PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

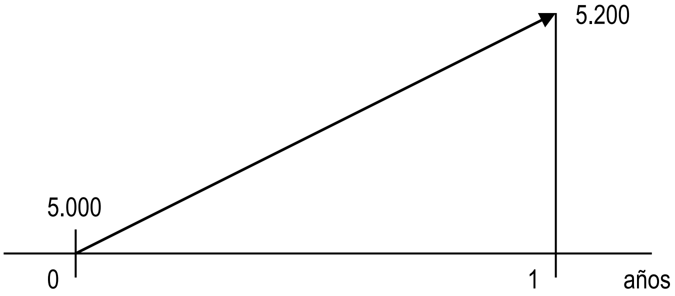
1. Un capital de 5.000 euros se sustituye hoy por otro de 5.200 disponible dentro de un año. ¿Cuál es el rédito de la operación? ¿Y el tanto de interés anual?

$C_1 = 5.000€$

$C_2 = 5.200€$

$t_1 = 0$

$t_2 = 1\,\text{año}$



$$r = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{5.200 - 5.000}{5.000} = 0{,}04 = 4\%$$

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{5.200 - 5.000}{5.000}}{1 - 0} = \frac{0{,}04}{1} = 0{,}04 = 4\%$$

r=4%

i=4%

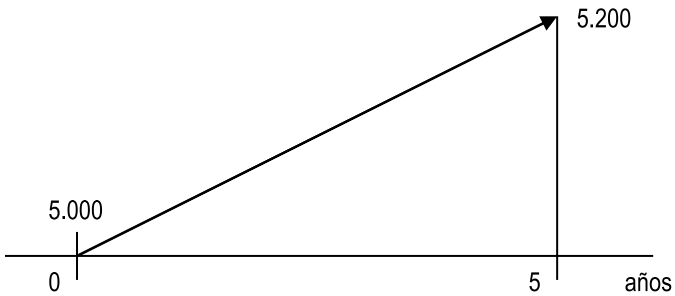
2. Si en el ejercicio 1, en lugar de durar un año la operación se pacta para que dure 5 años, calcule cuál será el rédito y cuál el tipo de interés que se aplica en esta operación.

$C_1 = 5.000€$

$C_2 = 5.200€$

$t_1 = 0$

$t_2 = 5\,\text{años}$



$$r = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{5.200 - 5.000}{5.000} = 0{,}04 = 4\%$$

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{5.200 - 5.000}{5.000}}{5 - 0} = \frac{0{,}04}{5} = 0{,}008 = 0{,}8\%$$

r=4%

i=0,8%

PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 2: CAPITALIZACIÓN SIMPLE

1. ¿Cuánto tiempo tardará un capital invertido al 10% de interés simple anual en producir unos intereses iguales al doble del mismo?

C_0

$i = 10\%$

$I_n = 2 \cdot C_0$

$n?$

Sabemos que:

$$C_n = C_0 + I_n$$

$$C_n = C_0 + 2C_0 = 3C_0$$

Ya que hemos puesto C_n en función de C_0, podemos hallar el tiempo que estuvo invertida:

$$n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i}$$

$$n = \frac{\frac{3C_0}{C_0} - 1}{0{,}10} = \frac{3-1}{0{,}10} = 20 \text{ años}$$

n=20 años

2. Se coloca hoy un capital A durante 5 meses, produciendo unos intereses simples totales del 4% de A. ¿A qué tanto anual se ha colocado? ¿A qué tanto mensual?

$C_0 = A$

$n = 5$

$I_5 = 0{,}04 \cdot A$

Si se quiere calcular el interés simple utilizamos su correspondiente fórmula:

$$i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}$$

Para ello su valor final C_n es igual a:

$$C_n = C_0 + I_n$$

$$C_n = A + 0{,}04A = 1{,}04A$$

Ya que hemos puesto C_n en función de C_0, podemos calcular el tipo de interés anual:

$$i=\frac{\frac{1{,}04A}{A}-1}{\frac{5}{12}}=\frac{1{,}04-1}{0{,}416667}=\frac{0{,}04}{0{,}416667}=0{,}096=9{,}60\%$$

Ya que n lo hemos expresado en años, i también viene expresada en años.

Para pasar de i anual a i mensual basta con aplicar esta fórmula:

$$i=i_k\cdot k\Rightarrow i_k=\frac{i}{k}$$

$$i_{12}=\frac{0{,}096}{12}=0{,}008=0{,}8\%$$

i=9,6%

i_{12}=0,8%

3. ¿A qué tanto simple anual habría que colocar un capital para que en 15 años se transforme en el triple del mismo?

i?

$n=15$ años

$C_{15}=3C_0$

Si se quiere calcular el interés simple utilizamos su correspondiente fórmula:

$$i=\frac{\frac{C_n}{C_0}-1}{n}$$

$$i=\frac{\frac{C_{15}}{C_0}-1}{15}=\frac{\frac{3C_0}{C_0}-1}{15}=\frac{3-1}{15}=0{,}133333=13{,}33\%$$

i=13,33%

4. ¿A qué tipo de interés anual se prestó un capital de 2.811€, si ha producido unos intereses simples de 150€ desde el 8-3-2010 al 8-10-2010?

i?

$C_0=2.811€$

$n=7$ meses

$I_7=150€$

Si se quiere calcular el interés simple utilizamos su correspondiente fórmula:

$$i=\frac{\frac{C_n}{C_0}-1}{n}$$

$$i = \frac{\frac{C_7}{C_0} - 1}{\frac{7}{12}}$$

Para ello su valor final C_n es igual a:

$$C_n = C_0 + I_n$$

$$C_7 = C_0 + I_7 = 2.811 + 150 = 2.961$$

Ya que calculado C_7 podemos calcular el tipo de interés anual:

$$i = \frac{\frac{2.961}{2.811} - 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1{,}053362 - 1}{0{,}583333} = 0{,}091478 = 9{,}15\%$$

i=9,15%

5. Un capital colocado al 10% simple anual durante un tiempo se transformó en 8.257,88€, pero si hubiera estado colocado al 15% durante el mismo período se hubiera transformado en 9.958,03€. Calcular el importe del capital y el tiempo que estuvo colocado.

$C_0\,(10\%) \Rightarrow C_{n1} = 8.257{,}88$

$C_0\,(15\%) \Rightarrow C_{n2} = 9.958{,}03$

$C_0?$

$n?$

Para hallar el efectivo de un capital en capitalización simple se utiliza la siguiente fórmula:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

Entonces se cumple que:

$$8.257{,}88 = C_0 \cdot (1 + n \cdot 0{,}1) \Rightarrow C_0 = \frac{8.257{,}88}{1 + 0{,}1n}$$

$$9.958{,}03 = C_0 \cdot (1 + n \cdot 0{,}15) \Rightarrow C_0 = \frac{9.958{,}03}{1 + 0{,}15n}$$

Si igualamos las dos expresiones:

$$\frac{8.257{,}88}{1 + 0{,}1n} = \frac{9.958{,}03}{1 + 0{,}15n} \Rightarrow 8.257{,}88 \cdot (1 + 0{,}15n) = 9.958{,}03 \cdot (1 + 0{,}1n)$$

$$\Rightarrow 8.257{,}88 + 1.238{,}68n = 9.958{,}03 + 995{,}80n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.238{,}68n - 995{,}03n = 9.958{,}03 - 8.257{,}88 \Rightarrow 243{,}65n = 1.700{,}15 \Rightarrow n = \frac{1.700{,}15}{243{,}65} = 6{,}98 \text{ años}$$

Ahora ya podemos calcular el efectivo, que por cualquiera de las dos fórmulas anteriores nos tiene que dar lo mismo:

$$C_0 = \frac{8.257,88}{1+0,1\cdot 6,98} = \frac{9.958,03}{1+0,15\cdot 6,98} = 4.863,30$$

n=6,98 años

C_0=4.863,30€

6. **Disponemos de un capital, colocamos la tercera parte del mismo en un banco que trabaja al 5% simple anual, y el resto en otro banco que opera al 6%. Al cabo de un año nos devuelven unos intereses totales de 335,4 euros. Determínese el capital.**

$$\frac{C_0}{3}(5\%)$$

$$\frac{2C_0}{3}(6\%)$$

Los intereses generados el primer año por los dos capitales son:

$$I_n = C_0 \cdot n \cdot i$$

$$I_1^1 = \frac{C_0}{3}\cdot 1\cdot 0,05 = 0,016667C_0$$

$$I_1^2 = \frac{2C_0}{3}\cdot 1\cdot 0,06 = 0,04C_0$$

$$I_1^1 + I_1^2 = 335,4$$

$$0,0166667C_0 + 0,04C_0 = 335,4 \Rightarrow 0,0566667C_0 = 335,4 \Rightarrow C_0 = \frac{335,4}{0,0566667} = 5.918,82$$

C_0=5.918,82€

7. **Un capital de cuantía C que ha estado colocado en un sistema de capitalización simple durante 3 meses ha producido un montante de 44.118'05€. Si se hubiera colocado durante 6 meses el montante habría sido de 44.662'71€. Calcular:**
   a. **El tanto anual al que ha estado colocado y el tanto trimestral equivalente.**
   b. **La cuantía C que se ha colocado.**

$C_0 = C$

$n = 3 \text{ meses}$

$C_{3/12} = 44.118,05$

Si $n = 6 \text{ meses}$

$C_{6/12} = 44.662,71$

a. $i?$, $i_4?$

Intentemos relacionar las dos hipótesis con el capital común C actualizando el capital en ambos supuestos:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i) \Rightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1 + n \cdot i)}$$

$$C_0 = C = \frac{C_{3/12}}{(1 + \frac{3}{12} \cdot i)} = \frac{44.118,05}{(1 + 0,25 \cdot i)}$$

$$C_0 = C = \frac{C_{6/12}}{(1 + \frac{6}{12} \cdot i)} = \frac{44.662,71}{(1 + 0,5 \cdot i)}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{44.118,05}{(1 + 0,25 \cdot i)} = \frac{44.662,71}{(1 + 0,5 \cdot i)} \Rightarrow 44.118,05 \cdot (1 + 0,5 \cdot i) = 44.662,71 \cdot (1 + 0,25 \cdot i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 44.118,05 + 22.059,03 \cdot i = 44.662,71 + 11.165,68 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22.059,03 \cdot i - 11.165,68 \cdot i = 44.662,71 - 44.118,05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10.893,35 \cdot i = 544,66 \Rightarrow i = \frac{544,66}{10.893,35} = 0,049999 = 5\%$$

Ahora calculemos el tanto trimestral i_4 a partir de su fórmula:

$$i = i_k \cdot k$$

$$i_4 = \frac{i}{k} = \frac{0,05}{4} = 0,0125 = 1,25\%$$

i=5%

i_4=1,25%

b. $C?$

Sustituímos el tanto que nos ha dado con cualquiera de las expresiones anteriores:

$$C = \frac{44.118,05}{(1 + 0,25 \cdot 0,049999)} = \frac{44.662,71}{(1 + 0,5 \cdot 0,049999)} = 43.573,39$$

C=43.573,39€

8. **Los intereses simples producidos por dos capitales diferentes fueron iguales. Si el tipo anual aplicado al primero fue de un 3,5% y al segundo de un 5,5%, ¿cuánto tiempo estuvo colocado cada uno si las cantidades iniciales fueron tales que la primera era el doble de la segunda y entre los dos estuvieron colocados un total de 10 años?**

$I_{n1} = I_{n2}$

$i_1 = 3{,}5\%$

$i_2 = 5{,}5\%$

$C_{01} = 2 \cdot C_{02}$

$n_1 + n_2 = 10$ años

Veamos qué le ocurre a los intereses del primer y del segundo capital:

$$I_n = C_0 \cdot n \cdot i$$

$$I_{n1} = C_{01} \cdot n_1 \cdot i_1 = C_{01} \cdot n_1 \cdot 0{,}035$$

$$I_{n2} = C_{02} \cdot n_2 \cdot i_2 = C_{02} \cdot n_2 \cdot 0{,}055$$

Como sabemos que son iguales, y que:

$$C_{01} = 2 \cdot C_{02} \Rightarrow C_{02} = \frac{1}{2} \cdot C_{01} \Rightarrow C_{02} = 0{,}5 \cdot C_{01}$$

$$n_1 + n_2 = 10 \Rightarrow n_2 = 10 - n_1$$

podemos sustituir la expresión correspondiente:

$$C_{01} \cdot n_1 \cdot 0{,}035 = C_{02} \cdot n_2 \cdot 0{,}055 \Rightarrow C_{01} \cdot n_1 \cdot 0{,}035 = 0{,}5 \cdot C_{01} \cdot (10 - n_1) \cdot 0{,}055 \Rightarrow$$
$$C_{01} \cdot n_1 \cdot 0{,}035 = 0{,}0275 \cdot C_{01} \cdot (10 - n_1) \Rightarrow C_{01} \cdot n_1 \cdot 0{,}035 = 0{,}275 \cdot C_{01} - 0{,}0275 \cdot C_{01} \cdot n_{01}$$
$$\Rightarrow 0{,}035 \cdot C_{01} \cdot n_1 = 0{,}275 \cdot C_{01} - 0{,}0275 \cdot C_{01} \cdot n_{01} \Rightarrow 0{,}035 \cdot C_{01} \cdot n_1 + 0{,}0275 \cdot C_{01} \cdot n_{01} = 0{,}275 \cdot C_{01} \Rightarrow$$
$$0{,}0625 \cdot \cancel{C_{01}} \cdot n_1 = 0{,}275 \cdot \cancel{C_{01}} \Rightarrow 0{,}0625 \cdot n_1 = 0{,}275 \Rightarrow n_1 = \frac{0{,}275}{0{,}0625} = 4{,}4 \text{ años}$$

$$n_2 = 10 - n_1 = 10 - 4{,}4 = 5{,}6 \text{ años}$$

n_1=4,4 años

n_2=5,6 años

9. **Una empresa emite obligaciones de 1.000€ nominales, que perciben unos intereses simples semestrales de 50€. Obtener:**
   a. **El tanto anual y el tanto semestral que proporcionan.**
   b. **El tanto anual de rentabilidad que obtiene un inversor que las adquiere ahora al 90% de su valor nominal.**

c. El tanto anual de rentabilidad que obtiene un inversor que las adquiere al 110% de su valor nominal.

$$\text{Nominal de la obligación} = C_0 = 1.000€$$

$$I_{0,5} = 50€$$

a. $¿i?, ¿i_2?$

En este caso el nominal de la obligación es lo que el particular ha despositado (efectivo), por lo que el nombre de nominal cuando se trata de calcular la rentabilidad de unas obligaciones no se puede confundir con el montante final. En realidad, sería un caso de descuento comercial por el que se reciben intereses calculados sobre el montante final, no sobre el inicial.

Para calcular la rentabilidad obtenida en capitalización simple utilizaremos la fórmula básica que calcula el tipo de interés o retabilidad obtenida.

Para calcular la rentabilidad de una obligación cuando está emitida a la par, es decir, el valor de emisión coincide con el nominal, se pueden aplicar las fórmulas de capitalización simple, ya que los intereses se generan sobre el valor nominal de la obligación (capital inicial).

C_0=1.000 $I_{0,5}$=50

0 0,5 años

Así, comparamos lo que recibimos con lo que pagamos, mediante la fórmula básica:

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1}$$

$$i = \frac{\frac{1.050 - 1.000}{1.000}}{0,5 - 0} = \frac{0,05}{0,5} = 0,1 = 10\%$$

Para hallar el tanto semestral equivalente:

$$i = i_k \cdot k$$

$$i = i_2 \cdot 2 \Rightarrow i_2 = \frac{i}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05 = 5\%$$

i=10%

i_2=5%

b. $¿i?$ Si E=C_0=90% del Nominal

En este caso no podemos aplicar las fórmulas de capitalización simple, ya que hay que calcular la rentabilidad obtenida conciendo el valor que se invierte y el que se recibe, que no están vinculados por los intereses. Es decir, aunque se pagan 900€ se reciben intereses sobre 1.000€.

Dibujemos lo que ocurre en este caso:

C_0=900 $C_{0,5}$=1.000+$I_{0,5}$=1.050

0 0,5 años

Ahora tenemos que comparar lo que recibimos con lo que pagamos, mediante la fórmula básica:

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1}$$

$$i = \frac{\frac{1.050 - 900}{900}}{0,5 - 0} = \frac{0,166667}{0,5} = 0,333333 = 33,33\%$$

i=33,33%

c. ¿i? Si E=C_0=110% del Nominal

Este caso es idéntico al anterior, por lo que si dibujamos lo que ocurre en este caso:

C_0=1.100 $C_{0,5}$=1.000+$I_{0,5}$=1.050

0 0,5 años

Ahora tenemos que comparar lo que recibimos con lo que pagamos, mediante la fórmula básica:

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1}$$

$$i = \frac{\frac{1.050 - 1.100}{1.100}}{0,5 - 0} = \frac{-0,045455}{0,5} = -0,09091 = -9,09\%$$

i=-9,09%

10. Cierta persona adquiere en Bolsa un pagaré de Telefónica de 1.000€ con vencimiento dentro de 6 meses, pagando por él 930€. Al cabo de 3 meses lo vende al precio de 975€. Calcúlense los tantos de descuento aplicados a las

operaciones de compra y venta, sabiendo que se opera en base al sistema de descuento simple comercial.

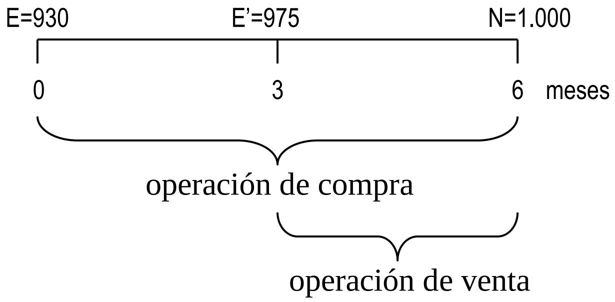
$N = 1.000€$

$t = 6 \text{ meses}$

$E = 930€$

$t' = 3 \text{ meses} \Rightarrow E' = 975€$

$d?$



Operación de compra:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$E = N \cdot (1 - n \cdot d) \Rightarrow 930 = 1.000 \cdot (1 - \frac{6}{12} \cdot d) \Rightarrow 930 = 1.000 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot d) \Rightarrow$$

$$1 - 0{,}5 \cdot d = \frac{930}{1.000} \Rightarrow 1 - 0{,}5 \cdot d = 0{,}93 \Rightarrow 1 - 0{,}93 = 0{,}5 \cdot d \Rightarrow 0{,}07 = 0{,}5 \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{0{,}07}{0{,}5} = 0{,}14 = 14\%$$

Operación de venta:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$E = N \cdot (1 - n \cdot d) \Rightarrow 975 = 1.000 \cdot (1 - \frac{3}{12} \cdot d) \Rightarrow 975 = 1.000 \cdot (1 - 0{,}25 \cdot d) \Rightarrow$$

$$1 - 0{,}25 \cdot d = \frac{975}{1.000} \Rightarrow 1 - 0{,}25 \cdot d = 0{,}975 \Rightarrow 1 - 0{,}975 = 0{,}25 \cdot d \Rightarrow 0{,}025 = 0{,}25 \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{0{,}025}{0{,}25} = 0{,}1 = 10\%$$

d_{compra}=14%; d_{venta}=10%

11. Un empresa desea realizar una inversión de 140.000€ para lo que recurre a un intermediario financiero que le ofrece las siguientes alternativas:

a. Rendimiento de 15.400€ al cabo de un año en régimen de capitalización simple.

b. Rendimiento mensual simple del 0,95833%.

c. Rendimiento del 11,5% anual simple.

d. Un 5,5% simple semestral.

¿Cuál es la inversión más productiva?

$\text{Inversión} = C_0 = 140.000€$

Para poder comparar las diferentes alternativas tendremos que calcular el tipo de interés anual para todas ellas y compararlas eligiendo siempre la mayor de ellas.

Opción a:

$I_1 = 15.400€$

¿i?

$I_n = C_0 \cdot n \cdot i$

$$I_1 = 15.400 = 140.000 \cdot 1 \cdot i \Rightarrow i = \frac{15.400}{140.000} = 0{,}11 = 11\%$$

Opción b:

$i_{12} = 0{,}95833\% = 0{,}0095833$

¿i?

$i = i_k \cdot k$

$i = i_{12} \cdot 12 = 0{,}0095833 \cdot 12 = 0{,}115 = 11{,}5\%$

Opción c:

No hace falta hacer nada, porque nos dan directamente el dato.

Opción d:

$i_2 = 5{,}5\% = 0{,}055$

¿i?

$i = i_k \cdot k$

$i = i_2 \cdot 2 = 0{,}055 \cdot 2 = 0{,}11 = 11\%$

La opción b o la c

12. Determinar el vencimiento de un efecto de 250.000€ sabiendo que descontado hoy al 6% simple anual el descuento comercial supera al racional en 55,42€ si, para este último, se aplicase el mismo tipo de interés del 6%. (Considérese el año comercial).

$N = 250.000€$

$i = d = 6\% \text{ simple anual}$

$D_c = D_r + 55{,}42€$

$t?$

Empecemos calculando el descuento racional, pero poniéndolo en función del nominal o capital final, que es el dato que tenemos:

$$D_r = \frac{C_n \cdot n \cdot i}{1 + n \cdot i}$$

$$D_r = \frac{250.000 \cdot n \cdot 0{,}06}{1 + n \cdot 0{,}06} = \frac{15.000 \cdot n}{1 + n \cdot 0{,}06}$$

Ahora calculemos el descuento comercial:

$$D_c = C_n \cdot n \cdot d$$

$$D_c = 250.000 \cdot n \cdot 0{,}06 = 15.000 \cdot n$$

Ya podemos relacionar ambos efectos:

$$D_c = D_r + 55{,}42 \Rightarrow 15.000 \cdot n = \frac{15.000 \cdot n}{1 + n \cdot 0{,}06} + 55{,}42 \Rightarrow 15.000 \cdot n = \frac{15.000 \cdot n + 55{,}42 + 3{,}3252 \cdot n}{1 + n \cdot 0{,}06} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15.000 \cdot n = \frac{15.003{,}3252 \cdot n + 55{,}42}{1 + n \cdot 0{,}06} \Rightarrow 15.000 \cdot n \cdot (1 + n \cdot 0{,}06) = 15.003{,}3252 \cdot n + 55{,}42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15.000 \cdot n + 900 \cdot n^2 = 15.003{,}3252 \cdot n + 55{,}42 \Rightarrow 900 \cdot n^2 - 3{,}3252 \cdot n - 55{,}42 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{3{,}3252 \pm \sqrt{3{,}3252^2 + 4 \cdot 900 \cdot 55{,}42}}{2 \cdot 900} = \frac{3{,}3252 \pm 446{,}68}{1.800} = \frac{450{,}01}{1.800} = 0{,}25 \text{ años}$$

Si 1 año son 360 días, 0,25 años son: $0{,}25 \cdot 360 = 90$ días

t=90 días

13. El descuento comercial de un efecto de 100.000€ asciende a 3.000€. Si el vencimiento se hubiese retrasado 9 días y se hubiese aplicado descuento racional al mismo tipo de interés que el de descuento, el valor descontado habría sido el mismo. Determinar la fecha del vencimiento del efecto y la tasa de descuento que se ha aplicado al efecto. (Considérese año comercial)

$N = 100.000€$

$D_c = 3.000€$

$i = d$

Si $t' = t + 9 \Rightarrow D_c = D_r$

$t?$

$d?$

Empecemos calculando el descuento racional, pero poniéndolo en función del nominal o capital final, que es el dato que tenemos:

$$D_r = \frac{C_n \cdot n \cdot i}{1+n \cdot i} = \frac{C_n \cdot n \cdot d}{1+n \cdot d}$$

$$D_r = \frac{100.000 \cdot \left(\frac{t+9}{360}\right) \cdot d}{1+\left(\frac{t+9}{360}\right) \cdot d} = \frac{277{,}78 \cdot t \cdot d + 2.500 \cdot d}{1+0{,}002778 \cdot t \cdot d + 0{,}025 \cdot d}$$

Y ahora veamos lo que obtenemos con el descuento comercial:

$$D_c = C_n \cdot n \cdot d$$

$$3.000 = 100.000 \cdot \frac{t}{360} \cdot d \Rightarrow \frac{3.000 \cdot 360}{100.000} = t \cdot d \Rightarrow t \cdot d = 10{,}8$$

Ya podemos relacionar ambos efectos:

$$D_c = D_r \Rightarrow 3.000 = \frac{277{,}78 \cdot t \cdot d + 2.500 \cdot d}{1+0{,}002778 \cdot t \cdot d + 0{,}025 \cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.000 = \frac{277{,}78 \cdot 10{,}8 + 2.500 \cdot d}{1+0{,}002778 \cdot 10{,}8 + 0{,}025 \cdot d} \Rightarrow 3.000 = \frac{3.000{,}02 + 2.500 \cdot d}{1{,}03 + 0{,}025 \cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.090 + 75 \cdot d = 3.000{,}02 + 2.500 \cdot d \Rightarrow 89{,}98 = 2.425 \cdot d \Rightarrow d = \frac{89{,}98}{2.425} = 0{,}037105 = 3{,}71\%$$

Calculemos ahora el tanto de descuento:

$$t \cdot d = 10{,}8 \Rightarrow t = \frac{10{,}8}{d} = \frac{10{,}8}{0{,}037105} = 291{,}07 \text{ días}$$

t=291,07 días; d=3,71%

14. Dos capitales cuya suma es de 5.000€ se han colocado durante el mismo tiempo y al mismo tanto de interés simple. Calcular dichos capitales sabiendo que han producido unos montantes de 32.700€ y 21.800€, respectivamente.

$C_{01} + C_{02} = 5.000€$

$n_1 = n_2 = n$

$i_1 = i_2 = i$

$C_{n1} = 32.700€$

$C_{n2} = 21.800€$

$C_{n1}?$

C_{n2}?

$$C_n = C_0 \cdot (1+n\cdot i)$$

$$C_{n1} = C_{01}\cdot(1+n\cdot i) \Rightarrow 32.700 = C_{01}\cdot(1+n\cdot i)$$

$$C_{n2} = C_{02}\cdot(1+n\cdot i) \Rightarrow 21.800 = C_{02}\cdot(1+n\cdot i)$$

Podemos sumar las dos expresiones:

$$32.700 + 21.800 = C_{01}\cdot(1+n\cdot i) + C_{02}\cdot(1+n\cdot i) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 54.500 = (C_{01}+C_{02})\cdot(1+n\cdot i) = 54.500 = 5.000\cdot(1+n\cdot i) \Rightarrow$$
$$1+n\cdot i = \frac{54.500}{5.000} = 10{,}90$$

Sustituyendo $1+n\cdot i$ en la primera expresión:

$$32.700 = C_{01}\cdot(1+n\cdot i) \Rightarrow 32.700 = C_{01}\cdot 10{,}90 \Rightarrow C_{01} = \frac{32.700}{10{,}90} = 3.000€$$

Como:

$$C_{01}+C_{02} = 5.000 \Rightarrow C_{02} = 5.000 - C_{01} = C_{02} = 5.000 - 3.000 = 2.000€$$

C_{01}=3.000€; C_{02}=2.000€

15. Dos personas, A y B, prestan a una tercera persona, por partes iguales, un total de 10.000€ al 12% anual de interés simple, durante un año. Transcurridos seis meses A le pide a B la cantidad que le corresponde renunciando en consecuencia a sus derechos seis meses después. Determinar:

a. La cantidad que B entregará a A.

b. El tanto de rentabilidad que obtendría B si penalizase a A con la pérdida de la cuarta parte de los intereses que le corresponden.

a. Para saber la cantidad que llamaremos $C_{A0,5}$ que le entregará A a B será 5.000€ más los intereses generados en esos 6 meses.

$$C_n = C_0\cdot(1+n\cdot i)$$

$$C_{A0,5} = 5.000\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}12) = 5.000\cdot 1{,}06 = 5.300€$$

$C_{A0,5}$=5.300€

b. Si A obtuviese una cuarta parte menos de los intereses que le corresponden:

$$I_n = C_0\cdot n\cdot i$$

$$I_{0,6} = 5.000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}12 = 300€$$

La cuarta parte serían 75€ menos, por lo que hubiese obtenido 5.225€. Ahora se trata de calcular qué rentabilidad obtendría B al cabo del año, cuando C le devuelva el dinero. Previamente tendremos que calcular cuánto le va a devolver C por los 5.000€ de la parte de A de los que ha dispuesto todo el año, que es lo que va a recibir B:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$C_{A1} = 5.000 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}12) = 5.000 \cdot 1{,}12 = 5.600€$$

Recibirá 5.600€ e invirtió 5.225€ durante seis meses, por lo que calculamos la rentabilidad mediante la fórmula más sencilla:

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1}$$

$$i = \frac{\frac{5.600 - 5.225}{5.225}}{0{,}5 - 0} = \frac{0{,}071770}{0{,}5} = 0{,}143541 = 14{,}35\%$$

i=14,35%

16. Un capital de 12.500€ se coloca al 8% de interés simple anual durante cierto tiempo, transcurrido el cual se vuelve a imponer el montante obtenido en una nueva operación de igual duración y mismo tipo de interés. Si el montante total obtenido es de 16.820€ se pide:

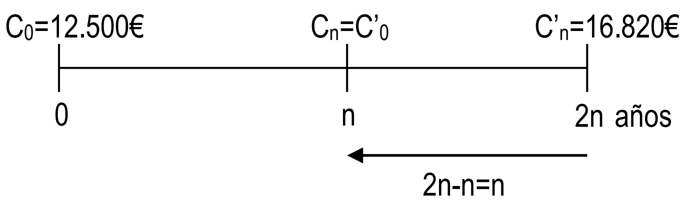
a. Determinar la duración de la primera operación y el interés obtenido en esa primera operación.

b. ¿Cuáles serían los resultados anteriores, es decir, la duración y el interés, si la segunda operación tuviese una duración doble de la primera y produjese el mismo montante?

Primera operación:

$C_0 = 12.500€$

$i = 8\% = 0{,}08$



Segunda operación:

$C'_n = 16.820€$

$i = 8\% = 0{,}08$

a. ¿n?, ¿i?

Tenemos que calcular lo que sería el capital inicial de la segunda operación que coincidiría con el capital final de la primera:

Primera operación:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$C_n = 12.500 \cdot (1 + n \cdot 0{,}08)$$

Segunda operación:

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}$$

$$C'_0 = \frac{16.820}{1 + n \cdot 0{,}08}$$

Como sabemos que $C_n = C'_0$:

$$12.500 \cdot (1 + n \cdot 0{,}08) = \frac{16.820}{1 + n \cdot 0{,}08} \Rightarrow 12.500 \cdot (1 + n \cdot 0{,}08)^2 = 16.820 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + n \cdot 0{,}08)^2 = \frac{16.820}{12.500} \Rightarrow (1 + n \cdot 0{,}08)^2 = 1{,}3456$$

Aplicamos la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{(1 + n \cdot 0{,}08)^2} = \sqrt{1{,}3456} \Rightarrow 1 + n \cdot 0{,}08 = 1{,}16 \Rightarrow n \cdot 0{,}08 = 1{,}16 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot 0{,}08 = 0{,}16 \Rightarrow n = \frac{0{,}16}{0{,}08} = 2 \text{ años}$$

Calculemos ahora el interés de la primera operación:

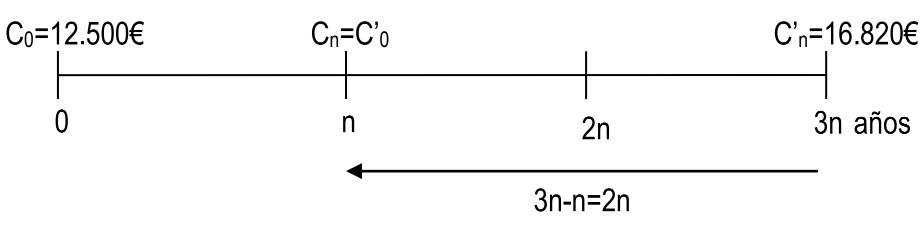
$$I_n = C_0 \cdot n \cdot i$$

$$I_2 = 12.500 \cdot 2 \cdot 0{,}08 = 2.000€$$

n=2 años; I_2=2.000€

b. ¿n?, ¿i?

Tenemos que operar de la misma forma que en el apartado anterior, pero con los nuevos datos. En primer lugar tenemos que calcular lo que sería el capital inicial de la segunda operación que coincidiría con el capital final de la primera, que coincide con el apartado anterior. Lo que ocurre es que como la duración de la primera operación es n y la de la segunda el doble, 2n, en la recta temporal C'_n estaría en 3n (la suma de n+2n):



Primera operación:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$C_n = 12.500 \cdot (1 + n \cdot 0{,}08)$$

Segunda operación:

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}$$

$$C'_0 = \frac{16.820}{1 + 2n \cdot 0{,}08}$$

Como sabemos que C_n=C'_0:

$$12.500 \cdot (1 + n \cdot 0{,}08) = \frac{16.820}{1 + 2n \cdot 0{,}08} \Rightarrow 12.500 \cdot (1 + n \cdot 0{,}08) \cdot (1 + 2n \cdot 0{,}08) = 16.820 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + 0{,}08n) \cdot (1 + 0{,}16n) = \frac{16.820}{12.500} \Rightarrow 1 + 0{,}16n + 0{,}08n + 0{,}0128n^2 = 1{,}3456 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 0{,}24n + 0{,}0128n^2 = 1{,}3456$$

Ordenamos la expresión para convertirla en una ecuación de segundo grado:

$$1 + 0{,}24n + 0{,}0128n^2 = 1{,}3456 \Rightarrow 0{,}0128n^2 + 0{,}24n + 1 - 1{,}3456 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}0128n^2 + 0{,}24n - 0{,}3456 = 0 \Rightarrow n = \frac{-0.24 \pm \sqrt{0{,}24^2 - 4 \cdot 0{,}0128 \cdot (-0{,}3456)}}{2 \cdot 0{,}0128} \Rightarrow$$

$$n = \frac{-0{,}24 \pm \sqrt{0{,}0576 + 0{,}017695}}{0{,}0256} = \frac{-0{,}24 \pm \sqrt{0{,}075295}}{0{,}0256} = \frac{-0{,}24 \pm 0{,}274399}{0{,}0256} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0{,}034399}{0{,}0256} \Rightarrow n = 1{,}343711 \text{años}$$

Calculemos ahora el interés de la primera operación:

$$I_n = C_0 \cdot n \cdot i$$

$$I_{1,343711} = 12.500 \cdot 1{,}343711 \cdot 0{,}08 = 1.343{,}71€$$

n= 1,34 años; $I_{1,34}$=1.343,71€

PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 3: EQUIVALENCIA FINANCIERA DE CAPITALES

1. Determinar si son equivalentes dentro de 12 años 500.000 € que vencen dentro de 3 años y 650.000 € que vencen dentro de 7 años, si el tipo de interés al que se valora es el 12% simple anual.

