

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INFORMÁTICA
INGENIERÍA DE LA SALUD. MENCIÓN EN INGENIERÍA
BIOMÉDICA.

**ANÁLISIS DE CONDICIONES BIOMECÁNICAS PARA EL
PLANTEAMIENTO DE UN NUEVO DISEÑO PROTÉSICO EN LAS
ARTICULACIONES SUBASTRAGALINA Y MEDIOTARSIANA**

**ANALYSIS OF BIOMECHANICAL CONDITIONS FOR THE
APPROACH OF A NEW PROSTHETIC DESIGN IN THE
SUBTALAR JOINTS AND MIDTARSAL**

Realizado por

Carlos Huesa Berral

Coordinado, tutorizado y cotutorizado por

**D. Víctor Manuel Smith Fernández, D. Francisco Ezquerro
Juanco y D. Francisco José Palomo Ruiz**

Departamentos

**Anatomía Humana, Medicina Legal e Historia de la ciencia;
Ingeniería Mecánica, Térmica y de Fluidos; Matemática
Aplicada**

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

MÁLAGA, Septiembre 2016.

Fecha defensa:

El Secretario del Tribunal

Resumen:

El proyecto que se presenta a continuación engloba tres grandes áreas que son troncales en la ingeniería biomédica: la anatomía, la biomecánica y las matemáticas. Necesita la ingeniería biomédica del conocimiento de la localización y del funcionamiento de las distintas partes que componen nuestro cuerpo humano para poder dar solución a las mismas cuando estas fallen, y estas soluciones que hasta ahora en nuestra historia han presentado grandes logros y que todavía tienen que seguir evolucionando, pasan por adaptar los conocimientos de la mecánica a nuestro cuerpo. Para ello, sin las técnicas matemáticas para solucionar estos problemas desde el punto de vista ingenieril, no sería posible. Es por esto que la finalidad de este proyecto es la de juntar las tres áreas para iniciar en la investigación sobre el funcionamiento mecánico de las articulaciones subastragalina y mediotarsiana. Haciendo una comparativa de una propuesta teórica - matemática (basado en unas hipótesis médicas sobre el funcionamiento de las articulaciones) con un estudio experimental cinemático, podremos observar si tiene sentido el método que aquí se propone para intentar seguir explicando en un futuro el funcionamiento de las articulaciones, es decir, si este proyecto puede servir de base para futuras investigaciones en dicho tema.

Palabras clave:

Astrágalo, calcáneo, articulación subastragalina, articulación mediotarsiana, eje de rotación, cinemática mediotarsiana

Abstract:

The project presented below includes three main areas that are basics in biomedical engineering: anatomy, biomechanics and mathematics. Biomedical Engineering needs knowledge of the location and operation of the various parts that make up our human body to give a solution when these fail, and these solutions so far in our history they have made great achievements and they still have to continue to evolve, these should adapt the knowledge of mechanics to our body. To do this, without mathematics to solve these problems from the engineering point of view, it would not be possible. That is why the purpose of this project is to bring together the three areas to begin research on the mechanical operation of the subtalar joints and midtarsal. Making a comparison of a theoretical proposal - mathematics (based on a medical hypothesis on the functioning of the joints) with a kinematic experimental study, we will check if it makes sense the method proposed here to try to continue explaining in the future operation of the joints, ie if this project can serve as a basis for future research on the subject.

Keywords: Talus, calcaneum, subtalar joint, midtarsal joint, axis's rotation, midtarsal kinematics

A mis padres, Carlos y Teresa, por el apoyo constante.

A mi hermana, M^a José, por prepararme los desayunos.

A mis amigos, por la confianza depositada en mí.

A Belén, por estar.

A mis abuelos, José María y Rosario, por las llamadas diarias de afectividad.

A mis abuelos, Pedro y Juana, por acompañarme en el corazón.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a Víctor, Francisco y Patxi la oportunidad de realizar este proyecto con ellos. Sin sus aportaciones y sin la confianza que han puesto en mí, no hubiese sido posible.

A María Prado, agradecerle su ayuda y disponibilidad.

Mostrar también mi agradecimiento al Servicio Central de Informática de la Universidad de Málaga, por facilitarme todos los medios necesarios para la realización del proyecto; especialmente a Manoli, por su ayuda y dedicación.

ÍNDICE

1- Introducción.....	1
1.1- Anatomía y funcionamiento de las articulaciones subastragalina y mediotarsiana.....	1
1.2- Técnicas matemáticas adaptables al proyecto.....	11
1.3- Técnicas biomecánicas adaptables al proyecto.....	11
2- Planteamiento y objetivos	12
3- Material y Método.....	13
3.1- Disección anatómica de las articulaciones mediotarsiana y subastragalina.....	14
3.2- Escaneo en 3D de las articulaciones mediotarsiana y subastragalina ...	17
3.3- Desarrollo matemático	19
3.3.1- Cálculo de trayectorias.....	20
3.3.1.1- Datos genéricos	20
3.3.1.2- Estudio matemático según hipótesis médicas.....	22
3.3.1.2.1- Primera hipótesis médica	22
3.3.1.2.2- Segunda hipótesis médica	23
3.3.1.2.3- Tercera hipótesis médica	26
3.3.2- Cálculo de matrices de rotaciones entre esfera y cilindro a partir de trayectorias.....	27
3.3.2.1- Matriz de rotación para la primera hipótesis médica	28
3.3.2.2- Matriz de rotación para la segunda hipótesis médica	31
3.3.1.3- Matriz de rotación para la tercera hipótesis médica	35
3.3.3- Cálculo del eje instantáneo de rotación a partir de las matrices de rotación.....	38
3.3.3.1- Cálculo del eje para la segunda hipótesis médica	39
3.3.3.2- Cálculo del eje para la primera y tercera hipótesis médica	40
3.4- Análisis cinemático del movimiento de la articulación	41
3.4.1- Montaje y equipamiento	41
3.4.2- Cálculo del eje instantáneo de rotación	47
4- Resultados	53
4.1- Resultados obtenidos del desarrollo matemático.....	53
4.2- Resultados obtenidos del análisis cinemático de movimiento.....	58
5- Discusión.....	59
5.1- Interpretación de los resultados matemáticos.....	59
5.2- Interpretación de los resultados cinemáticos	60

5.3- Interpretación conjunta teórico – experimental.....	61
6- Conclusiones	66
7- Referencias bibliográficas	67
8- Anexos.....	69
8.1- Código MatLab elaborado para el cálculo de las trayectorias matemáticas...	69
8.2- Código MatLab elaborado para el cálculo de los ejes instantáneos de rotación teóricos - matemáticos	70
8.3- Código MatLab elaborado para el cálculo de los ejes instantáneos de rotación experimentales mediante análisis de movimiento.	72

1- Introducción

Hasta el día de hoy, en referencia a las prótesis internas o endoprótesis, se han desarrollado prótesis [1] de rodilla, de cadera, de codo, de hombro...con el fin de reemplazar dichas articulaciones pero sin alterar o intentando que no ocurra en la medida de lo posible, la función biomecánica que le compete a cada una de ellas. Sin embargo, es en el complejo articular Subastragalino y Mediotarsiano (dos articulaciones que pertenecen al pie) dónde no hay hasta ahora una solución ingenieril [2] que permita que, cuando dichos complejos fallen, pueda ser reemplazado por una prótesis que no inhiba los movimientos naturales y biomecánicos que le competen a dicho complejo. La solución que se aporta hoy día lleva como consecuencia esta inhibición de los movimientos [3]-[4] que más adelante se explicarán. Es por esto que este Trabajo Final de Grado tiene como objetivo aportar una nueva visión ingenieril y médica de dichos complejos, de manera que pudiese servir en un futuro a posibles soluciones en caso de fallo de dichas articulaciones.

Por tanto, para empezar a aportar un nuevo punto de vista, se hace necesario un conocimiento anatómico de dicho complejo, así como de las técnicas matemáticas y biomecánicas para intentar comprobar las hipótesis médicas que se plantearán más adelante.

1.1- Anatomía y funcionamiento de las articulaciones subastragalina y mediotarsiana

Las piezas óseas implicadas en este proyecto son tres: el astrágalo, el calcáneo y el escafoides.

Astrágalo

El astrágalo [5]-[6]-[7] es un hueso singular desde tres puntos de vista. En primer lugar, se localiza en el punto más prominente de la parte posterior del tarso, siendo el hueso que distribuye el peso del cuerpo y las fuerzas ejercidas sobre el conjunto del pie (*Figura 1-1*).

Mediante su cara articular superior, la tróclea astragalina recibe (*flecha 1*) el peso del cuerpo y las fuerzas transmitidas por la pinza bimalleolar y distribuye todas estas sollicitaciones de fuerza en tres direcciones:

- **Hacia atrás** (*flecha 2*) dirigiéndose al talón, es decir, a la tuberosidad mayor del calcáneo. Esta fuerza se transmite mediante la articulación calcáneo astragalina posterior
- **Hacia delante y adentro** (*flecha 3*), en dirección del arco interno de la bóveda plantar, a través de la articulación astragaloescafoidea
- **Hacia delante y afuera** (*flecha 4*), en dirección del arco externo de la bóveda plantar, a través de la articulación calcáneo – astragalina anterior.

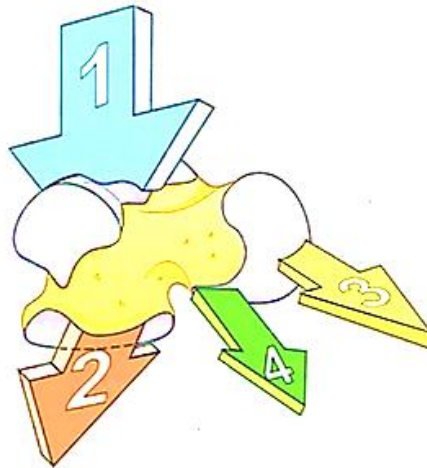


Figura 1-1 [5]. Distribución y dirección de fuerzas en el hueso astrágalo.

Está completamente cubierto por superficies articulares e inserciones ligamentosas (Figura 1-2), por lo que se le suele llamar con el nombre de hueso relevo.

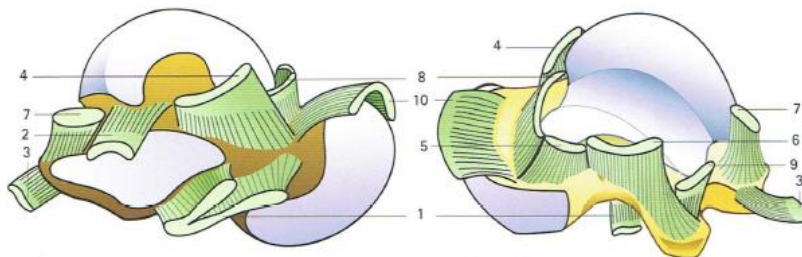


Figura 1-2 [5]. A la izquierda, visión externa; a la derecha, visión interna.

Además, no tiene ninguna inserción muscular (Figura 1-3): todos los músculos que proceden de la pierna pasan alrededor de él formando un puente. Por eso, se le conoce con el nombre de hueso “enjaulado”, ya que está “encerrado” en una jaula de tendones.

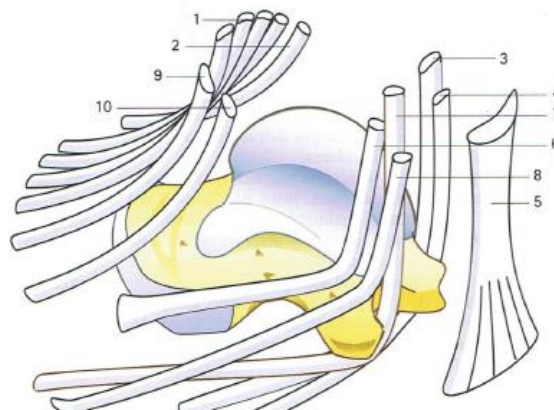


Figura 1-3 [5]: Astrágalo enjaulado sin ninguna inserción muscular. Por eso, el astrágalo se “nutre” únicamente por los vasos sanguíneos que le llegan de las inserciones ligamentosas, lo que constituye un aporte arterial suficiente pero justo en condiciones normales. En caso de fractura del cuello del astrágalo, su trofismo puede derivarse en una pseudoartrosis del cuello o en una necrosis aséptica del cuerpo del hueso.

Calcáneo

El calcáneo [6] – [7] es el hueso más voluminoso de los huesos del tarso, siendo un hueso corto e irregular. Es el hueso que forma el talón y se divide en seis lados:

- *Lado superior.* Éste presenta hacia atrás una superficie convexa transversalmente, y por delante dos carillas articulares (*Figura 1-4*): la posterior ancha y la anterior estrecha, la primera mira adelante y arriba, siendo convexa; y la segunda es alargada y cóncava, estando las dos separadas por una ranura para inserción de ligamentos y se articulan con el astrágalo. La porción de hueso donde está hecha la carilla anterior se llama apófisis menor del calcáneo. Detrás de ella, existe una corredera para el músculo flexor largo del primer dedo del pie.
- *Lado inferior.* Es estrecho y rugoso. Tiene por detrás dos tuberosidades de desigual volumen, la interna mayor que la externa.
- *Lado anterior.* Es el más pequeño, siendo cóncavo de arriba abajo y convexo transversalmente. Se articula con el cuboides y forma la apófisis mayor del calcáneo.
- *Lado posterior.* Es convexo y tuberculoso, dando inserción al tendón de Aquiles
- *Lado externo.* Es más ancho por detrás que por delante. También es aplanado y presenta dos correderas para los tendones de los músculos peroneos laterales
- *Lado interno.* Cóncavo, formando una bóveda bajo la cual se alojan las partes blandas de la planta del pie.

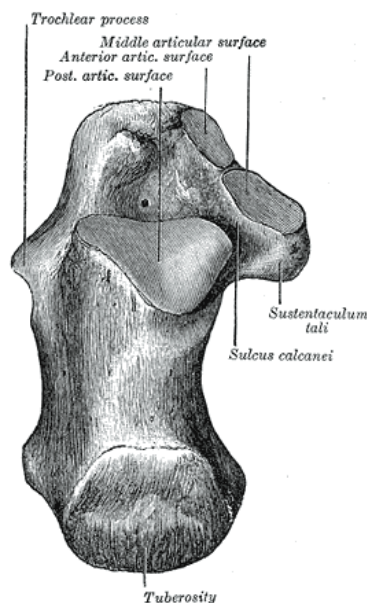


Figura 1-4 [8]: Vista superior del calcáneo, dónde podemos observar claramente las carillas articulares que forman con el astrágalo la articulación subastragalina

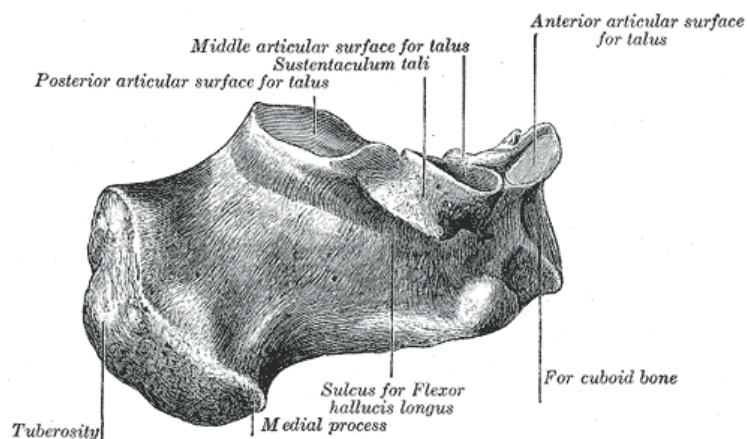


Figura 1-5 [8]: Vista lateral del calcáneo, donde podemos apreciar la tuberosidad posterior, y las carillas articulares con el astrágalo.

Hueso navicular

Más conocido como escafoides [6]-[8], es un hueso del pie, corto y asimétrico; tiene dos caras, anterior y posterior; dos bordes, superior e inferior, y dos extremos, externo e interno.

Se encuentra en la cara interna de la segunda fila del tarso. Se articula con la cabeza del astrágalo por detrás, con los tres cuñas por delante y con el cuboides por fuera generando las articulaciones astragaloescafoidea (enartrosis), escafocuboidea y escafocuneal, siendo estas dos últimas pertenecientes al género artrodia.

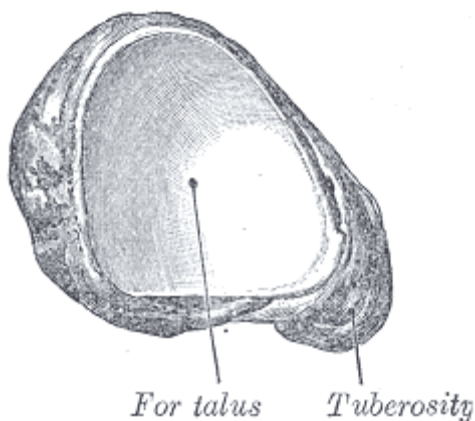


Figura 1-6 [8]. Vista posterior del hueso navicular, donde apreciamos la cavidad que engloba al astrágalo. Este hueso navicular se mueve alrededor de la cabeza del astrágalo y forman parte de la articulación mediotarsiana.

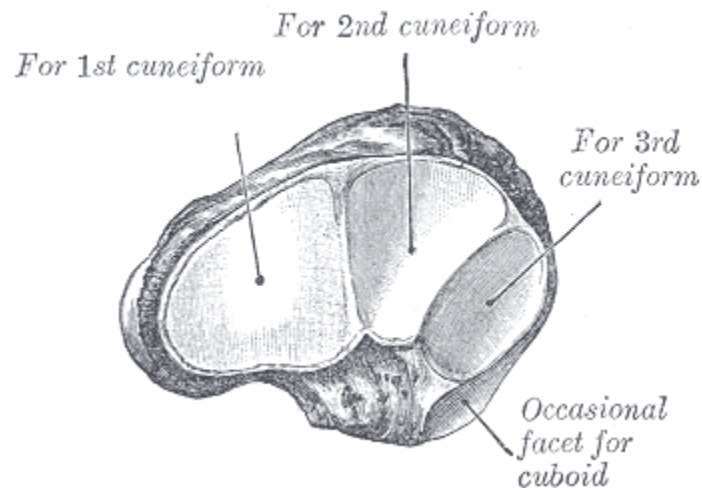


Figura 1- 7 [8]. Vista anterior del hueso navicular, dónde apreciamos las cavidades dónde articulan con las tres cuñas y con el cuboides, formando las articulaciones escafo cuboidea y escafo cuneal.

ARTICULACIONES IMPLICADAS

Estos tres huesos forman entre sí dos articulaciones propias en el pie: la articulación subastragalina (formada por el astrágalo y el calcáneo) y la articulación mediotarsiana (formada por el astrágalo y el escafoides).

Articulación subastragalina

El astrágalo se articula por su cara inferior A (*Figura 1-8*) con la cara superior del calcáneo B. Estos dos huesos contactan, cada uno de ellos, a través de dos superficies articulares [5]-[9]-[10] (que son las que forman la articulación subastragalina):

- La *superficie posterior* del astrágalo “a” se adapta a la superficie mayor “a” localizada en la cara superior del calcáneo: es el **tálamo de Destot**. Estas dos superficies están unidas entre sí por ligamentos y una cápsula, haciendo de ellas una articulación autónoma.
 - o El **tálamo** “a” es una superficie ovalada, con un gran eje oblicuo hacia delante y afuera, convexa a lo largo de todo el eje (*Figura 1-9*) y rectilínea en sentido perpendicular. Por tanto, podemos compararlo como un **segmento cilíndrico** “f”. La superficie astragalina “a” opuesta a la anterior también posee esta forma cilíndrica, con mismo radio y eje.
- La *superficie menor* “b”, localizada en la cara inferior del cuello y la cabeza del astrágalo, descansa en la superficie anterior del calcáneo “b” alargada en sentido oblicuo formando parte de las apófisis mayor y menor
 - o La **cabeza del astrágalo es pseudoesférica** y los planos que posee pueden considerarse carillas talladas sobre una esfera (línea de trazos rojos) de centro “g”. De hecho, la superficie anterior del calcáneo “b” es cóncava en ambos sentidos, mientras que la superficie astragalina “b” que se le opone es convexa en sus dos sentidos con los mismos radios de curvatura.

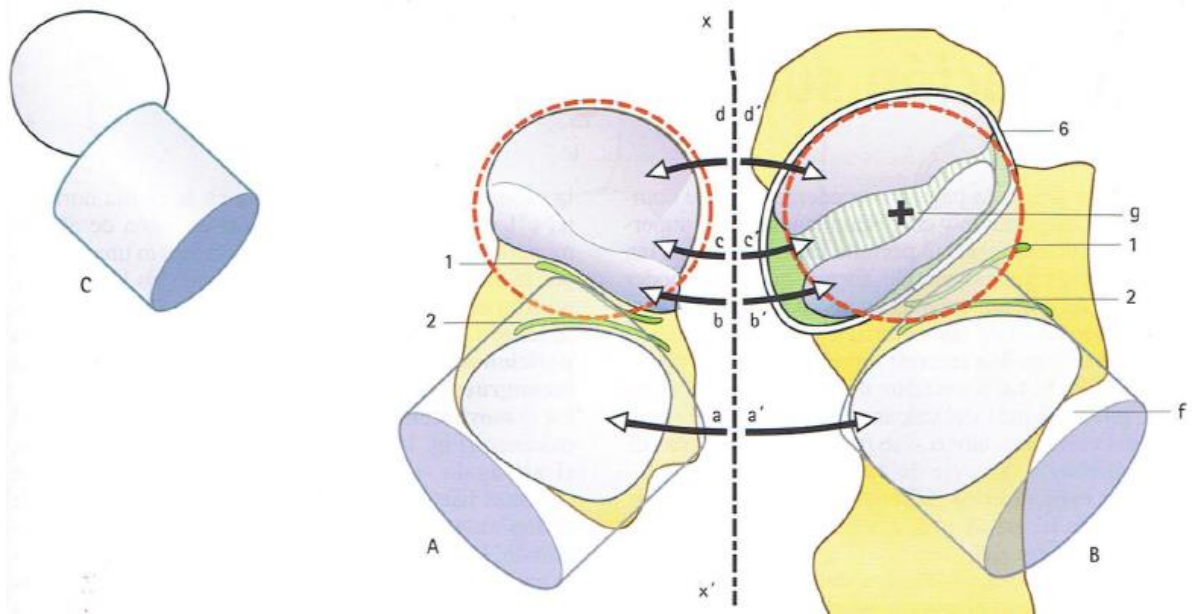


Figura 1-8 [5]. Articulación subastragalina, modeladas geoméricamente como esfera y cilindro por la forma de las superficies que la forman: tálamo y cabeza del astrágalo. En la imagen C podemos observar cómo sería el modelo ideal.

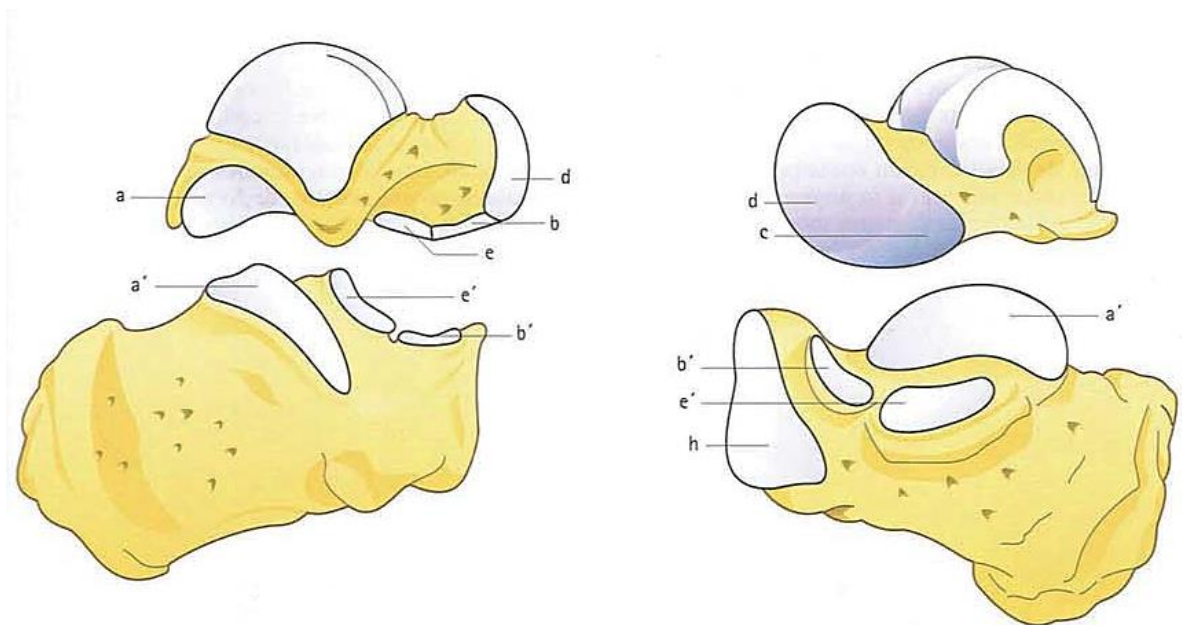


Figura 1-9 [5]. Superficies que forman la articulación subastragalina. A la izquierda la visión externa y a la derecha la visión interna. Las superficies a-a' forman un segmento cilíndrico y la superficie d, cabeza del astrágalo, una pseudoesfera.

