TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN A LAS FINANZAS

Cuando se dispone de una cantidad de dinero (capital) se puede destinar, o bien a gastarlo -satisfaciendo alguna necesidad-, o bien a invertirlo para recuperarlo en un futuro más o menos próximo, según se acuerde.

De la misma manera que estamos dispuestos a gastarlo para satisfacer una necesidad, estaremos dispuestos a invertir siempre y cuando la compensación económica nos resulte suficiente. En este sentido el **principio básico de la preferencia de liquidez** establece que a igualdad de cantidad los bienes más cercanos en el tiempo son preferidos a los disponibles en momentos más lejanos. La razón es el sacrificio del consumo.

Este aprecio de la liquidez es subjetivo pero el mercado de dinero le asigna un valor objetivo fijando un precio por la financiación que se llama interés.

El **interés** se puede definir como la retribución por el aplazamiento en el tiempo del consumo, esto es, el precio por el alquiler o uso del dinero durante un período de tiempo.

Esta compensación económica se exige, entre otras, por tres razones básicas:

- Por el ***riesgo*** que se asume.
- Por ***la falta de disponibilidad*** que supone desprenderse del capital durante un tiempo.
- Por la ***depreciación*** del valor del dinero en el tiempo.

La cuantificación de esa compensación económica, de los intereses, depende de tres variables, a saber:

- La cuantía del capital invertido,
- El tiempo que dura la operación, y
- El tanto de interés al que se acuerda la operación.

2. EL BINOMIO CAPITAL-TIEMPO

Cuando se habla de **capital financiero (C; t)** nos referimos a una **cuantía (C) de unidades monetarias** asociada a un **momento determinado de tiempo (t)**.

Finalmente, en una operación financiera no tiene sentido hablar de **capitales iguales** (aquellos en los que coinciden cuantías y vencimientos), sino que siempre estaremos refiriéndonos a **capitales equivalentes,** cuya definición se dará más adelante, si bien se adelanta la idea de que hay equivalencia entre dos capitales cuando a su propietario le resulta indiferente una situación u otra. Es decir, si a usted le resulta indiferente cobrar hoy 1.000 euros a cobrar 1.050 euros dentro de un año, entonces diremos que ambos capitales (1.000; 0) y (1.050; 1) son equivalentes.

De una manera más general, dos **capitales** cualesquiera, C_1 con vencimiento en t_1 y C_2 con vencimiento en t_2, son **equivalente**s cuando se está de acuerdo en intercambiar uno por otro.

El concepto de equivalencia no significa que no haya ganancia o coste en la operación. Todo lo contrario, la equivalencia permite cuantificar ese beneficio o pérdida que estamos dispuestos a asumir en una operación concreta.

Para que una operación financiera se realice es necesario que a los sujetos intervinientes las cuantías que dan y reciben les resulten equivalentes. Es necesario que deudor y acreedor se pongan de acuerdo en cuantificar los capitales de los que se parte y a los que finalmente se llega. Esto implica elegir un método matemático que permita dicha sustitución: una ley financiera.

La **ley financiera** se define como un modelo matemático (una fórmula) para cuantificar los intereses por el aplazamiento y/o anticipación de un capital en el tiempo.

Conociendo las diferentes leyes financieras que existen y cómo funcionan se podrán sustituir unos capitales por otros, pudiéndose formalizar las diferentes operaciones financieras.

3. CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS

Veamos ahora algunos conceptos matemáticos básicos que nos permitirán sentar las bases para poder entender los sucesivos temas.

3.1. OPERACIÓN FINANCIERA

3.1.1. CONCEPTO

Se entiende por **operación financiera** la sustitución de uno o más capitales por otro u otros equivalentes en distintos momentos de tiempo, mediante la aplicación de una ley financiera.

En definitiva, cualquier operación financiera se reduce a un conjunto de flujos de caja (cobros y pagos) de signo opuesto y distintas cuantías que se suceden en el tiempo.

Así, por ejemplo, la concesión de un préstamo por parte de una entidad bancaria a un cliente supone:

- Para el cliente: un cobro inicial (el importe del préstamo) y unos pagos periódicos (las cuotas) durante el tiempo que dure la operación.

- Para el banco: la operación implica un pago inicial único y unos cobros periódicos.

La realización de una operación financiera implica, por tanto, que se cumplan tres puntos:

1. **Sustitución de capitales**. Ha de existir un intercambio de un(os) capital (es) por otro(s).
2. **Equivalencia**. Los capitales han de ser equivalentes, es decir, debe resultar de la aplicación de una ley financiera.
3. **Aplicación de una ley financiera**. Debe existir acuerdo sobre la forma de determinar el importe de todos y cada uno de los capitales que compongan la operación, resultado de la consideración de los intereses generados.

3.1.2. ELEMENTOS

En toda operación financiera básica intervienen los siguientes elementos:

- ✓ **PERSONALES**: En una operación financiera básica interviene un sujeto (acreedor) que pone a disposición de otro (deudor) uno o más capitales y que posteriormente recuperará, incrementados en el importe de los intereses.

  La acción de entregar por parte del acreedor y de recibir por parte del deudor se considerará la **prestación de la operación** financiera. La operación concluirá cuando el deudor termine de entregar al acreedor el capital (más los intereses); a esta actuación por ambas partes se le denomina la **contraprestación de la operación** financiera.

  En toda operación financiera las cantidades entregadas y recibidas por cada una de las partes no coinciden. El aplazamiento (o adelantamiento) de un capital en el tiempo supone la producción de intereses que formarán parte de la operación y que habrá que considerar y cuantificar. Por tanto, prestación y contraprestación nunca son aritméticamente iguales. No obstante, habrá una ley financiera que haga que resulten financieramente equivalentes, es decir, que si valorásemos prestación y contraprestación en el mismo momento, con la misma ley y con el mismo tanto, entonces sí se produciría la igualdad numérica entre ambas.

Tanto la prestación como la contraprestación pueden estar formadas por más de un capital que incluso se pueden solapar en el tiempo.

- ✓ **TEMPORALES**: Al momento de tiempo donde comienza la prestación de la operación financiera se le denomina **origen** de la operación financiera. Donde concluye la contraprestación de la operación financiera se le llama **final** de la operación financiera. Al intervalo de tiempo que transcurre entre ambas fechas se le denomina **duración** de la operación financiera, durante el cual se generan los intereses.

- ✓ **OBJETIVOS**: La realización de la operación financiera exige un acuerdo sobre aspectos tales como: la cuantía del capital de partida, la ley financiera que se va a emplear y, finalmente, el tanto de interés (coste/ganancia) unitario acordado.

3.1.3. CLASES

Las operaciones financieras se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios:

1. **Según la duración:**
   - A corto plazo: la duración de la operación es igual o inferior al año.
   - A largo plazo: aquellas con una duración superior al año.

2. **Según la ley financiera que opera:**

   A su vez este criterio se puede subdividir en otros dos criterios:

   2.1. Según la generación de intereses:

   - En régimen de simple: los intereses generados en el pasado no se acumulan y, por tanto, no generan, a su vez, intereses en el futuro.
   - En régimen de compuesta: los intereses generados en el pasado sí se acumulan al capital de partida y generan, a su vez, intereses en el futuro.

   2.2. Según el sentido en el que se aplica la ley financiera:

   - De capitalización: sustituye un capital presente por otro capital futuro.
   - De actualización o descuento: sustituye un capital futuro por otro capital presente.

3. **Según el número de capitales de que consta:**
   - Simples: constan de un solo capital en la prestación y en la contraprestación.
   - Complejas (o compuestas): cuando constan de más de un capital en la prestación y/o en la contraprestación.

3.2. RÉDITO Y TANTO DE INTERÉS

Se entiende por **rédito (r)** el rendimiento generado por un capital.

Se puede expresar en tanto por cien (%), o en tanto por uno.

Si en el momento t_1 disponemos de un capital C_1 y éste se convierte en un capital C_2 en un determinado momento t_2, el rédito de la operación será:

$$r = \frac{C_2 - C_1}{C_1}$$

Sin embargo, aunque se consideran las cuantías de los capitales inicial y final, no se tiene en cuenta el aspecto temporal, es decir, en cuánto tiempo se ha generado ese rendimiento. Surge la necesidad de una medida que tenga en cuenta el tiempo: el tanto de interés (i).

Se define el **tipo de interés (i)** como el rédito por unidad de tiempo, por eso también se le llama **rendimiento unitario**.

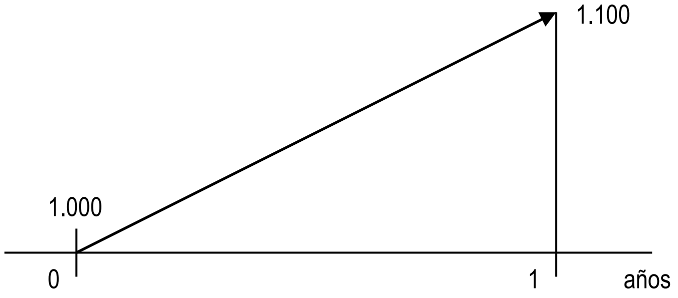
Es decir:

$$i = \frac{r}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{C_2 - C_1}{C_1}}{t_2 - t_1}$$

Rédito y tipo de interés coincidirán cuando el intervalo de tiempo es la unidad.

EJEMPLO 1

Un capital de 1.000 euros se sustituye hoy por otro de 1.100 disponible dentro de un año. ¿Cuál es el rédito de la operación? ¿Y el tanto de interés anual?



$$r = \frac{1.100 - 1.000}{1.000} = 0{,}1 = 10\%$$

$$i = \frac{\frac{1.100 - 1.000}{1.000}}{1 - 0} = 0{,}1 = 10\%$$

Pero si la operación dura 2 años:

$$r = \frac{1.100 - 1.000}{1.000} = 0{,}1 = 10\%$$

$$i = \frac{\frac{1.100 - 1.000}{1.000}}{2 - 0} = 0{,}05 = 5\%$$

Por lo tanto, el rédito permanece constante ante variaciones del horizonte temporal, no ocurriendo lo mismo con el tipo de interés que es, permaneciendo invariable el resto de elementos, inversamente proporcional al plazo de la operación.

TEMA 2: CAPITALIZACIÓN SIMPLE

ÍNDICE

1. CAPITALIZACIÓN SIMPLE

Las operaciones en régimen de simple se caracterizan porque los intereses a medida que se van generando no se acumulan y no generan intereses en períodos siguientes (no son productivos). De esta forma los intereses que se producen en cada período se calculan siempre sobre el mismo capital -el inicial-, al tipo de interés vigente en cada período.

Este régimen financiero es propio de operaciones a corto plazo (uno o menos de un año).

1.1. CONCEPTO

La **capitalización simple** es la operación financiera cuyo objeto es la sustitución de un capital presente por otro equivalente con vencimiento posterior, mediante la aplicación de la ley financiera en régimen de simple.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA OPERACIÓN

Partiendo de un **capital (C_0)** del que se dispone inicialmente -capital inicial-, se trata de determinar la **cuantía final (C_n)** que se recuperará en el futuro sabiendo las condiciones en las que la operación se contrata (**tiempo -n- y tipo de interés -i-**).

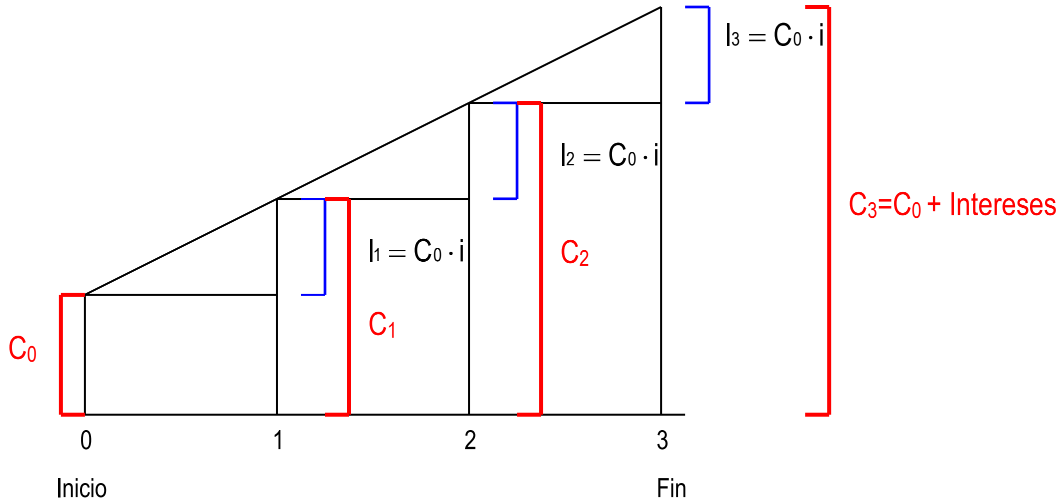
Este capital final o montante se irá formando por la acumulación al capital inicial de los intereses que genera la operación periódicamente y que, al no disponerse de ellos hasta el final de la operación, se añaden finalmente al capital inicial.

1.3. CARACTERÍSTICAS DE LA OPERACIÓN

Los intereses no son productivos, lo que significa que:

- A medida que se generan **no se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses** en el futuro y, por tanto
- **Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital inicial**, al tanto de interés vigente en dicho período.

