}) &= \frac{1}{2} (F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w_j^n) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w_i^n) - G_{\Phi}(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i) \\ &\quad - Q_{\Phi}(w_j^n - w_i^n - A_{\Phi}^{-1}(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij}) G_{\Phi}(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i)). \end{aligned}$$

Considerando una familia de caminos que son segmentos en  $(h, H)$ , el vector  $G_\Phi(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  se define como

$$G_\Phi(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh_{ij}\eta_{ij,1} \\ gh_{ij}\eta_{ij,2} \end{bmatrix}, \quad (3.2.2)$$

y la matriz  $A_\Phi(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$ ,

$$A_\Phi(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \eta_{ij,1} & \eta_{ij,2} \\ (-u_{x,ij}^2 + c_{ij}^2)\eta_{ij,1} - u_{x,ij}u_{y,ij}\eta_{ij,2} & 2u_{x,ij}\eta_{ij,1} + u_{y,ij}\eta_{ij,2} & u_{x,ij}\eta_{ij,2} \\ -u_{x,ij}u_{y,ij}\eta_{ij,1} + (-u_{y,ij}^2 + c_{ij}^2)\eta_{ij,2} & u_{y,ij}\eta_{ij,1} & u_{x,ij}\eta_{ij,1} + 2u_{y,ij}\eta_{ij,2} \end{bmatrix},$$

donde

$$c_{ij} = \sqrt{gh_{ij}}, \quad u_{l,ij} = \frac{\sqrt{h_i}u_{l,i} + \sqrt{h_j}u_{l,j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}, \quad (u_{l,i} = \frac{q_{l,i}}{h_i}), \quad \text{con } l = x, y \text{ y } h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2}. \quad (3.2.3)$$

$Q_\Phi(W_i^n, W_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  es la matriz de viscosidad asociada al método.

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^C(w_i^n) = 0, \quad (3.2.4)$$

donde

$$F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^C(w) = (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}, q_x(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}), q_y(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}))^T, \quad (3.2.5)$$

podemos reescribir (3.2.1) como

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| \mathcal{F}_{ij}^-(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij}),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij}^-(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij}) &= \frac{1}{2} (F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w_j^n) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w_i^n) - G_\Phi(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i) \\ &\quad - Q_\Phi(w_j^n - w_i^n - A_\Phi^{-1}(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})G_\Phi(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})(H_j - H_i)) + F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^C(w_i^n). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Nótese que el esquema numérico no está bien definido si  $A_\Phi(w_i^n, w_j^n; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  no es invertible. En la Sección 3.2.2 presentamos un procedimiento para solventar formalmente esta dificultad.

### 3.2.1. Definición del flujo usando la invariancia por rotaciones

Como se puso de manifiesto en [2] podemos obtener esquemas numéricos más eficientes desde el punto de vista computacional si usamos la invariancia por rotaciones del sistema de aguas someras de una capa. De esta forma, los resolvedores de Riemann aproximados que usamos involucran sólo operaciones de matrices y vectores de tamaño  $2 \times 2$ , en lugar de  $3 \times 3$ . Siguiendo las ideas descritas en [2], podemos definir

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| \mathcal{F}_{ij}^{R,-}(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij})$$

donde  $\mathcal{F}_{ij}^{R,-}(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j; \boldsymbol{\eta}_{ij})$  se define como sigue:

1. Sea

$$U_{\boldsymbol{\eta}_{ij}} = [h, \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}]^T = T_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w)_{[1,2]}, \text{ y } U_{\boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp} = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}^\perp = T_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w)_{[3]},$$

y consideremos el sistema de aguas someras 1D definido por

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_\xi(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0 \\ \partial_t(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}) + \partial_\xi \left( \frac{(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta})^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = gh \partial_\xi H \end{cases} \quad (3.2.7)$$

que resulta de considerar las dos primeras ecuaciones del sistema (3.1.3) donde se ha despreciado el término  $Q_{\boldsymbol{\eta}^\perp}$ .

2. Consideremos a continuación un esquema camino-conservativo como los estudiados en la Sección 1.3 aplicado al sistema (3.2.7), y definamos

$$\begin{aligned} \Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^-(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j) &= \frac{1}{2} \left( F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^R(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^R(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}) - G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i) \right. \\ &\quad \left. - Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} - U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i} - A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i)) \right) + F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^R(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}) &= (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}, \frac{(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij})^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2)^T, \\ F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}) &= (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}, \frac{(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij})^2}{h})^T, \\ A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^2 + c_{ij}^2 & 2u_{\boldsymbol{\eta}_{ij}} \end{bmatrix}, \\ G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ gh_{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

con

$$u_{\boldsymbol{\eta}_{ij}} = \frac{\sqrt{h_i}u_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i} + \sqrt{h_j}u_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}, \text{ siendo } u_{\boldsymbol{\eta}_{ij},l} = \frac{(\mathbf{q}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij})}{h_l}, l = i, j$$

$c_{ij}, h_{ij}$  como los definidos en (3.2.3), y  $Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})$  la matriz de viscosidad asociada al método.

Nótese que

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^R(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^R(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}) - G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i) = \\ F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}) + P_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j), \end{aligned}$$

siendo

$$P_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j) = (0, gh_{ij}(h_j - H_j - (h_i - H_i)))^T.$$

Resulta entonces el siguiente flujo numérico

$$\begin{aligned} \Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^-(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j) = \frac{1}{2} \left( F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}) + P_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j) \right. \\ \left. - Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} - U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i} - A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i)) \right) + F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

De la misma forma, podemos definir  $\Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^+(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j)$  como

$$\begin{aligned} \Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^+(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j) = \frac{1}{2} \left( F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}) + P_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j) \right. \\ \left. + Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} - U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i} - A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i)) \right) - F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{RC}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

3. Definamos ahora el flujo numérico, que denotaremos por  $\Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^\pm$ , asociado a la tercera ecuación del sistema (3.1.3),

$$\partial_t((\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp)h) + \partial_\xi(h(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp)(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij})) = 0, \quad (3.2.12)$$

donde también se ha despreciado el término  $Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp}$ . En este caso, usando la primera componente del flujo numérico  $\Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^\pm$  definido anteriormente, definimos:

$$\Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp}^- = (\Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^-)_{[1]}u_{\boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp}^*, \quad (3.2.13)$$

donde  $u_{\eta_{ij}^\perp}^*$  se define como

$$u_{\eta_{ij}^\perp}^* = \begin{cases} \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp & \text{si } (\Psi_{\eta_{ij}}^-)_{[1]} > 0 \\ \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Al tratarse de una ley de conservación, definimos  $\Psi_{\eta_{ij}^\perp}^+ = -\Psi_{\eta_{ij}^\perp}^-$ .

4. Finalmente, definimos

$$\mathcal{F}_{ij}^{R,-} = T_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1} \left( (\Psi_{\eta_{ij}}^-)_{[1]} \quad (\Psi_{\eta_{ij}}^-)_{[2]} \quad \Psi_{\eta_{ij}^\perp}^- \right)^T.$$

De forma análoga,

$$\mathcal{F}_{ij}^{R,+} = T_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1} \left( (\Psi_{\eta_{ij}}^+)_{[1]} \quad (\Psi_{\eta_{ij}}^+)_{[2]} \quad \Psi_{\eta_{ij}^\perp}^+ \right)^T.$$

El esquema anterior es  $L^\infty$  – estable bajo la condición de estabilidad normal.

A modo de ejemplo, vamos a particularizar la expresión del flujo numérico para los métodos FORCE (PVM-2( $S_0$ )) y HLL (PVM-1U( $S_L, S_R$ )).

### 3.2.2. Método HLL

Como vimos en la Sección 1.5.5, la matriz de viscosidad en este método viene definida por

$$Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}} = \alpha_0^{ij} Id + \alpha_1^{ij} A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}),$$

donde  $\alpha_0^{ij}$  y  $\alpha_1^{ij}$  se definen como en (1.5.28), es decir,

$$\alpha_0^{ij} = \frac{S_R^{ij}|S_L^{ij}| - S_L^{ij}|S_R^{ij}|}{S_R^{ij} - S_L^{ij}}, \quad \alpha_1^{ij} = \frac{|S_R^{ij}| - |S_L^{ij}|}{S_R^{ij} - S_L^{ij}}.$$

$S_L^{ij}$  y  $S_R^{ij}$  se definen como sigue:

$$S_L^{ij} = \min(u_{\boldsymbol{\eta}_{ij}} - c_{ij}, \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} - c_i), \quad S_R^{ij} = \max(u_{\boldsymbol{\eta}_{ij}} + c_{ij}, \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} + c_j),$$

donde  $c_i = \sqrt{gh_i}$ ,  $c_j = \sqrt{gh_j}$ ,  $c_{ij} = \sqrt{gh_{ij}}$ .

Si desarrollamos el término correspondiente a la viscosidad numérica  $Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} - U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i} - A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i))$  en (3.2.8), obtendremos:

$$\begin{aligned} & Q_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} - U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i} - A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i)) \\ &= \alpha_0^{ij}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} - U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i} - A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^{-1}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i)) \\ & \quad + \alpha_1^{ij}(A_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} - U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}) - G_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j})(H_j - H_i)). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$



Usando ahora la propiedad de Roe (2.2.9), el segundo sumando de la igualdad anterior resulta:

$$\begin{aligned} & \alpha_1^{ij} (F_{\eta_{ij}}^R(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^R(U_{\eta_{ij},i}) - G_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j})(H_j - H_i)) \\ &= \alpha_1^{ij} (F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}) + P_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j)). \end{aligned}$$

Nótese que el primer sumando de (3.2.15) no está bien definido si  $A_{\eta_{ij}}$  no es inversible. En tal caso estamos ante un problema resonante. Como hemos dicho anteriormente, los problemas resonantes presentan una dificultad adicional y, en general, pueden tener múltiples soluciones débiles. Así, los límites de las soluciones numéricas pueden depender tanto de la familia de los caminos como del propio esquema numérico. En esta memoria seguimos el procedimiento descrito en [18] donde se propone sustituir  $A_{\eta_{ij}}^{-1}$  por  $(A_{\eta_{ij}}^*)^{-1}$  donde  $A_{\eta_{ij}}^*$  es la matriz que resulta de considerar  $A_{\eta_{ij}}$  imponiendo  $u_{\eta_{ij}} = 0$ . Obtenemos así

$$\begin{aligned} & U_{\eta_{ij},j} - U_{\eta_{ij},i} - (A_{\eta_{ij}}^*)^{-1} G_{\eta_{ij}}(H_j - H_i) = \\ & (h_j - H_j - (h_i - H_i), \mathbf{q}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} - \mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij})^T = I_{U_{\eta_{ij}}} \end{aligned}$$

Finalmente, el flujo resultante sería

$$\begin{aligned} \Psi_{\eta_{ij}}^{HLL,-}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j) &= \frac{1}{2} \left( F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}) + P_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j) \right. \\ & \left. - (\alpha_0^{ij} I_{U_{\eta_{ij}}} + \alpha_1^{ij} (F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}) + P_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j))) \right) + F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}). \end{aligned}$$

$\Psi_{\eta_{ij}}^{HLL,-}$  se define como en (3.2.13)-(3.2.14).

**Observación 3.2.1.** Es fácil comprobar que el esquema resultante es bien equilibrado para el agua en reposo.

### 3.2.3. Método de tipo FORCE

En este caso, la matriz de viscosidad viene dada por:

$$Q_{\eta_{ij}} = \alpha_0^{ij} Id + \alpha_2^{ij} A_{\eta_{ij}}^2(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}),$$

donde  $\alpha_0^{ij}$  y  $\alpha_2^{ij}$  se definen como vimos en (1.5.30), es decir,

$$\alpha_0^{ij} = \frac{S_0}{2}, \quad \alpha_2^{ij} = \frac{1}{2S_0}, \quad (3.2.16)$$

donde,

$$S_0 \in \{S_{Rus}, S_{LF}, S_{LF}^{mod}\}, \quad (3.2.17)$$

siendo

$$S_{Rus} = \max_j |\lambda_{ij}|, \quad S_{LF} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{y} \quad S_{LF}^{mod} = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.2.18)$$

Procediendo de igual forma que en el epígrafe anterior, podemos escribir el flujo numérico para la familia de esquemas de tipo FORCE como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi_{\eta_{ij}}^{FORCE,-}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j) &= \frac{1}{2} \left( F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}) + P_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j) \right. \\ &\left. - (\alpha_0^{ij} I_{U_{\eta_{ij}}} + \alpha_2^{ij} A_{\eta_{ij}}(F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}) + P_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j))) \right) + F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}). \end{aligned}$$

$\Psi_{\eta_{ij}}^{FORCE,-}$  se define, como en el epígrafe anterior, utilizando (3.2.13)-(3.2.14).

**Observación 3.2.2.** Al igual que antes, es fácil comprobar que el esquema resultante es bien equilibrado para el agua en reposo.

### 3.3. Extensión a problemas bidimensionales del esquema HLL-WAF mediante el método de líneas

En esta sección vamos a describir la extensión a problemas bidimensionales del esquema HLL-WAF mediante el método de líneas.

El método resultante no es de segundo orden en espacio y tiempo, como ocurre en los problemas unidimensionales, pero como veremos en los tests numéricos, es más preciso que un método convencional de primer orden. La expresión del método HLL-WAF que proponemos es la siguiente:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| \mathcal{F}_{ij}^{HLL-WAF-}(w_i^n, w_j^n, H_i, H_j).$$

donde  $\mathcal{F}_{ij}^{HLL-WAF-}$  se construye de forma similar al flujo  $\mathcal{F}_{ij}^{HLL-}$ . Veamos en primer lugar la expresión del flujo unidimensional  $\Psi_{\eta_{ij}}^{WAF,-}$

$$\begin{aligned} \Psi_{\eta_{ij}}^{HLL-WAF,-}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j) &= \frac{1}{2} \left( F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}) + P_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j) \right. \\ &\left. - (\alpha_{0,WAF}^{ij} I_{U_{\eta_{ij}}} + \alpha_{1,WAF}^{ij} (F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},j}) - F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}) + P_{\eta_{ij}}(U_{\eta_{ij},i}, U_{\eta_{ij},j}, H_i, H_j))) \right) + F_{\eta_{ij}}^{RC}(U_{\eta_{ij},i}). \end{aligned}$$

Donde los coeficientes  $\alpha_{0,WAF}^{ij}$  y  $\alpha_{1,WAF}^{ij}$  se definen en función de limitadores de flujo. Concretamente:

$$\begin{aligned} \alpha_0^{ij} &= \frac{S_L^{ij} S_R^{ij}}{S_R^{ij} - S_L^{ij}} (\mathcal{L}_{ij}(S_L^{ij}, \chi_L^{ij}) - \mathcal{L}_{ij}(S_R^{ij}, \chi_R^{ij})) \\ \alpha_1^{ij} &= \frac{1}{S_R^{ij} - S_L^{ij}} (\mathcal{L}_{ij}(S_R^{ij}, \chi_R^{ij}) S_R^{ij} - \mathcal{L}_{ij}(S_L^{ij}, \chi_L^{ij}) S_L^{ij}), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

donde

$$\mathcal{L}_{ij}(S, \chi) = \text{signo}(S)(1 - \chi) + \frac{\Delta t}{d_{ij}} S \chi.$$

siendo  $d_{ij}$  la distancia entre el centro de la celda  $i$ ,  $N_i$ , y el centro de la celda  $j$ ,  $N_j$ . Así, en un mallado estructurado,  $d_{ij} = \Delta x$  si la arista es vertical, y  $d_{ij} = \Delta y$  si la arista es horizontal.  $\chi_L^{ij}$  (respectivamente  $\chi_R^{ij}$ ) se define en términos del limitador *minmod*.

$$\chi_L^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mu_j - \mu_i| < \varepsilon \\ r_L^{ij} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

donde  $r_L^{ij}$  (respectivamente  $r_R^{ij}$ ) se define como

$$r_L^{ij} = \begin{cases} \frac{\bar{m}((\mu_j - \mu_L)/2, \mu_j - \mu_i, \mu_i - \mu_L)}{\mu_j - \mu_i}, & \text{si } S_L^{ij} \geq 0, \\ \frac{\bar{m}((\mu_R - \mu_i)/2, \mu_j - \mu_i, \mu_R - \mu_j)}{\mu_j - \mu_i}, & \text{si } S_L^{ij} < 0. \end{cases}$$

con

$$\bar{m}(a, b, c) = \frac{\text{signo}(a) + \text{signo}(b)}{2} \frac{\text{signo}(b) + \text{signo}(c)}{2} \min(|a|, |b|, |c|),$$

y  $\mu_i = h_i - H_i$ ,  $\mu_j = h_j - H_j$ ,  $\mu_L = h_{i,L} - H_{i,L}$  y  $\mu_R = h_{j,R} - H_{j,R}$  donde  $h_{i,L}$  (respectivamente  $h_{j,R}$ ) y  $H_{i,L}$  (respectivamente  $H_{j,R}$ ) son la altura del agua y la batimetría correspondientes a la celda  $V_{i,L}$  (respectivamente  $V_{j,R}$ ) mostrados en la Figura 3.1. En las simulaciones, el parámetro  $\varepsilon = \min(d_{ij}^3, 10^{-6})$ .

Obsérvese que si  $\chi_L^{ij} = \chi_R^{ij} = 0$ ,  $\Psi_{ij}^{WAF,-} = \Psi_{ij}^{HLL,-}$ . Por el contrario, si  $\chi_L^{ij} = \chi_R^{ij} = 1$ , el esquema resultante tiene una difusión numérica similar a la que tendría el esquema de Lax-Wendroff aplicado al sistema de aguas someras unidimensional.

Por último, siguiendo las ideas descritas en [29], definimos

$$\Psi_{\eta_{ij}^\perp}^{WAF,-} = (\Psi_{\eta_{ij}^\perp}^{WAF,-})_{[1]} u_{\eta_{ij}^\perp}^{WAF}, \quad (3.3.3)$$

donde definimos  $u_{\eta_{ij}^\perp}^{WAF}$  como sigue

$$u_{\eta_{ij}^\perp}^{WAF} = \frac{\mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp + \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp}{2} - \frac{1}{2} \left( \text{signo}((\Psi_{\eta_{ij}^\perp}^{WAF,-})_{[1]}) (1 - \chi_{ij}^\perp) + \frac{\Delta t}{d_{ij}} u_{ij}^* \chi_{ij}^\perp \right) (\mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp - \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp),$$

donde

$$u_{ij}^* = \text{signo} \left( (\Psi_{\eta_{ij}^\perp}^{WAF,-})_{[1]} \right) |u_{ij}|,$$

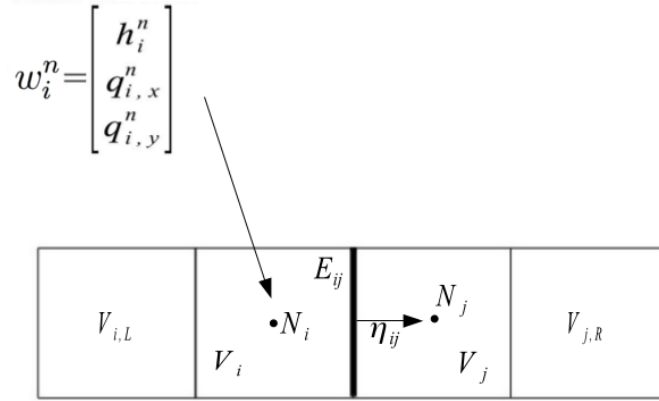


Figura 3.1: Stencil del método WAF para una arista vertical

y donde  $\chi_{ij}^\perp$  se define como  $\chi_L^{ij}$  tomando  $\mu_l = \mathbf{u}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp$ ,  $l = i, j, L, R$  y usando  $u_{ij}^*$  en lugar de  $S_{L,ij}$ .

Obsérvese que si  $\chi_{ij}^\perp = 0$ ,  $\Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp}^{WAF,-} = \Psi_{\boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp}^{HLL,-}$ . Por el contrario, si  $\chi^\perp = 1$ , el esquema es equivalente al esquema Lax-Wendroff unidimensional aplicado a la ecuación de transporte (3.2.12). Al igual que los esquemas anteriores, el esquema HLL-WAF por líneas es exactamente bien equilibrado para el agua en reposo y es estable bajo la condición de estabilidad usual.

### 3.4. Extensión de alto orden

Siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo anterior, la expresión general de un esquema semi-discreto en espacio de alto orden para el sistema de aguas someras es la siguiente:

$$w_i' = -\frac{1}{|V_i|} \left[ \sum_{j \in N_i} \int_{E_{ij}} D_{ij}^-(w_{ij}^-(\gamma, t), w_{ij}^+(\gamma, t), H_{ij}^-(\gamma), H_{ij}^+(\gamma); \boldsymbol{\eta}_{ij}) d\gamma + \sum_{j \in N_i} \int_{E_{ij}} F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(w_{ij}^-(\gamma, t)) d\gamma - \int_{V_i} \left( G_1(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_{H,i}^t(\mathbf{x})}{\partial x} + G_2(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial P_{H,i}^t(\mathbf{x})}{\partial y} \right) \right],$$

donde  $P_{w,i}^t$  y  $P_{H,i}^t$  son, respectivamente, las reconstrucciones de las variables  $w$  y  $H$  en el instante  $t$  y  $w_{ij}^\pm(\gamma, t)$ ,  $H^\pm(\gamma)$  son, respectivamente, las reconstrucciones de los estados y de

la batimetría asociadas a la arista  $E_{ij}$ . Teniendo en cuenta la expresión de  $F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}$  y  $G_1(w)$ ,  $G_2(w)$ , el esquema anterior puede escribirse como

$$w'_i = -\frac{1}{|V_i|} \left[ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} (D_{ij}^-(w_{ij}^-(\gamma, t), w_{ij}^+(\gamma, t), H_{ij}^-(\gamma), H_{ij}^+(\gamma); \boldsymbol{\eta}_{ij}) + F_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}^C(w_{ij}^-(\gamma, t))) d\gamma \right. \\ \left. - \int_{V_i} G_1(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x} (P_{h,i}^t(\mathbf{x}) - P_{H,i}^t(\mathbf{x})) + G_2(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial y} (P_{h,i}^t(\mathbf{x}) - P_{H,i}^t(\mathbf{x})) \right]$$

o equivalentemente

$$w'_i = -\frac{1}{|V_i|} \left[ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} \mathcal{F}_{ij}^-(w_{ij}^-(\gamma, t), w_{ij}^+(\gamma, t), H_{ij}^-(\gamma), H_{ij}^+(\gamma); \boldsymbol{\eta}_{ij}) d\gamma \right. \\ \left. - \int_{V_i} G_1(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x} (P_{h,i}^t(\mathbf{x}) - P_{H,i}^t(\mathbf{x})) + G_2(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial y} (P_{h,i}^t(\mathbf{x}) - P_{H,i}^t(\mathbf{x})) \right] \quad (3.4.1)$$

donde  $\mathcal{F}_{ij}^-(w_{ij}^-(\gamma, t), w_{ij}^+(\gamma, t), H_{ij}^-(\gamma), H_{ij}^+(\gamma); \boldsymbol{\eta}_{ij})$  es cualquiera de los flujos numéricos de primer orden descritos anteriormente.

A fin de obtener un esquema numérico de alto orden que sea bien equilibrado para soluciones de agua en reposo es necesario que el operador de reconstrucción lo sea (véase la Sección 2.3.2). Para definir un operador de reconstrucción bien equilibrado para las soluciones de agua en reposo procedemos de la siguiente forma:

1. reconstruimos la variable  $\mu(x, t) = h(x, t) - H(x, t)$ , obteniendo  $P_{\mu,i}^t(\mathbf{x})$ ;
2. reconstruimos la batimetría  $H$ , obteniendo  $P_{H,i}^t(\mathbf{x})$ ;
3. reconstruimos los caudales;
4. recuperamos  $h$  como  $P_{h,i}^t(\mathbf{x}) = P_{\mu,i}^t(\mathbf{x}) + P_{H,i}^t(\mathbf{x})$ ,

donde  $P$  es, o bien el operador MUSCL definido en (2.3.3.1), o bien el operador de reconstrucción de orden 3, definido en (2.3.3.2).