Articulación mediotarsiana o articulación transversa del tarso

Esta articulación aparece compuesta por dos partes [5]-[9]-[10]:

- La *interlínea astragaloescafoidea*, cóncava hacia atrás, constituye la parte interna. Une la cabeza del astrágalo y la cavidad glenoidea formada por la cara posterior del escafoides, la superficie articular antero – interna del calcáneo y la cara inferior revestida por cartílago del ligamento calcáneo – escafoideo inferior. Se forma una articulación de tipo enartrosis con tres tipos de movimiento en el plano transversal, sagital y frontal.
- La *interlínea calcaneocuboidea*, ligeramente cóncava hacia delante. Está formada entre la superficie articular anterior del calcáneo y posterior del cuboides.

De modo que, vista por su cara superior, esta articulación tiene una forma de S itálica (*Figura 1-10*), y ambas articulaciones comparten los mismos ligamentos.



Figura 1-10 [8]. Articulación mediotarsiana. Observamos la “S itálica” en rojo, formada por las dos partes de dicha articulación. Los cuatro huesos implicados en dicha articulación se pueden observar perfectamente: astrágalo, calcáneo, escafoides y cuboides.

FUNCIONAMIENTO DE LAS ARTICULACIONES

Estas dos articulaciones son responsables de los movimientos de inversión y eversión del pie [5]-[11]-[12], y es el funcionamiento biomecánico que tienen ambas. El pie puede realizar movimientos en torno a tres ejes: al eje longitudinal de la pierna (eje Z), al eje longitudinal del pie que tendría una dirección coincidente con el segundo dedo (eje X) y al eje transversal (eje Y) que tendría una dirección de maléolo a maléolo, como podemos observar en la *Figura 1-11*.

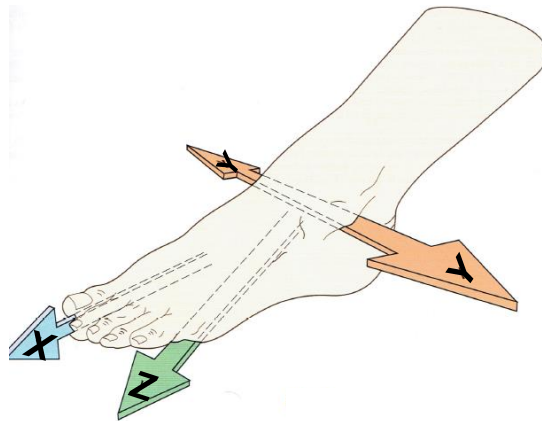


Figura 1-11 [5]. Ejes en torno a los cuales el pie realiza todos los movimientos posibles.

En torno al **eje vertical Z**, se realizan, a partir de la posición normal (*Figura 1-12*, pie de frente), los movimientos de aducción – abducción:

- *Aducción*: cuando la punta del pie se dirige hacia el plano medial
- *Abducción*: cuando la punta del pie se dirige hacia el plano lateral

En torno al **eje longitudinal X**, el pie gira de tal forma que el pie se orienta:

- Bien hacia dentro descendiendo el borde lateral del pie, realizando una *supinación*.
- Bien hacia fuera elevando el borde lateral del pie, realizando una *pronación*.

En torno al **eje transversal Y**, el pie gira realizando los movimientos de:

- *Flexión plantar*, cuando la punta del pie desciende.
- *Flexión dorsal*, cuando la punta del pie se eleva.

Sin embargo, estas articulaciones están configuradas de tal forma que un movimiento en uno de los planos se acompaña obligatoriamente por un movimiento en los otros dos planos. De esta manera, la aducción se acompaña de una supinación y de una ligera flexión plantar. Estas tres componentes forman la posición llamada inversión del pie (*Figura 1-12*, los dos pies de la izquierda). En el otro sentido, la abducción se acompaña necesariamente de la pronación y de la flexión dorsal: se trata de la posición de eversión del pie (*Figura 1-12*, los dos pies de la derecha).

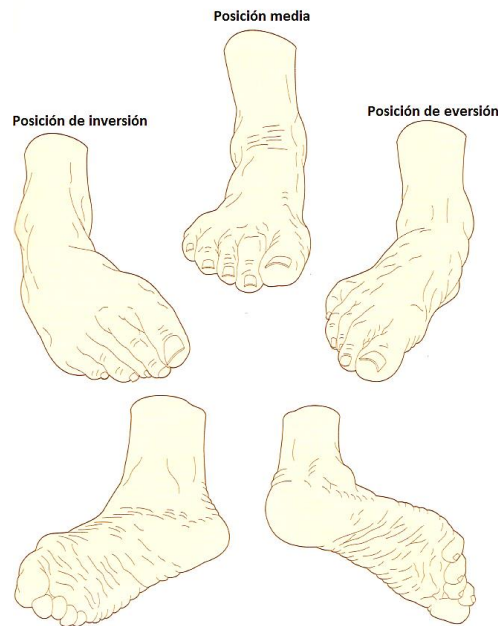


Figura 1-12 [5]. Movimientos de inversión – eversión del pie junto a la posición de reposo.

En un funcionamiento global de estas dos articulaciones del tarso posterior, ocurre lo siguiente:

- Movimiento de **inversión** (Figura 1-13)
 - o El músculo tibial posterior desplaza el escafoides (Esc), que deja descubierto la parte superoexterna de la cabeza del astrágalo “d”
 - o El escafoides desplaza el cuboides (Cub) mediante los ligamentos cuboideonaviculares.
 - o El cuboides, a su vez, desplaza al calcáneo (Calc), que se introduce, por delante, debajo del astrágalo (Astr).
 - o El seno del tarso se abre al máximo, mientras que los dos haces del ligamento interóseo (1 y 2) se tensan
 - o El tálamo “a” queda al descubierto en su porción anteroinferior, mientras que la interlínea calcáneo astragalina se entreabre por arriba y por detrás.

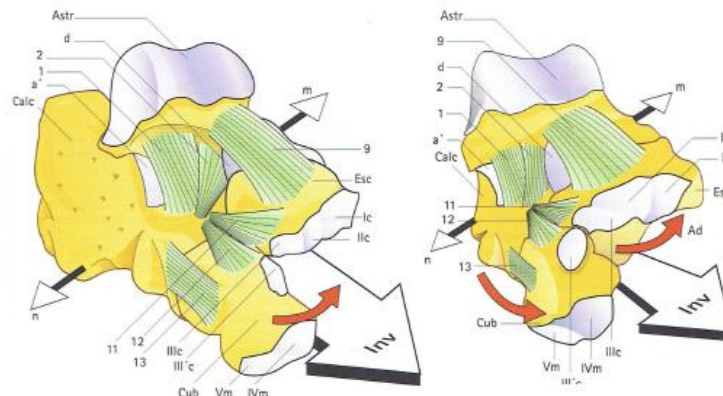


Figura 1-13 [5]: Movimiento de inversión siguiendo las flechas rojas y funcionamiento global del complejo articular. A la izquierda vista anteroexterna y a la derecha vista anterior.

- Movimiento de **eversión** (Figura 1-14)
 - o El músculo peronéo corto desplaza el cuboides hacia fuera y hacia atrás.
 - o El cuboides desplaza al escafoides que deja al descubierto la porción superointerna de la cabeza del astrágalo “d”.
 - o El calcáneo se desplaza hacia atrás, por debajo del astrágalo.
 - o El seno del tarso se cierra y el movimiento se detiene por el impacto del astrágalo contra el suelo del seno del tarso.
 - o La parte posterosuperior del tálamo queda al descubierto

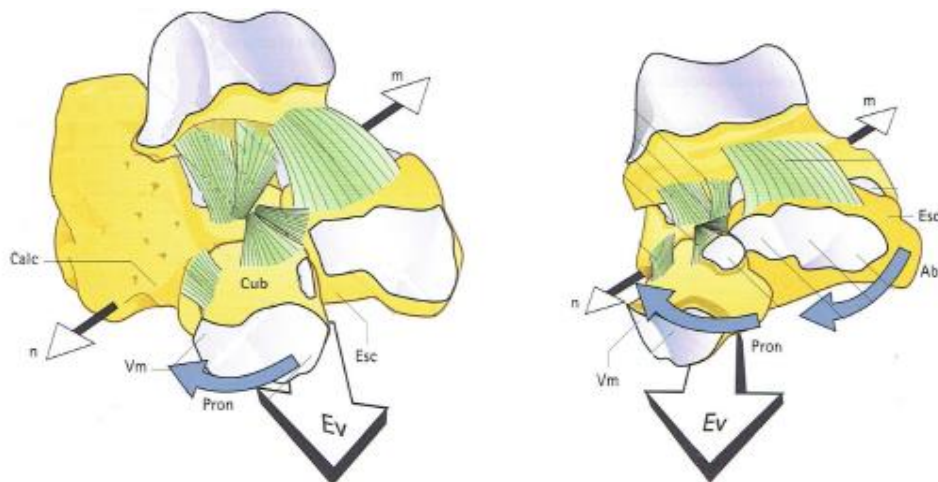


Figura 1-14 [5]: Movimiento de eversión siguiendo las flechas azules y funcionamiento global del complejo articular. A la izquierda vista anteroexterna y a la derecha vista anterior.

HIPÓTESIS DE MOVIMIENTO

Estos dos movimientos que se descomponen en los tres ejes del espacio (X, Y, Z) han originado una serie de planteamientos para intentar explicar desde el punto de vista matemático y biomecánico el funcionamiento de las articulaciones descritas hasta ahora. Se manejan distintos planteamientos, que son los siguientes:

- Un **primer planteamiento** propone que las articulaciones subastragalina y medio tarsiana son articulaciones funcionalmente diferenciadas, cada una con un eje mecánico independiente [9]-[11].
- Un **segundo planteamiento** plantea que son dos articulaciones diferentes desde el punto de vista morfológico pero asociadas desde un punto de vista dinámico con un único eje de movimiento, conjunto para las dos articulaciones. A su vez dentro de este segundo planteamiento se postulan tres hipótesis que son:
 - o Una *primera hipótesis*, donde el eje de movimiento no es evolutivo, es decir, el eje no se desplaza en el curso mismo del movimiento y permanece fijo [10]
 - o Una *segunda hipótesis*, donde se considera un eje de movimiento evolutivo, es decir, el eje se desplaza en el curso mismo del movimiento [5]-[12]-[16].
 - o Una *tercera hipótesis*, donde se produce un desplazamiento longitudinal a lo largo del eje, describiendo el movimiento de la subastragalina como el de un tornillo [13]-[14]-[15]-[10].

Al no estar comprobado del todo que hipótesis es la correcta, no se realiza diseño protésico [2] en estas dos articulaciones. En el caso de una fractura astragalina desplazada donde resulta difícil la inmovilización de segmentos o donde se compromete la vascularización de la cabeza astragalina es necesario fusionar el astrágalo con el calcáneo mediante un tratamiento quirúrgico, de tal manera que los movimientos de inversión y eversión prácticamente se anulan [3]-[4].

1.2- Técnicas matemáticas adaptables al proyecto

Observando la *Figura 1-8* que describe las articulaciones como esfera y cilindro, no se nos hace raro pensar que podremos investigar matemáticamente como esa esfera se mueve sobre el cilindro al realizar los movimientos de inversión y de eversión del pie. Mediante el cálculo de trayectorias, matrices y ejes de rotación, tendremos una descripción formal del movimiento de las articulaciones, de tal manera que podremos compararla con las hipótesis que se han planteado así como con el resultado experimental que se obtenga.

1.3- Técnicas biomecánicas adaptables al proyecto

La cinemática nos servirá para aportarnos el comportamiento de las articulaciones cuando hay movimiento de inversión y eversión. Realizando un análisis de movimiento en dichas articulaciones obtendremos características que seguro nos ayudarán a acercarnos más o menos a las hipótesis de movimiento que se han planteado al final del punto 1.1.

2- Planteamiento y objetivos

El problema, como ya se ha explicado, es que no hay diseño protésico para la articulación(es) en cuestión. En efecto, no está bien definido y estudiado la biomecánica de la misma. Existen varias hipótesis que argumentan el movimiento de la articulación y ninguna completamente demostrada.

Por tanto, el objetivo fundamental es realizar una iniciación a la descripción de cómo funcionan realmente estas articulaciones y cómo podría adaptarse un diseño protésico a las conclusiones que se obtengan de este proyecto y de sus futuras investigaciones. El planteamiento del proyecto al problema está dividido en tres partes, que se explican a continuación.

1ª parte:

Realizar un estudio matemático (teórico) en el que se englobe a cada una de las hipótesis médicas, y calcular el eje instantáneo de rotación para cada una de ellas.

2ª parte:

Calcular el eje instantáneo de rotación en las articulaciones experimentalmente, mediante análisis cinemático de movimiento.

3ª parte:

Una tercera parte del proyecto sería la comparación de ambos resultados y verificación de los mismos, de una manera exacta. Esta verificación no estará incluida en el proyecto por problemas técnicos, aunque si se ha realizado una aproximación cualitativa.

3- Material y Método

En este punto del proyecto abordaremos la metodología que se ha seguido y que se deberá continuar en un futuro. Atendiendo a la introducción ya argumentada y al planteamiento que se hace del problema, así como sus objetivos, las fases o etapas que se ha seguido en el proyecto son las siguientes:

1ª Fase: Disecar en cadáver las piezas anatómicas correspondientes en las que se va a basar el estudio y realizar un escáner en 3D de las mismas, con el objetivo de poder tratar las proyecciones anatómicas por ordenador, para justificar el modelo ideal que se utilizará en el estudio matemático (Fase 2) y para obtener las medidas que se utilizarán en dicho modelo. El escáner (una vez obtenida las piezas anatómicas en su estado necesario) se realizará con el sistema 3D Laser Scanner LPX – 600 de Roland, que incluye el software de exploración LPX EZ Studio de Roland [17], y el posterior tratamiento se realizará con SolidWorks [18].

2ª Fase: Cálculo teórico - matemático del eje instantáneo de rotación: Este estudio se basará en las siguientes subetapas:

- Basándonos en las hipótesis médicas explicadas en la introducción del proyecto, calcular las trayectorias posibles que realizará la cabeza del astrágalo (modelada idealmente como una esfera), sobre la articulación subastragalina (modelada como un cilindro, entre el tálamo y la superficie complementaria del astrágalo).
- En base a estas trayectorias y definiendo unos sistemas de referencia para esfera y cilindro, calcular las matrices de rotación de la esfera con respecto al cilindro, obteniendo así la evolución del movimiento en la trayectoria ya descrita anteriormente
- A partir de las matrices de rotación, calcularemos el eje instantáneo de rotación

Las representaciones de los resultados se realizarán con MatLab [19].

3ª Fase: Cálculo experimental del eje instantáneo de rotación mediante análisis cinemático de movimiento en tres dimensiones [20], donde los resultados obtenidos en el pasillo de marcha con el equipo de cámaras y marcadores oportunos de VICON [21], han sido exportados y tratados para su resolución a MatLab [19], basadas en las ecuaciones que se argumentan en el punto 3.4.2.

4ª Fase: Verificación formal de resultados: En este proyecto se recoge una superposición de resultados teórico – experimental aproximada que da pie a una verificación futura formal de los resultados.

3.1- Disección anatómica de las articulaciones mediotarsiana y subastragalina

Necesitamos una abstracción matemática de las articulaciones que relacione lo anatómico con lo matemático, y para eso se ha realizado un escáner en 3D de las proyecciones anatómicas donde se expondrán las superficies articulares de estas dos articulaciones mencionadas anteriormente, aportándonos los datos necesarios para resolver nuestro problema matemático.

Para el escáner lo primero que hubo que hacer fue una disección anatómica de las articulaciones en un cadáver, con el objetivo de poder separar la articulación subastragalina y mediotarsiana para escanearlas por separado en 3D, y así escoger las proyecciones anatómicas que nos interesen para el estudio matemático. La pieza anatómica completa (el pie) será la que nos acompañe en todo el proyecto, tanto para el escáner necesario para la parte matemática como para el análisis de movimiento que realizaremos en el pasillo de marcha. Las fases de la disección de la pieza anatómica del cadáver se describen a continuación en imágenes:

- En las *Figuras 3-1 y 3-2*, se observa la parte interna y externa del pie derecho, antes de abordar las articulaciones subastragalina y mediotarsiana

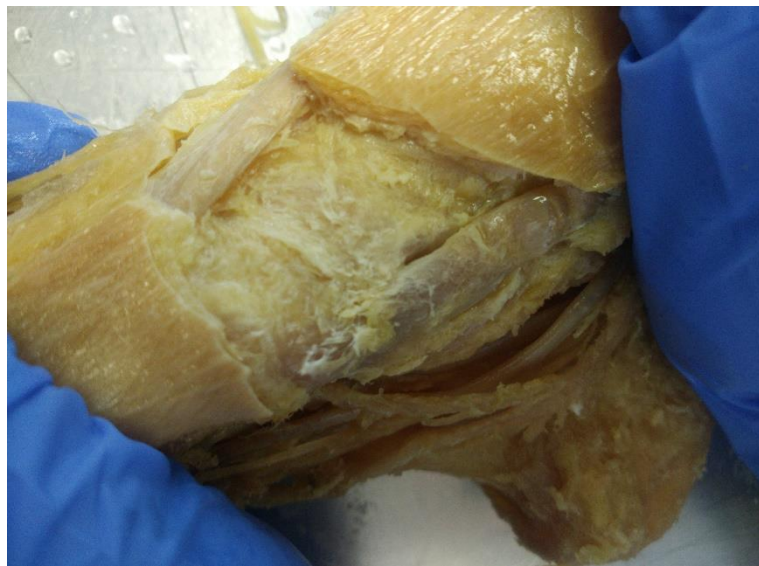


Figura 3-1. Parte interna del pie derecho. Se puede apreciar la parte del calcáneo conocida coloquialmente como “talón”, así como los distintos ligamentos y tendones que intervienen en la sujeción y movimiento del pie.



Figura 3-2. Parte externa del pie derecho. Se puede apreciar la parte del calcáneo conocida coloquialmente como "talón", así como los distintos ligamentos y tendones que intervienen en la sujeción y movimiento del pie, aunque en menor medida que en la parte interna.

- En las siguientes dos figuras (3-3 y 3-4) ya se observa el astrágalo articulando con el calcáneo y el escafoides, formando las articulaciones subastragalina y mediotarsiana

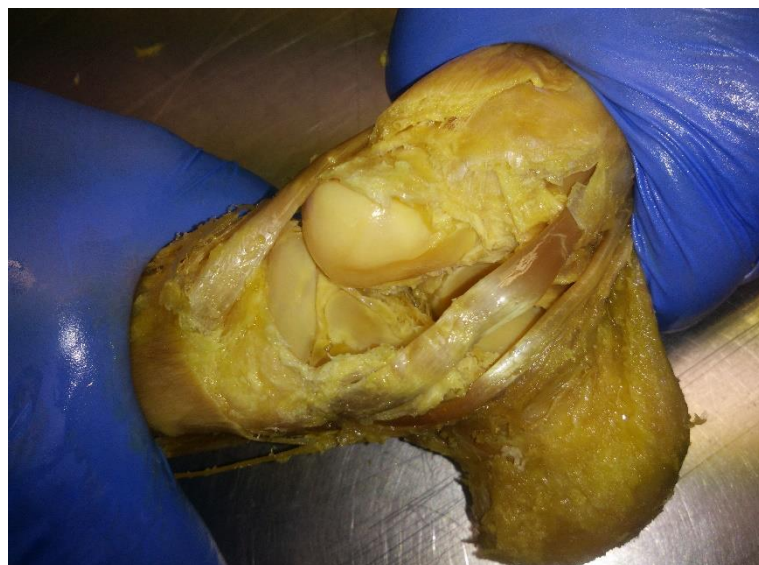


Figura 3-3. Parte interna del pie derecho. Se puede apreciar la cabeza del astrágalo articulando con el escafoides, concretamente con las carillas posterior del escafoides y superior del ligamento calcáneo-escafoideo inferior, de tal manera que forman la articulación mediotarsiana de este pie. En menor medida porque lo tapa el tendón del músculo tibial posterior, se observaría la articulación subastragalina, formada por el tálamo (carilla del calcáneo) y por la superficie astragalina opuesta al tálamo.



Figura 3-4. Parte externa del pie derecho. Se puede apreciar como en la parte anterior, la cabeza del astrágalo articulando con el escafoides, concretamente con la carilla posterior del escafoides, de tal manera que forman la articulación mediotarsiana de este pie. Se observa perfectamente la articulación subastragalina, formada por el tálamo (carilla del calcáneo) y por la superficie astragalina opuesta al tálamo.

- Por último y una vez que hemos limpiado la pieza por completo para nuestro escáner, observamos como en la *Figura 3-5* se aprecian las distintas superficies que van a ser escaneadas y en la que se trabajará para cumplir los objetivos que se marcan en el punto 2 del proyecto. Con las piezas tal y como se muestran, ya estamos en disposición de realizar el escáner 3D de las superficies que nos interesan.



Figura 3-5. Plano superior del calcáneo e inferior del astrágalo, dónde se pueden apreciar el tálamo y su superficie complementaria en el astrágalo, formando la articulación subastragalina. También se ve claramente la articulación de las carillas del calcáneo con las carillas de la cabeza del astrágalo, formando la ya mencionada articulación mediotarsiana, dónde también interviene la superficie posterior del escafoide y la cabeza del astrágalo en su gran superficie.

3.2- Escaneo en 3D de las articulaciones mediotarsiana y subastragalina

El objetivo de realizar el escáner de las articulaciones mediotarsianas y subastragalina no es más que justificar el modelo geométrico de esfera y cilindro que se propone en el planteamiento del proyecto, además de obtener las medidas de los parámetros que serán necesarios en el estudio matemático del movimiento de la articulación. Para justificarlo, se va a reconstruir mediante el escáner que se detalla a continuación, la esfera y el cilindro que modelan geoméricamente la articulación.

Para la reconstrucción por ordenador de la esfera y cilindro, nos basta con realizar el escáner 3D del astrágalo, ya que la esfera sería la cabeza del mismo y el cilindro la superficie complementaria al tálamo en el calcáneo. En la *Figura 3-6* observamos el escáner, que ha sido realizado con el sistema 3D Laser Scanner LPX – 600 de Roland, que incluye el software de exploración LPX EZ Studio de Roland [17] y tratado con el programa 3D Builder que proporciona el sistema operativo Windows.