Gráficamente para una operación de tres períodos:



1.4. DESARROLLO DE LA OPERACIÓN

El capital al final de cada período es el resultado de añadir al capital existente al inicio del mismo los intereses generados durante dicho período. De esta forma, la evolución del montante conseguido en cada momento es el siguiente:

Momento 0:

C_0

Momento 1:

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + (C_0 \cdot i) = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i)$$

Momento 2:

$$C_2 = C_0 + I_1 + I_2 = C_0 + (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i) = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i + i) = C_0 \cdot (1 + 2i)$$

Momento 3:

$$C_3 = C_0 + I_1 + I_2 + I_3 = C_0 + (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i) = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i =$$
$$= C_0 \cdot (1 + i + i + i) = C_0 \cdot (1 + 3i)$$

...

Momento n:

$$C_n = C_0 + I_1 + I_2 + \ldots + I_n = C_0 + (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i) + \ldots + (C_0 \cdot i) = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \ldots + C_0 \cdot i =$$
$$= C_0 \cdot (1 + i + i + \ldots + i) = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)}$$

Expresión aplicable cuando el tipo de interés de la operación se mantiene constante todos los períodos.

A partir de la expresión anterior (**denominada fórmula fundamental de la capitalización simple**) no solamente se pueden calcular montantes sino que, conocidos tres datos cualesquiera, se podría despejar el cuarto restante. .[1]

Finalmente, hay que tener en cuenta que «**n**» lo que indica es el **número de veces que se han generado (y acumulado) intereses al capital inicial**, por tanto, <u>esa variable siempre ha de estar en la misma unidad de tiempo que el tipo de interés</u> (no importando cuál sea).

[1] Para aplicar la fórmula fundamental de la capitalización simple es preciso que el tipo de interés esté expresado en tanto por uno.

EJEMPLO 1

Calcular el montante obtenido al invertir 2.000 euros al 8% anual durante 4 años en régimen de capitalización simple.

$$C_4 = 2.000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}08) = 2.640€$$

EJEMPLO 2

Se quiere conocer qué capital podremos retirar dentro de 3 años si hoy colocamos 1.000 euros al 5% de interés anual para el primer año y cada año nos suben el tipo de interés un punto porcentual.

En este caso la fórmula general de la capitalización simple no es aplicable al ser diferente el tipo de interés en cada período. El montante será, igualmente, el resultado de añadir al capital inicial los intereses de cada período, calculados siempre sobre el capital inicial pero al tipo vigente en el período de que se trate.

$$C_3 = C_0 + I_1 + I_2 + I_3 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}05 + 1.000 \cdot 0{,}06 + 1.000 \cdot 0{,}07 =$$
$$= 1.000 + 50 + 60 + 70 = 1.180€$$

$$C_3 = 1.180€$$

1.5. CÁLCULO DEL CAPITAL INICIAL

Partiendo de la fórmula de cálculo del capital final o montante y conocidos éste, la duración de la operación y el tanto de interés, bastará con despejar de la misma:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

despejando C_0 resulta:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}}$$

EJEMPLO 3

¿Cuánto deberé invertir hoy si quiero disponer dentro de 2 años de 1.500 euros para comparme un coche, si me aseguran un 6% de interés anual para ese plazo?

$$C_0 = \frac{1.500}{1 + 2 \cdot 0{,}06} = \frac{1.500}{1{,}12} = 1.339{,}29€$$

1.6. CÁLCULO DE LOS INTERESES TOTALES

Bastará con calcular los intereses de cada período, que siempre los genera el capital inicial y sumarlos.

$$\text{Intereses Totales} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = (C_0 \cdot i_1) + (C_0 \cdot i_2) + \ldots + (C_0 \cdot i_n) =$$
$$= C_0 \cdot (i_1 + i_2 + \ldots + i_n)$$

$$\boxed{\text{Intereses Totales} = C_0 \cdot (i_1 + i_2 + \ldots + i_n)}$$

Si $i_1 = i_2 = \ldots + i_n = i$ se cumple:

$$\text{Intereses Totales} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i) + \ldots + (C_0 \cdot i) = n \cdot (C_0 \cdot i) =$$
$$= C_0 \cdot i \cdot n$$

$$\boxed{\text{Intereses Totales} = C_0 \cdot n \cdot i}$$

Conocidos los capitales inicial y final, se obtendrá por diferencias entre ambos:

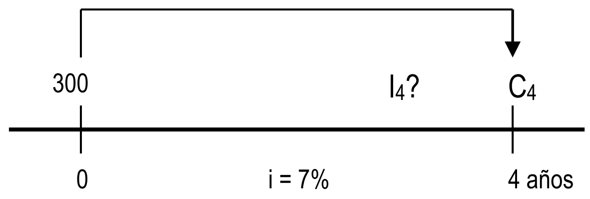
$$\boxed{I_n = C_n - C_0}$$

EJEMPLO 4

¿Qué intereses producirán 300 euros invertidos 4 años al 7% simple anual?

…/…

…/…



Por suma de los intereses de cada período y teniendo en cuenta que el tipo de interés que se aplica durante los cuatro años no varía:

$$\text{Intereses Totales} = 300 \cdot 0{,}07 \cdot 4 = 84€$$

También se puede obtener por diferencias entre el capital final y el inicial, para lo cual previamente habrá que calcular el capital final:

$$C_4 = 300 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 4) = 300 \cdot 1{,}28 = 384€$$

$$I_4 = 384 - 300 = 84€$$

EJEMPLO 5

¿Qué intereses producirán 6.000 euros invertidos 8 meses al 1% simple mensual?

$$\text{Intereses Totales} = 6.000 \cdot 0{,}01 \cdot 8 = 480€$$

1.7. CÁLCULO DEL TIPO DE INTERÉS

Si se conocen el resto de elementos de la operación: capital inicial, capital final y duración, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización simple y despejar la variable desconocida.

$$C_n = C_0 \cdot (1 + ni)$$

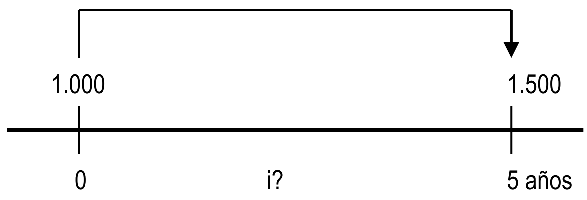
A partir de esa fórmula se despeja la variable desconocida que es «i»:

$$\frac{C_n}{C_0} = 1 + ni \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} - 1 = ni \Rightarrow ni = \frac{C_n}{C_0} - 1 \Rightarrow i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}$$

$$\boxed{i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}}$$

EJEMPLO 6

Determinar el tanto de interés anual a que deben invertirse 1.000 euros para que en 5 años se obtenga un montante de 1.500 euros.



$$1.000 \cdot (1 + 5 \cdot i) = 1.500€$$

$$i = \frac{\frac{1.500}{1.000} - 1}{5} = 0{,}1 = 10\%$$

1.8. CÁLCULO DE LA DURACIÓN

Conocidos los demás componentes de la operación: capital inicial, capital final y tipo de interés, si se parte de la fórmula general de la capitalización simple, despejando la variable desconocida se puede calcular la duración de la operación.

$$C_n = C_0 \cdot (1 + ni)$$

A partir de esa fórmula se despeja la variable desconocida que es «n»:

$$\frac{C_n}{C_0} = 1 + ni \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} - 1 = ni \Rightarrow ni = \frac{C_n}{C_0} - 1 \Rightarrow n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i}$$

$$\boxed{n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i}}$$

EJEMPLO 7

Un capital de 2.000 euros colocado a interés simple al 4% anual asciende a 2.640 euros. Determinar el tiempo que estuvo impuesto.

.../...

…/…

$$2.000 \cdot (1 + n \cdot 0{,}04) = 2.640€$$

$$n = \frac{\frac{2.640}{2.000} - 1}{0{,}04} = 8 \text{ años}$$

2. TANTOS EQUIVALENTES

Normalmente los tipos de interés suelen venir expresados en términos anuales, pero no siempre se devengan con esa periodicidad, sino que, en la mayoría de las ocasiones, la acumulación de los intereses al capital inicial se hace en períodos más pequeños (meses, trimestres, semestres,...).

La cuestión es ¿por el hecho de modificar la frecuencia de cálculo de intereses me beneficiaré o, por el contrario, me veré perjudicado? En este sentido, lo lógico es pensar que cualquiera que sea el número de veces que se calculen los intereses, al final el importe total de los mismos no haya variado, esto es, el resultado final de la operación no se vea afectado.

En consecuencia, si se cambia la frecuencia de cálculo de los intereses habrá que cambiar el importe del tanto de interés aplicado en cada caso. Surge el concepto de **tantos equivalentes**.

2.1. CONCEPTO

Dos tantos cualesquiera, expresados en distintas unidades de tiempo, se dice que son **tantos equivalentes** cuando aplicados a un mismo capital inicial durante un mismo período de tiempo producen el mismo interés o generan el mismo capital final o montante.

2.2. RELACIÓN DE TANTOS EQUIVALENTES

Los tantos de interés equivalentes en simple **son proporcionales**, es decir, cumplen la siguiente expresión:

$$\boxed{i = i_k \cdot k}$$

donde «**k**» se denomina **frecuencia de capitalización** y se define como el **número de partes iguales en las que se divide el período de referencia (considerando como tal el año)**, pudiendo tomar los siguientes valores:

$k = 2 \Rightarrow$ semestre $i_2 =$ tanto de interés semestral

$k = 3 \Rightarrow$ cuatrimestre $i_3 =$ tanto de interés cuatrimestral

$k = 4 \Rightarrow$ trimestre $i_4 =$ tanto de interés trimestral

$k = 12 \Rightarrow$ mes $i_{12} =$ tanto de interés mensual

EJEMPLO 8

Determinar el montante resultante de invertir 700 euros durante 3 años en las siguientes condiciones:

a. Interés anual del 12%

$$C_3 = 700 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}12) = 952€$$

b. Interés semestral del 6%

$$i = i_k \cdot k = 0{,}06 \cdot 2 = 0{,}12$$

$$C_3 = 700 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}12) = 952€$$

c. Interés mensual del 1%

$$i = i_k \cdot k = 0{,}01 \cdot 12 = 0{,}12$$

$$C_3 = 700 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}12) = 952€$$

3. DESCUENTO SIMPLE

3.1. CONCEPTO

El **descuento simple** es la operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento presente, mediante la aplicación de la ley financiera de descuento simple. Es una operación inversa a la de capitalización.

3.2. Características de la Operación

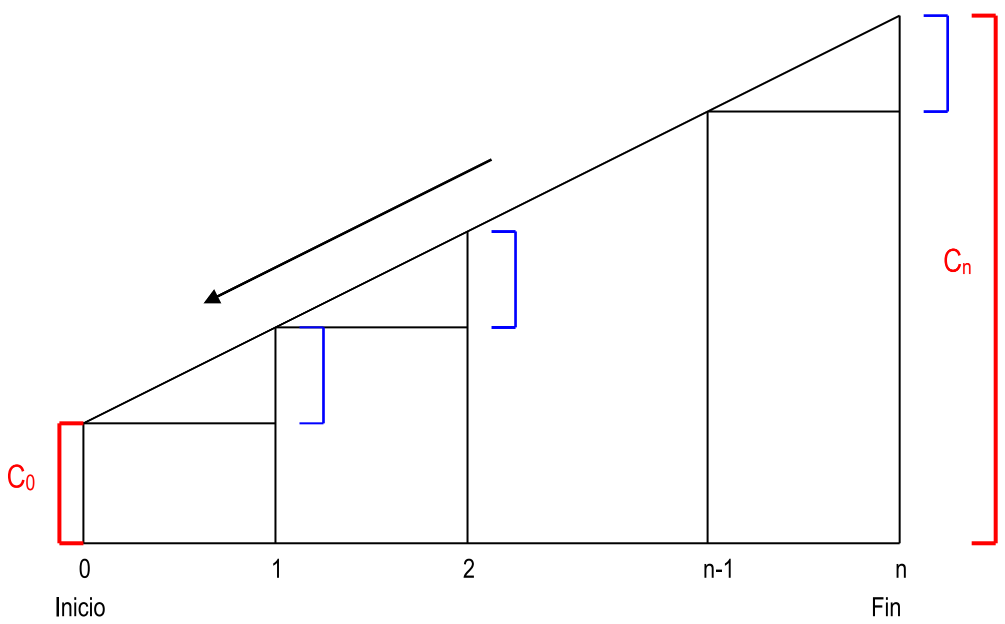
Los intereses no son productivos, lo que significa que:

- A medida que se generan no se restan del capital de partida para producir (y restar) nuevos intereses en el futuro y, por tanto
- Los intereses de cualquier período siempre los genera el mismo capital, al tanto de interés vigente en dicho período.

En una operación de descuento el punto de partida es un capital futuro conocido (C_n) cuyo vencimiento se quiere adelantar. Deberemos conocer las condiciones en las que se quiere hacer esta anticipación: duración de la operación (tiempo que se anticipa el capital futuro) y tanto de interés aplicado.

El capital que resulte de la operación de descuento (capital actual o presente –C_0–) **será de cuantía menor**, siendo la diferencia entre ambos capitales los intereses que el capital futuro deja de tener por anticipar su vencimiento. En definitiva, si trasladar un capital desde el presente al futuro implica añadirle intereses, hacer la operación inversa, anticipar su vencimiento, supondrá la minoración de esa misma carga financiera.