$C_1 = 500.000€$

$t_1 = 3$ años

$C_2 = 650.000€$

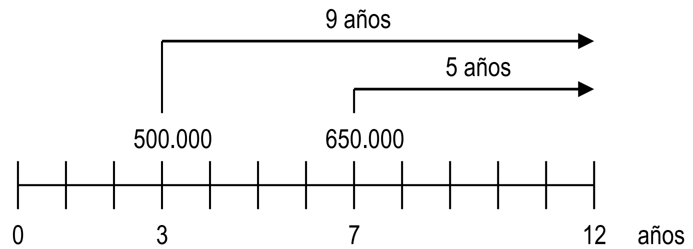
$t_2 = 7$ años

$t = 12$ años

$i = 12\%$

equivalentes?

Para ver si son equivalentes tenemos que capitalizar todos los capitales a los 12 años. Gráficamente:



$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$C_{n1} = 500.000 \cdot (1 + 9 \cdot 0{,}12) = 1.040.000€$$

$$C_{n2} = 650.000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}12) = 1.040.000€$$

Sí son equivalentes ya que a los 12 años, ambos capitales valen C_{12}=1.040.000€

2. En pago de diversas compras he firmado 3 letras: la primera de 800 euros, que vence dentro de 20 días; la segunda de 1.500 euros, pagadera dentro de 45 días; y la tercera de 3.200 euros, cuyo importe debo satisfacer dentro de 60 días. ¿Cuál debe ser el nominal de un efecto equivalente a esas letras, al plazo de 50 días, si la sustitución se ha acordado a un tanto de descuento comercial del 5% anual? (Realice el estudio para el momento 0 considerando el año comercial).

$C_1 = 800€$

$t_1 = 20$ días

$C_2 = 1.500€$

$t_2 = 45$ días

$C_3 = 3.200€$

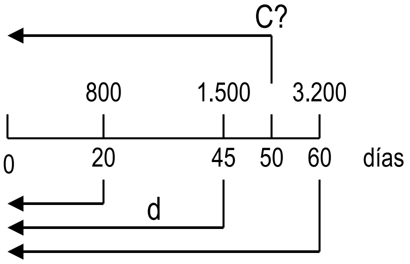
$t_3 = 60$ días

$t = 50$ días

$d = 5\%$

C ?

Gráficamente:



Primera forma: Capital por capital:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$C_{01} = 800 \cdot (1 - \frac{20}{360} \cdot 0,05) = 797,78€$$

$$C_{02} = 1.500 \cdot (1 - \frac{45}{360} \cdot 0,05) = 1.490,63€$$

$$C_{03} = 3.200 \cdot (1 - \frac{60}{360} \cdot 0,05) = 3.173,33€$$

La suma de estos tres capitales actualizados es igual a:

$$C_{01} + C_{02} + C_{03} = 797,78 + 1.490,63 + 3.173,33 = 5.461,74€$$

Igualamos esta suma con el capital único actualizado y despejamos C:

$$C \cdot (1 - \frac{50}{360} \cdot 0,05) = 5.461,74 \Rightarrow 0,993056 \cdot C = 5.461,74 \Rightarrow C = \frac{5.461,74}{0,993056} = 5.499,93€$$

Segunda forma: A través de la fórmula de descuento comercial en el momento 0:

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1 - t_s \cdot d)}{1 - t \cdot d}$$

$$C = \frac{C_1 \cdot (1 - t_1 \cdot d) + C_2 \cdot (1 - t_2 \cdot d) + ... + C_n \cdot (1 - t_n \cdot d)}{1 - t \cdot d} =$$

$$= \frac{800 \cdot \left(1 - \frac{20}{360} \cdot 0{,}05\right) + 1.500 \cdot \left(1 - \frac{45}{360} \cdot 0{,}05\right) + 3.200 \cdot \left(1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}05\right)}{1 - \frac{50}{360} \cdot 0{,}05} = \frac{5.461{,}736111}{0{,}993056} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 5.499{,}93€$$

C=5.499,93€

3. Dado un capital de 13.000€ que vence dentro de 3 años y otro de 15.000€ que vence dentro de 5 años, y un tipo de interés efectivo del 10% simple anual:

a. Comprobar si son equivalentes en t=0.

b. Comprobar si son equivalentes en t=1 año.

$C_1 = 13.000€$

$t_1 = 3$ años

$C_2 = 15.000€$

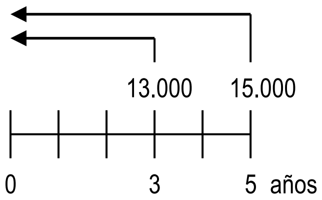
$t_2 = 5$ años

$i = 10\%$

a. $t = 0$

equivalentes?

Para ver si son equivalentes tenemos que actualizar todos los capitales al momento 0. Gráficamente:



$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}$$

$$C_{01} = \frac{13.000}{1 + 3 \cdot 0{,}1} = 10.000€$$

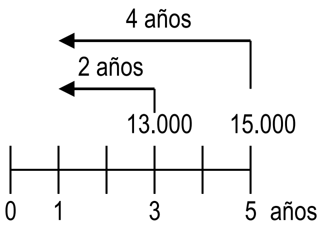
$$C_{02} = \frac{15.000}{1 + 5 \cdot 0{,}1} = 10.000€$$

Sí, porque en t=0, C=10.000€ en ambos casos

b. $t = 1$

equivalentes?

Para ver si son equivalentes tenemos que actualizar todos los capitales al momento 0. Gráficamente:



$$C_0 = \frac{C_n}{1+n\cdot i}$$

$$C_{01} = \frac{13.000}{1+2\cdot 0{,}1} = 10.833{,}33€$$

$$C_{02} = \frac{15.000}{1+4\cdot 0{,}1} = 10.714{,}30€$$

No, porque en t=1 año, C_1=10.833,30€ y C_2=10.714,30€

4. Averiguar si dentro de 5 años son equivalentes 86.206,90€ que vencen dentro de 3 años y 140.000€ que vencen dentro de 10 años, supuesto un interés efectivo anual simple del 8%.

$C_1 = 86.206{,}90€$

$t_1 = 3$ años

$C_2 = 140.000€$

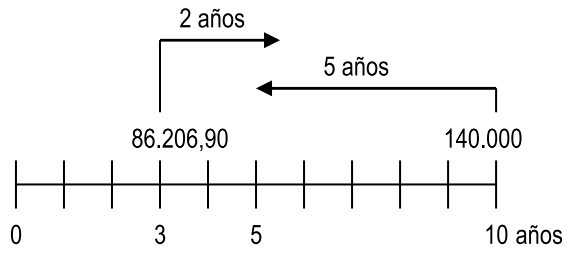
$t_2 = 10$ años

$t = 5$ años

$i = 8\%$

equivalentes?

Para ver si son equivalentes tenemos que llevar todos los capitales a los 5 años. Gráficamente:



$$C_n = C_0 \cdot (1+n\cdot i)$$

$$C_{n1} = 86.206{,}90 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}08) = 100.000€$$

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}$$

$$C_{02} = \frac{140.000}{1 + 5 \cdot 0{,}08} = 100.000€$$

Sí son equivalentes, porque en t=5 años, C=100.000€ en ambos casos

5. **Tres efectos cuyos valores nominales son 150, 200 y 225 euros vencen dentro de 45, 90 y 120 días, respectivamente. Si estos efectos se reemplazan por otro único de vencimiento dentro de 60 días, si el tanto de descuento comercial es del 10% anual simple y se considera el año comercial, se pide:**
   a. **¿Cuál será el nominal de este último efecto comercial? (Realice el estudio para el momento 0).**
   b. **Si el capital sustituto fuese de 585 euros de cuantía, ¿cuál sería su vencimiento?**
   c. **Calcular también el vencimiento medio.**

$C_1 = 150€$

$t_1 = 45$ días

$C_2 = 200€$

$t_2 = 90$ días

$C_3 = 225€$

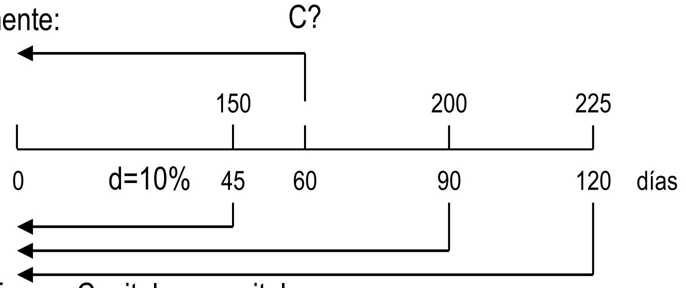
$t_3 = 120$ días

$t = 60$ días

$d = 10\%$

a. C ?

Gráficamente:



Primera forma: Capital por capital:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$C_{01} = 150 \cdot (1 - \frac{45}{360} \cdot 0{,}1) = 148{,}13€$$

$$C_{02} = 200 \cdot (1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}1) = 195€$$

$$C_{03} = 225 \cdot (1 - \frac{120}{360} \cdot 0{,}1) = 217{,}5€$$

La suma de estos tres capitales actualizados es igual a:

$$C_{01} + C_{02} + C_{03} = 148{,}13 + 195 + 217{,}5 = 560{,}63€$$

Igualamos esta suma con el capital único actualizado y despejamos C:

$$C \cdot (1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}1) = 560{,}63 \Rightarrow 0{,}983333 \cdot C = 560{,}63 \Rightarrow C = \frac{560{,}63}{0{,}983333} = 570{,}13€$$

<u>Segunda forma</u>: A través de la fórmula de descuento comercial en el momento 0:

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1 - t_s \cdot d)}{1 - t \cdot d}$$

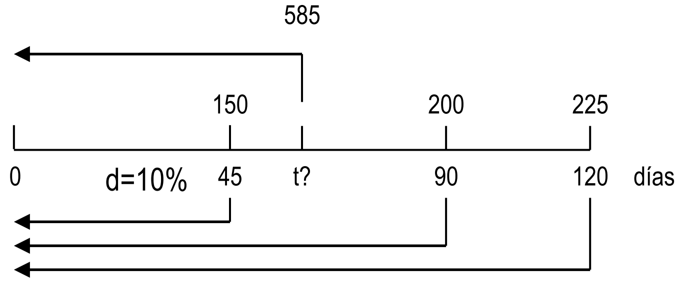
$$C = \frac{C_1 \cdot (1 - t_1 \cdot d) + C_2 \cdot (1 - t_2 \cdot d) + \ldots + C_n \cdot (1 - t_n \cdot d)}{1 - t \cdot d} =$$

$$= \frac{150 \cdot \left(1 - \frac{45}{360} \cdot 0{,}1\right) + 200 \cdot \left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}1\right) + 225 \cdot \left(1 - \frac{120}{360} \cdot 0{,}1\right)}{1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}1} = \frac{560{,}625}{0.983333} = 570{,}13€$$

C=570,13€

b. $C = 585€$

t ?



<u>Primera forma</u>: Capital por capital, sabiendo que la suma de los tres capitales actualizados es 560,63 y despejando t que es ahora la incógnita:

$$585\cdot(1-\frac{t}{360}\cdot 0{,}1)=560{,}63\Rightarrow 585\cdot(1-0{,}000278\cdot t)=560{,}63\Rightarrow$$

$$1-0{,}000278\cdot t=\frac{560{,}63}{585}\Rightarrow 1-0{,}000278\cdot t=0{,}958342\Rightarrow 1-0{,}958342=0{,}000278\cdot t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}041658=0{,}000278\cdot t\Rightarrow t=\frac{0{,}041658}{0{,}000278}=149{,}85\,\text{días}$$

Segunda forma: A través de la fórmula del vencimiento común del descuento comercial en el momento 0:

$$t=\frac{C-\sum_{S=1}^{n}C_S+d\cdot\sum_{S=1}^{n}C_S\cdot t_S}{C\cdot d}=$$

$$=\frac{585-(150+200+225)+0{,}1\cdot\left(150\cdot\frac{45}{360}+200\cdot\frac{90}{360}+225\cdot\frac{120}{360}\right)}{585\cdot 0{,}1}=\frac{24{,}375}{58{,}5}=0{,}416667\,\text{años}$$

Pasamos los años a meses multiplicando el tiempo anterior por 360 días que tiene un año:

$$t=0{,}416667\cdot 360=150\,\text{días}$$

t=150 días

c. Al pedirse el vencimiento medio, el capital único que sustituye a los de partida debe ser de importe igual a la suma de los tres capitales iniciales:

$$C=C_1+C_2+C_3=150+200+225=575€$$

Primera forma: Capital por capital, sabiendo que la suma de los tres capitales actualizados es 560,63 y despejando t que es ahora la incógnita:

$$575\cdot(1-\frac{t}{360}\cdot 0{,}1)=560{,}63\Rightarrow 575\cdot(1-0{,}000278\cdot t)=560{,}63\Rightarrow$$

$$1-0{,}000278\cdot t=\frac{560{,}63}{575}\Rightarrow 1-0{,}000278\cdot t=0{,}975009\Rightarrow 1-0{,}975009=0{,}000278\cdot t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}024991=0{,}000278\cdot t\Rightarrow t=\frac{0{,}024991}{0{,}000278}=89{,}90\,\text{días}$$

Segunda forma: A través de la fórmula del vencimiento medio del descuento comercial en el momento 0:

$$t=\frac{\sum_{S=1}^{n}C_S\cdot t_S}{C}=\frac{150\cdot\frac{45}{360}+200\cdot\frac{90}{360}+225\cdot\frac{120}{360}}{575}=\frac{143{,}75}{575}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=0{,}25\,\text{años}$$

Pasamos los años a meses multiplicando el tiempo anterior por 360 días que tiene un año:

$$t = 0{,}25 \cdot 360 = 90\,\text{días}$$

t=90 días

6. Una empresa de servicios posee deudas con sus proveedores que pretende cancelar con un único pago dentro de 60 días. Las deudas que pretende cancelar con ese único pago son: deuda de 12.000€ a 120 días, deuda de 18.000€ a 250 días y deuda de 24.000€ a 30 días. Calcular la cuantía de pago único que tiene que hacer si el tipo de descuento es del 10% anual en descuento simple comercial. (Realice el estudio en los 60 días considerando el año comercial).

$C_1 = 24.000€$

$t_1 = 30\,\text{días}$

$C_2 = 12.000€$

$t_2 = 120\,\text{días}$

$C_3 = 18.000€$

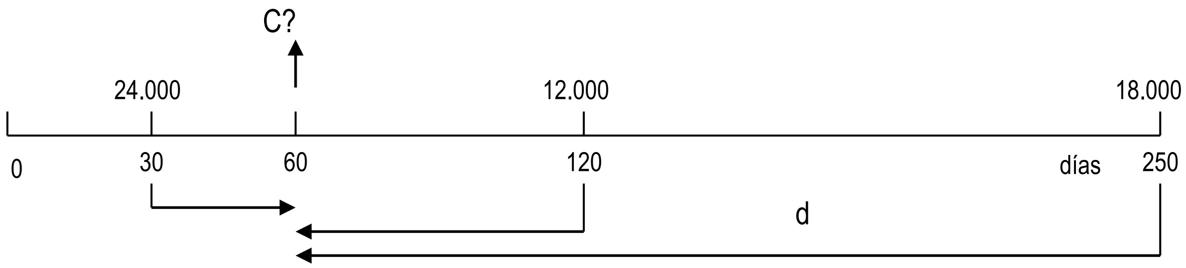
$t_3 = 250\,\text{días}$

$t = 60\,\text{días}$

$i = d = 10\%$

$C\,?$

Gráficamente:



Primera forma: Capital por capital. Como no nos especifican un tipo de interés diferente al tipo de descuento, consideramos que son iguales:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$C_{n1} = 24.000 \cdot \left(1 + \frac{(60-30)}{360} \cdot 0{,}1\right) = 24.200€$$

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$C_{02} = 12.000 \cdot (1 - \frac{(120-60)}{360} \cdot 0{,}1) = 11.800€$$

$$C_{03} = 18.000 \cdot (1 - \frac{250-60}{360} \cdot 0{,}1) = 17.050€$$

La suma de estos tres capitales llevados al momento t=60 días es igual a:

$$C_{n1} + C_{02} + C_{03} = 24.200 + 11.800 + 17.050 = 53.050€$$

Segunda forma: A través de la fórmula de descuento comercial en el momento t=60:

$$C = \sum_{s=1}^{p} C_s \cdot (1 + (t - t_s) \cdot i) +$$

$$+ \sum_{s=q}^{z} C_s \cdot (1 - (t - t_s) \cdot d)$$

$$s = 1, \ldots, p \Rightarrow t_s < t$$

$$s = q, \ldots, z \Rightarrow t_s > t$$

$$C = 24.000 \cdot \left(1 + \left(\frac{60-30}{360}\right) \cdot 0{,}1\right) + 12.000 \cdot \left(1 - \left(\frac{120-60}{360}\right) \cdot 0{,}1\right) +$$

$$+ 18.000 \cdot \left(1 - \left(\frac{250-60}{360}\right) \cdot 0{,}1\right) = 24.200 + 11.800 + 17.050 = 53.050€$$

C=53.050€

7. **La empresa Cotosur tiene tres letras, cuyos capitales son de 1.500€, 1.000€ y 500€. Sus respectivos vencimientos son de 6, 9 y 12 meses respectivamente. Desea reemplazarlos por una única letra de vencimiento a los 10 meses aplicando un tipo de descuento del 10%. ¿De qué valor nominal debe ser esta última? (Realice el estudio en el momento 0)**

$C_1 = 1.500€$

$t_1 = 6$ meses

$C_2 = 1.000€$

$t_2 = 9$ meses

$C_3 = 500€$

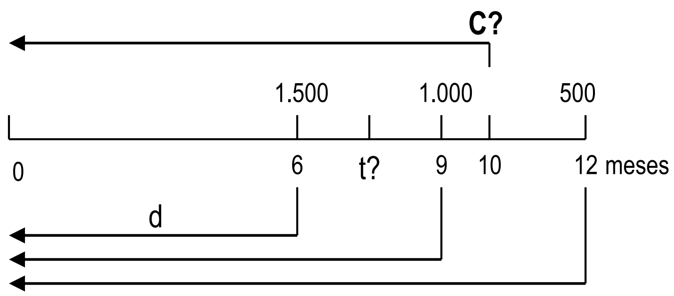
$t_3 = 12$ meses

$t = 10$ meses

$d = 10\%$

C?

Gráficamente:



Primera forma: Capital por capital:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$C_{01} = 1.500 \cdot (1 - \frac{6}{12} \cdot 0{,}1) = 1.425€$$

$$C_{02} = 1.000 \cdot (1 - \frac{9}{12} \cdot 0{,}1) = 925€$$

$$C_{03} = 500 \cdot (1 - \frac{12}{12} \cdot 0{,}1) = 450€$$

La suma de estos tres capitales actualizados es igual a:

$$C_{01} + C_{02} + C_{03} = 1.425 + 925 + 450 = 2.800€$$

Igualamos esta suma con el capital único actualizado y despejamos C:

$$C \cdot (1 - \frac{10}{12} \cdot 0{,}1) = 2.800 \Rightarrow 0{,}916667 \cdot C = 2.800 \Rightarrow C = \frac{2.800}{0{,}916667} = 3.054{,}54€$$

Segunda forma: A través de la fórmula de descuento comercial en el momento 0:

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1 - t_s \cdot d)}{1 - t \cdot d}$$

$$C = \frac{C_1 \cdot (1 - t_1 \cdot d) + C_2 \cdot (1 - t_2 \cdot d) + ... + C_n \cdot (1 - t_n \cdot d)}{1 - t \cdot d} =$$

$$= \frac{1.500 \cdot \left(1 - \frac{6}{12} \cdot 0{,}1\right) + 1.000 \cdot \left(1 - \frac{9}{12} \cdot 0{,}1\right) + 500 \cdot \left(1 - \frac{12}{12} \cdot 0{,}1\right)}{1 - \frac{10}{12} \cdot 0{,}1} = \frac{2.800}{0{,}916667} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 3.054{,}54€$$

C=3.054,54€

8. Se trata de buscar un capital C con vencimiento el 01/01/09, equivalente a estos dos capitales financieros: (80.000; 01-01-05) y (120.000; 01-01-10), con un interés simple del 8%. (Realice el estudio el 01-01-10).

$C_1 = 80.000€$

$t_1 = 01/01/05$

$C_2 = 120.000€$

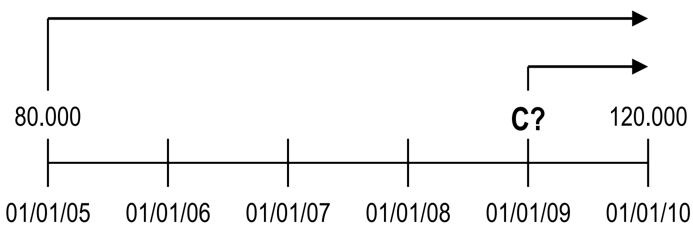
$t_2 = 01/01/10$

$t_2 = 01/01/10$

$i = 8\%$

$C?$

Gráficamente:



Primera forma: Capitalizamos el capital de 80.000€, ya que el de 120.000€ que ya se encuentra en el momento de estudio.

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$C_{n1} = 80.000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}08) = 112.000€$$

La suma de estos dos capitales en el momento 01/01/10 es:

$$C_{n1} + C_2 = 112.000 + 120.000 = 232.000€$$

Igualamos esta suma con el capital único capitalizado y despejamos C:

$$C \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}08) = 232.000 \Rightarrow 1{,}08 \cdot C = 232.000 \Rightarrow C = \frac{232.000}{1{,}08} = 214.814{,}81€$$

Segunda forma: A través de la fórmula de descuento comercial en el momento t=5, ya que podríamos reformular la recta temporal considerando que el 01/01/05 es el momento 0 y el 01/01/10 es el momento 5. Sin embargo, la tenemos que modificar y no igualar los sumatorios a C, sino a C capitalizado un año. Así:

Fórmula original:

$$C = \sum_{s=1}^{p} C_s \cdot \left(1 + \left(t - t_s\right) \cdot i\right) +$$

$$+ \sum_{s=q}^{z} \frac{C_s}{1 + \left(t_s - t\right) \cdot i}$$

$$s = 1, \ldots, p \Rightarrow t_s < t$$

$$s = q, \ldots, z \Rightarrow t_s > t$$

Fórmula modificada:

$$C\cdot(1+1\cdot i)=\sum_{s=1}^{p} C_s\cdot(1+(t-t_s)\cdot i)+$$
$$+\sum_{s=q}^{z}\frac{C_s}{1+(t_s-t)\cdot i}$$
$$s=1,\ldots,p \Rightarrow t_s<t$$
$$s=q,\ldots,z \Rightarrow t_s>t$$

$$C\cdot(1+1\cdot 0{,}08)=80.000\cdot(1+(10-5)\cdot 0{,}08)+120.000\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}08\cdot C=80.000\cdot(1+(10-5)\cdot 0{,}08)+120.000\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}08\cdot C=232.000\Rightarrow C=\frac{232.000}{1{,}08}=214.814{,}81€$$

C=214.814,81€

9. Se desea sustituir dos deudas de 700€ y 900€ con vencimiento en 50 y 70 días respectivamente, por una sola deuda de cuantía 1.650€. La negociación se realiza considerando una tasa de interés simple del 9% anual

a. ¿Cuál sería el vencimiento único de esa deuda? (Considere el año comercial)

b. ¿Cuál sería el vencimiento medio de esa deuda? (Considere el año comercial)

c. ¿Cuál sería la cuantía del pago único si se realiza dentro de 100 días? (Realice el estudio para el momento 0 considerando el año civil).

$C_1 = 700€$

$t_1 = 50$ días

$C_2 = 900€$

$t_2 = 70$ días

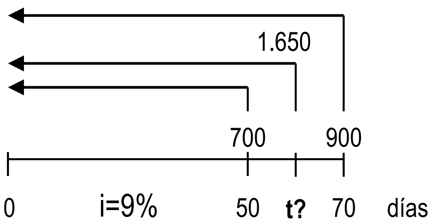
$C = 1.650€$

$t?$

$i = 9\%$

a. $t?$

Gráficamente:



Primera forma: Capital por capital:

$$C_0 = \frac{C_n}{1+n\cdot i}$$

$$C_{01} = \frac{700}{1+\frac{50}{360}\cdot 0{,}09} = 691{,}36€$$

$$C_{02} = \frac{900}{1+\frac{70}{360}\cdot 0{,}09} = 884{,}52€$$

La suma de estos dos capitales actualizados es igual a:

$$C_{01}+C_{02} = 691{,}36+884{,}52 = 1.575{,}88€$$

Igualamos esta suma con el capital único actualizado y despejamos t:

$$\frac{1.650}{\left(1+\frac{t}{360}\cdot 0{,}09\right)} = 1.575{,}88 \Rightarrow \left(1+\frac{t}{360}\cdot 0{,}09\right) = \frac{1.650}{1.575{,}88} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+0{,}00025\cdot t = 1{,}047034 \Rightarrow 0{,}00025\cdot t = 1{,}047034-1 \Rightarrow$$

$$0{,}00025\cdot t = 0{,}047034 \Rightarrow t = \frac{0{,}047034}{0{,}00025} = 188{,}14 \text{ días}$$

Segunda forma: A través de la fórmula del vencimiento común del descuento racional:

$$t = \frac{\dfrac{C}{\sum_{s=1}^{n}\dfrac{C_s}{1+t_s\cdot i}}-1}{i}$$

$$t = \frac{\dfrac{1.650}{\left(\dfrac{700}{1+\frac{50}{360}\cdot 0{,}09}+\dfrac{900}{1+\frac{70}{360}\cdot 0{,}09}\right)}-1}{0{,}09} = \frac{\dfrac{1.650}{(691{,}36+884{,}52)}-1}{0{,}09} =$$

$$= \frac{\dfrac{1.650}{1.575{,}88}-1}{0{,}09} = \frac{1{,}047034-1}{0{,}09} = \frac{0{,}047034}{0{,}09} = 0{,}522600 \text{ años}$$

Pasamos los años a días multiplicando el tiempo anterior por 360 días que tiene un año:

$$t = 0{,}522600 \cdot 360 = 188{,}14 \text{ días}$$

t=188,14 días

b. $t\,?$

Primera forma: Capital por capital, pero ahora sustituyendo por el vencimiento medio, es decir, por la suma aritmética que es igual a 1.600€. Conocemos la suma de estos dos capitales actualizados es igual a 1.575,88€ y ahora tenemos que igualar esta suma con el capital medio actualizado y despejamos t:

$$\frac{1.600}{\left(1+\frac{t}{360}\cdot 0{,}09\right)} = 1.575{,}88 \Rightarrow \left(1+\frac{t}{360}\cdot 0{,}09\right) = \frac{1.600}{1.575{,}88} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+0{,}00025\cdot t = 1{,}015306 \Rightarrow 0{,}00025\cdot t = 1{,}015306-1 \Rightarrow$$

$$0{,}00025\cdot t = 0{,}015306 \Rightarrow t = \frac{0{,}015306}{0{,}00025} = 61{,}22 \text{ días}$$

Segunda forma: A través de la fórmula del vencimiento medio del descuento racional:

$$t = \frac{\dfrac{\sum_{s=1}^{n} C_s}{\sum_{s=1}^{n} \dfrac{C_s}{1+t_s\cdot i}} - 1}{i}$$

$$t = \frac{\dfrac{700+900}{\left(\dfrac{700}{1+\frac{50}{360}\cdot 0{,}09} + \dfrac{900}{1+\frac{70}{360}\cdot 0{,}09}\right)} - 1}{0{,}09} = \frac{\dfrac{1.600}{(691{,}36+884{,}52)} - 1}{0{,}09} =$$

$$= \frac{\dfrac{1.600}{1.575{,}88} - 1}{0{,}09} = \frac{1{,}015306-1}{0{,}09} = \frac{0{,}015306}{0{,}09} = 0{,}170067 \text{ años}$$

Pasamos los años a días multiplicando el tiempo anterior por 360 días que tiene un año:

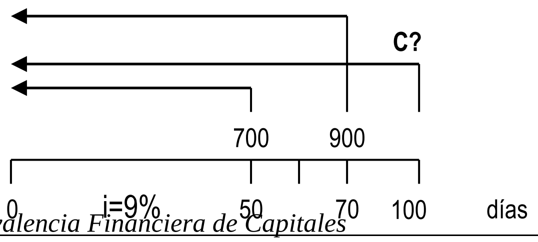
$$t = 0{,}170067\cdot 360 = 61{,}22 \text{ días}$$

t=61,22 días

c. $C\,?$

$t = 100$ días

Gráficamente:



Primera forma: Capital por capital, pero ahora utilizando el año civil:

$$C_0 = \frac{C_n}{1+n\cdot i}$$

$$C_{01} = \frac{700}{1+\frac{50}{365}\cdot 0{,}09} = 691{,}47€$$

$$C_{02} = \frac{900}{1+\frac{70}{365}\cdot 0{,}09} = 884{,}73€$$

La suma de estos dos capitales actualizados es igual a:

$$C_{01} + C_{02} = 691{,}47 + 884{,}73 = 1.576{,}2€$$

$$\frac{C}{\left(1+\frac{100}{365}\cdot 0{,}09\right)} = 1.576{,}2 \Rightarrow C = \left(1+\frac{100}{365}\cdot 0{,}09\right)\cdot 1.576{,}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 1{,}024658\cdot 1.576{,}2 = 1.615{,}07€$$

Segunda forma: A través de la fórmula del capital común del descuento racional con estudio en el momento 0:

$$C = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_s}{1+t_s\cdot i}\cdot(1+t\cdot i)$$

$$C = \left(\frac{700}{1+\frac{50}{365}\cdot 0{,}09} + \frac{900}{1+\frac{70}{365}\cdot 0{,}09}\right)\cdot\left(1+\frac{100}{365}\cdot 0{,}09\right)$$

$$= (691{,}47 + 884{,}73)\cdot 1{,}024658 = 1.576{,}2\cdot 1{,}024658 = 1.615{,}07€$$

C=1.615,07€

10. Tres letras de 5.000, 6.000 y 7.000€ que vencen dentro de 3, 5 y 7 meses respectivamente se van a sustituir por otras dos, una de 10.000€ con vencimiento dentro de 4 meses y otra de cuantía a determinar con vencimiento dentro de 6 meses. Si el tanto de interés de negociación es el 6% simple anual, determinar la cuantía de dicho pago. (Realice el estudio para el momento t=6 meses).

$C_1 = 5.000€$

$t_1 = 3 \text{ meses}$

$C_2 = 6.000€$

$t_2 = 5$ meses

$C_3 = 7.000€$

$t_3 = 7$ meses

$C'_1 = 10.000€$

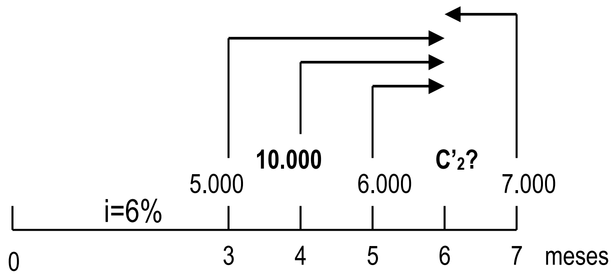
$t'_1 = 4$ meses

$t'_2 = 6$ meses

$C'_2 = ?$

$i = 6\%$

Gráficamente:



Como no se trata de sustituir un único capital, no se pueden aplicar las fórmulas. Se tiene que hacer capital por capital. Ahora se quieren sustituir tres letras no por una única, sino por dos:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$C_{n1} = 5.000 \cdot (1 + \frac{(6-3)}{12} \cdot 0{,}06) = 5.075€$$

$$C_{n2} = 6.000 \cdot (1 + \frac{(6-5)}{12} \cdot 0{,}06) = 6.030€$$

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}$$

$$C_{03} = \frac{7.000}{1 + \frac{(7-6)}{12} \cdot 0{,}06} = 6.965{,}17€$$

Si sumamos estas tres letras que se quieren sustituir:

$$C_{01} + C_{02} + C_{n3} = 5.075 + 6.030 + 6.965{,}17 = 18.070{,}17€$$

Ahora calculamos el valor de las otra letra de nominal conocido en el momento t=6 meses:

$$C'_{n1} = 10.000 \cdot (1 + \frac{(6-4)}{12} \cdot 0{,}06) = 10.100€$$

Se tiene que cumplir que:

$$C_{01} + C_{02} + C_{n3} = C'_{n1} + C'_{n2} \Rightarrow 18.070{,}17 = 10.100 + C'_{n2} \Rightarrow C'_{n2} = 18.070{,}17 - 10.100 = 7.970{,}17€$$

C=7.970,17€

11. Cierta empresa ha de pagar una letra de 1.000.000€ dentro de un año, y solicita fraccionar el pago canjeándola por tres letras, siendo la primera de 200.000€, y vencimiento dentro de 3 meses, y la segunda de 300.000€ con vencimiento dentro de 8 meses. Determinar, en el supuesto de que el tanto de descuento sea del 12% simple anual:

a. La fecha de vencimiento de la tercera letra, si se considera vencimiento medio.

b. La cuantía que tendría la tercera letra, si se fija su vencimiento a los 2 años. (Estudio en el momento 0)

$C = 1.000.000€$

$t = 1 \text{ año} = 12 \text{ meses}$

$C_1 = 200.000€$

$t_2 = 3 \text{ meses}$

$C_2 = 300.000€$

$t_3 = 8 \text{ meses}$

$d = 12\%$

a. Como es vencimiento medio: $C_3 = 1.000.000 - 200.000 - 300.000 = 500.000€$

t_3?