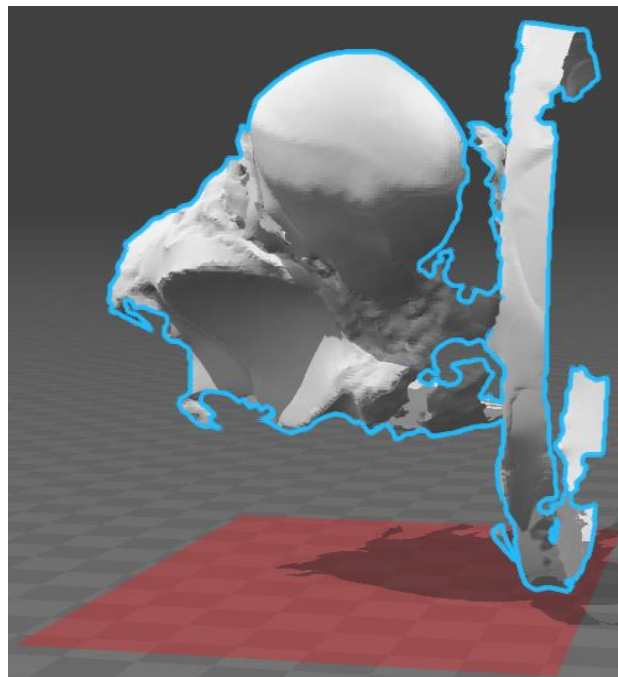


Figura 3-6. Escáner en 3D del astrágalo, dónde podemos apreciar la cabeza del astrágalo que será modelado como esfera, y la superficie opuesta al tálamo, que sería el cilindro.

Una vez tenemos el escáner, tenemos que utilizar un programa con el que tratar este tipo de archivos. Se ha utilizado el SolidWorks [18] para la reconstrucción de una esfera y de un cilindro a partir del escáner en 3D que se acaba de explicar. En la *Figura 3-7* puede observarse como realmente a partir de la cabeza del astrágalo y de la superficie contraria al tálamo, puede obtenerse una esfera y un cilindro, con sus radios correspondientes. Para la esfera ha sido necesario realizar trazos verticales y horizontales para luego compactarlo todo y convertirlo en un sólido, siguiendo estos trazos la superficie de la cabeza del astrágalo. Para el cilindro, sin embargo, ha bastado con realizar unos trazos verticales, siguiendo en la medida de lo posible el contorno que riga la superficie en cuestión.

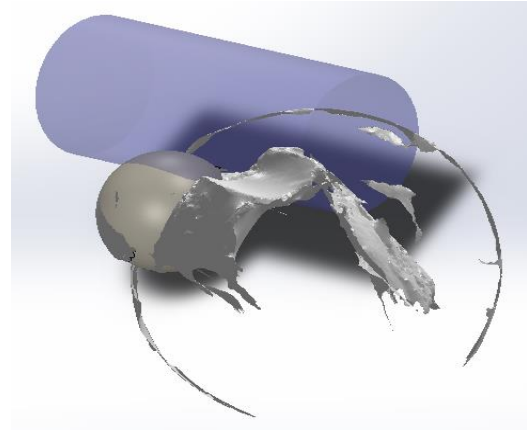
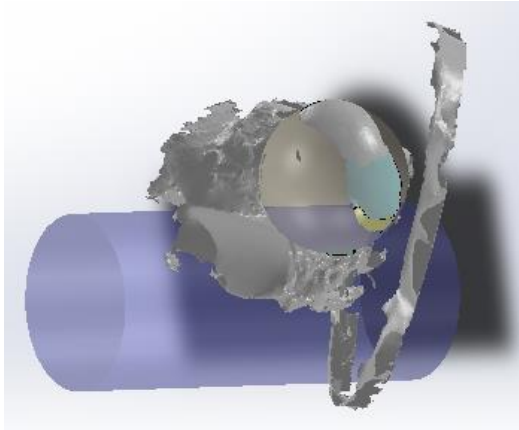


Figura 3-7. Reconstrucción de la esfera y el cilindro a partir de las superficies cabeza astrgalina y tálamo del calcáneo, desde diferentes puntos de vista aleatorios, con el objetivo de que pueda interpretarse una comparación entre esta reconstrucción y la figura 1-8.

También resultaban importantes obtener las medidas del radio de la esfera y del cilindro que posteriormente serán necesarias en el estudio matemático, ya que todas las expresiones dependerán de dichos radios. Los radios se pueden comprobar en la Figura 3-8.

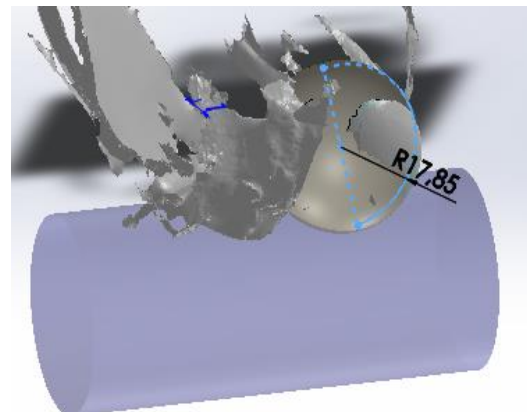
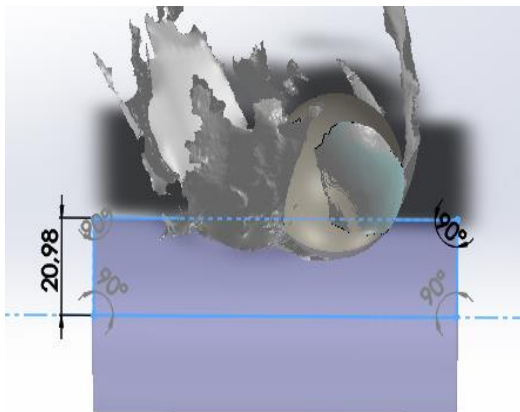


Figura 3-8. Medidas del radio de la esfera y del cilindro necesarias para el desarrollo matemático. Ambas están expresadas en milímetros y son medidas totalmente reales

Por tanto, queda justificado que el modelado matemático que se va a utilizar de aquí en adelante es el movimiento relativo entre dos figuras geométricas, un cilindro y una esfera, como se muestra en el gráfico de la Figura 3-9.

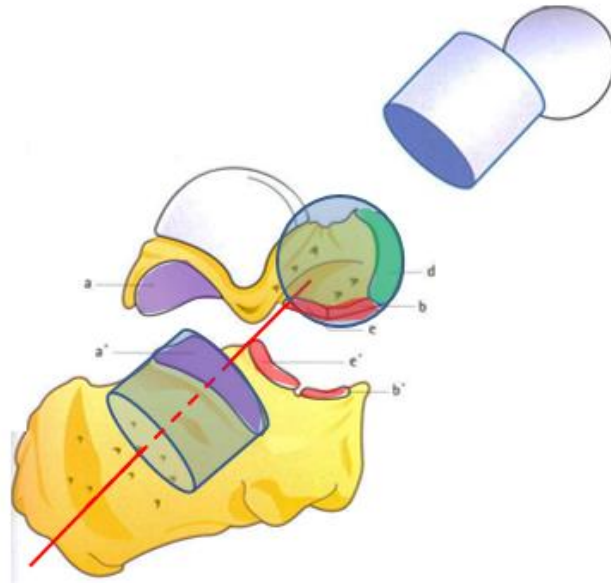


Figura 3-9 [5]. Calcáneo y astrágalo formando la articulación subastragalina y la mediotarsiana, idealizadas geométricamente como se aprecia en la imagen. Este modelo geométrico será el utilizado en el desarrollo matemático..

3.3- Desarrollo matemático

En este punto del proyecto, se aborda el estudio matemático de la articulación. Para ello, se han realizado unas aproximaciones e idealizaciones geométricas de las piezas óseas mediante un escáner 3D de las mismas, de tal manera que la cabeza del astrágalo podríamos aproximarla como una esfera, y la articulación subastragalina como un cilindro (véase el punto anterior 3.2).

Cuando se produce movimiento en esta articulación (matemáticamente hablando, la articulación es un sistema mecánico), es la esfera (cabeza del astrágalo) la que rodaría sobre el cilindro (superficie del calcáneo que hace contacto con la superficie del astrágalo y forman la subastragalina), y el cilindro se quedaría fijo [22]. De esta manera, podemos trabajar matemáticamente con el modelado geométrico [22] que se recoge en la *Figura 3-10*. Por otro lado, destacar que se partirá del segundo planteamiento para explicar el funcionamiento de la articulación matemáticamente (véase el punto 1.1, “Hipótesis de movimiento”), ya que el primer planteamiento es prácticamente descartable teniendo en cuenta que para que las dos articulaciones tuviesen un eje por separado, serían necesarias 4 piezas óseas y no 3, como es el caso [5]

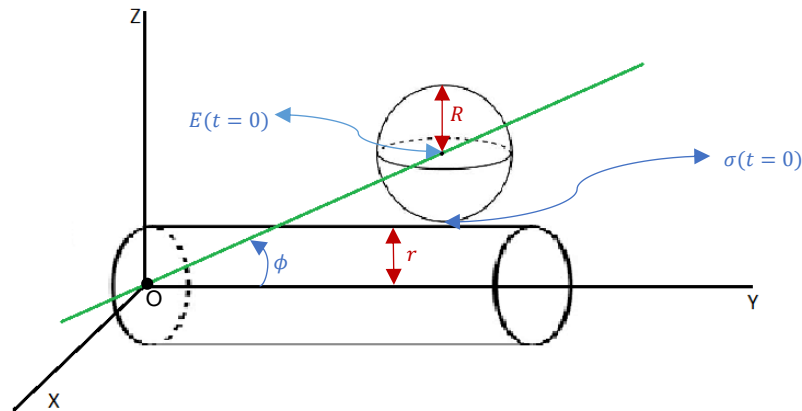


Figura 3-10. Esquema genérico de la idealización geométrica. El eje Y “corresponde” al eje anatómico transversal, el eje Z al eje longitudinal de la pierna y el eje X al eje longitudinal del pie (ver figura 1-11). Es importante destacar que el eje Y anatómico también presenta una orientación oblicua respecto a los ejes X y Z, por lo que este sistema de referencia sería una aproximación ideal de la realidad.

A partir de ahora, se realizará un estudio matemático de la articulación en movimiento. Se calculará las distintas trayectorias que realiza la esfera sobre el cilindro cuando se produce movimiento, según el tipo de hipótesis médica. Posteriormente, obtendremos el eje de rotación para cada hipótesis médica.

3.3.1- Cálculo de trayectorias

Se calcularán las distintas trayectorias que la esfera realizará sobre el cilindro (o viceversa) atendiendo a las hipótesis médicas que se han planteado en la introducción. Cada hipótesis médica será “traducida” al lenguaje matemático, para poder alcanzar los objetivos que se han descrito anteriormente.

3.3.1.1- Datos genéricos

Atendiendo a la *Figura 3-10*, podemos obtener ciertos datos generales antes de empezar a estudiar el movimiento basándonos en la hipótesis médica correspondiente.

De aquí en adelante, definiremos las variables que aparecen de la siguiente manera:

R = radio de la esfera;

r = radio del cilindro;

ϕ = ángulo que forma el eje del cilindro con el eje desconocido que tiene que existir para que haya movimiento de la esfera sobre el cilindro.

t = ángulo de recorrido que realiza la esfera sobre el cilindro.

$\sigma(t)$ = trayectoria de la esfera sobre el cilindro

$E(t)$ = trayectoria del centro de la esfera

La trayectoria buscada en el cilindro, $\sigma(t)$, debe cumplir lo siguiente:

$$\sigma(0) = \left(0, \frac{R+r}{\tan\phi}, r\right) \quad (1)$$

$$\sigma(t) = (r\text{sen}(t), y(t), r\text{cos}(t)) \quad (2)$$

Para la condición (1) se ha utilizado un argumento trigonométrico para obtener la coordenada en el eje "y"; Para la condición (2) se ha tenido en cuenta que para cualquier curva trazada en un cilindro se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= r^2, \\ \text{siendo } x &= r\text{sen}(t); z = r\text{cos}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Sea $E(t)$ la trayectoria del centro de la esfera, entonces:

$$E(t) = \sigma(t) + R\vec{u} \quad (4)$$

Siendo \vec{u} el vector unitario al cilindro en el punto $\sigma(t)$. Procederemos a calcular ese vector unitario:

Tomemos $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - r^2$ y así $S = \{(x, y, z) \in R^3 : F(x, y, z) = 0\}$ es nuestro cilindro. Por tanto, tenemos lo que vale el gradiente del campo F:

$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 0, 2z) \quad (5)$$

Para conseguir nuestro vector unitario y normal, dividimos por su módulo, y hacemos el cambio de variable marcado en (3), de tal manera que se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|} = \frac{1}{r} (x, 0, z) = \frac{1}{r} (r\text{sen}(t), 0, r\text{cos}(t)) = (\text{sen}(t), 0, \text{cos}(t)) \quad (6)$$

Si sustituimos (6) en (4), nos queda lo siguiente:

$$E(t) = ((R+r)\text{sen}(t), y(t), (R+r)\text{cos}(t)) \quad (7)$$

3.3.1.2- Estudio matemático según hipótesis médicas

A partir de ahora se empezara a desarrollar razonamientos matemáticos a partir de las hipótesis médicas, que se han explicado anteriormente. Lo que va a diferenciar a todas las hipótesis en el cálculo de la trayectoria será la componente $y(t)$. Para cada hipótesis tendremos una $y(t)$ distinta. Por tanto, nos centraremos en calcular la componente en el eje “y” de la trayectoria bajo las hipótesis que vamos a estudiar.

3.3.1.2.1- Primera hipótesis médica

Este razonamiento matemático es el que coincide con la primera hipótesis del segundo planteamiento que se explica en el apartado 1.1. Para esta hipótesis, hay dos variaciones matemáticas que resultarán equivalentes:

- a) La distancia entre el centro de la esfera y el origen de coordenadas permanece constante (ver *Figura 3-10*)

Así, la ecuación de distancia entre dos puntos nos da:

$$\begin{aligned} d(E(t), O) &= \sqrt{((R+r)\text{sen}(t))^2 + y(t)^2 + ((R+r)\text{cos}(t))^2} = \\ &= \sqrt{(R+r)^2 + y(t)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que forma la distancia del origen al centro de la esfera y la altura del centro de la esfera con el eje del cilindro, obtenemos lo siguiente:

$$(R+r)^2 + y(t)^2 = \frac{(R+r)^2}{\text{tag}^2\phi} + (R+r)^2 \rightarrow y(t) = \frac{R+r}{\text{tag}\phi} \quad (9)$$

Y sustituyendo (9) en (2), tenemos nuestra trayectoria para esta hipótesis médica:

$$\sigma(t) = \left(r\text{sen}(t), \frac{R+r}{\text{tag}\phi}, r\text{cos}(t) \right) \quad (10)$$

- b) El eje desconocido que pasa por el centro de la esfera y está anclado en el origen, forma un ángulo constante ϕ con el eje del cilindro (eje OY positivo) (ver *Figura 3-10*.)

De la expresión del ángulo entre el vector $(0,1,0)$ y $E(t)$, imponiendo la condición de que tiene que ser constante, hallaremos $y(t)$:

$$\cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{E(t)} \cdot \overrightarrow{(0,1,0)}}{E(t)} = \frac{y(t)}{\sqrt{(R+r)^2 + y(t)^2}} = \text{constante} \quad (11)$$

Despejando $y(t)$ de (11), tenemos que:

$$y(t) = (R + r)\cot\phi = \frac{(R + r)}{\tan\phi} \quad (12)$$

Es decir, tenemos el mismo resultado para $y(t)$ que en el razonamiento anterior. Por tanto, la trayectoria, coincide con lo calculado en (10)

Podríamos decir que esta hipótesis médica se puede describir con dos descripciones matemáticas distintas; $y(t)$ no varía y es siempre constante.

3.3.1.2.2- Segunda hipótesis médica

La segunda hipótesis médica que corresponde al segundo planteamiento (ver apartado 1.1) se puede describir matemáticamente de la siguiente manera: el punto P de corte del eje con el cilindro permanece fijo en todo el movimiento (Figura 3-11). Esto conllevaría a un movimiento de balanceo por parte de la esfera sobre el cilindro. La esfera rodaría sobre el cilindro.

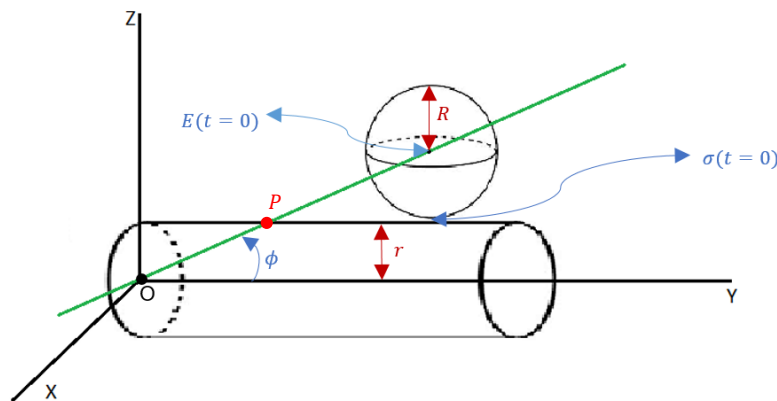


Figura 3-11. Idealización geométrica de la hipótesis médica 2

Esta condición de que el punto P es fijo, implica que la distancia entre el centro de la esfera y el punto P es constante. Por tanto:

$$d(E(t), P) = cte; \text{ con } P = \left(0, \frac{r}{\tan(\phi)}, r\right) \quad (13)$$

$$\sqrt{(R + r)^2 \sin^2(t) + \left(y(t) - \frac{r}{\tan\phi}\right)^2 + ((R + r) \cos(t) - r)^2} = cte$$

Manipulando algebraicamente (13), elevando al cuadrado en los dos términos de la ecuación y utilizando la ecuación fundamental de la trigonometría para simplificar términos, llegamos a la siguiente expresión:

$$(R + r)^2 + y(t)^2 + \frac{r^2}{\operatorname{tag}^2 \phi} - \frac{2ry(t)}{\operatorname{tag} \phi} + r^2 - 2r(R + r) \cos(t) = cte \quad (14)$$

Si en la expresión (14) derivamos en “t”, llegamos a una ecuación diferencial para calcular $y(t)$. Si hacemos $\frac{dy}{dt} = y'(t)$, tenemos:

$$2y(t)y'(t) - \frac{2r}{\operatorname{tag} \phi} y'(t) + 2r(R + r) \operatorname{sen}(t) = 0 \quad (15)$$

Haciendo algunas simplificaciones en (15), tenemos la siguiente ecuación diferencial con su condición inicial (coordenada en “y” de la esfera en el instante $t = 0$)

$$\begin{cases} y(t)y'(t) - \frac{r}{\operatorname{tag} \phi} y'(t) + r(R + r) \operatorname{sen}(t) = 0 \\ y(0) = \frac{R + r}{\operatorname{tag} \phi} \end{cases} \quad (16)$$

Resolviendo la ecuación diferencial podemos obtener cual es la componente “y” de la trayectoria que realiza la esfera sobre el cilindro bajo esta segunda hipótesis médica. Para la resolución analítica de la ecuación diferencial, se empleará el método de separación de variables [23]:

La expresión (16) la podemos reescribir como:

$$y(t) \frac{dy}{dt} - A \frac{dy}{dt} = -B \operatorname{sen}(t) \quad (17)$$

siendo $A = \frac{r}{\operatorname{tag} \phi}$; $B = r(R + r)$

Aplicando separación de variables, nos queda:

$$\int (y(t) - A) dy = \int -B \operatorname{sen}(t) dt + C$$

Y resolviendo, llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{y^2}{2} - Ay = B \cos(t) + C \rightarrow y^2 - 2Ay - (2B \cos(t) + C) = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado que se acaba de obtener, tenemos como solución:

$$y(t) = A \pm \sqrt{A^2 + 2B\cos(t) + C} \quad (18)$$

De (18) sólo nos quedaremos con el signo positivo del radicando, para que pueda cumplirse la condición inicial de la ecuación diferencial (16). Calcularemos ahora la constante de integración "C" basándonos en la condición de la ecuación (16) y sustituyendo en (18) con los cambios de variables de (17):

$$y(0) = \frac{(R+r)}{\operatorname{tag}\phi} \rightarrow \frac{R+r}{\operatorname{tag}\phi} = \frac{r}{\operatorname{tag}\phi} + \sqrt{\frac{r^2}{\operatorname{tag}^2\phi} + 2r(R+r) + C} \quad (19)$$

Manipulando y haciendo algunas operaciones, nos sale que $C = (R+r) \left(\frac{R-r}{\operatorname{tag}^2\phi} - 2r \right)$ y si sustituimos ese resultado en la solución de la ecuación diferencial (18), finalmente, queda:

$$y(t) = \frac{r}{\operatorname{tag}\phi} + \sqrt{\frac{R^2}{\operatorname{tag}^2\phi} + 2r(R+r)(\cos(t) - 1)} \quad (20)$$

Por tanto, nuestra trayectoria queda de la siguiente manera:

$$\sigma(t) = \left(r\operatorname{sen}(t), \frac{r}{\operatorname{tag}\phi} + \sqrt{\frac{R^2}{\operatorname{tag}^2\phi} + 2r(R+r)(\cos(t) - 1)}, r\cos(t) \right) \quad (21)$$

3.3.1.2.3- Tercera hipótesis médica

Para esta hipótesis médica que se ha detallado anteriormente (apartado 1.1; segundo planteamiento, tercera hipótesis), podemos aplicar la siguiente descripción matemática que se recoge en la *Figura 3-12*: La esfera de centro $E(t)$ se mueve de manera que la distancia entre $E(t)$ y $(0, -\tau, 0)$ es constante e igual a “d”.

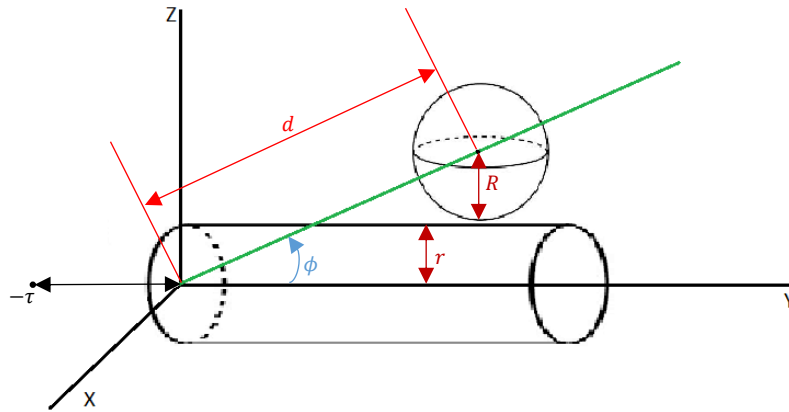


Figura 3-12 Idealización geométrica de la tercera hipótesis médica

En esta hipótesis el movimiento se produce desplazándose el punto en el origen O una distancia τ , y manteniendo constante la distancia del punto en el origen O hasta el centro de la esfera $E(t)$.

Por tanto, podríamos deducir que $E(t)$ permanece siempre en el siguiente cilindro:

$$x^2 + z^2 = (R + r)^2 ; \quad \text{siendo } x = (R + r)\text{sen}(t); z = (R + r)\text{cos}(t) \quad (22)$$

Aplicando el razonamiento matemático anteriormente expuesto, tenemos que:

$$d(E(t), (0, -\tau, 0)) = d$$

$$\sqrt{(R + r)^2 \text{sen}^2 t + (y(t) + \tau)^2 + (R + r)^2 \text{cos}^2 t} = d \quad (23)$$

Si simplificamos (23) con la ecuación fundamental de la trigonometría y despejamos $y(t)$ posteriormente, nos queda la siguiente expresión:

$$y(t) + \tau = \pm \sqrt{d^2 - (R + r)^2} \quad (24)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en la *Figura 3-12*, nos damos cuenta de que el término de (24) que se encuentra a la derecha de la igualdad, corresponde con el

cateto contiguo al triángulo rectángulo que contiene el ángulo ϕ que se indica en la figura citada. Por tanto, nos queda que $y(t)$ cumple:

$$y(t) = -\tau \pm \frac{R+r}{\tan\phi} \quad (25)$$

Finalmente, la trayectoria correspondiente a dicha hipótesis corresponde con una hélice que describe la esfera sobre el cilindro:

$$\sigma(t) = \left(r\sin(t), -\tau \pm \frac{R+r}{\tan\phi}, r\cos(t) \right) \quad (26)$$

3.3.2- Cálculo de matrices de rotaciones entre esfera y cilindro a partir de trayectorias

Con la trayectoria obtenida (10) para la primera hipótesis médica a partir de los dos razonamientos matemáticos que se expusieron en el punto 3.3.1.2.1, podemos obtener la matriz de rotación entre la esfera y el cilindro, es decir, entre el astrágalo y el calcáneo. Planteando unos sistemas de coordenadas tanto en el cilindro como en la esfera, podemos estudiar la evolución del sistema de referencia de la esfera (es el que se mueve) con respecto al sistema de referencia del cilindro, que se mantiene fijo. En la *Figura 3-13* se muestra la disposición geométrica de nuestro modelo y los sistemas de referencia asociados. Básicamente, tendremos que calcular la matriz que forman los vectores $\vec{e}_3(t)$, $\vec{e}_2(t)$ y $\vec{e}_1(t)$.

