ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
Y
DUALIDAD
EN PROGRAMACIÓN LINEAL

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
EN PROGRAMACIÓN LINEAL

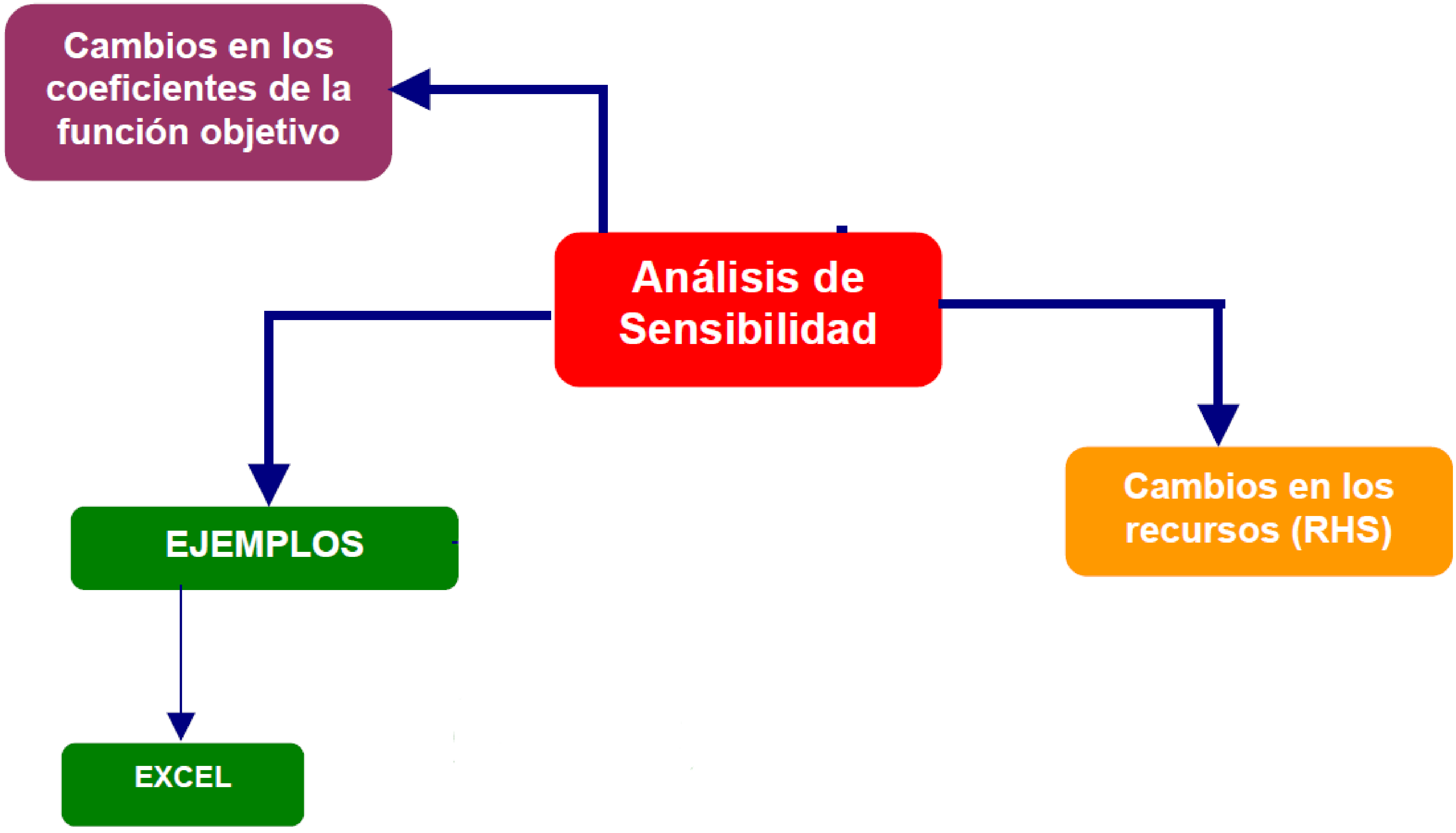
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

- **Visión estática**: construcción del modelo y obtención solución optima para ese modelo matemático concreto.

- ¿cómo podemos obtener información adicional para la toma de decisiones en la resolución de problemas?

- **Visión dinámica**: analizar hasta que extremo es consistente la solución óptima y su posible evolución ante un hipotético futuro cambio de algunos de los parámetros. (análisis de sensibilidad)

ESQUEMA DE CONTENIDOS



ANÁLISIS SENSIBILIDAD GRÁFICO

Análisis gráfico de la sensibilidad

Un modelo de PL es una foto instantánea de una situación real en los parámetros del modelo asumen valores estáticos.

Debemos agregar una dimensión dinámica que investigue hacer cambios en los coeficientes del modelo. Este concepto se llama análisis de la sensibilidad, estudia la solución optima respecto a los cambios que se hagan en el modelo

Casos de análisis:

Cambio de coeficientes de la función objetivo ($z=c_1x_1+c_2x_2$)

Cambio lado derecho de las restricciones, la disponibilidad de recursos

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq) A_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{21}x_2 \leq (\geq) A_2$$

Planteamiento analítico:

Variables decisión

$$\text{Cinturon tipo A} = x_1$$

$$\text{Cinturon tipo B} = x_2$$

F.objetivo a max.