Gráficamente:



Elementos:

$D \equiv$ Descuento o rebaja

$C_n \equiv$ Valor final o nominal

$C_0 \equiv$ Valor actual, inicial o efectivo

i ó $d \equiv$ Tanto de la operación

Por tanto, el capital presente (C_0) es inferior al capital futuro (C_n), y la diferencia entre ambos es lo que se denomina descuento (D). Se cumple la siguiente expresión:

$$\boxed{D = C_n - C_0}$$

Además, el descuento, propiamente dicho, no es más que una *disminución de intereses* que experimenta un capital futuro como consecuencia de adelantar su vencimiento, por lo tanto **se calcula como el interés total de un intervalo de tiempo (el que se anticipe el capital futuro)**. Se cumple:

$$\boxed{D = \text{Capital} \cdot \text{Tipo} \cdot \text{Tiempo}}$$

Y, según cuál sea el capital que se considere para el cómputo de los intereses, estaremos ante las **dos modalidades de descuento** que existen en la práctica:

- ✓ DESCUENTO RACIONAL, MATEMÁTICO O LÓGICO
- ✓ DESCUENTO COMERCIAL O BANCARIO

En todo caso, y cualquiera que sea la modalidad de descuento que se emplee, en este tipo de operaciones **el punto de partida es un capital futuro (C_n)** (conocido) que se quiere sustituir por un capital presente (C_0) (que habrá de calcular), para lo cual será necesario el ahorro de intereses (descuento) que la operación supone.

3.3. DESCUENTO RACIONAL

El ahorro de intereses se calcula sobre el valor efectivo (C_0) empleando un tipo de interés efectivo (i).

Al ser C_0 (el capital inicial) aquel que genera los intereses en esta operación, igual que ocurría en la capitalización, resulta válida la fórmula de la capitalización simple, siendo ahora la incógnita el capital inicial (C_0).

Así pues, a partir de la capitalización simple se despeja el capital inicial, para posteriormente por diferencias determinar el descuento racional:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+n \cdot i)}$$

- **<u>Cálculo del capital inicial (C_0)</u>**:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{1+n \cdot i}}$$

- **<u>Cálculo del ahorro de intereses (D_r)</u>**:

$$D_r = C_n - C_0 = C_n - \frac{C_n}{1+n \cdot i} = \frac{C_n \cdot (1+n \cdot i) - C_n}{1+n \cdot i} = \frac{C_n + C_n \cdot n \cdot i - C_n}{1+n \cdot i} =$$

$$= \frac{C_n \cdot n \cdot i}{1+n \cdot i}$$

$$\boxed{D_r = \frac{C_n \cdot n \cdot i}{1+n \cdot i}}$$

3.4. DESCUENTO COMERCIAL

Los intereses generados en la operación se calculan sobre el nominal (C_n) empleando un tipo de descuento (d).

En este caso resulta más interesante calcular primero el descuento (D_c) y posteriormente el capital inicial (C_0).

Como el descuento es la suma de los intereses generados en cada uno de los períodos descontados (n), y en cada período tanto el capital considerado para calcular los intereses como el propio tanto se mantiene constante, resulta:

$$D_c = \underbrace{C_n \cdot d + C_n \cdot d + \ldots + C_n \cdot d}_{\text{n veces}} = C_n \cdot n \cdot d$$

$$\boxed{D_c = C_n \cdot n \cdot d}$$

El capital inicial se obtiene por diferencia entre el capital final (C_n) y el descuento (D_c):

$$C_0 = C_n - D_c = C_n - (C_n \cdot n \cdot d) = C_n - C_n \cdot n \cdot d = C_n \cdot (1 - n \cdot d)$$

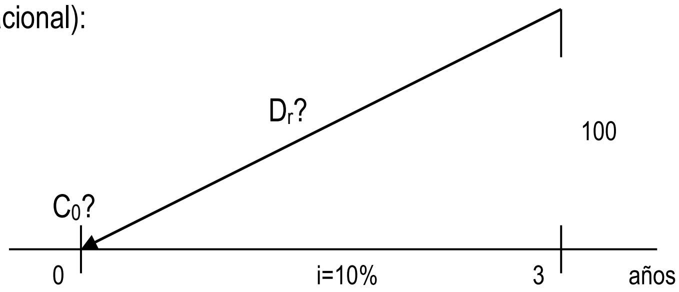
$$\boxed{C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d)}$$

EJEMPLO 9

Se pretende aniticipar al momento actual el vencimiento de un capital de 100 euros con vencimiento dentro de 3 años a un tanto anual del 10%. Calcular el capital inicial y el descuento de la operación:

Caso 1:

Considerando que el capital sobre el que se calculan los intereses es el inicial (descuento racional):



$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i} = \frac{100}{1 + 3 \cdot 0{,}1} = 76{,}92€$$

$$D_r = C_n - C_0 = 100 - 76{,}92 = 23{,}08€$$

o bien:

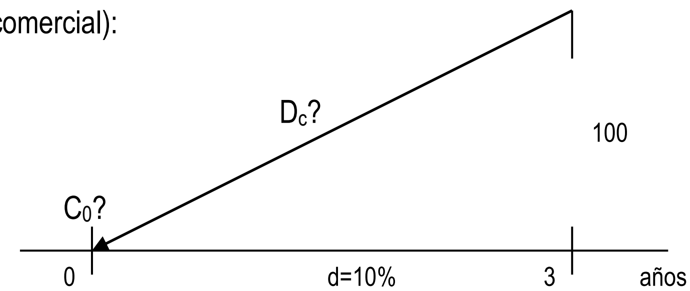
$$D_r = \frac{C_n \cdot n \cdot i}{1 + n \cdot i} = \frac{100 \cdot 3 \cdot 0{,}1}{1 + 3 \cdot 0{,}1} = 23{,}08€$$

o bien:

$$D_r = C_0 \cdot n \cdot i = 76{,}92 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 23{,}08€$$

Caso 2:

Considerando que el capital sobre el que se calculan los intereses es el nominal (descuento comercial):



.../...

…/…

$$D_c = C_n \cdot n \cdot d = 100 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 30€$$

$$D_c = C_n - C_0 \Rightarrow C_0 = C_n - D_c = 100 - 30 = 70€$$

o bien:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d) = 100 \cdot (1 - 3 \cdot 0{,}1) = 70€$$

4. TANTO DE INTERÉS Y DE DESCUENTO EQUIVALENTES

Si el tipo de interés (i) aplicado en el descuento racional coincide en número con el tipo de descuento (d) empleado para el descuento comercial, el resultado no sería el mismo porque estamos trabajando sobre capitales diferentes para el cómputo del cálculo de intereses; de forma que siempre el descuento comercial será mayor al descuento racional ($D_c > D_r$) *–como ocurre en el ejemplo 1.*

No obstante resulta interesante, para poder hacer comparaciones, buscar una relación entre tipos de interés y de descuento que haga que resulte indiferente una modalidad u otra. **Será necesario, por tanto, encontrar un tanto de descuento equivalente a uno de interés, para lo cual obligaremos a que se cumpla la igualdad entre ambas modalidades de descuentos: D_r = D_c.**

Sustituyendo los dos descuentos por las expresiones obtenidas anteriormente:

$$D_r = D_c$$

$$\frac{C_n \cdot n \cdot i}{1 + n \cdot i} = C_n \cdot n \cdot d$$

Esta expresión la podemos simplificar dividiendo por $(C_n \cdot n)$:

$$\frac{i}{1 + n \cdot i} = d$$

Obteniéndose el tanto de descuento comercial «d» equivalente al tanto «i»

$$\boxed{d = \frac{i}{1 + n \cdot i}}$$

Análogamente, conocido «d» se podrá calcular el tanto «i»:

$$d = \frac{i}{1+n\cdot i} \Rightarrow d\cdot(1+n\cdot i) = i \Rightarrow d + d\cdot n\cdot i = i \Rightarrow d = i - d\cdot n\cdot i \Rightarrow d = i\cdot(1-n\cdot d) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{1-n\cdot d} = i$$

$$\boxed{i = \frac{d}{1-n\cdot d}}$$

La relación de equivalencia entre tipos de interés y descuento, en régimen de simple, es una **función temporal**, es decir, que **un tanto de descuento es equivalente a tantos tipos de interés como valores tome la duración (n) de la operación y al revés** (no hay una relación de equivalencia única entre un «i» y un «d»).

EJEMPLO 10

En el ejemplo 1 si consideramos que el tanto de interés es del 10% anual, ¿qué tipo de descuento anual deberá aplicarse para que ambos tipos de descuento resulten equivalentes?

Si $i = 10\%$, entonces se ha de cumplir:

$$d = \frac{i}{1+n\cdot i} = \frac{0{,}1}{1+3\cdot 0{,}1} = \frac{0{,}1}{0{,}13} = 0{,}076923 = 7{,}6923\%$$

Comprobación

Calculando el valor actual y el descuento considerando un tipo de interés del 10% (descuento racional):

$$C_0 = \frac{C_n}{1+n\cdot i} = \frac{100}{1+3\cdot 0{,}1} = 76{,}92€$$

$$D_r = C_n - C_0 = 100 - 76{,}92 = 23{,}08€$$

Calculando el valor actual y el descuento considerando el tipo de descuento antes calculado del 7,6923% (descuento comercial):

$$D_c = C_n \cdot n \cdot d = 100\cdot 3\cdot 0{,}076923 = 23{,}08€$$

$$C_0 = C_n - D_c = 100 - 23{,}08 = 76{,}92€$$

o bien:

$$C_0 = C_n \cdot (1 - n\cdot d) = 100\cdot(1 - 3\cdot 0{,}076923) = 76{,}92€$$

TEMA 3: EQUIVALENCIA FINANCIERA DE CAPITALES

ÍNDICE

1. PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA DE CAPITALES: CONCEPTO

Cuando se dispone de varios capitales de diferentes cuantías y situados en diferentes momentos de tiempo puede resultar conveniente saber cuál de ellos es más interesante desde el punto de vista financiero (porque valga más o menos que los demás). Para decidir habría que compararlos, pero no basta con fijarse solamente en las cuantías, se tendría que considerar, a la vez, el momento de tiempo donde se encuentran situados. Además, la comparación debería ser homogénea, es decir, tendrían que llevarse todos los capitales a un mismo momento y ahí efectuar la comparación.

Comprobar la equivalencia financiera entre capitales consiste en comparar dos o más capitales situados en distintos momentos y, para un tipo dado, observar si tienen el mismo valor en el momento en que se comparan. Para igualar los capitales en un momento determinado se utilizará la capitalización o el descuento.

Dos capitales, C_1 y C_2, que vencen en los momentos t_1 y t_2 respectivamente, son **equivalentes** cuando, **valorados en un mismo momento de tiempo «t», tienen la misma cuantía**.

Esta definición se cumple cualquiera que sea el número de capitales que intervengan en la operación.

Si dos o más capitales se dice que son equivalentes resultará indiferente cualquiera de ellos, no habiendo preferencia por ninguno en particular. Por el contrario, si no se cumple la equivalencia habrá uno sobre el que tendremos preferencia y, en consecuencia, lo elegiremos.

Si el principio de equivalencia se cumple en un momento de tiempo concreto, no tiene por qué cumplirse en otro momento cualquiera (siendo lo normal que no se cumpla en ningún otro momento). Consecuencia de esta circunstancia será que la elección de la fecha donde se haga el estudio comparativo afectará y condicionará el resultado.

2. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA: SUSTITUCIÓN DE CAPITALES

La **sustitución de un(os) capital(es)** por otro u otros de vencimientos y/o cuantías diferentes a las anteriores, sólo se podrá llevar a cabo si **financieramente resultan ambas alternativas equivalentes**.

Para ver si dos alternativas son financieramente equivalentes se tendrán que valorar en un mismo momento de tiempo y obligar a que tengan las mismas cuantías. A este momento de tiempo donde se realiza la valoración se le denomina **época** o **fecha focal** o, simplemente, fecha de estudio.

Para plantear una sustitución de capitales el acreedor y el deudor han de estar de acuerdo en las siguientes condiciones fundamentales:

- Momento de tiempo a partir del cual se computan los vencimientos.
- Momento en el cual se realiza la equivalencia, teniendo en cuenta que al variar este dato varía el resultado del problema.
- Tanto de valoración de la operación.
- Decidir si se utiliza la capitalización o el descuento.

Casos posibles:

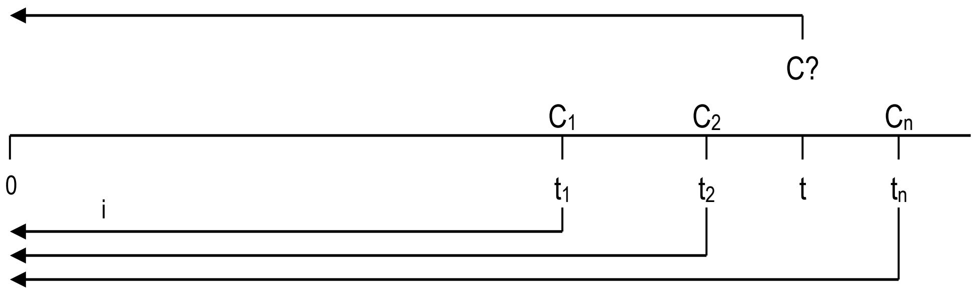
a. Determinación del capital común.
b. Determinación del vencimiento común.
c. Determinación del vencimiento medio.