Las integrales que aparecen en (3.4.1) se aproximan mediante las fórmulas de cuadratura siguientes: si usamos el esquema de segundo orden, utilizamos la fórmula del baricentro para aproximar la integral de volumen y la fórmula de cuadratura del punto medio para las integrales en las aristas. En el esquema de orden 3 usamos la fórmula de Gauss de 4 puntos en rectángulos para las integral de volumen y la fórmula de Gauss de 2 puntos para las integrales en las aristas. La Figura 3.2 muestra los puntos y pesos utilizados para aproximar la integral de la arista en ambos casos.

Por último, la discretización en tiempo se realiza mediante esquemas de tipo Runge-Kutta TVD (véase [32]) de segundo y tercer orden, respectivamente. Concretamente, las expresiones de los esquemas TVD de segundo y tercer orden utilizados para obtener  $w_i^{n+1}$  a partir de  $w_i^n$  son, respectivamente:



Figura 3.2: Puntos de cuadratura de una arista. (a) Orden 2. El peso del punto es 1, (b) Orden 3,  $a = 0.5 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ,  $b = 0.5 + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ . El peso de ambos puntos es 0.5.

$$\begin{aligned}
 w_i^{n+1/2} &= w_i^n + \frac{\Delta t^n}{|V_i|} L(\{w_j^n, H_j; j \in \mathcal{B}_i\}) \\
 w_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left( w_i^n + w_i^{n+1/2} + \frac{\Delta t^n}{|V_i|} L(\{w_j^{n+1/2}, H_j; j \in \mathcal{B}_i\}) \right) \quad \text{y} \quad (3.4.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_i^{n+1/3} &= w_i^n + \frac{\Delta t^n}{|V_i|} L(\{w_j^n, H_j; j \in \mathcal{B}_i\}) \\
 w_i^{n+2/3} &= \frac{1}{4} \left( 3w_i^n + w_i^{n+1/3} + \frac{\Delta t^n}{|V_i|} L(\{w_j^{n+1/3}, H_j; j \in \mathcal{B}_i\}) \right) \\
 w_i^{n+1} &= \frac{1}{3} \left( w_i^n + 2w_i^{n+2/3} + \frac{2\Delta t^n}{|V_i|} L(\{w_j^{n+2/3}, H_j; j \in \mathcal{B}_i\}) \right) \quad (3.4.3)
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{B}_i$  es el conjunto de índices  $j$  tales que  $V_j$  pertenece al stencil asociado al volumen  $V_i$ , y

$$\begin{aligned}
 L(\{w_j^n, H_j; j \in \mathcal{B}_i\}) &= - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{E_{ij}} \mathcal{F}_{ij}^-(w_{ij}^-(\gamma, t), w_{ij}^+(\gamma, t), H_{ij}^-(\gamma), H_{ij}^+(\gamma)) d\gamma \\
 &\quad - \int_{V_i} \left( G_1(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x} (P_{h,i}^t(\mathbf{x}) - P_{H,i}^t(\mathbf{x})) \right. \\
 &\quad \left. - G_2(P_{w,i}^t(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial y} (P_{h,i}^t(\mathbf{x}) - P_{H,i}^t(\mathbf{x})) \right) dx. \quad (3.4.4)
 \end{aligned}$$

### 3.5. Tratamiento Seco-Mojado

Si aplicamos los esquemas numéricos anteriores en problemas donde aparecen frentes seco-mojado con fondos emergentes, los resultados no son correctos: el gradiente del fondo

genera fuerzas de presión espurias que pueden hacer que el fluido suba por pendientes de forma artificial. En [11] se propone una modificación a realizar a los esquemas numéricos para el caso de una dimensión con el objetivo de evitar este problema. Nosotros hemos reformulado dicha modificación a fin de que se pueda aplicar sin problemas a los esquemas descritos anteriormente. Concretamente, la modificación de los esquemas consta de dos pasos bien diferenciados: en primer lugar se redefinen los términos del esquema numérico relacionados con la discretización de los términos de presión y, a continuación, se impone una condición de contorno sobre el fluido para simular que el fondo emergente actúa como una pared. En el caso de usar un esquema de alto orden, a estas dos etapas hay que añadirles una modificación en la etapa de reconstrucción que consiste simplemente en reconstruir únicamente los caudales si se detecta en el stencil de la reconstrucción alguna celda con fondo emergente, es decir, la reconstrucción de la batimetría, la superficie libre y el espesor de la columna de agua degenera al operador de reconstrucción constante. Obsérvese que en estas situaciones el orden del esquema degenera a uno. Presentamos a continuación cuáles son estas dos etapas si se usa un esquema numérico como los descritos en la Sección 3.2.

### 3.5.1. Redefinición de los términos de presión

Para evitar las fuerzas de presión espurias redefinimos los términos  $P_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j)$  e  $I_{U_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}}$ , del siguiente modo:

$$P_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}(U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},i}, U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j}, H_i, H_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_{ij}\tilde{\Delta}_{ij}\mu \end{pmatrix}, I_{U_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}} = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_{ij}\mu \\ \Delta_{ij}\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} \end{pmatrix}$$

donde

$$\tilde{\Delta}_{ij}\mu = \max(\mu_j + H_m, 0) - \max(\mu_i + H_m, 0), \Delta_{ij}\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} = (\mathbf{q}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}) - (\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}),$$

con  $H_m = \min(H_i, H_j)$  y  $\mu_i = h_i - H_i$ .

Nótese que  $\tilde{\Delta}_{ij}\mu$  coincide con  $\Delta_{ij}\mu$  en el caso de que el fondo no sea emergente. Por tanto, usaremos siempre esta definición a la hora de calcular los términos  $P_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}$  e  $I_{U_{\boldsymbol{\eta}_{ij}}}$ .

### 3.5.2. Imposición de una condición de contorno de tipo pared

Con el objetivo de imponer que el fondo emergente actúe como una pared en un frente seco-mojado, impondremos velocidades nulas en aquellos volúmenes que sean vecinos a otro con fondo emergente: si el volumen  $V_i$  no tiene capa de agua ( $h_i < \varepsilon_h$ ;  $\varepsilon_h \ll 1$ ) y  $H_j - h_j > H_i$ , entonces, redefinimos  $U_{\boldsymbol{\eta}_{ij},j} = \begin{pmatrix} h_j \\ 0 \end{pmatrix}$  a la hora de calcular los flujos numéricos. En los tests numéricos hemos usado  $\varepsilon_h \approx 10^{-4}$ . En [46] se propone una condición definida en función de la energía que podría usarse aquí, en lugar de verificar simplemente si tenemos

un fondo emergente. En ese caso sólo se aplicaría la modificación definida en 3.5.1 si el fluido no tiene energía suficiente para sobrepasar el escalón emergente.

## 3.6. Implementación en CUDA

En esta sección se identifican las fuentes de paralelismo de datos existentes en los esquemas numéricos descritos en las secciones anteriores. Asimismo, se aborda la adaptación a GPU de estos esquemas y las implementaciones que se han realizado usando CUDA para mallas estructuradas.

### 3.6.1. Fuentes de Paralelismo

#### 3.6.1.1. Esquemas de primer orden y HLL-WAF

A continuación proponemos un algoritmo paralelo para los esquemas numéricos de primer orden y HLL-WAF descritos en las Secciones 3.2.2, 3.2.3 y 3.3. La Figura 3.3 muestra esquemáticamente las etapas de dicho algoritmo, donde las principales fuentes de paralelismo de datos se representan con rectángulos superpuestos.

En primer lugar, la malla de volúmenes finitos debe construirse e inicializarse convenientemente. La inicialización de la malla consiste en asignar valores iniciales para los vectores de estado  $w_i$  y fijar el valor de  $H_i$  para cada volumen  $V_i$  de la malla,  $i = 1, \dots, L$ . Seguidamente se calcula el incremento de tiempo  $\Delta t$  inicial y se entra en el bucle principal, donde se itera el proceso hasta que se alcanza el tiempo final de simulación  $t_{\text{fin}}$ . A continuación se describen los pasos principales del algoritmo paralelo:

- **Inicialización de los acumuladores:** Al principio de cada iteración del bucle principal, para cada volumen  $V_i$ , se inicializan a cero sus acumuladores  $M_i$  (un vector  $3 \times 1$ ) y  $Z_i$  (un escalar). Para cada volumen  $V_i$ , los acumuladores  $M_i$  y  $Z_i$  almacenarán las contribuciones de los flujos a través de las aristas para el cálculo del nuevo vector de estado  $w_i$  y para el cálculo del incremento de tiempo local,  $\Delta t_i$  que se calculará usando la condición CFL usual, respectivamente.
1. **Procesamiento de las aristas:** Para cada arista  $E_{ij}$  común a dos volúmenes adyacentes  $V_i$  y  $V_j$  se realizan los siguientes cálculos:
    - Se calculan los vectores  $M_{ij}^\pm = |E_{ij}| \mathcal{F}_{ij}^\pm$ , donde  $\mathcal{F}_{ij}^\pm$  son los flujos a través de las aristas calculados mediante la expresión (3.2.6).  $M_{ij}^-$  y  $M_{ij}^+$  representan las contribuciones de los flujos numéricos a las celdas para el cálculo de los nuevos estados de  $V_i$  y  $V_j$ , respectivamente. Estas contribuciones deben sumarse a los acumuladores  $M_i$  y  $M_j$  asociados a  $V_i$  y  $V_j$ , respectivamente. Este cálculo es el más costoso de todo el proceso, ya que contiene numerosas operaciones con vectores y matrices.



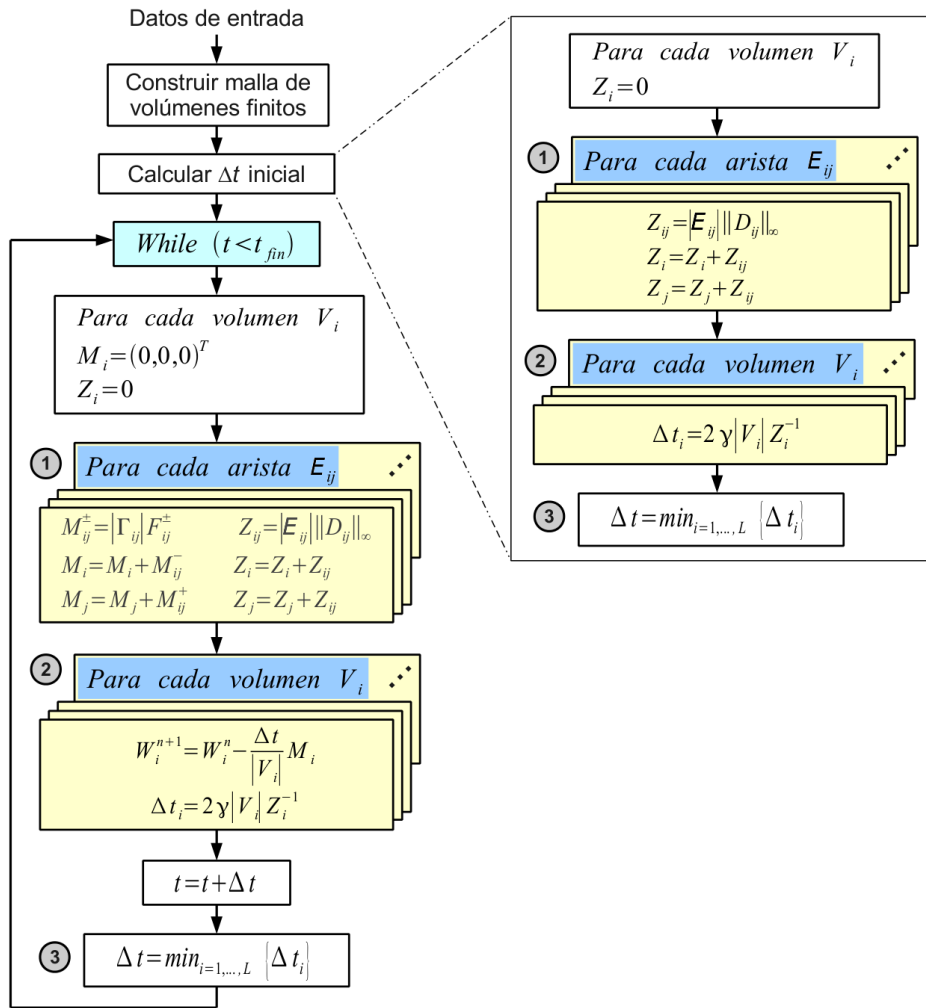


Figura 3.3: Fuentes de paralelismo de los esquemas de orden 1.

- o Se calcula el valor  $Z_{ij} = |E_{ij}| \max|\lambda_{ij}|$ , donde  $\lambda_{ij}$  son estimadores del máximo de las ondas asociadas a los estados  $w_i$  y  $w_j$ .  $Z_{ij}$  se usará para calcular el valor  $\Delta t_i$  local a los volúmenes  $V_i$  y  $V_j$  respectivamente (ver Ecuación (1.5.19)). Esta contribución debe sumarse a los acumuladores  $Z_i$  y  $Z_j$  asociados a  $V_i$  y  $V_j$ , respectivamente.

El procesamiento de las aristas puede hacerse en paralelo, ya que los cálculos asociados a cada arista son independientes de los efectuados para las restantes aristas. Además, nótese que cada arista  $E_{ij}$  sólo necesita los datos de sus volúmenes vecinos  $V_i$  y  $V_j$  para llevar a cabo sus cómputos. Por tanto, existe una alta localidad espacial.

2. Cálculo del nuevo estado  $w_i^{n+1}$  y del valor local  $\Delta t_i$  para cada volumen:

Para cada volumen  $V_i$  se realizan los siguientes cálculos:

- El nuevo estado  $w_i^{n+1}$  se obtiene a partir del valor del acumulador  $M_i$  del siguiente modo:  $w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|V_i|} M_i$ .
- El valor local  $\Delta t_i$  se obtiene a partir del valor del acumulador  $Z_i$  con el fin de garantizar la condición de estabilidad usual.

El procesamiento de los volúmenes también puede hacerse en paralelo, ya que los cálculos asociados a cada volumen son independientes de los realizados para los restantes volúmenes.

3. **Obtención del mínimo  $\Delta t$ :** En este paso se obtiene el mínimo de los valores locales  $\Delta t_i$  de cada volumen  $V_i$ ,  $\Delta t$ , que se utilizará en la próxima iteración. Nótese que este paso también puede paralelizarse mediante la aplicación de un algoritmo de reducción [33].

Debido a que los esquemas numéricos presentan un alto grado de paralelismo de datos, son especialmente adecuados para ser implementados en arquitecturas CUDA.

### 3.6.1.2. Esquemas de segundo orden

El algoritmo paralelo que proponemos para el esquema de orden 2 es similar al descrito anteriormente. Concretamente las etapas principales para el algoritmo paralelo de segundo orden son las siguientes:

- **Inicialización de los acumuladores:** Esta etapa es similar a la descrita en el epígrafe anterior.
1. **Procesamiento de las aristas:** Para cada arista  $E_{ij}$  común a dos volúmenes adyacentes  $V_i$  y  $V_j$  se realizan los siguientes cálculos:
    - Se calculan los valores reconstruidos de las variables  $\mu$ ,  $q_x$ ,  $q_y$  y  $H$ . Este proceso puede hacerse también en paralelo, ya que los cálculos asociados a cada volumen son independientes a los efectuados para los demás volúmenes. Igualmente se calcula la contribución de la integral de volumen (3.4.4).
    - Se calculan los vectores  $M_{ij}^\pm = |E_{ij}| \mathcal{F}_{ij}^\pm$  utilizando los valores reconstruidos.
    - Se calcula el valor  $Z_{ij} = |E_{ij}| \max|\lambda_{ij}|$ .
  2. **Cálculo del estado intermedio  $w_i^{n+1/2}$  y del valor local  $\Delta t_i$  para cada volumen:** Para cada volumen  $V_i$  se realizan los siguientes cálculos:
    - Se obtiene el estado intermedio  $w_i^{n+1/2}$ .
    - Se obtiene el valor local  $\Delta t_i$ .

1 y 2 se repiten para obtener el estado  $w_i^{n+1}$  a partir de  $w_i^{n+1/2}$  y  $w_i^n$ .

3. **Obtención del mínimo  $\Delta t$ :** Este paso es equivalente al descrito anteriormente.

### 3.6.1.3. Esquemas de tercer orden

El algoritmo que usamos para el esquema de orden 3 es el siguiente:

- **Inicialización de los acumuladores:** Esta etapa es similar a la descrita anteriormente.

1. **Reconstrucción de las variables y cálculo de la integral de volumen:** En este algoritmo se realiza una etapa previa de reconstrucción, donde se reconstruyen las variables  $\mu$ ,  $q_x$ ,  $q_y$  y  $H$ . Además del cálculo de la integral de volumen en (3.4.4). Nuevamente este proceso puede hacerse en paralelo, ya que los cálculos asociados a cada volumen son independientes a los efectuados para los demás volúmenes. Los valores reconstruidos se almacenan para ser usados posteriormente en el cálculo de los “flujos” a través de las aristas. Nótese que en el esquema de segundo orden este proceso se realiza a la vez que se calculan los “flujos”, por lo que los estados reconstruidos no se almacenan.

2. **Procesamiento de las aristas:** Para cada arista  $E_{ij}$  común a dos volúmenes adyacentes  $V_i$  y  $V_j$  se realizan los siguientes cálculos:

- Se calculan los vectores  $M_{ij}^{\pm} = |E_{ij}| \mathcal{F}_{ij}^{\pm}$  a partir de los valores reconstruidos. Obsérvese que en este caso tenemos dos contribuciones por arista debido al uso de la fórmula de cuadratura de Gauss de dos puntos.
- Se calcula el valor  $Z_{ij} = |E_{ij}| \max|\lambda_{ij}|$ .

3. **Cálculo del estado intermedio  $w_i^{n+1/3}$  y del valor local  $\Delta t_i$  para cada volumen:** Para cada volumen  $V_i$  se realizan los siguientes cálculos:

- Se obtiene el estado intermedio  $w_i^{n+1/3}$ .
- Se obtiene el valor local  $\Delta t_i$ .

1, 2 y 3 se repiten para obtener los estados  $w_i^{n+2/3}$  y  $w_i^{n+1}$ .

4. **Obtención del mínimo  $\Delta t$ :** Este paso es equivalente al descrito en el epígrafe anterior.

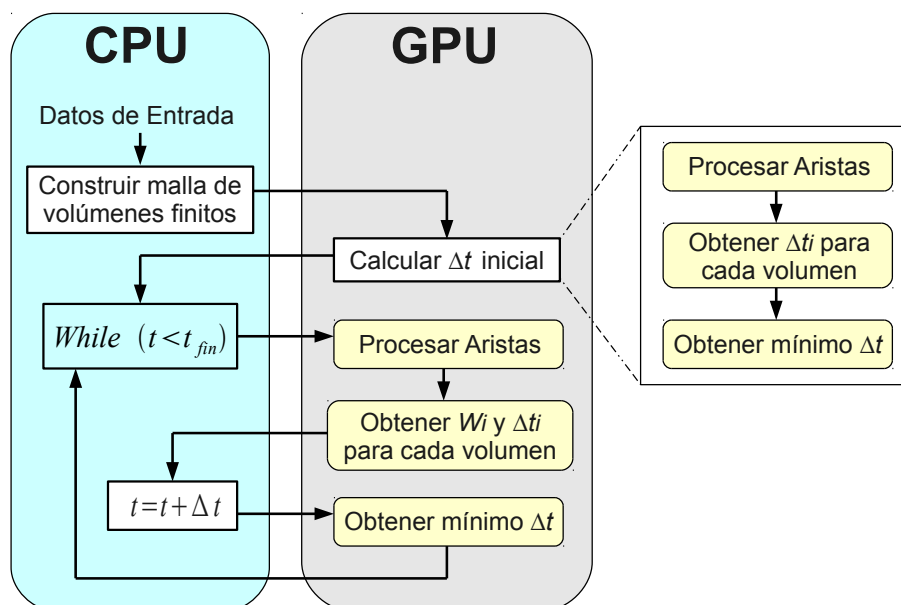


Figura 3.4: Algoritmo paralelo implementado en CUDA para el orden 1.

### 3.6.2. Detalles de la Implementación

#### 3.6.2.1. Implementación de los esquemas de primer orden y WAF por líneas

En esta sección describiremos los aspectos más destacados de las implementaciones del algoritmo paralelo expuesto en la Sección 3.6.1 que se han realizado usando el entorno de programación CUDA. Cada paso que se ejecuta en la GPU se asigna a un *kernel* de CUDA. A continuación describimos cada uno de los pasos del algoritmo:

- Construir malla de volúmenes finitos:** En este paso se construye la estructura de datos que se usará en GPU. Para cada volumen  $V_i$ , almacenamos su estado ( $h$ ,  $q_x$  y  $q_y$ ), y su profundidad  $H$  en un array de tipo `float4` cuyo tamaño es el número de volúmenes. Dicho array se almacena en la memoria de texturas como textura 2D. Como se dijo en la Sección 3.6.1, cada arista sólo necesita los datos de sus dos volúmenes adyacentes para llevar a cabo sus cálculos. Debido a ello, en este caso la memoria de texturas es una mejor opción que la memoria compartida. Esta última es más adecuada cuando todas las hebras de un bloque necesitan acceder a muchos elementos comunes de memoria global, y cada hebra carga una pequeña parte de todos estos elementos en memoria compartida.
- Procesar aristas:** Usamos para este paso la ejecución de cuatro kernels de CUDA para procesar todas las aristas. En estos kernels de procesamiento de aristas, cada hebra (*thread*) representa una arista, y calcula la contribución de los “flujos” a través

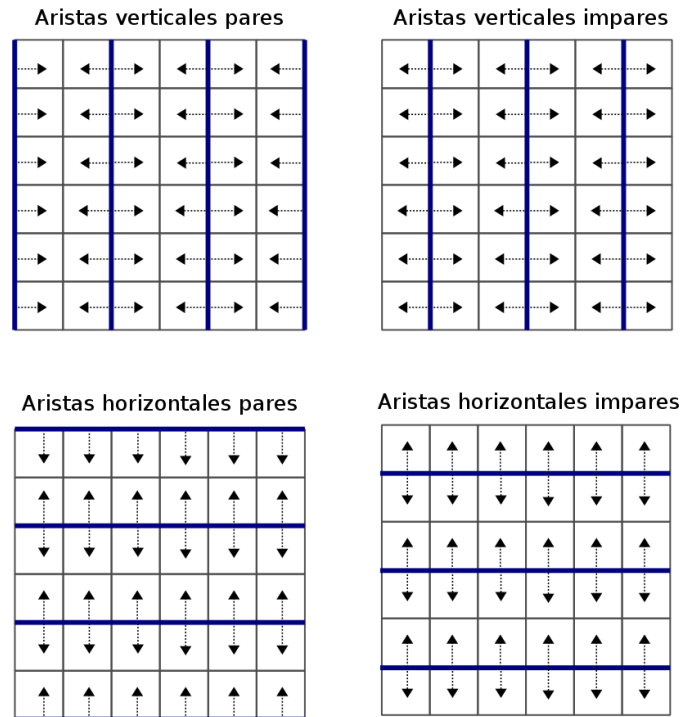


Figura 3.5: Diferentes pasos en el procesamiento de las aristas

de la arista a sus volúmenes adyacentes como se describe en la Sección 3.6.1. Tenemos kernels específicos para procesar cada conjunto disjunto de aristas: Aristas verticales pares, aristas verticales impares, aristas horizontales pares y aristas horizontales impares. Aquí, los términos par e impar hacen referencia al número de columna dentro de la malla de volúmenes finitos para las aristas verticales y al número de fila para las horizontales, que se numeran empezando en el 0 (véase la Figura 3.5).