$$\textit{Maximizar beneficio} \quad Z = 2x_1 + 1.5x_2$$

Restricciones

$$2x_1 + x_2 \leq 1000$$

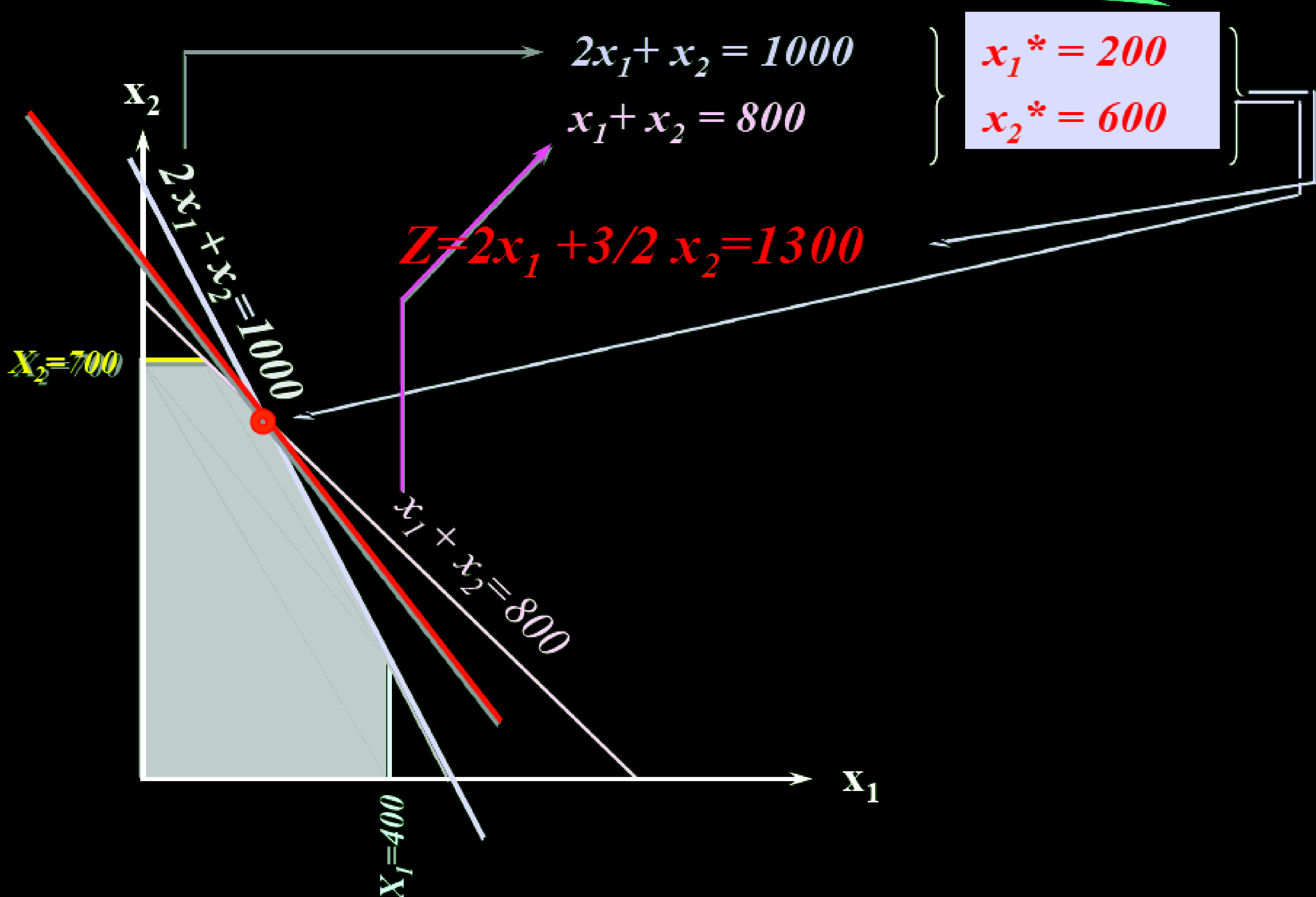
$$x_1 + x_2 \leq 800$$

$$x_1 \leq 400$$

$$x_2 \leq 700$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

Siguiendo el caso que nos sirve de referencia recordamos la solución obtenida y la pregunta es: ¿cómo pueden variar los coeficientes de la función objetivo sin que cambie el programa (decisión tomada)?