2.1. DETERMINACIÓN DEL CAPITAL COMÚN

El **capital común** es la **cuantía C de un capital único que vence en el momento t, conocido, y que sustituye a varios capitales C_1, C_2, ..., C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... , t_n,** respectivamente, todos ellos conocidos en cuantías y tiempos.

Para su cálculo se valorarán en un mismo momento al tanto elegido, por una parte, los capitales de los que se parte y, por otra, el capital único desconocido que los va a sustituir.

Si la equivalencia se plantea en 0:



Realizando la valoración con tipo de interés (i)[1]:

$$\frac{C_1}{1+t_1\cdot i}+\frac{C_2}{1+t_2\cdot i}+\ldots+\frac{C_n}{1+t_n\cdot i}=\frac{C}{1+t\cdot i}$$

de donde se despejará C.

$$C=\left[\frac{C_1}{1+t_1\cdot i}+\frac{C_2}{1+t_2\cdot i}+\ldots+\frac{C_n}{1+t_n\cdot i}\right]\cdot(1+t\cdot i)=\left[\sum_{S=1}^{n}\frac{C_S}{1+t_S\cdot i}\right]\cdot(1+t\cdot i)$$

Realizando la valoración a tipo de descuento (d)[2]:

$$C_1\cdot(1-t_1\cdot d)+C_2\cdot(1-t_2\cdot d)+\ldots+C_n\cdot(1-t_n\cdot d)=C\cdot(1-t\cdot d)$$

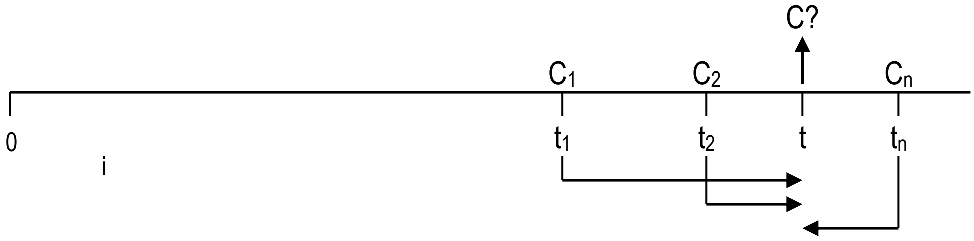
despejando finalmente C, queda:

[1] Recordemos que el capital inicial en el descuento simple racional se calcula de la siguiente forma: $C_0=\frac{C_n}{1+n\cdot i}$

[2] Recordemos que el capital inicial en el descuento simple comercial se calcula de la siguiente forma: $C_0=C_n\cdot(1-n\cdot d)$

$$C = \frac{C_1 \cdot (1 - t_1 \cdot d) + C_2 \cdot (1 - t_2 \cdot d) + \ldots + C_n \cdot (1 - t_n \cdot d)}{1 - t \cdot d} = \frac{\sum_{S=1}^{n} C_s \cdot (1 - t_s \cdot d)}{1 - t \cdot d}$$

Si el estudio se realiza en el momento t, habrá que tener en cuenta que aquellos capitales que tengan un vencimiento inferior a t habrá que capitalizarlos (empleando un tipo de interés i), mientras que aquellos capitales con vencimientos superiores habrá que descontarlos, pudiéndose emplear bien un tipo de interés o bien de descuento.



Realizando la valoración con tipo de interés (i)[3]:

$$C_1 \cdot [1 + (t - t_1) \cdot i] + C_2 \cdot [1 + (t - t_2) \cdot i] + \ldots + \frac{C_n}{1 + (t_n - t) \cdot i} = C$$

Se despejará C, pues todo lo demás se conoce. Para aquellos vencimientos que sean superiores a t a los que se les aplique un descuento comercial, la expresión anterior quedará como sigue:

$$C_1 \cdot [1 + (t - t_1) \cdot i] + C_2 \cdot [1 + (t - t_2) \cdot i] + \ldots + C_n \cdot [1 - (t - t_n) \cdot d] = C$$

EJEMPLO 1

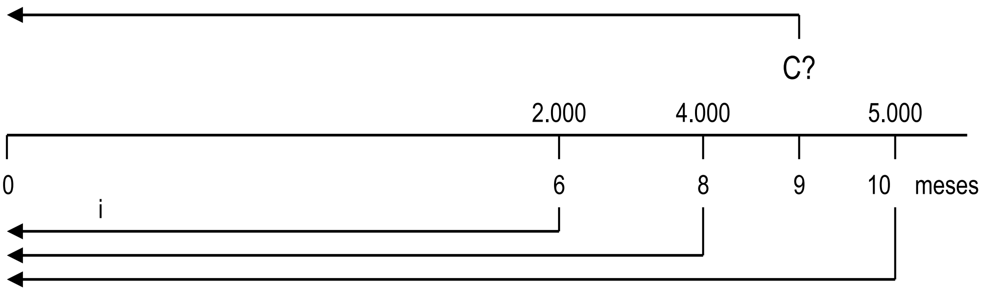
Un señor tiene tres deudas de 2.000, 4.000 y 5.000 euros con vencimientos a los 6, 8 y 10 meses, respectivamente. Propone sustituir las tres deudas por una sola a pagar a los 9 meses. Se pide calcular el importe a pagar si la operación se concierta al 8% de interés simple anual en los dos casos siguientes:

1er caso: fecha de estudio en 0:

.../...

[3] Recordemos que el capital final en el descuento simple racional se calcula de la siguiente forma: $C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$

.../...



Tenemos que pasar los meses a años, para lo cual los dividiremos entre 12:

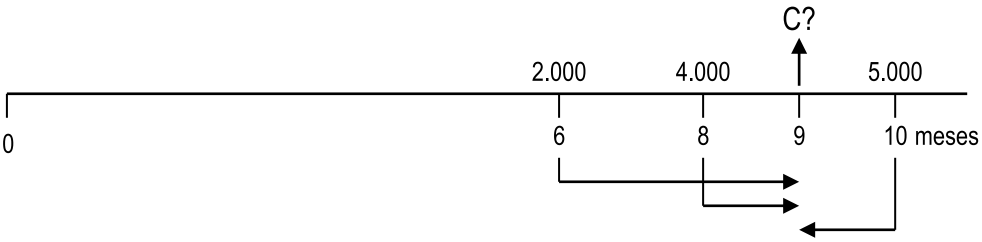
$$C = \left[\frac{C_1}{1+t_1\cdot i} + \frac{C_2}{1+t_2\cdot i} + \ldots + \frac{C_n}{1+t_n\cdot i}\right]\cdot(1+t\cdot i) = \left[\sum_{S=1}^{n}\frac{C_S}{1+t_S\cdot i}\right]\cdot(1+t\cdot i) =$$

$$= \left[\frac{2.000}{1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}08} + \frac{4.000}{1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}08} + \frac{5.000}{1+\frac{10}{12}\cdot 0{,}08}\right]\cdot\left(1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}08\right) = 10.408{,}04528\cdot 1{,}06 =$$

$$= 11.032{,}53€$$

$$C = 11.032{,}53€$$

2º caso: fecha de estudio en 9 meses:



$$C = C_1\cdot[1+(t-t_1)\cdot i] + C_2\cdot[1+(t-t_2)\cdot i] + \ldots + \frac{C_n}{1+(t_n-t)\cdot i} =$$

$$= 2.000\cdot\left[1+\frac{(9-6)}{12}\cdot 0{,}08\right] + 4.000\cdot\left[1+\frac{(9-8)}{12}\cdot 0{,}08\right] + \frac{5.000}{1+\frac{(10-9)}{12}\cdot 0{,}08} =$$

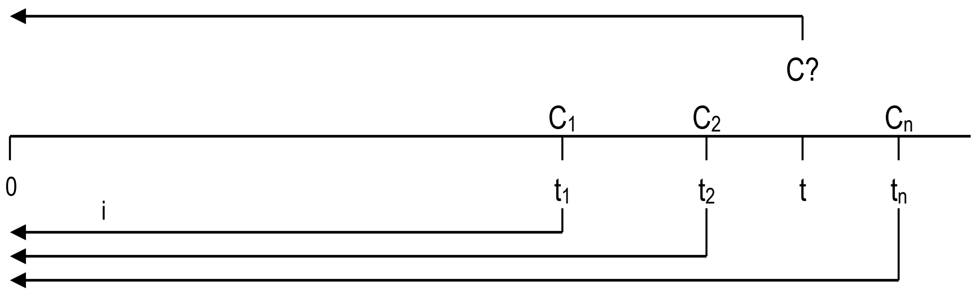
$$= 11.033{,}55€$$

$$C = 11.033{,}55€$$

2.2. DETERMINACIÓN DEL VENCIMIENTO COMÚN

El **vencimiento común** es el **momento de tiempo t en que vence un capital único C, conocido, que sustituye a varios capitales C_1, C_2, ... , Cn, con vencimientos en t_1, t_2, ... , t_n,** respectivamente, todos ellos conocidos. Se tiene que cumplir: $C \neq C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

Para obtener este vencimiento habría que proceder de la misma forma que en el caso del capital común, siendo ahora la incógnita el momento donde se sitúa ese capital único. Así, por ejemplo, **si la equivalencia se realiza en el origen** a tanto de interés (i):



Realizando la valoración con tipo de interés (i):

$$\frac{C_1}{1+t_1\cdot i}+\frac{C_2}{1+t_2\cdot i}+\ldots+\frac{C_n}{1+t_n\cdot i}=\frac{C}{1+t\cdot i}$$

simplificando:

$$C=\left[\sum_{S=1}^{n}\frac{C_S}{1+t_S\cdot i}\right]\cdot(1+t\cdot i)\Rightarrow 1+t\cdot i=\frac{C}{\sum_{S=1}^{n}\frac{C_S}{1+t_S\cdot i}}\Rightarrow t\cdot i=\frac{C}{\sum_{S=1}^{n}\frac{C_S}{1+t_S\cdot i}}-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{\frac{C}{\sum_{S=1}^{n}\frac{C_S}{1+t_S\cdot i}}-1}{i}$$

$$\boxed{t=\frac{\frac{C}{\sum_{S=1}^{n}\frac{C_S}{1+t_S\cdot i}}-1}{i}}$$

Realizando la valoración a tipo de descuento (d):

$$C_1\cdot(1-t_1\cdot d)+C_2\cdot(1-t_2\cdot d)+\ldots+C_n\cdot(1-t_n\cdot d)=C\cdot(1-t\cdot d)$$

se quitan los paréntesis y queda:

$$C_1-C_1\cdot t_1\cdot d+C_2-C_2\cdot t_2\cdot d+\ldots+C_n-C_n\cdot t_n\cdot d=C-C\cdot t\cdot d$$

reordenando en el primer miembro:

$$C_1+C_2+\ldots+C_n-d\cdot(C_1\cdot t_1+C_2\cdot t_2+\ldots+C_n\cdot t_n)=C-C\cdot t\cdot d$$

$$\sum_{S=1}^{n} C_S - d\cdot\sum_{S=1}^{n} C_S\cdot t_S = C - C\cdot t\cdot d \Rightarrow \sum_{S=1}^{n} C_S - d\cdot\sum_{S=1}^{n} C_S\cdot t_S - C = -C\cdot t\cdot d \Rightarrow$$

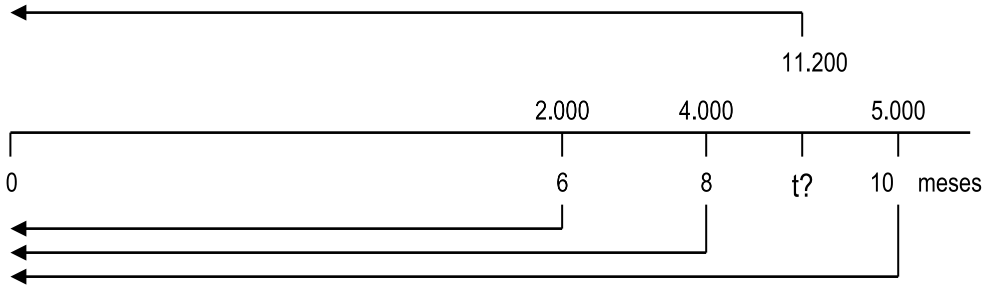
$$\Rightarrow -\sum_{S=1}^{n} C_S + d\cdot\sum_{S=1}^{n} C_S\cdot t_S + C = C\cdot t\cdot d \Rightarrow C - \sum_{S=1}^{n} C_S + d\cdot\sum_{S=1}^{n} C_S\cdot t_S = C\cdot t\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C - \sum_{S=1}^{n} C_S + d\cdot\sum_{S=1}^{n} C_S\cdot t_S}{C\cdot d} = t$$

$$\boxed{t = \frac{C - \sum_{S=1}^{n} C_S + d\cdot\sum_{S=1}^{n} C_S\cdot t_S}{C\cdot d}}$$

EJEMPLO 2

Un señor tiene tres deudas de 2.000, 4.000 y 5.000 euros con vencimientos a los 6, 8 y 10 meses, respectivamente. De acuerdo con el acreedor acuerdan hoy sustituir las tres deudas por una sola de 11.200€. Se pide calcular el momento si la operación se concierta al 8% de interés simple anual. La fecha de estudio es el momento cero.