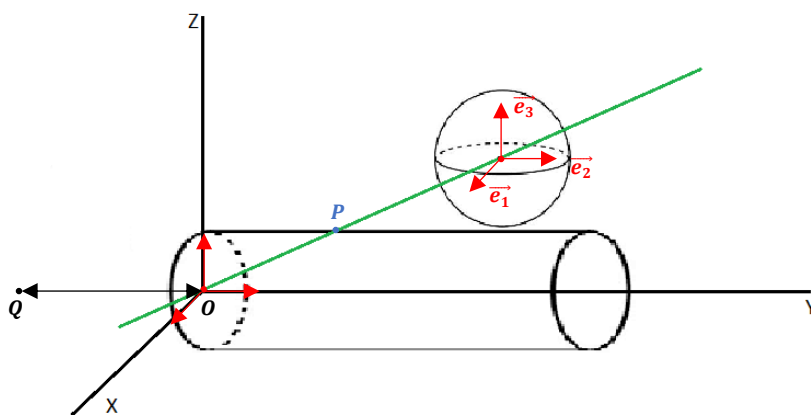


Figura 3-13. Modelo para el cálculo de las matrices de rotación que incluyen todas las características de cada una de ellas: el Origen, punto P y punto Q.

Para ello, estableceremos unos pasos genéricos para construir “marcadores geométricos” (i.e, una base ortonormal) que seguiremos para los siguientes cálculos referentes a las hipótesis médicas, que consisten en lo siguiente:

- Empezaremos calculando el vector $\vec{e}_3(t)$, de la misma forma para cada hipótesis.
- Posteriormente se calculará el vector $\vec{e}_2(t)$, buscando que ese vector pertenezca al plano que forma el vector $\vec{e}_3(t)$ con un dato obtenido de la hipótesis médica.
- El producto vectorial $\vec{e}_2(t) \times \vec{e}_3(t)$ nos dará el vector $\vec{e}_1(t)$
- Finalmente, nuestra matriz de rotación genérica quedará de la siguiente forma:

$$A(t) = \begin{pmatrix} e_1^x & e_2^x & e_3^x \\ e_1^y & e_2^y & e_3^y \\ e_1^z & e_2^z & e_3^z \end{pmatrix}$$

3.3.2.1- Matriz de rotación para la primera hipótesis médica

El razonamiento matemático del cálculo está basado en la *Figura 3-13*, donde se detalla el planteamiento gráfico del problema:

Cálculo del vector $\vec{e}_3(t)$

Atendiendo a la *Figura 3-13* y observando donde está el centro de la esfera (7) y el punto de trayectoria (2), podemos definir y calcular el vector $\vec{e}_3(t)$ de la siguiente manera:

$$\vec{e}_3(t) = \frac{\overrightarrow{E(t)} - \overrightarrow{\sigma(t)}}{|\overrightarrow{E(t)} - \overrightarrow{\sigma(t)}|} = \frac{(R\text{sen}(t), 0, R\text{cos}(t))}{R} = (\text{sen}(t), 0, \text{cos}(t)) \quad (27)$$

Cálculo del vector $\vec{e}_2(t)$

Para este vector, se va a buscar un $\overrightarrow{e_2(t)} \in S \{ \overrightarrow{E(t)} - O, \overrightarrow{e_3(t)} \}$, siendo S un plano formado por los dos vectores que se indican; de modo que:

- 1ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t) \rangle = 0$, es decir, que sean perpendiculares
- 2ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_2(t) \rangle = 1$, es decir, que sean de módulo uno.

Por tanto, escribimos:

$$\vec{e}_2(t) = a(t)E(t) + b(t)\vec{e}_3(t) \quad (28)$$

Siendo $E(t)$ el centro de la esfera (7) y O el origen de coordenadas.

Con lo cual tendremos que calcular los factores $a(t)$ y $b(t)$ para hallar nuestro vector $\vec{e}_2(t)$. Estos factores serán calculados con las dos condiciones que se han mencionado anteriormente.

1ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t) \rangle = 0$

Desarrollaremos el vector $\vec{e}_2(t)$ de la ecuación (28) y luego realizaremos el producto escalar con $\vec{e}_3(t)$, obligando a que el resultado sea igual a 0.

$$\begin{aligned} \vec{e}_2(t) &= a(t)((R+r)\text{sen}(t), y(t), (R+r)\text{cos}(t)) + b(t)(\text{sen}(t), 0, \text{cos}(t)) = \\ &= (a(t)(R+r)\text{sen}(t) + b(t)\text{sen}(t), a(t)y(t), a(t)(R+r)\text{cos}(t) + b(t)\text{cos}(t)) = \\ &= (\text{sen}(t)(a(t)(R+r) + b(t)), a(t)y(t), \text{cos}(t)(a(t)(R+r) + b(t))) \end{aligned} \quad (29)$$

Haciendo el producto escalar de (27) con (29), nos queda:

$$\text{sen}^2(t)(a(t)(R+r) + b(t)) + \text{cos}^2(t)(a(t)(R+r) + b(t)) = 0 \quad (30)$$

Despejando de (30) obtenemos lo siguiente:

$$b(t) = -a(t)(R+r) \quad (31)$$

De tal manera que nuestro vector $\vec{e}_2(t)$ queda de la siguiente manera:

$$\vec{e}_2(t) = a(t)(E(t) - (R+r)\vec{e}_3(t)) = a(t)(0, y(t), 0) \quad (32)$$

2ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_2(t) \rangle = 1$

Aplicaremos al vector que el módulo tiene que ser uno. Utilizando la ecuación (32), tendremos lo que sigue:

$$1 = a(t)^2 \langle 0, y(t), 0 ; 0, y(t), 0 \rangle = a(t)^2 y(t)^2 \quad (33)$$

Despejando $a(t)$ de (33) y sustituyendo el valor de $y(t)$ de la ecuación (9), obtenemos:

$$a(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{\text{tag}\phi}{R+r} \quad (34)$$

Por tanto, si sustituimos (34) en (32), podemos tener nuestra solución final para el vector $\vec{e}_2(t)$

$$\vec{e}_2(t) = \frac{1}{y(t)} (0, y(t), 0) = (0, 1, 0) \quad (35)$$

En este caso, este vector era bastante simple e intuitivo de averiguar. El movimiento de la esfera sobre el cilindro es realizar un corte sagital en dicho cilindro, según la trayectoria (10) calculada anteriormente. Por tanto, es evidente que uno de los vectores que pertenece al plano S puede ser perfectamente el (0, 1, 0). Dicho vector pertenece al plano y, además, es perpendicular al vector $\vec{e}_3(t)$

Cálculo del vector $\vec{e}_1(t)$

Como se mencionó anteriormente, haciendo el producto vectorial de los dos vectores obtenemos un vector perpendicular al plano formado por ellos.

$$\vec{e}_1(t) = \vec{e}_2(t) \times \vec{e}_3(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(t) & 0 & \text{cos}(t) \end{vmatrix} = (\text{cos}(t), 0, -\text{sen}(t)) \quad (36)$$

Matriz de Rotación

Ya podemos construir nuestra matriz de rotación del sistema de referencia asociado al centro de la cabeza del astrágalo para cualquier instante, es decir, esta será la matriz de orientación para todo el tiempo de movimiento de inversión – eversión.

$$A(t) = \begin{pmatrix} e_1^x & e_2^x & e_3^x \\ e_1^y & e_2^y & e_3^y \\ e_1^z & e_2^z & e_3^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos}(t) & 0 & \text{sen}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(t) & 0 & \text{cos}(t) \end{pmatrix} \quad (37)$$

Esta matriz representaría la orientación del sistema de la esfera respecto al cilindro para las descripciones matemáticas asociadas a la primera hipótesis médica. Recordamos que para esta hipótesis había dos razonamientos posibles que nos llevaban a la misma conclusión

3.3.2.2- Matriz de rotación para la segunda hipótesis médica

Basándonos en la *Figura 3-13*, calcularemos los vectores que forman nuestro sistema de referencia global

Cálculo del vector $\vec{e}_3(t)$

Siguiendo el mismo proceso que en el razonamiento de la primera hipótesis:

$$\vec{e}_3(t) = \frac{\overrightarrow{E(t)} - \overrightarrow{\sigma(t)}}{|\overrightarrow{E(t)} - \overrightarrow{\sigma(t)}|} = (\text{sen}(t), 0, \text{cos}(t)) \quad (38)$$

Cálculo del vector $\vec{e}_2(t)$

Para este vector, se va a buscar un $\overrightarrow{e_2(t)} \in S \{E(t) - P, \overrightarrow{e_3(t)}\}$, de modo que:

- 1ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t) \rangle = 0$, es decir, que sean perpendiculares
- 2ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_2(t) \rangle = 1$, es decir, que sean de módulo uno.

Escribiendo:

$$\vec{e}_2(t) = a(t)[E(t) - P] + b(t)\vec{e}_3(t) \quad (39)$$

Siendo $E(t)$ el centro de la esfera (7) y P el punto que se observa en la *Figura 3-13* propio de esta hipótesis: $(0, \frac{r}{\tan(\phi)}, r)$

Con lo cual tendremos que calcular los factores $a(t)$ y $b(t)$ para hallar nuestro vector $\vec{e}_2(t)$. Estos factores serán calculados con las dos condiciones que se han mencionado anteriormente.

1ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t) \rangle = 0$

Desarrollaremos el vector $\vec{e}_2(t)$ de la ecuación (39) sustituyendo el centro de la esfera y el punto P, junto al vector $\vec{e}_3(t)$, y luego realizaremos el producto escalar con $\vec{e}_3(t)$, obligando a que el resultado sea igual a 0.

$$\begin{aligned} \vec{e}_2(t) &= a(t) \left((R+r)\text{sen}(t), y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}, (R+r)\text{cos}(t) - r \right) + b(t)\vec{e}_3 = \\ &= \left(a(t)(R+r)\text{sen}(t) + b(t)\text{sen}(t), y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}, a(t)((R+r)\text{cos}(t) - r) + b(t)\text{cos}(t) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Haciendo el producto escalar de (40) con (38), tenemos que:

$$a(t)(R+r)\text{sen}^2(t) + b(t)\text{sen}^2(t) + (R+r)\cos^2(t) - r\cos(t) + b(t)\cos^2(t) = 0 \quad (41)$$

Realizando simplificaciones algebraicas y aplicando propiedades trigonométricas en (41), obtenemos la siguiente expresión:

$$a(t)h(t) + b(t) = 0 \quad (42)$$

Donde:

$$h(t) = (R+r) - r\cos(t) \quad (43)$$

Por lo que:

$$b(t) = -a(t)h(t) \quad (44)$$

En consecuencia, nuestro vector $\vec{e}_2(t)$ queda de la siguiente manera:

$$\vec{e}_2(t) = a(t)(E(t) - P) - a(t)h(t)\vec{e}_3(t) = a(t)(E(t) - P - h(t)\vec{e}_3(t)) \quad (45)$$

2ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_2(t) \rangle = 1$

Aplicaremos al vector que el módulo tiene que ser unitario. Utilizando la ecuación (45), tendremos lo que sigue:

$$1 = a(t)^2 \langle (E(t) - P) - h(t)\vec{e}_3(t); (E(t) - P) - h(t)\vec{e}_3(t) \rangle = a(t)^2 \{ \langle E(t) - P, E(t) - P \rangle - 2h(t) \langle E(t) - P, \vec{e}_3(t) \rangle + h(t)^2 \langle \vec{e}_3(t), \vec{e}_3(t) \rangle \} \quad (46)$$

Para simplificar (46), tenemos que tener en cuenta los siguientes razonamientos que se explican a continuación:

- $E(t) - P$ es la distancia que bajo esta hipótesis médica que se explicó con anterioridad, consideramos constante, cuyo valor es $\text{distancia}(E(0), P)$. Por tanto, aplicando la expresión de la distancia entre dos puntos (sustituyendo el punto P explicado en la *Figura 3-13*. y la expresión (7) que define el centro de la esfera, con $t = 0$), tendremos el siguiente resultado:

$$\text{dist}(E(0), P)^2 = \left(y(0) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)^2 + [(R+r) - r]^2 = \frac{R^2}{\tan^2(\phi)} + R^2 = \frac{R^2}{\text{sen}^2(\phi)} \quad (47)$$

- Sustituyendo (7), el punto P y el vector \vec{e}_3 , podemos hacer el producto escalar:

$$\begin{aligned} & \langle E(t) - P, \vec{e}_3(t) \rangle = \\ = & \langle (R+r)\text{sen}(t), y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}, (R+r)\cos(t) - r; \text{sen}(t), 0, \cos(t) \rangle = \quad (48) \\ & = (R+r) - r\cos(t) = h(t) \end{aligned}$$

Donde observamos que (48) es precisamente $h(t)$, que lo definimos con anterioridad en la expresión (43).

En consecuencia, si sustituimos en la expresión (46) las expresiones (47) y (48), obtenemos el factor $a(t)$:

$$1 = a(t)^2 \left[\frac{R^2}{\text{sen}^2(\phi)} - h(t)^2 \right] = a(t)^2 \frac{R^2 - h(t)^2 \text{sen}^2(\phi)}{\text{sen}^2(\phi)} \quad (49)$$

Despejando $a(t)$ de (49), obtenemos:

$$a(t) = \pm \frac{\text{sen}^2(\phi)}{\sqrt{R^2 - h(t)^2 \text{sen}^2(\phi)}} \quad (50)$$

Para elegir el signo de (50), utilizaremos la condición sobre su orientación, que es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & 1 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow a(t) > 0 \rightarrow a(t) = \frac{\text{sen}^2(\phi)}{\sqrt{R^2 - h(t)^2 \text{sen}^2(\phi)}} \quad (51)$$

Donde vamos a reescribir (51) como sigue:

$$a(t) = \frac{\text{sen}^2(\phi)}{\sqrt{R^2 - h(t)^2 \text{sen}^2(\phi)}} = K \quad (52)$$

Por tanto, sustituyendo (52), (7), (38) y el punto P en (45), podemos tener nuestra solución final para el vector $\vec{e}_2(t)$:

$$\vec{e}_2(t) = K \left[((R+r)\text{sen}(t), y(t), (R+r)\cos(t)) - \left(0, \frac{r}{\tan(\phi)}, r \right) - h(t)(\text{sen}(t), 0, \cos(t)) \right] \quad (53)$$

Realizando operaciones algebraicas con (53), podemos simplificar el resultado final para nuestro vector $\vec{e}_2(t)$:

$$\vec{e}_2(t) = K \left(r \cos(t) \operatorname{sen}(t), y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}, -r \operatorname{sen}^2(t) \right) \quad (54)$$

Siendo K lo indicado en (52); $y(t)$ la trayectoria razonada bajo las características de la hipótesis médica dada.

Cálculo del vector $\vec{e}_1(t)$

Realizaremos el producto vectorial de los dos vectores, y obtendremos $\vec{e}_1(t)$:

$$\vec{e}_1(t) = \vec{e}_2(t) \times \vec{e}_3(t) = K \begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos(t) \operatorname{sen}(t) & y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)} & -r \operatorname{sen}^2(t) \\ \operatorname{sen}(t) & 0 & \cos(t) \end{vmatrix} \quad (55)$$

Resolviendo el determinante de la expresión (55), obtenemos que el último vector que nos falta para construir nuestro sistema de referencia está dado por:

$$\vec{e}_1(t) = K \left[\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)} \right) \cos(t), -r \operatorname{sen}(t), -\operatorname{sen}(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)} \right) \right] \quad (56)$$

Dónde de nuevo K está dada en (52); $y(t)$ es la trayectoria razonada bajo las características de la hipótesis médica dada.

Matriz de Rotación

Sustituimos los vectores como sigue a continuación y obtenemos la matriz de rotación que define la orientación que sigue el sistema de referencia del astrágalo (esfera) a lo largo de la trayectoria sobre el cilindro (calcáneo), en cualquier instante de tiempo.

$$A(t) = \begin{pmatrix} e_1^x & e_2^x & e_3^x \\ e_1^y & e_2^y & e_3^y \\ e_1^z & e_2^z & e_3^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)} \right) \cos(t) & r \cos(t) \operatorname{sen}(t) & \frac{1}{K} \operatorname{sen}(t) \\ -r \operatorname{sen}(t) & \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)} \right) & 0 \\ -\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)} \right) \operatorname{sen}(t) & -r \operatorname{sen}^2(t) & \frac{1}{K} \cos(t) \end{pmatrix} \quad (57)$$

Siendo los parámetros los ya descritos con anterioridad (52), (43) y (20), que repetimos a continuación por claridad:

$$K = \frac{\text{sen}^2(\phi)}{\sqrt{R^2 - h(t)^2 \text{sen}^2(\phi)}}$$

$$h(t) = (R + r) - r \cos(t)$$

$$y(t) = \frac{r}{\text{tag}\phi} + \sqrt{\frac{R^2}{\text{tag}^2\phi} + 2r(R + r)(\cos(t) - 1)}$$

3.3.1.3- Matriz de rotación para la tercera hipótesis médica

Basándonos en la *Figura 3-13*, calcularemos los vectores que forman nuestro sistema de referencia global

Cálculo del vector $\vec{e}_3(t)$

Al igual que hicimos en el apartado anterior, el vector $\vec{e}_3(t)$ lo calculamos siempre de la misma forma, según hemos planteado nuestro sistema de referencia en el centro de la esfera:

$$\vec{e}_3(t) = \frac{\overrightarrow{E(t)} - \overrightarrow{\sigma(t)}}{|\overrightarrow{E(t)} - \overrightarrow{\sigma(t)}|} = (\text{sen}(t), 0, \cos(t)) \quad (58)$$

Cálculo del vector $\vec{e}_2(t)$

Para este vector, se va a buscar un $\overrightarrow{e_2(t)} \in S \{E(t) - Q, \overrightarrow{e_3(t)}\}$, de modo que:

- 1ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t) \rangle = 0$, es decir, que sean perpendiculares
- 2ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_2(t) \rangle = 1$, es decir, que sean de módulo uno.

Por tanto:

$$\vec{e}_2(t) = a(t)[E(t) - Q] + b(t)\vec{e}_3(t) \quad (59)$$

Siendo $E(t)$ el centro de la esfera (7) y Q el punto que se observa en la *Figura 3-13* propio de esta hipótesis: $(0, -\tau, 0)$

Con lo cual tendremos que calcular los factores $a(t)$ y $b(t)$ para hallar nuestro vector $\vec{e}_2(t)$. Estos factores serán calculados con las dos condiciones que se han mencionado anteriormente.

1ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t) \rangle = 0$

Desarrollaremos el vector $\vec{e}_2(t)$ de la ecuación (59) y luego realizaremos el producto escalar con $\vec{e}_3(t)$, obligando a que el resultado sea igual a 0.

$$\begin{aligned} \vec{e}_2(t) &= a(t) \left[\left((R+r)\text{sen}(t), -\tau + \frac{R+r}{\tan(\phi)}, (R+r)\cos(t) \right) - (0, -\tau, 0) \right] + b(t)\vec{e}_3 \\ &= \left(a(t)(R+r)\text{sen}(t) + b(t)\text{sen}(t), \frac{a(t)(R+r)}{\tan(\phi)}, a(t)(R+r)\cos(t) + b(t)\cos(t) \right) \end{aligned} \quad (60)$$

Haciendo el producto escalar de (60) con (58), tenemos que:

$$\text{sen}^2(t)(a(t)(R+r) + b(t)) + \text{cos}^2(t)(a(t)(R+r) + b(t)) = 0 \quad (61)$$

Despejando de (61) obtenemos lo siguiente:

$$b(t) = -a(t)(R+r) \quad (62)$$

En consecuencia, nuestro vector $\vec{e}_2(t)$ queda de la siguiente manera:

$$\vec{e}_2(t) = a(t)(E(t) - Q - (R+r)\vec{e}_3(t)) = \left(0, \frac{a(t)(R+r)}{\tan(\phi)}, 0 \right) \quad (63)$$

2ª condición: $\langle \vec{e}_2(t), \vec{e}_2(t) \rangle = 1$

Aplicaremos al vector que el módulo tiene que ser uno. Utilizando la ecuación (63), tendremos lo que sigue:

$$1 = a(t)^2 \left\langle 0, \frac{a(t)(R+r)}{\tan(\phi)}, 0 ; 0, \frac{a(t)(R+r)}{\tan(\phi)}, 0 \right\rangle = \left(\frac{a(t)(R+r)}{\tan(\phi)} \right)^2 \quad (64)$$

Despejando $a(t)$ de (64), obtenemos:

$$a(t) = \frac{\text{tag}\phi}{R+r} \quad (65)$$

Por tanto, si sustituimos (65) en (63), podemos tener nuestra solución final para el vector $\vec{e}_2(t)$:

$$\vec{e}_2(t) = (0, 1, 0) \quad (66)$$

Hemos obtenido el mismo vector que en el caso de la primera hipótesis. Esto nos lleva deducir que, aunque la esfera se mueva con trayectorias diferentes para la primera y tercera hipótesis, la forma de rotar alrededor del cilindro al desplazarse según sus trayectorias, es la misma.

Cálculo del vector $\vec{e}_1(t)$

Realizaremos el producto vectorial de los dos vectores, como hemos hecho hasta ahora:

$$\overrightarrow{e_1(t)} = \overrightarrow{e_2(t)} \times \overrightarrow{e_3(t)} = (\cos(t), 0, -\text{sen}(t)) \quad (67)$$

Matriz de Rotación

Sustituimos los vectores como sigue a continuación y obtenemos la matriz de rotación que define la orientación que sigue el sistema de referencia del astrágalo (esfera) a lo largo de la trayectoria sobre el cilindro (calcáneo), para cualquier instante de tiempo.

$$A(t) = \begin{pmatrix} e_1^x & e_2^x & e_3^x \\ e_1^y & e_2^y & e_3^y \\ e_1^z & e_2^z & e_3^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & \text{sen}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix} \quad (68)$$

3.3.3- Cálculo del eje instantáneo de rotación a partir de las matrices de rotación

Una vez hallada la matriz de orientación que nos define como es la rotación de la esfera respecto al cilindro en las tres coordenadas del espacio, calcularemos la orientación del eje instantáneo de rotación para cada matriz de rotación calculada.

Para ello, resolveremos un sistema de ecuaciones, atendiendo al siguiente razonamiento: siendo V_i el vector director del eje instantáneo de rotación en el espacio¹, podemos plantear un sistema de ecuaciones con la matriz de rotación y las coordenadas del espacio:

$$V_i = \{(X, Y, Z) \in R^3 : A_i(t) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\} \quad (69)$$

Por tanto, de (69), podemos sacar la expresión que define nuestro sistema de ecuaciones genérico, para cualquier matriz de rotación basada en las hipótesis.

$$(A_i(t) - I_3) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Siendo I_3 la matriz identidad de tamaño 3x3.

Este sistema es un Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I), por tanto tiene infinitas soluciones posibles [24]. Por lo que elegiremos por comodidad $Z = 1$, y a partir de ahí calcularemos las coordenadas X e Y , para cada matriz de rotación. Recordemos que en este caso y observando el apartado dedicado a las matrices de rotación, tenemos dos sistemas diferentes, ya que las calculadas a partir de la primera y tercera trayectoria coinciden. La otra restante es la calculada a partir de la segunda trayectoria, en la que obteníamos otro resultado completamente distinto.

¹ Bajo la hipótesis médica (i); (i= 1, 2, 3). Recordemos que el eje de rotación es el autoespacio del vector propio 1 de la matriz $A_i(t)$

3.3.3.1- Cálculo del eje para la segunda hipótesis médica

Atendiendo a (70) y a la matriz de rotación calculada anteriormente (57), planteamos el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} K(t)\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)\cos(t) - 1 & K(t)r\cos(t)\text{sen}(t) & \text{sen}(t) \\ -K(t)r\text{sen}(t) & K(t)\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) - 1 & 0 \\ -K(t)\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)\text{sen}(t) & -K(t)r\text{sen}^2(t) & \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (71)$$

Siendo $K(t)$; $y(t)$, (52) y (20) respectivamente.