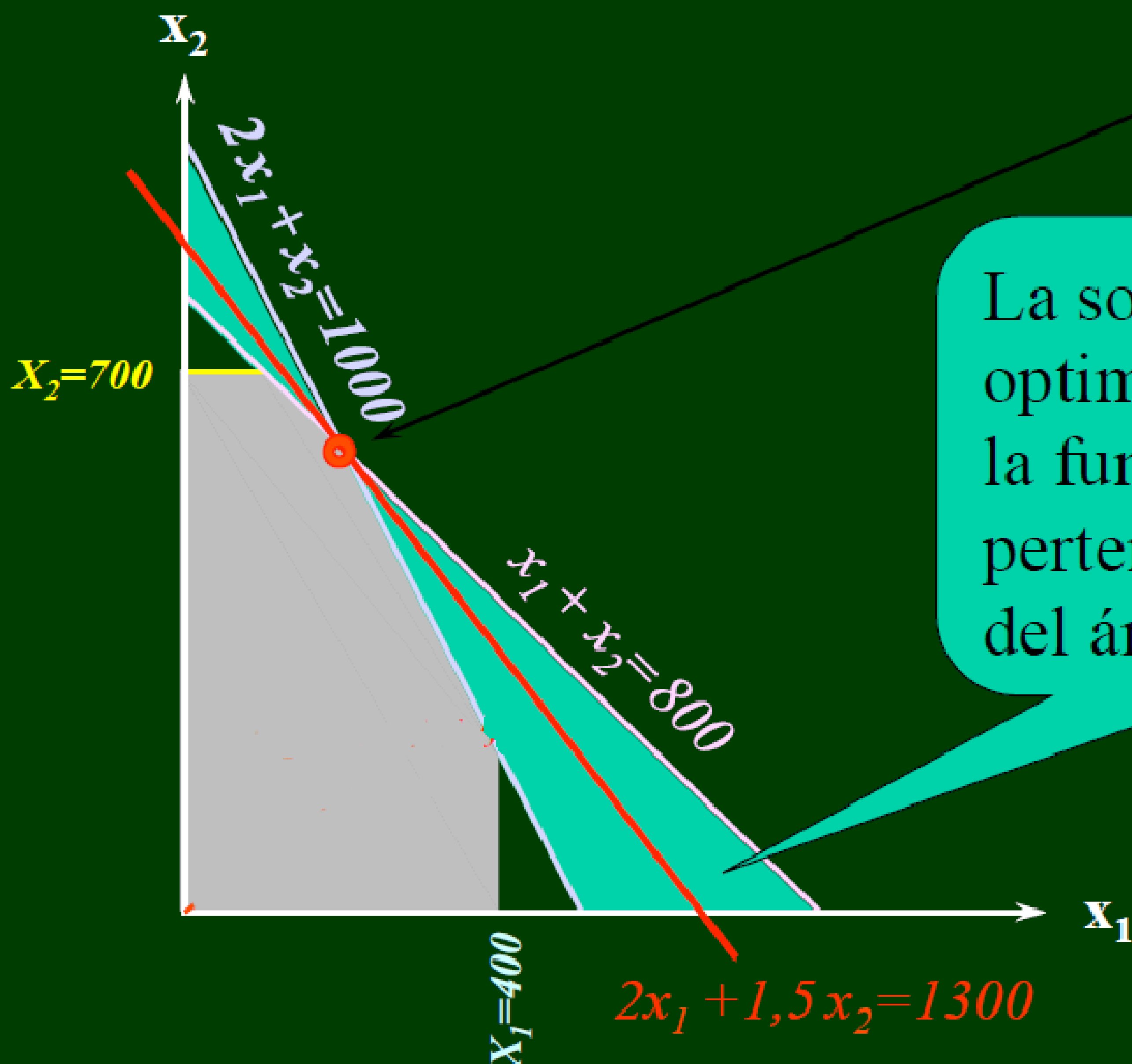


Sensibilidad respecto a los rendimientos

Cambios en los coeficientes de la función objetivo

$x_1^* = 200$

$x_2^* = 600$



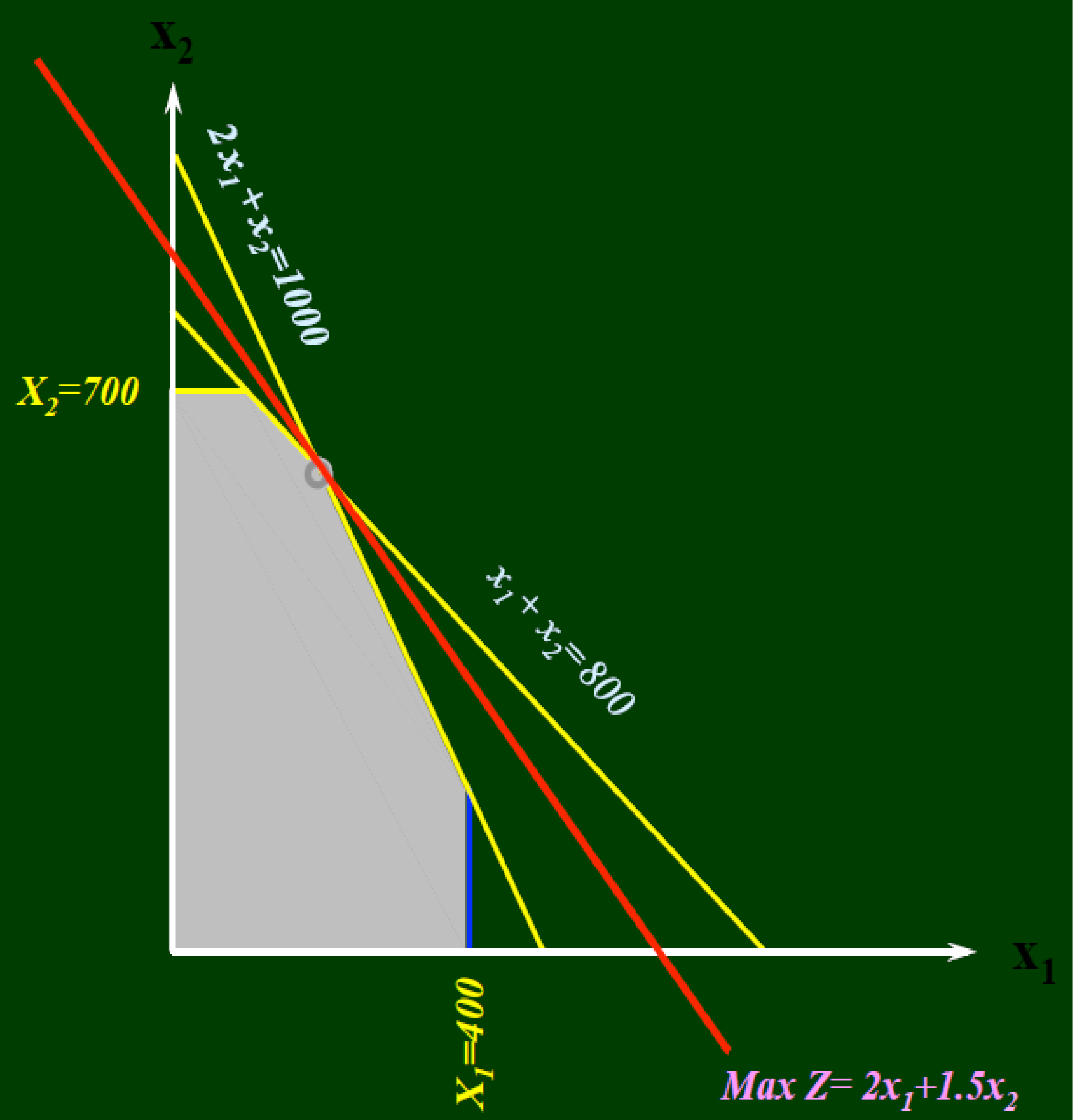
La solución será la optima siempre que la función objetiva pertenezca al haz del área marcada

Sensibilidad respecto a las disponibilidades y requerimientos
Cambios en los términos independientes de las restricciones

$$Max\ Z = 2x_1 + 1.5x_2$$

s.a.

$$2x_1 + x_2 \leq 1000$$
$$x_1 + x_2 \leq 800$$
$$x_1 \leq 400$$
$$x_2 \leq 700$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Sensibilidad respecto a las disponibilidades y requerimientos
Cambios en los términos independientes de las restricciones

$$Max\ Z = 2x_1 + 1.5x_2$$

s.a.