Las razones para usar estos cuatro kernels son las siguientes:

- Para las aristas verticales,  $\eta_{ij,y} = 0$ , y para las horizontales,  $\eta_{ij,x} = 0$ . Por tanto, todas las operaciones donde aparecen estos términos pueden ser evitadas, incrementando así la eficiencia.
- Con este particionamiento, en la ejecución de cada kernel no hay ningún volumen al que se acceda por más de un hebra. Esto se muestra en la Figura 3.5 que ilustra los distintos subpasos de procesamiento de las aristas. Como consecuencia, las aristas (es decir, las hebras) no necesitan sincronizarse con las demás para contribuir a un determinado volumen. Por tanto, sólo necesitamos un array acumulador para almacenar las contribuciones de las aristas, por lo que tenemos una importante reducción del uso de la memoria de la GPU. Este acumulador es un array de tamaño el número de volúmenes de elementos

`float4`. Cada elemento del acumulador almacena la contribución de las aristas a  $w_i$  (el vector  $3 \times 1$ ,  $M_i$ ) y al  $\Delta t$  local del volumen (el valor `float`,  $Z_i$ ).

- Adicionalmente, el uso del array acumulador nos hace posible el forzar la positividad de la columna de agua, mediante el ajuste del  $\Delta t$  en cada elemento.
- **Obtener  $w_i^{n+1}$  y  $\Delta t_i$  para cada volumen:** En este paso, cada hebra representa un volumen y obtiene el siguiente estado  $w_i^{n+1}$  (a partir de  $M_i$ ) y el  $\Delta t_i$  local del volumen  $V_i$  (a partir de  $Z_i$ ) tal y como se describe en el paso 2 del algoritmo paralelo expuesto en la Sección 3.6.1.
- **Obtener el mínimo  $\Delta t$ :** En este paso se obtiene el mínimo de los  $\Delta t_i$  locales de los volúmenes. Dependiendo del número de volúmenes, el cálculo del mínimo se realiza en CPU o en GPU. Si el número de volúmenes es mayor que un determinado valor umbral (elegido experimentalmente como 4096), aplicamos un algoritmo de reducción en GPU (el algoritmo de reducción utilizado es el kernel 7 –el más optimizado– del ejemplo de reducción incluido en el GPU Computing SDK de NVIDIA [51]). En otro caso, el array de los valores  $\Delta t_i$  se copia de GPU a CPU, y el proceso de la obtención del mínimo se lleva a cabo en CPU, ya que resulta más eficiente.

### 3.6.2.2. Implementación del esquema de segundo orden

Los pasos de la implementación de CUDA de un esquema de segundo orden pueden verse en la Figura 3.6. Cada paso de procesamiento en GPU, puesto en un rectángulo en la figura, ha sido asignado a un kernel de CUDA.

- **Construir la estructura de datos:** La estructura de datos que utilizamos es idéntica a la usada en el esquema de primer orden, salvo que consideramos un array de tipo `float4` adicional para almacenar el estado intermedio  $w_i^{n+1/2}$ .
- **Reconstrucción, procesamiento de las aristas y cálculo de la integral:** Igual que en la implementación del esquema de primer orden, este paso se divide en cuatro subpasos (cada subpaso se implementa usando un kernel diferente de CUDA como se muestra en la Figura 3.6) dependiendo del tipo de arista. Se mejora así la eficiencia. En cada subpaso, cada hebra representa una arista  $E_{ij}$  (que puede ser vertical par, vertical impar, horizontal par u horizontal impar), calcula la contribución de los flujos numéricos a los volúmenes adyacentes  $V_i$  and  $V_j$  y también calcula la contribución correspondiente de la integral de volumen en (3.4.4). Obsérvese que para poder calcular tanto el flujo a través de la arista  $E_{ij}$  como la contribución de la integral de volumen será necesario reconstruir los estados de los volúmenes  $V_i$  y  $V_j$ , así como la batimetría. Esto hace que la dependencia de datos sea mayor que la que presentan los esquemas de orden 1.

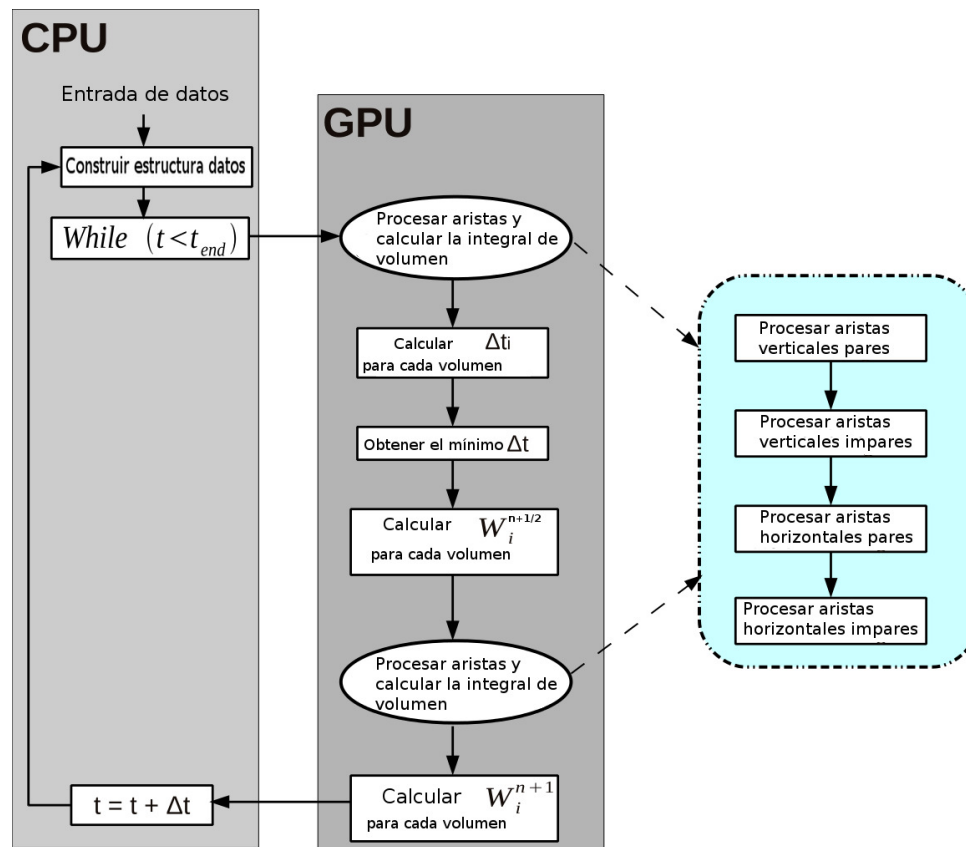


Figura 3.6: Pasos generales para la implementación en CUDA del esquema HLL de segundo orden.

- **Calcular  $w_i^{n+1/2}$  para cada volumen:** Este paso corresponde con la primera etapa del esquema Runge-Kutta TVD y es idéntico al paso que se describe en 3.6.2.1.

Estas dos etapas se repiten para calcular el estado  $w_i^{n+1}$ . Los valores locales  $\Delta t_i$  se calcularán en el mismo kernel donde se calcula  $w_i^{n+1}$ .

- **Obtener el mínimo  $\Delta t$ :** Este paso es idéntico al del epígrafe anterior.

### 3.6.2.3. Implementación del esquema de tercer orden

Describimos aquí las etapas de la implementación para el esquema de tercer orden:

- **Construir la estructura de datos:** La estructura de datos usada es similar a la utilizada en el esquema de segundo orden, es decir, se considera un array de tipo `float4` para almacenar los estados intermedios  $w_i^{n+1/3}$  y  $w_i^{n+2/3}$ . Además, utilizamos ocho arrays de `float4` para guardar los valores de las reconstrucciones en los dos

puntos de cuadratura asociados a cada una de las cuatro aristas de cada uno de los volúmenes  $V_i$ .

- **Reconstrucción y cálculo de la integral:** En este proceso utilizamos 8 arrays de elementos `float4` para guardar los valores reconstruidos en los 2 puntos de cuadratura asociados a las 4 aristas de cada uno de los volúmenes  $V_i$ .
- **Procesamiento de las aristas:** Este paso es similar al correspondiente del esquema de primer orden, utilizando los estados reconstruidos que hemos calculado en la etapa anterior.
- **Calcular  $w_i^{n+1/3}$  para cada volumen:** Este paso corresponde con la primera etapa del esquema Runge-Kutta TVD y es idéntico al paso que se describe en 3.6.2.1.

Estas tres etapas se repiten para calcular los estados  $w_i^{n+2/3}$  y  $w_i^{n+1}$ . Los valores de  $\Delta t_i$  locales se calcularán en el mismo kernel donde se calcula  $w_i^{n+1}$ .

- **Obtener el mínimo  $\Delta t$ :** Este paso es idéntico al del epígrafe anterior.

## 3.7. Resultados Experimentales

En esta sección ejecutaremos las implementaciones CUDA descritas en la sección anterior utilizando los esquemas numéricos HLL de primer, segundo y tercer orden y el método HLL-WAF en un problema de ejemplo, y analizaremos los resultados obtenidos. Se pueden consultar otros tests en los artículos realizados durante el desarrollo de esta memoria [2], [6], [16], y [31].

### 3.7.1. Problema de rotura de presa circular

El problema test consiste en una rotura de presa circular en el dominio rectangular  $[-5, 5] \times [-5, 5]$ . La función profundidad es  $H(x, y) = 4 - 1.5 e^{-x^2 - y^2}$  y la condición inicial  $w(\mathbf{x}, 0) = (h(\mathbf{x}, 0), 0, 0)$ , donde  $h(\mathbf{x}, 0) = H(x, y) + f(\mathbf{x})$ , siendo

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 5 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ 2.5 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Todos los esquemas numéricos han sido ejecutados para distintos tamaños de malla. Las simulaciones han sido llevadas a cabo en el intervalo de tiempo  $[0, 1]$ . El parámetro CFL es 0.9 y se consideran condiciones de pared en la frontera ( $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$ ). Las implementaciones en CUDA han sido ejecutadas en una GeForce GTX Titan Black. En la Tabla 3.1 podemos observar todos los tiempos de ejecución en segundos para todos los esquemas considerados en este ejemplo en una GPU GTX Titan Black. La Tabla 3.2 muestra el número de



Tabla 3.1: Tiempos de ejecución en segundos para todas las mallas y esquemas en una GTX Titan Black.

N. celdas	GTX Titan Black			
	1. <sup>er</sup> orden HLL	2. <sup>o</sup> orden HLL	3. <sup>er</sup> orden HLL	WAF
100 × 100	0.05	0.11	0.41	0.045
200 × 200	0.14	0.43	2.06	0.18
400 × 400	0.82	2.32	29.55	1.04
800 × 800	5.53	16.69	105.41	7.32
1600 × 1600	42.5	128.72	823.81	57.73
3200 × 3200	336.39	1131.63	7303.34	509.42

Tabla 3.2: Número de volúmenes procesados por segundo en una GTX Titan Black.

N. celdas	GTX Titan Black			
	1. <sup>er</sup> orden HLL	2. <sup>o</sup> orden HLL	3. <sup>er</sup> orden HLL	WAF
100 × 100	27953038.89	34443673.16	14294825.28	44130824.37
200 × 200	78983127.62	73434507.7	22868193.18	89600868.86
400 × 400	108760252.72	109047820.14	26868887.25	122359312.82
800 × 800	129006248.74	121368946.64	28814170.29	138840107.51
1600 × 1600	134186648.95	126063988.9	29543058.24	140842669.65
3200 × 3200	135613495.35	114793864.44	26688939.57	127722729.71

volúmenes procesados por segundo para las distintas resoluciones de malla y los distintos esquemas considerados.

La Figura 3.7 muestra una vista desde arriba de la evolución del fluido para la malla de tamaño 400 × 400 para los distintos esquemas numéricos en distintos instantes de tiempo.

### 3.7.2. Análisis de precisión

Consideramos ahora el test propuesto en [75] para medir la precisión de los esquemas para una solución no estacionaria. Aquí, la función de batimetría se define como

$$H(\mathbf{x}) = 2 - \sin(2\pi x) - \cos(2\pi y),$$

la altura inicial del agua

$$h(\mathbf{x}, 0) = 10 + e^{\sin(2\pi x)} \cos(2\pi y),$$

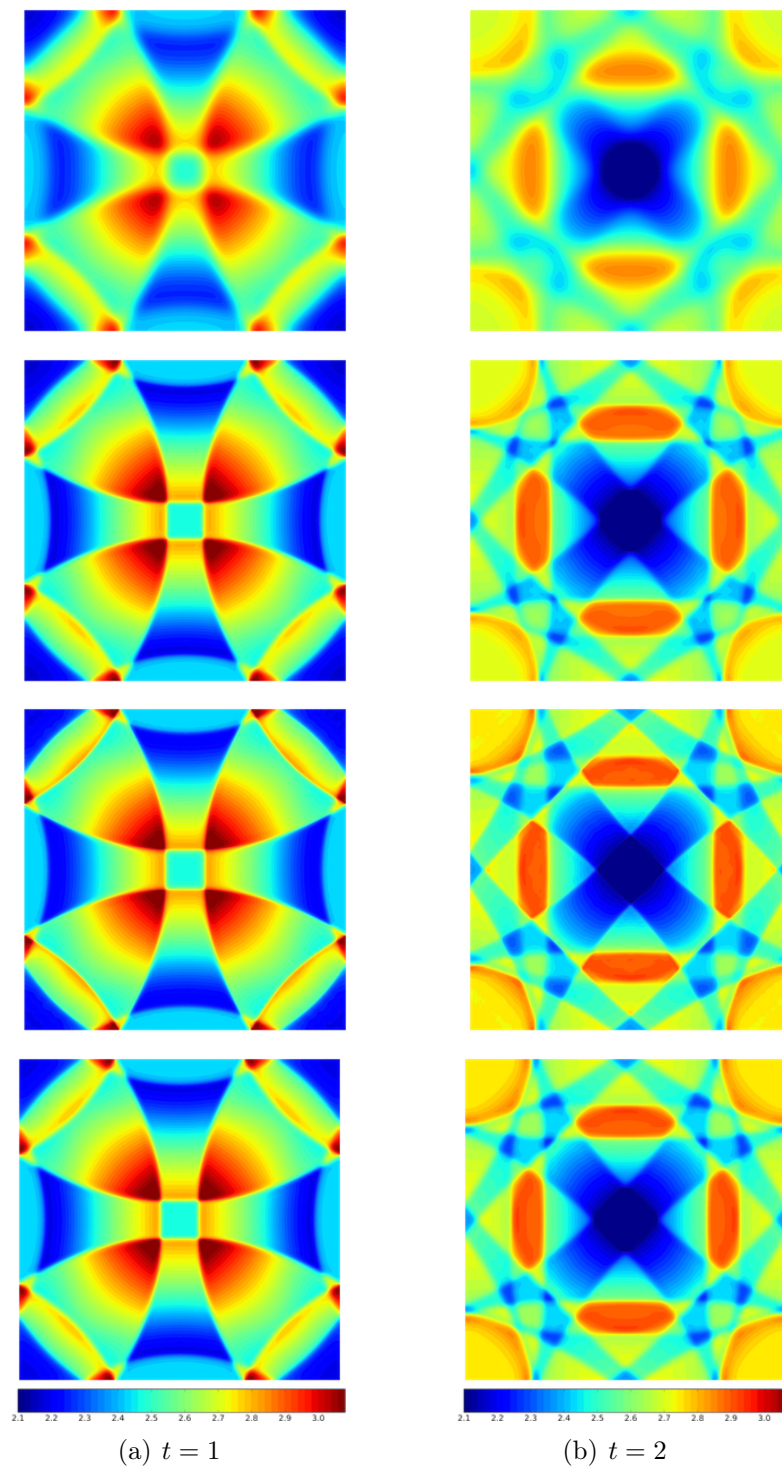


Figura 3.7: Vista desde arriba de la evolución del problema de rotura de presa circular en diferentes instantes de tiempo con una malla de  $400 \times 400$  volúmenes. De arriba a abajo: HLL de primer orden, HLL de segundo orden, HLL de tercer orden y WAF.

mientras que  $q_x, q_y$  iniciales vienen dadas por

$$q_x(\mathbf{x}, 0) = \sin(\cos(2\pi x))\sin(2\pi y), \quad q_y(\mathbf{x}, 0) = \cos(2\pi x)\cos(\sin(2\pi y)).$$

El dominio computacional es el cuadrado unidad y como condición de contorno se impone una condición periódica.

Las Tablas 3.3-3.6 muestran los resultados obtenidos en el instante  $t = 0.05$  para los diferentes esquemas. Hemos calculado una solución de referencia usando una malla con  $1600 \times 1600$  volúmenes. El parámetro CFL ha sido fijado a 0.5. Como puede verse en las Tablas 3.3, 3.4, 3.5, y 3.6, cada esquema alcanza el orden esperado. Obsérvese que el método HLL-WAF no es de segundo orden como era de esperar, aunque su precisión es considerablemente mejor que el esquema de orden uno.

Tabla 3.3: Test de precisión: Esquema HLL de primer orden. Errores  $L^1$  y órdenes.

N. celdas	error $h$	orden $h$	error $q_x$	orden $q_x$	error $q_y$	orden $q_y$
$25 \times 25$	$3.28 \cdot 10^{-01}$	–	$7.96 \cdot 10^{-01}$	–	1.79	–
$50 \times 50$	$1.75 \cdot 10^{-01}$	0.90	$4.65 \cdot 10^{-01}$	0.77	1.04	0.78
$100 \times 100$	$8.97 \cdot 10^{-02}$	0.97	$2.48 \cdot 10^{-01}$	0.91	$5.57 \cdot 10^{-01}$	0.91
$200 \times 200$	$4.32 \cdot 10^{-02}$	1.05	$1.22 \cdot 10^{-01}$	1.02	$2.73 \cdot 10^{-01}$	1.02

Tabla 3.4: Test de precisión: Esquema HLL de segundo orden. Errores  $L^1$  y órdenes.

N. celdas	error $h$	orden $h$	error $q_x$	orden $q_x$	error $q_y$	orden $q_y$
$25 \times 25$	$8.67 \cdot 10^{-02}$	–	$2.87 \cdot 10^{-01}$	–	$4.90 \cdot 10^{-02}$	–
$50 \times 50$	$3.22 \cdot 10^{-02}$	1.42	$1.09 \cdot 10^{-01}$	1.38	$2.01 \cdot 10^{-02}$	1.28
$100 \times 100$	$8.81 \cdot 10^{-03}$	1.87	$3.12 \cdot 10^{-02}$	1.81	$6.18 \cdot 10^{-03}$	1.70
$200 \times 200$	$2.32 \cdot 10^{-03}$	1.92	$8.12 \cdot 10^{-03}$	1.94	$1.67 \cdot 10^{-04}$	1.88

Tabla 3.5: Test de precisión: Esquema HLL de tercer orden. Errores  $L^1$  y órdenes.

N. celdas	error $h$	orden $h$	error $q_x$	orden $q_x$	error $q_y$	orden $q_y$
$25 \times 25$	$3.09 \cdot 10^{-03}$	–	$8.01 \cdot 10^{-03}$	–	$4.79 \cdot 10^{-03}$	–
$50 \times 50$	$4.4 \cdot 10^{-04}$	2.81	$6.41 \cdot 10^{-04}$	3.64	$3.75 \cdot 10^{-04}$	3.67
$100 \times 100$	$3.56 \cdot 10^{-05}$	3.63	$2.96 \cdot 10^{-05}$	4.43	$7.49 \cdot 10^{-03}$	4.32
$200 \times 200$	$2.23 \cdot 10^{-06}$	3.99	$6.08 \cdot 10^{-04}$	4.36	$3.58 \cdot 10^{-04}$	4.38

Tabla 3.6: Test de precisión: Esquema WAF. Errores  $L^1$  y órdenes.

N. celdas	error $h$	orden $h$	error $q_x$	orden $q_x$	error $q_y$	orden $q_y$
$25 \times 25$	$1.12 \cdot 10^{-01}$	–	$3.81 \cdot 10^{-01}$	–	$6.94 \cdot 10^{-01}$	–
$50 \times 50$	$4.37 \cdot 10^{-02}$	1.36	$1.79 \cdot 10^{-01}$	1.08	$2.74 \cdot 10^{-01}$	1.33
$100 \times 100$	$1.78 \cdot 10^{-02}$	1.29	$8.22 \cdot 10^{-02}$	1.12	$1.14 \cdot 10^{-01}$	1.25
$200 \times 200$	$7.19 \cdot 10^{-03}$	1.31	$3.54 \cdot 10^{-02}$	1.21	$5.04 \cdot 10^{-02}$	1.18

# Capítulo 4

## Discretización del sistema de aguas someras de una capa en coordenadas esféricas: aplicación a la simulación de flujos geofísicos

### 4.1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es el de definir los esquemas de tipo HLL y HLL-WAF para el sistema de aguas someras de una capa en coordenadas esféricas (longitud/latitud). El uso de este sistema viene motivado por la simulación de la propagación de tsunamis en dominios computacionales correspondientes a las distintas cuencas oceánicas.

El sistema considerado es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \left[ \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (q_\varphi \cos(\varphi)) \right] = 0 \\ \frac{\partial q_\theta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{q_\theta^2}{h} \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{q_\theta q_\varphi}{h} \right) + \frac{gh}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{gh}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial q_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{q_\varphi q_\theta}{h} \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{q_\varphi^2}{h} \right) + \frac{gh}{R} \frac{\partial h}{\partial \varphi} = \frac{gh}{R} \frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

En este sistema,  $R$  es el radio de la Tierra y se aproxima por el valor 6371000 m;  $(\theta, \varphi)$  indican la longitud y latitud de un punto arbitrario;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $h$  es el espesor de la columna de agua;  $H$  es la profundidad medida a partir de un sistema de referencia;  $q_\theta$  y  $q_\varphi$  son las componentes del caudal en las direcciones  $\theta$  y  $\varphi$ , respectivamente, y están relacionados con las componentes del promedio de la velocidad mediante las expresiones

$$u_\theta = \frac{q_\theta}{h}, \quad u_\varphi = \frac{q_\varphi}{h}.$$

Este modelo se suele utilizar en combinación con el modelo de Okada ([34], [52]), con el que se aproxima la deformación producida por un terremoto en la corteza terrestre. En la práctica esta deformación se traslada de forma instantánea a la batimetría, lo que genera una onda en la superficie libre del fluido, que usaremos como condición inicial del modelo de aguas someras. El modelo de Okada usa la teoría de deformación elástica lineal para el cálculo del desplazamiento vertical de una falla. Los parámetros a tener en cuenta para el cálculo de esta deformación son la longitud y el ancho de la falla, la longitud, latitud y profundidad donde se localiza el hipocentro, la orientación del borde superior de la falla (*strike*), medida en grados en sentido horario desde el norte (debe estar entre 0 y 360), el ángulo en el que el plano de la falla se sumerge hacia abajo desde el borde superior (*dip*) (debe estar entre 0 y 90), el ángulo en el plano de la falla en el que se produce el deslizamiento (*rake*) (comprendido entre -180 y 180), y la distancia (medida en metros) en que se desplaza el bloque de arriba sobre el bloque de abajo (*slip*) (véase la Figura 4.1. Este modelo proporciona una aproximación grosera de la deformación de la corteza terrestre, que no está compuesta por un material elástico isotrópico homogéneo, como se supone en este modelo. Sin embargo, es una aproximación razonable para el modelado de tsunamis, puesto que, en general no se conocen exactamente los parámetros de deslizamiento de falla en el momento en el que se produce el tsunami, incluso ni siquiera se conocen con exactitud tiempo después de haberse producido.