Para $Z = 1$, tendremos que hallar X e Y . Para ello, bastará con comprobar, por ejemplo, si los términos de la matriz (71) que están dentro del recuadro verde cumplen que su determinante para un “t” genérico (que no sea 0), es distinto de 0. De ser así, podemos despejar de esas dos ecuaciones las coordenadas X e Y .

Por tanto, resolvemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} K(t)r\text{sen}(t)\cos(t) & \text{sen}(t) \\ K(t)\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) - 1 & 0 \end{vmatrix} = -\text{sen}(t) \left[K(t)\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) - 1 \right] \quad (72)$$

Y sustituyendo los parámetros de (72), tenemos:

$$-\text{sen}(t) \left[\frac{\text{sen}^2(\phi)}{\sqrt{R^2 - ((R+r) - r\cos(t))^2 \text{sen}^2(\phi)}} \sqrt{\frac{R^2}{\tan^2 \phi} + 2r(R+r)(\cos(t) - 1) - 1} \right] \quad (73)$$

Observamos como en la expresión (73), para cualquier “t” distinto de 0², no se hace 0 el determinante. Podemos coger las dos primeras filas de la matriz y utilizarlas como ecuaciones del sistema, y posteriormente procederemos a resolver el sistema para la coordenada $Z = 1$:

$$\begin{cases} X \cdot \left[K(t)\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)\cos(t) - 1 \right] + Y \cdot K(t)r\cos(t)\text{sen}(t) + \text{sen}(t) = 0 \\ -X \cdot K(t)r\text{sen}(t) + Y \cdot \left[K(t)\left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) - 1 \right] = 0 \end{cases} \quad (74)$$

² Nótese que $\text{sen}(\pi) = 0$, pero no tiene sentido anatómico que $t = \pi$

Resolviendo el sistema (74) por el método clásico de sustitución [24], obtenemos que para $Z = 1$, las coordenadas X, Y son las siguientes:

$$Y(t) = \frac{K(t)r\text{sen}^2(t)}{K(t)^2 \cos(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)^2 - K(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) (1 + \cos(t)) + 1 + (K(t)r\text{sen}(t))^2 \cos(t)} \quad (75)$$

$$X(t) = \frac{\text{sen}(t) \left[K(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) - 1 \right]}{K(t)^2 \cos(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)^2 - K(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) (1 + \cos(t)) + 1 + (K(t)r\text{sen}(t))^2 \cos(t)} \quad (76)$$

Con $K(t)$; $y(t)$, (52) y (20) respectivamente

En definitiva, la orientación del eje de rotación para cada instante de tiempo de esta hipótesis, viene definido como:

$$V_i = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\text{sen}(t) \left[K(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) - 1 \right]}{K(t)^2 \cos(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)^2 - K(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) (1 + \cos(t)) + 1 + (K(t)r\text{sen}(t))^2 \cos(t)} \\ \frac{K(t)r\text{sen}^2(t)}{K(t)^2 \cos(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right)^2 - K(t) \left(y(t) - \frac{r}{\tan(\phi)}\right) (1 + \cos(t)) + 1 + (K(t)r\text{sen}(t))^2 \cos(t)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

3.3.3.2- Cálculo del eje para la primera y tercera hipótesis médica

Como vimos anteriormente, las matrices de rotación para la primera y tercera hipótesis eran idénticas, aunque las trayectorias fuesen distintas. Esto nos lleva a deducir que la orientación del eje instantáneo de rotación también será la misma para estas dos hipótesis.

Siguiendo la expresión (70) y con la matriz de rotación calculada (37) ó (68), plantearemos el sistema de ecuaciones que nos definirá las coordenadas de nuestro eje:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) - 1 & 0 & \text{sen}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(t) & 0 & \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Tenemos un Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I) con infinitas soluciones ya que la coordenada Y puede tomar cualquier valor. Resolviendo (78) por sustitución, tenemos que nuestro eje para estas dos hipótesis es el siguiente:

$$V_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} : y \in R \right\} \quad (79)$$

Hasta ahora hemos calculado la orientación del eje para las distintas hipótesis médicas. Para obtener el eje en el espacio con una posición determinada, no tendríamos más que hacer la ecuación de una recta con vector director el eje orientado y como punto el centro de la esfera, de tal manera que tendríamos:

$$W_i(t) = E(t) + \lambda V_i(t); \text{ con } \lambda \in R \quad (80)$$

Siendo $W_i(t)$ el eje de rotación para cada hipótesis médica.

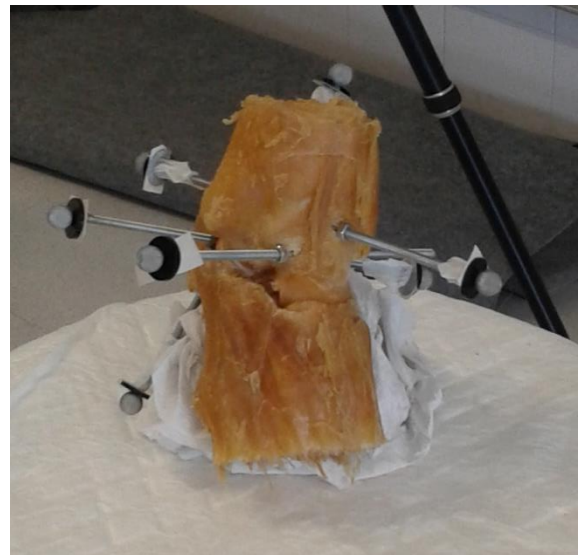
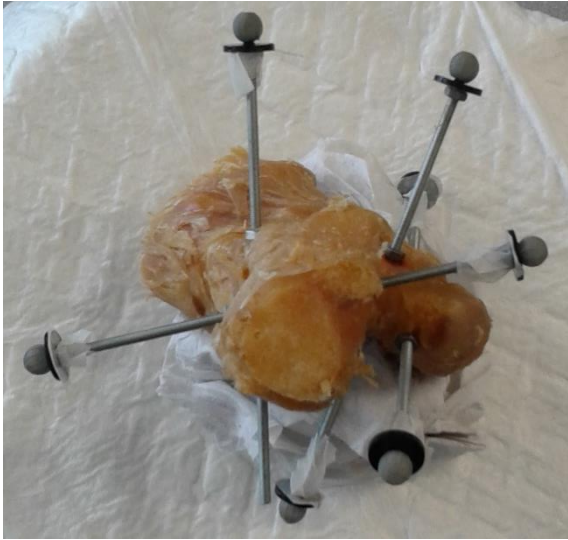
De tal manera que $W_i(t)$ es la recta que pasa por $E(t)$ (centro de la esfera) y tiene la dirección de $V_i(t)$, es decir, nuestro eje para las tres hipótesis médicas que se han planteado en el proyecto.

3.4- Análisis cinemático del movimiento de la articulación

Con un análisis cinemático 3D [20] de las articulaciones tendremos la variación en el espacio de un hueso que será el móvil, respecto al otro hueso que estará fijo. En este caso, será el astrágalo el que se mueva y el calcáneo estará en posición fija, de tal manera que obtendremos la variación en el espacio de los sistemas de referencia asociados al astrágalo y al calcáneo. Esto se consigue mediante un sistema de adquisición de imagen en movimiento, que en este caso será el sistema VICON (ver *Figura 3-15*), compuesto de seis cámaras, módulo hardware de control, el software (para analizar y presentar datos) y el equipo para ejecutar el software [21].

3.4.1- Montaje y equipamiento

En primer lugar, colocaremos a los huesos disecados en el apartado 3.1 unos marcadores reconocibles por el sistema VICON. Tanto al astrágalo como al calcáneo se le han puesto 3 y 4 marcadores (ver *Figura 3-14*). El sistema VICON detectará la evolución en el tiempo de estos tres marcadores, de tal manera que podemos calcular el sistema de referencia asociado a cada hueso para cada instante de tiempo, como se explica en el apartado siguiente, 3.4.2.



Figuras 3-14. Vista de planos superior (superior izquierda), trasera (superior derecha), externa (inferior izquierda) y frontal (inferior derecha). Se han cogido tornillos sinfín para atravesar los huesos y colocar en sus extremos los marcadores. Importante destacar el soporte de fijación para calcáneo, ya que este debe estar absolutamente quieto, mientras que es la pieza ósea del astrágalo el movimiento.

Los marcadores tienen que guardar una distancia con respecto al hueso para que sean reconocibles por las cámaras y esto conllevó a utilizar unos tornillos sinfín de 4mm de diámetro para colocar los marcadores en los extremos una vez que se atravesaban las piezas óseas con estos tornillos. Esto añadió la dificultad de tener cuidado al colocarlos para que los marcadores no colisionarán entre sí durante el movimiento, debido al pequeño espacio de trabajo del que se disponía. Todo esto, sumado a que la posición del calcáneo tenía que estar fija (para ello se empleó un soporte manual) hizo difícil la colocación de los marcadores en los ejes anatómicos (eje transversal, longitudinal de la pierna y del pie, *Figura 1-11*).

No obstante, el sistema de referencia global se intentó adecuar lo máximo posible al utilizado en la descripción matemática, cómo se argumenta en el tercer apartado de este proceso de montaje.

Una vez tenemos las piezas óseas con sus marcadores puestos, procedemos a calibrar el sistema VICON. Para ello, seguiremos una serie de pasos que se detallan a continuación:



Figura 3-15. Sistema de adquisición de imagen en movimiento VICON, compuesto por 6 cámaras, módulo hardware de control, el software y el equipo necesario para llevar a cabo la ejecución del software

1º) **Centrar las cámaras en el espacio de trabajo.** Para ello, se pusieron unos marcadores de prueba en el espacio de trabajo dónde posteriormente colocaríamos las piezas óseas. Mediante el software, hay que comprobar que las 6 cámaras están detectando los marcadores de prueba (ver Figura 3-16). Es importante revisar que las cámaras están encendidas y apuntando a la zona de trabajo.

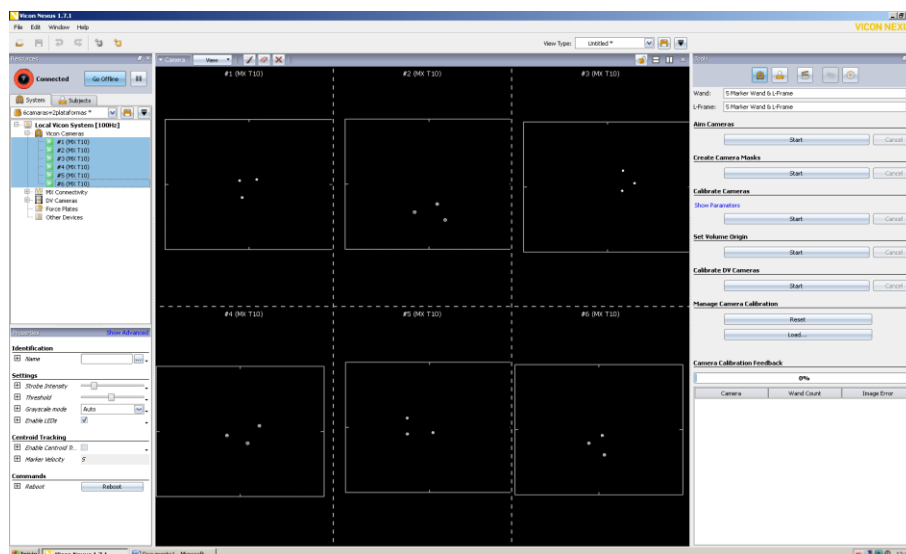


Figura 3-16. Entorno de trabajo del sistema VICON. En la parte central, observamos cómo las 6 cámaras detectan los 3 marcadores de prueba que se pusieron en el entorno de trabajo. Posteriormente se realizó lo mismo con los 5 marcadores que serán nuestro sistema de referencia que se explica en el tercer paso.

2º) **Calibración dinámica de las cámaras.** El objetivo es calibrar el espacio de trabajo, es decir, relacionar las coordenadas de las cámaras con las coordenadas en 3D de los marcadores de prueba. Moveremos los marcadores en el entorno de trabajo y verificaremos mediante nuestro software que detecta dicho movimiento de los marcadores (ver *Figura 3-17*).

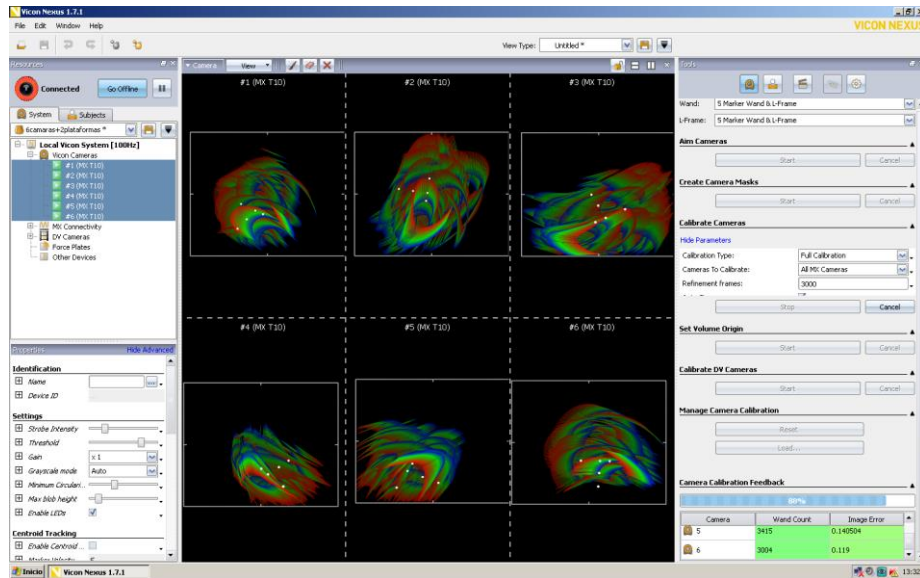


Figura 3-17. Software proporcionado del sistema VICON, donde podemos comprobar en la parte central de la imagen, como las cámaras han detectado el movimiento de los 5 marcadores mediante esas ondulaciones tricolores.

3º) **Fijar un sistema de referencia.** Fijamos un sistema de referencia global para colocar las cámaras con respecto a la zona de trabajo donde está fijado este sistema de referencia, que es donde están las piezas óseas. El sistema de referencia global está formado por 5 marcadores que forman el plano XY (lo que sería el suelo para nosotros, donde se apoyan las piezas óseas), y el eje Z (lo que sería el eje vertical) es el producto vectorial de X por Y (ver *Figura 3-18*). Se ha fijado un sistema de referencia aproximado intentado que coincida lo máximo posible con los ejes anatómicos, que son también los utilizados en las descripciones matemáticas.

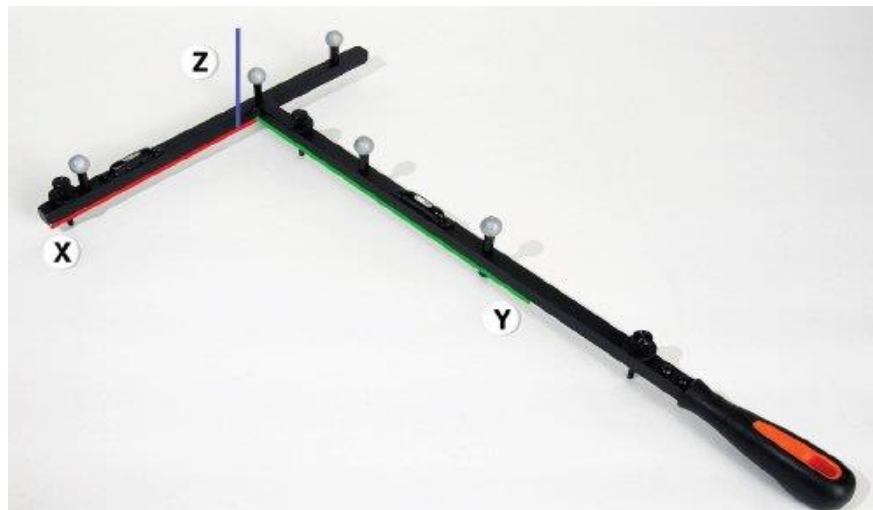


Figura 3-18. Varilla con los marcadores calibrados, que hace de sistema de referencia global. El eje de X es el eje longitudinal del pie, el eje Y es el eje transversal y el eje Z es el eje longitudinal de la pierna; tal y cómo se indica en la Figura 1-11

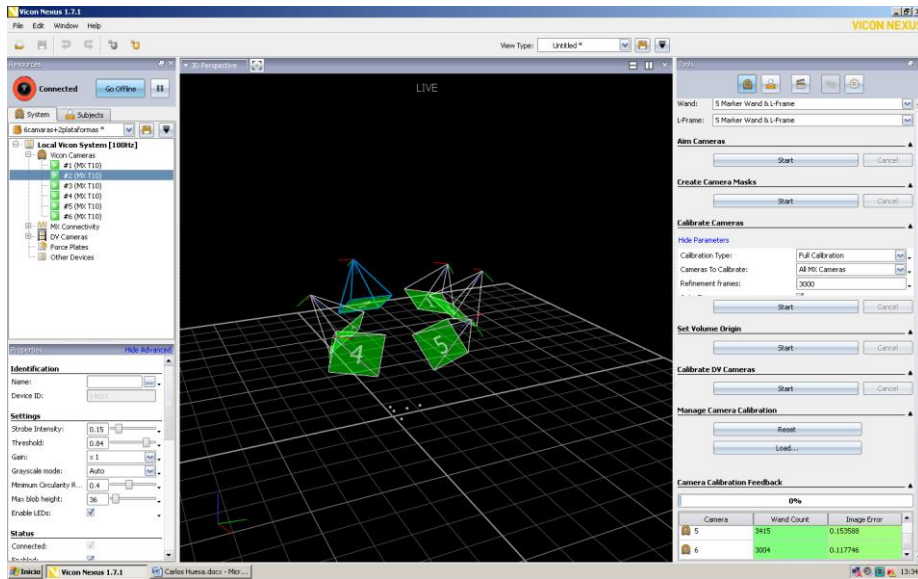


Figura 3-19. Sistema de referencia global (esquina inferior izquierda). Las cámaras están centradas en la zona de trabajo dónde está dicho sistema de referencia, de tal manera que lo reconocen como tal.

4º) **Crear un modelo que contenga los marcadores que queremos exportar:** Se creará un conjunto de siete marcadores: cuatro para un sólido (calcáneo) y tres para el otro sólido (astrágalo), cuyos nombres se recogen en la siguiente tabla:

Marcadores del calcáneo	CaLI	<i>Calcáneo Lateral Inferior</i>
	CaLS	<i>Calcáneo Lateral Superior</i>
	CaMI	<i>Calcáneo Medial Inferior</i>
	CaMS	<i>Calcáneo Medial Superior</i>
Marcadores del astrágalo	AstrPL	<i>Astrágalo Posterior Lateral</i>
	AstrAL	<i>Astrágalo Anterior Lateral</i>
	AstrAM	<i>Astrágalo Anterior Medial</i>

Tabla 3-1. Marcadores. Estos marcadores serán colocados en las posiciones que se describen a la derecha de la tabla en los respectivos huesos, de tal manera que “Cal” o “Astr” hacen referencia al sólido dónde van a estar y las siguientes letras en mayúsculas refieren a la posición que ocuparán en dicho hueso.

- 5º) **Filmar el movimiento:** una vez que esté todo listo, un especialista mueve la pieza para los movimientos de inversión-eversión mientras otra persona graba dicho movimiento en el software, gracias a las seis cámaras que tienen una resolución de 1120 x 896 píxeles para una frecuencia de muestreo de 100 imágenes por segundo. Una ventaja que aporta VICON (además de ser uno de los estándares en análisis de movimiento con sus estimaciones [21]) es que el mismo software calcula un error en la calibración dinámica mediante un algoritmo interno, de tal manera que marca un código de colores en verde para cada cámara, indicado si el error es aceptable o no (en este caso, era aceptable para todas ellas).
- 6º) **Etiquetar o identificar los marcadores:** Con las imágenes que se han obtenido en la filmación del movimiento obtenemos unos “puntos” que se mueven. Son los marcadores en el transcurso del tiempo. Para el estudio del eje instantáneo de rotación, se hace necesario identificar estos marcadores con los que hemos construido en el modelo (*Figura 3-20*).

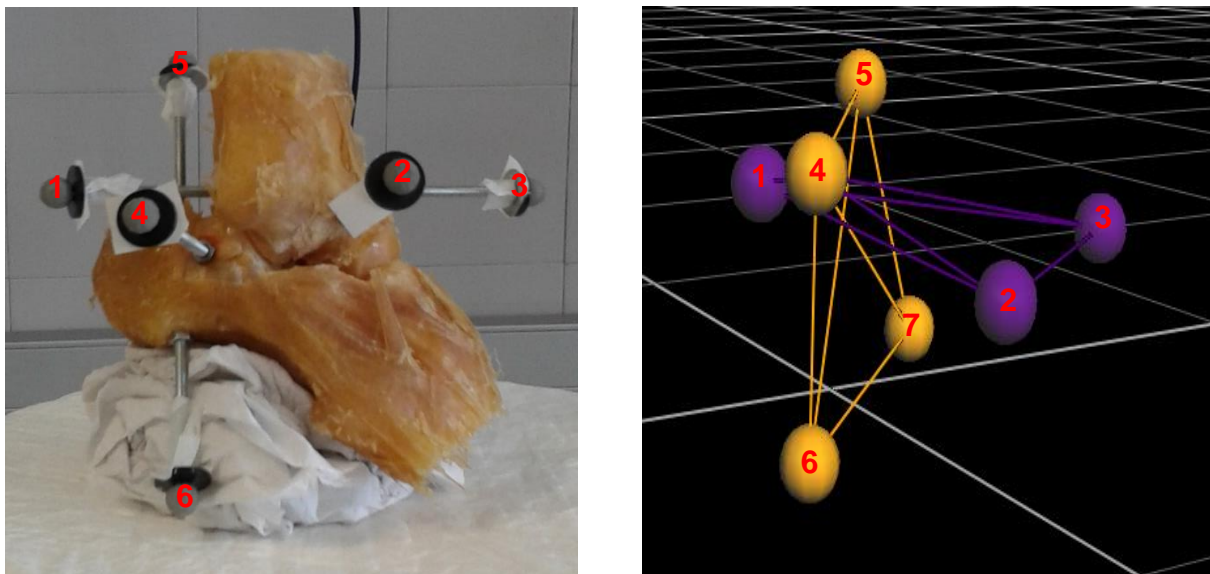


Figura 3-20. Identificación de marcadores. Se observa los siete marcadores para ambos huesos tanto en nuestro modelo en VICON como en las piezas óseas.

MARCADORES	
1	AstrPL
2	AstrAL
3	AstrAM
4	CalLS
5	CalMS
6	CalLI
7	CalMI

Tabla 3-2. Marcadores en VICON. En la tabla se recoge la identificación de los marcadores dónde es conveniente ver la tabla 3-1, dónde se especifica nombre completo de los mismos. El marcador número 7 que no se aprecia en la figura 3-20 está unido al tornillo sinfín que atraviesa al calcáneo y que contiene al marcador número 4, por el lado medial.

- 7º) **Realizar un postprocesado de la grabación del movimiento.** Puede que en todo el movimiento algún (os) marcadores hayan desaparecido en el transcurso del mismo, es decir, que las cámaras lo han perdido por un instante. Esto implicaría desechar esta grabación, ya que se han podido perder unos datos que posteriormente en nuestros cálculos sean importantes. Hay que verificar que las grabaciones contienen a todos los marcadores durante todo el movimiento y que no ha habido artefactos que hagan errónea la filmación
- 8º) **Exportación de datos:** se exportan las posiciones de los marcadores a lo largo del tiempo a un fichero c3d. Mediante una rutina MatLab desarrollada en el área de biomecánica, podemos exportar los datos a dicho entorno para el posterior cálculo del eje instantáneo de rotación

3.4.2- Cálculo del eje instantáneo de rotación

Para el cálculo del eje instantáneo de rotación entre el astrágalo y el calcáneo lo primero que debemos realizar es la construcción de un sistema de referencia (ortogonal y dextrógiro) asociado a cada hueso en cada instante de tiempo, ya que tenemos la variación de tres marcadores (tres puntos) en el espacio durante el tiempo.