Tenemos que pasar los meses a años, para lo cual los dividiremos entre 12:

$$t = \frac{\dfrac{C}{\sum_{S=1}^{n} \dfrac{C_S}{1+t_S\cdot i}} - 1}{i} = \frac{\dfrac{11.200}{\dfrac{2.000}{1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}08} + \dfrac{4.000}{1+\frac{8}{12}\cdot 0{,}08} + \dfrac{5.000}{1+\frac{10}{12}\cdot 0{,}08}} - 1}{0{,}08} =$$

$$= \frac{0{,}07609063}{0{,}08} = 0{,}951133\,\text{años}$$

Pasamos los años a meses multiplicando el tiempo en añosr por 12 meses:

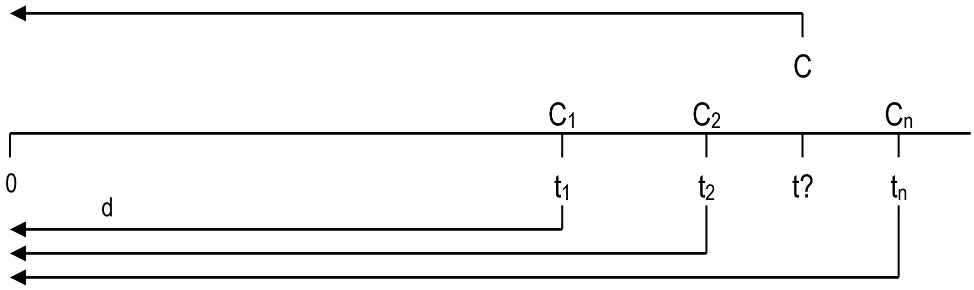
$$t = 0{,}951133\cdot 12 = 11{,}41\,\text{meses}$$

2.3. Determinación del Vencimiento Medio

El **vencimiento medio** es el **momento de tiempo t en que vence un capital único C, conocido, que sustituye a varios capitales C_1, C_2, ... , C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... , t_n,** respectivamente, todos ellos conocidos. Se tiene que cumplir: $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

El cálculo es idéntico al vencimiento común, lo único que varía es la cuantía del capital único que sustituye al conjunto de capitales de los que se parte, que ahora debe ser igual a la suma aritmética de las cuantías a las que sustituye.

Realizando el estudio de equivalencia en el origen y empleando un tipo de descuento d, quedaría así:



$$C_1 \cdot (1 - t_1 \cdot d) + C_2 \cdot (1 - t_2 \cdot d) + \ldots + C_n \cdot (1 - t_n \cdot d) = C \cdot (1 - t \cdot d)$$

quitando los paréntesis:

$$C_1 - C_1 \cdot t_1 \cdot d + C_2 - C_2 \cdot t_2 \cdot d + \ldots + C_n - C_n \cdot t_n \cdot d = C - C \cdot t \cdot d$$

reordenando en el primer miembro:

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n - d \cdot (C_1 \cdot t_1 + C_2 \cdot t_2 + \ldots + C_n \cdot t_n) = C - C \cdot t \cdot d$$

como $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

$$\cancel{C} - d \cdot (C_1 \cdot t_1 + C_2 \cdot t_2 + \ldots + C_n \cdot t_n) = \cancel{C} - C \cdot t \cdot d \Rightarrow -d \cdot (C_1 \cdot t_1 + C_2 \cdot t_2 + \ldots + C_n \cdot t_n) =$$

$$= -C \cdot t \cdot d \Rightarrow -d \cdot \sum_{S=1}^{n} C_S \cdot t_S = -C \cdot t \cdot d$$

dividiendo la ecuación por –d:

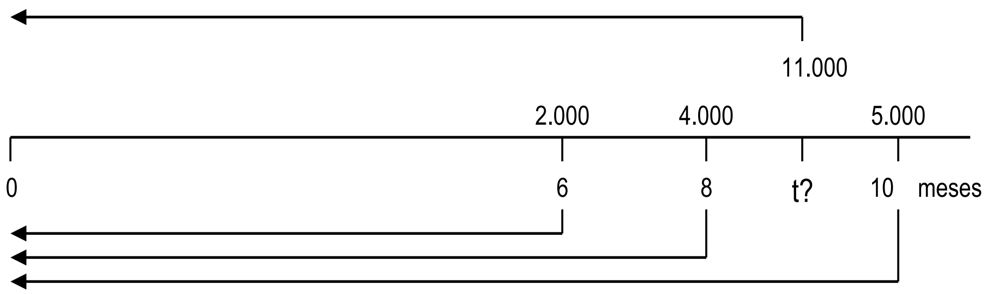
$$\sum_{S=1}^{n} C_S \cdot t_S = C \cdot t \Rightarrow \frac{\sum_{S=1}^{n} C_S \cdot t_S}{C} = t$$

$$\boxed{t = \frac{\sum_{S=1}^{n} C_S \cdot t_S}{C}}$$

En definitiva, **el vencimiento medio resulta ser una media aritmética ponderada de los vencimientos de los capitales de partida, siendo el importe de dichos capitales los factores de ponderación**.

EJEMPLO 3

Un señor tiene tres deudas de 2.000, 4.000 y 5.000 euros con vencimientos a los 6, 8 y 10 meses, respectivamente. De acuerdo con el acreedor acuerdan hoy sustituir las tres deudas por una sola de 11.000€. Se pide calcular el momento de pago si la operación se concierta al 8% de descuento simple anual. La fecha de estudio es el momento cero.



Tenemos que pasar los meses a años, para lo cual los dividiremos entre 12:

$$t = \frac{\sum_{S=1}^{n} C_S \cdot t_S}{C} = \frac{2.000 \cdot \frac{6}{12} + 4.000 \cdot \frac{8}{12} + 5.000 \cdot \frac{10}{12}}{11.000} = 0{,}712121 \text{años}$$

Pasamos los años a meses multiplicando el tiempo anterior por 12 meses que tiene un año:

$$t = 0{,}712121 \cdot 12 = 8{,}55 \text{ meses}$$

TEMA 4: APLICACIONES DE LA CAPITALIZACIÓN SIMPLE: LETRA DE CAMBIO Y CUENTA CORRIENTE

ÍNDICE

1. DESCUENTO DE EFECTOS

1.1. CONCEPTO DE DESCUENTO DE EFECTOS

El **descuento bancario** es una operación financiera que consiste en la presentación de un título de crédito[1] en una entidad financiera para que ésta anticipe su importe y gestione su cobro.

El **tenedor**[2] cede el título al banco y éste le abona su importe en dinero, descontando el importe de las cantidades cobradas por los servicios prestados.

[1] Un título de crédito es un documento que expresa en su contenido, un derecho literal y autónomo, y que con solo poseer ese soporte material (el documento) puede ejecutarse, sin probar los hechos que determinaron su emisión. Son ejemplos de títulos de crédito, las acciones de sociedades anónimas, los pagarés y los cheques.

[2] Es la persona que tiene en su poder el título de crédito.

1.2. CLASIFICACIÓN DE LOS DESCUENTOS

Según el título de crédito presentado a descuento, distinguimos:

- DESCUENTO BANCARIO, cuando el título es una **letra de cambio**. A su vez se puede distinguir entre:
  - Descuento comercial. Cuando las letras proceden de una venta o de una prestación de servicios que constituyen la **actividad habitual del cedente**[3].
  - Descuento financiero. Cuando las letras son la instrumentalización de un préstamo concedido por el banco a su cliente.
- DESCUENTO NO CAMBIARIO, cuando se trata de cualquier otro derecho de cobro (pagarés[4], certificaciones de obra, facturas, recibos,…).

1.3. CÁLCULO FINANCIERO DEL DESCUENTO

El **importe anticipado por la entidad al cliente** se denomina **efectivo o líquido**, y se obtiene restando del importe de la letra (nominal) el importe de todos los costes originados por el descuento (intereses, comisiones y otros gastos).

- **Intereses**: cantidad cobrada por la anticipación del importe de la letra. Se calcula en función del nominal descontado, el tiempo que se anticipa su vencimiento y el tipo de interés aplicado por la entidad financiera.

$$\boxed{\text{Intereses} = N \cdot \frac{t}{360} \cdot d}$$

siendo:

$N \equiv \text{Nominal del efecto}$

[3] Cuando dice el cedente se refiere a la persona, empresa u otra institución que llevó la letra a la entidad de crédito para su descuento.
[4] Aunque las diferencias entre una letra de cambio y un pagaré son mínimas, el descuento se considera bancario en el primer caso y no cambiario en el segundo.

$t \equiv$ Número de días que el banco anticipa el dinero

$d \equiv$ Tipo de descuento anual, en tanto por uno

- **Comisiones**: también denominado quebranto o daño, es la cantidad cobrada por la gestión del cobro de la letra que realiza el banco. Se obtiene tomando la mayor de las siguientes cantidades:
  - Un porcentaje sobre el nominal.
  - Una cantidad fija (mínimo).
- **Otros gastos**: son los denominados suplidos, donde se pueden incluir los siguientes conceptos: el timbre[5], correspondiente al Impuesto de Actos Jurídicos Documentados (IAJD) y el correo, según la tarifa postal.

EJEMPLO 1

Se desea descontar una letra de 3.250 euros cuando aún faltan 60 días para su vencimiento en las siguientes condiciones:

- Tipo de descuento: 14% anual
- Comisión: 3‰ (mínimo 5 euros)
- Otros gastos: 2 euros

Se pide: Conocer el efectivo recibido por el cedente.

Nominal..		**3.250,00**
Intereses $(3.250 \cdot 0{,}14 \cdot 60/360)$..........	75,83	
Comisiones $(3.250 \cdot 0{,}003)$................	9,75	
Otros gastos................................	2,00	
Total gastos..		87,58
Efectivo..		**3.162,42**

1.4. LETRA DE VUELTA

La **letra de vuelta** es aquella que se devuelve al cedente al no ser atendido su pago a su vencimiento por parte del librado[6].

5 Sello emitido por el Estado para algunos documentos, como pago al fisco en concepto de derechos.
6 Es el deudor, quien debe pagar la letra de cambio cuando llegue la fecha indicada o de vencimiento.

Si la letra había sido descontada previamente, el banco se la cargará en cuenta del cliente, junto con los gastos originados por el impago.

⇒ Gastos de devolución:
- Comisión de devolución.
- Correo.

⇒ Gastos de protesto:
- Comisión de protesto.
- Coste del protesto.

⇒ Intereses: Los intereses se generan si el banco cobra con posterioridad a la fecha de vencimiento de la letra devuelta por impagada. Se calcularán sobre la suma del nominal de la letra impagada más el importe de todos los gastos originados por el impago, por el período transcurrido entre vencimiento y cargo.

EJEMPLO 2

Llegado el vencimiento de la letra del ejemplo 1, ésta es devuelta por impagada, cargándose en la cuenta del cedente por los siguientes conceptos:

- Comisión de devolución: 1‰
- Comisión de protesto: 2‰
- Correo: 2,50 euros

Se pide: Determinar el importe adeudado en la cuenta corriente del cedente.

Nominal...		**3.250,00**
Comisión devolución $(3.250 \cdot 0{,}001)$.......	3,25	
Comisiones de protesto $(3.250 \cdot 0{,}002)$....	6,50	
Correo..	2,50	
Total gastos...		12,25
Efectivo...		**3.262,25**

1.5. Letra de Resaca o Renovación

La **letra de resaca o renovación** es aquella que se emite para recuperar otra anterior que ha sido devuelta, junto con los gastos que originó su devolución.

Se trata de determinar **cuál ha de ser el nominal de esta nueva letra de forma tal que todos los gastos se le repercutan a quien los originó** (el **librado**).

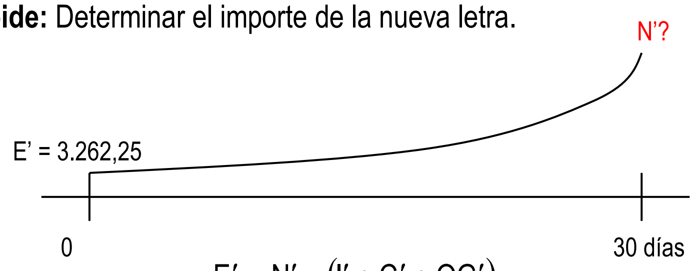
Para su cálculo se tratará como una letra que se emite y descuenta en unas condiciones normales, con la particularidad de que ahora el efectivo es conocido (la cantidad que se desea recuperar –nominal impagado más los gastos de la devolución más los gastos del giro y descuento de la nueva letra) y el nominal es desconocido (que hay que calcular).

EJEMPLO 3

Finalmente para recuperar la letra de vuelta por impagada del ejemplo 1 se llega al acuerdo de girar una nueva letra con vencimiento a 30 días, en las siguientes condiciones:

- Tipo de descuento: 15%
- Comisión: 3‰
- Otros gastos: 10 euros

Se pide: Determinar el importe de la nueva letra.



$$E' = N' - (I' + C' + OG')$$

$$3.262{,}25 = N' - \left(N' \cdot 0{,}15 \cdot \frac{30}{360} + N' \cdot 0{,}003 + 10)\right) = N' - N' \cdot 0{,}15 \cdot \frac{30}{360} - N' \cdot 0{,}003 - 10$$

$$3.262{,}25 + 10 = N' \cdot \left(1 - 0{,}15 \cdot \frac{30}{360} - 0{,}003\right)$$

$$3.272{,}25 = 0{,}9845 \cdot N' \Rightarrow N' = \frac{3.272{,}75}{0{,}9845} \Rightarrow N' = 3.323{,}77€$$

1.6. Descuento de una Remesa de Efectos

En ocasiones no se descuentan los efectos de uno en uno, sino que se acude al banco con un conjunto de ellos, una **remesa de efectos**, agrupados por períodos temporales, para descontarlos conjuntamente en las mismas condiciones generales.