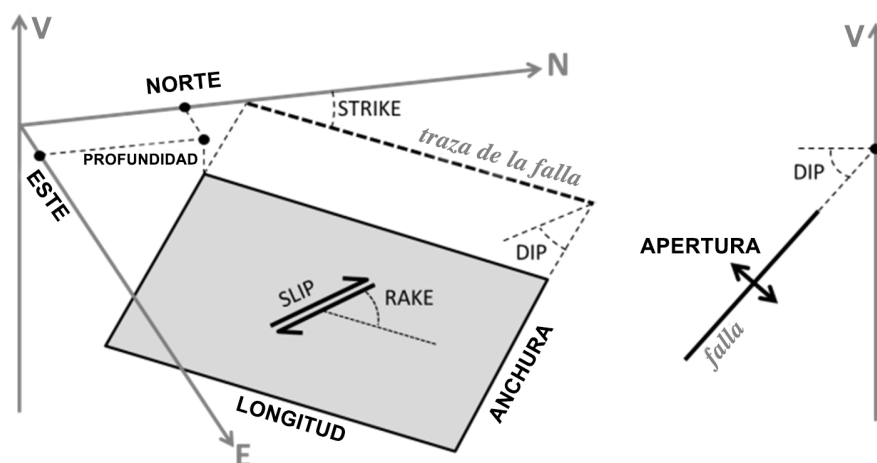


Figura 4.1: Parámetros de Okada

## 4.2. Discretización

Vamos a considerar mallados estructurados de volúmenes finitos rectangulares con los lados paralelos al Ecuador y al meridiano de Greenwich y vamos a aplicar el método de líneas para discretizar el sistema (4.1.1). En tal caso, el problema se reduce a obtener “flujos numéricos” para los problemas unidimensionales:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial q_\theta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{q_\theta^2}{h} + gh \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = \frac{gh}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial q_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial q_\theta q_\varphi}{h} \right) = 0, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (q_\varphi \cos(\varphi)) = 0 \\ \frac{\partial q_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{q_\varphi^2}{h} \right) + gh \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right] = \frac{gh}{R} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial q_\theta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{q_\varphi q_\theta}{h} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Obsérvese que en el caso del sistema (4.2.1) el término  $\frac{1}{R \cos(\varphi)}$  es constante, ya que no depende de la longitud, por lo que podemos usar uno de los flujos numéricos descritos en las Secciones 3.2.2, 3.2.3, o 3.3.

Por el contrario, el sistema (4.2.2) presenta algunas nuevas dificultades, como el hecho de que el flujo dependa explícitamente de  $\varphi$ , lo que imposibilita el uso de los esquemas tal como se describen en las secciones anteriores. En la siguiente sección vamos a describir la discretización unidimensional que vamos a utilizar para aproximar el sistema (4.2.2).

### 4.2.1. Discretización del sistema (4.2.2)

Al igual que hicimos en la Sección 3.2.1, vamos a considerar inicialmente las dos primeras ecuaciones del sistema (4.2.2), que corresponderían a un sistema similar al de aguas someras unidimensional. Posteriormente, teniendo en cuenta que la tercera ecuación es una ecuación de transporte para  $q_\theta$ , usaremos la misma idea que la utilizada en 3.2.1 para obtener el “flujo numérico” para el sistema completo.

Se trata pues de discretizar en primer lugar el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (q_\varphi \cos(\varphi)) = 0 \\ \frac{\partial q_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{q_\varphi^2}{h} \right) + gh \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right] = \frac{gh}{R} \frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Reescribiendo el sistema (4.2.3) en términos de las variables  $h_\varphi = h \cos(\varphi)$ ,  $Q_\varphi = q_\varphi \cos(\varphi)$  y  $H_\varphi = H \cos(\varphi)$ , resulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial Q_\varphi}{\partial t} + \frac{\cos(\varphi)}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{Q_\varphi^2}{h_\varphi \cos(\varphi)} \right] + \frac{gh_\varphi}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{h_\varphi}{\cos(\varphi)} = \frac{gh_\varphi}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{H_\varphi}{\cos(\varphi)} \right), \end{cases} \quad (4.2.4)$$

o, de forma equivalente,

$$\begin{cases} \frac{\partial h_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial Q_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{Q_\varphi^2}{h_\varphi} \right) + \frac{gh_\varphi}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{gh_\varphi}{R \cos(\varphi)} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} \\ + \frac{q_\varphi^2}{h} \frac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{gh_\varphi}{R \cos(\varphi)} \left( \frac{h_\varphi - H_\varphi}{\cos(\varphi)} \right) \frac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

El sistema (4.2.5) puede escribirse como

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{R} A(U, \varphi) \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{1}{R} S_1(U, \varphi) \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} S_2(U, \varphi) \frac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \varphi},$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} h_\varphi \\ Q_\varphi \end{pmatrix}; \quad A(U, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u_\varphi^2 & 2u_\varphi \end{pmatrix}$$

siendo  $u_\varphi = \frac{Q_\varphi}{h_\varphi}$ .

$$S_1(U, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_\varphi \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad S_2(U, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_\varphi^2}{h} + gh\eta \end{pmatrix}, \quad \eta = h - H.$$

Nótese que la matriz  $A(U, \varphi)$  coincide con la matriz habitual del sistema de aguas someras unidimensional. Por último, al igual que ocurría en el sistema de aguas someras



unidimensional resulta más cómodo escribir el sistema (4.2.5) agrupando los términos de transporte y los términos de presión. De esta forma el sistema (4.2.5) puede reescribirse como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial F^C}{\partial \varphi}(U) + \frac{1}{R} T_p(U, \varphi) = \frac{1}{R} S_\varphi(U, \varphi) \frac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (4.2.6)$$

donde

$$F^C(U) = \begin{pmatrix} Q_\varphi \\ Q_\varphi^2 \\ h_\varphi \end{pmatrix}, T_p(U, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_\varphi \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \end{pmatrix},$$

y

$$S_\varphi(U, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\varphi^2 \\ h \end{pmatrix}.$$

A continuación vamos a definir un esquema numérico de tipo HLL para el sistema unidimensional (4.2.5) escrito en la forma (4.2.6)

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{R \Delta \varphi} (\Psi_{i-1/2}^{HLL+} + \Psi_{i+1/2}^{HLL-}), \quad (4.2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1/2}^{HLL-} = & \frac{1}{2} \left( F^C(U_{i+1}^n) - F^C(U_i^n) + T_{p_{i+1/2}} - S_{\varphi_{i+1/2}} (\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i)) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left[ \alpha_{0,i+1/2} \tilde{I}_{i+1/2} \right. \\ & \left. + \alpha_{1,i+1/2} \left[ F^C(U_{i+1}^n) - F^C(U_i^n) + T_{p_{i+1/2}} - S_{\varphi_{i+1/2}} (\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i)) \right] \right] \\ & + F^C(U_i^n), \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1/2}^{HLL+} = & \frac{1}{2} \left( F^C(U_{i+1}^n) - F^C(U_i^n) + T_{p_{i+1/2}} - S_{\varphi_{i+1/2}} (\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i)) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left[ \alpha_{0,i+1/2} \tilde{I}_{i+1/2} \right. \\ & \left. + \alpha_{1,i+1/2} \left[ F^C(U_{i+1}^n) - F^C(U_i^n) + T_{p_{i+1/2}} - S_{\varphi_{i+1/2}} (\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i)) \right] \right] \\ & - F^C(U_i^n), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

donde

$$T_{p_{i+1/2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_{\varphi_{i+1/2}} \cos(\varphi)_{i+1/2} (\eta_{i+1} - \eta_i), \end{pmatrix}$$

$$\text{siendo } h_{\varphi_{i+1/2}} = \frac{h_{\varphi_i} + h_{\varphi_{i+1}}}{2}, \quad u_{\varphi_{i+1/2}} = \frac{\sqrt{h_{\varphi_i}}u_{\varphi_i} + \sqrt{h_{\varphi_{i+1}}}u_{\varphi_{i+1}}}{\sqrt{h_{\varphi_i}} + \sqrt{h_{\varphi_{i+1}}}} \text{ y}$$

$$\cos(\varphi)_{i+1/2} = \frac{\cos(\varphi_i) + \cos(\varphi_{i+1})}{2};$$

$$S_{\varphi_{i+1/2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{\varphi_{i+1/2}}h_{\varphi_{i+1/2}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{I}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)_{i+1/2}(\eta_{i+1} - \eta_i) - \frac{u_{\varphi_{i+1/2}}^2}{g}(\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i)) \\ Q_{\varphi_{i+1}} - Q_{\varphi_i} \end{pmatrix}$$

y donde  $\alpha_{0,i+1/2}$ ,  $\alpha_{1,i+1/2}$  se definen como en (3.2.2).

Si en lugar de evolucionar las variables  $U = \begin{pmatrix} h_{\varphi} \\ Q_{\varphi} \end{pmatrix}$  queremos evolucionar  $w = \begin{pmatrix} h \\ q_{\varphi} \end{pmatrix}$ , podemos usar el siguiente esquema numérico

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\cos(\varphi_i)R\Delta\varphi} \left[ \Psi_{i-1/2}^{HLL^+} + \Psi_{i+1/2}^{HLL^-} \right]. \quad (4.2.10)$$

### Propiedades del esquema numérico

- El esquema numérico preserva las soluciones de equilibrio correspondientes al agua en reposo, esto es,  $u_{\varphi} = 0$  y  $\eta = cte$ .
- Si eliminamos la dependencia del  $\cos(\varphi)$  en el problema (4.2.2), entonces el esquema numérico (4.2.10) coincide con el descrito en la Sección 3.2.2.
- El esquema es  $L^{\infty}$  - estable bajo la condición de estabilidad normal.
- El esquema (4.2.7) no es un esquema camino-conservativo. Concretamente los términos  $T_{p_{i+1/2}}$  y  $S_{\varphi_{i+1/2}}(\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i))$  son aproximaciones de las integrales

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ g\Phi_{h_{\varphi}}(s) \end{pmatrix} \partial_s \Phi_{\eta}(s) \text{ y } \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Phi_{Q_{\varphi}}^2(s)}{\Phi_{h_{\varphi}}(s)\Phi_{\cos(\varphi)}(s)} \end{pmatrix} \partial_s \Phi_{\cos(\varphi)}(s).$$

Concretamente,

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ g\Phi_{h_{\varphi}}(s) \end{pmatrix} \partial_s \Phi_{\eta}(s) \approx T_{p_{i+1/2}} \text{ y}$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Phi_{Q_{\varphi}}^2(s)}{\Phi_{h_{\varphi}}(s)\Phi_{\cos(\varphi)}(s)} \end{pmatrix} \partial_s \Phi_{\cos(\varphi)}(s) \approx S_{\varphi_{i+1/2}}(\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i)).$$

### 4.2.2. Discretización de la tercera ecuación del sistema (4.2.2)

Como hemos dicho, la tercera ecuación del sistema (4.2.2) corresponde a la ecuación de transporte

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{q_\varphi}{h} q_\theta \right) = 0.$$

Al igual que hicimos en la Sección 3.2.1, proponemos la siguiente discretización

$$q_{\theta_i}^{n+1} = q_{\theta_i}^n - \frac{\Delta t}{R\Delta\varphi} \left( \Psi_{\theta_{i-1/2}}^+ + \Psi_{\theta_{i+1/2}}^- \right),$$

donde  $\Psi_{\theta_{i+1/2}}^\pm$  se define en términos de la primera componente del flujo numérico  $\Psi_{i+1/2}^{HLL,\pm}$ .

Para ello, observemos que

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{q_\varphi}{h} q_\theta \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( Q_\varphi \frac{u_\theta}{\cos(\varphi)} \right).$$

Así, definimos

$$\Psi_{\theta_{i+1/2}}^- = \left[ \Psi_{i+1/2}^{HLL^-} \right]_{[1]} u_{i+1/2}^*, \quad (4.2.11)$$

siendo

$$u_{i+1/2}^* = \begin{cases} \frac{u_{\theta_i}}{\cos(\varphi_i)} & \text{si } \left( \Psi_{\eta_{ij}}^{HLL^-} \right)_{[1]} > 0 \\ \frac{u_{\theta_{i+1}}}{\cos(\varphi_{i+1})} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Al igual que en la Sección 3.2.1, definimos  $\Psi_{\theta_{i+1/2}}^+$  como  $\Psi_{\theta_{i+1/2}}^+ = -\Psi_{\theta_{i+1/2}}^-$ .

Así, el esquema numérico para el sistema completo (4.2.2) en las variables  $W = \begin{pmatrix} h \\ q_\varphi \\ q_\theta \end{pmatrix}$

sería el siguiente

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{R\Delta\varphi} \left( F_{\varphi_{i-1/2}}^{HLL^+} + F_{\varphi_{i+1/2}}^{HLL^-} \right)$$

donde

$$F_{\varphi_{i+1/2}}^{HLL^-} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(\varphi_i)} \Psi_{i+1/2}^{HLL^-} \\ \Psi_{\theta_{i+1/2}}^- \end{pmatrix} F_{\varphi_{i+1/2}}^{HLL^+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(\varphi_{i+1})} \Psi_{i+1/2}^{HLL^+} \\ \Psi_{\theta_{i+1/2}}^+ \end{pmatrix}$$

siendo  $\Psi_{i+1/2}^{HLL^\pm}$ ,  $\Psi_{\theta_{i+1/2}}^\pm$  los definidos en (4.2.10) y (4.2.11), respectivamente.

De igual forma, podemos definir los flujos numéricos correspondientes a los esquemas de tipo Force o HLL-WAF sin más que repetir el proceso anterior, tal como se describe en las Secciones 3.2.3 o 3.3.

La construcción del esquema para el sistema bidimensional es inmediata sin más que combinar los flujos numéricos asociados al sistema (4.2.1) y (4.2.2) tal como se ha descrito de forma general en los Capítulos 2 y 3 de esta memoria.

El tratamiento de los frentes seco-mojado se realiza de forma similar a lo descrito en el Capítulo 3. Se redefinen los términos de presión y se impone una condición de contorno de tipo pared en fondos emergentes.

Por último, la implementación en CUDA es similar a la realizada para los esquemas de primer orden y de limitadores de flujo descritos en la Sección 3.6. La única diferencia en este caso es que se necesita almacenar los valores  $\cos(\varphi_i)$ . Como este valor es idéntico para todas aquellas celdas con igual latitud, sólo se almacenan los valores de  $\cos(\varphi_i)$  para aquellos puntos situados a diferente latitud.

### 4.3. Resultados experimentales

Una de las ideas por las que se realizó la implementación del esquema WAF en GPU es la posibilidad de realizar simulaciones de situaciones realistas en tiempos de cómputo pequeños. En este capítulo se presentan varios casos en los que hemos realizado simulaciones de flujos geofísicos en situaciones reales. Debido a los contratos y proyectos en los que está involucrado el grupo EDANYA, al que pertenezco, hemos focalizado estas simulaciones en casos de interés, relativos a eventos de tsunamis acontecidos en los últimos tiempos.

Los dos primeros ejemplos pertenecen a una serie de problemas o *benchmarks* propuestos por el National Tsunami Hazard Mitigation Program (NTHMP) de los Estados Unidos. El NTHMP es programa dirigido por la National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) y National Weather Service (NWS) de Estados Unidos, cuyo objetivo último es el de mejorar la preparación de las áreas de riesgo de tsunami en los Estados Unidos. En 2011, el NTHMP propuso un conjunto de benchmarks (véase [48]) cuyo objetivo era el de testar la capacidad de distintos modelos numéricos para el modelado de fenómenos de inundación producida por tsunamis. Hemos seleccionado tres de los casos más complejos para que sirvan de validación y test para el esquema WAF presentado en el capítulo anterior y adaptado a coordenadas esféricas en este capítulo.

El último experimento se basa en el más reciente tsunami de Tohoku (Japón) de 2011 con comparativas con datos de campo.

Dada la envergadura de los problemas a simular y la cantidad de datos que hemos tenido que procesar, en alguno de los casos hemos tenido que usar una versión multi-GPU del esquema descrito en este capítulo (véase [4]).

En todos los casos, ha habido un trabajo previo de desarrollo de software de preproceso y postproceso de los datos generados. Esto ha conllevado el desarrollo de *scripts* en el lenguaje de programación *Python*: unos para la ordenación y preparación de datos para adaptarlos al modelo numérico, otros para el dibujo de las gráficas, a partir los resultados obtenidos, etc.



Figura 4.2: Máximo runup

#### 4.3.1. Experimento de Monai Valley. Experimento de laboratorio.

El 12 de julio de 1993 el tsunami causado por el terremoto Hokkaido-Nansei-Oki, de escala  $M_w = 7.8$ , sacudió la isla de Okushiri en Japón, alcanzando una altura máxima tierra adentro de 32 metros (runup), y corrientes de 10-18 m/s. La marca del máximo runup se encontró en un barranco dentro de una pequeña cala cerca de la localidad de Monai (Figura 4.2). A excepción de un pequeño número de casas, la localidad de Monai fue completamente destruida. Las olas alcanzaron una elevación máxima cercana a los 20 m sobre el nivel del mar, siendo la extensión de la inundación de alrededor 300 m tierra adentro.

Existían datos de alta resolución de la batimetría de la zona que, con los datos recogidos tras el evento, permitieron construir un modelo de laboratorio<sup>1</sup> a escala 1:400 del valle de Monai en un tanque de 205 metros de largo, 6 metros de profundidad y 3.5 metros de ancho que puede verse en la Figura 4.3.

Este problema es el *Benchmark* BM 7, basado en datos reales, propuestos por el NTHMP en base al artículo de referencia [20].

Para este problema se impone una onda incidente como condición de contorno en la

---

<sup>1</sup>Construido por El Instituto Central de Investigación para el sector eléctrico (CRIEPI) de Abiko, Japón

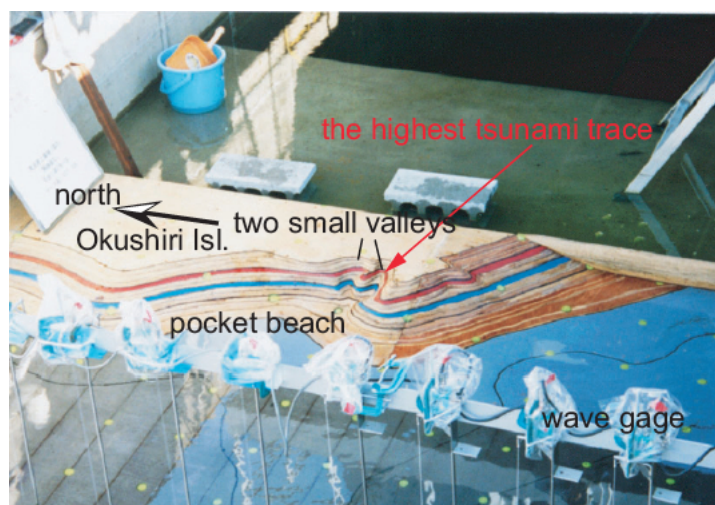


Figura 4.3: Simulación en laboratorio

pared lateral izquierda del dominio, donde la profundidad del agua es  $\tilde{d} = 13.5$ . Hay paredes laterales verticales reflectantes en  $\tilde{y} = 0$  y  $3.5$  m. Toda la zona de cálculo mide  $5.448 \text{ m} \times 3.402 \text{ m}$ . Hemos usado la resolución de malla para las simulaciones numéricas  $\Delta x = \Delta y = 1.4 \text{ cm}$ .

La onda entrante (condición de contorno) se muestra en la Figura 4.4. Se han obtenido las series temporales en tres puntos del dominio,  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (4.521, 1.196)$  (boya 1),  $(4.521, 1.696)$  (boya 2), y  $(4.521, 2.196)$  (boya 3) en metros (Figura 4.5).

El objetivo de este experimento es el de comparar las series temporales de sobre elevación del agua en las boyas 1, 2 y 3, así como ser capaces de capturar tanto el máximo runup en la costa como el momento en el que se produce.

La aceleración de la gravedad utilizada en este experimento es  $g = 9.81$ . No se considera fricción. La elevación de la onda entrante por la frontera izquierda se conoce hasta el segundo 22.5; tras esto, se impone una condición de contorno libre, por lo que las ondas reflejadas salen (nótese que el tanque del laboratorio es mucho más largo que el dominio computacional. En las fronteras superior e inferior hemos impuesto una condición de contorno tipo pared).

#### 4.3.1.1. Comparación con datos reales

A fin de estudiar la convergencia del modelo hemos usado varias resoluciones de malla. La primera y más grosera, la malla original de  $393 \times 244$  (95892) volúmenes, con  $\Delta x = \Delta y = 1.4 \text{ cm}$ , y tres refinadas, dividiendo por dos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  cada vez, de 383568 ( $786 \times 488$ ) volúmenes, con  $\Delta x = \Delta y = 0.7 \text{ cm}$ , 1534272 ( $1572 \times 976$ ) volúmenes, con  $\Delta x = \Delta y = 0.35 \text{ cm}$ , y 6137088 ( $3144 \times 1952$ ) volúmenes, con  $\Delta x = \Delta y = 0.175 \text{ cm}$ .

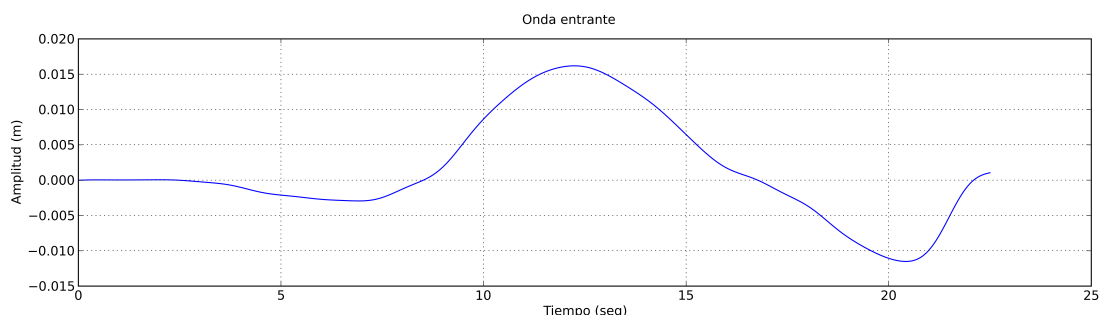


Figura 4.4: Onda entrante que es impuesta como condición de contorno

Hemos comparado las series temporales en tres puntos, con series temporales de las boyas reales obtenidas en el laboratorio, cuya posición está determinada en la Figura 4.5. Estos resultados pueden verse en las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8. En las gráficas se representan las series temporales obtenidas para las distintas resoluciones. Puede observarse que apenas hay variación entre las soluciones numéricas obtenidas para las distintas resoluciones, de lo que puede observarse que las soluciones convergen a medida que se refina la malla. Los tiempos de llegada y la elevación máxima de la onda principal se capturan correctamente. En general, concluimos que las soluciones numéricas obtenidas son muy similares a los experimentos de laboratorio durante los primeros 30 segundos de simulación, no siendo comparables después debido a la falta de información de la condición de contorno en la frontera izquierda del dominio.

En las Figuras 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 pueden observarse comparaciones de los frames 10, 25, 40, 55 y 70 del vídeo de laboratorio con los resultados obtenidos en el experimento para la resolución de  $3144 \times 1952$  volúmenes. Dicho vídeo tiene una tasa de 30 fps (imágenes por segundo), por lo que la diferencia en tiempo entre los frames presentados es de 0.5 segundos. Sin embargo, no está claro cuál es el tiempo de inicio del primer frame respecto al tiempo de simulación, por lo que en la descripción del problema en [20], se afirma que el frame 10 ocurre aproximadamente a los 15.3 segundos, pero recomiendan que para cada experimento deben encontrarse los instantes que mejor encajen con el tiempo de llegada de la primera onda. Hemos encontrado razonable empezar las gráficas de nuestro experimento en el instante 15 segundos para el frame 1 e incrementándolo en 0.5 segundos para las siguientes.

La línea de puntos amarilla en las imágenes de la película representa la línea de costa aproximada. Para la representación gráfica de la simulación numérica se ha usado un filtro a partir del cual se discriminan las zonas secas de las zonas mojadas. Dicho filtro se ha fijado en  $h \geq 0.0001$ . Las líneas negras son las curvas de nivel de la batimetría, desde 0 a 0.12 m, para que coincidan con las curvas de nivel de las imágenes del vídeo.