Para construir estos sistemas de referencia tanto en astrágalo como en calcáneo, seguiremos los siguientes pasos (subíndice A indica astrágalo; subíndice C indica calcáneo):

- Fijamos como origen de nuestro sistema de referencia uno de los marcadores (AstrAL para astrágalo; CalMS para calcáneo), obtenemos el vector que une éste con otro marcador y ya tenemos un eje, el X;

$$\begin{aligned} X_A &= AstrAM - AstrAL \\ X_C &= CalLI - CalMS \end{aligned} \quad (81)$$

- El producto vectorial de X con un vector auxiliar que obtengamos entre el origen del sistema de referencia y otro marcador, nos dará el eje Y;

$$\begin{aligned} Y_A &= X_A \times (AstrPL - AstrAL) \\ Y_C &= X_C \times (CalMI - CalMS) \end{aligned} \quad (82)$$

- Para obtener el eje Z basta con realizar el producto vectorial de X con Y.

$$\begin{aligned} Z_A &= X_A \times Y_A \\ Z_C &= X_C \times Y_C \end{aligned} \quad (82)$$

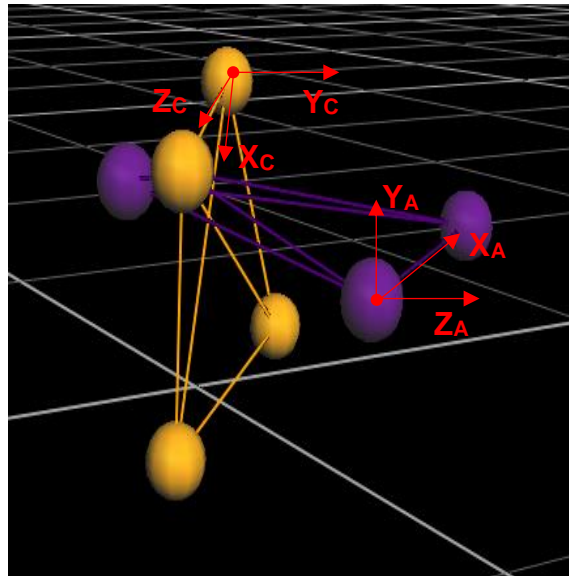


Figura 3-21. Representación de los sistemas de referencias construidos para el astrágalo y el calcáneo.

Una vez que tenemos los ejes que formarán nuestro sistema de referencia, los normalizaremos para que sean de módulo uno, esto es, dividiendo cada uno de ellos entre su módulo para cada instante de tiempo.

A continuación, hallaremos la relación establecida entre los dos sistemas de coordenadas del astrágalo y del calcáneo para cualquier instante de tiempo "t". Esta relación, es lo que se conoce como localización [25], que consiste en describir la posición y la orientación entre los dos sistemas de coordenadas:

- *Descripción de la posición:* Especifica la situación del origen de un sistema de coordenadas {B} respecto al otro {A} mediante el uso de un vector de posición (ver Figura 3-22)

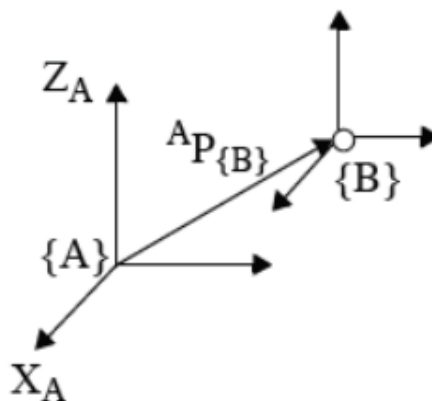


Figura 3-22 [25]. Descripción de la posición del sistema {B} (astrágalo) con respecto al sistema {A} (calcáneo).

- *Descripción de la orientación:* Especifica la orientación en el espacio de un sistema {B} con respecto a otro {A}. Para ello, utiliza los vectores de posición de los ejes de {B} definidos a partir de {A} (Figura 3-23)

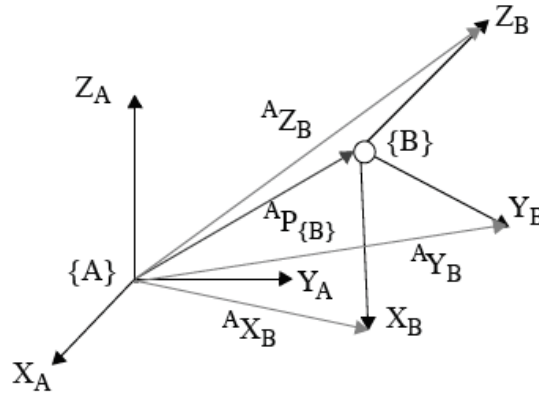


Figura 3-23 [25]. Descripción de la orientación del sistema {B} (astrágalo) con respecto al sistema {A} (calcáneo).

En resumen, tenemos que calcular el vector instantáneo de posición y la matriz instantánea de rotación entre el sistema de referencia del astrágalo con respecto al calcáneo. En adelante, reescribiremos {A} como L_C y {B} como L_A

Cálculo del vector instantáneo de posición

Este vector estará definido por la diferencia en coordenadas X, Y, Z del origen del sistema de coordenadas del astrágalo con el del calcáneo, como sigue:

$$\begin{matrix} \overrightarrow{L_C} \\ \overrightarrow{L_A} \end{matrix} P(t) = \begin{pmatrix} L_C P_X(t) \\ L_C P_Y(t) \\ L_C P_Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AstrAL_X(t) - CalMS_X(t) \\ AstrAL_Y(t) - CalMS_Y(t) \\ AstrAL_Z(t) - CalMS_Z(t) \end{pmatrix} \quad (83)$$

Cálculo de la matriz instantánea de rotación

La matriz de rotación viene definida por el producto escalar de los ejes de los sistemas de referencias asociados al astrágalo y al calcáneo:

$${}_{L_A}^{L_C} R(t) = \begin{pmatrix} X_A(t) \cdot X_C(t)' & Y_A(t) \cdot X_C(t)' & Z_A(t) \cdot X_C(t)' \\ X_A(t) \cdot Y_C(t)' & Y_A(t) \cdot Y_C(t)' & Z_A(t) \cdot Y_C(t)' \\ X_A(t) \cdot Z_C(t)' & Y_A(t) \cdot Z_C(t)' & Z_A(t) \cdot Z_C(t)' \end{pmatrix} \quad (84)$$

De tal manera que tenemos una matriz ortonormal dónde sus columnas coinciden con la proyección de los ejes del sistema L_A sobre el L_C . Además, su determinante en valor absoluto es la unidad.

Transformada homogénea del astrágalo con respecto al calcáneo

Finalmente, la matriz de transformación que relaciona el astrágalo (móvil) con respecto al calcáneo (fijo) en cada instante de tiempo viene definida de la siguiente manera [25]:

$${}_{L_A}^{L_C}T|_t = \begin{pmatrix} {}_{L_A}^{L_C}R(t) & \overline{{}_{L_A}^{L_C}P(t)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

Seguidamente, deberemos hallar la matriz de transformación entre astrágalo y calcáneo para dos instantes de tiempo distintos: el actual y el anterior (ver *Figura 3-24*)

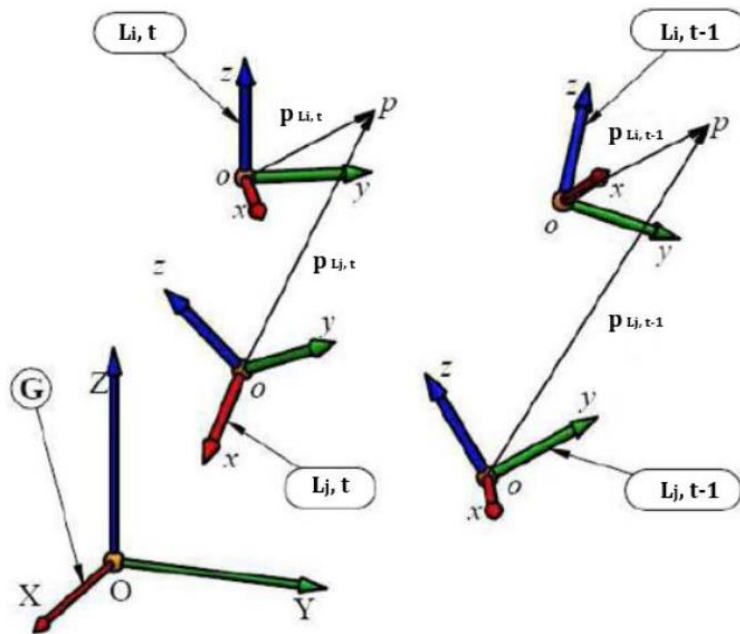


Figura 3-24 [26]: Evolución de los sistemas de referencias locales $L_i = L_A$ y $L_j = L_C$ entre dos instantes de tiempo ($t-1, t$) con respecto al sistema de referencia global G

$$T_{L_A L_C}|_t = {}_{L_A}^{L_C}T|_t \cdot ({}_{L_A}^{L_C}T|_{t-1})^{-1} \quad (86)$$

La matriz $T_{L_A L_C}|_t$ representa el movimiento relativo del astrágalo con respecto al calcáneo. Finalmente, de esta última matriz obtendremos los parámetros del movimiento helicoidal que nos proporcionará el eje de rotación.

Movimiento helicoidal

Basándonos en el teorema de Chasles, el desplazamiento de un cuerpo rígido desde una posición inicial a otra final puede describirse como una rotación y un desplazamiento. El movimiento helicoidal se basa en este principio, de tal manera que el sistema de referencia móvil L pasa de la posición 1 a la 2 girando un ángulo ϕ alrededor del eje \hat{u} , mientras que simultáneamente se desplaza una distancia h en paralelo a este mismo eje (ver Figura 3-25)

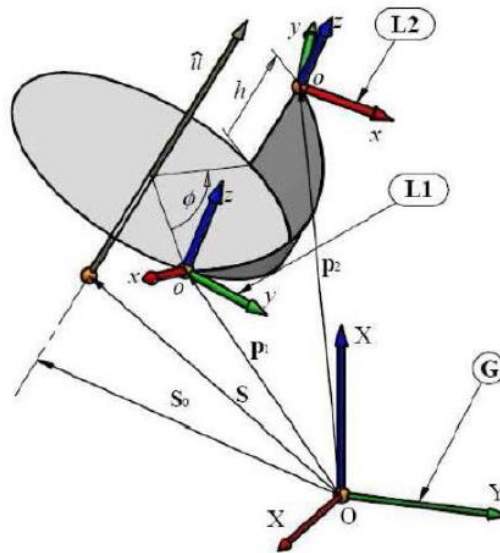


Figura 3-25 [26]: Descripción gráfica y parámetros del movimiento helicoidal de un sistema de referencia L entre dos instantes de tiempo

Los parámetros que definen este tipo de movimiento son los siguientes [27]:

$$\hat{u} = \left(\frac{T_{32}-T_{23}}{2\text{sen}(\phi)}, \frac{T_{13}-T_{31}}{2\text{sen}(\phi)}, \frac{T_{21}-T_{12}}{2\text{sen}(\phi)} \right)^T$$

Vector unitario director del eje de rotación

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{T_{11}+T_{22}+T_{33}-1}{2} \right)$$

Ángulo de giro alrededor de \hat{u}

$$h = (T_{14}, T_{24}, T_{34})\hat{u}$$

Desplazamiento paralelo a \hat{u}

S

Vector de posición de un punto del eje de giro respecto al sistema global.

S_0

Vector de posición de un punto del eje de rotación cuya distancia al origen de coordenadas del sistema global es la mínima posible.

Los vectores S y S_0 los obtenemos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} T_{11} - 1 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - 1 & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_X \\ S_Y \\ S_Z \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{14} \\ T_{24} \\ T_{34} \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$S_0 = S - (S\hat{u}^T)\hat{u} \quad (88)$$

4- Resultados

4.1- Resultados obtenidos del desarrollo matemático

En este apartado se mostrarán los resultados de cada fase realizada en el desarrollo matemático del proyecto, dónde hemos obtenido las ecuaciones teóricas que nos han permitido realizar un estudio posterior basado en sus correspondientes gráficas. De esta manera, se observarán las trayectorias y los ejes instantáneos asociados a las trayectorias. Las matrices de rotación son un paso intermedio que enlaza trayectoria – eje, cuyos resultados son los ya estudiados anteriormente.

Para la representación de las trayectorias y de los ejes de rotación, se han dado valor a los datos genéricos que figuran en el apartado 3.3.1.1 del proyecto, ya que todas las expresiones dependen de dichos valores, que son los siguientes:

- Radios de esfera y cilindro: “R” y “r”
- Ángulo de recorrido que realiza la esfera sobre el cilindro: “t”
- Ángulo que forma el eje del cilindro con el eje desconocido que tiene que existir para que haya movimiento de la esfera sobre el cilindro: “ ϕ ”

Los valores de los radios de esfera (“R”) y cilindro (“r”) han sido 17.85 y 20.98 milímetros, respectivamente, obtenidos del escáner 3D de las piezas óseas que se detalla en el apartado 3.2 del proyecto.

El valor de ϕ ha sido de 45° , basado en una estimación obtenida en [9]

De estos valores, hemos podido obtener un rango mínimo y máximo del ángulo “t”, que ha sido calculado de la siguiente manera: La expresión (21) define la trayectoria de la esfera respecto al cilindro para la segunda hipótesis médica. Si observamos, la componente Y de dicha expresión, contiene un radicando. Para que matemáticamente tenga sentido, la raíz no podrá ser negativa, por lo que tiene que ser mayor o igual que 0. De esta inecuación que forzamos, podemos obtener un valor del “t” límite que hace que se cumpla, como sigue:

$$\frac{R^2}{\tan^2 \phi} + 2r(R+r)(\cos(t) - 1) \geq 0 \quad (89)$$
$$|t| \leq \arccos\left(-\frac{R^2}{2r(R+r)\tan^2(\phi)} + 1\right) = 36.44^\circ$$

Por lo que el rango de amplitud de este ángulo de recorrido que se ha estimado y se ha empleado en la representación de las distintas trayectorias y ejes es de $[-36.44^\circ, 36.44^\circ]$

Destacar que se ha escogido este radicando porque es el más restrictivo que se nos presenta en el proyecto, por lo que la acotación en el rango del ángulo será más precisa. El otro radicando es el denominador de la expresión (52), que ha sido comprobado ser menos restrictivo que el de la expresión (89).

Los ejes X, Y, Z de todas las representaciones gráficas (tanto de trayectorias como de eje) son los adoptados en las descripciones matemáticas, es decir, los de la *Figura 3-11*. Las unidades están en milímetros.

Trayectorias

Primera hipótesis médica

La expresión (10) define que la cabeza del astrágalo (esfera) sobre el cilindro (calcáneo) realizaría una trayectoria de tipo sagital, es decir, con una variación de valores en los ejes X y Z, pero con un valor constante en el eje Y (*Figura 4-1*)

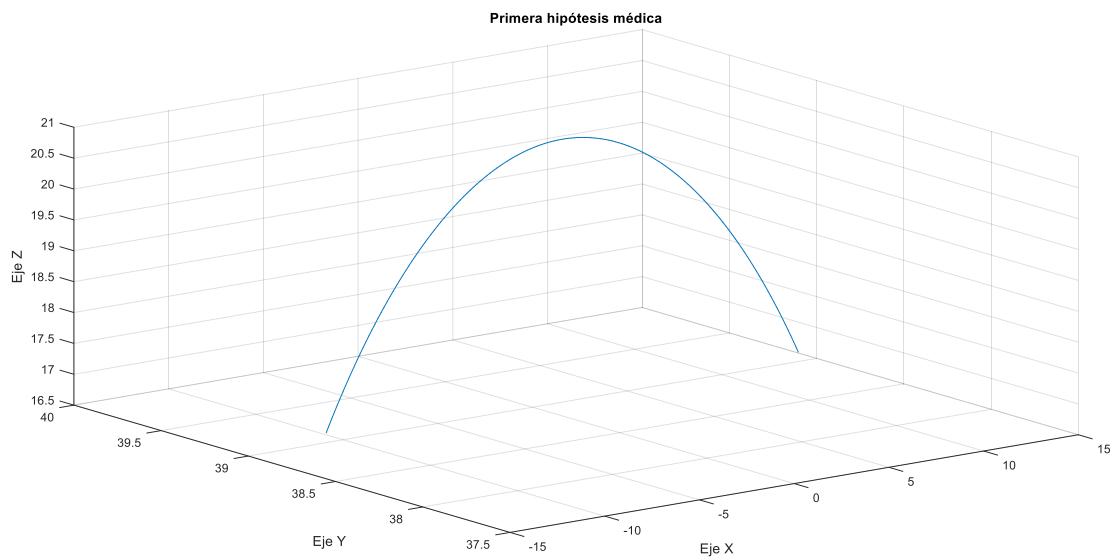


Figura 4-1. Trayectoria correspondiente a la primera hipótesis médica, basada en la ecuación (10). La esfera rueda por el cilindro realizando un corte sagital del mismo.

Segunda hipótesis médica

La ecuación (21) define la trayectoria de la esfera sobre el cilindro que se observa en la *Figura 4-2*: una curva alrededor del cilindro con las tres componentes en el espacio que dependen del ángulo de “t” de recorrido.

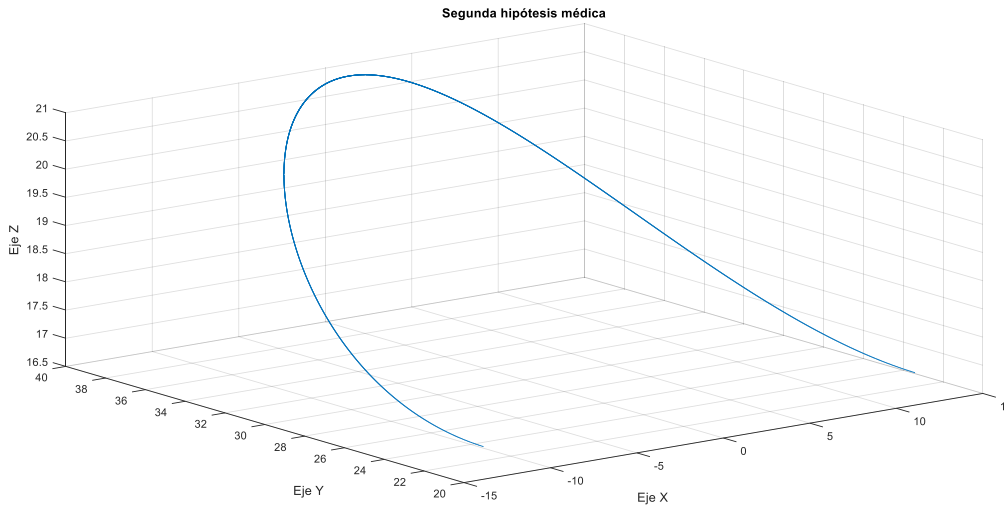


Figura 4-2. Trayectoria correspondiente a la segunda hipótesis médica, basada en la ecuación (21). La esfera rodaría por el cilindro realizando la curva que se observa en la gráfica.

Tercera hipótesis médica

De acuerdo a la ecuación (26), la esfera realizaría una hélice sobre el cilindro (si tomásemos “t” infinito). En la *Figura 4-3* se puede observar como la esfera no solo rodaría en un corte sagital como en la primera hipótesis médica, sino que también avanzaría una cierta distancia en el eje Y, formando así un principio de hélice sobre el cilindro.

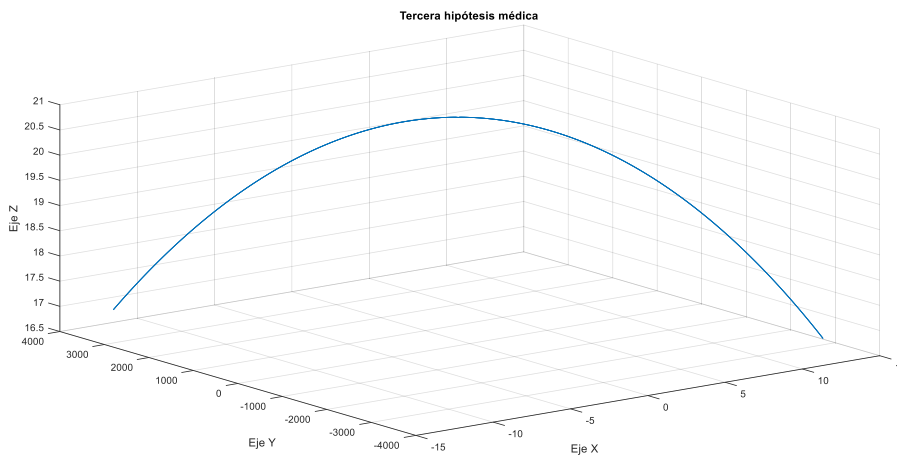


Figura 4-3. Trayectoria correspondiente a la tercera hipótesis médica, basada en la ecuación (26). La esfera rueda sobre el cilindro realizando una trayectoria de tipo hélice

Ejes instantáneos de rotación

Primera y tercera hipótesis médica

Para estas dos hipótesis la matriz de rotación fue la misma (véase ecuaciones (37) y (68)), por lo que la orientación del eje de rotación en cada instante de tiempo es la misma independientemente de la trayectoria que realice la esfera sobre el cilindro sujeta a unas condiciones matemáticas distintas obtenidas de la abstracción de la hipótesis médica. Por tanto, la orientación es la que se observa en la *Figura 4-4*: un eje con solo componente Y, de tal manera que la esfera realizaría las rotaciones en torno a este eje. Es sencillo de imaginar que este eje es fijo con respecto a la esfera, aunque se desplazaría con el movimiento de la esfera siguiendo su trayectoria correspondiente dependiendo de la hipótesis médica.

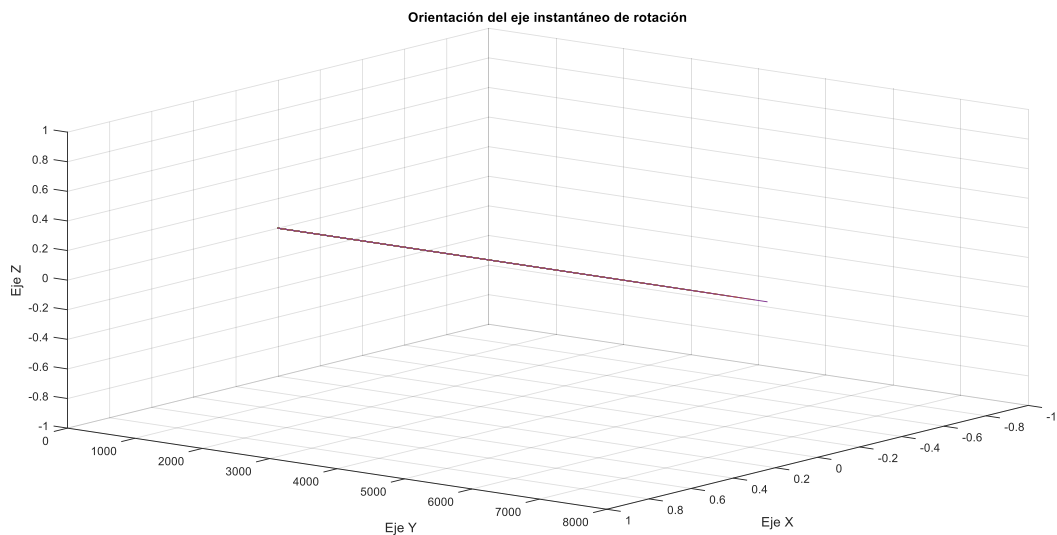


Figura 4-4. Representación de la orientación del eje instantáneo de rotación para la primera y tercera hipótesis médica. La esfera (cabeza del astrágalo) realizaría rodadura sobre el cilindro (calcáneo) en torno a este vector director del eje (expresión (79)). El eje se desplazaría con el centro de la esfera siguiendo lógicamente las trayectorias (10) y (26).

Segunda hipótesis médica

Por cada instante en el que la esfera está realizando la trayectoria (ver (21)), la orientación de la esfera respecto al cilindro cambia (ver (57)), por lo que la orientación del eje de rotación también varía para cada instante (ver (77)).