Si lo hacemos directamente por la fórmula del vencimiento medio y descuento comercial:

$$t = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s \cdot t_s}{C}$$

$$t = \frac{C_1 \cdot t_1 + C_2 \cdot t_2 + C_3 \cdot t_3}{C} \Rightarrow 12 = \frac{200.000 \cdot 3 + 300.000 \cdot 8 + 500.000 \cdot t_3}{1.000.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{3.000.000 + 500.000 \cdot t_3}{1.000.0000} \Rightarrow 12.000.000 = 3.000.000 + 500.000 \cdot t_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12.000.000 - 3.000.000 = 500.000 \cdot t_3 \Rightarrow 9.000.000 = 500.000 \cdot t_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{9.000.000}{500.000} = 18 \text{ meses}$$

t=18 meses

b. Podemos volver a aplicar la fórmula, pero en esta ocasión queremos hallar el capital común con el estudio en el momento 0 y con descuento comercial. Además, ahora la incógnita es la cuantía de la tercera letra:

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1 - t_s \cdot d)}{1 - t \cdot d}$$

$$C = \frac{C_1 \cdot \left(1 - \frac{t_1}{12} \cdot d\right) + C_2 \cdot \left(1 - \frac{t_2}{12} \cdot d\right) + C_3 \cdot \left(1 - \frac{t_3}{12} \cdot d\right)}{1 - \frac{t}{12} \cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.000.000 = \frac{200.000 \cdot \left(1 - \frac{3}{12} \cdot 0,12\right) + 300.000 \cdot \left(1 - \frac{8}{12} \cdot 0,12\right) + C_3 \cdot (1 - 2 \cdot 0,12)}{1 - 1 \cdot 0,12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.000.000 = \frac{194.000 + 276.000 + 0,76 \cdot C_3}{0,88} \Rightarrow 880.000 = 194.000 + 276.000 + 0,76 \cdot C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 880.000 - 194.000 - 276.000 = 0,88 \cdot C_3 \Rightarrow 410.000 = 0,76 \cdot C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{410.000}{0,76} = 539.473,68€$$

C_3=539.473,68€

12. Una persona debe entregar los siguientes capitales para saldar una deuda (1.000€; 2 meses), (8.000€; 4 meses), (7.000€; 6 meses) y (2.000€; 9 meses). Sin embargo, al cabo de 5 meses, tras realizar los dos primeros pagos recibe una herencia y decide cancelar sus deudas. Si en ese momento para cancelar las deudas negocia un tipo de interés cuatrimestral simple del 3,20% y se considera el año comercial se pide calcular la cuantía que debe entregar para la cancelación de la deuda en el momento de recibir la herencia.

$C_1 = 1.000€$

$t_1 = 2$ meses

$C_2 = 8.000€$

$t_2 = 4$ meses

$C_3 = 7.000€$

$t_3 = 6$ meses

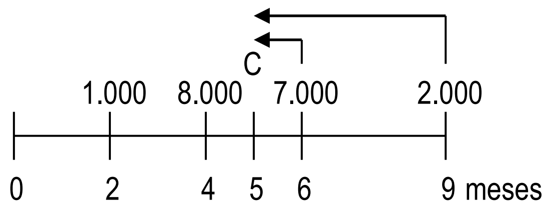
$C_4 = 2.000€$

$t_4 = 6$ meses

$i_3 = 3,20\%$

C ?

Gráficamente:



Hay que tener en cuenta que los únicos capitales que hay que sustituir son los dos últimos, ya que los dos primeros ya se han hecho. Por eso, se recalculan las variables del problema de la siguiente forma:

$C_1 = 7.000€$

$t_1 = 6 \text{ meses}$

$C_2 = 2.000€$

$t_2 = 6 \text{ meses}$

Y el tipo de interés cuatrimestral lo pasamos a anual para operar de forma más cómoda:

$$i = i_k \cdot k$$
$$i = i_3 \cdot 3 = 0{,}032 \cdot 3 = 0{,}096$$

Primera forma: Capital por capital, llevando todos los capitales al mes 5 y que se trata de un descuento racional. Es decir:

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}$$

$$C_{01} = \frac{7.000}{1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}096} = \frac{7.000}{1{,}008} = 6.944{,}44€$$

$$C_{02} = \frac{2.000}{1 + \frac{4}{12} \cdot 0{,}096} = \frac{2.000}{1{,}032} = 1.937{,}98€$$

Si sumamos los dos capitales:

$C = C_{01} + C_{02} = 6.944{,}44 + 1.937{,}98 = 8.882{,}42€$

Segunda forma: A través de la fórmula del capital común del descuento racional, considerándolo en el momento t, ya que hacemos el estudio justo en el momento que queremos cancelar la deuda, que es el mes 5:

$$C=\sum_{s=1}^{p}C_s\cdot\left(1+\left(t-t_s\right)\cdot i\right)+$$
$$+\sum_{s=q}^{z}\frac{C_s}{1+\left(t_s-t\right)\cdot i}$$
$$s=1,\ldots,p\Rightarrow t_s<t$$
$$s=q,\ldots,z\Rightarrow t_s>t$$

$$C=\frac{C_1}{1+\left(\frac{6-5}{12}\right)\cdot 0{,}096}+\frac{C_2}{1+\left(\frac{9-5}{12}\right)\cdot 0{,}096}=\frac{7.000}{1{,}008}+\frac{2.000}{1{,}032}=6.944{,}44+1.937{,}98=8.882{,}42€$$

C=8.882,42€

PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 4: APLICACIONES DE LA CAPITALIZACIÓN SIMPLE: LETRA DE CAMBIO Y CUENTA CORRIENTE

Utilícese para todos los problemas siguientes el año comercial, excepto para los problemas de liquidación de cuentas corrientes que se considerarán los días correspondientes de cada mes.

1. **Una letra librada de 2.000€ nominales, cuyo vencimiento fue el 25 de julio, es devuelta por impagada.**
   - **Comisión de devolución: 1,5%**
   - **Gastos de correo: 0,56€**

$N = 2.000€$

$C = 1,5\%$

$OG = 0,56€$

a. **Calcular el adeudo en cuenta corriente.**

$E'?$

$$E' = N + \text{Comisión devolución} + \text{Comisión protesto} + OG =$$
$$= 2.000 + 2.000 \cdot 0,015 + 0 + 0,56 = 2.030,56€$$

E'=2.030,56€

b. **Si la letra anterior se recibe acompañada del acta de protesto, por lo que el notario cobra el 2‰ de comisión de protesto y 2,5€ de gastos de protesto, calcule en este caso cuál será la liquidación.**

$E'?$

$$E' = N + \text{Comisión devolución} + \text{Comisión protesto} + OG =$$
$$= 2.000 + 0 + 2.000 \cdot 0,015 + 2.000 \cdot 0,002 + 2,5 + 0,56 = 2.037,06€$$

E'=2.037,06€

c. **Si en el apartado anterior se llega al acuerdo con el librado de girarle otra letra nueva con vencimiento 30 días posteriores a la otra, ¿cuál será el valor nominal de la nueva letra considerando una tasa de descuento del 11%? Los gastos del valor del timbre son 7€ y la comisión es del 0,7% del valor nominal.**

$t = 30 \text{ días}$

$d = 11\%$

$OG = 7€$

$C = 0{,}7\,\%$

$N'?$

E=2.037,06€ N'

0 30 días

$$E = N - D \Rightarrow E = N - (I + C + OG) \Rightarrow 2.037{,}06 = N - \left(N \cdot \frac{30}{360} \cdot 0{,}11 + 0{,}007 \cdot N + 7\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.037{,}06 = N - 0{,}00917 \cdot N - 0{,}007 \cdot N - 7 \Rightarrow 2.037{,}06 + 7 = 0{,}98383 \cdot N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.044{,}06 = 0{,}98383 \cdot N \Rightarrow N = \frac{2.044{,}06}{0{,}98383} = 2.077{,}66€$$

N'=2.077,66€

2. Compramos un pagaré de empresa que vence dentro de 1 año, con un nominal de 1.000 euros, siendo el tipo de interés en el mercado en el momento de la compra el 9% anual y unos gastos de 3,5 euros.

Cuando faltan 90 días para el vencimiento lo vendemos, sin gastos, por un importe de 970 euros.

Calcular, utilizando el año comercial (360 días):

$N = 1.000€$

$t = 1\,\text{año} = 360\text{ días}$

$i = 9\%$

$OG = 3{,}5€$

$t' = 90\text{ días} \Rightarrow G' = 0 \Rightarrow E' = 970€$

a. El importe realmente desembolsado por el primer comprador.

$E?$

E? E=970 N=1.000

0 270 360 días

¡OJO! No vamos a descontar efectos a un banco, AHORA SOMOS COMPRADORES DE UN EFECTO. Los efectos también se compran y se venden entre particulares y/o empresas, con lo que HAY QUE DIFERENCIAR entre DESCONTAR UN EFECTO y COMPRAR Y VENDER un efecto a cualquiera.

Lo que nosotros tendremos que pagar por el pagaré será el equivalente del valor nominal con vencimiento un año actualizado al tipo de mercado, es decir, UTILIZANDO UN DESCUENTO RACIONAL, más los gastos que se nos apliquen, es decir, se actualiza primero el valor nominal al momento 0 y se le añaden los gastos correspondientes:

$$E' = \frac{N}{1+\frac{t}{360}\cdot i} = \frac{1.000}{1+0,09} = 917,43€$$

Si al efectivo le sumamos los gastos, tenemos el valor desembolsado en la compra:

$$E = \text{Valor desembolsado} = E' + OG = 917,43 + 3,5 = 920,93€$$

E=920,93€

b. La rentabilidad efectiva obtenida por el primer comprador.

i?

La rentabilidad será el tipo de interés que resulta de enfrentar el importe pagado en el origen con el importe obtenido en la venta. Por tanto, para calcular la rentabiliad efectiva obtenida comparamos lo que desembolsamos y lo que recibiríamos si hubiésemos conservado el efecto durante los 360 días completos, por la fórmula fundamental:

E=920,93 E''=970 N=1.000

0 270 360 días

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1}$$

$$i = \frac{\frac{970 - 920,93}{920,93}}{\left(\frac{270}{360}\right) - 0} = \frac{0,053283}{0,75} = 0,071044 = 7,10\%$$

i=7,10%

c. La rentabilidad obtenida por el segundo comprador si en el momento de la compra no soporta gastos y en la amortización le deducen unos gastos de 2 euros.

i?

El segundo comprador es el que lo compra por 970 euros y 90 días después recibe los 1.000 euros de nominal de la letra menos 2€ de gastos. Gráficamente:

E'=920,93 E=970 N=1.000 - 2

0 270 360 días

Por lo demás, se procede exactamente igual que en el caso anterior. Es decir:

$$i=\frac{r}{t_2-t_1}=\frac{\frac{C_2-C_1}{C_1}}{t_2-t_1}$$

$$i=\frac{\frac{998-970}{970}}{\frac{360-270}{360}}=\frac{0{,}028866}{0{,}25}=0{,}115464=11{,}55\%$$

i=11,55%

3. **El Sr. X dispone de una letra de cambio de 50.000€ con vencimiento a 6 meses vista. Necesitando efectivo de inmediato, procede a la negociación de la letra, incurriendo en unos gastos equivalentes al 2% del nominal de la letra como corretaje y a 500€ más de gastos varios. Si el tanto de descuento que se aplica a la letra es del 10%:**

$N=50.000€$

$t=6\text{ meses}$

$C=2\%$

$OG=500€$

$d=10\%$

a. **Determinar la tasa de descuento efectiva que se paga por el dinero recibido.**

E?

E? N=50.000€

0 6 meses

$$E=N-D=N-(I+C+OG)=N-\left(N\cdot\frac{t}{12}\cdot d+C+OG\right)=$$

$$=50.000-\left(50.000\cdot\frac{6}{12}\cdot 0{,}10+0{,}02\cdot 50.000+500\right)=50.000-4.000=46.000€$$

Para calcular el descuento efectivo que se paga se tiene que relacionar el efectivo con el nominal mediante la relación de capitalización simple:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$46.000 = 50.000 \cdot (1 - \frac{6}{12} \cdot d) \Rightarrow \frac{46.000}{50.000} = 1 - 0{,}5 \cdot d \Rightarrow 0{,}92 = 1 - 0{,}5 \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}5 \cdot d = 0{,}08 \Rightarrow d = \frac{0{,}08}{0{,}5} = 0{,}16 = 16\%$$

$d_{efectivo}$=16%

b. Si el banco cobrase únicamente la tasa de descuento del 10% y una comisión del 5 por mil, ¿cuál sería ahora el tipo de descuento efectivo recibido por el banco?

$$E = N - D = N - (I + C + OG) = N - \left(N \cdot \frac{t}{12} \cdot d + C + OG\right) =$$

$$= 50.000 - \left(50.000 \cdot \frac{6}{12} \cdot 0{,}10 + 0{,}005 \cdot 50.000\right) = 50.000 - 2.750 = 47.250€$$

Para calcular el descuento efectivo que se paga se tiene que relacionar el efectivo con el nominal mediante la relación de capitalización simple:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

$$47.250 = 50.000 \cdot (1 - \frac{6}{12} \cdot d) \Rightarrow \frac{47.250}{50.000} = 1 - 0{,}5 \cdot d \Rightarrow 0{,}945 = 1 - 0{,}5 \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}5 \cdot d = 0{,}055 \Rightarrow d = \frac{0{,}055}{0{,}5} = 0{,}11 = 11\%$$

$d_{efectivo}$=11%

4. Si necesitamos obtener 900 euros líquidos, calcular el préstamo que debemos solicitar si el tipo de interés por anticipado es el 12% anual, nos cobran unos gastos de 15 euros, y la devolución se realizará dentro de 7 meses.

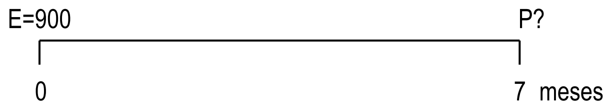
$E = 900€$

$t = 7$ meses

$OG = 15€$

$d = 12\%$

$N?$



El interés por anticipado quiere decir que se aplican los intereses sobre el nominal, es decir, funciona igual que el descuento comercial.

Además, lo que queremos recuperar son los 900€ más 15€ para pagar los gastos a los que vamos a tener que hacer frente.

$$E + OG = N \cdot \left(1 - \frac{t}{12} \cdot d\right) \Rightarrow 900 + 15 = N \cdot \left(1 - \frac{7}{12} \cdot 0{,}12\right) \Rightarrow 915 = N \cdot 0{,}93 \Rightarrow N = \frac{915}{0{,}93} = 983{,}87€$$

P=983,87€

5. **El Sr. X dispone de una letra de cambio de 500€ con vencimiento a 6 meses. Necesita el efectivo de inmediato por lo que procede a la negociación de la letra, incurriendo en unos gastos equivalentes al 2‰ del nominal de la letra como corretaje y 6€ más de gastos varios. Si el tanto de descuento que se aplica a la letra es del 10% simple anual, determinar:**

   a. **El efectivo que recibe.**

$N = 500€$

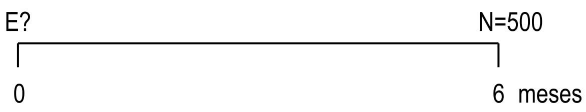
$t = 6 \text{ meses}$

$C = 2‰$

$OG = 6€$

$d = 10\%$

$E?$



$$E = N - D = N - (I + C + OG) = N - \left(N \cdot \frac{t}{12} \cdot d + C + OG\right) =$$

$$= 500 - \left(500 \cdot \frac{6}{12} \cdot 0{,}1 + 0{,}002 \cdot 500 + 6\right) = 500 - 32 = 468€$$

E=468€

   b. **Si la comisión de devolución es del 1‰, la de protesto del 1,5‰ y los gastos de correo son de 2,50€, ¿cuánto se cobrará en la cuenta corriente del cedente si la letra anterior resulta devuelta?**

$\text{Comisión de devolución} = 1‰$

$\text{Comisión de protesto} = 1{,}5‰$

$OG = 2{,}5€$

$$E' = N + \text{Comisión devolución} + \text{Comisión protesto} + OG =$$
$$= 500 + 500 \cdot 0{,}001 + 500 \cdot 0{,}0015 + 2{,}5 = 503{,}75€$$

E=503,75€

c. **Determine el nominal de una letra de vuelta que se gira a 60 días para recuperar la anterior letra impagada y cuyas condiciones son de un 16% de descuento, una comisión del 3‰ y otros gastos de 7€.**

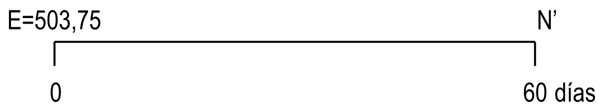
$t' = 60$ días

$d' = 16\%$

$C' = 3$ ‰

$OG' = 7€$

N' ?



$$E = N - D \Rightarrow E = N - (I + C + OG) \Rightarrow 503{,}75 = N - \left(N \cdot \frac{60}{360} \cdot 0{,}16 + 0{,}003 \cdot N + 7\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 503{,}75 = N - 0{,}02667 \cdot N - 0{,}003 \cdot N - 7 \Rightarrow 503{,}75 + 7 = 0{,}97033 \cdot N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 510{,}75 = 0{,}97033 \cdot N \Rightarrow N = \frac{510{,}75}{0{,}97033} = 526{,}36€$$

N=526,36€

6. **Calcular el efectivo producido por la negociación de la siguiente remesa de letras presentada al descuento:**

Letra	Nominal (€)	Días de descuento
A	150	19
B	200	56
C	750	70
D	450	88
E	400	111

Todas las letras están debidamente domiciliadas y aceptadas, aplicándose los tipos de descuento detallados a continuación:

- **Hasta 30 días: 11,5%**
- **Hasta 60 días: 13,5%**
- **Hasta 90 días: 14,5%**

- **Más de 90 días:16,5%**

Las comisiones de cobro para letras domiciliadas y aceptadas serán del 4‰ siendo el mínimo por letra de 3€.

Los gastos fijos ascienden a 2,5€ por la negociación de cada letra. Considere el año comercial (360 días).

Letra	Nominal	Días	Tipo	Intereses	Porcentaje	Comisión	Gastos
A	150,00	19	11,5%	0,91	4‰ ⇒ 0,6 MÍNIMO	3	2,5
B	200,00	56	13,5%	4,20	4‰ ⇒ 0,8 MÍNIMO	3	2,5
C	750,00	70	14,5%	21,15	4‰ ⇒ 3	3	2,5
D	450,00	88	14,5%	15,95	4‰ ⇒ 1,8 MÍNIMO	3	2,5
E	400,00	111	16,5%	20,35	4‰ ⇒ 1,6 MÍNIMO	3	2,5
Total	1.950			62,56		15	12,5

....		**1.950,00€**
Interés..	62,56€	
Comisión...	15€	
Gastos.............................	12,5€	
Total gastos..		90,06€
Efectivo...		**1.859,94€**

E=1.859,94€

7. Los movimientos registrados en la cuenta corriente que D. Agapito mantiene con su entidad bancaria se resumen en el siguiente cuadro:

Fecha	Concepto	Cuantía	Vencimiento
01-03	Apertura	0	01 marzo
14-03	Ingreso en efectivo	30.000	15 marzo
14-03	Letra a su cargo	6.000	05 marzo
27-03	Transferencia a su favor	18.000	28 marzo
30-03	Recibo luz	45.000	03 abril
10-04	Entrega en efectivo	20.000	11 abril

Las condiciones que se le aplican son las siguientes:

- **Tipo anual de interés para saldos acreedores: 1%**
- **Tipo anual de interés para descubiertos: 12%**
- **Fecha de liquidación: 30 de abril**
- **La entidad bancaria utiliza 365 días para calcular los intereses deudores y acreedores.**

- **IRC: 15%**

Se pide liquidar por el método hamburgués la anterior cuenta corriente.

$i_a = 1\%$

$i_d = 12\%$

$\text{Comisión mayor descubierto} = 2\%$

$\text{Fecha liquidación} = 30 - 04$

365 días/año

$IRC = 15\%$

Fecha	Concepto	Cuantía	Vencimiento
01-03	Apertura	0	01 marzo
14-03	Ingreso en efectivo	30.000	15 marzo
14-03	Letra a su cargo	6.000	05 marzo
27-03	Transferencia a su favor	18.000	28 marzo
30-03	Recibo luz	45.000	03 abril
10-04	Entrega en efectivo	20.000	11 abril

Liquidación del periodo 01-03 al 30-04

Fecha operación	Concepto	Cuantía	Signo	Fecha valor	Saldos	Signo	Días
14-03	Letra a su cargo	6.000	D	05-03	6.000	D	10
14-03	Ingreso efectivo	30.000	H	15-03	24.000	H	13
27-03	Transferencia s/f	18.000	H	28-03	42.000	H	6
30-03	Recibo luz	45.000	D	03-04	3.000	D	8
10-04	Entrega efectivo	20.000	H	11-04	17.000	H	19
30-04							56

Cálculo de los días:

Del 5 al 15 de marzo	10 días
Del 15 al 28 de marzo	13 días
Del 28 de marzo al 3 de abril	6 días
Del 3 al 11 de abril	8 días
Del 11 al 30 de abril	19 días

Cálculo de los números comerciales acreedores:

$24.000 \cdot 13$	312.000

$42.000 \cdot 6$	252.000
$17.000 \cdot 19$	323.000
Total	887.000

Cálculo de los intereses acreedores:

$$\text{Intereses acreedores} = \text{Suma de números acreedores} \cdot \text{Multiplicador fijo acreedor}$$

$$\text{Intereses acreedores} = 887.000 \cdot \frac{0{,}01}{365} = 24{,}30€$$

Cálculo de los números comerciales deudores:

$6.000 \cdot 10$	60.000
$3.000 \cdot 8$	24.000
Total	84.000

Cálculo de los intereses acreedores:

$$\text{Intereses deudores} = \text{Suma de números deudores} \cdot \text{Multiplicador fijo deudor}$$

$$\text{Intereses acreedores} = 84.000 \cdot \frac{0{,}12}{365} = 27{,}62€$$

Retención impuestros:

$$\text{Retención impuestos} = 15\% \text{ de } 24{,}30 = 3{,}65€$$

Saldo después de la liquidación:

$$\text{Saldo después de la liquidación} = 17.000 + 24{,}30 - 27{,}62 - 3{,}65 = 16.993{,}03€$$

E=16.993,03€

PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 5: CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

1. **Se coloca un capital de 100 euros durante 5 años al 6% anual compuesto. Transcurridos 2 años la entidad financiera nos comunica una bajada de los tipos de interés en un punto porcentual. ¿Qué cantidad retiraremos al final de la operación?**

$C_0 = 100€$

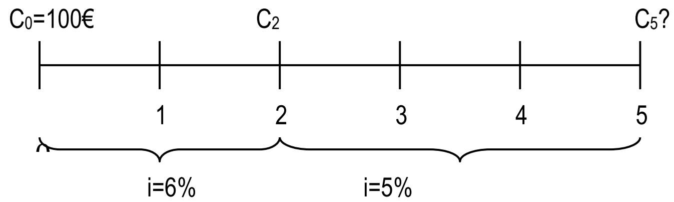
$t = 5$ años

$i = 6\%$ anual compuesto

$t' = 2$ años

$i = 5\%$ anual compuesto

C ?



$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_2 = C_0 \cdot (1+0{,}06)^2 = 100 \cdot (1+0{,}06)^2 = 112{,}36€$$

$$C_5 = C_2 \cdot (1+0.05)^3 = 112{,}36 \cdot (1+0.05)^3 = 130{,}07€$$

C_5=130,07€

2. **Dado un tanto de interés efectivo anual del 18% compuesto:**

$i = 18\%$

a. **Calcular el tanto mensual equivalente.**

i_{12} ?

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1+0{,}18)^{1/12} - 1 = 1{,}013888 - 1 = 0{,}013888 = 1{,}39\%$$

i_{12}=1,39%

b. **Calcular el tanto de interés efectivo anual del interés mensual calculado anteriormente.**

i?

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

$$i = (1+i_{12})^{12} - 1 = (1+0{,}138888)^{12} - 1 = 1{,}18 - 1 = 0{,}18 = 18\%$$

i=18%

3. **Dado un tanto de nominal anual del 18% capitalizable por meses:**

$J_{12} = 18\%$

a. Calcular el tanto mensual equivalente.

i_{12} ?

$$J_k = i_k \cdot k \Rightarrow i_k = \frac{J_k}{k}$$

$$i_{12} = \frac{J_{12}}{12} = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015 = 1{,}5\%$$

i_{12}=1,5%

b. Calcular el tanto de interés efectivo anual del interés mensual calculado anteriormente.

i?

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

$$i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = (1 + 0{,}015)^{12} - 1 = 1{,}195618 - 1 = 0{,}195618 = 19{,}56\%$$

i=19,56%

4. Dado un tipo de interés nominal del 12%, determinar el interés anual efectivo (TAE) en los casos de que la capitalización compuesta sea anual, semestral, trimestral y mensual.

$J_k = 12\%$

$i = \text{TAE}$?

<u>Capitalización compuesta anual (k=1)</u>:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0{,}12}{1}\right)^1 - 1 = 1{,}12^1 - 1 = 1{,}12 - 1 = 0{,}12 = 12\%$$

i=12%

<u>Capitalización compuesta semestral (k=2)</u>:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^2 - 1 = 1{,}06^2 - 1 = 1{,}1236 - 1 = 0{,}1236 = 12{,}36\%$$

i=12,36%

<u>Capitalización compuesta trimestral (k=4)</u>:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^4 - 1 = 1{,}03^4 - 1 = 1{,}125509 - 1 = 0{,}125509 = 12{,}5509\%$$

i=12,551%

Capitalización compuesta mensual (k=12):

$$i = \left(1+\frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1 = 1{,}01^{12} - 1 = 1{,}126825 - 1 = 0{,}126825 = 12{,}6825\%$$

i=12,682%

5. **Calcular el capital final que obtendremos por la inversión de un capital de 50.000€, impuestos durante cinco años a un tanto de interés del 15% anual nominal capitalizable trimestralmente en los dos casos siguientes:**

$J_4 = 15\%$

$C_0 = 50.000€$

$t = 5$ años

a. **Con el tanto trimestral equivalente.**

Como 5 años son 20 trimestres (5x4) nuestra incógnita es C_{20} si nos piden que lo calculemos con el tranto trimestral equivalente:

C_{20} ?

$$J_k = i_k \cdot k \Rightarrow i_k = \frac{J_k}{k}$$

$$i_4 = \frac{J_4}{4} = \frac{0{,}15}{4} = 0{,}0375 = 3{,}75\%$$

$$C_{n\cdot k} = C_0 \cdot (1+i_k)^{n\cdot k} \Rightarrow C_{5\cdot 4} = C_0 \cdot (1+0{,}0375)^{5\cdot 4} = 50.000 \cdot (1+0{,}0375)^{20} = 104.407{,}60€$$

C_n=104.407,60€

b. **Con el tanto de interés efectivo anual.**

C_5 ?

Previamente tenemos que calcular el tanto de interés efectivo anual, i, que podemos hacer de dos formas, a partir del tanto nominal que es un dato del problema, o a partir del tanto trimestral equivalente calculado en el apartado anterior. En ambos casos nos tiene que dar lo mismo:

Forma 1. A partir del tanto nominal:

$$i = \left(1+\frac{J_k}{k}\right)^k - 1$$

$$i = \left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)^4 - 1 = (1{,}0375)^4 - 1 = 1{,}158650 - 1 = 0{,}158650 = 15{,}87\%$$

Forma 2. A partir del tanto efectivo trimestral:

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

$$i = (1+i_4)^4 - 1 = (1+0{,}0375)^4 - 1 = 1{,}158650 - 1 = 0{,}158650 = 15{,}87\%$$

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_5 = C_0 \cdot (1+0{,}158650)^5 = 50.000 \cdot (1+0{,}158650)^5 = 104.407{,}41€$$

C_n=104.407,60€

6. Calcular qué capital ha de imponerse, en régimen de capitalización compuesta, con acumulación trimestral de intereses, al 11% de interés nominal anual, durante 5 años, para obtener unos intereses de 714,64 euros.

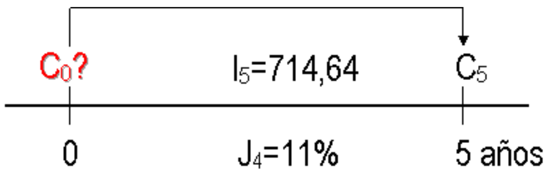
C_0?

Capitalización compuesta trimestral

$J_4 = 11\%$ nominal cuatrimestral

$n = 5$ años

$I_5 = 714{,}64€$



$$I_n = C_n - C_0$$

$$I_5 = C_5 - C_0 \Rightarrow C_5 = C_0 + I_5 \Rightarrow C_5 = C_0 + 714{,}64$$

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

Como se capitaliza por trimestres y el tanto por ciento de interés que nos dan es el tanto por ciento de interés nominal anual (no efectivo),

$$i_k = \frac{J_k}{k}$$

$$i_4 = \frac{J_4}{4} = \frac{0{,}11}{4} = 0{,}0275 = 2{,}75\%$$

Ahora ya se puede aplicar la fórmula anterior, teniendo en cuenta que 5 años tienen 20 trimestres $(4 \cdot 5)$:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i_k)^{n \cdot k} \Rightarrow C_5 = C_0 \cdot (1+0{,}0275)^{4 \cdot 5} \Rightarrow C_5 = C_0 \cdot (1+0{,}0275)^{4 \cdot 5} \Rightarrow C_5 = 1{,}720428 \cdot C_0$$

$$1{,}720428 \cdot C_0 = C_0 + 714{,}64 \Rightarrow 1{,}720428 \cdot C_0 - C_0 = 714{,}64 \Rightarrow (1{,}72048 - 1) \cdot C_0 = 714{,}64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}72048 \cdot C_0 = 714{,}64 \Rightarrow C_0 = \frac{714{,}64}{0{,}72048} = 991{,}89€$$

También se podría hacer pasándolo al tanto efectivo anual i o TAE y posteriormente capitalizándolo a ese tanto los 5 años:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1$$

$$i = \left(1+\frac{J_4}{4}\right)^4 - 1 = \left(1+\frac{0,11}{4}\right)^4 - 1 = 1,114621 - 1 = 0,114621$$

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_5 = C_0 \cdot (1+0,114621)^5 = 1,720428 \cdot C_0 \Rightarrow C_5 = 1,720428 \cdot C_0$$

$$1,720428 \cdot C_0 = C_0 + 714,64 \Rightarrow 1,720428 \cdot C_0 - C_0 = 714,64 \Rightarrow (1,72048 - 1) \cdot C_0 = 714,64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,72048 \cdot C_0 = 714,64 \Rightarrow C_0 = \frac{714,64}{0,72048} = 991,89€$$

C_0=991,89€

7. Sabiendo que el nominal de un capital es de 100.000€ con vencimiento dentro de cinco años y su valor efectivo hoy es de 59.049€ calcular el tanto de interés que se ha aplicado. ¿Cuál es el tanto de descuento equivalente al tanto de interés anterior? Comprueba que son equivalentes.

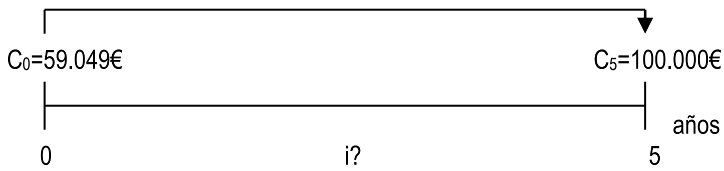
$C_5 = 100.000€$

$t = 5$ años

$C_0 = 59.049€$

i? anual compuesto

d equivalente? anual compuesto



Se puede hacer de dos formas:

<u>1ª forma:</u>

Despejando en la fórmula aplicada y operando:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$100.000 = 59.049 \cdot (1+i)^5 \Rightarrow \frac{100.000}{59.049} = (1+i)^5 \Rightarrow \frac{100.000}{59.049} = (1+i)^5 \Rightarrow 1,693508 = (1+i)^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{1,693508} = \sqrt[5]{(1+i)^5} \Rightarrow 1,111111 = 1+i \Rightarrow i = 1,111111 - 1 \Rightarrow i = 0,111111 = 11,111\%$$

<u>2ª forma:</u>

Aplicando directamente la fórmula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$i = \sqrt[5]{\frac{C_5}{C_0}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{100.000}{59.049}} - 1 = \sqrt[5]{1,693509} - 1 = 1,111111 - 1 = 0,111111 \Rightarrow i = 11,111\%$$

i=11,111%

d equivalente?