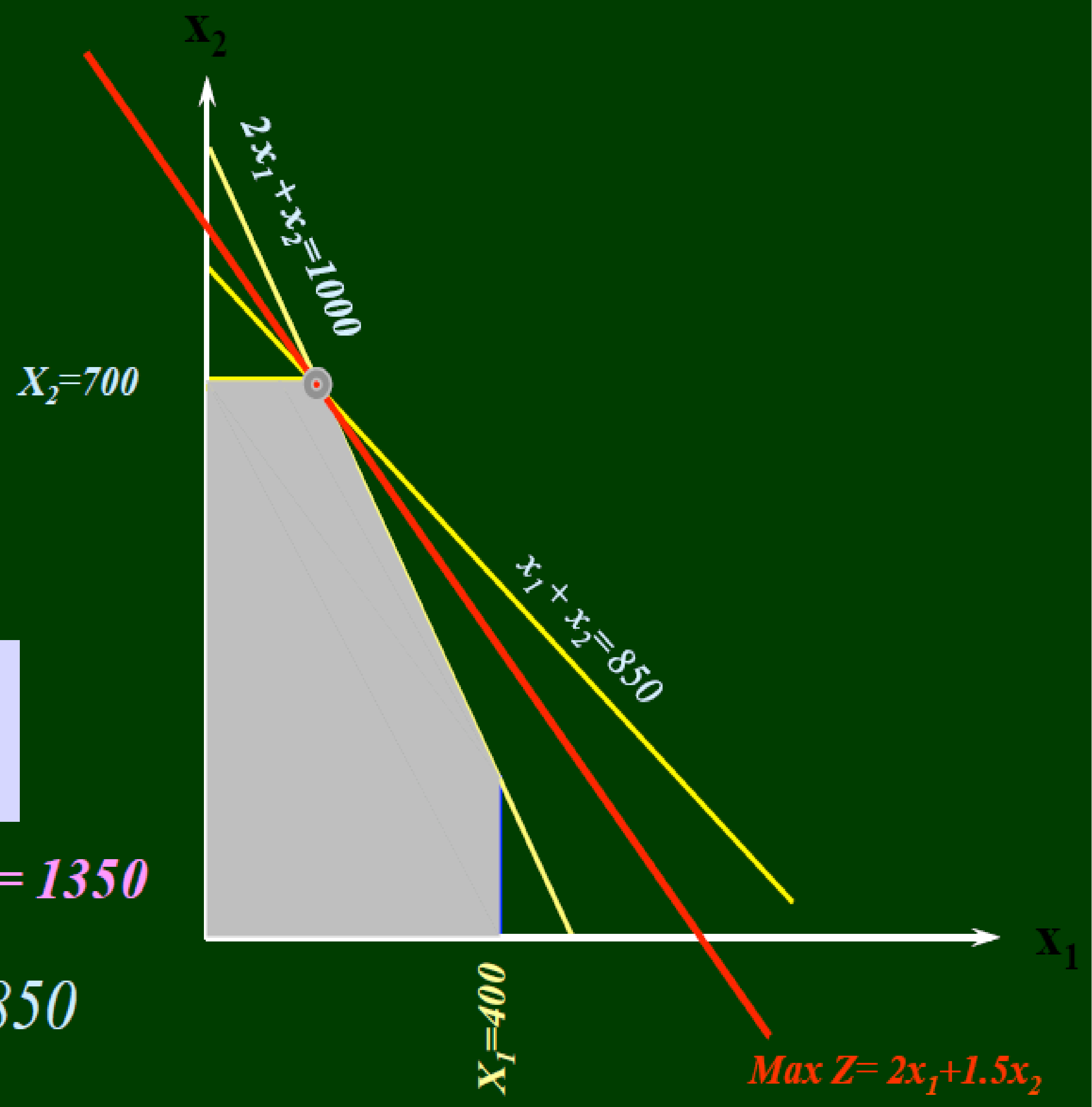
$$2x_1 + x_2 \leq 1000$$
$$x_1 + x_2 \leq 800$$
$$x_1 \leq 400$$
$$x_2 \leq 700$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_1^* = 150$

$x_2^* = 700$

$$Z = 2x_1 + 1.5x_2 = 2 \times 150 + 1,5 \times 700 = 1350$$

$$x_1 + x_2 = 150 + 700 = 850$$



Sensibilidad respecto a las disponibilidades y requerimientos
Cambios en los términos independientes de las restricciones

Se observa que aumentar en 50 unidades las disponibilidades de cuero (850 -800) permite mejora la función objetivo en (1350 – 1300) 50 euros, y de ello deducir que el valor unitario de este recurso o precio sombra es de 1 euro (50€/ 50u.), y esta sería la cantidad que estaríamos puesto a pagarpor cada unidad mientras la restricción sea activa.

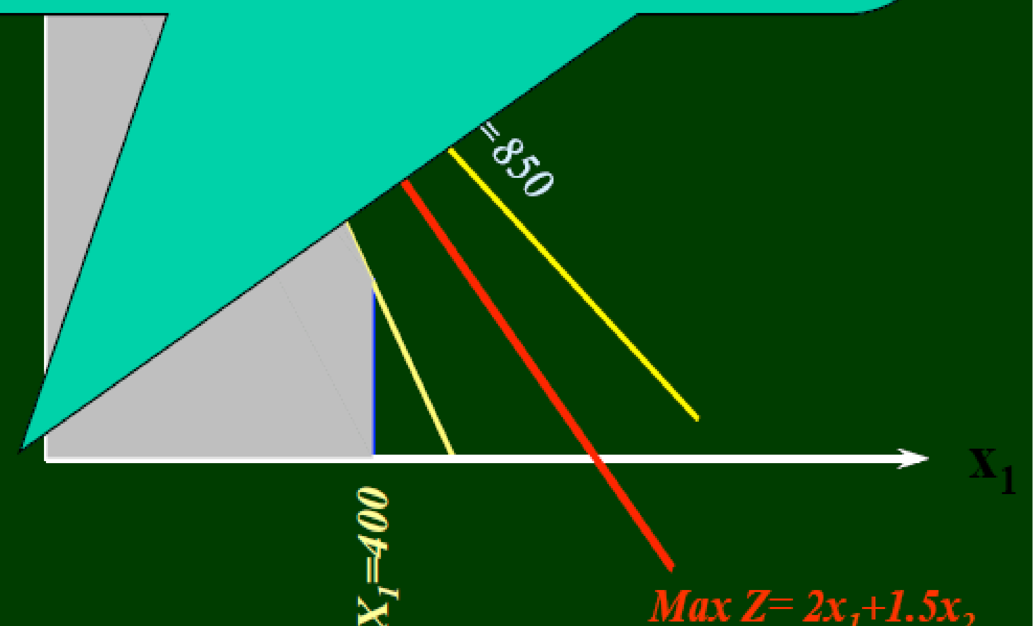
$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1^* = 150$

$x_2^* = 700$

$Z = 2x_1 + 1.5x_2 = 2 \times 150 + 1,5 \times 700 = 1350$

$x_1 + x_2 = 150 + 700 = 850$



Sensibilidad respecto a las disponibilidades y requerimientos
Cambios en los términos independientes de las restricciones

A partir de 850 unidades de cuero la restricción deja de ser activa y no se obtiene ningún incremento de la función objetivo por lo que el precio sombra sería cero