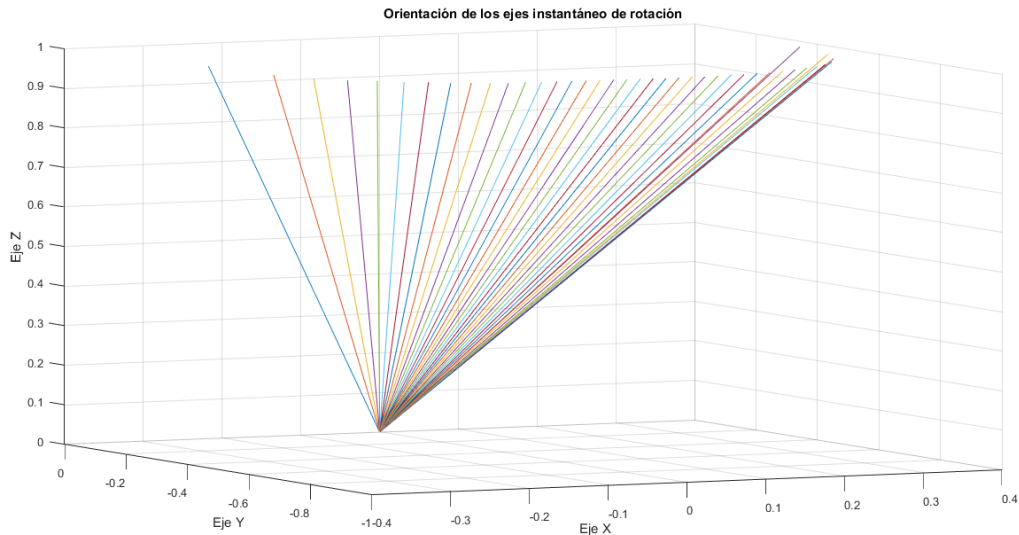


Figura 4-5. Representación de la orientación del eje instantáneo de rotación para la segunda hipótesis médica. La esfera (cabeza del astrágalo) realizaría un movimiento de rodadura sobre el cilindro (calcáneo) en torno a estos vectores directores de los ejes en cada instante de tiempo.

El vector director del eje para esta hipótesis no es tan trivial como el anterior, ya que se descompone en las tres componentes del espacio: X, Y, Z. Es por ello que no es tan fácil de imaginar cómo el eje se irá desplazando en cada instante de tiempo. Por tanto, aplicaremos la ecuación (80) para el cálculo del eje instantáneo de rotación, obteniendo como resultado lo que se aprecia en la Figura 4-6.

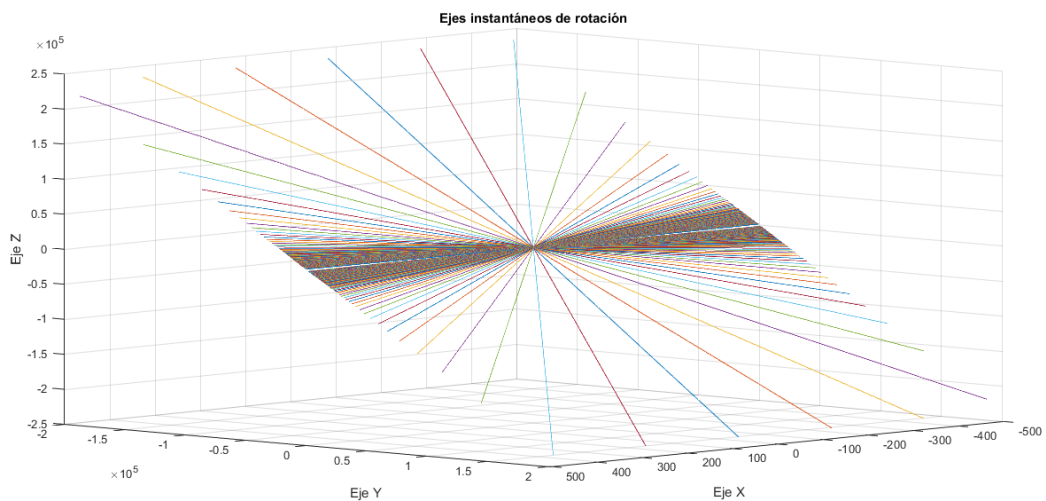


Figura 4-6. Representación de los ejes instantáneos de rotación para la segunda hipótesis médica. Podemos observar un conjunto de ejes acumulados que hacen intuir que es en esos instantes de tiempo dónde se está produciendo el movimiento. Los demás ejes dispares podrían indicar un sinsentido anatómico, ya que el pie jamás podría adoptar esa posición. La simetría entre los ejes se debe a que se están representando los dos movimientos: inversión y eversión del pie.

4.2- Resultados obtenidos del análisis cinemático de movimiento

Tras los pasos seguidos en el apartado 3.4, se muestra en la *Figura 4-7* la orientación de los ejes instantáneos de rotación para los movimientos realizados en el laboratorio de inversión y eversión del pie (apartado 3.4).

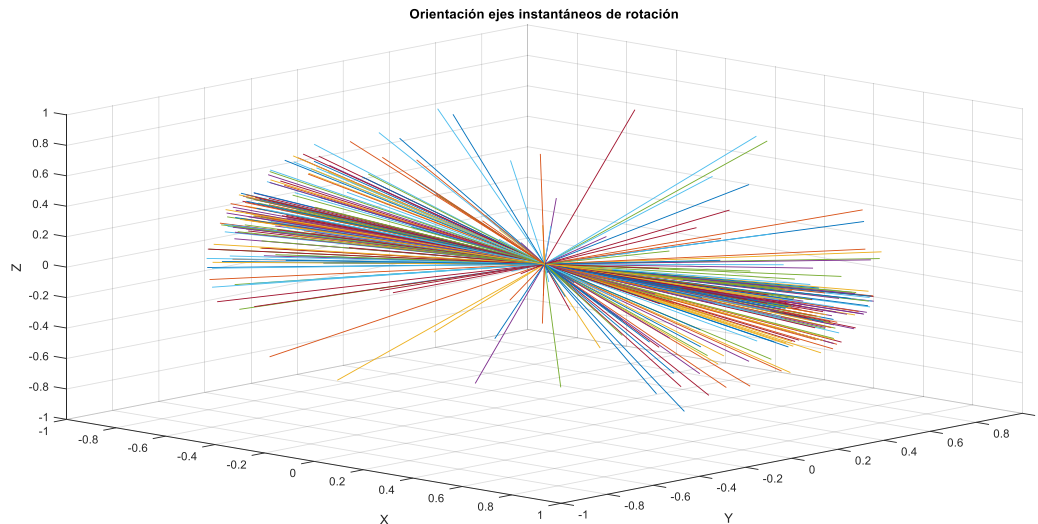


Figura 4-7: Orientación de los ejes instantáneos de rotación experimentales. Estos ejes han sido calculados siguiendo los pasos indicados en el apartado 3.4 del proyecto. Los ejes X, Y, Z son una aproximación, en este caso, de los ejes mostrados en la Figura 1-11, que han sido los adoptados también para las descripciones matemáticas. Unidades en milímetros.

Una vez hallada la orientación del eje mediante su vector director, calculamos a través del vector y de las coordenadas del parámetro S del apartado 3.4.2 la posición del eje en el espacio (ver *Figura 4-8*)

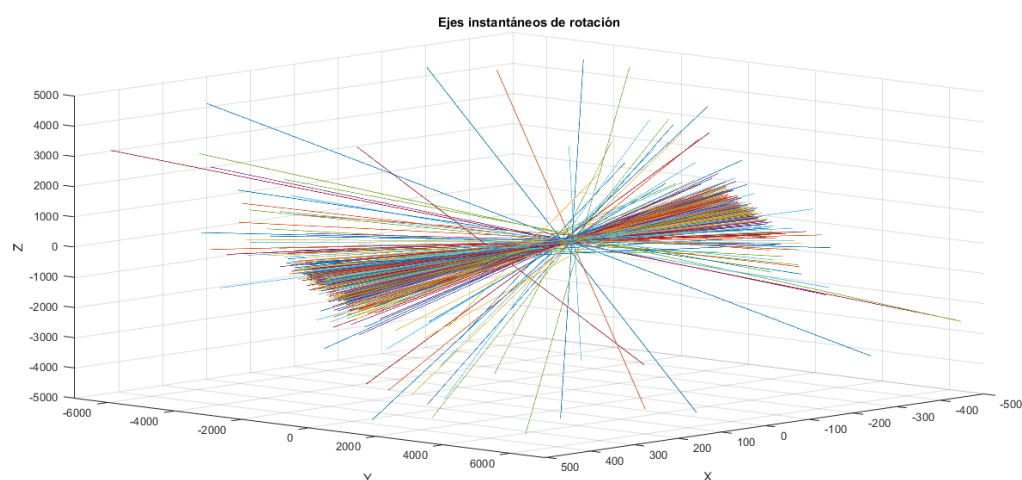


Figura 4-8. Ejes instantáneos de rotación. Estos ejes han sido obtenidos experimentalmente mediante el análisis de movimiento que se ha explicado en el apartado 3.4. Los ejes X, Y, Z son una aproximación, en este caso, de los ejes mostrados en la Figura 1-11, que han sido los adoptados también para las descripciones matemáticas. Unidades en milímetros.

5- Discusión

5.1- Interpretación de los resultados matemáticos

Habiendo cumplido con el objetivo del cálculo del eje de rotación para las distintas hipótesis que se planteaban, podemos realizar las siguientes interpretaciones:

- Se ha conseguido modelar matemáticamente las tres hipótesis de movimiento pertenecientes al segundo planteamiento del funcionamiento de la articulación (ver punto 1.1, “Hipótesis de movimiento”), y poder calcular así el eje instantáneo de rotación para cada hipótesis que se ha planteado.
- Viendo los resultados, se hace complicado defender la hipótesis de que el eje es único, es decir, que oscila poco. Para nuestro estudio matemático todos los ejes dependen de la posición de la esfera (astrágalo) y, por tanto, también del tiempo. Esto implica una oscilación o variación en el transcurso del movimiento, es decir, la segunda hipótesis médica del segundo planteamiento (apartado 1.1)
- Por otro lado, ha sido llamativo el rango obtenido del ángulo de recorrido calculado en (89) para la segunda hipótesis médica, ya que no parece alejarse del anatómico [5].

Limitaciones del estudio y aspectos no cubiertos

- Aunque el formalismo matemático describe con bastante fundamento las tres hipótesis médicas que se han planteado, el modelo utilizado es una idealización de la articulación.
- El sistema de referencia global para el estudio matemático es realmente una aproximación del sistema anatómico propuesto (*Figura 1-11*), ya que la articulación subastragalina (el cilindro) también presenta una orientación oblicua en el pie y no sólo transversal.
- Dada la imposibilidad anatómica de medir el ángulo ϕ , el rango del ángulo recorrido “t” se ha estimado a partir de un valor promedio del ángulo ϕ obtenido en [9]. Para obtener en un futuro una relación formal entre ambos ángulos, se podría hacer una radiografía del pie para los movimientos de inversión – eversión y obtener el rango máximo del ángulo recorrido “t”, o realizar cálculos para distintos ángulos y ver cuál de todos se parece más al observado en el análisis cinemático del movimiento.

5.2- Interpretación de los resultados cinemáticos

Cumpliendo con el objetivo del cálculo de los ejes de rotación de manera experimental, podemos sacar las siguientes interpretaciones:

- El eje tiene una cierta oscilación y correspondería con la segunda hipótesis del segundo planteamiento que se explica en el apartado 1.1 para el funcionamiento de las articulaciones descritas.
- Se observa que hay un conjunto de ejes agrupados, intuyendo que es dónde se produce la mayor parte del movimiento. Los ejes que se observan más “suelos” no son propios del movimiento y surgen por las limitaciones que a continuación se explican.
- Estos ejes son rectas infinitas que representan los movimientos de inversión y eversión del pie, que se cruzan cerca del origen sin cortarse en el mismo.

Limitaciones del estudio y aspectos no cubiertos

- El estudio se ha realizado con piezas óseas disecadas y aisladas la una de la otra por lo que han perdido sus componentes estabilizadores naturales y los elementos motores propios por lo que tuvieron que ser desplazados manualmente. Al carecer de los elementos de unión estas piezas han perdido los límites blandos naturales del recorrido articular. De aquí podemos reflexionar sobre esos ejes que se observan en la *Figura 4-8* que parecen salirse del rango de movimiento, ya que al haberse hecho manualmente hemos podido cometer dicho error. No obstante hay que subrayar que se trata de un sistema articular fundamentalmente de conducción ósea, donde gracias al alto grado de congruencia articular que presentan las superficies articulares puestas en contacto el movimiento queda marcado por el enfrentamiento de estas superficies y no tanto por su contenido ligamentario y capsular.
- Sólo se ha realizado en una pieza ósea, no en varias. Por lo que es atrevido obtener conclusiones muy categóricas
- El sistema de referencia global adoptado en el análisis es solo una aproximación al sistema de referencia anatómico propuesto (*Figura 1-11*). Habría que realizar una superposición del sistema de referencia matemático con el sistema de referencia experimental, y luego superponerlo con las referencias anatómicas. La dificultad está en que la articulación subastragalina también presenta una orientación oblicua en el pie, no solo transversal.
- En un futuro, se debe realizar un post-procesado de los resultados para obtener una mejor reflexión de los mismos. En el caso de realizarse en más piezas óseas, obtener parámetros comunes que definan el movimiento y realizar un estudio estadístico de los mismos.

5.3- Interpretación conjunta teórico – experimental

En las *tablas 6-1, 6-2, 6-3, 6-4* se muestran los ejes teóricos que se han calculado para la segunda hipótesis médica en comparación con los ejes experimentales obtenidos mediante análisis de movimiento. Aunque no se ha profundizado en datos numéricos sobre la inclinación de los ejes o el grado de dispersión entre unos y otros (ya que haría falta un previo post-procesado de los resultados experimentales y delimitar bien el movimiento para quedarse con los ejes que nos interesan), el parecido es bastante razonable e intuitivo. Así, la descripción matemática que hasta ahora se ha descrito parece adecuada. Es por este motivo que este trabajo es una iniciación en la investigación del funcionamiento de estas dos articulaciones. Es razonable a la vista de los resultados pensar que se puede seguir investigando sobre lo aquí argumentado. El objetivo último sería lograr diseñar una prótesis cuyo centro instantáneo de rotación contenga estos ejes instantáneos.

En las gráficas que se muestran a continuación es conveniente destacar que el sistema global de referencia (los ejes X' , Y' , Z') del análisis experimental es una aproximación al sistema de referencia anatómico que se aprecia en la *Figura 1-11* y que ha sido adoptado para las descripciones matemáticas (también con sus limitaciones que se han argumentado anteriormente). Como ya se ha explicado anteriormente, se ha intentado fijar este sistema de referencia fijo lo más anatómico posible. Sin embargo, aunque de momento es una aproximación, los parecidos son cualitativos son razonables.

Plano XY/X'Y': formado por eje longitudinal del pie y el eje transversal

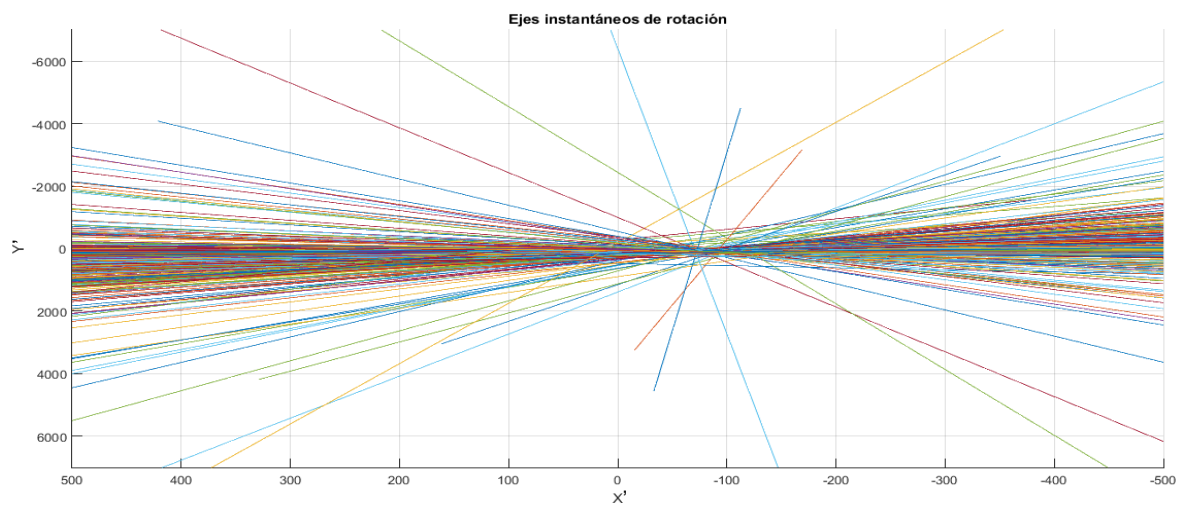
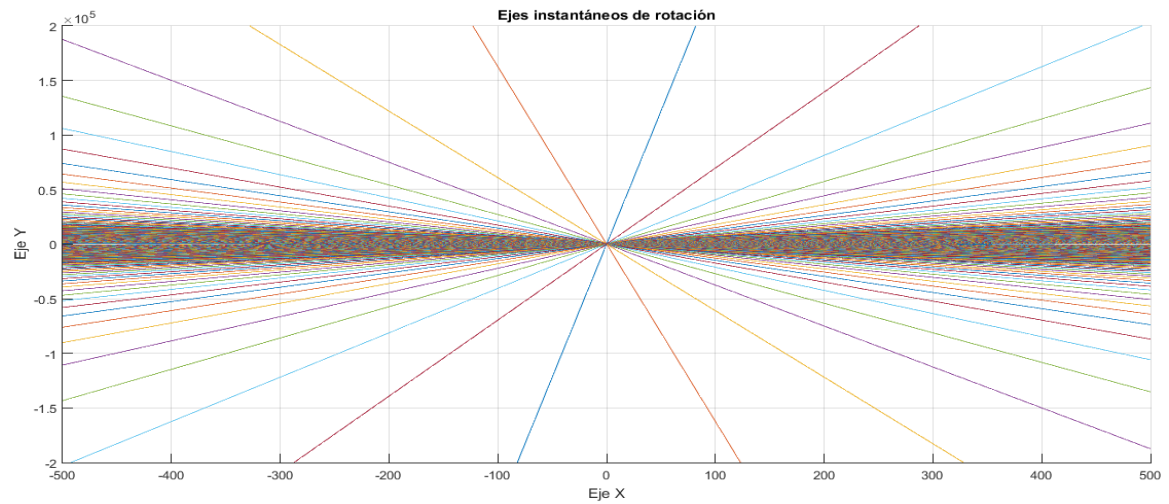


Tabla 6-1. Comparación en el plano XY de los ejes instantáneos de rotación. La gráfica superior corresponde al cálculo matemático y la gráfica inferior a los ejes experimentales.

Plano XZ/X'Z': formado por el eje longitudinal del pie y el eje longitudinal de la pierna

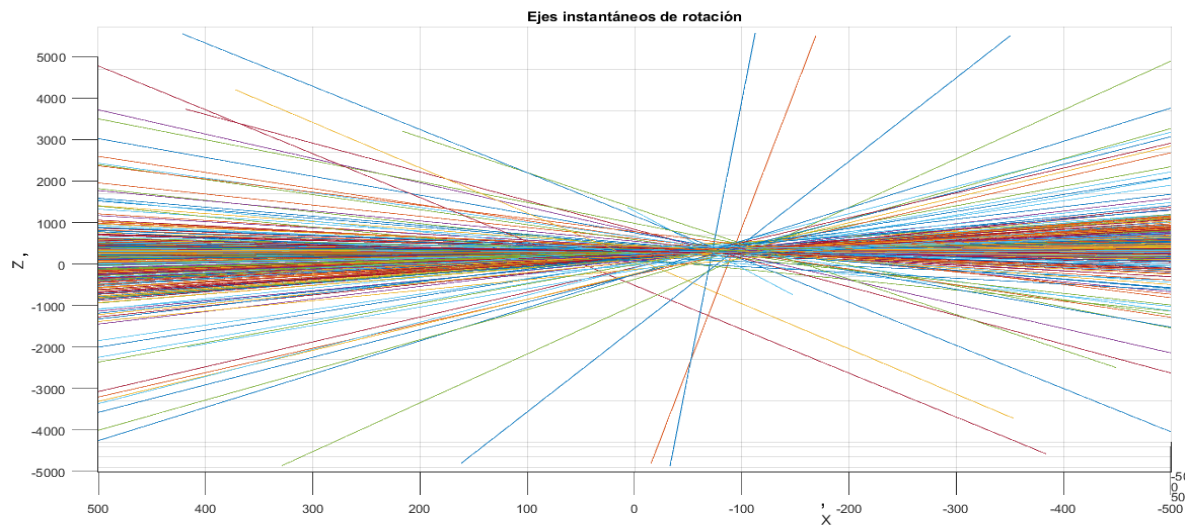
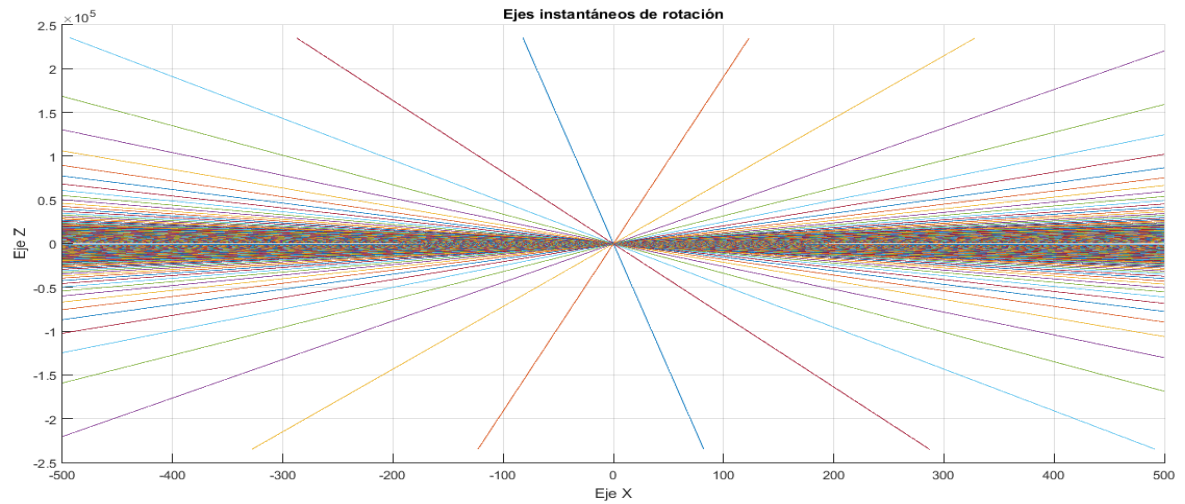


Tabla 6-2. Comparación en el plano XZ de los ejes instantáneos de rotación. La gráfica superior corresponde al cálculo matemático y la gráfica inferior a los ejes experimentales.