El documento en el que se liquida el descuento de la remesa se denomina **factura de negociación**.

El proceso de liquidación que se sigue es el siguiente:

- Confeccionar la factura con todos los efectos que componen la remesa.
- Sumar cada una de los tres siguientes conceptos:
  - Importe nominal.
  - Importe intereses.
  - Importe comisiones.
- Si han existido gastos (correo, timbres, etc.) sus importes se consignarán aparte.
- El importe líquido resultante de la negociación se obtendrá restando del nominal total de la remesa el montante de todos los gastos habidos.

EJEMPLO 4

Se presenta al descuento la siguiente remesa de efectos:

Efecto	Nominal	Días de descuento
A	30.000	20
B	20.000	25
C	15.000	30

Las condiciones de descuento son:

- Tipo de descuento: 12%
- Comisión: 5‰ (mínimo 90 euros)
- Correo: 6 euros/efecto

Se pide: Descontar la remesa anterior.

…/…

…/…

Efecto	Nominal	Días	Tipo	Intereses	Porcentaje	Comisión	Correo
A	30.000	20	12%	200,00	5‰	150	6
B	20.000	25	12%	166,67	5‰	100	6
C	15.000	30	12%	150,00	mínimo	90	6
	65.000			516,67		340	18

Nominal……………………………………………		**65.000,00**
Interés…………………………………………	516,67	
Comisión………………………………………	340,00	
Correo…………………………………………	18,00	
Total gastos…………………………………………		874,67
Efectivo……………………………………………		**64.125,33**

2. CUENTAS CORRIENTES

2.1. DEFINICIÓN DE CUENTA CORRIENTE

Un **contrato de cuenta corriente** es un acuerdo entre dos partes con relaciones comerciales frecuentes, por el que ambas se comprometen a ir anotando el importe de las operaciones que hagan entre ellas para liquidarlas todas juntas en la fecha que señalen.

Pueden pactarse estas cuentas corrientes entre empresas o particulares, pero donde más se usan es en las relaciones entre los bancos y sus clientes.

Las **cuentas corrientes bancarias**, a su vez, pueden ser de dos tipos: de depósito y de crédito.

Una **cuenta corriente de depósito** es un contrato bancario por el que el titular puede ingresar fondos en una cuenta de un banco, o retirarlos total o parcialmente sin previo aviso.

En la **cuenta corriente de crédito** es el banco quien concede al cliente (acreditado) la posibilidad de obtener financiación hasta una cuantía establecida de antemano (límite del crédito).

Nos dedicaremos al estudio de las primeras, que si bien es cierto que se trata más de un instrumento de gestión en virtud del cual el banco se compromete a realizar, por cuenta de su cliente, cuantas operaciones son inherentes al «servicio de caja», pueden llegar a convertirse en una fuente de financiación (**descubierto bancario**).

2.2. CLASES DE CUENTAS CORRIENTES

Las cuentas corrientes **de depósito** se pueden clasificar según diversos criterios:

I. Según sus titulares:

- Individual: abierta a nombre de un solo titular.
- Conjunta: cuando hay dos o más titulares, exigiéndose que cualquier acto deba ser realizado conjuntamente por todos los titulares, exigiendo la entidad la firma de todos ellos.
- Indistinta: cuando hay dos o más titulares, pudiendo disponer cualquiera de ellos de los fondos utilizando únicamente su firma.

II. Según el devengo de interés:

- Cuentas corrientes sin interés: son aquellas en las que no se paga ningún tanto por el aplazamiento de los capitales. Para hallar la liquidación bastará calcular la diferencia entre el Debe y el Haber de dicha cuenta.
- Cuentas corrientes con interés: en este caso los capitales producen interés por el período que media entre la **fecha valor de la operación** y la **fecha de liquidación** de la cuenta. En las cuentas corrientes con interés, éste puede ser:
  - ✓ Recíproco: cuando a los capitales deudores y a los acreedores se les aplica el mismo tanto de interés.

- ✓ No recíproco: cuando el tanto aplicado a los capitales deudores no es el mismo que el aplicado a los capitales acreedores.

Para liquidar estas cuentas no bastará con calcular la diferencia entre las sumas del Debe y del Haber sino que deberemos hallar también el ***interés***.

2.3. Liquidación de Cuentas Corrientes

Conocidos los capitales y el tanto de interés, que se fija de antemano, sólo falta hallar el tiempo durante el cual produce intereses cada capital. Para ello se pueden seguir tres métodos: **directo, indirecto y hamburgués**. A continuación se comentará brevemente el funcionamiento de los dos primeros y se estudiará con más detalle el método hamburgués, que es el sistema que actualmente se emplea.

2.3.1. Método Directo

Considera que cada capital, deudor o acreedor, devenga intereses durante los días que median desde la fecha de su vencimiento hasta el momento de liquidación.

2.3.2. Método Indirecto

En este sistema los capitales generan intereses desde la fecha en la que se originan hasta una fecha fija denominada **época**. Ello supone un cálculo de intereses que no se corresponden con la realidad, por lo que cuando se conozca la fecha de liquidación deben rectificarse.

2.3.3. Método Hamburgués o de Saldos

Este método recibe el nombre de hamburgués porque se usó por primera vez en Hamburgo. Y de saldos porque los números comerciales se calculan en base a los saldos que van apareciendo en la cuenta (y no en función de los capitales).

Los ***pasos*** a seguir para liquidar la cuenta por este método son los siguientes:

1. Se *ordenan* las operaciones según fecha-valor.

2. Se halla la columna de *saldos* como diferencia entre el Debe y el Haber de capitales. Cada vez que hagamos una anotación cambiará el saldo de la cuenta.
3. Hallar los *días*, que se cuentan de vencimiento a vencimiento, y del último vencimiento a la fecha de cierre.
4. Se calculan los *números comerciales* multiplicando los saldos por los días y se colocan en el Debe si el saldo es deudor, o en el Haber si el saldo es acreedor.
5. A partir de aquí terminaremos la liquidación del siguiente modo:
   a. Cálculo del *interés*.

$$\text{Intereses deudores} = \text{Suma de números deudores} \cdot \text{Multiplicador fijo del banco}$$

$$\text{Intereses acreedores} = \text{Suma de números acreedores} \cdot \text{Multiplicador fijo del cliente}$$

El **multiplicador fijo** es el cociente **resultante de dividir el tipo de interés de liquidación (anual) entre el total de días del año (360 ó 365)**.

   b. Cálculo del IRC (Impuesto de Rentas de Capital) sobre los intereses acreedores.
   c. Cálculo del saldo a cuenta nueva.

EJEMPLO 5

Liquidar por el método hamburgués la siguiente cuenta, cuyo titular, Óscar de Lózar, ha realizado los siguientes movimientos:

Fecha	Concepto	Cuantía	Signo
06-05	Ingreso apertura	35.000	Haber
14-05	Cheque a compensar a su favor	20.000	Haber
23-05	Cheque c/c	5.000	Debe
11-06	Ingreso en efectivo	10.000	Haber

.../...

…/…

Las condiciones de liquidación son las siguientes:

- Fecha de liquidación: el 30 de junio.
- Por cada apunte una comisión de 3 euros.
- IRC: 15%
- El interés anual aplicado es el 6%.

Liquidación del periodo 06-05 al 30-06

Fecha	Movimiento	Cuantía	Signo	Saldos	Signo	Días	Números acreedores
06-05	Ingreso apertura	35.000	H	35.000	H	8	280.000
14-05	Cheque a compensar a su favor	20.000	H	55.000	H	9	495.000
23-05	Cheque c/c	5.000	D	50.000	H	19	950.000
11-06	Ingreso en efectivo	10.000	H	60.000	H	19	1.140.000
30-06						55	2.865.000

Cálculo de los días:

Del 6 al 14 de mayo	8 días
Del 14 al 23 de mayo	9 días
Del 23 de mayo al 11 de junio	19 días
Del 11 al 30 de junio	19 días

Cálculo de los números comerciales acreedores:

$35.000 \cdot 8$	280.000
$55.000 \cdot 9$	495.000
$50.000 \cdot 19$	950.000
$60.000 \cdot 19$	1.140.000
Total	2.865.000

Cálculo de los números comerciales acreedores:

$$\text{Intereses acreedores} = \text{Suma de números acreedores} \cdot \text{Multiplicador fijo del cliente}$$

$$\text{Intereses acreedores} = 2.865.000 \cdot \frac{0{,}06}{365} = 470{,}96€$$

Retención impuestros:

$$\text{Retención impuestos} = 15\% \text{ de } 470{,}96 = 70{,}64€$$

Comisión de administración (número de apuntes):

$$\text{Comisión de administración} = 3 \cdot 4 = 12€$$

…/…

…/…

Saldo después de la liquidación:

$$\text{Saldo después de la liquidación} = 60.000 + 470{,}96 - 70{,}64 - 12 = 60.388{,}32€$$

TEMA 5: CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

ÍNDICE

1. CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Las operaciones en régimen de compuesta se caracterizan porque los intereses, a diferencia de lo que ocurre en régimen de simple, a medida que se van generando pasan a formar parte del capital de partida, se van acumulando, y producen a su vez intereses en períodos siguientes (son productivos).

En definitiva, lo que tiene lugar es una capitalización periódica de los intereses. De esta forma los intereses generados en cada período se calculan sobre capitales distintos (cada vez mayores ya que incorporan los intereses de períodos anteriores).

1.1. CONCEPTO

La **capitalización compuesta** es, por tanto, una operación financiera cuyo objeto es la sustitución de un capital por otro equivalente con vencimiento posterior mediante la aplicación de la ley financiera de capitalización compuesta.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA OPERACIÓN

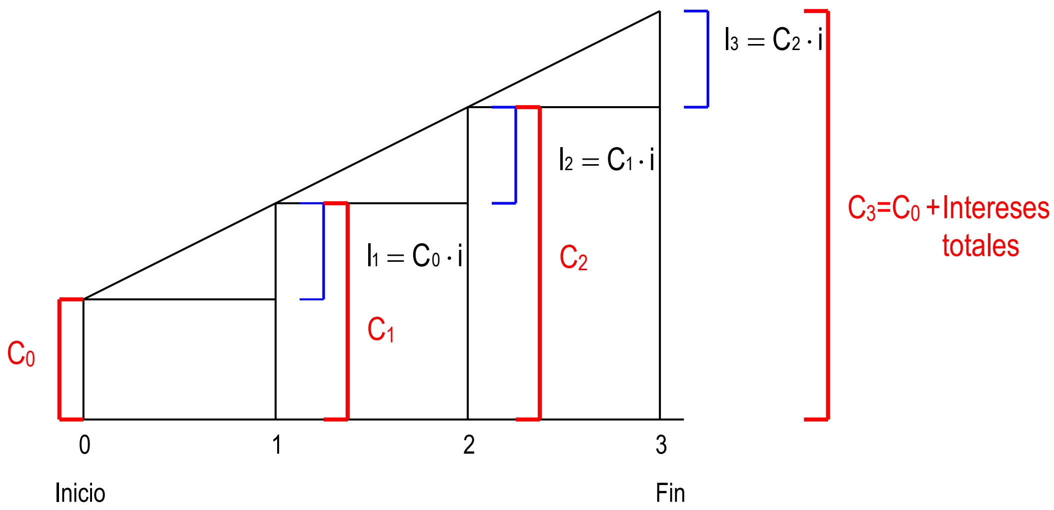
El **capital final (montante) (C_n)** se va formando por la acumulación al **capital inicial (C_0)** de los intereses que periódicamente se van generando y que, en este caso, se van acumulando al mismo durante el **tiempo que dure la operación (n)**, pudiéndose disponer de ellos al final junto con el capital inicialmente invertido.

1.3. CARACTERÍSTICAS DE LA OPERACIÓN

Los **intereses son productivos**, lo que significa que:

- A medida que se generan **se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses** en los períodos siguientes.
- **Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital existente** al inicio de dicho período.

Gráficamente para una operación de tres períodos:



1.4. DESARROLLO DE LA OPERACIÓN

El capital al final de cada período es el resultado de añadir al capital existente al inicio del mismo los intereses generados durante dicho período. De esta forma, la evolución del montante conseguido en cada momento es el siguiente:

Momento 0:
C_0

Momento 1:
$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + (C_0 \cdot i) = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i)$

Momento 2:

$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^2$

Momento 3:
$C_3 = C_2 + I_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^3$

…

Momento n:
$C_n = C_{n-1} + I_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i = C_{n-1} \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^n$

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n}$$

Expresión que permite calcular el capital final o montante (C_n) en régimen de compuesta, conocidos el capital inicial (C_0), el tipo de interés (i) y la duración (n) de la operación.

Expresión aplicable cuando el tipo de interés de la operación no varía. <u>En caso contrario habrá que trabajar con el tipo vigente en cada período</u>.

A partir de la expresión anterior (**denominada fórmula fundamental de la capitalización compuesta**) además de calcular montantes, podremos, conocidos tres datos cualesquiera, despejar el cuarto restante.[1].