En el experimento, el máximo runup se alcanza aproximadamente en el segundo 16.5,



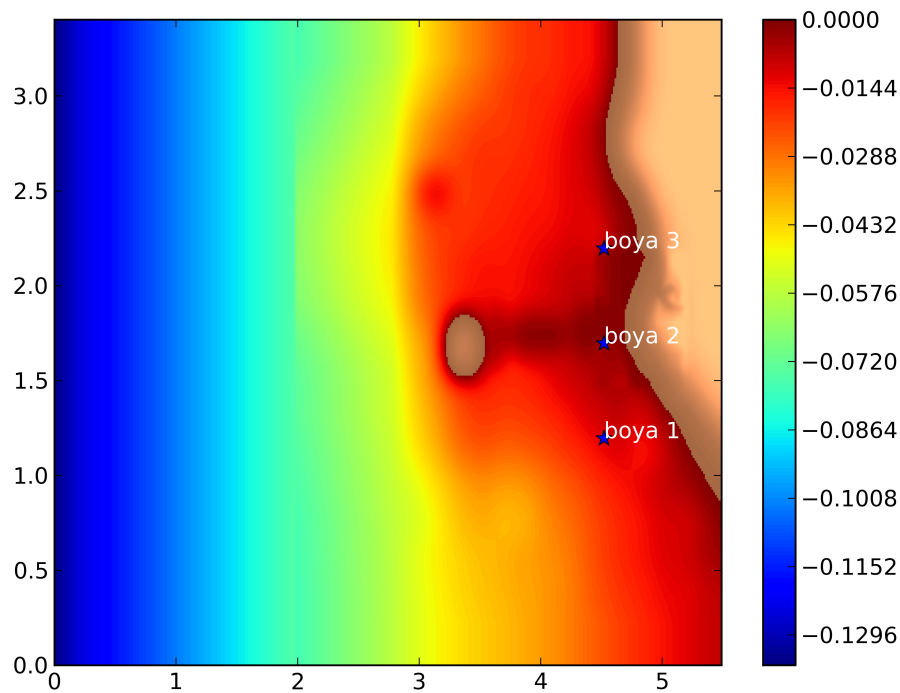


Figura 4.5: Boyas

en el punto  $x = 5.15721883$ ,  $y = 1.8831255$ , con un valor de 0.085452 m. Esta gráfica puede verse en la Figura 4.14. En la descripción del problema de validación se especifican tres localizaciones observadas de seis ejecuciones del mismo experimento en el tanque de agua para el runup. De éstas, la localización relevante para el runup en el valle es el primero de los puntos, en  $x = 5.1575$ ,  $y = 1.88$ . Los seis valores dados son 0.0875, 0.09, 0.08, 0.09, 0.1, 0.09, con un valor medio de, aproximadamente 0.09. La diferencia entre el máximo runup numérico y el promedio experimental es de 0.004548, por lo que los resultados del experimento son muy satisfactorios.

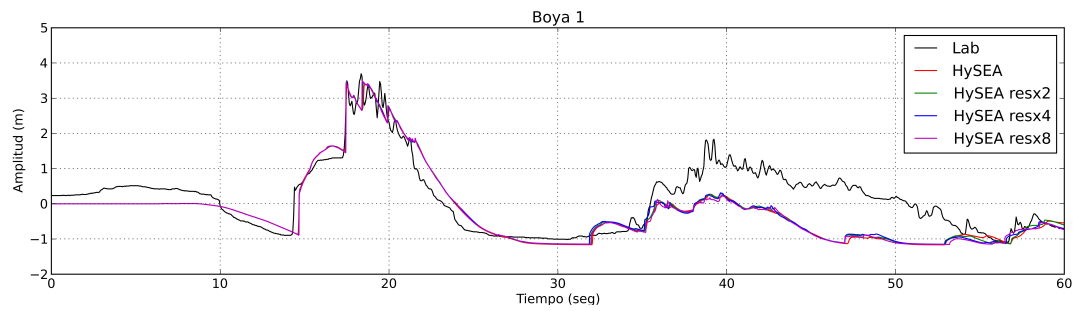


Figura 4.6: Serie temporal en la boya 1

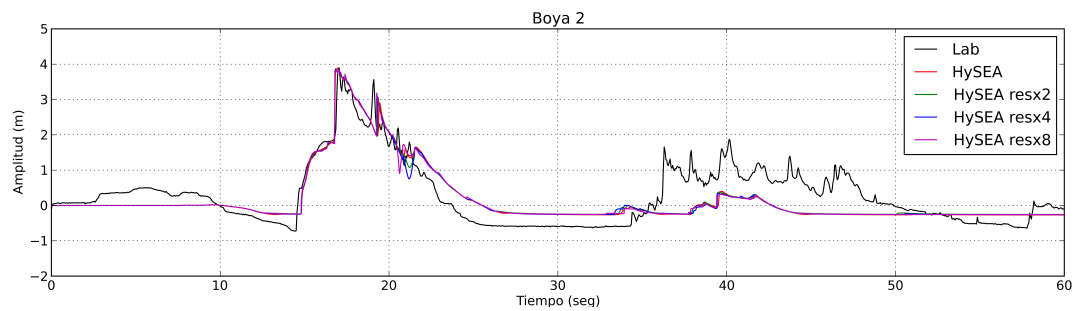


Figura 4.7: Serie temporal en la boya 2

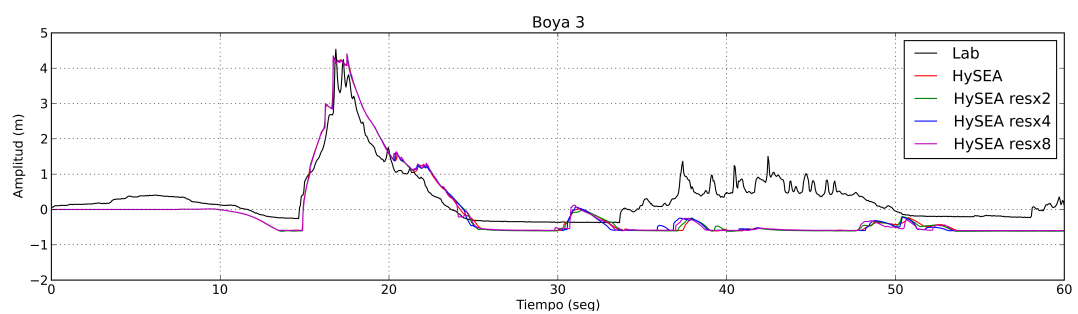


Figura 4.8: Serie temporal en la boya 3

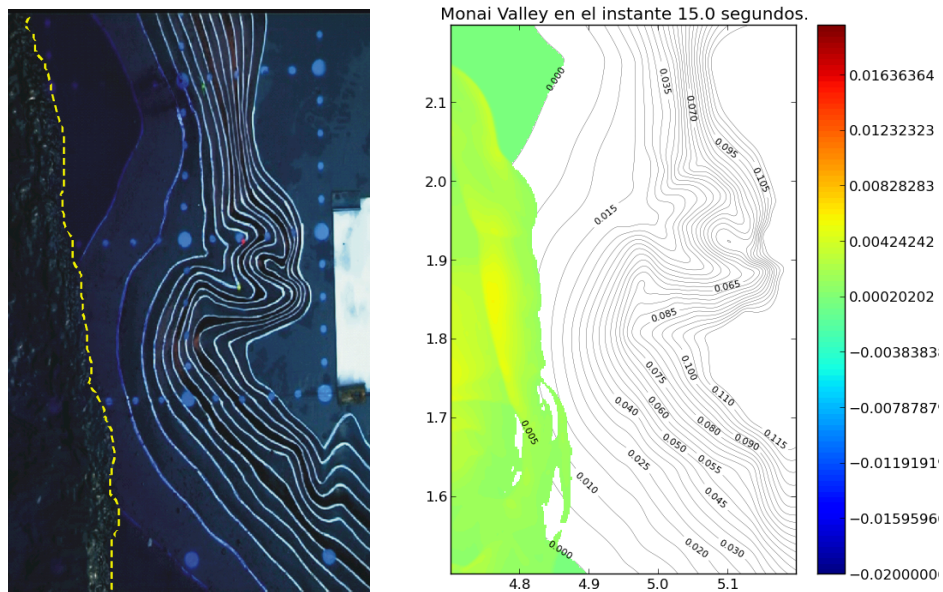


Figura 4.9: Extensión de la inundación: Tiempo 15 segundos

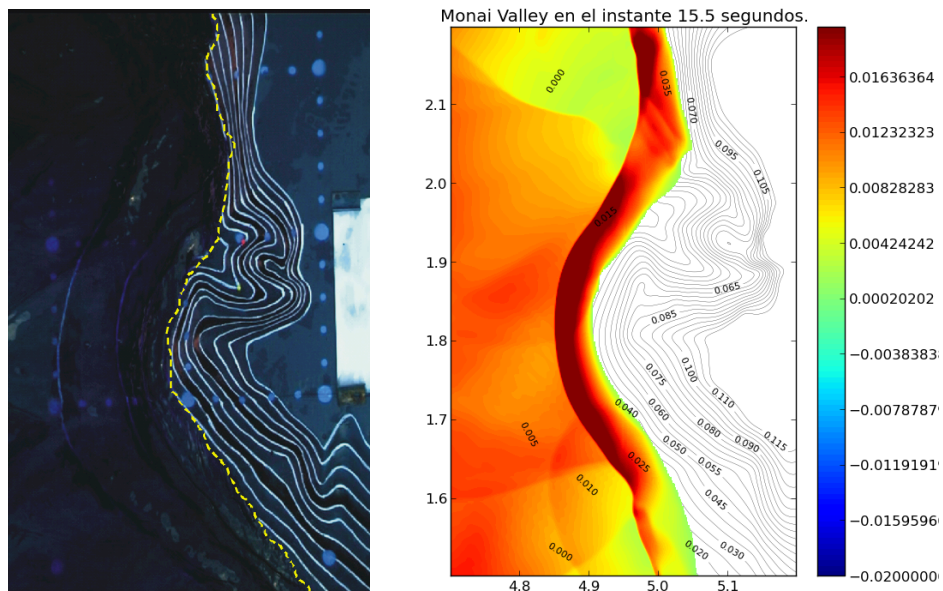


Figura 4.10: Extensión de la inundación: Tiempo 15.5 segundos

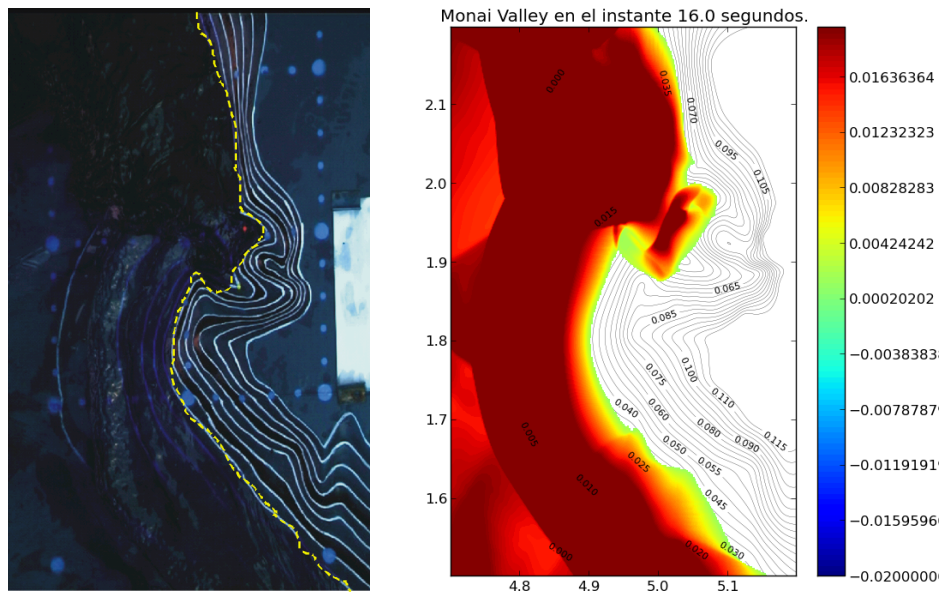


Figura 4.11: Extensión de la inundación: Tiempo 16 segundos

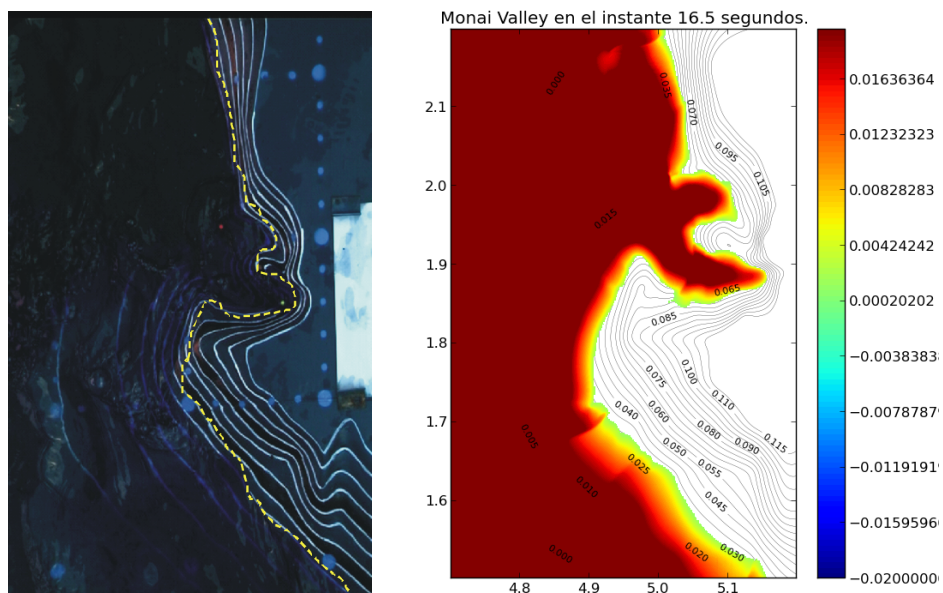


Figura 4.12: Extensión de la inundación: Tiempo 16.5 segundos

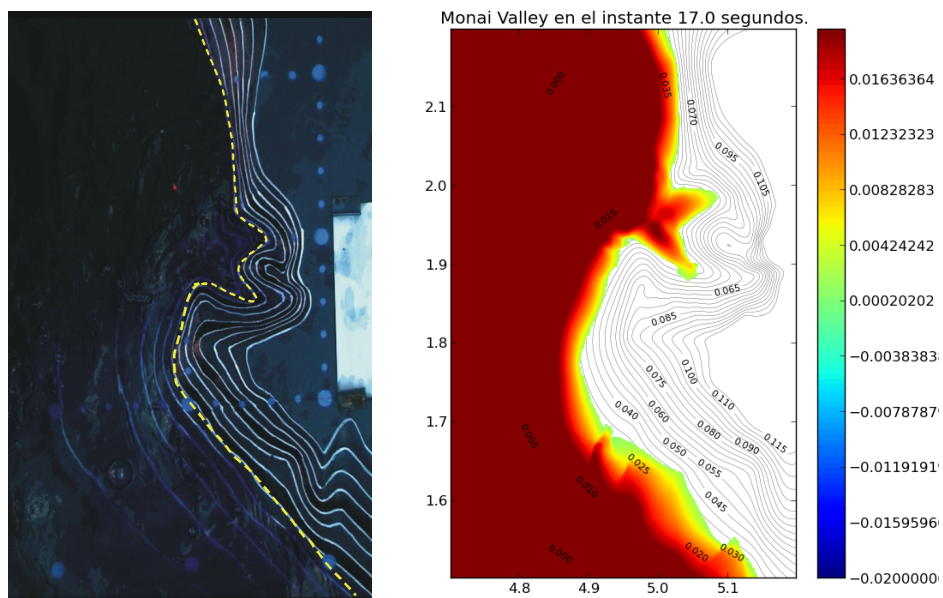


Figura 4.13: Extensión de la inundación: Tiempo 17 segundos

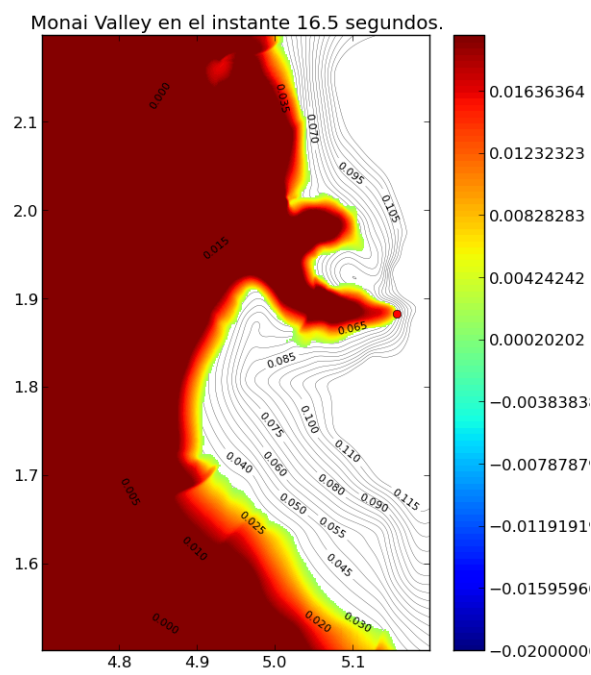


Figura 4.14: Punto de máximo runup:  $t=16.5$  segundos



Figura 4.15: Península de Aonae

### 4.3.2. Experimento del tsunami en la isla de Okushiri

Este problema es otro de los problemas reales descritos en el artículo [20] y propuestos como benchmark por el NTHMP en el 2011. Estudiamos de nuevo el tsunami de 1993 causado por el terremoto Hokkaido-Nansei-Oki, cuyo hipocentro estuvo localizado a 37 kilómetros de profundidad en las coordenadas  $139.32^{\circ}E$ ,  $42.76^{\circ}N$ , al sudoeste de la costa de Hokkaido, Japón. A diferencia del caso anterior, en este caso trabajaremos con datos topobatemétricos reales.

En este caso, el DCRC (Disaster Control Research Center), en Japón, construyó una deformación de la superficie libre, como condición inicial, que puede verse en la Figura 4.16, con 4.9 y 2.2 metros como máximas elevaciones, y -1.1 metros como valor mínimo.

#### 4.3.2.1. Comparación con datos reales

Trabajamos en el dominio  $[138.75, 140.52] \times [43.3, 41.5]$  en longitud, latitud, con una malla de resolución 8/9 de segundo, con  $7180 \times 7300 = 52414000$  volúmenes para todo el experimento, salvo para el cálculo de la inundación en la costa de Monai, para la que hemos necesitado una malla con una mayor resolución, por lo que trabajamos en el dominio  $[139.301, 139.429] \times [41.9002, 42.119]$  en longitud, latitud, con una malla de resolución 0.059 segundos, con  $7773 \times 13287 = 103279851$  volúmenes.

Para este problema de validación se proponen varios puntos a satisfacer:

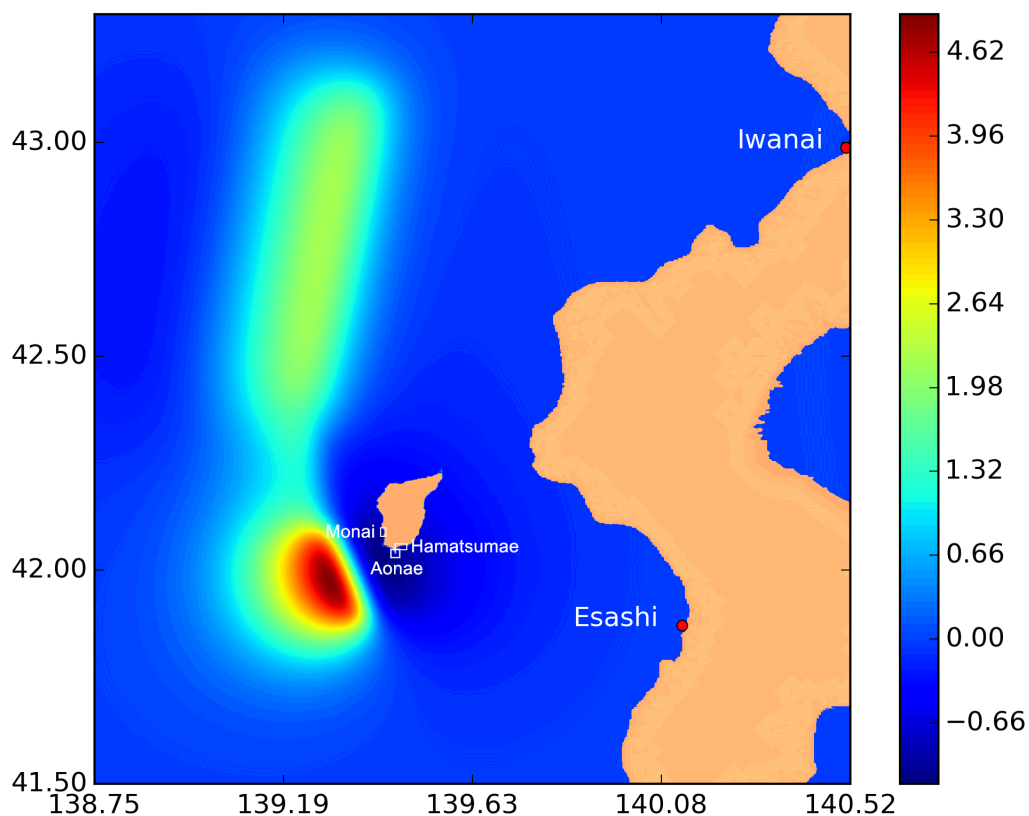


Figura 4.16: Condición Inicial

- La primera ola del experimento debe llegar a la península de Aonae (Figura 4.15), al sur de la isla de Okushiri, 5 minutos tras el terremoto, desde el oeste. Además, debería llegar otra ola desde el este, a esta misma península, en el minuto 10 aproximadamente.
- Comparación de la altura del agua observada y calculada en las localizaciones de los mareógrafos de Iwanai y Esashi, cuya localización puede verse en la Figura 4.16.
- Comparación con la distribución de los runup alrededor de la isla de Okushiri.
- Por último, es necesario aproximar el máximo runup de 31.7 metros en la costa de Monai.



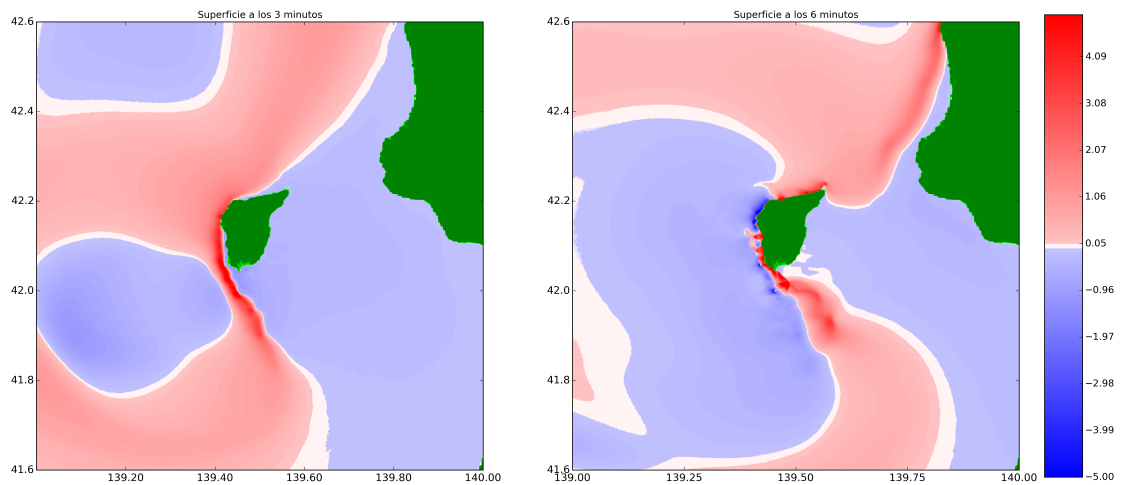


Figura 4.17: Minutos 3 y 6 de la simulación completa.

Las Figuras 4.17 y 4.18 muestran varias iteraciones de la simulación completa. En la Figura 4.17 se muestra una imagen ampliada de la isla de Okushiri junto con parte de la costa de Hokkaido, mientras que en la Figura 4.18 se muestra un zoom en la isla de Okushiri.

En la Figura 4.19 puede verse un zoom en la península de Aonae. Podemos observar cómo se satisface la primera de las condiciones, llegando la primera ola desde el oeste en aproximadamente  $t = 5$  minutos. También puede verse la llegada de la segunda ola, desde el este, aproximadamente en el minuto  $t = 10$ .