También se puede hacer de dos formas:

1ª forma:

Despejando en la fórmula aplicada y operando:

$$C_0 = C_n \cdot (1-d)^n$$

$$59.049 = 100.000 \cdot (1-d)^5 \Rightarrow \frac{59.049}{100.000} = (1-d)^5 \Rightarrow 0{,}59049 = (1-d)^5 \Rightarrow \sqrt[5]{0{,}59049} = \sqrt[5]{(1-d)^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}9 = 1-d \Rightarrow d = 1-0{,}9 \Rightarrow d = 0{,}1 = 10\%$$

2ª forma:

Aplicando directamente la fórmula:

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$d = \frac{0{,}111111}{1+0{,}111111} = 0{,}10 = 10\%$$

d=10%

8. Una empresa posee a día de hoy un efecto comercial a cobrar de 10.000€, emitido por el tráfico normal de su actividad. Calcular el capital efectivo y el descuento que se obtiene al descontarlo en descuento compuesto racional en los tiempos y a los tipos de interés fijados:

a. Tres años al 9% anual

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_3}{(1+i)^3} = \frac{10{,}000}{(1+0{,}09)^3} = 7.721{,}83€$$

E=7.721,83€

Hay dos formas de calcular el descuento:

1ª forma:

Por diferencia entre el capital final y el capital inicial:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = C_3 - C_0 = 10.000 - 7.721{,}83 = 2.278{,}17€$$

2ª forma:

Por la fórmula directa:

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_3 \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0{,}0{,}9)^{-3}\right) = 10.000 \cdot 0{,}227817 = 2.278{,}17€$$

D_r=2.278,17€

b. 18 meses al 11% anual

Para calcular el efectivo o capital inicial se puede hacer de dos formas:

1ª forma:

Lo primero que hacemos es pasar el tanto de interés efectivo anual al tanto de interés efectivo mensual mediante la fórmula:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1+0{,}11)^{1/12} - 1 = 0{,}008735$$

Ahora ya puedo calcular el capital incial o efectivo:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i_k)^k}$$

$$C_0 = \frac{C_{18}}{(1+i_{12})^{18}} = \frac{10.000}{(1+0{,}008735)^{18}} = 8.550{,}91€$$

2ª forma:

También puedo caluclar el capital inicial o efectivo pasando los 18 meses a años y aplicando el tanto de interés efectivo anual:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^{t/12}}$$

$$C_0 = \frac{C_{18}}{(1+i)^{18/12}} = \frac{10.000}{(1+0{,}11)^{18/12}} = \frac{10.000}{(1+0{,}11)^{1,5}} = 8.550{,}97€$$

E=8.550,97€

También hay dos formas de calcular el descuento:

<u>1ª forma:</u>

Por diferencia entre el capital final y el capital inicial:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = C_{18} - C_0 = 10.000 - 8.550{,}97 = 1.449{,}03€$$

<u>2ª forma:</u>

Por la fórmula directa:

- Aplicando i_k mensual (i_{12}) y n=18

$$D_r = C_n \cdot \left(1 - (1 + i_k)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_{18} \cdot \left(1 - (1 + 0{,}008735)^{-18}\right) = 10.000 \cdot \left(1 - (1 + 0{,}008735)^{-18}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}144909 = 1.449{,}08€$$

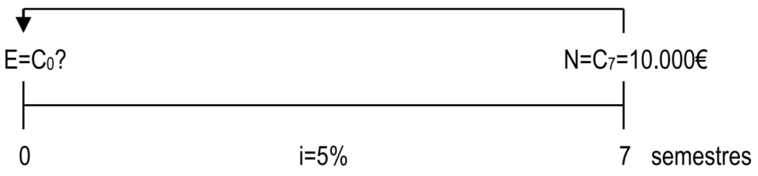
- Aplicando i anual y pasar 18 meses a años ($\frac{18}{12} = 1{,}5$ años)

$$D_r = C_n \cdot \left(1 - (1 + i)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_{18} \cdot \left(1 - (1 + 0{,}11)^{-18/12}\right) = 10.000 \cdot \left(1 - (1 + 0{,}11)^{-1{,}5}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}144903 = 1.449{,}03€$$

D_r=1.449,03€

c. 7 semestres al 5% anual



Para calcular el efectivo o capital inicial se puede hacer de dos formas:

<u>1ª forma</u>:

Lo primero que hacemos es pasar el tanto de interés efectivo anual al tanto de interés efectivo semestral mediante la fórmula:

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}05)^{1/2} - 1 = 0{,}024695$$

Ahora ya puedo calcular el capital incial o efectivo:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i_k)^k}$$

$$C_0 = \frac{C_7}{(1+i_2)^7} = \frac{10.000}{(1+0,024695)^7} = 8.430,20€$$

<u>2ª forma</u>:

También puedo caluclar el capital inicial o efectivo pasando los 7 semestres a años y aplicando el tanto de interés efectivo anual:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^{t/2}}$$

$$C_0 = \frac{C_7}{(1+i)^{7/2}} = \frac{10.000}{(1+0,05)^{7/2}} = \frac{10.000}{(1+0,05)^{3,5}} = 8.430,19€$$

E=8.430,19€

También hay dos formas de calcular el descuento:

<u>1ª forma:</u>

Por diferencia entre el capital final y el capital inicial:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = C_7 - C_0 = 10.000 - 8.430,19 = 1.569,81€$$

<u>2ª forma:</u>

Por la fórmula directa:

- Aplicando i_k semestral (i_2) y n=7

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i_k)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_{18} \cdot \left(1-(1+0,024695)^{-7}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0,024695)^{-7}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0,156980 = 1.569,80€$$

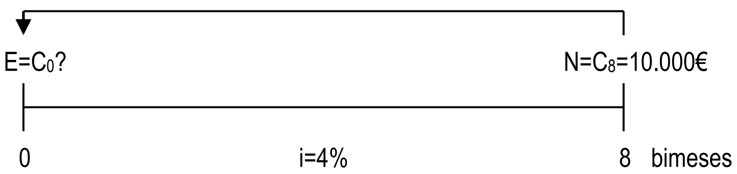
- Aplicando i anual y pasar 7 semestres a años ($\frac{7}{2} = 3,5$ años)

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_7 \cdot \left(1-(1+0,05)^{-7/2}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0,05)^{-3,5}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0,156980 = 1.569,80€$$

D_r=1.569,81€

d. 8 bimeses al 4% anual



Para calcular el efectivo o capital inicial se puede hacer de dos formas:

1ª forma:

Lo primero que hacemos es pasar el tanto de interés efectivo anual al tanto de interés efectivo bimensual mediante la fórmula:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_6 = (1+0{,}04)^{1/6} - 1 = 0{,}006558$$

Ahora ya puedo calcular el capital incial o efectivo:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i_k)^k}$$

$$C_0 = \frac{C_8}{(1+i_6)^8} = \frac{10.000}{(1+0{,}006558)^8} = 9.490{,}51€$$

2ª forma:

También puedo caluclar el capital inicial o efectivo pasando los 8 bimeses a años y aplicando el tanto de interés efectivo anual:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^{t/6}}$$

$$C_0 = \frac{C_8}{(1+i)^{8/6}} = \frac{10.000}{(1+0{,}04)^{8/6}} = \frac{10.000}{(1+0{,}04)^{1{,}333333}} = 9.490{,}50€$$

E=9.490,50€

También hay dos formas de calcular el descuento:

1ª forma:

Por diferencia entre el capital final y el capital inicial:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = C_8 - C_0 = 10.000 - 9.490{,}50 = 509{,}50€$$

2ª forma:

Por la fórmula directa:

- Aplicando i_k bimensual (i_6) y n=8

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i_k)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_8 \cdot \left(1-(1+0{,}006558)^{-8}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0{,}006558)^{-8}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}050949 = 509{,}49€$$

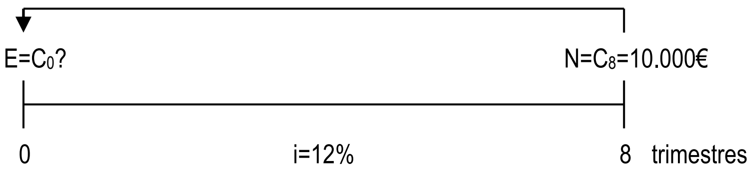
- Aplicando i anual y pasar 8 biemeses a años ($\frac{8}{6} = 1{,}333333$ años)

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_8 \cdot \left(1-(1+0{,}04)^{-8/6}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0{,}04)^{-1{,}333333}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}050950 = 509{,}50€$$

D_r=509,50€

e. 8 trimestres al 12% anual



Para calcular el efectivo o capital inicial se puede hacer de dos formas:

1ª forma:

Lo primero que hacemos es pasar el tanto de interés efectivo anual al tanto de interés efectivo trimestral mediante la fórmula:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}12)^{1/4} - 1 = 0{,}028737$$

Ahora ya puedo calcular el capital incial o efectivo:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i_k)^k}$$

$$C_0 = \frac{C_8}{(1+i_4)^8} = \frac{10.000}{(1+0{,}028737)^8} = 7.971{,}96€$$

2ª forma:

También puedo caluclar el capital inicial o efectivo pasando los 8 trimestres a años y aplicando el tanto de interés efectivo anual:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^{t/4}}$$

$$C_0 = \frac{C_8}{(1+i)^{8/4}} = \frac{10.000}{(1+0{,}12)^{8/4}} = \frac{10.000}{(1+0{,}12)^{2}} = 7.971{,}94€$$

E=7.971,94€

También hay dos formas de calcular el descuento:

1ª forma:

Por diferencia entre el capital final y el capital inicial:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = C_8 - C_0 = 10.000 - 7.971{,}94 = 2.028{,}06€$$

2ª forma:

Por la fórmula directa:

- Aplicando i_k trimestral (i_4) y n=8

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i_k)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_8 \cdot \left(1-(1+0{,}028737)^{-8}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0{,}028737)^{-8}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}202804 = 2.028{,}04€$$

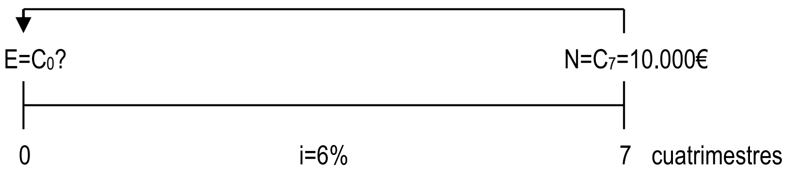
- Aplicando i anual y pasar 8 trimestres a años ($\frac{8}{4} = 2$ años)

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_8 \cdot \left(1-(1+0{,}12)^{-8/4}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0{,}12)^{-2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}202806 = 2.028{,}06€$$

D_r=2.028,06€

f. 7 cuatrimestres al 6% anual



Para calcular el efectivo o capital inicial se puede hacer de dos formas:

1ª forma:

Lo primero que hacemos es pasar el tanto de interés efectivo anual al tanto de interés efectivo cuatrimestral mediante la fórmula:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_3 = (1+0{,}06)^{1/3} - 1 = 0{,}019613$$

Ahora ya puedo calcular el capital incial o efectivo:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i_k)^k}$$

$$C_0 = \frac{C_7}{(1+i_3)^7} = \frac{10.000}{(1+0{,}019613)^7} = 8.728{,}76€$$

2ª forma:

También puedo caluclar el capital inicial o efectivo pasando los 7 cuatrimestres a años y aplicando el tanto de interés efectivo anual:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^{t/3}}$$

$$C_0 = \frac{C_7}{(1+i)^{7/3}} = \frac{10.000}{(1+0{,}06)^{7/3}} = \frac{10.000}{(1+0{,}06)^{2{,}333333}} = 8.728{,}77€$$

E=8.728,77€

También hay dos formas de calcular el descuento:

1ª forma:

Por diferencia entre el capital final y el capital inicial:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = C_7 - C_0 = 10.000 - 8.728{,}77 = 1.271{,}23€$$

2ª forma:

Por la fórmula directa:

- Aplicando i_k mensual (i_3) y n=7

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i_k)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_7 \cdot \left(1-(1+0{,}019613)^{-7}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0{,}019613)^{-7}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}127124 = 1.271{,}24€$$

- Aplicando i anual y pasar 7 cuatrimestres meses a años ($\frac{7}{3} = 2{,}333333$ años)

$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_7 \cdot \left(1-(1+0{,}06)^{-7/3}\right) = 10.000 \cdot \left(1-(1+0{,}06)^{-2{,}333333}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}127123 = 1.271{,}23€$$

D_r=1.271,23€

g. 240 días al 8% anual (año comercial)

Para calcular el efectivo o capital inicial se puede hacer de dos formas:

1ª forma:

Lo primero que hacemos es pasar el tanto de interés efectivo anual al tanto de interés efectivo diario mediante la fórmula:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{360} = (1+0{,}08)^{1/360} - 1 = 0{,}000214$$

Ahora ya puedo calcular el capital incial o efectivo:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i_k)^k}$$

$$C_0 = \frac{C_{240}}{(1+i_{360})^{240}} = \frac{10.000}{(1+0{,}000214)^{240}} = 9.499{,}42€$$

2ª forma:

También puedo caluclar el capital inicial o efectivo pasando los 240 días a años y aplicando el tanto de interés efectivo anual:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^{t/360}}$$

$$C_0 = \frac{C_{240}}{(1+i)^{240/360}} = \frac{10.000}{(1+0{,}08)^{240/360}} = \frac{10.000}{(1+0{,}08)^{0{,}666667}} = 9.499{,}87€$$

E=9.499,87€

También hay dos formas de calcular el descuento:

1ª forma:

Por diferencia entre el capital final y el capital inicial:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = C_{240} - C_0 = 10.000 - 9.499{,}87 = 500{,}13€$$

2ª forma:

Por la fórmula directa:

- Aplicando i_k mensual (i_{12}) y n=18

$$D_r = C_n \cdot \left(1 - (1 + i_k)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_{240} \cdot \left(1 - (1 + 0{,}000214)^{-240}\right) = 10.000 \cdot \left(1 - (1 + 0{,}000214)^{-240}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}050058 = 500{,}58€$$

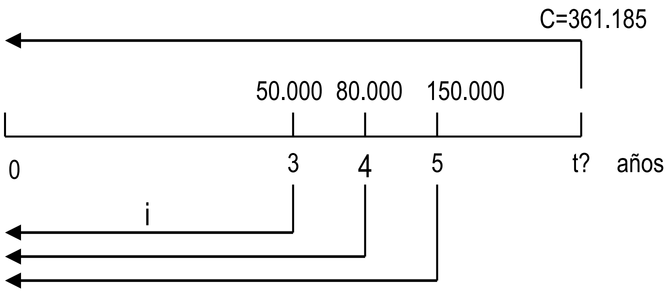
- Aplicando i anual y pasar 240 días a años ($\frac{240}{360} = 0{,}666667$ años)

$$D_r = C_n \cdot \left(1 - (1 + i)^{-n}\right)$$

$$D_r = C_{240} \cdot \left(1 - (1 + 0{,}08)^{-240/360}\right) = 10.000 \cdot \left(1 - (1 + 0{,}08)^{-0{,}666667}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.000 \cdot 0{,}050013 = 500{,}13€$$

D_r=500,13€

9. Se tienen 3 capitales de 50.000€, 80.000€ y 150.000€ con vencimiento a los tres, cuatro y cinco años, respectivamente. Se desea sustituir por un único capital de 361.185€. ¿Cuál será el vencimiento de este capital único si se aplica un tipo de interés de un 10% anual?



$C_1 = 50.000€$

$t_1 = 3$ años

$C_2 = 80.000€$

$t_2 = 4$ años

$C_3 = 150.000€$

$t_3 = 5$ años

$C = 361.185€$

$i = 10\%$

t?

Actualizamos los 3 capitales a sustituir por uno único. Para ello aplicamos la fórmula de actualización del descuento racional.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$E_1 = C'_1 = \frac{C_1}{(1+i)^3} = \frac{50.000}{(1+0{,}1)^3} = 37.565{,}74€$$

$$E_2 = C'_2 = \frac{C_2}{(1+i)^4} = \frac{80.000}{(1+0{,}1)^4} = 54.641{,}08€$$

$$E_3 = C'_3 = \frac{C_3}{(1+i)^5} = \frac{150.000}{(1+0{,}1)^5} = 93.138{,}20€$$

$$C' = C'_1 + C'_2 + C'_3 = 37.565{,}74 + 54.641{,}08 + 93.138{,}20 = 185.345{,}02€$$

Actualizamos ahora el capital único que vence dentro de n años:

$$E = C' = \frac{361.185}{(1+i)^n} = \frac{361.185}{(1+0{,}1)^n}$$

Sabemos que ese efectivo tiene que ser igual a la suma de los tres efectivos anteriores. Es decir:

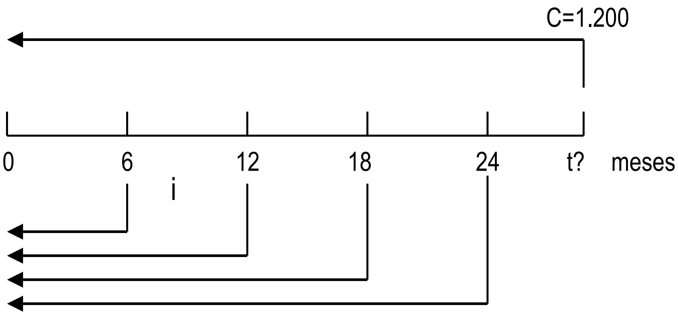
$$185.345{,}02 = \frac{361.185}{(1+0{,}1)^n} \Rightarrow (1+0{,}1)^n = \frac{361.185}{185.345{,}02} \Rightarrow (1+0{,}1)^n = 1{,}948717$$

Si aplicamos logaritmos:

$$\log(1+0{,}1)^n = \log(1{,}948717) \Rightarrow n \cdot \log(1{,}1) = \log(1{,}948717) \Rightarrow n = \frac{\log(1{,}948717)}{\log(1{,}1)} = \frac{0{,}289749}{0{,}041393} = 7 \text{ años}$$

n=7 años

10. Nos tienen que realizar cuatro pagos iguales de 300 euros dentro de 6, 12, 18 y 24 meses. Dado un tipo de interés del 6% compuesto efectivo anual, calcular en qué momento nos compensaría recibir un único pago por la totalidad de la deuda.



$C_1 = 300€$

$t_1 = 6$ meses

$C_2 = 300€$

$t_2 = 12$ meses

$C_3 = 300€$

$t_3 = 18$ meses

$C_4 = 300€$

$t_4 = 24$ meses

$C = 300 \cdot 4 = 1.200€$

$i = 6\%$

$t\,?$

Actualizamos los 4 capitales a sustituir por uno único. Para ello aplicamos la fórmula de actualización del descuento racional.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Existen dos formas de resolver el problema. Para ello previamente hemos de pasar bien el tipo de interés anual a meses, bien la duración a años.

<u>1ª forma: Pasando la i anual a i mensual:</u>

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1 = (1+0{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}004868$$

$$E_1 = C'_1 = \frac{C_1}{(1+i_k)^6} = \frac{300}{(1+0{,}004868)^6} = 291{,}38€$$

$$E_2 = C'_2 = \frac{C_2}{(1+i_k)^{12}} = \frac{300}{(1+0{,}004868)^{12}} = 283{,}02€$$

$$E_3 = C'_3 = \frac{C_3}{(1+i_k)^{18}} = \frac{300}{(1+0{,}004868)^{18}} = 274{,}89€$$

$$E_4 = C'_4 = \frac{C_4}{(1+i_k)^{24}} = \frac{300}{(1+0{,}004868)^{24}} = 267€$$

$$C' = C'_1 + C'_2 + C'_3 + C'_4 = 291{,}38 + 283{,}02 + 274{,}89 + 267 = 1.116{,}29€$$

Actualizamos ahora el capital único que vence dentro de n meses:

$$E = C' = \frac{1.200}{(1+i_k)^n} = \frac{1.200}{(1+0{,}004868)^n}$$

Sabemos que ese efectivo tiene que ser igual a la suma de los tres efectivos anteriores. Es decir:

$$1.116{,}29 = \frac{1.200}{(1+0{,}004868)^n} \Rightarrow (1+0{,}004868)^n = \frac{1.200}{1.116{,}29} \Rightarrow (1+0{,}004868)^n = 1{,}074989$$

Si aplicamos logaritmos:

$$\log(1+0{,}004868)^n = \log(1{,}074989) \Rightarrow n \cdot \log(1{,}004868) = \log(1{,}074989) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(1{,}074989)}{\log(1{,}004868)} = \frac{0{,}031404}{0{,}002109} = 14{,}890\,\text{meses}$$

Pasamos los meses a días multiplicando por 30:

$$14{,}89 \cdot 30 = 446{,}7\,\text{días} \approx 447\,\text{días}$$

Pasamos los días a años dividiendo entre 360:

$$\frac{447}{360} = 1{,}24 \text{ años}$$

Para pasar los 0,24 años a meses se multiplica por 12 meses que tiene un año. Así:

$$0{,}24 \cdot 12 = 2{,}88 \text{ meses.}$$

Para pasar los 0,88 meses a días se multiplica por 30 días que tiene un mes. Así:

$$0{,}88 \cdot 30 = 26{,}4 \text{ días} \approx 27 \text{ días}$$

Es decir, $t = 1 \text{ año}, 2 \text{ meses y } 27 \text{ días}$

<u>2ª forma: Pasando todas las duraciones a años:</u>

$$n = 6 \text{ meses} = \frac{6}{12} = 0{,}5 \text{ años}$$

$$E_1 = C'_1 = \frac{C_1}{(1+i)^{6/12}} = \frac{300}{(1+0{,}06)^{0,5}} = 291{,}39€$$

$$n = 12 \text{ meses} = \frac{12}{12} = 1 \text{ año}$$

$$E_2 = C'_2 = \frac{C_2}{(1+i)^{12/12}} = \frac{300}{(1+0{,}06)^{1}} = 283{,}02€$$

$$n = 18 \text{ meses} = \frac{18}{12} = 1{,}5 \text{ años}$$

$$E_3 = C'_3 = \frac{C_3}{(1+i)^{18/12}} = \frac{300}{(1+0{,}06)^{1,5}} = 274{,}89€$$

$$n = 24 \text{ meses} = \frac{24}{12} = 2 \text{ años}$$

$$E_4 = C'_4 = \frac{C_4}{(1+i)^{24/12}} = \frac{300}{(1+0{,}06)^{2}} = 267€$$

$$C' = C'_1 + C'_2 + C'_3 + C'_4 = 291{,}39 + 283{,}02 + 274{,}89 + 267 = 1.116{,}30€$$

Actualizamos ahora el capital único que vence dentro de n años:

$$E = C' = \frac{1.200}{(1+i)^n} = \frac{1.200}{(1+0{,}006)^n}$$

Sabemos que ese efectivo tiene que ser igual a la suma de los tres efectivos anteriores. Es decir:

$$1.116{,}30 = \frac{1.200}{(1+0{,}06)^n} \Rightarrow (1+0{,}06)^n = \frac{1.200}{1.116{,}30} \Rightarrow (1+0{,}06)^n = 1{,}074980$$

Si aplicamos logaritmos:

$$\log(1+0{,}06)^n = \log(1{,}074980) \Rightarrow n\cdot\log(1{,}06) = \log(1{,}074980) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(1{,}074980)}{\log(1{,}06)} = \frac{0{,}031400}{0{,}025306} = 1{,}24 \text{ años}$$

Para pasar los 0,24 años a meses se multiplica por 12 meses que tiene un año. Así:

$0{,}24\cdot 12 = 2{,}88$ meses.

Para pasar los 0,88 meses a días se multiplica por 30 días que tiene un mes. Así:

$0{,}88\cdot 30 = 26{,}4 \text{ días} \approx 27 \text{ días}$

Es decir, $t = 1 \text{ año}, 2 \text{ meses y } 27 \text{ días}$

n=447 días= 1año, 2 meses y 27 días.

11. Se ofrecen a un comprador tres posibilidades para la compra de una maquinaria:

a. Pago al contado de 350.000€

b. Pago dentro de cuatro años de 550.731,80€

c. Pago de 188.160€ dentro de dos años y 314.703,87€ dentro de cuatro años.

Calcular cuál de las tres ofertas es más ventajosa para el comprador, si el tipo de interés aplicado es el 12% compuesto anual.

Hay que comparar todas las opciones en el mismo momento del tiempo, por ejemplo, en el momento actual:

a. C_0=350.000€

b. C_4=550.731,80€

Se actualiza la cantidad cuatro años:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{550.731{,}80}{(1+0{,}12)^4} = \frac{550.731{,}80}{1{,}573519} = 350.000{,}10€$$

c. C_2=188.160€

C_4=314.703,87€

Se actualiza cantidad a cantidad:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{188.160}{(1+0{,}12)^2} + \frac{314.703{,}87}{(1+0{,}12)^4} = \frac{188.160}{1{,}2544} + \frac{314.703{,}87}{1{,}573519} = 150.000 + 200.000{,}04 = 350.000{,}04€$$

Consideramos las diferencias de decimales despreciables, por lo que las tres cantidades resultan igual de ventajosas.

Las tres cantidades son igual de ventajosas.

12. Una inversión de 150.000€ ha producido un rendimiento al final de primer semestre de 9.750€. Si los beneficios se acumulan cada semestre y la rentabilidad es constante, ¿cuál es el tanto efectivo anual de rentabilidad?

C_0=150.000€

$I_{0,5}$=9.750€

i constante: ¿TAE?

Sabemos que al medio año el capital que se obtiene es:

$$C_n = C_0 + I_n$$

$$C_{0,5} = C_0 + I_{0,5} = 150.000 + 9.750 = 159.750€$$

Por tanto podemos calcular el tanto anual efectivo mediante su correspondiente fórmula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$i = \sqrt[0,5]{\frac{159.750}{150.000}} - 1 = \sqrt[0,5]{1{,}065} - 1 = \sqrt[0,5]{1{,}065} - 1 = 1{,}134225 - 1 = 0{,}134225 = 13{,}42\%$$

i=13,42%

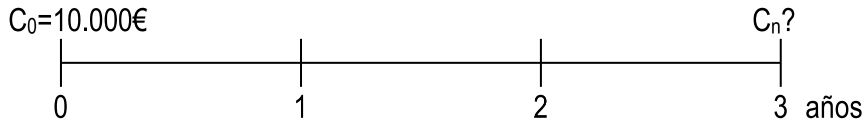
13. El Sr. Moreno recibe prestados 10.000€ que deberá devolver dentro de tres años con sus intereses al 10% anual compuesto anticipado. Calcular el valor de la devolución.

C_0=100.000

d=10%

n=3 años

C_n?



Cuando se habla de interés <u>anticipado</u>, se trata de un interés que funciona como el descuento comercial. Por eso:

$$C_0 = C_n \cdot (1-d)^n \Rightarrow C_n = \frac{C_0}{(1-d)^n}$$

$$C_n = \frac{10.000}{(1-0{,}1)^3} = \frac{10.000}{0{,}729} = 13.717{,}42€$$

C_n=13.717,42€

14. Se sabe que los intereses producidos en diez años por un capital colocado al interés simple del 10% son iguales a los obtenidos por otro capital en siete años al 10% de interés compuesto y también son iguales a los anteriores los generados por otro capital en seis años al 12% de interés compuesto. Además, se sabe que la suma de las cuantías de los tres capitales es 308.093,60€. ¿A cuánto asciende la cuantía de cada capital?

I_{10} (i_1=10% simple)= I_7 (i_2=10% compuesto)= I_6 (i_3=12% compuesto)

$$C_{01} + C_{02} + C_{03} = 308.093{,}60€$$

C_{01}? C_{02}? C_{03}?

Simple:

$$I_n = C_0 \cdot n \cdot i$$

$$I_{10} = C_{01} \cdot n \cdot i = C_{01} \cdot 10 \cdot 0{,}1 \Rightarrow I_{10} = C_{01}$$

Compuesta:

$$C_n = C_0 + I_n \Rightarrow I_n = C_n - C_0$$

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_7 = C_{02} \cdot (1+0{,}1)^7 = 1{,}948717C_{02}$$

$$I_7 = C_7 - C_{02} = 1{,}948717C_{02} - C_{02} \Rightarrow I_7 = 0{,}948717C_{02}$$

$$C_6 = C_{02} \cdot (1+0{,}12)^6 = 1{,}973823C_{03}$$

$$I_6 = C_6 - C_{03} = 1{,}973823C_{03} - C_{03} \Rightarrow I_6 = 0{,}973823C_{03}$$

$$C_{01} = 0{,}948717C_{02} \Rightarrow C_{02} = \frac{C_{01}}{0{,}948717} \Rightarrow C_{02} = 1{,}054055C_{01}$$

$$C_{01} = 0{,}973823C_{03} \Rightarrow C_{03} = \frac{C_{01}}{0{,}973823} \Rightarrow C_{03} = 1{,}026882C_{01}$$

Conocemos la suma de los tres capitales iniciales:

$$C_{01} + C_{02} + C_{03} = 308.093{,}60$$

Si sustituimos en la expresión anterior todas las variables en función de C_{01}:

$$C_{01}+1{,}054055C_{01}+1{,}026882C_{01}=308.093{,}60 \Rightarrow 3{,}080936C_{01}=308.093{,}60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{01}=\frac{3{,}080936}{308.093{,}60}=100.000€$$

Ya podemos calcular el valor de C_{02}:

$$C_{02}=1{,}054055C_{01}=1{,}054055\cdot 100.000=105.405{,}50€$$

Ya podemos calcular el valor de C_{03}:

$$C_{02}=1{,}026881C_{01}=1{,}026881\cdot 100.000=102.688{,}10€$$

C_1=100.000€

C_2=105.405,50€

C_3=102.688,10€

15. Un individuo divide un capital en dos, invirtiendo el primero a un 10% anual compuesto y el segundo a un 12% anual, obteniendo un interés para el primer año de 108.000€. Si hubiera colocado cada una de las partes al otro tipo, el interés se vería incrementado en 4.000€. ¿Qué cantidad corresponde a cada parte del capital?

Primer supuesto:

$C_{01} \Rightarrow$ 10% anual compuesto

$C_{02} \Rightarrow$ 12% anual compuesto

$I_1+I'_1=108.000€$

Segundo supuesto:

$C_{01} \Rightarrow$ 12% anual compuesto

$C_{02} \Rightarrow$ 10% anual compuesto

$I_1+I'_1=108.000+4.000=112.000€$

C_{01}? C_{02}?

Se aplica en ambos casos la capitalización compuesta:

Primer supuesto:

$$C_1=C_{01}\cdot(1+0{,}1)^1=1{,}1C_{01}$$

$$I_1=C_1-C_{01}=1{,}1C_{01}-C_{01} \Rightarrow I_1=0{,}1C_{01}$$

$$C_2=C_{02}\cdot(1+0{,}12)^1=1{,}12C_{02}$$

$$I'_1=C_2-C_{02}=1{,}12C_{02}-C_{02} \Rightarrow I'_1=0{,}12C_{02}$$

$$I_1+I'_1=108.000 \Rightarrow 0{,}1C_{01}+0{,}12C_{02}=108.000$$

Segundo supuesto:

$$C_1 = C_{01} \cdot (1+0,1)^1 = 1,12C_{01}$$

$$I_1 = C_1 - C_{01} = 1,12C_{01} - C_{01} \Rightarrow I_1 = 0,12C_{01}$$

$$C_2 = C_{02} \cdot (1+0,1)^1 = 1,1C_{02}$$

$$I'_1 = C_2 - C_{02} = 1,1C_{02} - C_{02} \Rightarrow I'_1 = 0,1C_{02}$$

$$I_1 + I'_1 = 112.000 \Rightarrow 0,12C_{01} + 0,1C_{02} = 112.000$$

Sustituyendo C_{01} en la primera ecuación:

$$0,1C_{01} = 108.000 - 0,12C_{02}$$

$$C_{01} = 1.080.000 - 1,2C_{02}$$

Ahora:

$$0,12 \cdot (1.080.000 - 1,2C_{02}) + 0,1C_{02} = 112.000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 129.600 - 0,144C_{02} + 0,1C_{02} = 112.000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 129.600 - 112.000 = 0,144C_{02} - 0,1C_{02} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 17.600 = 0,044C_{02} \Rightarrow C_{02} = \frac{17.600}{0,044} = 400.000€$$

$$C_{01} = 1.080.000 - 1,2C_{02} \Rightarrow 1.080.000 - 1,2 \cdot 400.000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_{01} = 600.000€$$

C_1=600.000€

C_2=400.000€

16. Calcular cuánto tiempo tardará un capital, a interés compuesto, para que se triplique a un tanto de interés del 6% semestral.

n?

$$C_n = 3C_0$$

$$\text{interés } 6\% \text{ semestral} \Rightarrow i_2 = 0,06$$

Pasamos en primer lugar el tanto semestral a tanto anual:

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

$$i = (1+i_2)^2 - 1 = (1+0,06)^2 - 1 = 1,1236 - 1 = 0,1236$$

Ahora ya podemos aplicar la fórmula de la capitalización compuesta y despejar n:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$3\cancel{C_0} = \cancel{C_0} \cdot (1+0,1236)^n \Rightarrow 3 = 1,1236^n$$

Aplicando logaritmos:

$$\log 3 = \log\left(1{,}1236^{n}\right) \Rightarrow \log 3 = n \cdot \log 1{,}1236 \Rightarrow n = \frac{\log 3}{\log 1{,}1236} = \frac{0{,}477121}{0{,}050612} = 9{,}43 \text{ años}$$

Para pasar los 0,43 años a meses se multiplica por 12 meses que tiene un año. Así:

$0{,}43 \cdot 12 = 5{,}16$ meses.

Para pasar los 0,16 meses a días se multiplica por 30 días que tiene un mes. Así:

$0{,}16 \cdot 30 = 4{,}8 \text{ días} \approx 5 \text{ días}$

n= 9,43 años=9 años, 5 meses y 5 días.

17. Un inversor deposita 400.000€ en un banco que capitaliza al 12% de interés compuesto. Al final de los primeros siete años retira la mitad de los intereses para comprar acciones de una determinada sociedad, que cotizan al 120% y su nominal es de 10€. Se pide:

a. Saldo en el banco a los 14 años de realizada la imposición.

b. Número de acciones compradas.

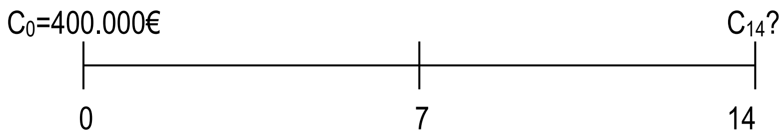
C_0=400.000€

i=12%

Cuando n=7 años $\Rightarrow$ retira la mitad de I_7

VC=120%

VN=10€



$C_n = 3C_0$

a. C_{14}?

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_7 = 400.000 \cdot (1+0{,}12)^7 = 884.272{,}56€$$

$$C_n = C_0 + I_n \Rightarrow I_n = C_n - C_0$$

$$I_7 = C_7 - C_0 = 884.272{,}56 - 400.000 = 484.272{,}56$$

Como retira la mitad de los intereses:

$$\frac{I_7}{2} = \frac{484.272{,}56}{2} = 242.136{,}28€$$

El nuevo capital que deja en el banco durante los otros 7 años restantes son:

$$C'_7 = C_7 - \frac{I_7}{2} \Rightarrow 884.272{,}56 - 242.136{,}28 = 642.136{,}28€$$

Ahora capitalizamos ese nuevo capital durante otros 7 años más:

$$C'_7 = 642.136{,}28 \cdot (1+0{,}12)^7 = 1.419.558{,}74€$$

C'_7=1.419.558,74€

b. Nº acciones?