Finalmente, hay que tener en cuenta que **n** lo que indica es el **número de veces que se han generado (y acumulado) intereses al capital inicial**, por tanto, esa variable siempre ha de estar en la misma unidad de tiempo que el tipo de interés (no importando cuál sea).

EJEMPLO 1

Calcular el montante obtenido al invertir 200 euros al 5% anual durante 10 años en régimen de capitalización compuesta.

$$C_{10} = 200 \cdot (1 + 0{,}05)^{10} = 325{,}78€$$

Si se hubiese calculado en simple:

$$C_{10} = 200 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 10) = 300€$$

La diferencia entre los dos montantes (25,78 euros) son los intereses producidos por los intereses generados y acumulados hasta el final.

1.5. CÁLCULO DEL CAPITAL INICIAL

Partiendo de la fórmula de cálculo del capital final o montante y conocidos éste, la duración de la operación y el tanto de interés, bastará con despejar de la misma:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

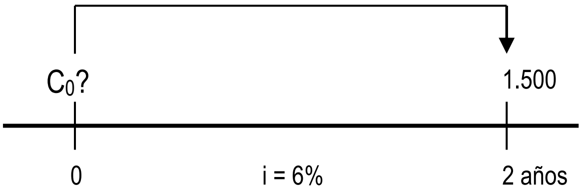
despejando C_0 resulta:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}}$$

[1] Para aplicar la fórmula fundamental de la capitalización compuesta es preciso que el tipo de interés esté expresado en tanto por uno.

EJEMPLO 2

¿Cuánto deberé invertir hoy si quiero disponer dentro de 2 años de 1.500 euros para comparme un coche, si me aseguran un 6% de interés anual compuesto para ese plazo?



$$C_0 = \frac{1.500}{(1+0{,}06)^2} = \frac{1.500}{1{,}1236} = 1.334{,}99€$$

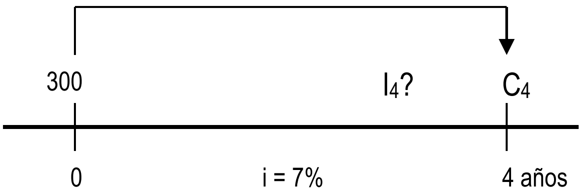
1.6. CÁLCULO DE LOS INTERESES TOTALES

Conocidos los capitales inicial y final, se obtendrá por diferencias entre ambos:

$$\boxed{I_n = C_n - C_0}$$

EJEMPLO 3

¿Qué intereses producirán 300 euros invertidos 4 años al 7% compuesto anual?



$$C_4 = 300 \cdot (1+0{,}07)^4 = 393{,}24€$$

$$I_n = 393{,}24 - 300 = 93{,}24€$$

1.7. CÁLCULO DEL TIPO DE INTERÉS

Si se conoce el resto de elementos de la operación: capital inicial, capital final y duración, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización compuesta y despejar la variable desconocida.

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

- Pasar el C_0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

- Quitar la potencia (extrayendo raíz n a los dos miembros):

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = \sqrt[n]{(1+i)^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = 1+i$$

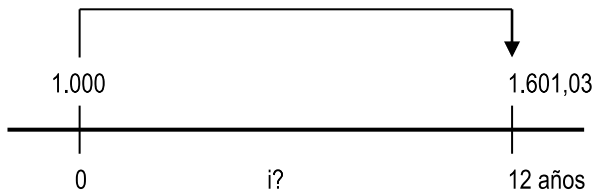
- Despejar el tipo de interés:

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = i$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1}$$

EJEMPLO 4

Determinar el tanto de interés anual a que deben invertirse 1.000 euros para que en 12 años se obtenga un montante de 1.601,03 euros.



$$1.000 \cdot (1+i)^{12} = 1.601{,}03€$$

$$i = \sqrt[12]{\frac{1.601{,}03}{1.000}} - 1 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04 = 4\%$$

1.8. CÁLCULO DE LA DURACIÓN

Conocidos los demás componentes de la operación: capital inicial, capital final y tipo de interés, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización compuesta y despejar la variable desconocida.

- Punto de partida:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

- Pasar el C_0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

- Extraemos logaritmos a ambos miembros:

$$\log \frac{C_n}{C_0} = \log (1+i)^n$$

- Aplicamos propiedades a los logaritmos:

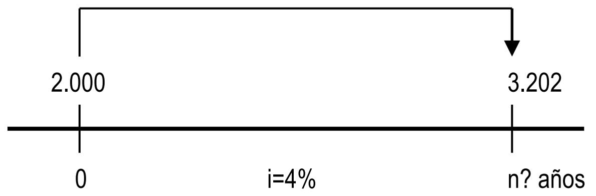
$$\log C_n - \log C_0 = n \cdot \log (1+i)$$

- Despejar la duración:

$$\boxed{n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log (1+i)}}$$

EJEMPLO 5

Un capital de 2.000 euros colocado a interés compuesto al 4% anual asciende a 3.202 euros. Determinar el tiempo que estuvo impuesto.



$$2.000 \cdot (1+0{,}04)^n = 3.202€$$

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log (1+i)} = \frac{\log 3.202 - \log 2.000}{\log (1+0{,}04)} =$$

$$= \frac{\log 3.202 - \log 2.000}{\log (1+0{,}04)} = \frac{0{,}20439}{0{,}01703} = 12 \text{ años}$$

2. TANTOS EQUIVALENTES

La definición de **tantos equivalentes** es la misma que la vista en régimen de simple, esto es, dos tantos cualesquiera, expresados en distintas unidades de tiempo, son tantos equivalentes cuando aplicados a un mismo capital inicial y durante un mismo período de tiempo producen el mismo interés o generan el mismo capital final o montante.

Como ya se comentó cuando se hablaba del interés simple, la variación en la frecuencia del cálculo (y abono) de los intereses suponía cambiar el tipo de interés a aplicar para que la operación no se viera afectada finalmente. Entonces se comprobó que los tantos de interés equivalentes en simple son proporcionales, es decir, cumplen la siguiente expresión:

$$\boxed{i = i_k \cdot k}$$

donde k se denominaba frecuencia de capitalización y se definía como el número de partes iguales en las que se divide el período de referencia (considerando como tal el año).

Sin embargo, **esta relación de proporcionalidad no va a ser válida en régimen de compuesta**, ya que al irse acumulando los intereses generados al capital de partida, el cálculo de intereses se hace sobre una base cada vez más grande; por tanto, **cuanto mayor sea la frecuencia de capitalización antes se acumularán los intereses y antes generarán nuevos intereses**, por lo que existirán diferencias en función de la frecuencia de acumulación de los mismos al capital para un tanto de interés dado.

Este carácter acumulativo de los intereses se ha de compensar con una aplicación de un tipo más pequeño que el proporcional en función de la frecuencia de cómputo de intereses.

Todo esto se puede apreciar en el siguiente ejemplo, consistente en determinar el montante resultante de invertir 1.000 euros durante 1 año en las siguientes condiciones:

a. Interés anual del 12%:

$$C_n = 1.000 \cdot (1 + 0{,}12)^1 = 1.120{,}00€$$

b. Interés semestral del 6%:

$$C_n = 1.000 \cdot (1 + 0{,}06)^2 = 1.123{,}60€$$

c. Interés trimestral del 3%:

$$C_n = 1.000 \cdot (1 + 0{,}03)^4 = 1.125{,}51€$$

Los resultados no son los mismos, debido a que la capitalización de los intereses se está realizando con diferentes frecuencias manteniendo la proporcionalidad en los diferentes tipos aplicados.

Para conseguir que, cualquiera que sea la frecuencia de capitalización, el montante final siga siendo el mismo es necesario cambiar la ley de equivalencia de los tantos.

2.1. RELACIÓN DE TANTOS EQUIVALENTES EN COMPUESTA

Los tantos en compuesta para que resulten equivalentes han de guardar la siguiente relación:

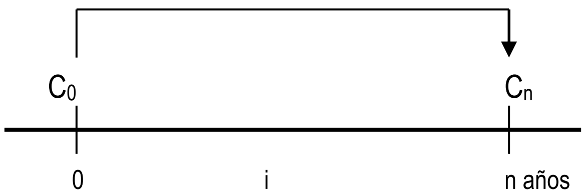
$$1+i=(1+i_k)^k$$

donde **k** es la **frecuencia de capitalización**, que indica:

- El **número de partes iguales en las que se divide el período de referencia que se tome** (habitualmente el año).
- Cada cuánto tiempo se hacen productivos los intereses, esto es, **cada cuánto tiempo se acumulan los intereses**, dentro del período, al capital para producir nuevos intereses.

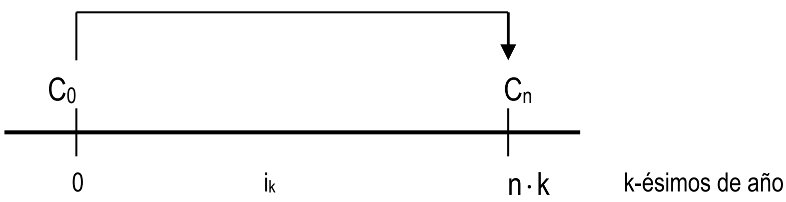
Esta relación se obtiene a partir de la definición de equivalencia vista anteriormente, obligando a que un capital (C_0) colocado un determinado período de tiempo (n años) genere el mismo montante (C_n) con independencia de la frecuencia de acumulación de intereses (i o i_k):

Utilizando el tanto anual i, el montante obtenido será:



$$C_n=C_0\cdot(1+i)^n$$

Utilizando el tanto k-esimal i_k, el montante obtenido será:



$$C_n = C_0 \cdot (1+i_k)^{n \cdot k}$$

Si queremos que **el montante sea el mismo en los dos casos, se tiene que producir la igualdad entre los resultados de ambas operaciones**, esto es, dado que la operación es la misma –ya que lo único que ha cambiado es la frecuencia de cálculo de los intereses–, se debe conseguir el mismo capital final en ambos casos, por tanto, obligando a que se cumpla esa igualdad de montantes:

$$C_0 \cdot (1+i)^n = C_0 \cdot (1+i_k)^{n \cdot k}$$

Simplificando la igualdad, eliminando C_0 y la potencia n queda finalmente:

$$\boxed{(1+i) = (1+i_k)^k}$$

Expresión que indica la relación en la que han de estar los tantos, i e i_k, para que produzcan el mismo efecto, es decir, para que sean equivalentes.

El valor de i en función de i_k será:

$$\boxed{i = (1+i_k)^k - 1}$$

El valor de i_k en función de i será:

$$(1+i) = (1+i_k)^k \Rightarrow \sqrt[k]{(1+i)} = \sqrt[k]{(1+i_k)^k} \Rightarrow (1+i)^{1/k} = 1+i_k \Rightarrow 1+i_k = (1+i)^{1/k}$$

$$\boxed{i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$

EJEMPLO 6

Determinar el montante resultante de invertir 1.000 euros durante 1 año a un tanto del 12% efectivo[2] anual,suponiendo:

a. Devengo anual de intereses:

$$i = 0{,}12$$

$$C_1 = 1.000 \cdot (1+0{,}12)^1 = 1.120{,}00€$$

.../...

[2] Cuando habla de tanto por ciento efectivo anual nos está indicando el problema que quiere que se utilicen tantos equivalentes para que el montante final (C_1) sea igual al que resultaría de aplicar el 12% anual sea cual sea el devengo de los intereses.

.../...

b. Devengo semestral de intereses:

Puesto que el tipo que se conoce es anual y ahora la frecuencia de cálculo es semestral, habrá que calcular previamente el tanto semestral equivalente al anual de partida, para después calcular el montante.

$$i_2 = (1+0{,}12)^{1/2} - 1 = 1{,}05830 - 1 = 0{,}05830$$

$$C_1 = 1.000 \cdot (1+0{,}05830)^2 = 1.120{,}00€$$

c. Devengo trimestral de inteseses:

Igual que en el caso anterior, habrá que calcular el tanto trimestral equivalente al anual conocido.

$$i_4 = (1+0{,}12)^{1/4} - 1 = 1{,}02874 - 1 = 0{,}02874$$

$$C_1 = 1.000 \cdot (1+0{,}02874)^4 = 1.120{,}01€$$

Los resultados son los mismos, debido a la utilización de intereses equivalentes. Las pequeñas variaciones se deben al redondeo de los decimales.

2.2. TANTO NOMINAL

Por una parte, nos encontramos con la necesidad de aplicar la relación anterior de equivalencia de tantos si queremos que, aun trabajando en diferentes unidades de tiempo, los resultados finales sigan siendo idénticos. Por otra, hay que ser conscientes de la dificultad que supone el conocer y aplicar dicha expresión de equivalencia. En este punto surge la necesidad de emplear un tanto que permita pasar fácilmente de su unidad habitual (en años) a cualquier otra diferente y que financieramente resulte correcta: el tanto nominal (J_k).

El **tanto nominal** se define como un tanto teórico que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización k por el tanto k-esimal:

$$\boxed{J_k = i_k \cdot k}$$

De ahí se deduce que:

$$\boxed{i_k = \frac{J_k}{k}}$$

Esta es una expresión pensada para pasar fácilmente de un tanto referido al año (el tanto nominal) a un tanto efectivo k-esimal, ya que el tanto nominal es proporcional.