La Figura 4.20 muestra la comparación entre la altura del agua observada y la calculada, como se pide en el segundo punto, en los puntos de control de Iwanai y Esashi.

Las Figuras 4.21 y 4.22 muestran el nivel de inundación en dos situaciones de la costa de la isla de Okushiri, la primera de ellas en la península de Aonae, y la segunda, en una zona vecina al este de dicha península. La escala de color indica la máxima profundidad del agua calculada en cada punto de la malla. Los resultados presentan un buen acuerdo con los datos reales, como puede verse en la fotografía mostrada en la Figura 4.15.

Por último, la Figura 4.23 muestra el mapa de inundación en el valle al norte de Monai, en la costa oeste de Okushiri. El punto muestra el máximo runup alcanzado en este área, siendo la altura de 31.753 (Figura 4.23), que aproxima bastante bien los 31.7 metros pedidos en la última de las condiciones y que también se aproximó en el experimento de laboratorio presentado en el apartado 4.3.1.

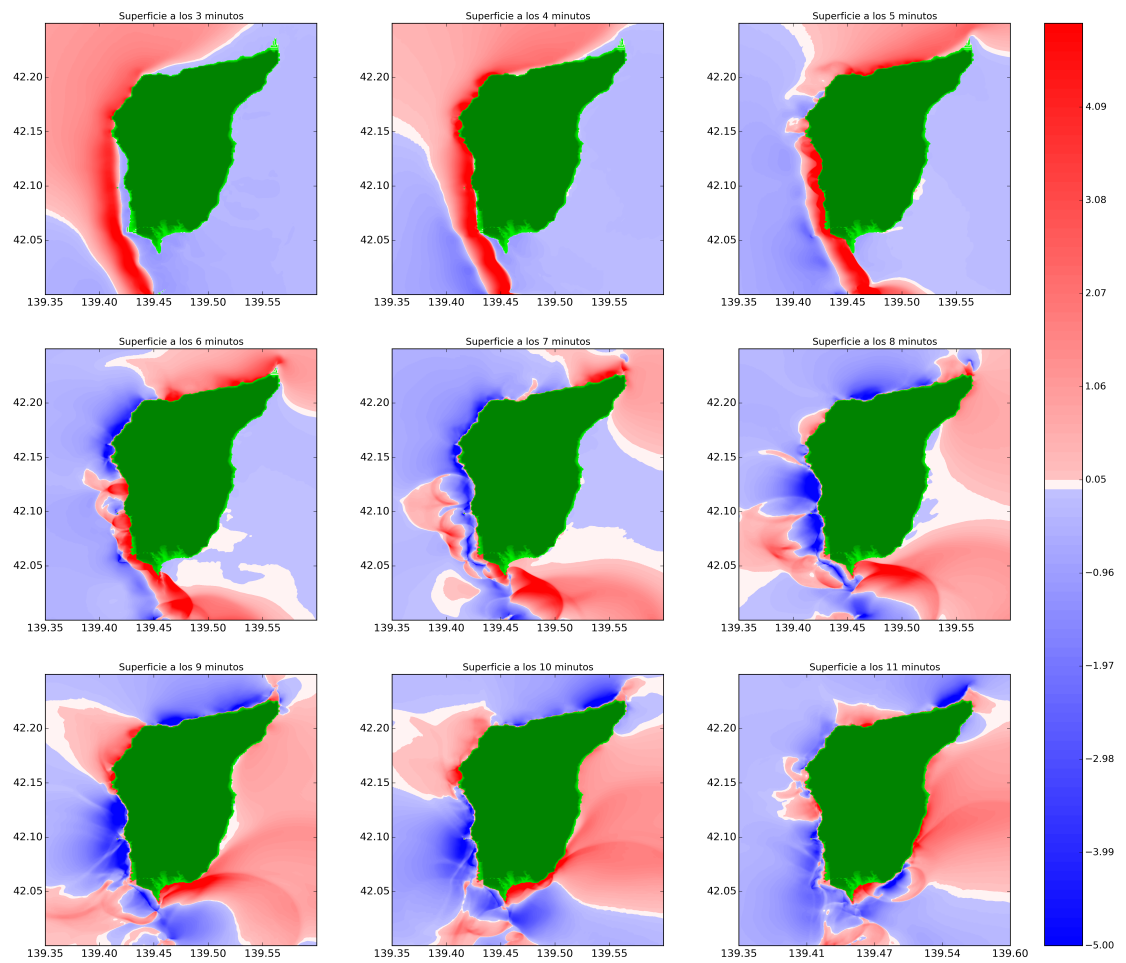


Figura 4.18: Zoom en la isla de Okushiri.

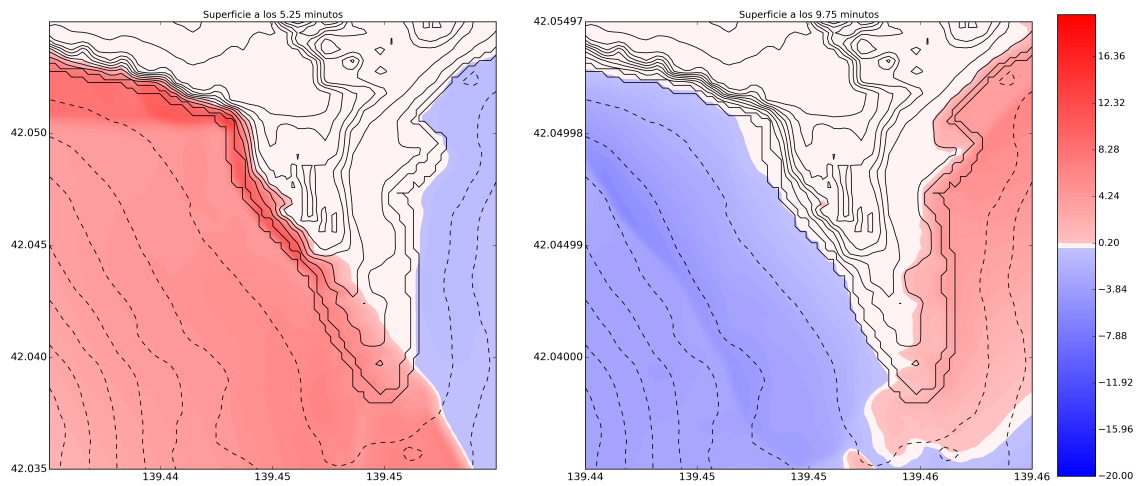


Figura 4.19: Llegadas de las olas a la península de Aonae en los instantes de tiempo  $t = 5$  min y  $t = 10$  min.

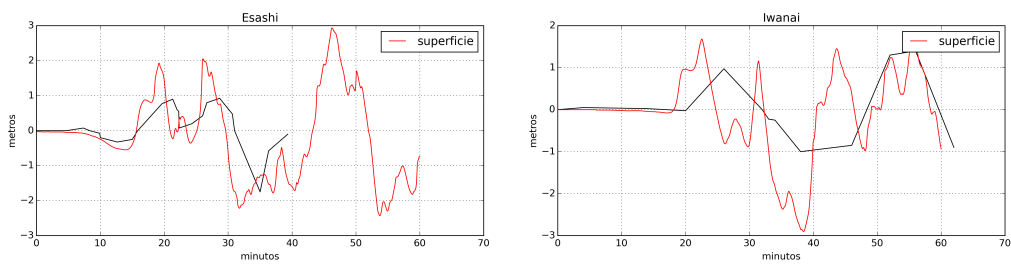


Figura 4.20: Series temporales en Iwanai y Esashi

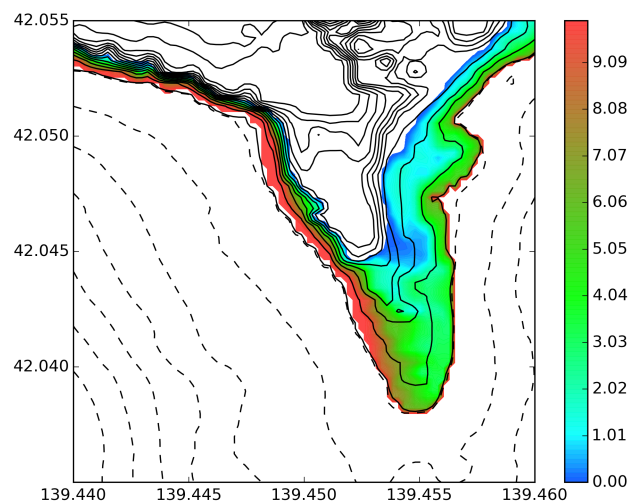


Figura 4.21: Mapa de inundación de la península de Aonae para  $t \leq 12.59$  minutos. La escala de color muestra la profundidad máxima del fluido.

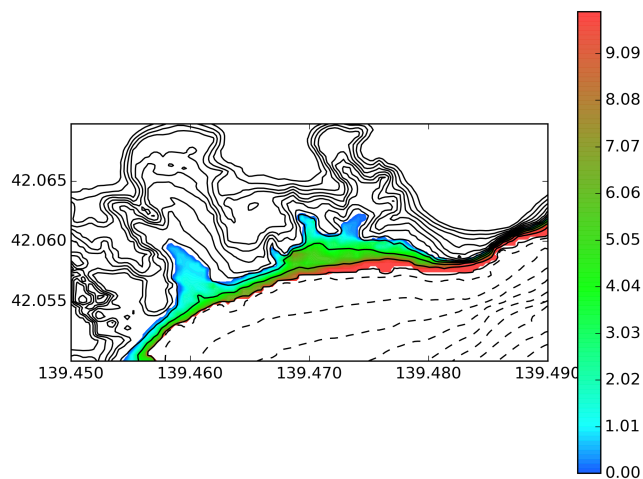


Figura 4.22: Mapa de inundación en la costa de Hamatsumae, en una zona vecina al este de la península de Aonae, para  $t \leq 14$  minutos. La escala de color muestra la profundidad máxima del fluido.

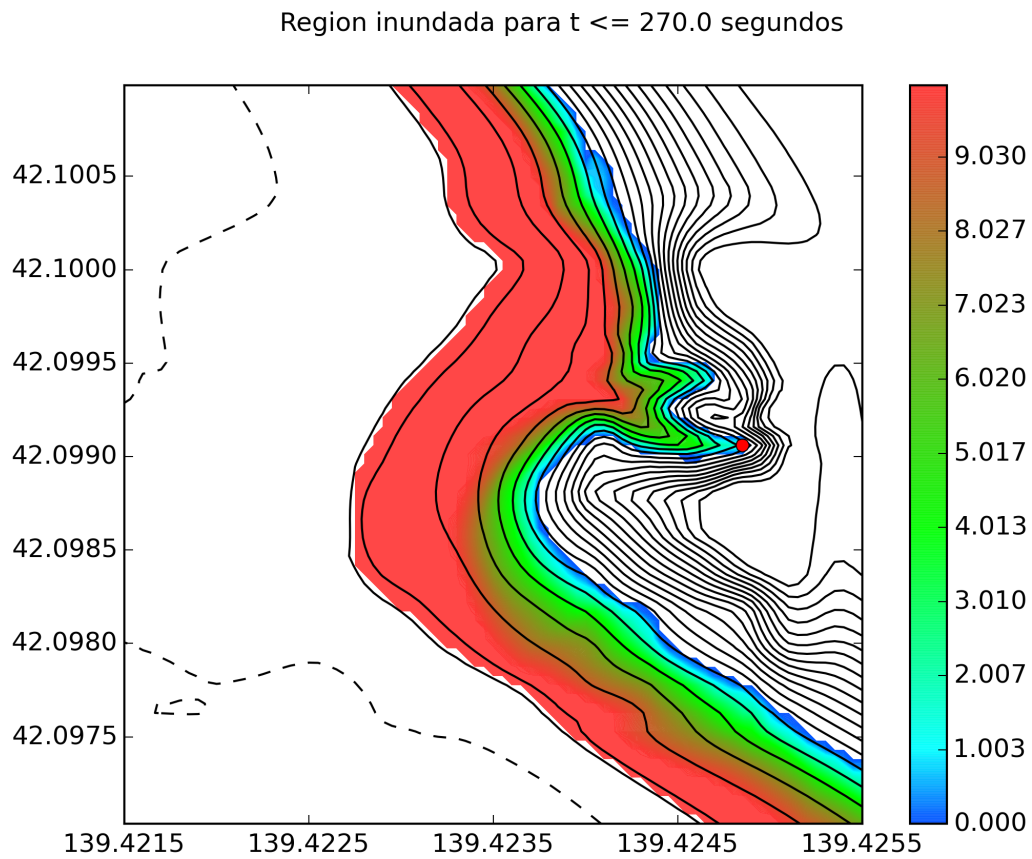


Figura 4.23: Mapa de inundación en el valle al norte de Monai. La escala de color muestra la profundidad máxima del fluido.

### 4.3.3. Experimento del tsunami de Tohoku, 2011

El 11 de marzo de 2011, un terremoto en Honshu, Japón (38.297 N, 142.373 E), de magnitud 9.0, generó un tsunami que pudo ser observado en todo el Pacífico, y localmente produjo una tremenda devastación. La Agencia de Policía Nacional japonesa confirmó 15845 muertes, 3380 personas desaparecidas y 5893 heridos a lo largo de 18 prefecturas de Japón. El tsunami también causó un muerto en Yakarta, Indonesia, y un muerto en Klamath River, el California. Este ha sido el cuarto mayor terremoto en el mundo y el mayor en Japón desde que aparecieron los primeros aparatos de medición en 1900.

Dedicaremos esta sección a la aplicación del esquema numérico anteriormente descrito para la simulación de dicho tsunami.

Hemos usado para esto una malla global de Océano Pacífico de 4 arcominutos de resolución, de lo que resultan 7430699 volúmenes ( $2581 \times 2879$ ), cedida por el NCTR-NOAA. La deformación de la superficie inicial ha sido proporcionada por la NOAA y procede de la inversión de los datos de este evento recogidos por la red de boyas DART. Las Figuras 4.24 y 4.25 muestran la deformación inicial de la superficie del agua.

Para los resultados numéricos usamos la malla original, y dos nuevas, resultantes de refinar la primera, a 2 arcominutos y 1 arcominuto, respectivamente. Estas mallas refinadas tienen 29722796 ( $5162 \times 5758$ ) y 118891184 ( $10324 \times 11516$ ) volúmenes, respectivamente.

Debido al elevado número de celdas y, en consecuencia, al elevado uso de memoria requerido por este experimento, se ha hecho necesario el uso de este modelo en la versión multi-GPU, desarrollada en [4].

#### 4.3.3.1. Comparación con datos reales

Con el fin de estudiar la validez del modelo estudiaremos aquí la comparación con datos reales de varias boyas, tanto en el Pacífico (campo lejano), las boyas DART (Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunami), que forman parte del sistema de alerta de tsunamis del Pacífico operado por la NOAA, como cerca de la costa de Japón (campo cercano), boyas pertenecientes a la Nationwide Ocean Wave information network for Ports and HARbourS (NOWPHAS). Su localización en el plano viene dada en la Tabla 4.1, y puede verse su situación en la Figura 4.26.

Los resultados del modelo pueden verse en las gráficas de series temporales siguientes, donde se comparan los datos obtenidos para la malla con resolución de 4 arcominutos, en verde, con la malla con resolución de 2 arcominutos, en azul, y la de 1 arcominuto, en rojo, con los datos de observaciones reales de 0 a 6 horas después del terremoto.

Presentamos también las series temporales de cinco boyas cercanas a la costa, cuya situación puede verse en la Figura 4.33.

A pesar de las limitaciones del modelo numérico empleado, las comparaciones de la amplitud de las ondas en las series temporales en el campo lejano (boyas DART) arrojan resultados satisfactorios: tanto los tiempos de llegada como las amplitudes máximas de las primeras ondas del tsunami están calculadas correctamente. Debemos reseñar que, en

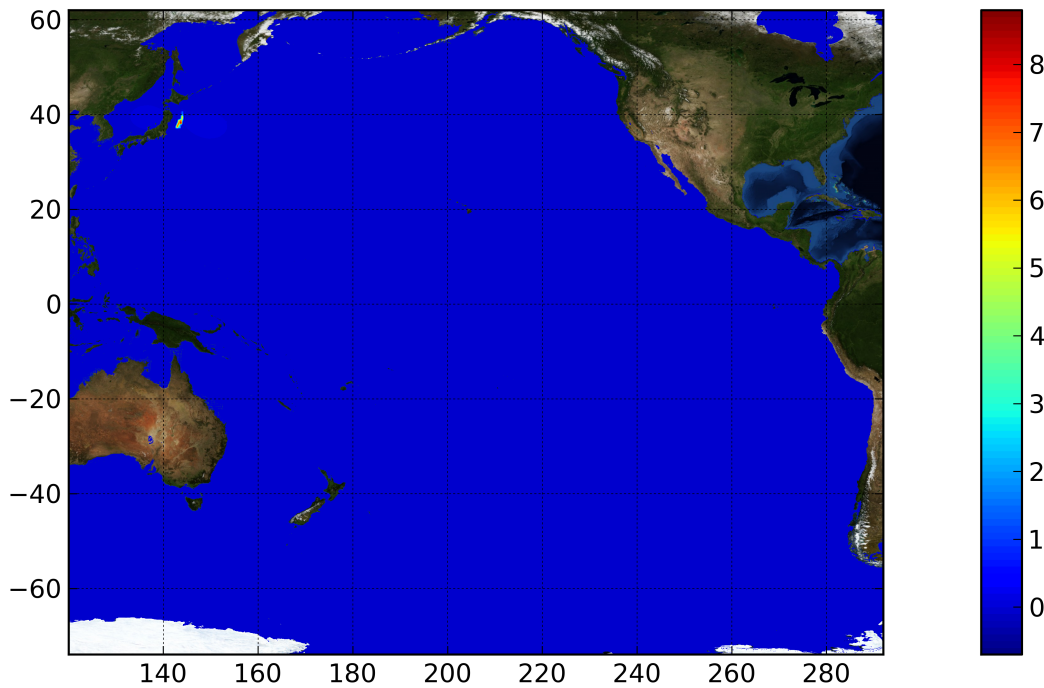


Figura 4.24: Deformación inicial de la superficie del agua (m)

general, a medida que se aumenta la resolución de la malla, los resultados obtenidos son más precisos.

Los resultados obtenidos en el campo cercano (boyas NOWPHAS) son en general satisfactorios. Sin embargo, son en estas boyas donde el disponer de unos datos batimétricos más finos resulta más importante. En este sentido, las comparaciones en las boyas 801G, 803G y 202W son mejores cuanto más se refinan las mallas. Por otra parte, en las boyas 219W y 205W, situadas en las bocanas de puertos, se hace determinante disponer de mayor resolución en la batimetría. De hecho, en estas boyas la serie se detiene al llegar la primera ola puesto que fueron destruidas.

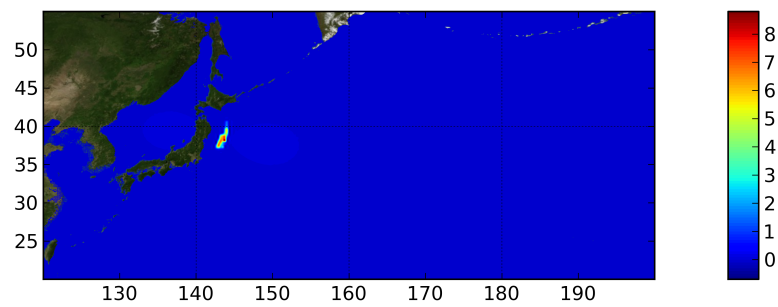


Figura 4.25: Deformación inicial de la superficie del agua (m)

Tabla 4.1: Localización de las boyas DART

Boya	longitud	latitud
DART21418	152.117E	30.515N
DART21419	178.263E	48.948N
DART21413	171.847E	50.183N
DART21415	148.769E	38.688N
DART21414	155.736E	44.455N
DART52402	154.039E	11.869N