El precio de las acciones, que cotizan al 120% es:

$$VC = VN \cdot \frac{120}{100} = 10 \cdot 1{,}2 = 12€$$

Dado que dispone de 242.136,28€ para comprar las acciones, puede adquirir:

$$N^o acc. = \frac{242.136{,}28}{12} = 20.178{,}02 \text{ acciones} \approx 20.178 \text{ acciones}$$

Nº acciones=20.178

18. Una sociedad anónima adquiere hoy inmovilizado por valor de 500.000€, que se tiene que renovar cada diez años. En el momento de la compra esta sociedad tiene un exceso de liquidez, y va a depositar en un banco la cuantía suficiente para renovar el inmovilizado durante tres períodos de diez años consecutivos. El banco en el que realiza el depósito capitaliza a interés compuesto del 10% anual. Calcule:

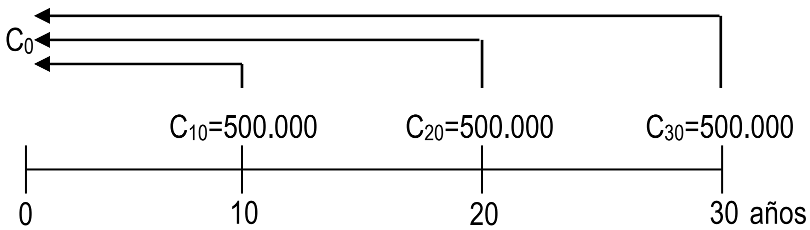
a. El depósito a realizar suponiendo que el valor del inmovilizado permanezca constante en los próximos 30 años.

b. El depósito a realizar suponiendo que el valor del inmovilizado tiene una subida anual acumulativa del 6%, partiendo de un precio en el momento actual de 500.000€.

$$\text{Valor Inmovilizado} = 500.000€$$

$$i = 10\%$$

a. Valor del inmovilizado constante:



Tenemos que calcuar el depósito que hay que hacer según la suma de los tres valores del inmovilizado actualizados según sus respectivos años:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C'_0 = \frac{500.000}{(1+0{,}1)^{10}} = \frac{500.000}{2{,}593742} = 192.771{,}68€$$

$$C''_0 = \frac{500.000}{(1+0{,}1)^{20}} = \frac{500.000}{6{,}7275} = 74.321{,}81€$$

$$C'''_0 = \frac{500.000}{(1+0{,}1)^{30}} = \frac{500.000}{17{,}449402} = 28.654{,}28€$$

$$C_0 = C'_0 + C''_0 + C'''_0 = 192.771{,}68 + 74.321{,}81 + 28.654{,}28 = 295.747{,}77€$$

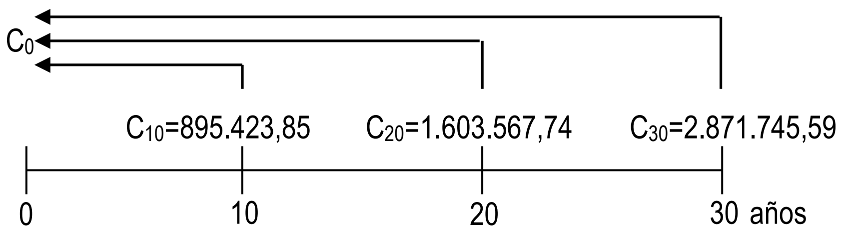
C_0=295.747,77€

b. Valor del inmovilizado con subida anual acumulativa del 6%. Es decir:

A los 10 años: $C_{10} = 500.000 \cdot 1{,}06^{10} = 895.423{,}85€$

A los 20 años: $C_{20} = 500.000 \cdot 1{,}06^{20} = 1.603.567{,}74€$

A los 30 años: $C_{30} = 500.000 \cdot 1{,}06^{30} = 2.871.745{,}59€$



Tenemos que calcuar el depósito que hay que hacer según la suma de los tres valores del inmovilizado actualizados según sus respectivos años:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C'_0 = \frac{895.423{,}85}{(1+0{,}1)^{10}} = \frac{895.423{,}85}{2{,}593742} = 345.224{,}72€$$

$$C''_0 = \frac{1.603.567{,}74}{(1+0{,}1)^{20}} = \frac{1.603.567{,}74}{6{,}7275} = 238.360{,}12€$$

$$C'''_0 = \frac{2.871.745{,}59}{(1+0{,}1)^{30}} = \frac{2.871.745{,}59}{17{,}449402} = 164.575{,}59€$$

$$C_0 = C'_0 + C''_0 + C'''_0 = 345.224{,}72 + 238.360{,}12 + 164.575{,}59 = 748.160{,}43€$$

C_0=748.160,43€

19. Un capital ha sido invertido al 14,49% efectivo anual compuesto, siendo los intereses semestrales durante diez años. El interés producido en el último semestre fue de 25.315,69€. ¿Cuál fue el capital intertido y cuál el montante obtenido?

i=14,49% con intereses semestrales 10 años.

I_{10}=25.315,69€

C_0?, C_{10}?

Se trata de capitalización compuesta, en el que los intereses se calculan sobre el capital del período inicial, es decir, sobre C_{n-1}:

$$I_n = C_{n-1} \cdot i$$

Hay que tener en cuenta que el tipo de interés tiene que estar expresado en semestres, que es cuando se acumulan los intereses. Por eso, en primer lugar hay que calcular el tanto semestral:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}1449)^{1/2} - 1 = 0{,}07$$

$$I_{20} = C_{19} \cdot i = 0{,}07 \cdot C_{19} = 25.315{,}69 \Rightarrow C_{19} = \frac{25.315{,}69}{0{,}07} = 361.652{,}71€$$

Ya podemos calcular el capital inicial a través de su fórmula:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{C_{19}}{(1+i_2)^{19}} = \frac{361.652{,}71}{(1+0{,}07)^{19}} = 99.999{,}99€$$

Y a partir de él calculamos el montante final a los 10 años o 20 semestres:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{20} = 99.999{,}99 \cdot (1+0{,}07)^{20} = 386.968{,}40€$$

C_0=99.999,99€

C_{10}=386.968,40€

20. Calcular el capital final de un capital inicial de 100.000€ impuestos durante 30 meses a un tipo de interés del 12% compuesto efectivo anual, utilizando como unidad de medida:

a. Año

b. Semestre

c. Trimestre

d. Mes

e. Bienio

f. Quinquenio

C_n?

C_0=100.000€

n=30 meses

i=12%

a. Como tenemos que expresar el tiempo y el tipo de interés en años:

i=12% anual

$$n = \frac{30}{12} = 2{,}5 \text{ años}$$

Ya se puede capitalizar el capital durante 30 meses o 2,5 años:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{2,5} = 100.000 \cdot (1+0{,}12)^{2,5} = 100.000 \cdot 1{,}327532 = 132.753{,}20€$$

$C_{2,5}$=132.753,20€

b. Como tenemos que expresar el tiempo y el tipo de interés en semestres:

i=12% anual

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}12)^{1/2} - 1 = 1{,}058301 - 1 = 0{,}058301$$

$$n = \frac{30}{6} = 5 \text{ semestres}$$

Ya se puede capitalizar el capital durante 30 meses o 5 semestres:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_5 = 100.000 \cdot (1+0{,}058301)^5 = 100.000 \cdot 1{,}327532 = 132.753{,}20€$$

C_5=132.753,20€

c. Como tenemos que expresar el tiempo y el tipo de interés en trimestres:

i=12% anual

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}12)^{1/4} - 1 = 1{,}028737 - 1 = 0{,}028737$$

$$n = \frac{30}{3} = 10 \text{ trimestres}$$

Ya se puede capitalizar el capital durante 30 meses o 10 trimestres:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{10} = 100.000 \cdot (1+0{,}028737)^{10} = 100.000 \cdot 1{,}327528 = 132.752{,}80€$$

C_{10}=132.752,80€

d. Como tenemos que expresar el tiempo y el tipo de interés en meses:

i=12% anual

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1+0{,}12)^{1/12} - 1 = 1{,}009489 - 1 = 0{,}009489$$

$$n = 30 \text{ meses}$$

Ya se puede capitalizar el capital durante 30 meses:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{30} = 100.000 \cdot (1+0{,}009489)^{30} = 100.000 \cdot 1{,}327540 = 132.754€$$

C_{30}=132.754€

e. Como tenemos que expresar el tiempo y el tipo de interés en bienios:

i=12% anual

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{0,5} = (1+0{,}12)^{1/0{,}5} - 1 = 1{,}2544 - 1 = 0{,}2544$$

$$n = \frac{30}{24} = 1{,}25 \text{ bienios}$$

Ya se puede capitalizar el capital durante 30 meses o 1,5 bienios:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{1,25} = 100.000 \cdot (1+0{,}2544)^{1{,}25} = 100.000 \cdot 1{,}327532 = 132.753{,}20€$$

$C_{1,25}$=132.753,20€

f. Como tenemos que expresar el tiempo y el tipo de interés en quinquenios:

i=12% anual

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{0,2} = (1+0{,}12)^{1/0{,}2} - 1 = 1{,}762342 - 1 = 0{,}762342$$

$$n = \frac{30}{60} = 0{,}5 \text{ quinquenios}$$

Ya se puede capitalizar el capital durante 30 meses o 0,5 quinquenios:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{0,5} = 100.000 \cdot (1+0{,}762342)^{0,5} = 100.000 \cdot 1{,}327532 = 132.753{,}20€$$

$C_{0,5}$=132.753,20€

21. El Banco X abona a sus depósitos un interés nominal del 12% capitalizable semestralmente. De acuerdo con estas previsiones un ahorrador coloca el capital necesario para que, transcurridos seis años, el montante ascienda a 100.000€. Pero a los dos años la entidad cambia la frecuencia de capitalización pasando a ser trimestral y a los cuatro años el tipo de interés que se abona pasa a ser el 11% y la capitalización mensual. Determinar la cuantía impuesta por el ahorrador y el montante disponible una vez transcurridos los seis años.

J_2=12% $C_0 \Rightarrow$ 6 años $\Rightarrow$ C_6=100.000€

A los 2 años: J_4=12%

A los 4 años: J_{12}=11%

C_0?

C_6?

Primero hay que calcular el C_0 sin que cambie el tipo de interés:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Calculemos el tanto efectivo a partir del tanto nominal:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1$$

$$i = \left(1 + \frac{J_2}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}1236$$

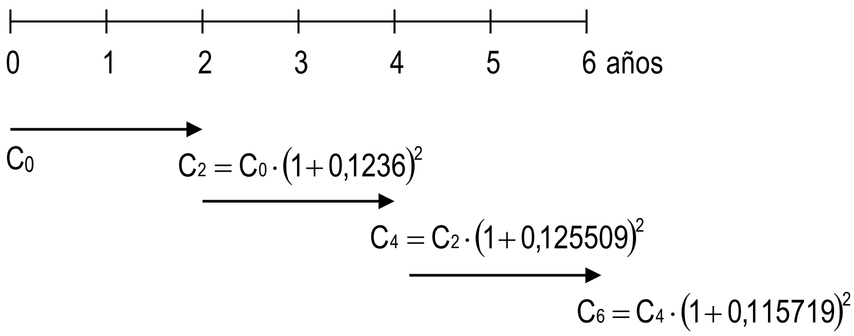
$$C_0 = \frac{100.000}{(1+0{,}1236)^6} = \frac{100.000}{2{,}012196} = 49.696{,}95€$$

Calculemos primero los tantos equivalentes:

$$i = \left(1 + \frac{J_4}{4}\right)^4 - 1 = \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}125509$$

$$i = \left(1 + \frac{J_{12}}{12}\right)^{12} - 1 = \left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{12} - 1 = 0,115719$$

Gráficamente, ocurre lo siguiente:



Es decir:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

$$C_2 = 49.696,95 \cdot (1 + 0,1236)^2 = 49.696,95 \cdot 1,262477 = 62.741,26€$$

$$C_4 = 62.741,26 \cdot (1 + 0,125509)^2 = 62.741,26 \cdot 1,266771 = 79.478,81€$$

$$C_6 = 79.478,81 \cdot (1 + 0,115719)^2 = 79.478,81 \cdot 1,244829 = 98.937,53€$$

C_0=49.696,95€

C_6=98.937,53€

22. Se asocian tres inversores e imponen un capital de 500.000€ en la explotación de un negocio. Al cabo de seis años lo liquidan y por capital e intereses se reparten:

- **Socio A: 329.245,89€**
- **Socio B: 548.743,15€**
- **Socio C: 219.497,26€**

Determinar la imposición de cada uno de los socios y el tanto de interés de la inversión.

Eso quiere decir que de la inversión en conjunto se han obtenido:

$$C_6 = 329.245,89 + 548.743,15 + 219.497,26 = 1.097.486,30€$$

Calculemos ahora el tipo de interés:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$i=\sqrt[6]{\frac{1.097.486{,}30}{500.000}}-1=\sqrt[6]{2{,}194973}-1=1{,}14-1=0{,}14$$

Sabiendo ya el tipo de interés podemos establecer el capital inicial de cada uno de los socios:

$$C_0=\frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_{0A}=\frac{329.245{,}89}{(1+0{,}14)^6}=\frac{329.245{,}89}{2{,}194973}=150.000€$$

$$C_{0B}=\frac{548.743{,}15}{(1+0{,}14)^6}=\frac{548.743{,}15}{2{,}194973}=250.000€$$

$$C_{0C}=\frac{219.497{,}26}{(1+0{,}14)^6}=\frac{219.497{,}26}{2{,}194973}=100.000€$$

i=14%

C_{0A}=150.000€

C_{0B}=250.000€

C_{0C}=100.000€

23. Una empresa ha contraído una deuda por la compra de una máquina de 140.000€, por lo que ha firmado una letra con vencimiento dentro de tres años. Pasados seis meses se cree mejor adelantar el pago al disponerse de un exceso de liquidez. Puesto en contacto con el proveedor, accede a la liquidación en este momento, concertando la operación al tipo de interés del 8% anual compuesto. Calcular el efectivo a pagar.

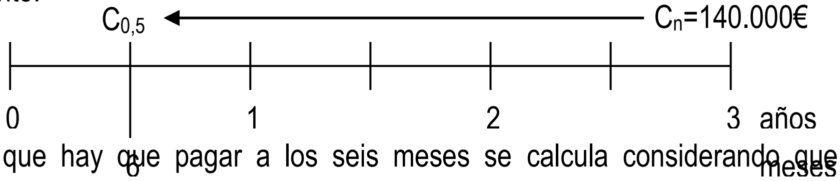
C_n=140.000€

n=3 años

A los seis meses se decide pagar al i=8%

$C_{0,5}$?

Gráficamente:



El capital que hay que pagar a los seis meses se calcula considerando que se aplica descuento racional:

$$C_0=\frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_{0,5} = \frac{140.000}{(1+0,08)^{2,5}} = \frac{140.000}{1,212158} = 115.496,49€$$

$C_{0,5}$=115.496,49€

24. Calcular el tanto a interés compuesto y el tanto de descuento que se aplicó a una operación que duró cinco años y que supuso un descuento de 60.000€ sobre un montante de 160.000€.

i?, d?

n=5 años

Descuento=60.000€

C_5=160.000€

Calculemos el tanto de interés, habiendo calculando previamente el C_0. No nos indica si se trata de un descuento racional o comercial, pero en ambos casos se cumple que:

$$D = C_n - C_0$$

$$D = C_5 - C_0 = 160.000 - 60.000 = 100.000$$

Ya podemos calcular el tipo de interés:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$i = \sqrt[5]{\frac{C_5}{C_0}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{160.000}{100.000}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{160.000}{100.000}} - 1 = 1,098561 - 1 = 0,098561 = 9,86\%$$

Y si fuera descuento comercial, el tanto aplicado debería ser:

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$d = \frac{0,098561}{1+0,098561} = \frac{0,098561}{1,098561} = 0,089718 = 8,97\%$$

i=9,86%

d=8,97%

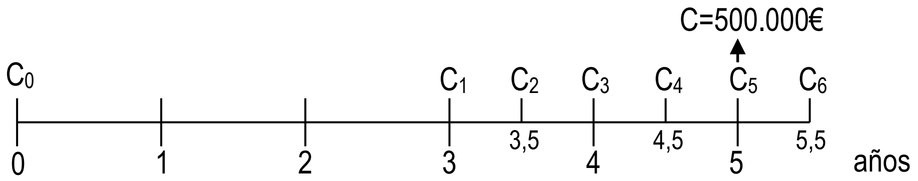
25. Se tienen que pagar 500.000€ dentro de cinco años, pero se conviene con el acreedor en dividir este pago único en seis pagos semestrales, el primero a los tres años, de forma que cada uno de ellos sea el 20% superior al precedente.

Determinar el importe de cada uno de los seis pagos semestrales si el tanto de descuento compuesto que se aplica en los cálculos es el 10%.

C_n=500.000€

d=10%

C_1?, C_2?, C_3?, C_4?, C_5?, C_6?



No podemos aplicar las fórmulas del capital común porque no son pagos iguales, por lo que tendremos que realizar la equivalencia capital a capital y después igualar sabiendo que:

$C_1 = C_1$

$C_2 = 1{,}2C_1$

$C_3 = 1{,}2C_2 = 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot C_1 = 1{,}44C_1$

$C_4 = 1{,}2C_3 = 1{,}2 \cdot 1{,}44 \cdot C_1 = 1{,}728C_1$

$C_5 = 1{,}2C_4 = 1{,}2 \cdot 1{,}728C_1 = 2{,}0736C_1$

$C_6 = 1{,}2C_5 = 1{,}2 \cdot 2{,}0736C_1 = 2{,}48832C_1$

Ahora sí actualizamos capital a capital:

$$C_0 = C_n \cdot (1-d)^n$$

$C_0 = 500.000 \cdot (1-0{,}1)^5 = 500.000 \cdot 0{,}59049 = 295.245$

$C_{01} = C_1 \cdot (1-0{,}1)^3 = C_1 \cdot 0{,}729 = 0{,}729C_1$

$C_{02} = 1{,}2C_1 \cdot (1-0{,}1)^{3,5} = 1{,}2C_1 \cdot 0{,}69159 = 0{,}829908C_1$

$C_{03} = 1{,}44C_1 \cdot (1-0{,}1)^4 = 1{,}44C_1 \cdot 0{,}6561 = 0{,}944784C_1$

$C_{04} = 1{,}728C_1 \cdot (1-0{,}1)^{4,5} = 1{,}728C_1 \cdot 0{,}622431 = 1{,}075561C_1$

$C_{05} = 2{,}0736C_1 \cdot (1-0{,}1)^5 = 2{,}0736C_1 \cdot 0{,}59049 = 1{,}22444C_1$

$C_{06} = 2{,}48832C_1 \cdot (1-0{,}1)^{5,5} = 2{,}48832C_1 \cdot 0{,}560188 = 1{,}393927C_1$

Igualando:

$295.245 = 0{,}729C_1 + 0{,}829908C_1 + 0{,}944784C_1 + 1{,}075561C_1 + 1{,}22444C_1 + 1{,}393927C_1$

$295.245 = 6{,}19762C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{295.245}{6{,}19762} = 47.638{,}45€$

Y los demás capitales:

$C_2 = 1{,}2C_1 = 1{,}2 \cdot 47.638{,}45 = 57.166{,}14€$

$C_3 = 1{,}44C_1 = 1{,}44 \cdot 47.638{,}45 = 68.599{,}37€$

$C_4 = 1{,}728C_1 = 1{,}728 \cdot 47.638{,}45 = 82.319{,}24€$

$C_5 = 2{,}0736C_1 = 2{,}0736 \cdot 47.638{,}45 = 98.783{,}09€$

$C_6 = 2{,}48832C_1 = 2{,}48832 \cdot 47.638{,}45 = 118.539{,}71€$

C_1=47.638,45€

C_2=57.166,14€

C_3=68.599,37€

C_4=82.319,24€

C_5=98.783,09€

C_6=118.539,71€

26. Tenemos tres capitales de 100.000€, 300.000€ y 500.000€, con vencimientos respectivos a los tres años, cinco años y nueve meses, y siete años y 45 días. Sustituimos los tres capitales por uno solo de cuantía 920.000€. Determinar el momento del vencimiento de este capital, teniendo en cuenta que el tanto de interés de la operación es el 10% compuesto y el año de 360 días.

C=920.000€

C_1=100.000€

t_1=3 años

C_2=300.000€

t_2=5 años y 9 meses

C_3=500.000€

t_3=7 años y 45 días

i=10%

Se trata de un vencimiento común con descuento racional, por lo que se aplica la siguiente fórmula:

$$t = \frac{\log C - \log \sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1+i)^{-t_s}}{\log(1+i)}$$

Pero lo primero que tenemos que hacer es pasar el tiempo a la misma unidad, por ejemplo, a años, sabiendo que un año tiene 360 días:

$t_1 = 3$ años

$$t_2 = 5 + \frac{9}{12} = 5{,}75 \text{ años}$$

$$t_3 = 7 + \frac{45}{360} = 7{,}125 \text{ años}$$

Ya podemos aplicar la fórmula:

$$t = \frac{\log(920.000) - \log\left[\left(100.000 \cdot (1+0{,}1)^{-3}\right) + \left(300.000 \cdot (1+0{,}1)^{-5{,}75}\right) + \left(500.000 \cdot (1+0{,}1)^{-7{,}125}\right)\right]}{\log(1+0{,}1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{5{,}963788 - \log\left[\left(100.000 \cdot 1{,}1^{-3}\right) + \left(300.000 \cdot 1{,}1^{-5{,}75}\right) + \left(500.000 \cdot 1{,}1^{-7{,}125}\right)\right]}{\log(1{,}1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{5{,}963788 - \log\left[(100.000 \cdot 0{,}751315) + (300.000 \cdot 0{,}578085) + (500.000 \cdot 0{,}507081)\right]}{0{,}041393} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{5{,}963788 - \log\left[75.131{,}5 + 173.425{,}5 + 253.540{,}5\right]}{0{,}041393} \Rightarrow t = \frac{5{,}954243 - \log\left[502.097{,}5\right]}{0{,}041393} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{5{,}963788 - 5{,}700788}{0{,}041393} \Rightarrow t = \frac{0{,}263}{0{,}041393} = 6{,}35 \text{ años}$$

Para pasar los 0,35 años a meses se multiplica por 12 meses que tiene un año. Así:

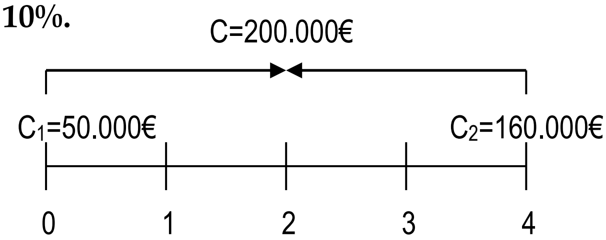
$0{,}35 \cdot 12 = 4{,}2$ meses.

Para pasar los 0,2 meses a días se multiplica por 30 días que tiene un mes. Así:

$0{,}2 \cdot 30 = 6$ días

n= 6,35 años=6 años, 4 meses y 6 días.

27. Tenemos que realizar el pago de una deuda por importe de 200.000€ dentro de 2 años; convenimos con nuestro acreedor en efectuarle dos pagos, uno hoy de 50.000€ y el otro dentro de cuatro años por 160.000€. Calcule el tanto de interés compuesto a que se evaluó la operación sabiendo que fue menor que el 10%.



C=200.000€

t=2 años

C_1=50.000€

t=0

C_2=160.000€

t=4

i?

Como la suma de los dos capitales por los que se quiere sustituir no es igual a la de la deuda, se trata de un capital común. Aplicamos entonces la fórmula correspondiente sabiendo que se trata de descuento racional:

$$C = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_s}{(1+i)^{t_s}} \cdot (1+i)^t$$

$$C = \left[\frac{C_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{t_2}}\right] \cdot (1+i)^t \Rightarrow 200.000 = \left[\frac{50.000}{(1+i)^0} + \frac{160.000}{(1+i)^4}\right] \cdot (1+i)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{200.000}{(1+i)^2} = \left[50.000 + \frac{160.000}{(1+i)^4}\right] \Rightarrow \frac{200.000}{(1+i)^2} = \left[\frac{50.000 \cdot (1+i)^4 + 160.000}{(1+i)^4}\right] \Rightarrow$$

Llamemos $x=(1+ i)^2$:

$$\frac{200.000}{(1+i)^2} = \left[\frac{50.000 \cdot (1+i)^4 + 160.000}{(1+i)^4}\right] \Rightarrow \frac{200.000}{x} = \frac{50.000 \cdot x^2 + 160.000}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{200.000}{\cancel{x}} = \frac{50.000 \cdot x^2 + 160.000}{\cancel{x}^2} \Rightarrow 200.000 = \frac{50.000 \cdot x^2 + 160.000}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200.000x = 50.000x^2 + 160.000 \Rightarrow 50.000x^2 - 200.000x + 160.000 = 0$$

$$x = \frac{200.000 \pm \sqrt{200.000^2 - 4 \cdot 50.000 \cdot 160.000}}{2 \cdot 50.000} = \frac{200.000 \pm \sqrt{8.000.000.000}}{100.000} =$$

$$= \frac{200.000 \pm 89.442,72}{100.000} \Rightarrow x_1 = 2,894427; x_2 = 1,105573$$

Sustituyendo los valores:

$$x_1 = 2,894427 = (1+i)^2 \Rightarrow 2,894427 = 1 + 2i + i^2 \Rightarrow i^2 + 2i + 1 - 2,894427 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i^2 + 2i - 1,894427 = 0$$

$$i = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1,894427)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 7,577708}}{2} = \frac{-2 \pm 3,402603}{2} =$$

$$= \frac{1,402603}{2} = 0,701302$$

Esta solución no es posible porque es mayor al 10%.

$$x_2 = 1,105573 = (1+i)^2 \Rightarrow 1,105573 = 1 + 2i + i^2 \Rightarrow i^2 + 2i + 1 - 1,105573 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i^2 + 2i - 0,105573 = 0$$

$$i = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0,105573)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 0,422292}}{2} = \frac{-2 \pm 2,102925}{2} =$$

$$= \frac{0,102925}{2} = 0,051463 = 5,15\%$$

i=5,15%

28. Dos capitales, que vencen dentro de 12 y 15 años, está colocados respectivamente, en capitalización compuesta al 8% de interés el primero y al 12% el segundo. Si los montantes que generan son para el primero

151.090,21€ y para el segundo 246.310,46€, determine los valores actuales de ambos capitales y el punto del tiempo en el cual tendrán igual valor.

C_{0A}?

C_{0B}?

i_A=8%

i_B=12%

C_{12}=151.090,21€

C_{15}=246.310,46€

n? para que C_{nA} y C_{nB} sean iguales

Calculemos el valor actual de los capitales:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_{0A} = \frac{C_{12}}{(1+0{,}08)^{12}} = \frac{151.090{,}21}{2{,}518170} = 60.000€$$

$$C_{0B} = \frac{C_{15}}{(1+0{,}12)^{15}} = \frac{246.310{,}46}{5{,}473566} = 45.000€$$

Para saber cuánto tiempo tiene que pasar para que A y B sean iguales:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{nA} = 60.000 \cdot (1+0{,}08)^n$$

$$C_{nB} = 45.000 \cdot (1+0{,}12)^n$$

$$C_{nA} = C_{nB} \Rightarrow 60.000 \cdot (1{,}08)^n = 45.000 \cdot (1{,}12)^n \Rightarrow \frac{60.000}{45.000} = \frac{1{,}12^n}{1{,}08^n} \Rightarrow 1{,}333333 = \left(\frac{1{,}12}{1{,}08}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}333333 = 1{,}037037^n$$

Si aplicamos logaritmos a los dos miembros:

$$\log 1{,}333333 = \log 1{,}037037^n \Rightarrow 0{,}124939 = n \cdot \log 1{,}037037 \Rightarrow n = \frac{0{,}124939}{\log 1{,}037037} = \frac{0{,}124939}{0{,}015794} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 7{,}91 \text{ años}$$

Para pasar los 0,91 años a meses se multiplica por 12 meses que tiene un año. Así:

$$0{,}91 \cdot 12 = 10{,}92 \text{ meses.}$$

Para pasar los 0,92 meses a días se multiplica por 30 días que tiene un mes. Así:

$$0{,}92 \cdot 30 = 27{,}6 \text{ días} \approx 28 \text{ días}$$

n= 7,91 años=7 años, 10 meses y 28 días.

29. El día 1 de julio de 2013 se tienen que pagar 20.000€; el día 1 de abril de 2015, 200.000€, y el 1 de enero de 2017, 140.000€. Se desea efectuar un solo pago el día 1 de enero de 2013 computando intereses en régimen de capitalización compuesta al 5% semestral. Calcular el importe del pago.

C_1=20.000€

t_1=6 meses=0,5 años

C_2=200.000€

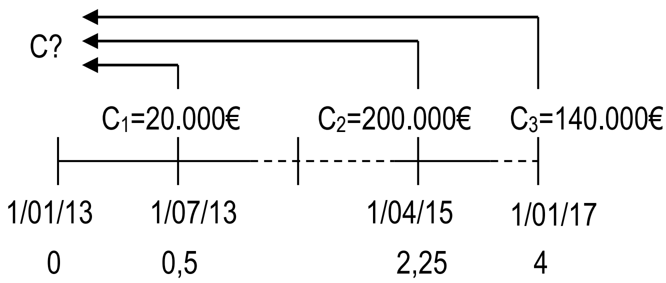
t_2=2 años y 3 meses=2,25 años

C_3=140.000€

t_3=4 años

i_2=5%

C?



Lo primero que hacemos es calcular el tipo de interés anual:

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

$$i = (1+i_2)^2 - 1 = (1+0{,}05)^2 - 1 = 0{,}1025$$

Aplicamos la fórmula de capitalización compuesta, descuento racional:

$$C = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_s}{(1+i)^{t_s}} \cdot (1+i)^t$$

$$C = \left[\frac{20.000}{(1+0{,}1025)^{0,5}} + \frac{200.000}{(1+0{,}1025)^{2,25}} + \frac{140.000}{(1+0{,}1025)^4}\right] \cdot (1+0{,}1025)^0 =$$

$$= \left[\frac{20.000}{1{,}814059} + \frac{200.000}{1{,}245523} + \frac{140.000}{1{,}477455}\right] \cdot 1 = 11.025 + 160.575{,}12 + 94.757{,}54 = 266.357{,}66€$$

C=266.357,66€

30. El día 1 de abril de un determinado año el Sr. Moreno presta al Sr. Antolinos 60.000€ a pagar dentro de cinco años con los intereses acumulados al 8% nominal anual, capitalizable trimestralmente.

Transcurridos dos años y tres meses, el Sr. Antolinos propone a su acreedor modificar el pago de la deuda, entregando en esta fecha 50.000€ y aceptando una letra con vencimiento dentro de un año de 26.000€ nominales.

Se pide:

a. **Decidir si el Sr. Moreno debe aceptar la fórmula de pago propuesta, si el tipo de interés del mercado es del 10% compuesto efectivo anual.**
b. **Calcular a qué tanto por ciento anual de interés le resultará al Sr. Moreno la operación de préstamo si acepta la propuesta del Sr. Antolinos.**

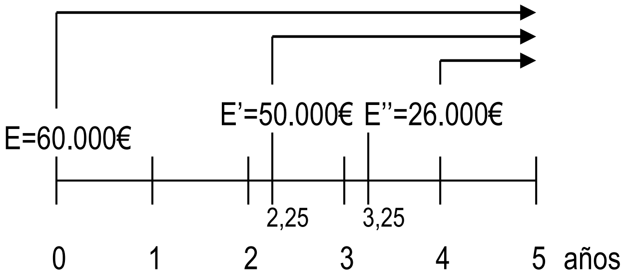
E=60.000€

t=5 años

J_4=8%

2 años y tres meses: E'=50.000€ y E''=26.000€

a. $i_{mercado}$=10% anual ¿Acepta?



Para que le interese aceptar la propuesta de pago tiene que comparar las condiciones primeras por lo que cuando ocurran los 5 años cobrará:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

Pasamos el tanto nominal al tanto efectivo:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1$$

$$i = \left(1 + \frac{J_4}{4}\right)^4 - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 = 1,082432 - 1 = 0,082432$$

El capital equivalente a los cinco años sería:

$$C_5 = 60.000 \cdot (1+0,082432)^5 = 60.000 \cdot 1,485946 = 89.156,76€$$

En las nuevas condiciones veamos cuánto sería el capital que cobraría a los cinco años:

$$E' = 50.000 \cdot (1+0,10)^{(5-2,25)} = 50.000 \cdot (1+0,10)^{2,75} = 50.000 \cdot 1,299660 = 64.983€$$

$$E'' = 26.000 \cdot (1+0,10)^{(5-3,25)} = 26.000 \cdot (1+0,10)^{1,75} = 26.000 \cdot 1,181509 = 30.719,23€$$

Si sumamos ambas cantidades:

$$\text{Capital a sustituir} = 64.983 + 30.719,23 = 95.702,23€$$

Dado que las últimas condiciones arrojan un capital que en el año 5 supera el que habría que pagar según las condiciones finales, el Sr. Moreno sí debería aceptar la propuesta.

Sí debería aceptar la propuesta

b. i? si acepta la propuesta.

Si aceptara la propuesta habría que comparar lo que ha recibido por su préstamo inicial de 60.000€ durante los 5 años, aplicando la correspondiente fórmula. Es decir:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$i = \sqrt[5]{\frac{95.702{,}23}{60.000}} - 1 = \sqrt[5]{1{,}595037} - 1 = 1{,}097878 - 1 = 0{,}097878 = 9{,}79\%$$

i=9,79%

31. Una persona deposita 200.000€ en un banco que abona un 9% anual de interés compuesto, pero al final de cada año retira un tercio de los intereses para los estudios de su hijo hasta que éste termine su carrera. Si el hijo tardó seis años en concluir sus estudios, ¿de qué capital dispondrá en el banco a los diez años de tener efectuado el depósito?

C_0=200.000€

i=9%

Al final de cada año: I_n-1/3I_n

6 años en terminar estudios

C_{10}?

Veamos paso por paso:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

Primer año:

$$C_1 = 200.000 \cdot (1+0{,}09)^1 = 218.000€$$

$$I_1 = C_1 - C_0 = 218.000 - 200.000 = 18.000€$$

Si retira un tercio de los intereses: $C'_1 = 200.000 + \frac{2}{3} \cdot 18.000 = 212.000€$

Segundo año:

$$C_2 = 212.000 \cdot (1+0{,}09)^1 = 231.080€$$

$$I_2 = C_2 - C_1 = 231.080 - 212.000 = 19.080€$$

Si retira un tercio de los intereses: $C'_2 = 212.000 + \frac{2}{3} \cdot 19.080 = 224.720€$

Tercer año:

$C_3 = 224.720 \cdot (1+0{,}09)^1 = 244.944{,}80€$

$I_3 = C_3 - C_2 = 244.944{,}80 - 224.720 = 20.224{,}80€$

Si retira un tercio de los intereses: $C'_3 = 224.720 + \frac{2}{3} \cdot 20.224{,}80 = 238.203{,}20€$

Cuarto año:

$C_4 = 238.203{,}20 \cdot (1+0{,}09)^1 = 259.641{,}49€$

$I_4 = C_4 - C_3 = 259.641{,}49 - 238.203{,}20 = 21.438{,}29€$

Si retira un tercio de los intereses: $C'_4 = 238.203{,}20 + \frac{2}{3} \cdot 21.438{,}29 = 252.495{,}39€$

Quinto año:

$C_5 = 252.495{,}39 \cdot (1+0{,}09)^1 = 275.219{,}98€$

$I_5 = C_5 - C_4 = 275.219{,}98 - 252.495{,}39 = 22.724{,}59€$

Si retira un tercio de los intereses: $C'_5 = 252.495{,}39 + \frac{2}{3} \cdot 22.724{,}59 = 267.645{,}12€$

Sexto año:

$C_6 = 267.645{,}12 \cdot (1+0{,}09)^1 = 291.733{,}18€$

$I_6 = C_6 - C_5 = 291.733{,}18 - 267.645{,}12 = 24.088{,}06€$

Si retira un tercio de los intereses: $C'_6 = 267.645{,}12 + \frac{2}{3} \cdot 24.088{,}06 = 283.703{,}83€$

El resto de los 4 años que quedan:

$C_{10} = 283.703{,}83 \cdot (1+0{,}09)^4 = 400.471{,}11€$

C_{10}=400.471,11€

32. Un capital de 170.000€, impuesto al 10% de interés anual compuesto, se convierten en n años en 273.786,70€. ¿A qué tanto por ciento de interés simple habrá de ponerse en igual tiempo para obtener el mismo capital final?