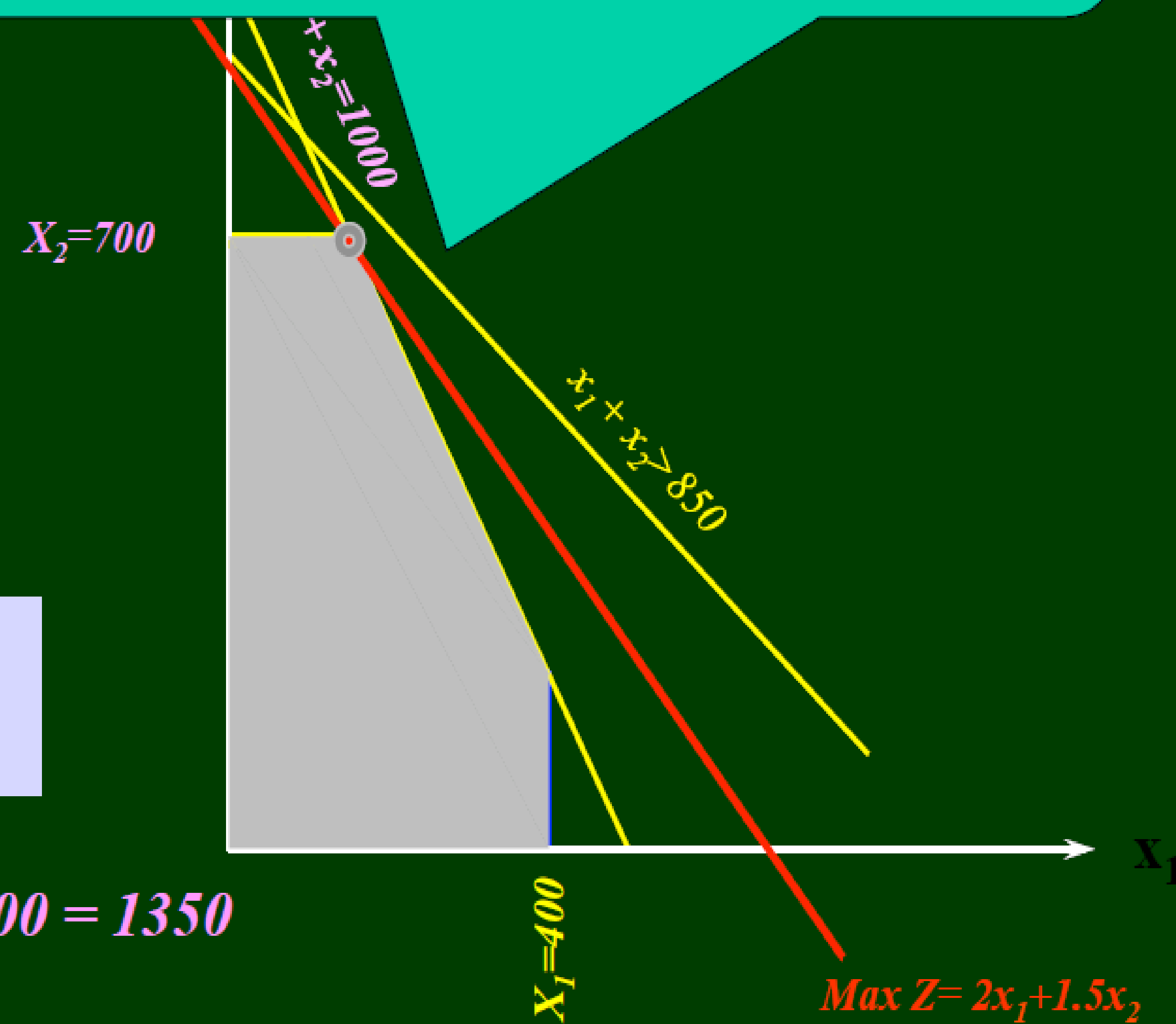
M

s.

$$2x_1 + x_2 \le 1000$$
$$x_1 + x_2 \le 800$$
$$x_1 \le 400$$
$$x_2 \le 700$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

$x_1^* = 150$

$x_2^* = 700$



$$Z = 2x_1 + 1.5x_2 = 2 \times 150 + 1,5 \times 700 = 1350$$

ANÁLISIS SENSIBILIDAD CON SOLVER

❑ Ejemplos Análisis de Sensibilidad con Excel

Ejemplo 1: Compañía de producción de televisores.

Una compañía produce televisores, equipos Hi-Fi y altavoces utilizando una serie de componentes comunes, tal y como se indica en la tabla inferior.

Estos componentes están disponibles en cantidades limitadas, por lo que se trata de plantear el problema de maximización restringida de beneficios sabiendo que la contribución neta de los tres productos es, respectivamente, de 75 €, 50 €, y 35 €.

	Televisor	Hi-Fi	Altavoces	Disponibilidad
Chasis	1	1	0	450
Tubo de imágenes	1	0	0	250
Conos de altavoces	2	2	1	800
Fuente de alimentación	1	1	0	450
Componentes electrónicos	2	1	1	600

El primer paso sería plantear el problema en la hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Determinación de las cantidades a producir						
2							
3							
4							
5				Televisores	Hi-Fi	Altavoces	
6				200	200	0	
7		Disponibles	Uitlizados				
8	Chasis	450	400	1	1	0	
9	Tubo imágenes	250	200	1	0	0	
10	Cono altavoz	800	800	2	2	1	
11	Fuente alimentación	450	400	1	1	0	
12	Componentes elec.	600	600	2	1	1	
13							
14		Beneficios por producto		75	50	35	
15		Beneficios Totales		25.000			
16							

Elegimos las opciones Respuestas y Sensibilidad. Excel nos dará el siguiente “output”:

Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas
Informe creado: 17/02/2000 19:04:40

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$15	Beneficios	16.000	25.000

VALOR ÓPTIMO DE LA FUNCIÓN OBJ.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$6	N_Telev	100	200
$E$6	N_HiFi	100	200
$F$6	N_Altav	100	0

SOLUCIÓN ÓPTIMA

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$C$8	Chasis_utilz	400	$C$8<=$B$8	Opcional	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	$C$9<=$B$9	Opcional	50
$C$10	Conos_utiliz	800	$C$10<=$B$10	Obligatorio	0
$C$11	Fuentes_utiliz	400	$C$11<=$B$11	Opcional	50
$C$12	Comp_utiliz	600	$C$12<=$B$12	Obligatorio	0
$D$6	N_Telev	200	$D$6>=0	Opcional	200
$F$6	N_Altav	0	$F$6>=0	Obligatorio	0
$E$6	N_HiFi	200	$E$6>=0	Opcional	200

CARÉNCIA O EXCEDENTE (SLACK OR SURPLUS)

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad
Informe creado: 17/02/2000 19:04:40

COSTE REDUCIDO

RANGOS DE LOS COEFICIENTES OBJ.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$D$6	N_Telev	200	0	75	25	5
$E$6	N_HiFi	200	0	50	25	12,5
$F$6	N_Altav	0	-2,5	35	2,5	1E+30