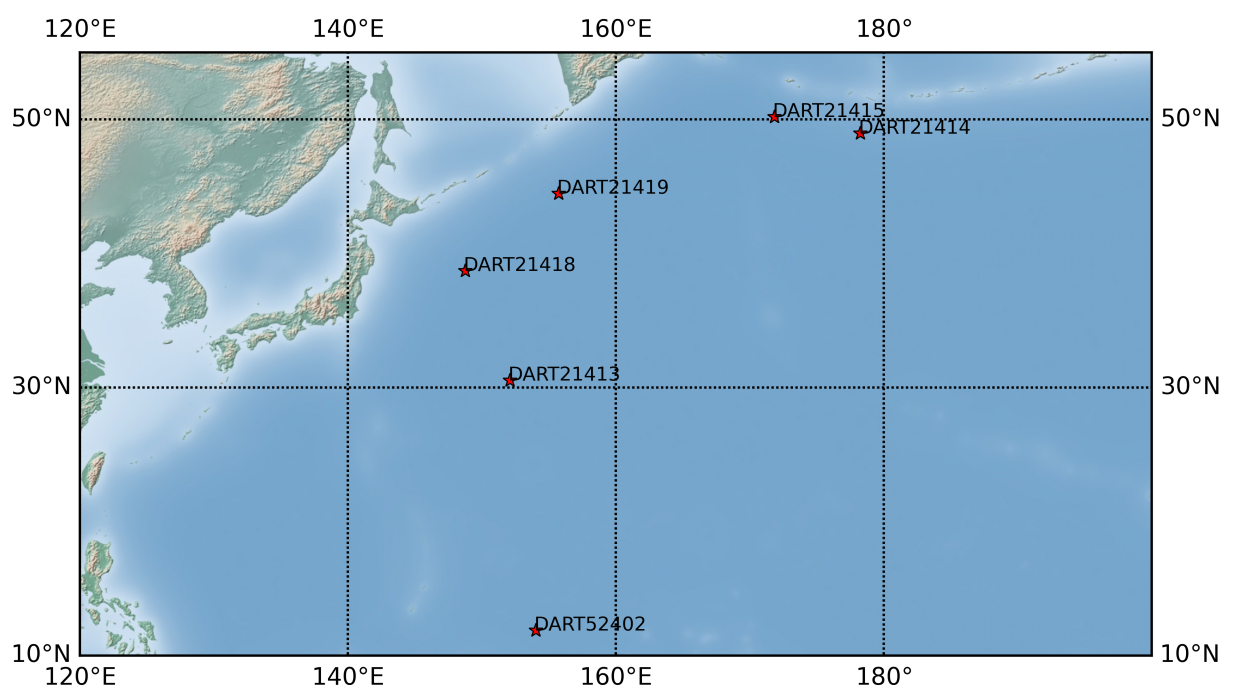


Figura 4.26: Localización de las boyasDART

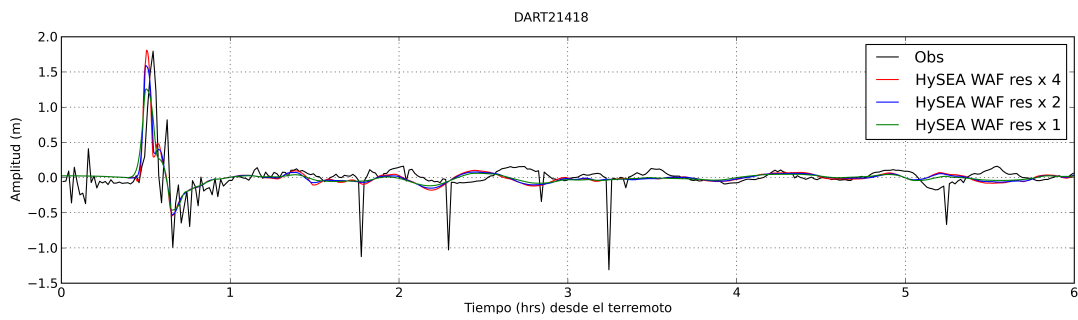


Figura 4.27: Comparación de los resultados: DART21418

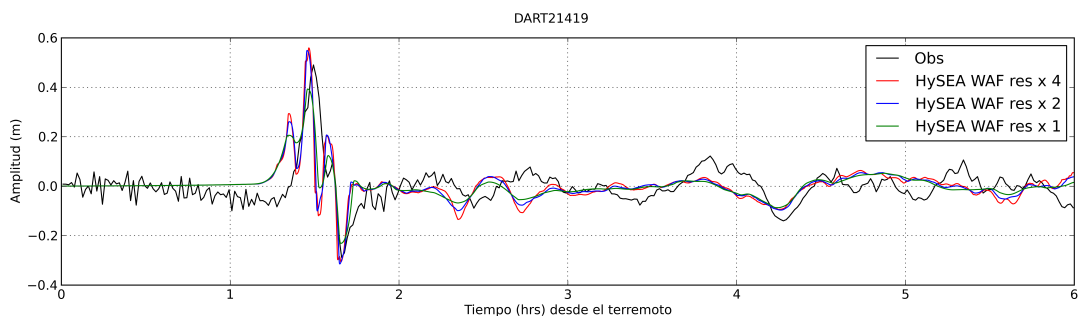


Figura 4.28: Comparación de los resultados: boya DART21419

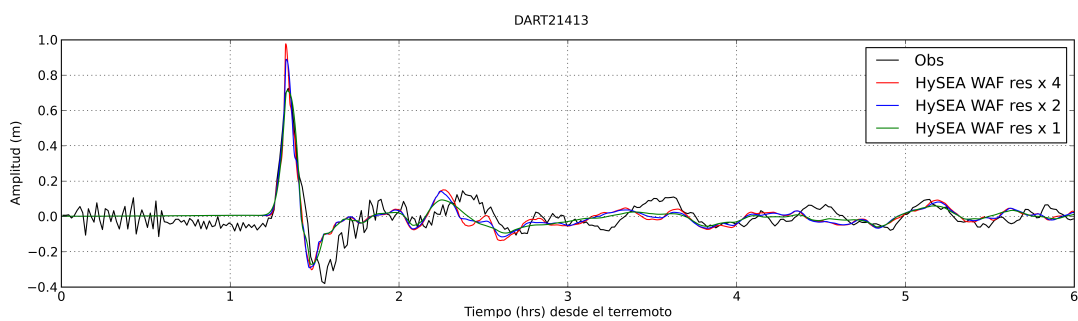


Figura 4.29: Comparación de los resultados: boya DART21413

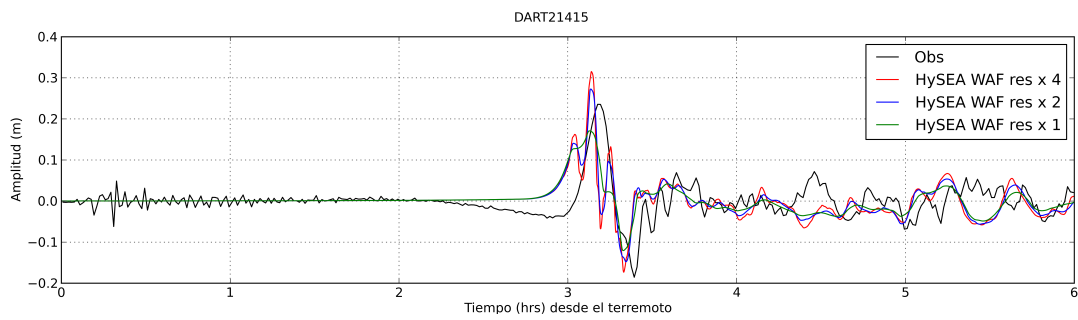


Figura 4.30: Comparación de los resultados: boya DART21415

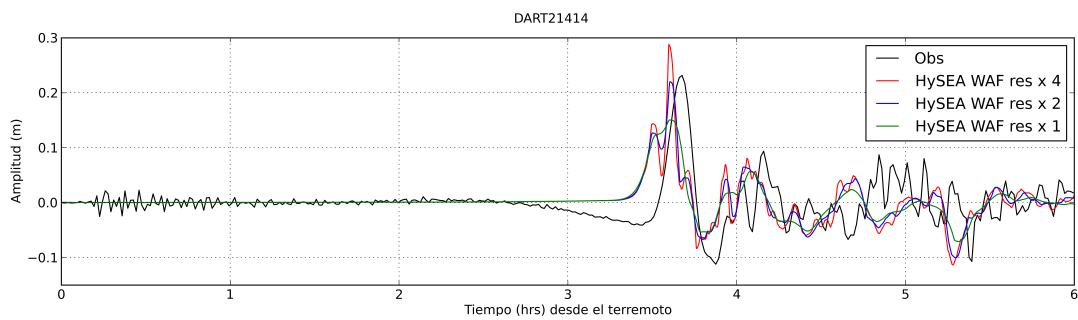


Figura 4.31: Comparación de los resultados: boya DART21414

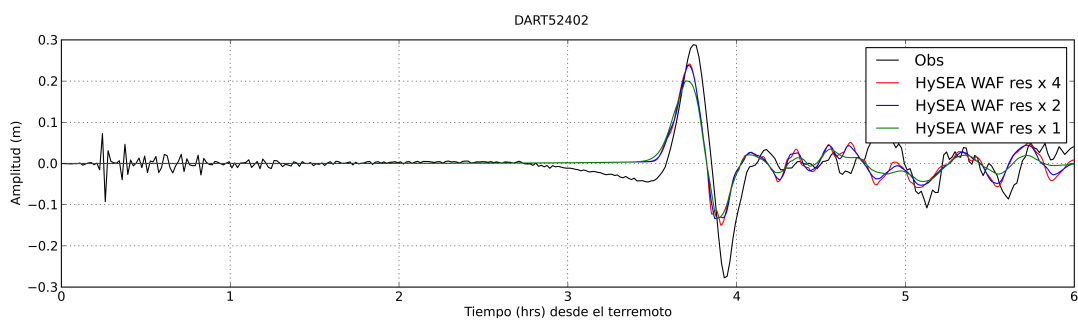


Figura 4.32: Comparación de los resultados: boya DART52402

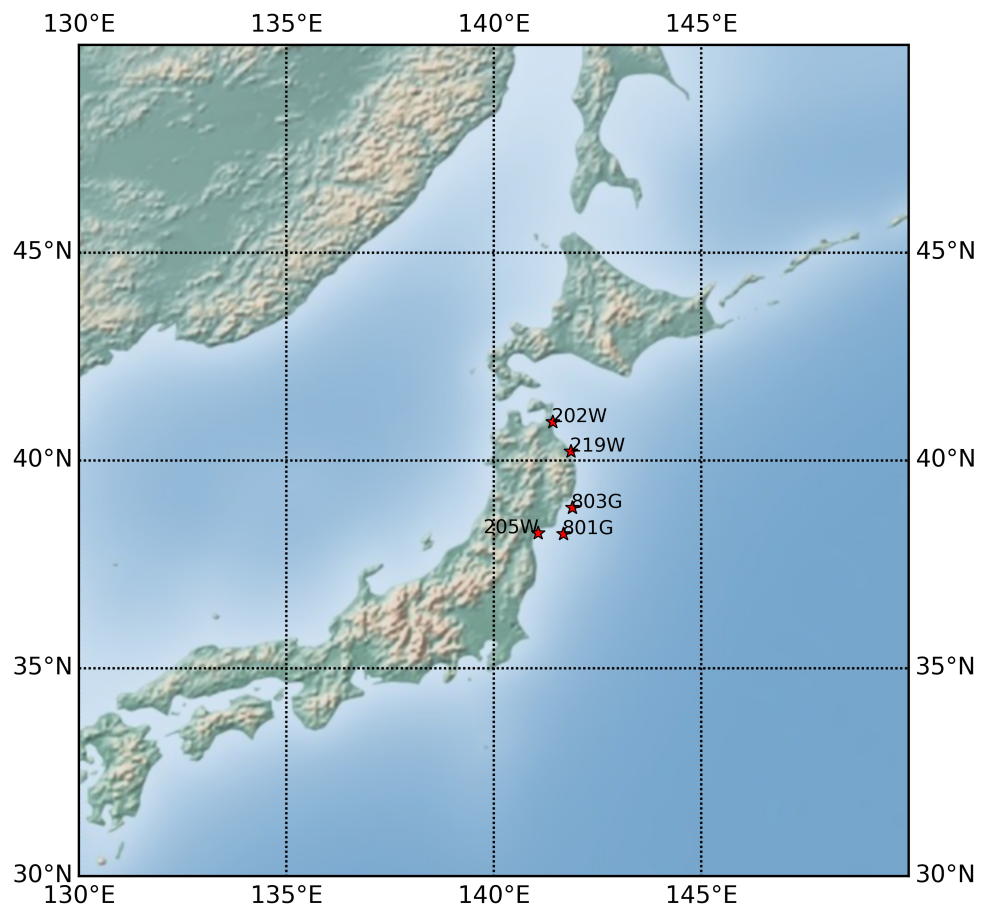


Figura 4.33: Localización de las boyas NOWPHAS

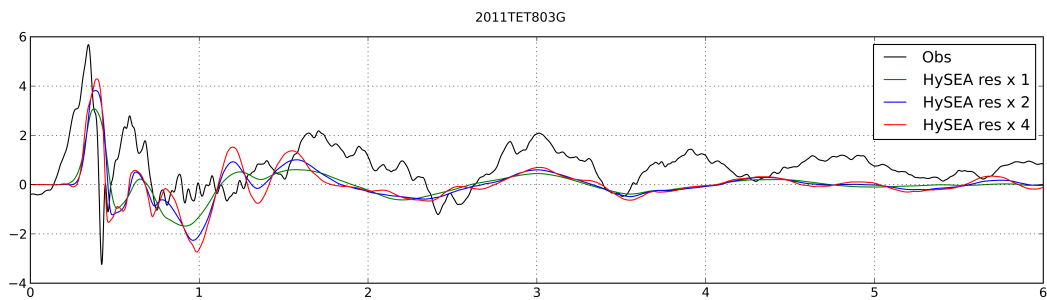


Figura 4.34: Comparación de los resultados: boya 803G

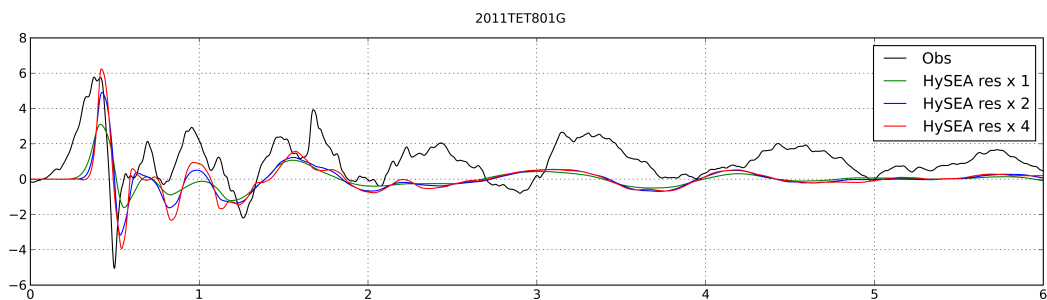


Figura 4.35: Comparación de los resultados: boya 801G

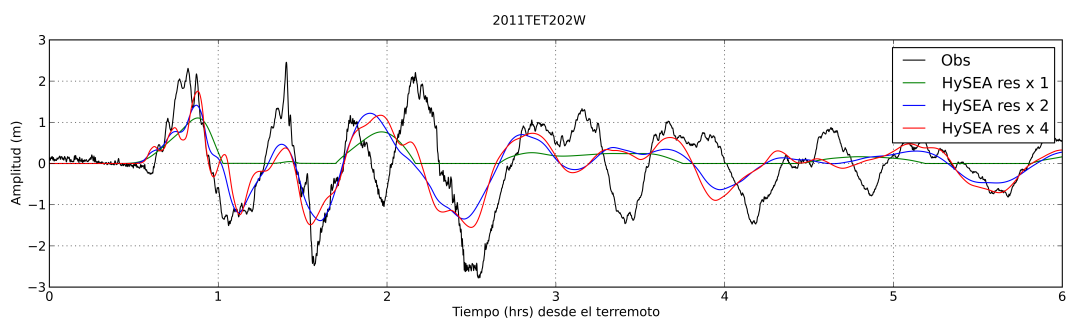


Figura 4.36: Comparación de los resultados: boya 202W

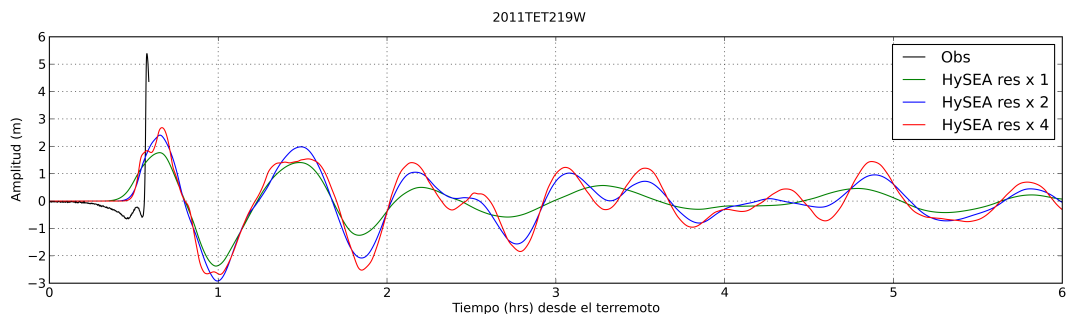


Figura 4.37: Comparación de los resultados: boya 219W

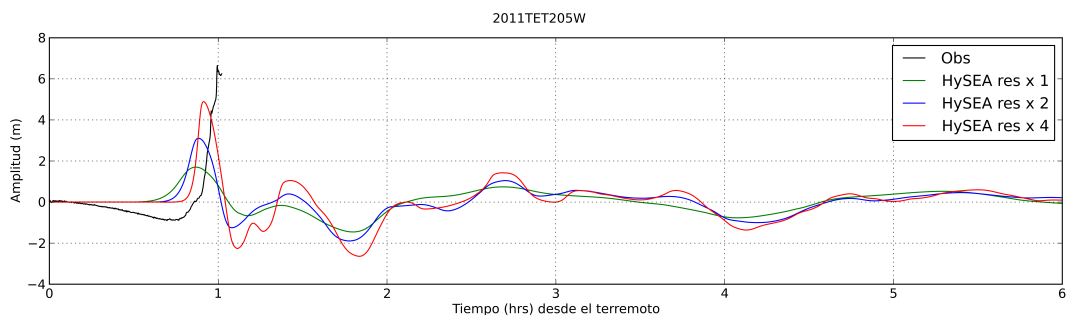


Figura 4.38: Comparación de los resultados: boya 205W

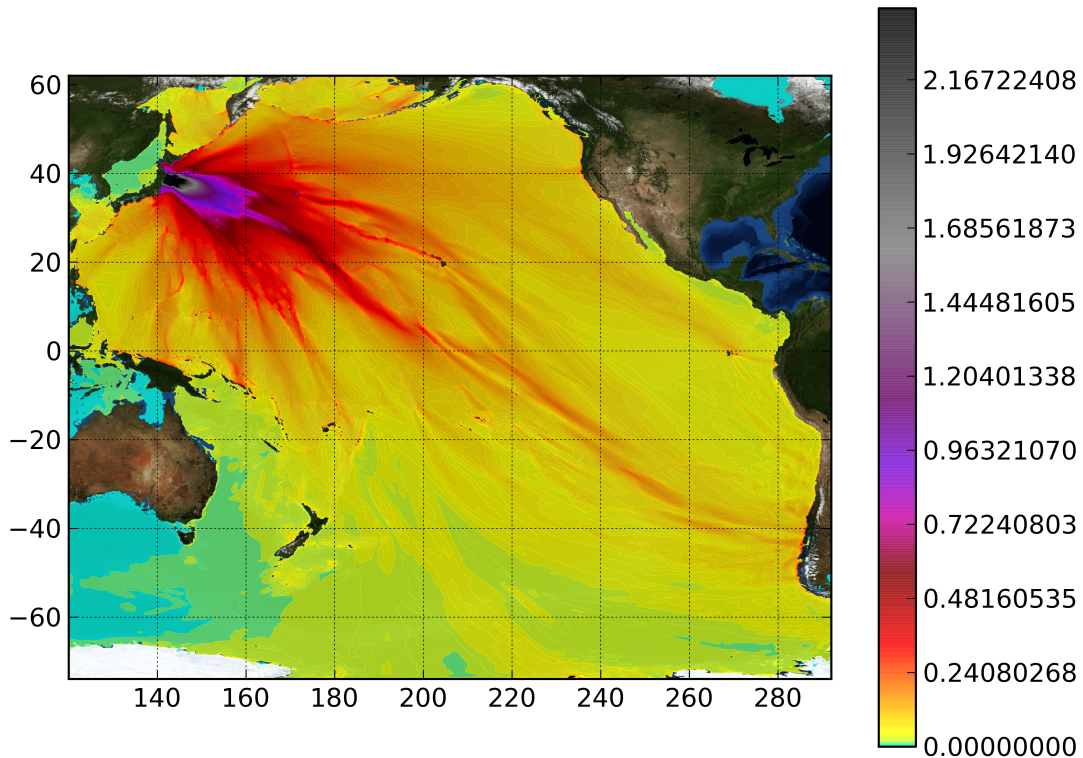


Figura 4.39: Altura máxima resolución 4 arcominutos (7430699 volúmenes)

#### 4.3.3.2. Amplitud máxima

Las Figuras 4.39, 4.40 y 4.41 muestran las amplitudes máximas de la altura del agua producidas por el tsunami mientras viaja a través del Océano Pacífico, en una simulación de 24 horas. Como es de esperar la altura máxima de la onda es mayor cerca del epicentro del terremoto, cerca de Japón. La onda decrece en altura conforme viaja a través del Océano Pacífico aunque aumenta en amplitud cuando se acerca a zonas costeras. En general, como la energía de las ondas propagadas decrece conforme se alejan del epicentro, la amplitud máxima registrada en las 24 primeras horas de simulación (ver Figuras 4.39, 4.40 y 4.41) va decreciendo. En todo caso, se puede observar cómo dicha amplitud máxima siempre crece a la llegada a zonas más someras. En este sentido, en la Figura 4.42 se muestran las mismas amplitudes máximas que en la Figura 4.41 pero donde se puede apreciar la batimetría del Océano Pacífico.

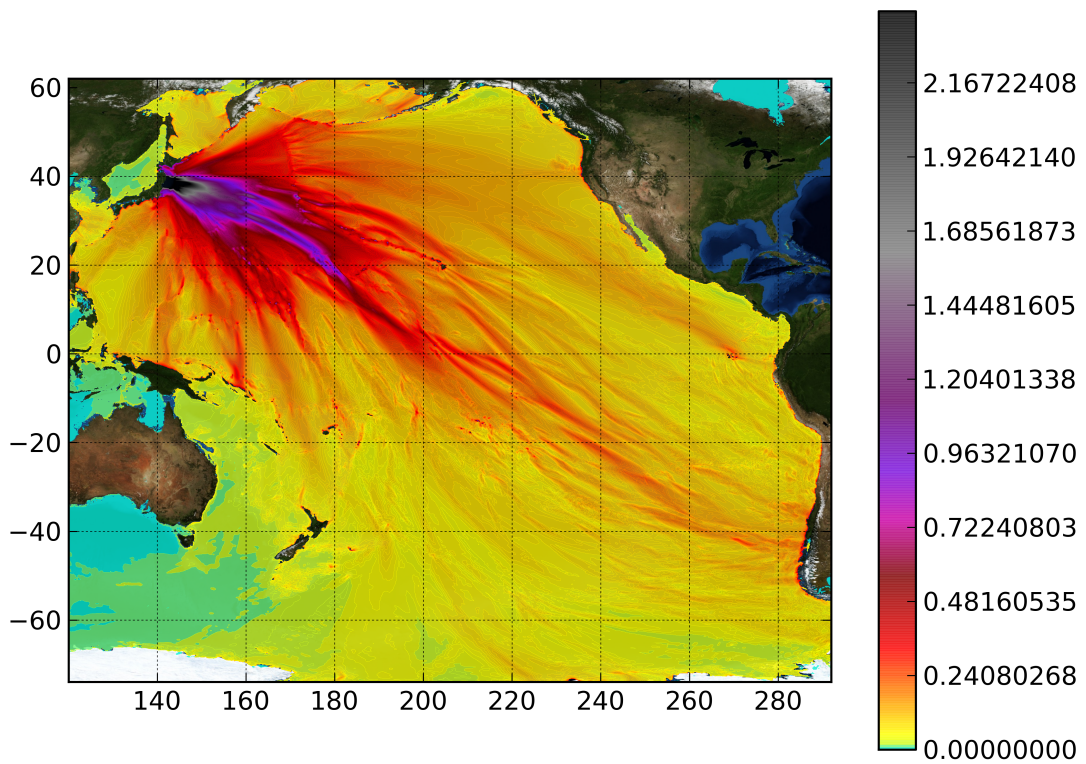


Figura 4.40: Altura máxima resolución 2 arcominutos (29722796 volúmenes)



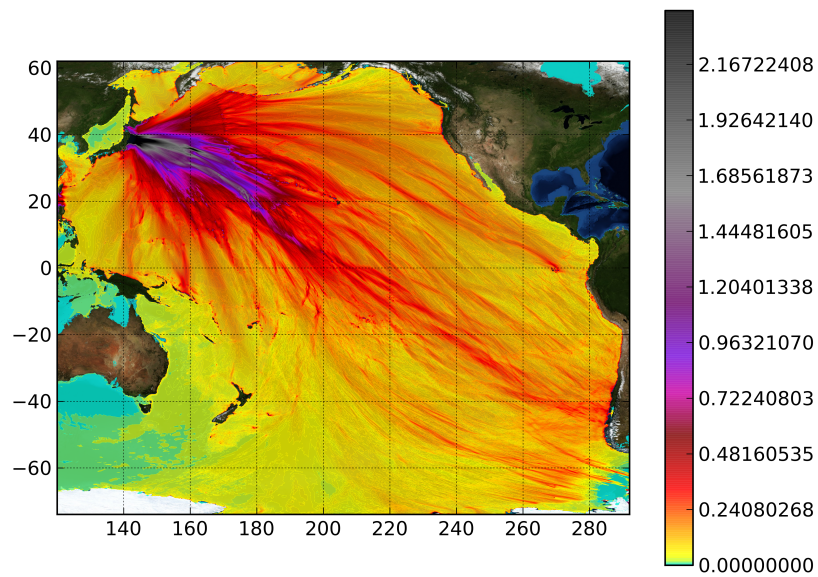


Figura 4.41: Altura máxima resolución 1 arco minuto (118891184 volúmenes)

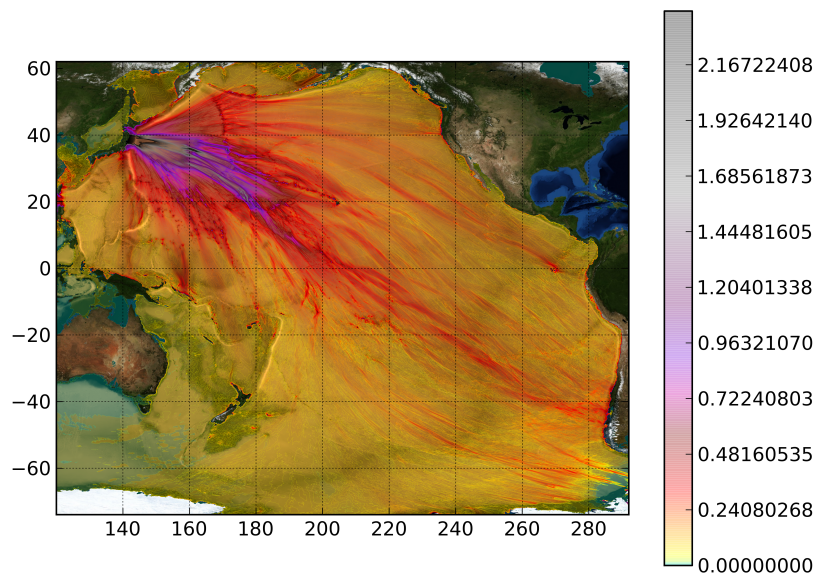


Figura 4.42: Altura máxima resolución 1 arco minuto (118891184 volúmenes) (con la capa de fluido transparente)

Tabla 4.2: Tiempos de cálculo

	4 arcominutos	#MRTR	2 arcominutos	#MRTR	1 arcominuto	#MRTR
1 GPU	5 min 58 seg	60.3	31 min 19 seg	11.49		
2 GPU <sub>s</sub>	3 min 23 seg	106.17	17 min 10 seg	20.97	2 h 6 min 6 seg	2.85
4 GPU <sub>s</sub>	1 min 47 seg	201.74	8 min 36 seg	41.81	1 h 5 min 7 seg	5.53
8 GPU <sub>s</sub>	59 seg	362.59	4 min 25 seg	81.53	33 min 34 seg	10.72
10 GPU <sub>s</sub>	48 seg	451.59	3 min 34 seg	100.76	27 min 24 seg	13.14

#### 4.3.3.3. Tiempos de cálculo

Aunque no es el objetivo de este trabajo, puesto que hemos usado aquí la implementación multi-GPU del esquema numérico propuesto, nos ha parecido interesante el incluir algunos datos sobre la escalabilidad (speed-up) del algoritmo presentado cuando se emplean varias GPU<sub>s</sub>. En este sentido, en la Tabla 4.2 muestra los tiempos de ejecución en segundos para todas las resoluciones de malla y diferente número de tarjetas empleadas para el cálculo. Como puede verse, los tiempos de ejecución parecen crecer linealmente con el número de volúmenes de la malla, como es de esperar, a la vez que decrece casi linealmente a mayor número de GPU<sub>s</sub>. Las Figuras 4.43, 4.44 muestran los tiempos de ejecución y el speed-up obtenido para todas las ejecuciones con respecto a la ejecución con una tarjeta gráfica, salvo para la resolución de un arcominuto, en la que hemos comparado con respecto a la ejecución con dos tarjetas, dado que la magnitud de la malla hace imposible trabajar con una sola.