C_0=170.000€

i=10% anual compuesto

n años

C_{n1}=273.786,70€

¿i' simple para que C_{n2} sea igual a C_{n1}?

A partir de los datos de capitalización compuesta podemos obtener n:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log (1+i)}$$

$$n = \frac{\log 273.786{,}70 - \log 170.000}{\log (1+0{,}1)} = \frac{5{,}437412 - 5{,}230449}{0{,}041393} = \frac{0{,}206963}{0{,}041393} = 5 \text{ años}$$

Aplicamos este tiempo a la fórmula correspondiente de capitalización simple para despejar su tipo de interés:

$$i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}$$

$$i' = \frac{\frac{273.786{,}70}{170.000} - 1}{5} = \frac{0.61051}{5} = 0{,}122102 = 12{,}21\%$$

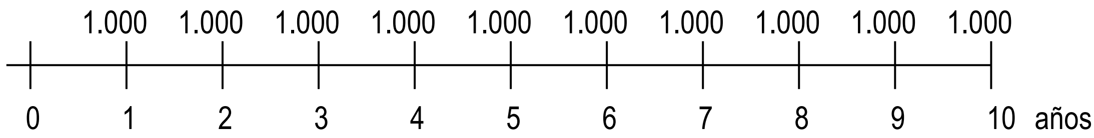
i'=12,21%

PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 6: TEORÍA DE RENTAS. RENTAS CONSTANTES

1. **Sea una renta de 1.000€ que pagaremos al finalizar cada año, durante 10 años, siendo el pago constante, y el interés del 6% anual compuesto. Determinar:**

   a. **El Valor Actual**



Se trata de una renta constante no unitaria, temporal, pospagable, inmediata y entera

$$A_{\overline{n|}i} = c \cdot a_{\overline{n|}i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+0{,}06)^{-10}}{0{,}06} = 7{,}360087$$

$$A_{\overline{n|}i} = 1.000 \cdot 7{,}360087 = 7.360{,}09€$$

V_0=7.360,09€

   b. **El Valor Final**

$$S_{\overline{n|}i} = c \cdot s_{\overline{n|}i}$$

$$s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+0{,}06)^{10}-1}{0{,}06} = 13{,}180795$$

$$S_{\overline{n|}i} = 1.000 \cdot 13{,}180795 = 13.180{,}80€$$

V_{10}=13.180,80€

   c. **Comprobar la relación entre ambos valores**

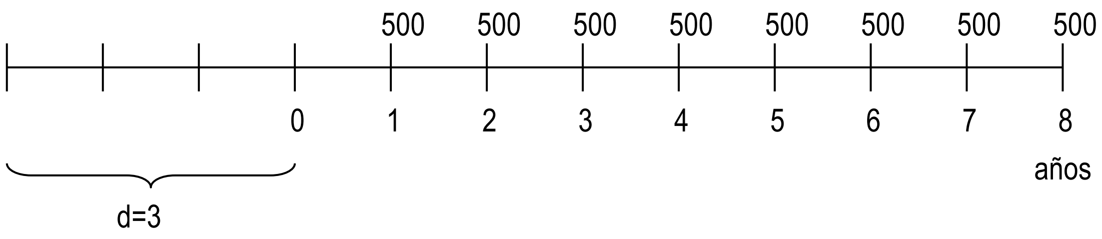
Si se capitaliza el valor actual 10 años, se debe llegar al mismo resultado anterior:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^{n}$$

$$S_{\overline{n|}i} = A_{\overline{n|}i} \cdot (1+i)^{n}$$

$$S_{\overline{n|}i} = 7.360{,}09 \cdot (1+0{,}06)^{10} = 13.180{,}80€$$

2. Se desea calcular el valor actual de una renta pospagable de cuantía constante, siendo la anualidad de 500€. Tiene 8 términos, el tipo de interés efectivo anual es del 6,5% y tiene un diferimiento de 3 años.



Se trata de una renta constante no unitaria, temporal, pospagable, diferida y entera.

$$ {}^{d}/A_{\overline{n|}i} = c \cdot {}^{d}/a_{\overline{n|}i} $$

$$ {}^{d}/a_{\overline{n|}i} = \frac{a_{\overline{n|}i}}{(1+i)^{d}} $$

$$ a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

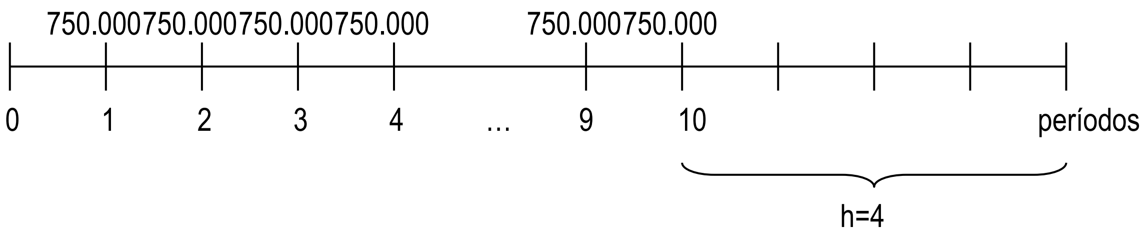
$$ a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+0{,}065)^{-8}}{0{,}065} = 6{,}088751 $$

$$ {}^{d}/a_{\overline{n|}i} = \frac{6{,}088751}{(1+0{,}065)^{3}} = 5{,}040567 $$

$$ {}^{d}/A_{\overline{n|}i} = 500 \cdot 5{,}040567 = 2{,}520{,}28€ $$

V_0=2.520,28€

3. Calcular el valor final de una renta pospagable de cuantía constante de 750.000€ si tiene 10 términos y se anticipa en 4 períodos a un interés del 5% períodal.



Se trata de una renta constante no unitaria, temporal, pospagable, anticipada y entera.

$$ {}^{h}/S_{\overline{n|}i} = c \cdot {}^{h}/s_{\overline{n|}i} $$

$$^{h/}s_{\overline{n}|i} = (1+i)^h \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

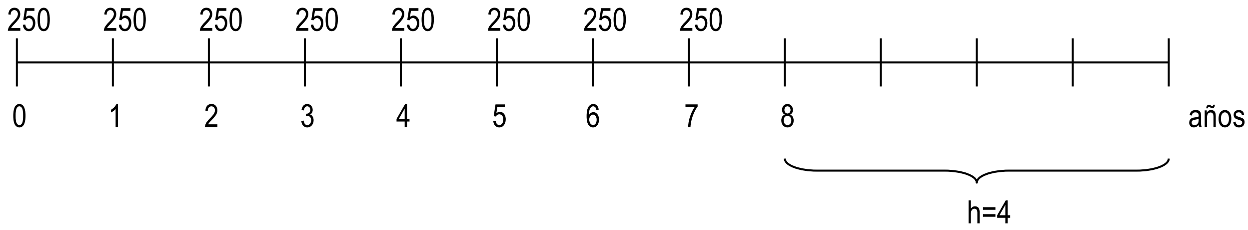
$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05} = 12{,}577893$$

$$^{h/}s_{\overline{n}|i} = (1+0{,}05)^4 \cdot 12{,}577893 = 15{,}288508$$

$$^{h/}S_{\overline{n}|i} = 750.000 \cdot 15{,}288508 = 11.466{,}381€$$

V_{14}=11.466,38€

4. **Obtener el valor final de una renta prepagable, anticipada en 4 años, si el término constante de la misma es de 250€, la duración 8 años y el tanto de valoración es del 4% anual.**



Se trata de una renta constante no unitaria, temporal, prepagable, anticipada y entera.

$$^{h/}\ddot{S}_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i)^{h+1} \cdot s_{\overline{n}|i}$$

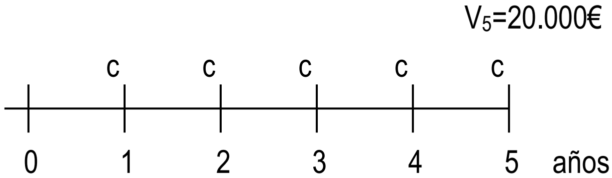
$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+0{,}04)^8 - 1}{0{,}04} = 9{,}214226$$

$$^{h/}\ddot{S}_{\overline{n}|i} = 250 \cdot (1+0{,}04)^{4+1} \cdot 9{,}214226 = 2.802{,}63€$$

V_{12}=2.802,63€

5. **¿Qué capital tengo que colocar al final de cada uno de los próximos 5 años en un banco al 10% anual para disponer de 20.000€ al final del quinto año?**



Se trata de una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera.

$$S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i}$$

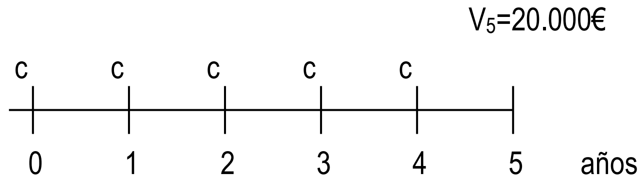
$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 6{,}1051$$

$$S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i} \Rightarrow c = \frac{S_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{20.000}{6{,}1051} = 3.275{,}95€$$

c=3.275,95€

6. **¿Qué capital tengo que colocar al principio de cada uno de los próximos 5 años en un banco que remunera al 10% efectivo anual para disponer de 20.000€ al final del quinto año?**



Se trata de una renta constante, temporal, prepagable, inmediata y entera.

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

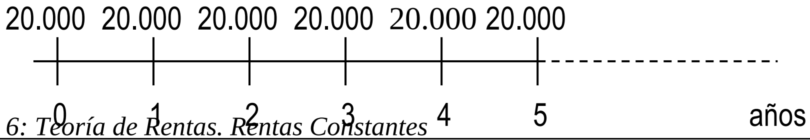
$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 6{,}1051$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i) \Rightarrow c = \frac{\ddot{S}_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)} = \frac{20.000}{6{,}1051 \cdot (1+0{,}1)} = 2.978{,}14$$

c=2.978,14€

7. **Calcular el valor de una inversión que deberemos hacer hoy si queremos que nos permita obtener un beneficio de 20.000€ al principio de cada año de una manera indefinida, siendo el 12% anual la rentabilidad de la operación.**



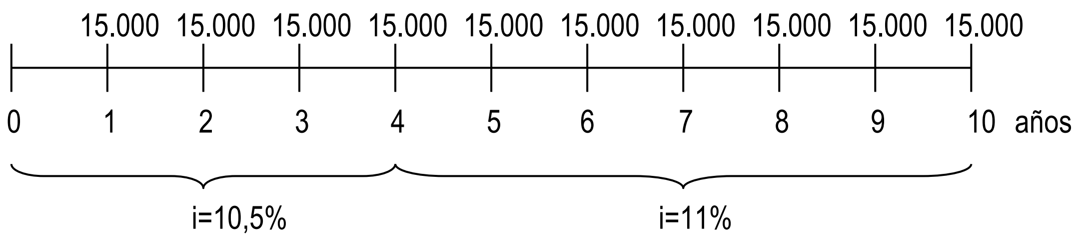
Se trata de una renta constante, perpetua, prepagable, inmediata y entera.

$$\ddot{A}_{\infty|i} = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

$$\ddot{A}_{\infty|i} = 20.000 \cdot \frac{1+0{,}12}{0{,}12} = 186.666{,}67€$$

Inversión=186.666,67€

8. **Determinar el saldo disponible en una cuenta si se ingresan durante 10 años 15.000€ anuales en una institución financiera al final de cada año, sabiendo que dicha institución abona intereses anualmente al 10,5% efectivo anual durante los 4 primeros años y el 11% efectivo anual durante el resto del tiempo.**



Se trata en realidad de dos rentas de las mismas características, pero con tipos de interés diferentes. Ambas consisten en dos rentas constantes, temporales, pospagables, inmediatas y enteras. Hay que calcular los valores finales, pero en el primer caso, el valor final de ha de capitalizar 6 años al 11% efectivo anual.

$$S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{4}|0{,}105} = \frac{(1+0{,}105)^4 - 1}{0{,}105} = 4{,}675258$$

$$S_{\overline{4}|0{,}105} = 15.000 \cdot 4{,}675258 = 70.128{,}87€$$

Si ahora capitalizamos esa cantidad 6 años al 11% anual:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_{10} = 70.128{,}87 \cdot (1+0{,}11)^6 = 131.170{,}06€$$

Para calcular el valor final de la segunda renta procederemos de igual manera:

$$s_{\overline{6}|0,11} = \frac{(1+0,11)^{6} - 1}{0,11} = 7,912860$$

$$S_{\overline{6}|0,11} = 15.000 \cdot 7,912860 = 118.692,90€$$

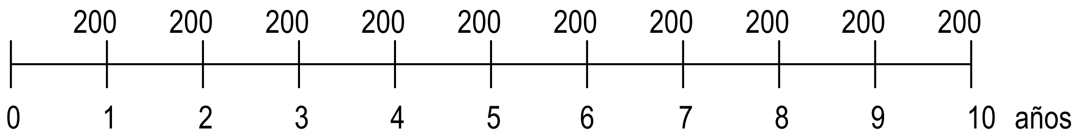
Sumando las dos cantidades obtenemos el saldo final:

$$\text{Saldo} = 131.170,06 + 118.692,90 = 249.862,96€$$

Saldo=249.862,94€

9. Un señor ingresa en un banco al final de cada año 200€. Se sabe que esa entidad abona intereses anualmente del 3% efectivo anual. Si el período de imposición dura 10 años, ¿qué cantidad puede retirar este individuo durante los 16 años siguientes?

Se trata de una operación combinada. En virtud de la primera operación debemos calcular el valor final de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera, así:



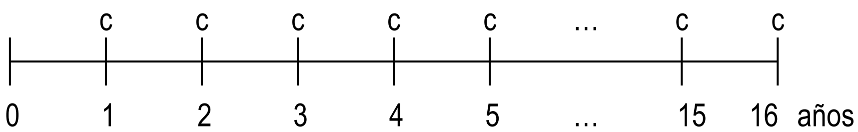
$$S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

$$s_{\overline{10}|0,03} = \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{0,03} = 11,463879$$

$$S_{\overline{4}|0,105} = 200 \cdot 11,463879 = 2.292,78€$$

La segunda operación consiste en calcular la cuantía de los términos de la segunda renta partiendo de que su valor inicial (2.292,78€) ha de ser equivalente al valor final de las imposiciones, es decir, al valor final de la renta anterior (2.292,78€):



Esta segunda renta es una renta de las mismas características que la anterior.

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{16|}0,03} = \frac{1-(1+0,03)^{-16}}{0,03} = 12,561102$$

$$2.292,78 = c \cdot 12,561102 \Rightarrow c = \frac{2.292,78}{12,561102} = 182,53€$$

c=182,53€

10. ¿Qué cantidad depositaremos en un banco que opera al 7% de interés compuesto anual, para recibir al final de cada año y durante 10 años una renta de 1.000€?

Se trata de una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera:

	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	años

Hay que calcular el valor inicial:

$$A_{\overline{n|}i} = c \cdot a_{\overline{n|}i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{10|}0,07} = \frac{1-(1+0,07)^{-10}}{0,07} = 7,023582$$

$$A_{\overline{10|}0,07} = 1.000 \cdot 7,023582 = 7.023,58€$$

Imposición=7.023,58€

11. Calcular la anualidad necesaria para amortizar en 10 años una deuda que en el momento actual asciende a 10.000€, si la operación ha sido estipulada al 6% de interés compuesto anual, y los pagos se realizan al final de cada año.

Se trata de una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera:

10.000	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	años

Hay que calcular la cuantía de los términos, conociendo el valor actual:

$$A_{\overline{n|}i} = c \cdot a_{\overline{n|}i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{10}|0,07} = \frac{1-(1+0,06)^{-10}}{0,06} = 7,360087$$

$$10.000 = c \cdot 7,360087 \Rightarrow c = \frac{10.000}{7,360087} = 1.358,68€$$

c=1.358,68€

12. Para adquirir un piso el señor A ofrece 50.000€ al contado; el señor B 10.000€ en el acto de la firma del contrato y 4.000€ anuales durante 20 años; y el señor C 4.000€ anuales durante 30 años verificando el primer pago al concertar el contrato. Supuesto un tipo de interés del 6% ¿qué oferta es la más conveniente para el vendedor?

Estudiemos cada una de las ofertas por separado:

Oferta del Sr. A:

$$A_{\overline{n}|i} = 50.000€$$

Oferta del Sr. B:

10.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	…	4.000	4.000
0	1	2	3	4	5	…	19	20 años

$$A_{\overline{n}|i} = 10.000 + A_{\overline{20}|0,06}$$

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{20}|0,06} = \frac{1-(1+0,06)^{-20}}{0,06} = 11,469921$$

$$A_{\overline{20}|0,06} = 4.000 \cdot 11,469921 = 45.879,68€$$

$$A_{\overline{n}|i} = 10.000 + 45.879,68 = 55.879,68€$$

Oferta del Sr. C:

4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	…	4.000	
0	1	2	3	4	5	…	29	30 años

Esta renta se diferencia de la anterior en que es prepagable:

$$\ddot{A}_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

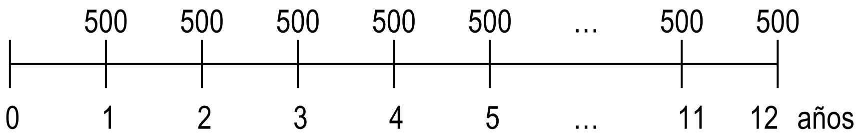
$$a_{\overline{30}|0,06} = \frac{1-(1+0,06)^{-30}}{0,06} = 13,764831$$

$$\ddot{A}_{\overline{30}|0,06} = 4.000 \cdot (1+0,06) \cdot 13,764831 = 58.362,88€$$

La oferta que más le interesa es la del Señor C

13. Mediante la entrega de 500€ al término de cada año y durante 12, queremos constituir un capital que nos permita percibir durante los 20 años siguientes una renta. Calcular el término de la misma, si la operación se realiza al tanto de evaluación del 7%.

Se trata de una operación combinada. En virtud de la primera operación debemos calcular el valor final de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera, así:



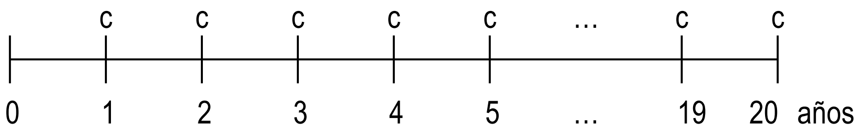
$$S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$s_{\overline{12}|0,07} = \frac{(1+0,07)^{12}-1}{0,07} = 17,888451$$

$$S_{\overline{12}|0,07} = 500 \cdot 17,888451 = 8.944,23€$$

La segunda operación consiste en calcular la cuantía de los términos de la segunda renta partiendo de que su valor inicial (8.944,23€) ha de ser equivalente al valor final de las imposiciones, es decir, al valor final de la renta anterior (8.944,23€):



Esta segunda renta es una renta de las mismas características que la anterior.

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{20}|0,07} = \frac{1-(1+0,07)^{-20}}{0,07} = 10,594014$$

$$8.944,23 = c \cdot 10,594014 \Rightarrow c = \frac{8.944,23}{10,594014} = 844,27€$$

c= 844,27€

14. El valor actual de una renta de 1.000€ anuales pospagable es de 9.818,15€. Si hubiese sido prepagable, el valor actual sería de 10.603,60€. Calcular el tanto y el tiempo.

La relación entre el valor actual de una renta pospagable y un prepagable es que la segunda es igual a la primera multiplicada por (1+i), por tanto:

$$\ddot{A}_{\overline{n}|i} = A_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

$$10.603,60 = 9.818,15 \cdot (1+i) \Rightarrow (1+i) = \frac{10.603,60}{9.818,15} = 1,08 \Rightarrow i = 1,08 - 1$$

$$i = 0,08 = 8\%$$

Para calcular el tiempo tenemos que utilizar la cuantía del término. Si utilizamos los valores de la renta pospagable, podemos proceder de la siguiente forma:

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$9.818,15 = 1.000 \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow a_{\overline{n}|i} = \frac{9.818,15}{1.000} = 9,81815$$

$$a_{\overline{n}|0,08} = \frac{1-(1+0,08)^{-n}}{0,08} = 9,81815 \Rightarrow 1-(1,08)^{-n} = 9,81815 \cdot 0,08 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-(1,08)^{-n} = 0,785452 \Rightarrow 1-0,785452 = (1,08)^{-n} \Rightarrow \log(0,214558) = \log\left((1,08)^{-n}\right)$$

$$\Rightarrow \log(0,214558) = -n \cdot \log(1,08) \Rightarrow n = -\frac{\log(0,214558)}{\log(1,08)} = -\frac{-0,668455287}{0,033423755} = 20$$

$$n = 20 \text{ años}$$

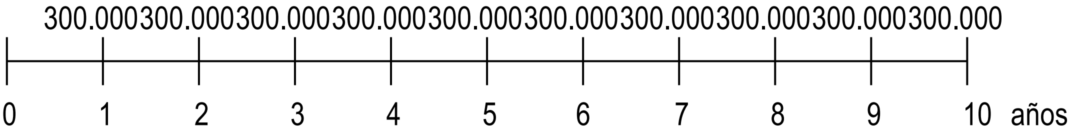
i=8%; n=20 años

15. A un grupo financiero le ofrecen la explotación de una mina y, tras el estudio de la misma, se obtienen los siguientes datos:

- **Tiempo de explotación hasta el agotamiento: 10 años.**
- **Beneficios netos anuales: 300.000€**
- **Tipo de interés para el dinero invertido en la financiación: 14%**

Determinar el precio máximo que puede ofrecerse para su adquisición.

Para determinar el precio máximo habrá que calcular el valor actual de esa inversión, con los datos propuestos. Se trata de una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera.



$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{10}|0,14} = \frac{1-(1+0,14)^{-10}}{0,14} = 5,216116$$

$$A_{\overline{10}|0,14} = 300.000 \cdot 5,216116 = 1.564,834,8€$$

P=1.564.834,68€

16. Al señor Navarro, que pretende adquirir un apartamento en la costa, se le ofrecen por parte de la empresa vendedora las siguientes opciones:

a. Pago al contado de 48.080,97€

b. Abono de 90.151,82€ dentro de 6 años.

c. Ochenta pagos anuales de 1.202,02€, a partir de la firma del contrato, sabiendo que el interés del mercado es del 16% anual.

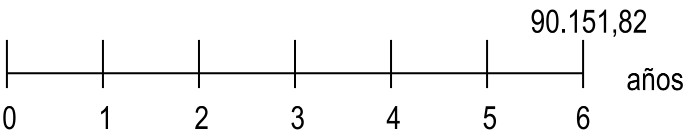
Determinar cuál de las tres opciones le interesa al señor Navarro desde el punto de vista financiero.

Estudiemos cada una de las ofertas por separado:

<u>Oferta A</u>:

$$A_{\overline{n}|i} = 48.080,97€$$

<u>Oferta B</u>:



$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{90.151{,}82}{(1+0{,}16)^6} = 37.002{,}12€$$

$$C_0 = 37.002{,}12€$$

<u>Oferta C</u>:

1.202,02	1.202,02	1.202,02	…		
0	1	2	…	79	80 años

Se trata de una renta constante, temporal, inmediata, prepagable y entera:

$$\ddot{A}_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{80}|0,16} = \frac{1-(1+0{,}16)^{-80}}{0{,}16} = 6{,}249956$$

$$\ddot{A}_{\overline{8}|0,16} = 1.202{,}02 \cdot (1+0{,}16) \cdot 6{,}249956 = 8.714{,}58€$$

La oferta que más le interesa es la C

17. ¿Qué cantidad depositaremos en una institución financiera que opera al 9% de interés anual:

a. para recibir al final de cada año 240€ durante los próximos 5 años?

Se trata de una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera.

	240	240	240	240	240	
0	1	2	3	4	5	años

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

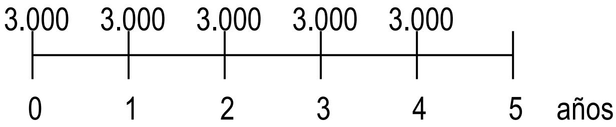
$$a_{\overline{5}|0,09} = \frac{1-(1+0{,}09)^{-5}}{0{,}09} = 3{,}889651$$

$$A_{\overline{5}|0,09} = 240 \cdot 3{,}889651 = 933{,}52€$$

Imposición=933,52€

b. para recibir al principio de cada año 3.000€ durante los próximos 5 años?

Se trata de una renta constante, temporal, prepagable, inmediata y entera.



$$\ddot{A}_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

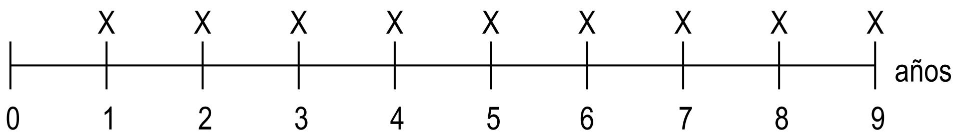
$$a_{\overline{5}|0{,}09} = \frac{1-(1+0{,}09)^{-5}}{0{,}09} = 3{,}889651$$

$$\ddot{A}_{\overline{5}|0{,}09} = 3.000 \cdot (1+0{,}09) \cdot 3{,}889651 = 12.719{,}16€$$

Imposición=12.719,16€

18. Un inversor que durante 9 años y al final de cada uno venía depositando X€ en una cuenta bancaria decide con el capital constituido realizar una inversión que le produzca un beneficio anual a perpetuidad de la misma cuantía X. Se pide determinar el tanto de la inversión suponiendo que es el mismo en ambas operaciones financieras.

Se trata de una operación combinada. En virtud de la primera operación debemos calcular el valor final de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera, así:



$$S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$s_{\overline{9}|i} = \frac{(1+i)^{9}-1}{i}$$

$$S_{\overline{9}|i} = X \cdot s_{\overline{9}|i}$$

La segunda operación consiste en calcular la cuantía de los términos de la segunda renta partiendo de que su valor inicial ($X \cdot s_{\overline{9}|i}$) ha de ser equivalente al valor final de las imposiciones, es decir, al valor final de la renta anterior ($X \cdot s_{\overline{9}|i}$):

	X	X	X	X	X	...
0	1	2	3	4	5	...

Esta segunda renta es una renta constante, inmediata, perpetua, pospagable y entera, así

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}$$

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{X}{i}$$

Como los dos valores anteriores tienen que ser iguales, podemos despejar el valor del tanto de las rentas:

$$X \cdot s_{\overline{9}|i} = \frac{X}{i} \Rightarrow X \cdot s_{\overline{9}|i} \cdot i = X \Rightarrow s_{\overline{9}|i} \cdot i = \frac{X}{X} \Rightarrow s_{\overline{9}|i} \cdot i = 1 \Rightarrow s_{\overline{9}|i} = \frac{1}{i}$$

Sustituyendo:

$$s_{\overline{9}|i} = \frac{(1+i)^9 - 1}{i} = \frac{1}{i} \Rightarrow (1+i)^9 - 1 = 1 \Rightarrow (1+i)^9 = 1+1 \Rightarrow (1+i)^9 = 2 \Rightarrow \sqrt[9]{(1+i)^9} = \sqrt[9]{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+i = 1{,}0800660 \Rightarrow i = 1{,}0800660 - 1 = 0{,}0800660$$

$$i = 0{,}0800660 = 8\%$$

i=8%

19. Una persona recibe una participación en una compañía de inversiones, recibiendo durante 10 años 1.000€ anuales como participación en los beneficios de la misma y un año después 15.000€. Se pide calcular el valor de la participación, siendo el tanto de valoración del 9%

Hay que calcular el valor actual de una renta constante, pospagable, temporal, inmediata y entera, y después sumarle los 15.000€ del año 11 actualizados.

	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	...	1.000	15.000	
0	1	2	3	4	5	...	10	11	años

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{10|}0,09} = \frac{1-(1+0,09)^{-10}}{0,09} = 6,417658$$

$$A_{\overline{10|}0,09} = 1.000 \cdot 6,417658 = 6.417,66€$$

Actualizamos ahora los 15.000€ del año 11:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{15.000}{(1+0,09)^{11}} = 5.812,99$$

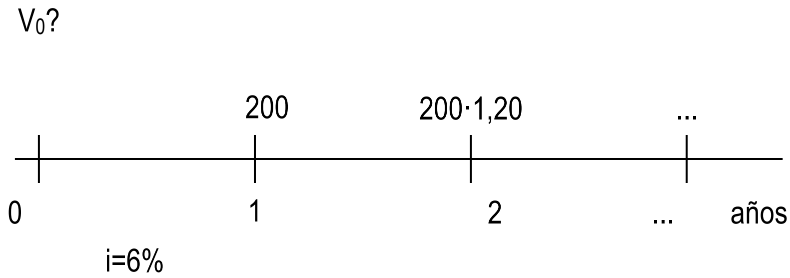
$$\text{Participación} = 6.417,66 + 5.812,99 = 12.230,65€$$

Valor Participación=12.230,65€

PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 7: RENTAS VARIABLES

1. **Dada una renta variable en progresión geométrica pospagable de primer término 200€ que se incrementa anualmente en el 20%, si la duración de la misma es perpetua y el interés del 6% efectivo anual, se pide determinar el valor actual.**



Se trata de una renta variable en progresión geométrica de razón q=1,20, pospagable, perpetua, inmediata y entera.

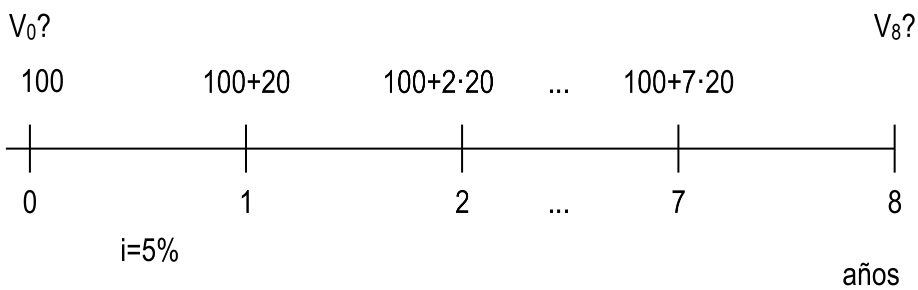
Como la razón de la progresión q=1,20 y el tanto de valoración i=0,06, no se cumple $q < 1+i$, por lo que no tiene sentido financiero calcular el valor actual de esta renta. De hecho, si aplicamos la fórmula nos da un número negativo.

$$A_{(c;q)\,\overline{\infty|}i} = \frac{c}{1+i-q}$$

$$A_{(200;1,20)\,\overline{\infty|}0,06} = \frac{200}{1+0,06-1,20} = -1.428,57€$$

V_0: No tiene sentido financiero

2. **Calcular los valores actual y final de una renta variable en progresión aritmética, de primer término 100€, que va incrementándose cada año un 20% sobre el valor del primer término, siendo ésta prepagable, de 8 años de duración y tipo evaluatorio del 5%.**



Se trata de una renta variable en progresión aritmética de razón d=20% de 100, es decir, d=20, prepagable, temporal, inmediata y entera:

Valor actual:

$$\ddot{A}_{(c;d)\ \overline{n}|i} = (1+i) \cdot A_{(c;d)\ \overline{n}|i}$$

$$A_{(c;d)\ \overline{n}|i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{nd}{i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A_{(100;20)\ \overline{8}|0,05} = \left(100 + \frac{20}{0,05} + 8 \cdot 20\right) \cdot a_{\overline{8}|0,05} - \frac{8 \cdot 20}{0,05}$$

$$a_{\overline{8}|0,05} = \frac{1-(1+0,05)^{-8}}{0,05} = 6,463213$$

$$A_{(100;20)\ \overline{8}|0,05} = \left(100 + \frac{20}{0,05} + 8 \cdot 20\right) \cdot 6,463213 - \frac{8 \cdot 20}{0,05} = 1.065,72€$$

$$\ddot{A}_{(100;20)\ \overline{8}|0,05} = (1+0,05) \cdot 1.065,72 = 1.119,01€$$

V_0=1.119,01€

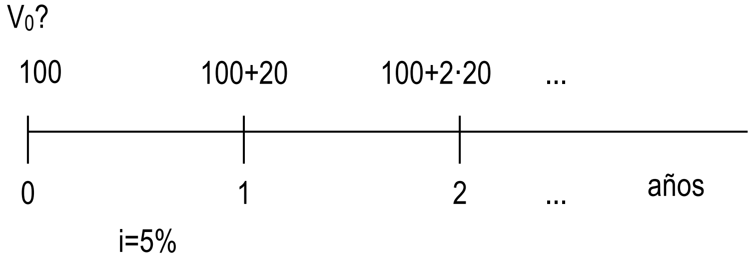
Valor final:

$$\ddot{S}_{(c;d)\ \overline{n}|i} = (1+i)^n \cdot \ddot{A}_{(c;d)\ \overline{n}|i}$$

$$\ddot{S}_{(250;10)\ \overline{8}|0,05} = (1+0,05)^{15} \cdot \ddot{A}_{(250;10)\ \overline{8}|0,05} = (1+0,05)^{8} \cdot 1.119,01 = 2.326,34€$$

V_8=1.653,29€

3. Calcular el valor actual de una renta variable en progresión aritmética, perpetua, de primer término 100€, que va incrementándose cada año un 20% sobre el valor del primer término, siendo ésta prepagable y su tipo evaluatorio del 5%.