RANGOS DEL RIGHT-HAND-SIDE

Restriccion

PRECIOS DUALES

Celda	Nombre	Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
$C$8	Chasis_utilz	400	0	450	1E+30	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	0	250	1E+30	50
$C$10	Conos_utiliz	800	12,5	800	100	100
$C$11	Fuentes_utiliz	400	0	450	1E+30	50
$C$12	Comp_utiliz	600	25	600	50	200

ANÁLISIS DE DUALIDAD
EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal

Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq A_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq A_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema Dual

Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \geq c_1$$
$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 \geq c_2$$
$$u_1, u_2 \geq 0$$

Programa Primal $\rightleftarrows$ Programa Dual

1 Max (o Min) $\rightarrow$ Min (o Max)

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal

Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq A_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq A_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programa Primal

Problema Dual

Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \geq c_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \geq c_2$$
$$u_1, u_2 \geq 0$$

Programa Dual

2

Coeficientes de la función objetivo → Términos independientes de las restricciones

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal

Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \le A_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \le A_2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Programa Primal

3 Términos independientes de las restricciones →

Problema Dual

Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11}\, u_1 + a_{21}\, u_2 \ge c_1$$
$$a_{12}\, u_1 + a_{22}\, u_2 \ge c_2$$
$$u_1, u_2 \ge 0$$

Programa Dual

Coeficientes de la función objetivo

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal

Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq A_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq A_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programa Primal

4

Matriz (n x m) de los coeficientes de las restricciones

Problema Dual

Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \geq c_1$$
$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 \geq c_2$$
$$u_1, u_2 \geq 0$$

Programa Dual

Matriz (m x **n**) traspuesta de los coeficientes de las restricciones

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal	Problema Dual
Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$	Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

Problema Primal

Max $\quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq A_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq A_2$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Problema Dual

Min $\quad z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \geq c_1$$
$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 \geq c_2$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Programa Primal

Programa Dual

5 Número de variables → Número de restricciones

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal

Max $\quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \le A_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \le A_2$$
$$x_1 ,\, x_2 \ge 0$$

Programa Primal

Problema Dual

Min $\quad z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \ge c_1$$
$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 \ge c_2$$
$$u_1 ,\, u_2 \ge 0$$

Programa Dual

6 Número de restricciones → Número de variables

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal

Max $z = c_1x_1 + c_2x_2$

S.A.:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq A_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq A_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema Dual

Min $z = A_1u_1 + A_2u_2$

S.A.:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \geq c_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \geq c_2$$
$$u_1, u_2 \geq 0$$

Programa Primal

Programa Dual

7 Sentido de la inecuación $\leq$ $(\geq)$ y variables no negativas → Sentido de la inecuación $\geq$ $(\leq)$ y variables no negativas

Ecuaciones $(=)$ → Variables sin restricción de signos

$$\max \quad z = 70x_1 + 90x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 &+ 3x_2 \leq 40 \\ 4x_1 &+ 7x_2 \leq 72 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\min \quad z = 40y_1 + 56y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4y_1 &+ 4y_2 \geq 70 \\ 3y_1 &+ 7y_2 \geq 90 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución

$(x_1, x_2) = (4,7)$

$z* \quad 850$

$\lambda_1 = 65/8$

$\lambda_2 = 75/8$

Solución

$(y_1, y_2) = (65/8, 75/8)$

$z* \quad 850$

$\lambda_1 = 4$

$\lambda_2 = 7$

Dualidad en Programación Lineal,

Problema Primal		Problema Dual
Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$	=	Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

Problema Primal

Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le A_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le A_2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

=

Problema Dual

Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \ge c_1$$
$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 \ge c_2$$
$$u_1, u_2 \ge 0$$

Teorema de la coincidencia

El Máximo (o Mínimo) de la función objetivo del problema primal coincide con el Mínimo (o Máximo) de la función objetivo del problema dual

Dualidad en Programación Lineal

Problema Primal	Problema Dual
Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$	Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

Problema Primal

Max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

S.A.:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq A_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq A_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema Dual

Min $z = A_1 u_1 + A_2 u_2$

S.A.:

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \geq c_1$$
$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 \geq c_2$$
$$u_1, u_2 \geq 0$$

Teorema de la correspondencia

Los valores de las variables duales en el óptimo del problema dual **coinciden** con los rendimientos marginales de las variables de holgura en el óptimo del problema primal

A los valores de las variables del problema dual **se les llama** precio de referencia, precio teórico o precio sombra de los factores productivos

Planteamiento analítico:

Siendo el problema PRIMAL

Variables

x_1 , x_2

$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4$

Función a Optimizar

$Max\ Z= 2x_1+1.5x_2$

$Min\ Z= 1000u_1+800u_2+400u_3+700u_4$

Restricciones

$2x_1+ x_2 \leq 1000$

$x_1+ x_2 \leq 800$

$x_1 \leq 400$

$x_2 \leq 700$

$2u_1+1u_2+1u_3+0u_4 \geq 2$

$1u_1+1u_2+0u_3+1u_4 \geq 1,5$

Problema Primal

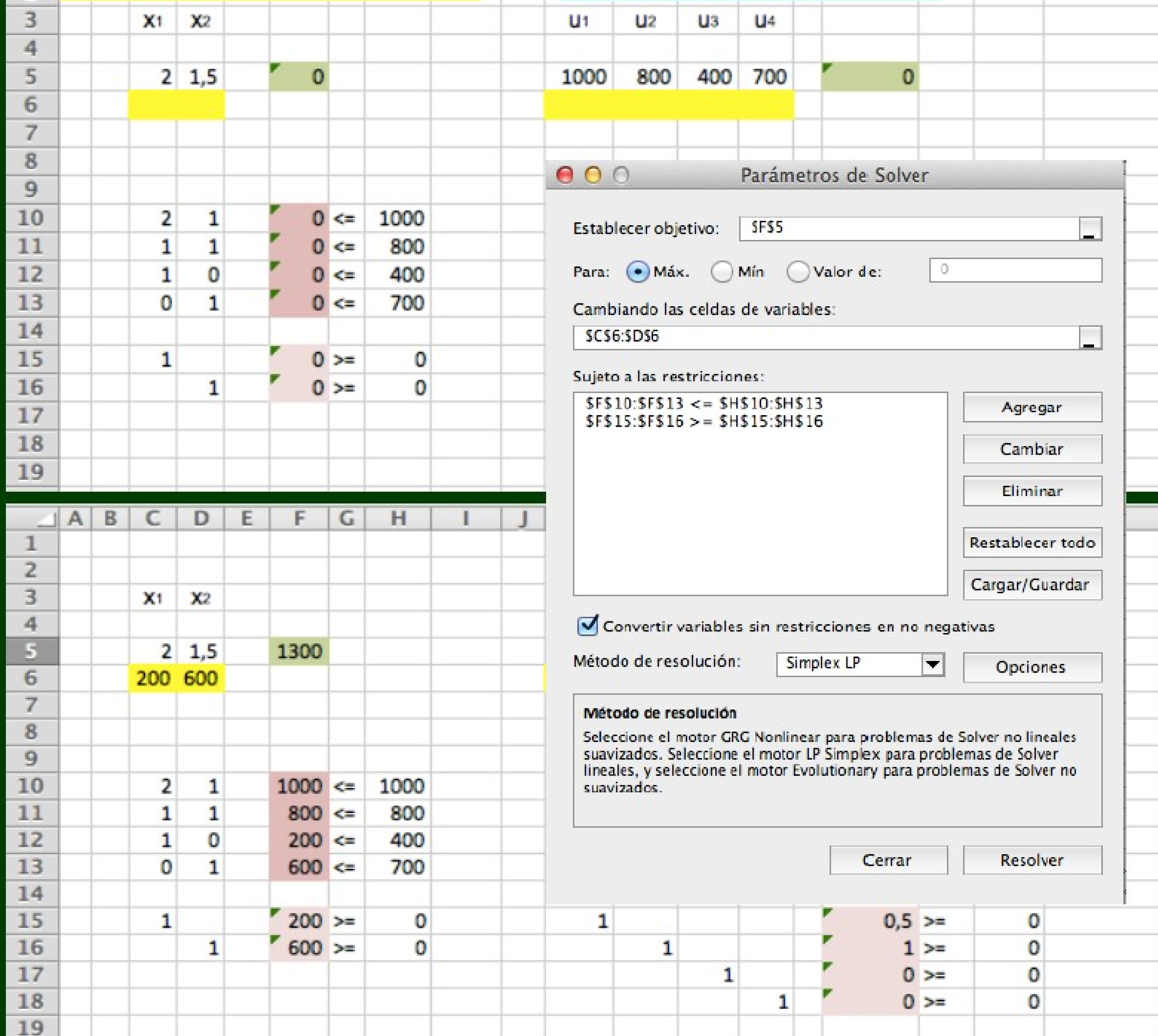
X1	X2			
2	1,5	0		
2	1	0	<=	1000
1	1	0	<=	800
1	0	0	<=	400
0	1	0	<=	700
1		0	>=	0
	1	0	>=	0