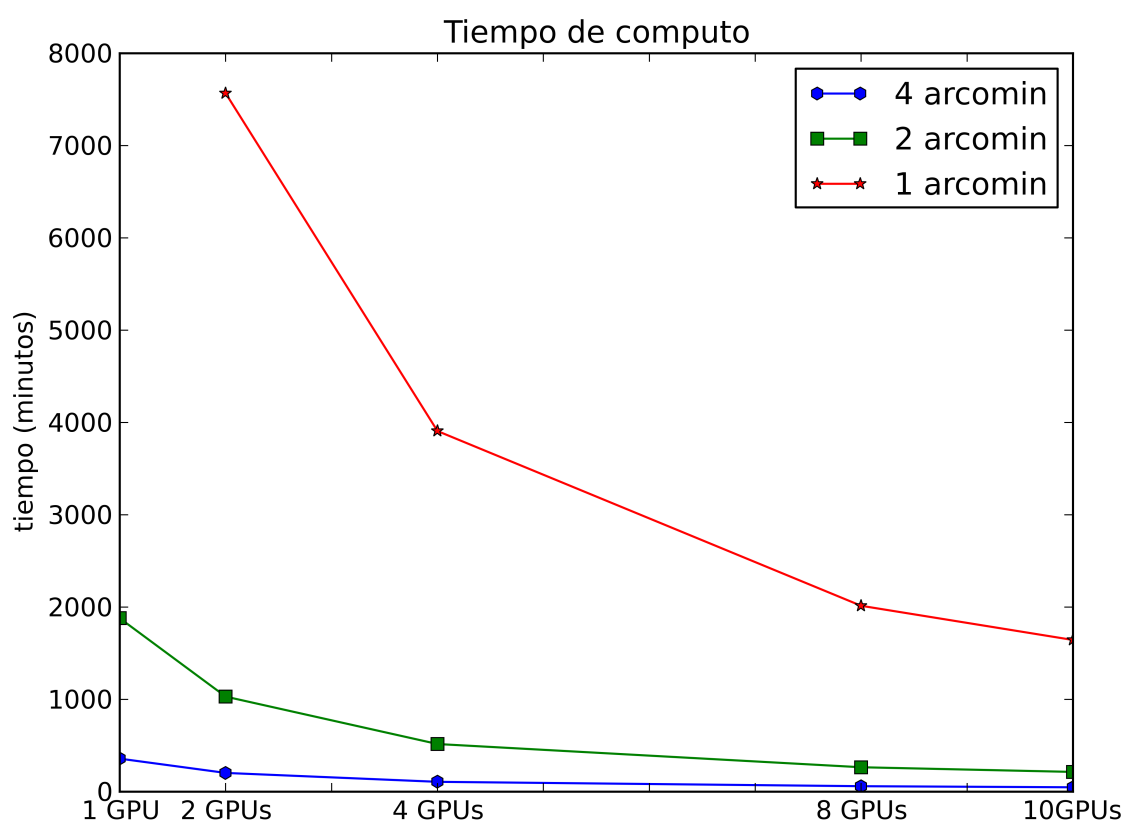


Figura 4.43: Tiempo de cómputo

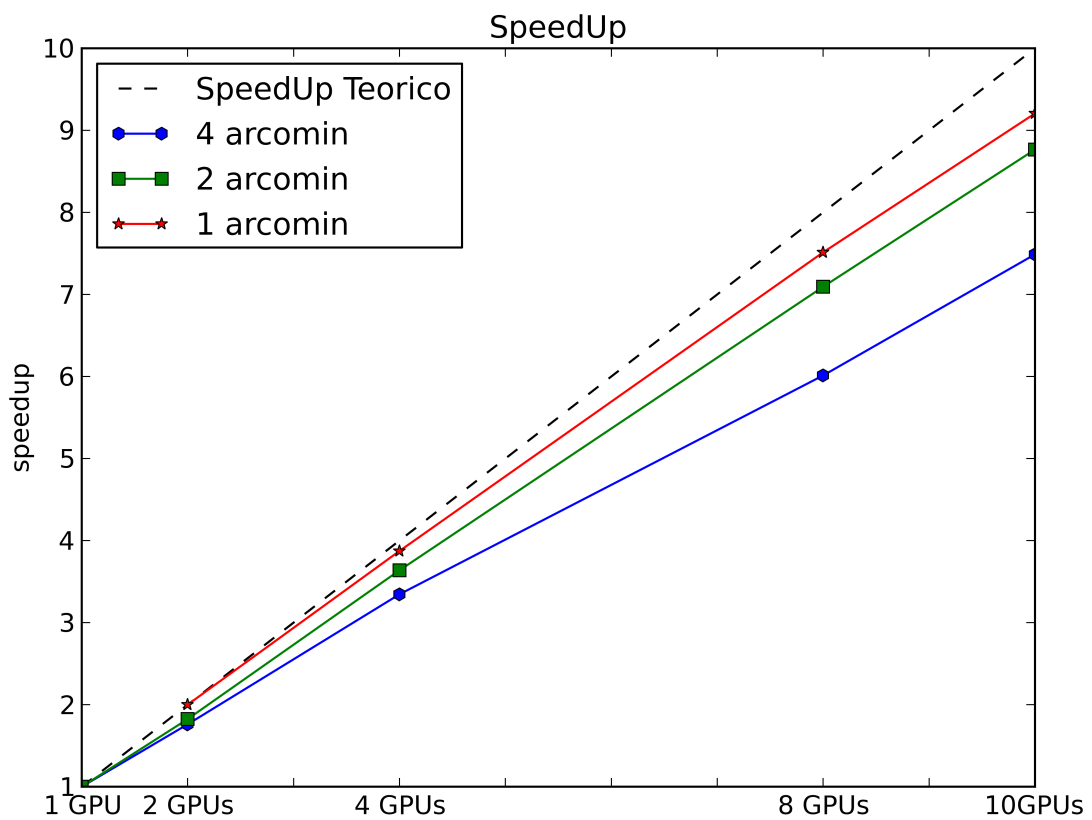


Figura 4.44: Speed-Up

# Conclusiones

A lo largo de esta memoria hemos definido esquemas numéricos de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no conservativos de una y dos dimensiones de orden uno, así como su extensión mediante la definición de operadores de reconstrucción a orden 2 y orden 3. También se han definido esquemas numéricos basados en limitadores de flujo que son de segundo orden en espacio y tiempo para problemas unidimensionales y se han extendido a problemas bidimensionales mediante el método de líneas. Estos esquemas se han particularizado para el sistema de aguas someras de una capa tanto en su formulación usual, como en coordenadas esféricas (longitud/latitud), con el fin de poder aplicarlos a problemas de simulación de propagación de tsunamis. Todos los esquemas considerados son exactamente bien equilibrados para el agua en reposo.

Además, hemos abordado la reducción de los tiempos de cálculo de estos problemas mediante la implementación en las modernas tarjetas gráficas NVIDIA basados en modelos de programación CUDA.

Las contribuciones originales recopiladas en esta memoria son las siguiente:

- Definición de un esquema de limitadores de flujo que combina el método IFCP con el método de Lax-Wendroff.
- Definición de un operador de reconstrucción compacto de tercer orden para dominios bidimensionales de tipo WENO que combina paraboloides y planos.
- Diseño de un esquema numérico de volúmenes finitos para la aproximación del sistema de aguas someras monocapa en coordenadas esféricas (longitud/latitud).
- Se han diseñado implementaciones eficientes en CUDA que permiten la simulación de tsunamis en tiempos muy inferiores al tiempo real.

Además del trabajo descrito en esta memoria, también se han realizado numerosos scripts en *Python* para el preproceso y postproceso de los datos, creación de los mallados a partir de los datos topobatimétricos reales, extracción de series temporales y mapas de inundación, tiempos de llegada, etc.

## Líneas futuras

A continuación proponemos varias líneas de trabajo que se podrían abordar como continuación del trabajo expuesto en esta memoria:

- Contrucción de esquemas de limitadores de flujo para problemas bidimensionales que sean de segundo orden.
- Diseño de esquemas camino-conservativos para el sistema de aguas someras en coordenadas esféricas de primer orden y su extensión a alto orden.
- Diseño de algoritmos de adaptación de mallas (AMR) que permitan seguir la evolución de las ondas generadas por un tsunami.
- Desarrollo de modelos que incorporen efectos dispersivos y/o no-hidrostáticos con el fin de mejorar las previsiones de llegada de un tsuanmi a costa, así como la amplitud de las ondas.

## Publicaciones

El trabajo realizado durante el desarrollo de esta memoria ha dado lugar a varias publicaciones, que pasamos a citar a continuación:

- Gallardo J, Ortega S, de la Asunción M, Mantas JM.  
Two-dimensional compact third-order polynomial reconstructions. Solving nonconservative hyperbolic systems using GPUs.  
Journal of Scientific Computing. 2011; 1-23.
- González-Vida JM, Macías J, Castro Díaz MJ, Sánchez Linares C, de la Asunción M, Ortega Acosta S, Arcas D.  
The Lituya Bay landslide-generated mega-tsunami. Numerical simulation and sensitivity analysis.  
Enviado a Journal of Geophysical Research.
- de la Asunción M, Castro Díaz MJ, Fernández-Nieto ED, Mantas JM, Ortega Acosta S, González-Vida JM.  
Efficient GPU implementation of a two waves TVD-WAF method for the two-dimensional one layer shallow water system on structured meshes.  
Computers & Fluids. 2013; 80: 441-452.
- Castro Díaz MJ, Ortega Acosta S, de la Asunción M, Mantas JM, Gallardo JM.  
GPU computing for shallow water flow simulation based on finite volume schemes.  
Comptes Rendus Mécanique. 2011;339: 165-184.

- Castro Díaz MJ, de la Asunción M, Mantas JM, Ortega Acosta S.  
On the benefits of using GPUs to simulate shallow flows with finite volume schemes.  
Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. 2010;50: 27-44
- Macías J, Mercado A, González-Vida JM, Ortega S, Castro MJ.  
Numerical simulation of LANTEX 2013 tsunami scenario with the HySEA model.  
Impact assesment on Puerto Rico coasts.  
Enviado a Pure and Applied Geophysics.

En la actualidad se están redactando dos trabajo donde se recogerá el diseño del esquema numérico de limitadores de flujo para el sistema de aguas someras en coordenadas esféricas y su aplicación a la simulación de tsunamis, y otro donde se describe el esquema de limitadores de flujo basado en los esquemas IFCP y WAF con la aplicación a la simulación de tusnamis producidos por avalanchas.









# Bibliografía

- [1] Alouges F, Merlet B. Approximate shock curves for non-conservative hyperbolic systems in one space dimension. *J. Hyperbolic Differential Equations*. 2004;1(04):769-788.
- [2] de la Asunción M, Castro MJ, Fernández-Nieto ED, Mantas JM, Ortega-Acosta S, González-Vida JM. Efficient GPU implementation of a two waves TVD-WAF method for the two-dimensional one layer shallow water system on structured meshes. *Computer & Fluids*. 2012.
- [3] de la Asunción M, Mantas JM, Castro MJ. Simulation of one-layer shallow water systems on multicore and CUDA architectures. *J. Supercomput*. 2008; 58(2):206-214.
- [4] de la Asunción M. Desarrollo de Software Numérico de Simulación de Flujos Geofísicos Basado en Volúmenes Finitos usando Hardware Gráfico. Tesis Doctoral. 2012.
- [5] Bouchut F. *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws and Well-Balanced Schemes for Sources*. Birkhäuser. 2004.
- [6] Castro Díaz MJ, de la Asunción M, Mantas JM, Ortega Acosta S. On the benefits of using GPUs to simulate shallow flows with finite volume schemes. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl*. 2010;50: 27-44
- [7] Castro MF, Fernández ED. A class of computationally fast first order finite volume solvers: PVM methods. *SIAM J. Sci. Comput*. 2012; 34(4), A2173-A2196.
- [8] Castro MJ, Fernández ED, Ferreiro AM, García A, Parés C. High order extension of Roe schemes for two dimensional nonconservative hyperbolic systems. *J. Sci. Comput*. 2009; 39:67-114.
- [9] Castro Díaz MJ, Fernández-Nieto ED, Morales de Luna T, Narbona-Reina G, Parés C. A HLLC scheme for nonconservative hyperbolic problems. Application to turbidity currents with sediment transport. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2012; 47(1):1-32.

- [10] Castro Díaz MJ, Fernández-Nieto ED, Narbona G, Asunción M. A second order PVM flux limiter method. Application to magnetohydrodynamics and shallow stratified flows. *Journal of Computational Physics*. 2014; 262:172-193.
- [11] Castro MJ, Ferreiro AM, García JA, González JM, Macías J, Parés C, Vázquez-Cendón ME. The numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows: applications to one-layer and two-layer systems. *Mathematical and Computer Modelling*. 2005; 42 (3-4):419-439.
- [12] Castro MJ, Fjordholm US, Mishra S, Parés C. Entropy conservative and entropy stable schemes for non-conservative hyperbolic systems *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2013; 51(3):1371-1391.
- [13] Castro MJ, Gallardo JM, Parés C. High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow water systems. *Math. Comp.*, 2006. 75:1103-1134.
- [14] Castro MJ, García JA, González JM, Parés C. A parallel 2D finite volume scheme for solving systems of balance laws with nonconservative products: Application to shallow flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006;195(19-22):2788-2815.
- [15] Castro MJ, García JA, González JM, Parés C. Solving shallow-water systems in 2D domains using finite volume methods and multimedia SSE instructions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2008; 221(1):16-32.
- [16] Castro Díaz MJ, Ortega Acosta S, de la Asunción M, Mantas JM, Gallardo JM. GPU computing for shallow water flow simulation based on finite volume schemes. *Comptes Rendus Mécanique*. 2011;339: 165-184.
- [17] Castro MJ, Pardo A, Parés C. Well-balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci*. 2007; 17:2055-2113.
- [18] Castro MJ, Pardo A, Parés C, Toro EF. On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems. *Math of Comp*. 2010; 79(271):1427-1472.
- [19] Castro MJ, LeFloch PG, Muñoz ML, Parés C. Why many theories of shock waves are necessary: Convergence error in formally path-consistent schemes. *Jour. Comp. Phys*. 2008; 227: 8107-8129.
- [20] Costas Synolakis E, Eddie Bernard N, Vasily Titov V, Utku Kanoglu, Frank González I. Standards, criteria, and procedures for NOAA evaluation of tsunami numerical models. NOAA Technical Memorandum OAR PMEL-135. 2007.

- [21] Courant R, Isaacson E, Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Comm. Pure Appl. Math.* 1952; 5:243-255.
- [22] Dal Maso G, LeFloch PG, Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products. *J. Math Pures Appl.* 1995; 74:483-548.
- [23] Davis SF. Simplified Second-Order Godunov-Type Methods. *SIAM J. Sci. Stat Comput.* 1988; 9:445-473.
- [24] Degond P, Peyrard PF, Russo G, Villedieu P. Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems. *C. R. Acad. Sci. Paris Series I.* 1999; 328:479-483.
- [25] Dumbser M, Käser M. Arbitrary high order non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for linear hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.* 2007; 221:693-723.
- [26] Fernández Nieto ED. Aproximación Numérica de Leyes de Conservación Hiperbólicas No Homogéneas. Aplicación a las Ecuaciones de Aguas Someras (tesis doctoral). Sevilla: Universidad de Sevilla; 2003.
- [27] Fernández Nieto ED. Modelling and numerical simulation of submarine sediment shallow flows: transport and avalanches. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada.* 2009, 49:83-103.
- [28] Fernández Nieto ED, Bresh D, Monnier J. A consistent intermediate wave speed for a well-balanced HLLC solver. *C.R.Math. Acad. Sci. Paris* 346. 2008, 13-14:795-800.
- [29] Fernández Nieto ED, Narvona-Reina G. Extension of waf type methods to nonhomogeneous shallow water equations with pollutant. *J. Sci. Comput.* 2008, 36 (2):193-217.
- [30] Fernández Nieto ED, Castro Díaz MJ, Parés C. IFCP Riemann solver for the two-layer shallow-water system. *J. Sci. Comp.* 2011; 48:117-140.
- [31] Gallardo J, Ortega S, de la Asunción M, Mantas JM. Two-dimensional compact third-order polynomial reconstructions. Solving nonconservative hyperbolic systems using GPUs. *Journal of Scientific Computing.* 2011; 1-23.
- [32] Gottlieb S, Shu CW. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mat. Comp.* 1998; 67:73-85.
- [33] Grama A, Karypis G, Kumar V, Gupta A. Introduction to Parallel Computing. Addison-Wesley Professional. 2003.
- [34] Gusiakov, V.K. Static displacement on the surface of an elastic space. Ill-posed problems of mathematical physics and interpretation of geophysical data, Novosibirsk. VC SOAN SSSR. 1978:23-51.

- [35] Harten A, Hyman JM. Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.* 1983; 50:153-197.
- [36] Harten A, Lax PD, van Leer B. On Upstream Differencing and Godunov Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Review.* 1983; 25(1):35-61.
- [37] Hou TY, LeFloch PG. Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis. *Math. Comp.* 1994; 62:497-530.
- [38] Jiang G, Shu CW Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.* 1996;126: 202-228.
- [39] Kurganov A, Petrova G. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system. *Commun. Math. Sci.* 2007; Vol. 5, n. 1:133-160.
- [40] LeFloch PG, Liu T-P. Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form. *Forum Math.* 1993; 5: 261-280.
- [41] LeFloch PG. Propagating phase boundaries; formulation of the problem and existence via Glimm scheme. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1993; 123: 153-197.
- [42] LeVeque R. *Numerical Methods for Conservation Laws.* Birkhäuser. 1990.
- [43] Liu XD, Osher S, Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes. *J. Comput. Phys.* 1994;115:200-212.
- [44] López García, JA. Métodos numéricos bien equilibrados de alto orden para sistemas hiperbólicos no conservativos. Aplicaciones a modelos de aguas someras. Tesis Doctoral. 2010.
- [45] Marquina A. Local Piecewise Hyperbolic Reconstruction of Numerical Fluxes for Nonlinear Scalar Conservation Laws. *SIAM J. Sci. Comput.* 1994; 15:892-915.
- [46] Morales de Luna T, Castro Díaz MJ, Parés C. Reliability of first order numerical schemes for solving shallow water system over abrupt topography. *Applied Mathematics and Computation.* 2013; 219:9012-9032.
- [47] Muñoz-Ruiz ML, Parés C. Godunov method for nonconservative hyperbolic systems. *ESAIM: M2AN.* 2007; 41(1):169-185.
- [48] NOAA Special Report <http://nws.weather.gov/nthmp/documents/nthmpWorkshopProcMerged.pdf> 2012.

- [49] Noelle S, Pankratz N, Puppo G, Natvig J. Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows. *J. Comput. Phys.* 2006; 312:474-499.
- [50] NVIDIA, CUDA home page, [http://www.nvidia.com/object/cuda\\_home\\_new.html](http://www.nvidia.com/object/cuda_home_new.html).
- [51] NVIDIA. GPU Computing SDK. <http://developer.nvidia.com/cuda/gpu-computing-sdk>.
- [52] Okada, Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half space. *Bull. Seism. Soc. Am.* 1985; 75:1135-1154.
- [53] Owens JD, Houston M, Luebke D, Green S, Stone JE, Phillips JC. GPU computing. *Proceedings of the IEEE.* 2008; 96(5):879-899.
- [54] Parés C, Castro MJ. On the well-balanced property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems. *M2AN.* 2004; 38: 821-852.
- [55] Parés C. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework. *SIAM J. Num. Anal.* 2006; 44(1): 300-321.
- [56] Parés C, Muñoz ML. On some difficulties of the numerical approximation of nonconservative hyperbolic systems. *Boletín SEMA.* 2009; 47:23-52.
- [57] Raviart PA, Sainsaulieu L. A nonconservative hyperbolic system modeling spray dynamics, Part I: Solution of the Riemann problem. *Maht. Mod. Meth. Appl. Sci.* 1995; 5: 297-333.
- [58] Rhebergen S, Bokhove O, van der Vegt JJW. Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations. *J. Comput. Phys.* 2008; 227: 1887-1922.
- [59] Rumpf M, Strzodka R. Graphics processor units: new prospects for parallel computing. *Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers.* 2006; 51:89- 134.
- [60] Saint-Venant, AJC. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences.* 1871; 73: 147-154.
- [61] Schroll HJ, Svensson F. A bi-hyperbolic finite volume method on quadrilateral meshes. *J. Sci. Comp.* 2006; 26:237-260.
- [62] Shu CW, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *J. Comp. Phys.* 1988; 77:439-471.

- [63] Shu CW. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. *Lecture Notes in Mathematics*. 1998; 1697/1998:325-432.
- [64] Shu CW. Total variation-diminishing time discretizations. *SIAM J. Sci. Statist. Computing*. 1988; 9(6):1073-1084.
- [65] Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I. *Mathematics of Computation*. 1987; 49:91-103.
- [66] Toro EF. A weighted average flux method for hyperbolic conservation laws. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1989; 423:401-418.
- [67] Toro EF. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley, England. 2001.
- [68] Toro EF, Billett SJ. Centred TVD schemes for hyperbolic conservation laws. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2000; 20:47-79.
- [69] Toro EF, Titarev VA. MUSTA fluxes for systems of conservation laws. *J. Comput. Phys*. 2006; 216(2): 403-429.
- [70] Toumi I. A weak formulation of Roe's approximate Riemann Solver. *J. Comp. Phys*. 1992;102(2): 360-373.
- [71] Van Leer, B Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys*. 1979;32: 101-136.
- [72] Vázquez-Cendón ME. *Estudio de Esquemas Descentrados para su Aplicación a las Leyes de Conservación Hiperbólicas con Términos Fuente (tesis doctoral)*. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela; 1994.
- [73] Volpert AI. The space BV and quasilinear equations. *Math. USSR Sbornik*. 1967; 73(115): 225-267.
- [74] Walz G. Romberg Type Cubature over Arbitrary Triangles. *Mannheimer Mathem (Manuskripte)*. Mannheim:Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim. 1997; 225.
- [75] Xing Y, Shu C-W. High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations. *J. Comput. Phys*. 2005; 208: 206-227.