Se trata de una renta variable en progresión aritmética de razón d=20% de 100, es decir, d=20, prepagable, perpetua, inmediata y entera, cuyo valor actual se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$\ddot{A}_{(c;d)\ \overline{\infty|}\,i} = (1+i)\cdot A_{(c;d)\ \overline{\infty|}\,i}$$

$$A_{(c;d)\ \overline{\infty|}\,i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1}{i}$$

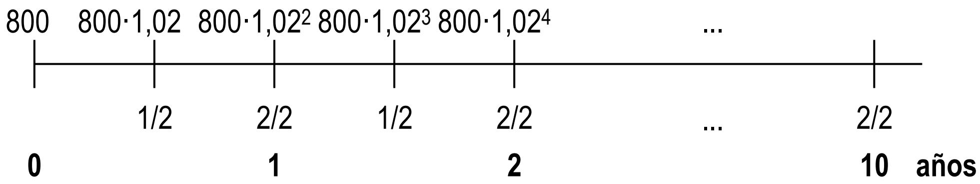
$$\ddot{A}_{(100;20)\ \overline{\infty|}\,0,05} = (1+0,05)\cdot A_{(100;20)\ \overline{\infty|}\,0,05}$$

$$A_{(100;20)\ \overline{\infty|}\,0,05} = \left(100+\frac{20}{0,05}\right)\cdot\frac{1}{0,05} = 10.000$$

$$\ddot{A}_{(100;20)\ \overline{\infty|}\,0,05} = (1+0,05)\cdot 10.000 = 10.500€$$

V_0=10.500€

4. Determinar el coste actualizado por la compra de unos equipos sabiendo que se pagarán durante 10 años semestralidades prepagables de 800 euros la primera y, el resto, crecientes un 2% acumulativo semestral. El tipo de valoración es el 5% constante anual.



Se trata de una renta variable en progresión geométrica de razón q=1,02, prepagable, temporal, inmediata y fraccionada.

En lugar de calcular el término c' anual equivalente, vamos a calcular el tanto semestral i_2 a partir del tanto anual i, utilizando la fórmula:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_2 = (1+0,05)^{1/2} - 1 = 0,024695$$

Ahora ya hemos convertido la renta en entera, por lo que utilizaremos su correspondiente fórmula teniendo en cuenta que hay que considerar n•k períodos, es decir 10·2=20 períodos.

Como la razón de la progresión q=1,02 y el tanto de valoración i=0,024695, no se cumple $q = 1 + i$, por lo que se para calcular el valor actual se tiene que aplicar la siguiente fórmula:

$$\ddot{A}_{(c;\,q)\ \overline{n}|i} = (1+i)\cdot A_{(c;\,q)\ \overline{n}|i}$$

$$A_{(c;\,q)\ \overline{n}|i} = c\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$A_{(800;1,02)\ \overline{20}|0,024695} = 800\cdot\frac{1-1{,}02^{20}\cdot(1+0{,}024695)^{-20}}{1+0{,}024695-1{,}02} = 800\cdot\frac{0{,}087756}{0{,}004695} = 14.953{,}10€$$

$$\ddot{A}_{(800;1,02)\ \overline{20}|0,024695} = (1+0{,}024695)\cdot 14.953{,}10 = 15.322{,}37€$$

Coste actualizado=15.322,37€

5. Determinar el valor actualizado para un período de 10 años de la nómina de un trabajador que asciende a 2.000 euros el primer año, manteniéndose constante durante los 3 primeros años y crecerá un 9% acumulativo los restantes. El tipo de valoración es el 5% constante anual.

	2.000	2.000	2.000	2.000·1,09	2.000·1,09²	...	2.000·1,09⁷	
0	1	2	3	4	5	...	10	años

Se trata en realidad de dos rentas diferentes: la primera constante de tres términos, pospagable, inmeditata y entera; la segunda es una renta variable en progresión geométrica de 7 términos, pospagable, diferida tres años y entera. Hay que calcular el valor actual de las dos rentas.

Primera renta:

$$A_{\overline{n}|i} = c\cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{3}|0,05} = \frac{1-(1+0{,}05)^{-3}}{0{,}05} = 2{,}723234$$

$$A_{\overline{3}|0,05} = 2.000\cdot 2{,}723234 = 5.446{,}47€$$

Segunda renta:

$$ {}^{d}/A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i} = \frac{A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i}}{(1+i)^{d}} $$

Como la razón de la progresión q=1,09 y el tanto de valoración i=0,05, <u>no se cumple</u> $q = 1+i$, por lo que se para calcular el valor actual se tiene que aplicar la siguiente fórmula, teniendo en cuenta que el primer término ahora es 2.000·1,09=2.180:

$$ A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i} = c \cdot \frac{1 - q^{n} \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} $$

$$ A_{(2.000;1,09)\,\overline{7|}\,0,05} = 2.180 \cdot \frac{1 - 1{,}09^{7} \cdot (1+0{,}05)^{-7}}{1+0{,}05-1{,}09} = 2.180 \cdot \frac{-0{,}299153}{-0{,}04} = 16.303{,}84€ $$

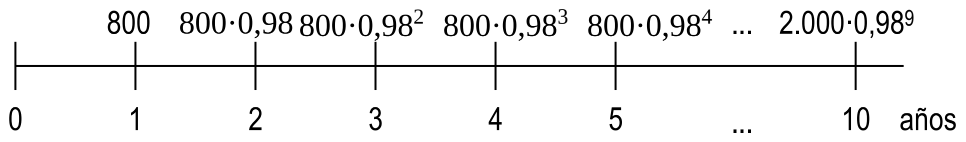
$$ {}^{d}/A_{(2.000;1,09)\,\overline{7|}\,0,05} = \frac{A_{(2.000;1,09)\,\overline{7|}\,0,05}}{(1+0{,}05)^{3}} = \frac{16.303{,}84}{(1+0{,}05)^{3}} = 14.083{,}87€ $$

Ahora ya podemos sumar los dos valores actuales:

$$ V_0 = A_{\overline{3|}\,0,05} + {}^{d}/A_{(2.000;1,09)\,\overline{7|}\,0,05} = 14.083{,}87 + 5.446{,}47 = 19.530{,}34€ $$

V_0=19.530,34€

6. **Determinar el coste actualizado para un período de 10 años de los gastos de mantenimiento realizados por una empresa que serán el primer año de 800 euros, disminuyendo un 2% acumulativo durantes los restantes años. El tipo de valoración es el 5% constante anual.**



Que los gastos disminuyan acumulativamente un 2% es lo mismo que multiplicar cada término por (1-0,02), es decir, que la razón de la progresión es q=0,98. Se trata de una renta variable en progresión geométrica pospagable, temporal, inmediata y entera.

Como la razón de la progresión q=0,98 y el tanto de valoración i=0,05, <u>no se cumple</u> $q = 1+i$, por lo que se para calcular el valor actual se tiene que aplicar la siguiente fórmula:

$$ A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i} = c \cdot \frac{1 - q^{n} \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} $$

$$A_{(800;0,98)\ \overline{10|}0,05} = 800 \cdot \frac{1-0,98^{10} \cdot (1+0,05)^{-10}}{1+0,05-0,98} = 5.695,86€$$

Coste actualizado=5.695,86€

7. Para una renta de cuantía semestral variable, con primer término de 1.000 euros, que se incrementan los sucesivos en un 20% semestral sobre el primero de ellos, calcular el valor actual y final siendo el tipo de interés el 5% efectivo semestral.

a. Suponiendo la renta inmediata, pospagable y de 10 términos.

	1.000	1.000+200	1.000+2·200	1.000+3·200	...	1.000+9·200
0	1	2	3	4	...	10 semestres

Se trata de una renta variable en progresión aritmética de razón d=20% de 1.000=200, pospagable, temporal, inmediata y entera, ya que los términos están expresados en semestres y el tipo de interés también.

Valor actual:

$$A_{(c;d)\ \overline{n|}i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right) \cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{nd}{i}$$

$$A_{(1.000;200)\ \overline{10|}0,05} = \left(1.000 + \frac{200}{0,05} + 10 \cdot 200\right) \cdot a_{\overline{10|}0,05} - \frac{10 \cdot 200}{0,05}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{10|}0,05} = \frac{1-(1+0,05)^{-10}}{0,05} = 7,721735$$

$$A_{(1.000;200)\ \overline{10|}0,05} = \left(1.000 + \frac{200}{0,05} + 10 \cdot 200\right) \cdot 7,721735 - \frac{10 \cdot 200}{0,05} = 14.052,15€$$

V_0=14.052,15€

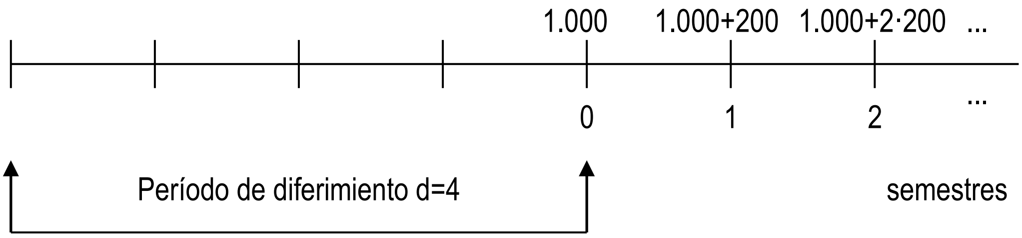
Valor final:

$$S_{(c;d)\ \overline{n|}i} = (1+i)^{n} \cdot A_{(c;d)\ \overline{n|}i}$$

$$S_{(1.000;200)\ \overline{10|}0,05} = (1+0,05)^{10} \cdot A_{(1.000;200)\ \overline{10|}0,05} = (1+0,05)^{10} \cdot 14.052,15 = 22.889,47$$

V_{10}=22.889,47€

b. Suponiéndola diferida 4 semestres, prepagable y perpetua.



Valor actual:

$$ {}^{d/}\ddot{A}_{(c;d)\,\overline{\infty}|i} = (1+i)\cdot {}^{d/}A_{(c;d)\,\overline{\infty}|i} $$

$$ {}^{d/}A_{(c;d)\,\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-d}\cdot A_{(c;d)\,\overline{\infty}|i} $$

$$ A_{(c;d)\,\overline{\infty}|i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1}{i} $$

$$ A_{(1.000;200)\,\overline{\infty}|0,05} = \left(1.000+\frac{200}{0,05}\right)\cdot\frac{1}{0,05} = 100.000€ $$

$$ {}^{d/}A_{(1.000;200)\,\overline{\infty}|0,05} = (1+0,05)^{-4}\cdot A_{(1.000;200)\,\overline{\infty}|0,05} = (1+0,05)^{-4}\cdot 100.000 = 82.270,24€ $$

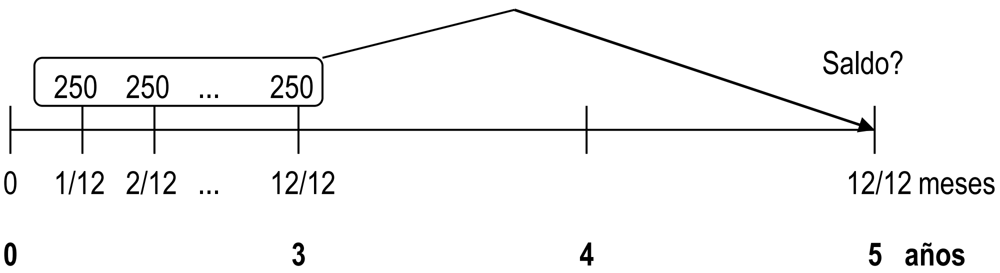
$$ {}^{d/}\ddot{A}_{(1.000;200)\,\overline{\infty}|0,05} = (1+0,05)\cdot {}^{d/}A_{(1.000;200)\,\overline{\infty}|0,05} = (1+0,05)\cdot 82.270,24 = 86.383,75€ $$

V_0=86.383,75€

Valor final: Las rentas perpetuas no tienen valor final.

No tiene

8. Calcular el capital constituido en 5 años en una cuenta que se retribuye al 10% de interés efectivo (TAE) si se imponen 250 euros mensuales durante los próximos 3 años, al final de cada mes.



El capital constituído se calcula con el valor final de cualquier renta. Se trata de una renta constante, pospagable, temporal, anticipada y fraccionada, por lo que podemos resolverla por dos métodos:

Calculamos el interés «i_{12}» de frecuencia semestral a partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, anticipada dos meses, temporal, pospagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización), teniendo en cuenta que ahora trabajamos con «n•k» períodos, es decir con 12·3=36 períodos. Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1+0{,}10)^{1/12} - 1 = 0{,}007974$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$$h/S_{\overline{n}|i} = c \cdot h/s_{\overline{n}|i}$$

$$h/s_{\overline{n}|i} = (1+i)^h \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{36}|i} = \frac{(1+0{,}007974)^{36} - 1}{0{,}007974} = 41{,}509070$$

$$2/s_{\overline{36}|0{,}007974} = (1+0{,}007974)^{24} \cdot s_{\overline{36}|0{,}007974} = (1+0{,}007974)^{24} \cdot 41{,}509070 = 50{,}225807€$$

$$2/S_{\overline{36}|0{,}007974} = 250 \cdot 2/s_{\overline{36}|0{,}007974} = 250 \cdot 50{,}225807 = 12.556{,}45€$$

Saldo=12.556,45€

9. **Qué capital debemos imponer en un Banco que abona intereses del 4,5% para que éste sea suficiente para cubrir los gastos de cierto negocio durante 10 años, sabiendo que el año anterior ascendieron a 1.000€ y se prevé un aumento anual del 3%. Se supone que los gastos se abonan al final de cada año.**

	1.030	1.030·1,03	1.030·$1,03^2$	1.030·$1,03^3$	1.030·$1,03^4$	...	1.030·$1,03^9$	
0	1	2	3	4	5	...	10	años

Debemos hacer notar que los gastos al final del primer año no son 1.000, sino que son 1000·1,03=1.030€, ya que los 1.000€ corresponden al año anterior. Que los gastos aumenten un 3% es lo mismo que multiplicar cada término por (1+0,03), es decir, que la razón de la progresión es q=1,03. Se trata de una renta variable en progresión geométrica pospagable, temporal, inmediata y entera.

Como la razón de la progresión q=1,03 y el tanto de valoración i=0,045, no se cumple $q = 1 + i$, por lo que se para calcular el valor actual se tiene que aplicar la siguiente fórmula:

$$A_{(c;\,q)\,\overline{n|}i} = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1 + i - q}$$

$$A_{(1.000;1,03)\,\overline{10|}0,045} = 1.030 \cdot \frac{1 - 1{,}03^{10} \cdot (1 + 0{,}045)^{-10}}{1 + 0{,}045 - 1{,}03} = 9.243{,}57€$$

Imposición=9.243,57€

10. Para formar un capital de 1.000.000€ se deposita durante 8 años, y al principio de cada uno de ellos una anualidad al 5% de interés compuesto, siendo cada año 307€ mayor que la del año anterior. Determinar el valor de la primera imposición.

V_8=1.000.000

c	c+307	c+2·307	...	c+7·307	
0	1	2	...	7	8 años

Se trata de una renta variable en progresión aritmética de razón d=307, prepagable, temporal, inmediata y entera, pero de la que conocemos el valor final pero no el primer término. Aplicaremos la fórmula correspondiente y despejaremos c:

$$\ddot{S}_{(c;\,d)\,\overline{n|}i} = (1+i)^n \cdot \ddot{A}_{(c;\,d)\,\overline{n|}i}$$

$$\ddot{A}_{(c;\,d)\,\overline{n|}i} = (1+i) \cdot A_{(c;\,d)\,\overline{n|}i}$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n|}i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right) \cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{nd}{i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{8}|0,05}=\frac{1-(1+0,05)^{-8}}{0,05}=6,463213$$

$$A_{(c;307)\ \overline{8}|0,05}=\left(c+\frac{307}{0,05}+8\cdot 307\right)\cdot a_{\overline{8}|0,05}-\frac{8\cdot 307}{0,05}=$$

$$=\left(c+\frac{307}{0,05}+8\cdot 307\right)\cdot 6,463213-\frac{8\cdot 307}{0,05}=(c+8.596)\cdot 6,463213-49.120=$$

$$=6,463213c+55.557,78-49.120=6,463213c+6.437,78$$

$$\ddot{A}_{(c;307)\ \overline{8}|0,05}=(1+0,05)\cdot A_{(c;307)\ \overline{8}|0,05}=(1+0,05)\cdot(6,463213c+6.437,78)=$$

$$=1,05\cdot(6,463213c+6.437,78)=6,786374c+6.759,67$$

$$\ddot{S}_{(c;307)\ \overline{8}|0,05}=(1+0,05)^{8}\cdot\ddot{A}_{(c;307)\ \overline{8}|0,05}=(1+0,05)^{8}\cdot(6,786374c+6.759,67)=$$

$$=1,477455\cdot(6,786374c+6.759,67)=10,026565c+9.987,11$$

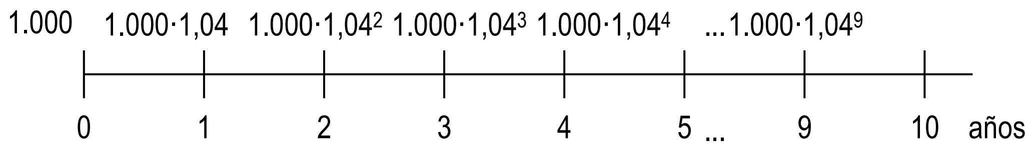
Como se sabe que el valor final es 1.000.000€, igualamos y despejamos c:

$$1.000.000=10,026565c+9.987,11\Rightarrow 1.000.000-9.987,11=10,026565c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 990.012,89=10,026565c\Rightarrow c=\frac{990.012,89}{10,026565}=98.738,99€$$

c=98.738,99€

11. De un catálogo deducimos que la adquisición de una maquinaria puede hacerse abonando en el acto 1.000€ y al término de cada año una anualidad que supera a la anterior en 4%. Determinar el precio de la misma al contado, sabiendo que son en total diez los pagos a realizar, contando los primeros 1.000€ al contado, y que la operación se valora al 7% de interés compuesto anual.



Que los pagos aumenten un 4% es lo mismo que multiplicar cada término por (1+0,04), es decir, que la razón de la progresión es q=1,04. Se trata de una renta variable en progresión geométrica, prepagable, inmediata, temporal y entera.

Como la razón de la progresión q=1,04 y el tanto de valoración i=0,07, <u>no se cumple</u> $q=1+i$, por lo que se para calcular el valor actual se tiene que aplicar la siguiente fórmula:

$$\ddot{A}_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i} = (1+i)\cdot A_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i}$$

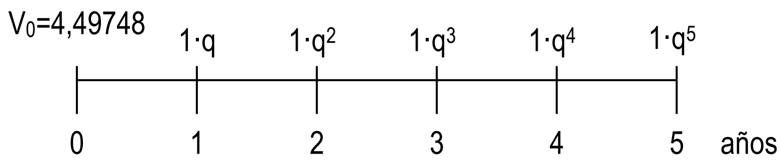
$$A_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i} = c\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

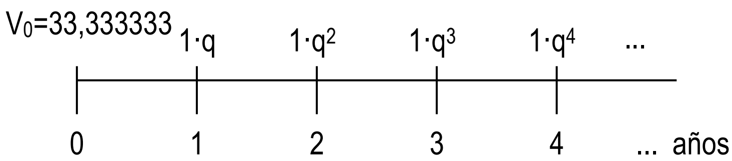
$$A_{(1.000;1{,}04)\ \overline{10}|\,0{,}07} = 1.000\cdot\frac{1-1{,}04^{10}\cdot(1+0{,}07)^{-10}}{1+0{,}07-1{,}04} = 8.250{,}63€$$

$$\ddot{A}_{(1.000;1{,}04)\ \overline{10}|\,0{,}07} = (1+0{,}07)\cdot A_{(1.000;1{,}04)\ \overline{10}|\,0{,}07} = (1+0{,}07)\cdot 8.250{,}63 = 8.828{,}17€$$

Precio=8.828,17€

12. El valor actual de una renta unitaria pospagable de cinco años de duración, cuyos términos varían en progresión geométrica es 4,49748. Si la renta fuera perpetua, en idénticas condiciones, su valor sería 33,333333. Calcular el tanto de interés y la razón de la progresión. Calcular el tanto de interés y la razón de la progresión sabiendo que la razón de la progresión es menor que 1+i.





Vamos a analizar los dos casos:

<u>Renta variable en progresión geométrica, pospagable, temporal, inmediata y entera</u>:

$$A_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i} = c\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$A_{(1;\,q)\ \overline{5}|\,i} = 1\cdot\frac{1-q^{5}\cdot(1+i)^{-5}}{1+i-q} = 4{,}49748$$

<u>Renta variable en progresión geométrica, pospagable, perpetua, inmediata y entera</u>:

$$A_{(c;\,q)\ \overline{\infty}|\,i} = \frac{c}{1+i-q}$$

$$A_{(1;\,q)\,\overline{\infty}|i}=\frac{1}{1+i-q}=33{,}33333\Rightarrow 1=33{,}33333\cdot(1+i-q)\Rightarrow(1+i-q)=\frac{1}{33{,}33333}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(1+i-q)=0{,}03$$

Ahora ya podemos sustituir en la primera expresión el denominador:

$$A_{(1;\,q)\,\overline{5}|i}=1\cdot\frac{1-q^5\cdot(1+i)^{-5}}{1+i-q}=4{,}49748\Rightarrow\frac{1-q^5\cdot(1+i)^{-5}}{0{,}03}=4{,}49748\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-q^5\cdot(1+i)^{-5}=4{,}49748\cdot 0{,}03\Rightarrow 1-q^5\cdot(1+i)^{-5}=0{,}134924\Rightarrow 0{,}865076=\left(\frac{q}{1+i}\right)^5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt[5]{0{,}865076}=\frac{q}{1+i}\Rightarrow 0{,}971429=\frac{q}{1+i}$$

Si utilizamos además la primera expresión que conocemos:

$$1+i-q=0{,}03\Rightarrow 1+i=0{,}03+q$$

$$\frac{q}{1+i}=0{,}971429\Rightarrow\frac{q}{0{,}03+q}=0{,}971429\Rightarrow 0{,}971429\cdot(0{,}03+q)=q\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}029143+0{,}971429q=q\Rightarrow 0{,}029143=q-0{,}971429q\Rightarrow 0{,}029143=0{,}028571q\Rightarrow$$
$$\Rightarrow q=\frac{0{,}029143}{0{,}02857}=1{,}02$$

q=1,02

El tanto de interés será:

$$1+i=0{,}03+q\Rightarrow i=0{,}03+q-1=0{,}03+1{,}02-1=0{,}05=5\%$$

i=5%

13. Tras patentar un invento, el Sr. X cede la explotación de la patente en las siguientes condiciones:

a. Al finalizar el primer año, el concesionario le entregará 1.000€.

b. En cada uno de los siete años siguientes, la entrega será 200€ superior a la del año anterior.

c. En los cuatro años siguientes, la entrega permanecerá constante e igual a la del octavo año.

d. En los ocho años restantes, la entrega irá disminuyendo 100€ cada año.

Estableciendo el contrato, el concesionario propone al Sr. X la transformación del mismo en otro, según el cual durante todos los años le entregue al final de cada año una cantidad constante.

Determinar cuál será esta cantidad anual constante, si se computan intereses al 6%.

1.000	1.000+200	1.000+2·200 ...	1.000+7·200 ...	1.000+7·200	1.000+7·200-100 ...	1.000+7·200-7·100
0	1	2	3 ... 8	... 12	13	... 20 años

En la primera parte del problema se trata de varias rentas diferentes entre sí de las que hallaremos su valor actual para poder sumarlas posteriormente:

Renta 1: Se trata de una renta variable en progresión artimética de primer término c=1.000, de razón d=200, temporal de 8 términos, inmediata y entera, por lo que su valor actual será:

$$A_{(c;\,d)\;\overline{n|}\,i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right) \cdot a_{\overline{n|}\,i} - \frac{nd}{i}$$

$$A_{(1.000;200)\;\overline{8|}\,0{,}06} = \left(1.000 + \frac{200}{0{,}06} + 8 \cdot 200\right) \cdot a_{\overline{8|}\,0{,}06} - \frac{8 \cdot 200}{0{,}06}$$

$$a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{8|}\,0{,}06} = \frac{1-(1+0{,}06)^{-8}}{0{,}06} = 6{,}209794$$

$$A_{(1.000;200)\;\overline{8|}\,0{,}06} = \left(1.000 + \frac{200}{0{,}06} + 8 \cdot 200\right) \cdot 6{,}209794 - \frac{8 \cdot 200}{0{,}06} = 10.178{,}11€$$

Renta 2: Se trata de una renta constante de cuantía c=1.000+7·200=2.400€, temporal de 4 términos, diferida 8 años y entera, por lo que su valor actual será:

$$d/A_{\overline{n|}\,i} = c \cdot d/a_{\overline{n|}\,i}$$

$$d/a_{\overline{n|}\,i} = \frac{a_{\overline{n|}\,i}}{(1+i)^{d}}$$

$$a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{4|}\,0{,}06} = \frac{1-(1+0{,}06)^{-4}}{0{,}06} = 3{,}465106$$

$$ {}^{8}/a_{\overline{4}|0,06} = \frac{a_{\overline{4}|0,06}}{(1+0,06)^8} = \frac{3,465106}{(1+0,06)^8} = 2,174050 $$

$$ {}^{8}/A_{\overline{4}|0,06} = 2.400 \cdot {}^{8}/a_{\overline{4}|0,06} = 2.400 \cdot 2,174050 = 5.217,72€ $$

Renta 3: Se trata de una renta variable en progresión artimética de primer término c=1.000+7·200-100=2.300€, de razón negativa d=-100, temporal de 8 términos, diferida 12 años y entera, por lo que su valor actual será:

$$ {}^{d}/A_{(c;\,d)\ \overline{n}|i} = \frac{A_{(c;\,d)\ \overline{n}|i}}{(1+i)^d} $$

$$ A_{(c;\,d)\ \overline{n}|i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd \right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{nd}{i} $$

$$ a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

$$ a_{\overline{8}|0,06} = \frac{1-(1+0,06)^{-8}}{0,06} = 6,209794 $$

$$ A_{(2.300;-100)\ \overline{8}|0,06} = \left(2.300 + \frac{-100}{0,06} + 8 \cdot (-100) \right) \cdot a_{\overline{8}|0,06} - \frac{8 \cdot (-100)}{0,06} = $$

$$ = \left(2.300 + \frac{-100}{0,06} + 8 \cdot (-100) \right) \cdot 6,209794 - \frac{8 \cdot (-100)}{0,06} = 12.298,37 $$

$$ {}^{12}/A_{(2.300;-100)\ \overline{8}|0,06} = \frac{A_{(2.300;-100)\ \overline{8}|0,06}}{(1+0,06)^{12}} = \frac{12.298,37}{(1+0,06)^{12}} = 6.111,91€ $$

Si sumamos los tres valores actuales:

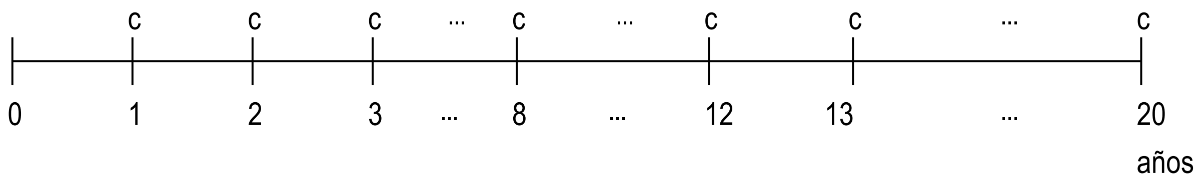
$$ A_{(1.000;200)\ \overline{8}|0,06} = 10.178,11€ $$

$$ {}^{8}/A_{\overline{4}|0,06} = 5.217,72€ $$

$$ {}^{12}/A_{(2.300;-100)\ \overline{8}|0,06} = 6.111,91€ $$

$$ V_0 = 10.178,11 + 5.217,72 + 6.111,91 = 21.507,74€ $$

En la segunda parte del problema se propone cambiar el primer contrato por una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera, de la que haciéndolo coincidir con el valor actual de la rentas anteriores hay que calcular la cuantía constante c:



$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

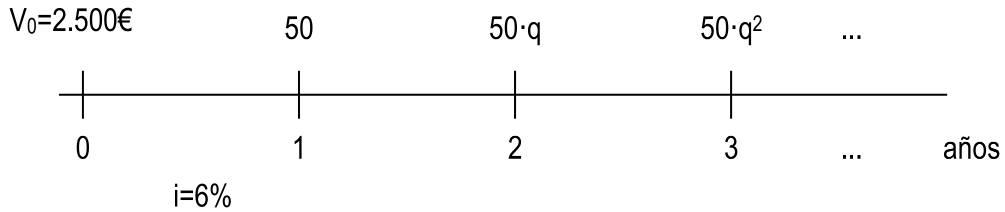
$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{20}|0,06} = \frac{1-(1+0,06)^{-20}}{0,06} = 11,469921$$

$$A_{\overline{20}|0,06} = c \cdot a_{\overline{8}|0,06} \Rightarrow 21.507,74 = c \cdot 11,469921 \Rightarrow c = \frac{21.507,74}{11,469921} = 1.875,14€$$

c=1.875,14€

14. Hallar la razón de las anualidades de una renta perpetua pospagable que varía en progresión geométrica, siendo su primer término 50€, el tipo de interés 6% y habiendo pagado por ellas 2.500€ y sabiendo que q<1+i.



Se trata de una renta variable en progresión geométrica de primer término c=50 y de razón desconocida q, pospagable, perpetua, inmediata y entera. Dado que conocemos su valor inicial, podemos despejar de la fórmula la razón q:

$$A_{(c;\,q)\,\overline{\infty}|i} = \frac{c}{1+i-q}$$

$$A_{(50;\,q)\,\overline{\infty}|0,06} = \frac{50}{1+0,06-q} \Rightarrow 2.500 = \frac{50}{1+0,06-q} \Rightarrow 2.500 \cdot (1,06-q) = 50 \Rightarrow$$

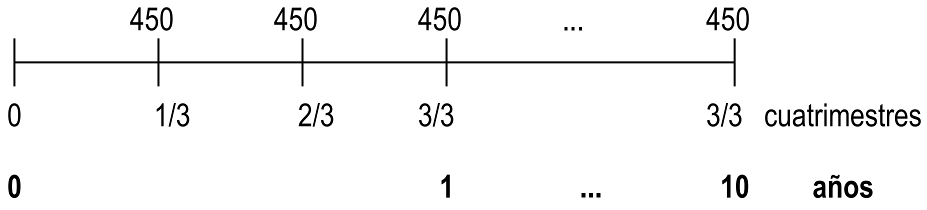
$$\Rightarrow 2.650 - 2.500q = 50 \Rightarrow 2.650 - 50 = 2.500q \Rightarrow 2.600 = 2.500q = q = \frac{2.600}{2.500} = 1,04$$

q=1,04

15. Cierta persona tiene dos opciones para pagar una deuda en 10 años: pagar al final de cada cuatrimestre 450€, o bien pagar el último día de cada mes

112€. Si el tanto de valoración de ambas es del 7%. ¿Cuál es la más ventajosa para el acreedor?

Opción A:



Para ambas rentas calcularemos su valor actual para poder compararlas. Esta primera es una renta constante, pospagable, temporal, inmediata y fraccionada, por lo que podemos resolverla por dos métodos:

Calculamos el interés «i_3» de frecuencia cuatrimestral partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización), teniendo en cuenta que ahora trabajamos con «n•k» períodos, es decir con 10·3=30 períodos. Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_3 = (1+0{,}07)^{1/3} - 1 = 0{,}022809$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$$A_{\overline{n|}i} = c \cdot a_{\overline{n|}i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

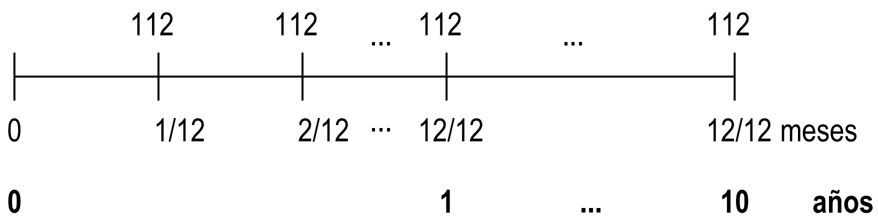
Así:

$$A_{\overline{30|}0{,}022809} = 450 \cdot a_{\overline{30|}0{,}022809}$$

$$a_{\overline{30|}0{,}022809} = \frac{1-(1+0{,}022809)^{-30}}{0{,}022809} = 21{,}555039$$

$$A_{\overline{30|}0{,}022809} = 450 \cdot 21{,}555039 = 9.699{,}77€$$

Opción B:



Esta segunda es una renta constante, pospagable, temporal, inmediata y fraccionada, por lo que podemos resolverla por dos métodos:

Calculamos el interés «i_{12}» de frecuencia mensual partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización), teniendo en cuenta que ahora trabajamos con «n•k» períodos, es decir con 10·12=120 períodos. Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1+0{,}07)^{1/12} - 1 = 0{,}005654$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Así:

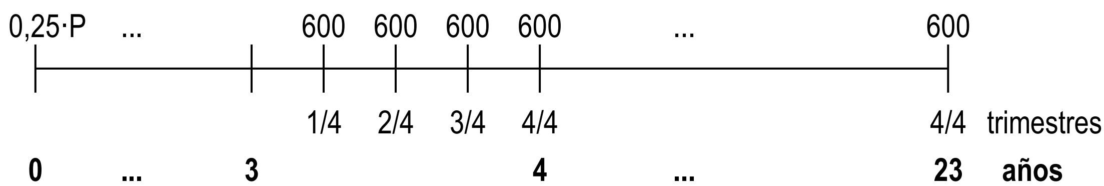
$$A_{\overline{120}|0,005654} = 112 \cdot a_{\overline{120}|0,005654}$$

$$a_{\overline{120}|0,005654} = \frac{1-(1+0{,}005654)^{-120}}{0{,}005654} = 86{,}954703$$

$$A_{\overline{120}|0,005654} = 112 \cdot 86{,}954703 = 9.738{,}93€$$

La segunda

16. Determinar el valor de una vivienda sabiendo que la cuarta parte de su valor se paga al contado y el resto mediante una renta trimestral de 600€ por vencido, comenzando los pagos a los tres años de la compra. La duración es de 20 años sin contar los tres primeros años y el tanto de valoración es del 12%.