Problema Dual

U1	U2	U3	U4			
1000	800	400	700	0		
2	1	1	0	0	>=	2
1	1	0	1	0	>=	1,5
1				0	>=	0
	1			0	>=	0
		1		0	>=	0
			1	0	>=	0

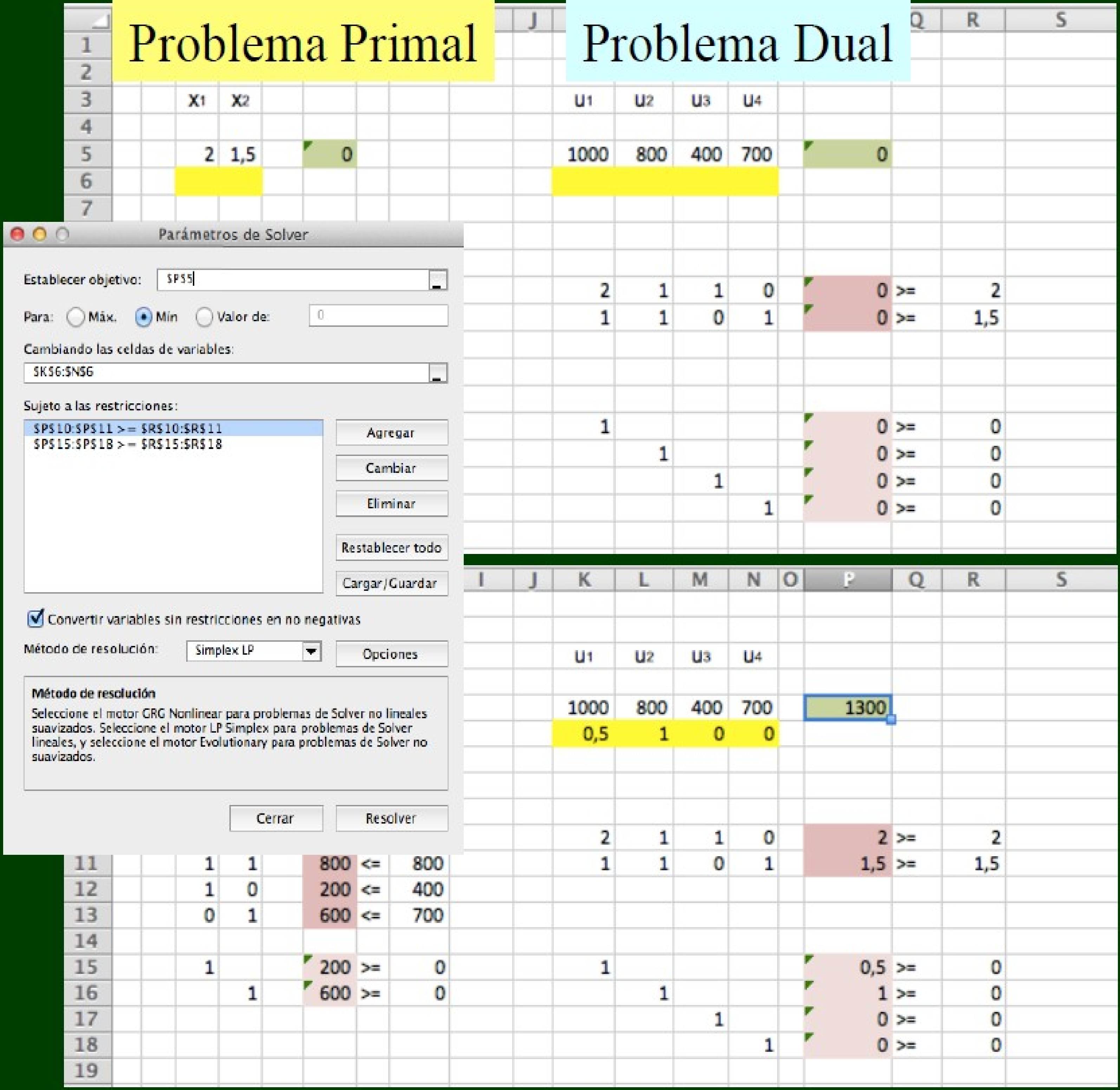
Problema Primal

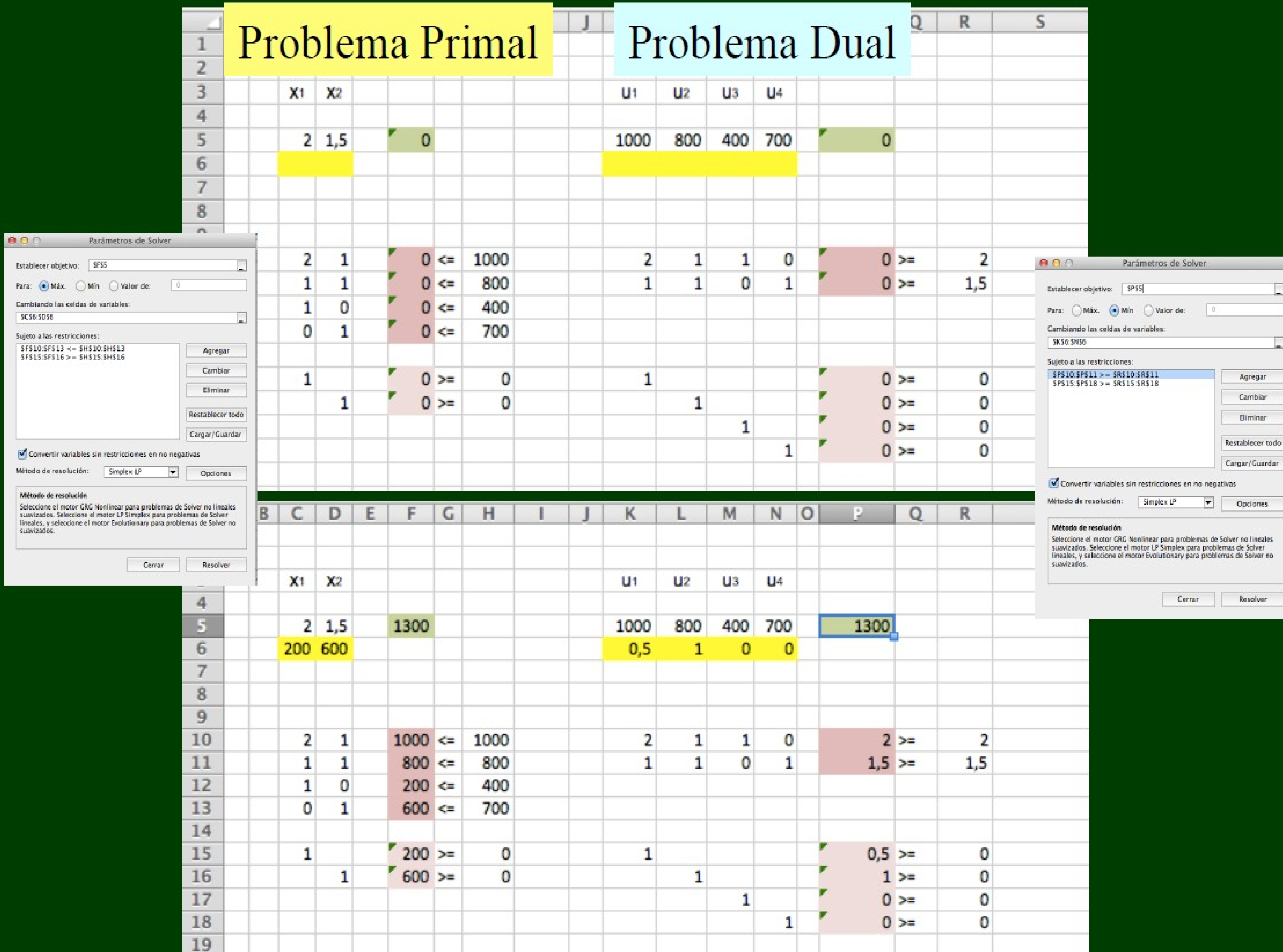
Problema Dual



Problema Primal

Problema Dual




Problema Primal
Problema Dual
X1 X2
2 1,5 0
U1 U2 U3 U4
1000 800 400 700 0
2 1 0 <= 1000
1 1 0 <= 800
1 0 0 <= 400
0 1 0 <= 700
1 0 >= 0
1 0 >= 0
2 1 1 0 0 >= 2
1 1 0 1 0 >= 1,5
1 0 >= 0
1 0 >= 0
1 0 >= 0
1 0 >= 0
Parámetros de Solver
Establecer objetivo: $F$5
Para: Máx. Mín Valor de:
Cambiando las celdas de variables:
$C$6:$D$6
Sujeto a las restricciones:
$F$10:$F$13 <= $H$10:$H$13
$F$15:$F$16 >= $H$15:$H$16
Agregar
Cambiar
Eliminar
Restablecer todo
Cargar/Guardar
Convertir variables sin restricciones en no negativas
Método de resolución: Simplex LP
Opciones
Método de resolución
Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.
Cerrar
Resolver
Parámetros de Solver
Establecer objetivo: $P$5
Para: Máx. Mín Valor de:
Cambiando las celdas de variables:
$K$6:$N$6
Sujeto a las restricciones:
$P$10:$P$11 >= $R$10:$R$11
$P$15:$P$18 >= $R$15:$R$18
Agregar
Cambiar
Eliminar
Restablecer todo
Cargar/Guardar
Convertir variables sin restricciones en no negativas
Método de resolución: Simplex LP
Opciones
Método de resolución
Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.
Cerrar
Resolver
X1 X2
2 1,5 1300
200 600
U1 U2 U3 U4
1000 800 400 700 1300
0,5 1 0 0
2 1 1000 <= 1000
1 1 800 <= 800
1 0 200 <= 400
0 1 600 <= 700
1 200 >= 0
1 600 >= 0
2 1 1 0 2 >= 2
1 1 0 1 1,5 >= 1,5
1 0,5 >= 0
1 1 >= 0
1 0 >= 0
1 0 >= 0

Primal
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ sujeto a $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal

Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$ sujeto a $x_1 + 2x_2 \geq 3$ $2x_1 - 4x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$

Primal

Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$
sujeto a

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\
2x_1 - 4x_2 &\geq 5 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Problema dual

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \leq 15$$

$$2y_1 - 4y_2 \leq 12$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$