Vista en 3D

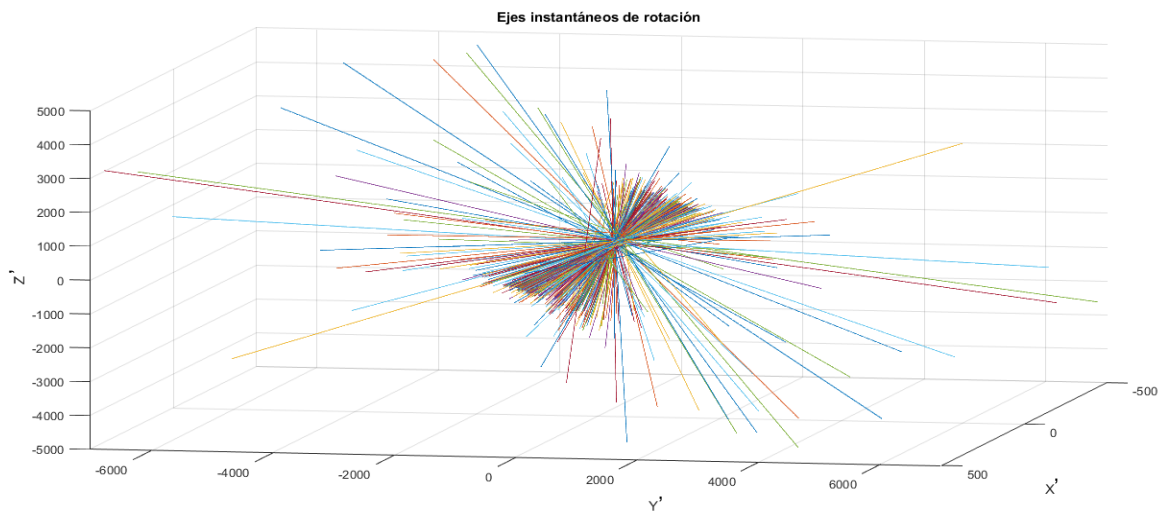
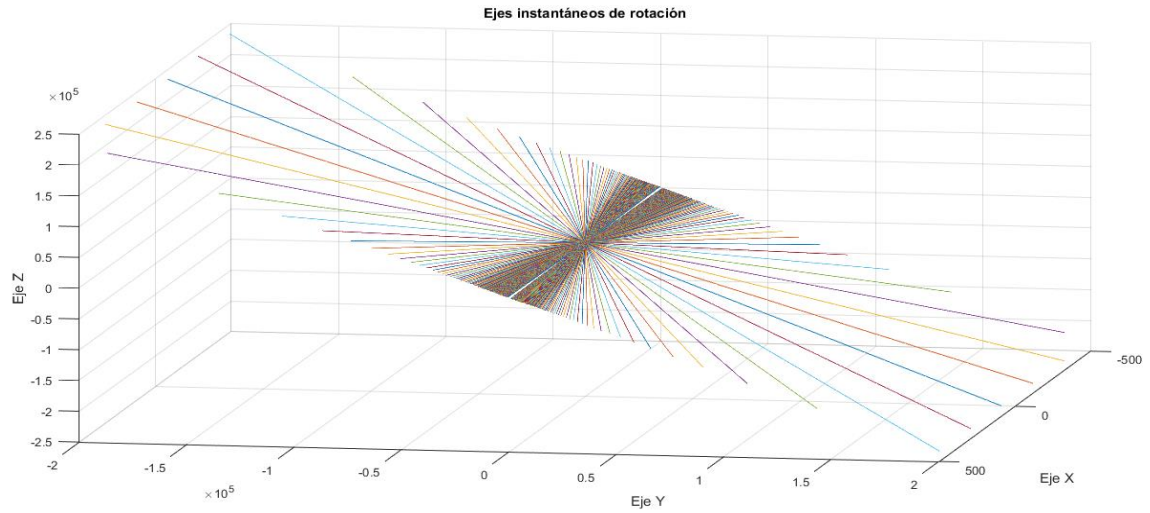


Tabla 6-3. Comparación en 3D de los ejes instantáneos de rotación. La gráfica superior corresponde al cálculo matemático y la gráfica inferior a los ejes experimentales.

Vista 3D

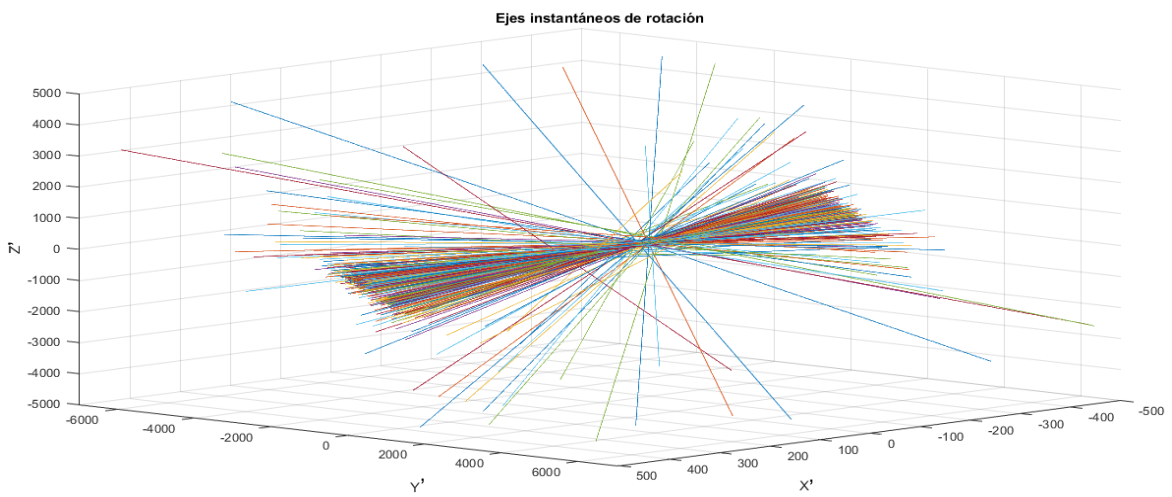
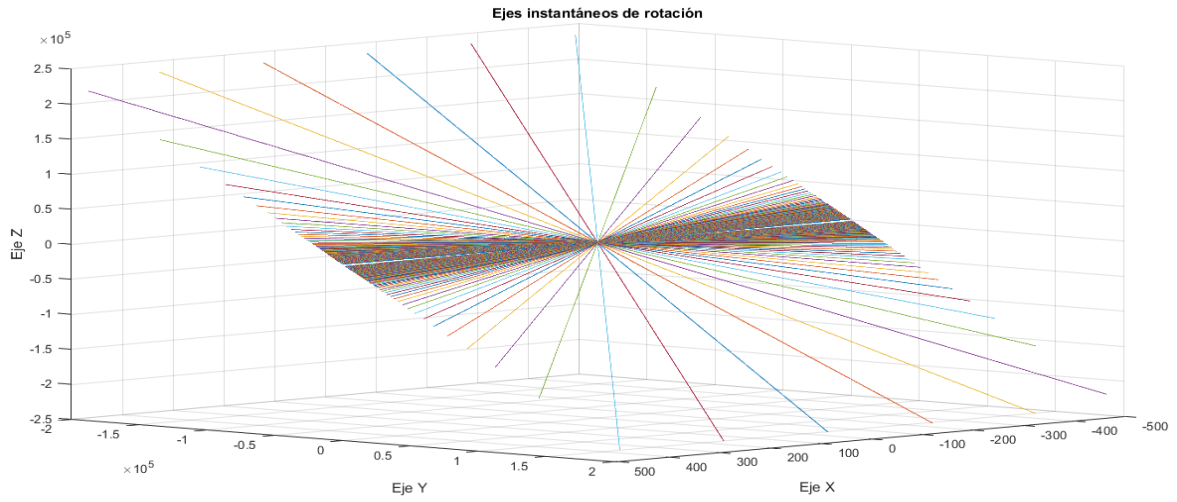


Tabla 6-4. Comparación en la vista 3D de los ejes instantáneos de rotación. La gráfica superior corresponde al cálculo matemático y la gráfica inferior a los ejes experimentales.

6- Conclusiones

Teniendo claro los pasos que se han seguido en el proyecto, así como sus objetivos, hay dos conclusiones importantes que se pueden reflexionar del proyecto:

- Hay una posible descripción matemática que ha podido mostrar las tres hipótesis médicas a partir de una idealización geométrica de las articulaciones
- Una de las descripciones matemáticas tiene un parecido considerable a los resultados experimentales

7- Referencias bibliográficas

- [1] COMÍN, M., DEJOZ, R., ATIENZA, C., PRAT, J., PERIS, J. L., VERA, P., GIL, A. y REIG, C. (1998). "El tobillo" en Comín, M., Prat, J. y Dejoz, R. *Biomecánica articular y sustituciones protésicas*. Valencia: Instituto de Biomecánica de Valencia. Cap. 10, p. 429-469.
- [2] BRAY, T.J. (2000). "Talar-Neck fractures: Open reduction internal fixation". *Master Techniques in orthopaedics surgery: Fractures*. CD-ROM. Lippincott Williams&Wilkins.
- [3] LADERO, F. y CONCEJERO, V (2004). "Fracturas del astrágalo" en *Revista Española de Cirugía Ortopédica y Traumatología* 48(2), p. 145-56.
- [4] BERNÁLDEZ DOMÍNGUEZ, P.; NAVARRO HERRERO, S.; PRIETO ÁLVAREZ, A.; CARRASCO RUIZ, J.; FERNÁNDEZ MORENO, G. y CALERO LUIS, A. (2005) "Tratamiento y complicaciones de las fracturas y luxaciones del astrágalo" en *Revista de la Sociedad Andaluza de Traumatología y Ortopedia*. 24(1), p. 32-47.
- [5] KAPANDJI, I. A (2012). "El pie" en Kapandji I.A. *Cuadernos de fisiología articular: Miembro inferior*. Madrid: Editorial Médica Panamericana. 6ª Ed, vol. 2, cap. 4, p. 178-231.
- [6] Huesos del pie.
http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/12988/4/b11191715_0004.pdf.
[Consulta: 2 de septiembre de 2016]
- [7] PINA, M, SALESA M.J., ANTÓN M. y PASTOR J.F. (2011). "Functional anatomy of the calcaneum and talus in Cercopithecinae (Mammalia, Primates, Cercopithecidae)".
- [8] Anatomía de los huesos del pie. <http://es.slideshare.net/huelvaleal/huesos-del-pie-27737525> [Consulta: 2 de septiembre de 2016]
- [9] VILADOT VOEGELI, A. "Anatomía funcional y biomecánica del tobillo y el pie". *Revista Española de Reumatología* 30, nº 9 (2003): 469-77.
- [10] KELIKIAN, A.S., SARRAFIAN, S.K. (2011) "Functional Anatomy of the Foot and Ankle" en Kelikian, A.S. y Sarrafian, S.K. *Anatomy of the Foot and Ankle*. Philadelphia: Wolters Kluwer | Lippincott Williams & Wilkins. 3 Ed, Cap. 10, p. 543-563.
- [11] ÁNGULO CARRERE, Mª T. y LLANOS ALCAZAR, L.F. (1994). "Biomecánica del complejo periastragalino" en *Biomecánica*, vol. 2, núm. 2, p.77-80.
- [12] SOUS SÁNCHEZ, J. O.; NAVARRO NAVARRO, R.; NAVARRO GARCÍA R.; BRITO OJEDA, E. y RUIZ CABALLERO, J.A. (2011). "Bases Biomecánicas del Tobillo".

- [13] HICKS, J.H. (1951). The mechanics of the foot. I: The joints. *Anat.* 1953; 87:345
- [14] MANTER, J.T. (1941). Movements of the subtalar and transverse tarsal joints. *Anat. Rec.* 80, 397 – 410
- [15] VAN LANGELAAN EJ (1983). A kinematical analysis of the tarsal joints. An X-ray photogrammetric study. *Acta Orthop Scand Suppl.* 204:1 - 196
- [16] PARR W.C.H.; CHATTERJEE H.J.; y SOLIGO C (2012). “Calculating the axes of rotation for the subtalar and talocrural joints using 3D bone reconstructions”. *Journal of Biomechanics*. Elsevier
- [17] ROLAND DG CORPORATION. Manual y especificaciones de 3D Laser Scanner LPX-600. <http://www.rolanddg.com/product/archives/lpx-600/specifications.html> [Consulta: 24 de febrero de 2016]
- [18] SolidWorks. <http://www.solidworks.com/>
- [19] MathWorks. <http://www.mathworks.es/>
- [20] ALLARD P., Stokes, I.A.F. y Blachi, J.P. (1995) *Three-Dimensional Analysis of Human Movement*. USA: Human Kinetics
- [21] HINOJOSA PURO, D. “Sistema VICON MX” en *Integracion y control de quadrotors en un banco de pruebas en interior*. Dirigido por Anibal Ollero Baturone. Proyecto Fin de Carrera defendido en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2011. Cap. 3 p. 29-42. [Consulta: 24 de febrero de 2016] Disponible en: <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11944/>
- [22] BULLO, F. y ANDREW D. L. (2005) *Geometric Control of Mechanical Systems*. USA: Springer
- [23] ADAMS, R. A. (2009). “Ecuaciones diferenciales ordinarias” en Adams, R. A. *Cálculo*. Madrid: Addison Wesley. 6ª Ed, vol. 1, cap. 17, p. 1058.
- [24] DE LA VILLA, A. (1994). “Sistemas de ecuaciones lineales” en De la Villa, A. *Problemas de Álgebra*. Madrid: CLAGSA. 3ª Ed, cap. 5, p.121-123.
- [25] J. CRAIG, J. (2006). “Descripciones espaciales y transformaciones” en J. Craig, J. *Robótica*. México: Pearson Educación. 3ª Ed, vol. 1, cap. 2, p. 19-61.
- [26] GARCÍA VACAS, F. (2012) Tesis Doctoral: *Análisis biomecánico de un nuevo diseño de prótesis intervertebral*. Universidad de Málaga.
- [27] LUNG – WEN, T. (1999). *Robot analysis: The mechanical of serial and parallel manipulators*. Nueva York: John Wiley & Sons. 1ª Ed.

8- Anexos

8.1- Código MatLab elaborado para el cálculo de las trayectorias matemáticas

```
%TRAYECTORIAS MATEMÁTICAS
%Carlos Huesa Berral. Ingeniería de la Salud.

R = 17.85;
r = 20.98;
p = 45;
t = -36.44:0.01:36.44;

%Primera hipótesis médica
x1 = r*sind(t);
y1 = zeros(size(x1));
for i = 1:size(y1,2)
    y1(i) = (R+r)/(tand(p));
end
z1 = r*cosd(t);
plot3(x1,y1,z1)

title ('Primera hipótesis médica');
xlabel ('Eje X');
ylabel ('Eje Y');
zlabel ('Eje Z');
grid on
figure

%Segunda hipótesis médica
x2 = r*sind(t);
y2 = r/tand(p) + sqrt((R^2)/(tand(p)^2) + 2*r*(R+r)*(cosd(t)-1));
z2 = r*cosd(t);

plot3(x2,y2,z2)
title ('Segunda hipótesis médica');
xlabel ('Eje X');
ylabel ('Eje Y');
zlabel ('Eje Z');

grid on
figure

%Tercera hipótesis médica
tau = -3644:3644;
x3 = r*sind(t);
y3 = zeros(size(x3));

for i = 1:size(y3,2)
    y3(i) = -tau(i) + (R+r)/(tand(p));
end
z3 = r*cosd(t);
plot3(x3,y3,z3)
title ('Tercera hipótesis médica');
xlabel ('Eje X');
ylabel ('Eje Y');
zlabel ('Eje Z');
grid on
```

8.2- Código MatLab elaborado para el cálculo de los ejes instantáneos de rotación teóricos - matemáticos

```
%ORIENTACIÓN DE LOS EJES TEÓRICOS
%Carlos Huesa Berral. Ingeniería de la Salud.

R = 17.85;
r = 20.98;
p = 45;
t = -36.44:0.01:36.44;

h = R+r-r*cosd(t);
y = r/tand(p) + sqrt((R^2)/(tand(p)^2) + 2*r*(R+r)*(cosd(t)-1));
k = sind(p)./sqrt(R^2-(sind(p)^2)*h.^2);

A = k.^2.*cosd(t).*(y-r/tand(p)).^2;
B = -k.*(y-r/tand(p)).*(1+cosd(t))+1;
C = ((k).^2).*(r^2).*(sind(t).^2).*(cosd(t).^2);

Y = (-k.*r.*(sind(t).^2))./(A+B+C);
X = ((k.*(y-r/tand(p))-1)./(k.*r.*sind(t))).*Y;
Z = ones(size(X));

recta = zeros(size(X));
hold on

for i=1:191:7289
    plot3([X(i) recta], [Y(i) recta], [Z(i) recta])
end
hold off

grid on

title ('Orientación de los ejes instantáneo de rotación');
xlabel('Eje X');
ylabel ('Eje Y');
zlabel ('Eje Z');

figure

hold on
for i = 1:191:7289
    plot3([0 0],[i 0],[0 0])
end
hold off
title ('Orientación del eje instantáneo de rotación')
xlabel('Eje X');
ylabel ('Eje Y');
zlabel ('Eje Z');
grid on
```

```
%CÁLCULO DEL EJE PARA LA SEGUNDA HIPÓTESIS MÉDICA
%Carlos Huesa Berral. Ingeniería de la Salud.
```

```
R = 17.85;
r = 20.98;
p = 45;
t = -36.44:0.01:36.44;
```

```
h = R+r-r*cosd(t);
y = r/tand(p) + sqrt((R^2)/(tand(p)^2) + 2*r*(R+r)*(cosd(t)-1));
k = sind(p)./sqrt(R^2-(sind(p)^2)*h.^2);
```

```
A = k.^2.*cosd(t).*(y-r/tand(p)).^2;
B = -k.*(y-r/tand(p)).*(1+cosd(t))+1;
C = ((k).^2).*(r^2).*(sind(t).^2).*(cosd(t).^2);
```

```
V2 = (-k.*r.*(sind(t).^2))./(A+B+C);
V1 = ((k.*(y-r/tand(p))-1)./(k.*r.*sind(t))).*V2;
V3 = ones(size(V1));
```

```
E1 = (R+r)*sind(t);
E2 = y;
E3 = (R+r)*cosd(t);
```

```
hold on
```

```
X = -500:500;
for i=1:10:7289
    Y = (V2(i)/V1(i)).*(X-E1(i)) + E2(i);
    Z = (V3(i)/V1(i)).*(X-E1(i)) + E3(i);
    plot3(X, Y, Z)
```

```
end
hold off
title ('Ejes instantáneos de rotación');
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
grid on
```

8.3- Código MatLab elaborado para el cálculo de los ejes instantáneos de rotación experimentales mediante análisis de movimiento.

```
%ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MOVIMIENTO
%Carlos Huesa Berral. Ingeniería de la Salud.

load('Inver_Ever34.mat');

%Sistema de referencia del calcáneo (cilindro)

%construimos ejes
Xc = points.CalLI - points.CalMS;
auxC = points.CalMI - points.CalMS;
Yc = cross (Xc,auxC);
Zc = cross (Xc,Yc);

%normalizamos vectores ejes
VectorNormXc = [0 0 0];
VectorNormYc = [0 0 0];
VectorNormZc = [0 0 0];

for i=1:364
    for j = 1:3
        VectorNormXc(j) = Xc(i,j);
        VectorNormYc(j) = Yc(i,j);
        VectorNormZc(j) = Zc(i,j);
    end
    CalX(i).mat = VectorNormXc/norm(VectorNormXc);
    CalY(i).mat = VectorNormYc/norm(VectorNormYc);
    CalZ(i).mat = VectorNormZc/norm(VectorNormZc);
end

%Sistema de referencia del astrágalo (esfera)

%construimos ejes
Xa = points.AStrAM - points.AstrAL;
auxA = points.AstrPL - points.AstrAL;
Ya = cross (Xa,auxA);
Za = cross (Xa,Ya);

%normalizamos vectores
VectorNormXa = [0 0 0];
VectorNormYa = [0 0 0];
VectorNormZa = [0 0 0];

for i=1:364
    for j = 1:3
        VectorNormXa(j) = Xa(i,j);
        VectorNormYa(j) = Ya(i,j);
        VectorNormZa(j) = Za(i,j);
    end
    AstX(i).mat = VectorNormXa/norm(VectorNormXa);
    AstY(i).mat = VectorNormYa/norm(VectorNormYa);
    AstZ(i).mat = VectorNormZa/norm(VectorNormZa);
end
```

```

%Astrágalo con respecto al sistema global
for i = 1:364
    gTa(i).mat = [(AstX(i).mat)*[1 0 0]' (AstY(i).mat)*[1 0 0]'
(AstZ(i).mat)*[1 0 0]' 0;
                (AstX(i).mat)*[0 1 0]' (AstY(i).mat)*[0 1 0]'
(AstZ(i).mat)*[0 1 0]' 0;
                (AstX(i).mat)*[0 0 1]' (AstY(i).mat)*[0 0 1]'
(AstZ(i).mat)*[0 0 1]' 0;
                0 0 0 1];
end

```

```

view(45,45);
grid
for i=1:1:364
    FA = createFRAME(eye(4), 'b', 'R');
    FB = createFRAME(gTa(i).mat, 'r', 'O');
end
title('Astrágalo con respecto al sistema global');
figure

```

```

%Calcáneo con respecto al sistema global

```

```

for i = 1:364
    gTc(i).mat = [(CalX(i).mat)*[1 0 0]' (CalY(i).mat)*[1 0 0]'
(CalZ(i).mat)*[1 0 0]' 0;
                (CalX(i).mat)*[0 1 0]' (CalY(i).mat)*[0 1 0]'
(CalZ(i).mat)*[0 1 0]' 0;
                (CalX(i).mat)*[0 0 1]' (CalY(i).mat)*[0 0 1]'
(CalZ(i).mat)*[0 0 1]' 0;
                0 0 0 1];
end

```

```

view(45,45);
grid
for i=1:1:364
    FA = createFRAME(eye(4), 'b', 'R');
    FB = createFRAME(gTc(i).mat, 'r', 'O');
end
title('Calcáneo con respecto al sistema global');
figure

```

```

%Calculamos la transformada LjTLi

```

```

for i = 1:364
    %Astrágalo (móvil) con respecto al calcáneo (fijo)
    cTa(i).mat = [(AstX(i).mat)*(CalX(i).mat)' (AstY(i).mat)*(CalX(i).mat)'
(AstZ(i).mat)*(CalX(i).mat)' points.AstrAL(i,1)-points.CalMS(i,1);
                (AstX(i).mat)*(CalY(i).mat)' (AstY(i).mat)*(CalY(i).mat)'
(AstZ(i).mat)*(CalY(i).mat)' points.AstrAL(i,2)-points.CalMS(i,2);
                (AstX(i).mat)*(CalZ(i).mat)' (AstY(i).mat)*(CalZ(i).mat)'
(AstZ(i).mat)*(CalZ(i).mat)' points.AstrAL(i,3)-points.CalMS(i,3);
                0 0 0 1];
end

```

```

view(45,45);
grid
for i=1:91:364
    FA = createFRAME(eye(4), 'b', 'R');

```

```

    FB = createFRAME (cTa(i).mat, 'r', 'O');
end
title('Transformada del Astrágalo con respecto al calcáneo, representada
respecto al SG')
figure

%Calculamos la matriz que representa el movimiento relativo entre astrágalo
%y calcáneo TLiLj

for i = 2:364
    Tac(i).mat = (cTa(i).mat)*(inv(cTa(i-1).mat));
end

%Cálculo de parámetros del eje

for i = 2:364
    %Orientación
    m = Tac(i).mat;
    numAng = m(1,1)+ m(2,2)+m(3,3)-1;
    phi = acosd(numAng/2);

    den = 2*sind(phi);
    num1 = m(3,2)- m(2,3);
    num2 = m(1,3)- m(3,1);
    num3 = m(2,1)- m(1,2);
    U(i).mat = [num1/den num2/den num3/den];

    %Posición
    p = [m(1,4) m(2,4) m(3,4)];

    h = p*(U(i).mat)';

    M = [m(1,1)-1 m(1,2) m(1,3);
        m(2,1) m(2,2)-1 m(2,3);
        m(3,1) m(3,2) m(3,3)-1];

    s(i).mat = inv(M)*(h*((U(i).mat)')- p');
end

hold on
X=-500:500;
for i=2:364

    y = ((U(i).mat(2))* (X-s(i).mat(1)))/U(i).mat(1) + s(i).mat(2);
    Z = ((U(i).mat(3))* (X-s(i).mat(1)))/U(i).mat(1) + s(i).mat(3);

    plot3(X,y,Z)

pendienteY(i).mat = (U(i).mat(2))/(U(i).mat(1));
pendienteZ(i).mat = (U(i).mat(3))/(U(i).mat(1));

angY(i).mat = atand(pendienteY(i).mat);
angZ(i).mat = atand(pendienteZ(i).mat)
end

```

```
hold off

title('Ejes instantáneos de rotación')
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')

grid on

figure

hold on
for i=2:364
plot3([U(i).mat(1) 0],[U(i).mat(2) 0],[U(i).mat(3) 0])
end
hold off

title('Orientación ejes instantáneos de rotación')
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
grid on
```