Se trata de una renta constante, pospagable, temporal, diferida 3 años y fraccionada, por lo que podemos resolverla por dos métodos:

Calculamos el interés «i_4» de frecuencia trimestral partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, diferida 3 años o lo que es lo mismo 3·4=12 trimestres, temporal, pospagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización), teniendo en cuenta que ahora trabajamos con «n•k» períodos, es decir con 20·4=80 períodos. Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}12)^{1/4} - 1 = 0{,}028737$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$${}^{d}/A_{\overline{n}|i} = c \cdot {}^{d}/a_{\overline{n}|i}$$

$${}^{d}/a_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^{d}}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Así:

$$a_{\overline{80}|0{,}028737} = \frac{1-(1+0{,}028737)^{-80}}{0{,}028737} = 31{,}190815$$

$${}^{12}/a_{\overline{80}|0{,}028737} = \frac{a_{\overline{80}|0{,}028737}}{(1+0{,}028737)^{12}} = \frac{31{,}190815}{(1+0{,}028737)^{12}} = 22{,}201095$$

$${}^{12}/A_{\overline{80}|0{,}028737} = 600 \cdot {}^{12}/a_{\overline{80}|0{,}028737} = 600 \cdot 22{,}201095 = 13.320{,}66€$$

Para calcular el precio de la vivienda hay que tener en cuenta que al principio de entrega un cuarto del valor. Es decir:

$$P = 0{,}25P + {}^{12}/A_{\overline{80}|0{,}028737} = 0{,}25P + 13.320{,}66 \Rightarrow P - 0{,}25P = 13.320{,}66 \Rightarrow$$

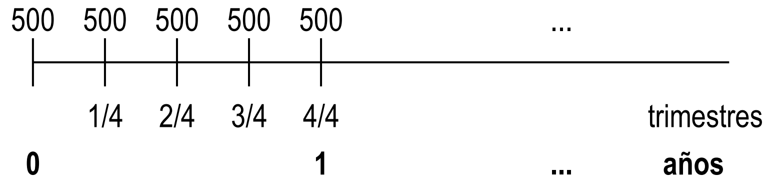
$$\Rightarrow 0{,}75P = 13.320{,}66 \Rightarrow P = \frac{13.320{,}66}{0{,}75} = 17.760{,}88€$$

P=17.760,88€

17. El arrendador de un terreno que percibe, trimestralmente y por anticipado, 500€ de alquiler del mismo, percibe cambiar dicho terreno por un chalet que le producirá una renta mensual pospagable durante 4 años y unos beneficios netos semestrales de 750€ a perpetuidad y pospagables. Si el tanto de mercado es el 6% anual, calcular el valor de la renta mensual de forma que ni tenga pérdidas ni beneficios con dicho cambio.

Hay que igualar el valor actual de dos rentas diferentes, teniendo en cuanta que lel chalet produce dos rentas diferentes:

Primera Renta: Se trata de una renta constante, perpetua, pospagable, inmediata y fraccionada por lo que podemos resolverla por dos métodos.



Calculamos el interés «i_4» de frecuencia trimestral a partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, inmediata, perpetua, prepagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización). Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}06)^{1/4} - 1 = 0{,}014674$$

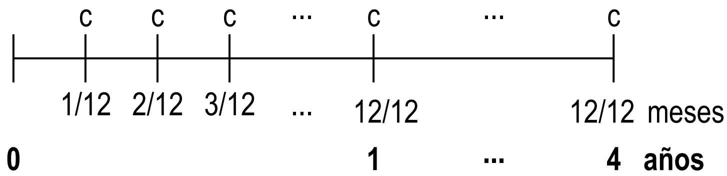
El valor actual de este tipo de renta es:

$$\ddot{A}_{\overline{\infty|}i} = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

Así:

$$\ddot{A}_{\overline{\infty|}i} = 500 \cdot \frac{1+0{,}014674}{0{,}014674} = 34.573{,}87€$$

Segunda Renta (Primera de ellas): Se trata de una renta constante, perpetua, pospagable, inmediata y fraccionada por lo que podemos resolverla por dos métodos.



Calculamos el interés «i_{12}» de frecuencia mensual a partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización), teniendo en cuenta que ahora trabajamos con «n•k» períodos, es decir con 4·12=48 períodos. Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1+0{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}004868$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

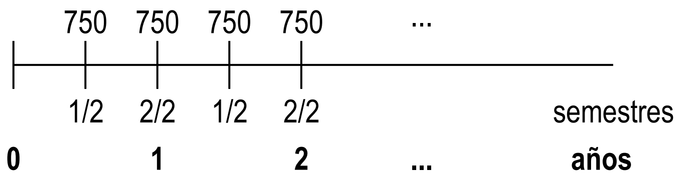
Así:

$$a_{\overline{48}|0{,}004868} = \frac{1-(1+0{,}004868)^{-48}}{0{,}004868} = 42{,}712272$$

$$A_{\overline{48}|0{,}004868} = c \cdot 42{,}712272$$

Como no conocemos el valor de c de momento lo dejamos así.

<u>Segunda Renta (Segunda de ellas)</u>: Se trata de una renta constante, perpetua, pospagable, inmediata y fraccionada por lo que podemos resolverla por dos métodos.



Calculamos el interés «i_2» de frecuencia semestral a partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, inmediata, perpetua, pospagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización). Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}06)^{1/2} - 1 = 0{,}029563$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}$$

Así:

$$A_{\overline{\infty}|0{,}029563} = \frac{750}{0{,}029563} = 25.369{,}55$$

Ahora ya podemos calcular la renta mensual teniendo en cuenta que el valor actual de la primera renta es igual a la suma del valor actual de las dos rentas de la segunda parte:

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = 34.573{,}87€$$

$$A_{\overline{48}|0{,}004868} = c \cdot 42{,}712272$$

$$A_{\overline{\infty}|0{,}029563} = 25.369{,}55$$

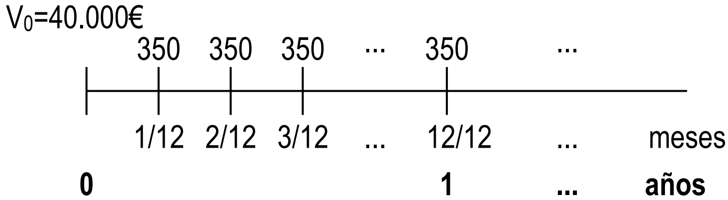
$$34.573{,}87 = c \cdot 42{,}712272 + 25.369{,}55 \Rightarrow 34.573{,}87 - 25.369{,}55 = c \cdot 42{,}712272 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9.204{,}32 = c \cdot 42{,}712272 \Rightarrow c = \frac{9.204{,}32}{42{,}712272} = 215{,}50€$$

P=215,50€

18. El propietario de un local comercial cobra 350€ mensuales de alquiler, el valor del local es de 40.000€, se quiere conocer el rendimiento anual unitario si el cobro del alquiler se hiciera:

a. Al final de cada mes.



Se trata una renta perpetua y lo que se quiere calcular es el tipo de interés, por lo que utilizaremos la fórmula de una renta constante, pospagable, perpetua, inmediata y entera, teniendo en cuenta que el tipo de interés que resulte será mensual y habrá que pasarlo a términos anuales. Así:

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}$$

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{350}{i} \Rightarrow 40.000 = \frac{350}{i} \Rightarrow i = \frac{350}{40.000} = 0{,}00875 \Rightarrow i_{12} = 0{,}00875$$

Para pasar del interés mensual al interés anual se aplica la relación que ya conocemos:

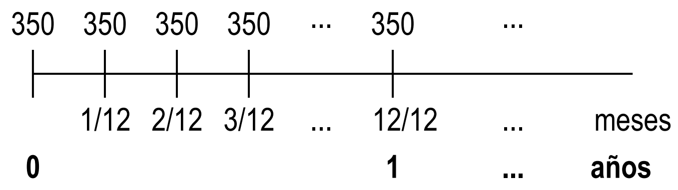
$$i = (1+i_k)^k - 1$$

$$i = (1+i_{12})^{12} - 1 = (1+0{,}00875)^{12} - 1 = 0{,}110203 \Rightarrow i = 11{,}02\%$$

i=11,02%

b. Al principio de cada mes.

V_0=40.000€



Se trata una renta perpetua y lo que se quiere calcular es el tipo de interés, por lo que utilizaremos la fórmula de una renta constante, prepagable, perpetua, inmediata y entera, teniendo en cuenta que el tipo de interés que resulte será mensual y habrá que pasarlo a términos anuales. Así:

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = 350 \cdot \frac{1+i}{i} \Rightarrow 40.000 = 350 \cdot \frac{1+i}{i} \Rightarrow 40.000 \cdot i = 350 \cdot (1+i) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 40.000 \cdot i = 350 + 350 \cdot i \Rightarrow 40.000 \cdot i - 350 \cdot i = 350 \Rightarrow 39.650 \cdot i = 350 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = \frac{350}{39.650} = 0{,}008827 \Rightarrow i_{12} = 0{,}008827$$

Para pasar del interés mensual al interés anual se aplica la relación que ya conocemos:

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

$$i = (1+i_{12})^{12} - 1 = (1+0{,}008827)^{12} - 1 = 0{,}111221 \Rightarrow i = 11{,}12\%$$

i=11,12%

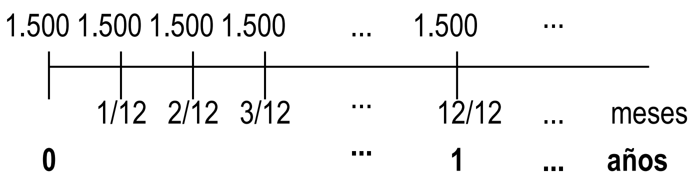
19. Dª Rosa de las Flores recibe en herencia una sala de espectáculos, por la que se perciben 1.500€ al principio de cada mes de alquiler, se pagan al final de cada mes 100€ en concepto de gastos de administración y 90€ al final de cada trimestre de impuestos. Se pide calcular el valor actual de dicho bien, siendo el tanto de valoración semestral del 5%.

Se trata de tres rentas diferentes, para las que hay que hallar el valor actual y posteriormente sumamos el de la renta de los alquileres y restamos la de los gastos e impuestos, teniendo en cuenta que el tipo de interés que nos dan es semestral, es decir, i_2=5%, siendo todas ellas perpetuas y siendo el tanto anual equivalente el siguiente:

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

$$i = (1 + i_2)^2 - 1 = (1 + 0,05)^2 - 1 = 0,1025$$

Renta de los alquileres:



Es una renta prepagable, constante, perpetua, inmediata y entera, porque vamos a calcular el tanto mensual a través del anual.

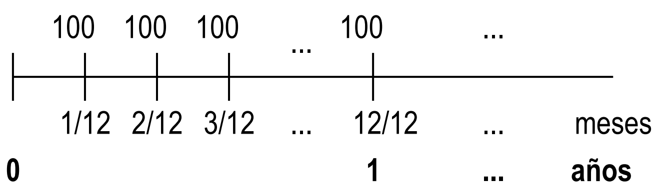
$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1$$

$$i_{12} = (1 + 0,1025)^{1/12} - 1 = 0,008165$$

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|0,008165} = 1.500 \cdot \frac{1+0,008165}{0,008165} = 185.210,96$$

Renta de los gastos de administración:



Es una renta pospagable, constante, perpetua, inmediata y entera, porque vamos a calcular el tanto mensual a través del anual.

$$i_{12} = 0{,}008165$$

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}$$

$$A_{\overline{\infty}|0{,}008165} = \frac{100}{0{,}008165} = 12.247{,}40€$$

<u>Renta de los impuestos</u>:

	90	90	90	90	...	
	1/4	2/4	3/4	4/4	...	trimestres
0				**1**	**...**	**años**

Es una renta pospagable, constante, perpetua, inmediata y entera, porque vamos a calcular el tanto trimestral a través del anual.

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}1025)^{1/4} - 1 = 0{,}024695$$

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}$$

$$A_{\overline{\infty}|0{,}024695} = \frac{90}{0{,}024695} = 3.644{,}46€$$

Restando a los ingresos actualizados los gastos actualizados:

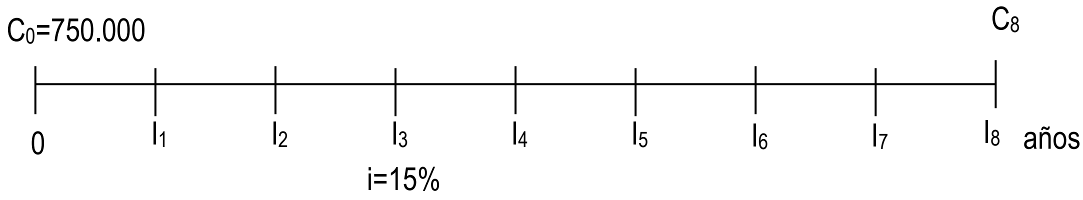
$$V_0 = 185.210{,}96 - 12.247{,}40 - 3.644{,}46 = 169.319{,}10€$$

V_0=169.319,10€

PROBLEMAS CON SOLUCIÓN NIVEL II

TEMA 8: PRÉSTAMOS

1. Considere un préstamo americano de duración 8 años, principal de 750.000€ y de interés anual compuesto del 9%. Determine el capital a devolver y el pago anual de intereses.



Los intereses que se abonan al final de cada año son:

$$I_n = C_0 \cdot i$$

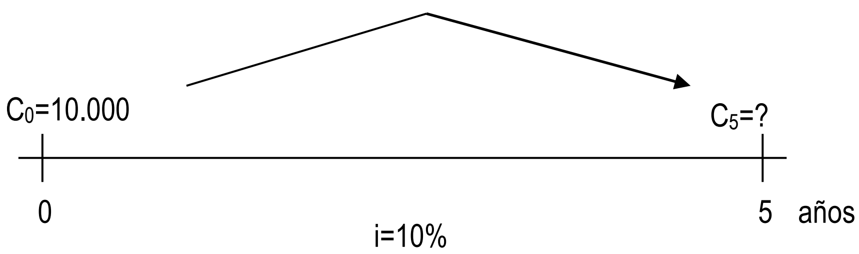
$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = 750.000 \cdot 0,09 = 67.500€$$

Además de los intereses, en el tercer año tiene que devolver los 750.000€.

C_8=750.000€

I=67.500€

2. Calcule el capital a devolver en un préstamo de 10.000€ mediante reembolso único sin pago periódico de intereses si se debe amortizar a los 5 años con un interés del 10% anual compuesto.



Tendrá que abonar el capital prestado más los intereses en régimen de capitalización compuesta. Es decir:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_5 = 10.000 \cdot (1+0,10)^5 = 16.105,10€$$

$$C_5 = 16.105.10€$$

C_{10}=16.105,10€

3. Se pide, sin realizar el cuadro de amortización, calcular los siguientes conceptos para el caso de un préstamo de principal 50.000€, amortizable en 4 años al 6% anual, según el método lineal:

a. El capital vivo al final del año 1.

$$C_k = C_0 - A \cdot k \Rightarrow C_1 = C_0 - A \cdot 1$$

$$A = \frac{C_0}{n} \Rightarrow A = \frac{50.000}{4} = 12.500€$$

$$C_1 = C_0 - A \cdot 1 = 50.000 - 12.500 \cdot 1 = 37.500€$$

C_1=37.500€

b. Calcular la cuota de interés del segundo año.

$$I_k = C_{k-1} \cdot i \Rightarrow I_2 = C_1 \cdot i$$

$$C_1 = 37.500$$

$$I_2 = C_1 \cdot i = 37.500 \cdot 0{,}06 = 2.250€$$

I_2=2.250€

c. El capital amortizado al final del año 2.

$$m_k = A \cdot k \Rightarrow m_2 = 12.500 \cdot 2 = 25.000€$$

m_2=25.000€

d. El término amortizativo del tercer año.

$$a_k = a_1 - (k-1) \cdot A \cdot i \Rightarrow a_3 = a_1 - (3-1) \cdot A \cdot i$$

$$a_1 = A + I_1$$

$$I_k = C_{k-1} \cdot i \Rightarrow I_1 = C_0 \cdot i = 50.000 \cdot 0{,}06 = 3.000€$$

$$a_1 = A + I_1 = 12.500 + 3.000 = 15.500€$$

$$a_3 = a_1 - (3-1) \cdot A \cdot i = 15.500 - 2 \cdot 12.500 \cdot 0{,}06 = 14.000€$$

a_3=14.000€

4. Realice el cuadro de amortización del ejercicio anterior.

Primero hay que hallar el término amortizativo:

$$A = \frac{C_0}{n} = \frac{50.000}{4} = 12.500€$$

	(5)	(4)	(1)	(2)	(3)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	50.000
1	15.500	3.000	12.500	12.500	37.500
2	14.750	2.250	12.500	25.000	25.000
3	14.000	1.500	12.500	37.500	12.500
4	13.250	750	12.500	50.000	0
Total	**57.500**	**7.500**	**50.000**	**50.000**	**0**

A=12.500€

5. **Construir el cuadro de amortización de un préstamo que cumple las siguientes características:**
   - **Importe: 35.000€**
   - **Duración: 5 años**
   - **Tipo de interés: 10% anual**
   - **Cuotas de amortización anuales constantes**

Primero hay que hallar la cuota de amortización:

$$A = \frac{C_0}{n} = \frac{35.000}{5} = 7.000€$$

	(5)	(4)	(1)	(2)	(3)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	35.000
1	10.500	3.500	7.000	7.000	28.000
2	9.800	2.800	7.000	14.000	21.000
3	9.100	2.100	7.000	21.000	14.000
4	8.400	1.400	7.000	28.000	7.000
5	7.700	700	7.000	35.000	0
Total	**45.500**	**10.500**	**35.000**	**35.000**	**0**

A=7.000€

6. **Sea el siguiente préstamo que se amortizará por el sistema de anualidades constantes:**
   - **Importe: 250.000€**

- **Duración: 30 años**
- **Tipo de interés: 7% anual**

Se pide, sin realizar el cuadro de amortización:

a. Determinar la anualidad.

En primer lugar tendremos que calcular el término amortizativo:

$$a = \frac{C_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = \frac{C_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{250.000 \cdot 0{,}07}{1-(1+0{,}07)^{-30}} = 20.146{,}60€$$

a=20.146,60€

b. Capital amortizado después del pago de la undécima anualidad.

$$m_k = C_0 - C_k \Rightarrow m_{10} = C_0 - C_{11}$$

$$C_k = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i} \Rightarrow C_{11} = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^{11} - 1}{i}$$

$$A_1 = a - C_0 \cdot i \Rightarrow 20.146{,}60 - 250.000 \cdot 0{,}07 = 2.646{,}60€$$

$$C_{11} = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^{11} - 1}{i} = 250.000 - 2.646{,}60 \cdot \frac{(1+0{,}07)^{11} - 1}{0{,}07} = 208.227{,}13€$$

$$m_{11} = C_0 - C_{11} = 250.000 - 208.227{,}13 = 41.772{,}87€$$

m_{11}=41.772,87€

c. Cuota de interés del año veintitrés.

$$I_k = C_{k-1} \cdot i \Rightarrow I_{23} = C_{22} \cdot i$$

$$C_{22} = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^{22} - 1}{i}$$

$$A_1 = 2.646{,}60€$$

$$C_{22} = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^{22} - 1}{i} = 250.000 - 2.646{,}60 \cdot \frac{(1+0{,}07)^{22} - 1}{0{,}07} = 120.301{,}41€$$

$$I_{23} = C_{22} \cdot i = 120.301{,}41 \cdot 0{,}07 = 8.421{,}10€$$

I_{23}=8.421,10€

d. Cuota de amortización del año catorce.

$$A_k = A_1 \cdot (1+i)^{(k-1)} \Rightarrow A_{14} = A_1 \cdot (1+i)^{(14-1)} = A_1 \cdot (1+i)^{13}$$

$$A_1 = 2.646{,}60€$$

$$A_{14} = 2.646{,}60 \cdot (1+0{,}07)^{13} = 6.377{,}90€$$

A_{14}=6.377,90€

e. Deuda pendiente al comienzo del año diez.

Si nos pide la deuda pendiente al comienzo del año diez, eso es lo mismo que calcular la deuda pendiente al final del año 9, para que podamos aplicar la fórmula:

$$C_k = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i} \Rightarrow C_9 = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^9 - 1}{i}$$

$$A_1 = 2.646{,}60€$$

$$C_9 = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^9 - 1}{i} = 250.000 - 2.646{,}60 \cdot \frac{(1+0{,}07)^9 - 1}{0{,}07} = 218.299{,}06€$$

C_{15}=218.299,06€

7. Se pide construir el cuadro de amortización de un préstamo que se amortiza por el sistema francés de 3.000€ sabiendo que se canceló mediante la entrega de cinco anualidades. El tipo de interés aplicado en un principio fue de un 4%. No obstante, al cabo de los 3 años el banco subió el tipo y aplicó un 5% para los dos últimos años.

En primer lugar tendremos que calcular el término amortizativo suponiendo que el tipo de interés no ha variado y que sería del 4% para toda la vida del préstamo:

$$a = \frac{C_0 \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$a = \frac{C_0 \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{3.000 \cdot 0{,}04}{1 - (1+0{,}04)^{-5}} = 673{,}88€$$

Al finalizar el tercer año, hay que volver a calcular el término amortizativo para los dos últimos años en función de su capital vivo al finalizar el año 3 que es:

$$C_k = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i} \Rightarrow C_3 = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i}$$

$$A_1 = a - C_0 \cdot i = 673{,}88 - 3.000 \cdot 0{,}04 = 553{,}88€$$

$$C_3 = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i} = 3.000 - 553{,}88 \cdot \frac{(1+0{,}04)^3 - 1}{0{,}04} = 1.271€$$

Como es ése el nuevo capital vivo ahora habría que volver a calcular el término amortizativo que se aplicará durante los dos últimos años pero ahora la 5%:

$$a' = \frac{C'_0 \cdot i}{1 - (1+i)^{-n'}} = \frac{1.271 \cdot 0{,}05}{1 - (1+0{,}05)^{-2}} = 683{,}55€$$

Años	(1) Térm. amor.	(2) Cuota de interés	(3) Cuota de amortización	(4) Total amortizado	(5) Capital vivo
0	-	-	-	-	3.000
1	673,88	120	553,88	553,88	2.446,12
2	673,88	97,84	576,04	1.129,92	1.870,08
3	673,88	74,80	599,08	1.729,00	1.271,00
4	683,55	63,55	620	2.349	651
5	683,55	32,55	651	3.000	0
Total	**3.388,74**	**388,74**	**3.000**	**3.000**	**0**

a=673,88€

a'=683,55€

8. **Una sociedad solicita un préstamo al banco de 15.000€ a reintegrar en 6 años mediante el método lineal al 4% de interés efectivo anual. Al llegar al cuarto pago no tiene liquidez suficiente y acuerda con el banco pagarle únicamente los intereses vencidos. Al año siguiente comienza a efectuar de nuevo los pagos anuales siguiendo con el método lineal al 6% de interés efectivo anual, hasta la cancelación definitiva del préstamo. Se pide:**

   a. **Cuota de amortización de los tres primeros años.**

$$A = \frac{C_0}{n} = \frac{15.000}{6} = 2.500€$$

A=2.500€

   b. **Intereses abonados en el cuarto año.**

$$I_k = C_{k-1} \cdot i \Rightarrow I_4 = C_{4-1} \cdot i = C_3 \cdot i$$

Previamente necesitamos calcular el capital vivo al final del tercer período mediante su fórmula correspondiente:

$$C_k = C_0 - A \cdot k \Rightarrow C_3 = C_0 - A \cdot 3 = 15.000 - 2.500 \cdot 3 = 7.500€$$

$$I_4 = C_3 \cdot i = 7.500 \cdot 0{,}04 = 300€$$

I_4=300€

c. Capital vivo a principios del quinto año.

El capital vivo a principios del quinto año es el mismo que a finales del cuarto año. Dado que en el cuarto año no realizó devolución de capital, únicamente pagó los intereses, el capital vivo a principios del quinto año (o a finales del cuarto año) coinciden con el que tenía a finales del tercer año. Es decir, C_3, que ya hallamos su valor y era:

$$C'_4 = C_3 = 7.500€$$

C'_4=7.500€

d. Anualidad correspondiente a los dos últimos años.

Para calcular la anualidad correspondiente a los dos últimos años tendremos que calcularla sobre capital pendiente a finales del cuarto año calculado en el apartado anterior, por lo que:

$$A' = \frac{C'_0}{n'} = \frac{7.500}{2} = 3.750€$$

A'=3.750€

e. Cuadro de amortización de la operación.

	(5)	(4)	(1)	(2)	(3)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	15.000
1	3.100	600	2.500	2.500	12.500
2	3.000	500	2.500	5.000	10.000
3	2.900	400	2.500	7.500	7.500
4	300	300	-	7.500	7.500
5	4.200	450	3.750	11.250	3.750
6	3.975	225	3.750	15.000	0
Total	**17.475**	**2.475**	**15.000**	**15.000**	**0**

A=2.500€

A'=3.750€

9. Realice el ejercicio anterior pero en lugar de considerar el método lineal considere el método de términos amortizativos constantes. Es decir, se pide:

a. Término amortizativo de los tres primeros años.

$$a = \frac{C_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{15.000 \cdot 0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-6}} = 2.861{,}43€$$

a=2.861,43€

b. Intereses abonados en el cuarto año.

$$I_k = C_{k-1} \cdot i \Rightarrow I_4 = C_{4-1} \cdot i = C_3 \cdot i$$

Previamente necesitamos calcular el capital vivo al final del tercer período mediante su fórmula correspondiente:

$$C_k = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i} \Rightarrow C_3 = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i}$$

$$A_1 = a - C_0 \cdot i = 2.861{,}43 - 15.000 \cdot 0{,}04 = 2.261{,}43€$$

$$C_3 = C_0 - A_1 \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i} = 15.000 - 2.261{,}43 \cdot \frac{(1+0{,}04)^3 - 1}{0{,}04} = 7.940{,}71€$$

$$I_4 = C_3 \cdot i = 7.940{,}71 \cdot 0{,}04 = 317{,}63€$$

I_4=317,63€

c. Capital vivo a principios del quinto año.

El capital vivo a principios del quinto año es el mismo que a finales del cuarto año. Dado que en el cuarto año no realizó devolución de capital, únicamente pagó los intereses, el capital vivo a principios del quinto año (o a finales del cuarto año) coinciden con el que tenía a finales del tercer año. Es decir, C_3, que ya hallamos su valor y era:

$$C'_4 = C_3 = 7.940{,}71€$$

C'_4=7.940,71€

d. Anualidad correspondiente a los dos últimos años.

Para calcular la anualidad correspondiente a los dos últimos años tendremos que calcularla sobre capital pendiente a finales del cuarto año calculado en el apartado anterior, por lo que:

$$a' = \frac{C'_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n'}} = \frac{7.940{,}71 \cdot 0{,}06}{1-(1+0{,}06)^{-2}} = 4.331{,}16€$$

a'=4.331,16€

e. Cuadro de amortización de la operación.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	15.000
1	2.861,43	600	2.261,43	2.261,43	12.738,57
2	2.861,43	509,54	2.351,89	4.613,32	10.386,68
3	2.861,43	415,47	2.445,96	7.059,28	7.940,71
4	317,63	317,63	-	7.059,28	7.940,71
5	4.331,16	476,44	3.854,72	10.914,00	4.086,00
6	4.331,16	245,16	4.086,00	15.000	0
Total	**17.564,24**	**2.564,24**	**15.000**	**15.000**	**0**

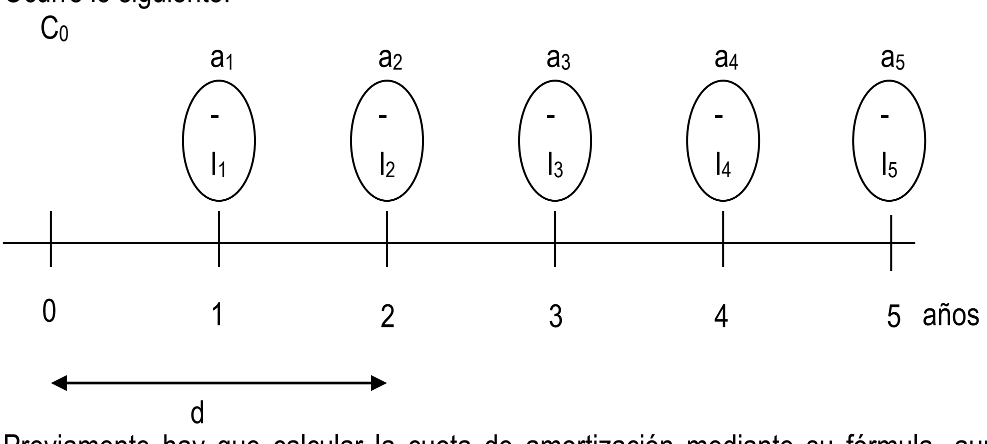
a=2.861,43€

a'=4.331,16€

10. Construya el cuadro de amortización de un préstamo al 15%, de 90.000€, de 5 años de duración que en los siguientes casos:

a. Amortización por el sistema lineal con cuotas de amortización anuales constantes, 2 años de diferimiento y con carencia parcial.

Ocurre lo siguiente:



Previamente hay que calcular la cuota de amortización mediante su fórmula, aunque teniendo en cuenta que se va a empezar a pagar a partir del tercer año, con lo cual solo se dispone de 2 años para realizar la devolución del principal. Así:

$$A = \frac{C_0}{n} = \frac{90.000}{3} = 30.000€$$

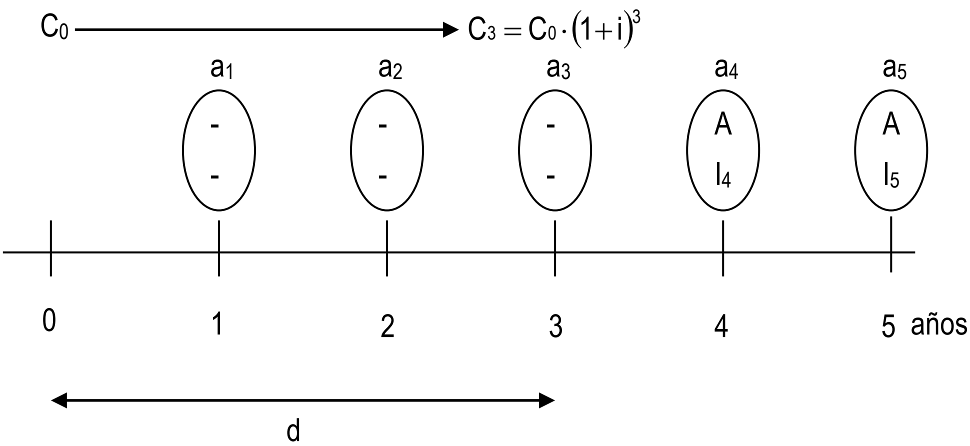
Y el cuadro de amortización es:

	(5)	(4)	(1)	(2)	(3)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	90.000
1	13.500	13.500	0	0	90.000
2	13.500	13.500	0	0	90.000
3	43.500	13.500	30.000	30.000	60.000
4	39.000	9.000	30.000	60.000	30.000
5	34.500	4.500	30.000	90.000	0
Total	**144.000**	**54.000**	**90.000**	**90.000**	**0**

A=30.000€

b. Amortización por el sistema francés de anualidades constantes, 3 años de diferimiento y con carencia total.

Ocurre lo siguiente:



Previamente hay que calcular el término amortizativo mediante su fórmula, aunque teniendo en cuenta que se va a empezar a pagar a partir del tercer año, con lo cual solo hay que devolver no solo el principal sino los intereses capitalizados hasta ese momento. Es decir, ahora el capital a devolver es:

$$C_3 = C_0 \cdot (1+i)^3 = 90.000 \cdot (1+0{,}15)^3 = 136.878{,}75€$$

Ya podemos calcular el término amortizativo durante los 2 años en los que hay que realizar los pagos:

$$a = \frac{C'_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow a = \frac{136.878{,}75 \cdot 0{,}15}{1-(1+0{,}15)^{-2}} = 84.196{,}35€$$

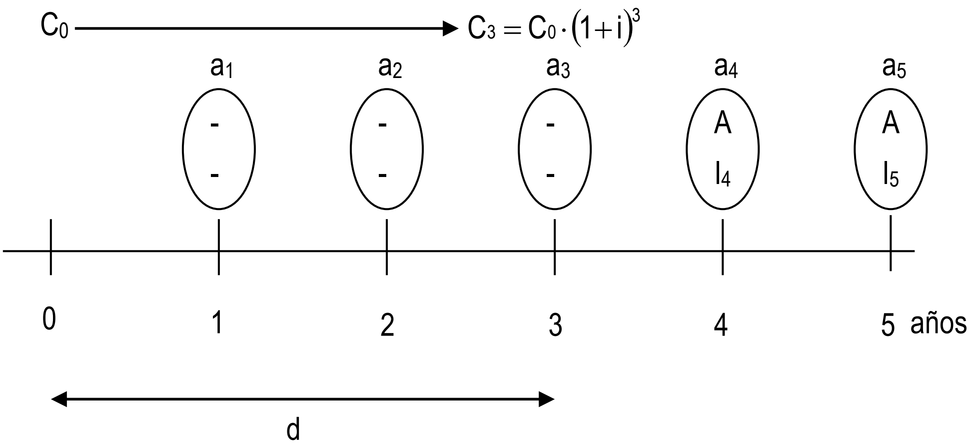
Y el cuadro de amortización es:

	(1)	(2	(3)	(4)	(5)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	90.000
1	0	0	0	0	103.500
2	0	0	0	0	119.025
3	0	0	0	0	136.878,75
4	84.196,35	20.531,81	63.664,54	63.664,54	73.214,21
5	84.196,35	10.982,13	73.214,21	136.878,75	0
Total	**168.392,70**	**31.513,94**	**136.878,75**	**136.878,75**	**0**

a=84.196,35€

11. Se pide el cuadro de amortización de un préstamo al 10%, de 30.000€, de 5 años de duración que se amortiza por el sistema francés, que tiene 3 años de diferimiento y con carencia total de intereses.

Ocurre lo siguiente:



Previamente hay que calcular la cuota de amortización mediante su fórmula, aunque teniendo en cuenta que se va a empezar a pagar a partir del tercer año, con lo cual solo hay que devolver no solo el principal sino los intereses capitalizados hasta ese momento. Es decir, ahora el capital a devolver es:

$$C_3 = C_0 \cdot (1+i)^3 = 30.000 \cdot (1+0{,}10)^3 = 39.930€$$

Ya podemos calcular el término amortizativo durante los 2 años en los que hay que realizar los pagos:

$$a = \frac{C'_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow a = \frac{39.930 \cdot 0{,}10}{1-(1+0{,}10)^{-2}} = 23.007{,}29€$$

Y el cuadro de amortización es:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	30.000
1	0	0	0	0	33.000
2	0	0	0	0	36.300
3	0	0	0	0	39.930
4	23.007,29	3.993	19.014,29	19.014,29	20.915,71
5	23.007,29	2.091,57	20.915,72	39.930	0
Total	**46.014,57**	**6.084,57**	**39.930**	**39.930**	**0**

a=23.007,29€