Así pues, en compuesta, los tantos de interés pueden ser tantos efectivos (i o i_k) o nominales (J_k), teniendo en cuenta que el tanto nominal (también conocido como anualizado) no es un tanto que realmente se emplee para operar: a partir de él se obtienen tantos efectivos con los que sí se harán los cálculos necesarios.

A continuación se muestran las relaciones existentes entre tantos nominales y **tantos efectivos anuales**, conocidos como **TAE**.

La fórmula de cálculo para pasar de **tantos nominales a tantos efectivos anuales (TAE)** es:

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$ [3]

$$\boxed{i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1}$$

Por otro lado, sabiendo que:

$$J_k = i_k \cdot k$$

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1$$

ya podemos calcular la fórmula de cálculo para pasar de **tantos efectivos a tantos efectivos (TAE)** a **tantos nominales**:

$$\boxed{J_k = \left[(1 + i)^{1/k} - 1\right] \cdot k}$$

EJEMPLO 7

Realiza las siguientes conversiones:

a. Cálculo del TAE si el devengo de intereses es anual, semestral, trimestral y mensual siendo el tanto nominal del 8%:

Anual:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0{,}08}{1}\right)^1 - 1 = 1{,}08 - 1 = 0{,}08 = 8\%$$

.../...

[3] Recordemos que esta es la expresión que relaciona i en función de i_k.

.../...

Semestral:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^2 - 1 = 1,0816 = 0,0816 = 8,16\%$$

Trimestral:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 = 1,08243 = 0,08243 = 8,243\%$$

Mensual:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12} - 1 = 1,08300 = 0,08300 = 8,300\%$$

El tipo de interés efectivo anual correspondiente a un tipo nominal aumenta a medida que aumenta el número de capitalizaciones anuales. Es decir, cada tipo nominal está calculado para trabajar en una determinada unidad de tiempo y sólo en ésa; si se quiere cambiar a otra unidad distinta, habrá que volver a recalcular el tanto nominal, para que el resultado final no cambie.

b. Cálculo del tanto nominal si el devengo de intereses es anual, semestral, trimestral y mensual siendo el TAE del 8%:

Anual:

$$J_k = \left[(1+i)^{1/k} - 1\right] \cdot k = \left[(1+0,08)^{1/1} - 1\right] \cdot 1 = \left[1,08 - 1\right] \cdot 1 = 0,08 = 8\%$$

Semestral:

$$J_k = \left[(1+i)^{1/k} - 1\right] \cdot k = \left[(1+0,08)^{1/2} - 1\right] \cdot 2 = \left[1,03923 - 1\right] \cdot 2 = 0,07846 = 7,846\%$$

Trimestral:

$$J_k = \left[(1+i)^{1/k} - 1\right] \cdot k = \left[(1+0,08)^{1/4} - 1\right] \cdot 4 = \left[1,01943 - 1\right] \cdot 4 = 0,07771 = 7,771\%$$

Mensual:

$$J_k = \left[(1+i)^{1/k} - 1\right] \cdot k = \left[(1+0,08)^{1/12} - 1\right] \cdot 12 = \left[1,00643 - 1\right] \cdot 12 = 0,07721 = 7,721\%$$

El tipo de interés nominal correspondiente a un tipo efectivo anual disminuye a medida que aumenta el número de capitalizaciones anuales.

Igual que antes, si queremos conseguir un mismo tanto efectivo anual a partir de un tanto nominal, éste deberá ser diferente en función de la frecuencia de capitalización para la cual se haya calculado.

3. DESCUENTO COMPUESTO

3.1. CONCEPTO

El **descuento compuesto** es la operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento presente, mediante la aplicación de la ley financiera de descuento compuesto. Es una operación inversa a la de capitalización.

3.2. CARACTERÍSTICAS DE LA OPERACIÓN

Los intereses son productivos, lo que significa que:

- A medida que se generan se restan del capital de partida para producir (y restar) nuevos intereses en el futuro y, por tanto,
- los intereses de cualquier período siempre los genera el capital del período anterior, al tanto de interés vigente en dicho período.

En una operación de descuento el punto de partida es un capital futuro conocido (C_n) cuyo vencimiento se quiere adelantar. **Deberemos conocer** las condiciones en las que se quiere hacer esta anticipación: **duración de la operación** (tiempo que se anticipa el capital futuro) y **tanto aplicado**.

El capital que resulte de la operación de descuento (capital actual o presente –C_0–) **será de cuantía menor**, siendo la diferencia entre ambos capitales los intereses que un capital deja de tener por anticipar su vencimiento. En definitiva, si trasladar un capital desde el presente al futuro implica añadirle intereses, hacer la operación inversa, anticipar su vencimiento, supondrá la minoración de esa misma carga financiera.

Al igual que ocurría en simple, se distinguen **dos clases de descuento**: racional y comercial, según cuál sea el capital que se considera en el cómputo de los intereses que se generan en la operación:

- ✓ DESCUENTO RACIONAL
- ✓ DESCUENTO COMERCIAL

3.3. DESCUENTO RACIONAL

Para anticipar el vencimiento del capital futuro se considera generador de los intereses de un período el capital al inicio de dicho período,

utilizando el tipo de interés (i) vigente en dicho período. El proceso a seguir será el siguiente:

Gráficamente:

Paso a paso, el desarrollo de la operación es como sigue:

Periodo n:

C_n

Periodo n-1:

$$C_{n-1} = C_n - I_n = C_n - C_{n-1} \cdot i$$

$$C_{n-1} \cdot (1+i) = C_n$$

$$C_{n-1} = \frac{C_n}{(1+i)}$$

Periodo n-2:

$$C_{n-2} = C_{n-1} - I_{n-1} = C_{n-1} - C_{n-2} \cdot i$$

$$C_{n-2} \cdot (1+i) = C_{n-1}$$

$$C_{n-2} = \frac{C_{n-1}}{(1+i)} = \frac{C_n}{(1+i)^2}$$

Periodo n-3:

$$C_{n-3} = C_{n-2} - I_{n-2} = C_{n-2} - C_{n-3} \cdot i$$

$$C_{n-3} \cdot (1+i) = C_{n-2}$$

$$C_{n-3} = \frac{C_{n-2}}{(1+i)} = \frac{C_n}{(1+i)^3}$$

…

Periodo 0:

$$C_0 = C_1 - I_1 = C_1 - C_0 \cdot i$$

$$C_0 \cdot (1+i) = C_1$$

$$C_0 = \frac{C_1}{1+i} = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Es decir:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}}$$

Los intereses se calculan finalmente sobre el capital inicial, es decir, sobre el que resulta de la anticipación del capital futuro. Se trata de la operación de capitalización compuesta, con la particularidad de que el punto de partida ahora es el capital final y se pretende determinar el capital actual.

De otra forma, partiendo de la expresión fundamental de la capitalización compuesta:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

se despeja el capital inicial (C_0):

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}}$$

Una vez calculado el capital inicial, **por diferencia entre el capital de partida y el inicial obtenido**, se obtendrá **el interés total de la operación (Dr), o descuento propiamente dicho**:

$$\boxed{D_r = C_n - C_0}$$

Si sustituímos el valor del capital inicial (C_0):

$$D_r = C_n - C_0 = C_n - \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

$$\boxed{D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)}$$

EJEMPLO 8

Se desea anticipar el pago de una deuda de 24.000 euros que vence dentro de 3 años. Si el pago se hace en el momento actual, ¿qué cantidad tendremos que entregar si la operación se concierta a un tipo de interés del 5% anual compuesto? ¿Cuánto nos habremos ahorrado por el pago anticipado?

…/…

…/…

Calculemos previamente la cantidad que tendremos que entregar en el momento actual:

$$C_0 \cdot (1+0{,}05)^3 = 24.000€$$

$$C_0 = \frac{24.000}{1{,}05^3} = 20.732{,}10€$$

Calculemos ahora el importe de los intereses ahorrados, es decir, el importe del descuento, primero por diferencia entre el capital inicial y el final y, posteriormente, por la fórmula directa, sin tener que calcular el capital inicial previamente:

$$D_r = C_n - C_0$$

$$D_r = 24.000 - 20.732{,}10 = 3.267{,}90€$$

De la otra forma:

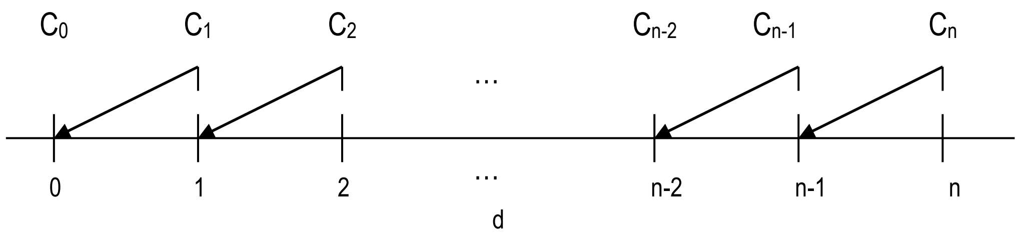
$$D_r = C_n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)$$

$$D_r = 24.000 \cdot \left(1-(1+0{,}05)^{-3}\right) = 24.000 \cdot 0{,}1361624 = 3.267{,}90€$$

3.4. DESCUENTO COMERCIAL

En este caso se considera generador de los intereses de un período el capital al final de dicho período, **utilizando el tipo de descuento (d)** vigente en dicho período. El proceso a seguir será el siguiente:

Gráficamente:



Paso a paso, el desarrollo de la operación es como sigue:

Periodo n:

C_n

Periodo n-1:

$$C_{n-1} = C_n - I_n = C_n - C_n \cdot d = C_n \cdot (1-d)$$

Periodo n-2:

$$C_{n-2} = C_{n-1} - I_{n-1} = C_{n-1} - C_{n-1} \cdot d = C_{n-1} \cdot (1-d) = C_n \cdot (1-d) \cdot (1-d) = C_n \cdot (1-d)^2$$

…/…

.../...

Periodo n-3:

$$C_{n-3} = C_{n-2} - I_{n-2} = C_{n-2} - C_{n-2} \cdot d = C_{n-2} \cdot (1-d) = C_n \cdot (1-d)^2 \cdot (1-d) = C_n \cdot (1-d)^3$$

Periodo 0:

$$C_0 = C_n \cdot (1-d)^n$$

Es decir:

$$\boxed{C_0 = C_n \cdot (1-d)^n}$$

Una vez calculado el capital inicial, **por diferencia entre el capital de partida y el inicial obtenido**, se obtendrá **el interés total de la operación (Dc)**:

$$\boxed{D_c = C_n - C_0}$$

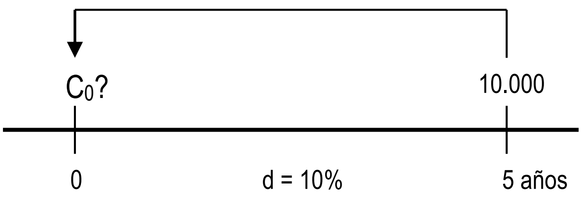
Si sustituímos el valor del capital inicial (C_0):

$$D_c = C_n - C_0 = C_n \cdot \left(1 - (1-d)^n\right)$$

$$\boxed{D_c = C_n \cdot \left(1 - (1-d)^n\right)}$$

<u>EJEMPLO 9</u>

Se desea anticipar un capital de 10.000 euros que vence dentro de 5 años. Si el pago se hace en el momento actual, ¿qué cantidad tendremos que entregar si la operación se concierta a un tipo de descuento del 10% anual compuesto? ¿Cuánto nos habremos ahorrado por el pago anticipado?



Calculemos previamente la cantidad que tendremos que entregar en el momento actual:

$$C_0 = 10.000 \cdot (1 - 0{,}10)^5 = 5.904{,}90€$$

Calculemos ahora el importe de los intereses ahorrados, es decir, el importe del descuento, primero por diferencia entre el capital inicial y el final y, posteriormente, por la fórmula directa, sin tener que calcular el capital inicial previamente:

.../...

.../...

$$D_c = C_n - C_0$$

$$D_c = 10.000 - 5.904,90 = 4.095,10€$$

De la otra forma:

$$D_c = C_n \cdot \left(1 - (1-d)^n\right)$$

$$D_c = C_n \cdot \left(1 - (1-d)^n\right) = 10.000 \cdot \left(1 - (1-0,10)^5\right) = 10.000 \cdot 0,40951 = 4.095,10€$$

4. TANTOS DE INTERÉS Y DE DESCUENTO EQUIVALENTES

Una vez estudiados los dos procedimientos de descuento, se intuye que descontando un capital cualquiera, el mismo tiempo y con el mismo tanto, los resultados serán diferentes según se realice por un procedimiento u otro.

Sería conveniente encontrar la relación que deben guardar los tantos de interés y los tantos de descuento para que el resultado de la anticipación fuera el mismo cualquiera que sea el modelo de descuento empleado. Se trata de buscar la relación de equivalencia entre tantos de descuento y de interés.

Esta relación de equivalencia debe conseguir que el resultado final sea el mismo en uno y otro caso, es decir, se tiene que cumplir la igualdad entre ambos descuentos **Dr = Dc**, por tanto:

$$D_r = D_c$$

$$C_n \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) = C_n \cdot \left(1 - (1-d)^n\right)$$

simplificando, dividiendo por C_n:

$$\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) = \left(1 - (1-d)^n\right) \Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+i)^n} = 1 - (1-d)^n$$

Restando la unidad y, posteriormente, multiplicando por -1:

$$\frac{1}{(1+i)^n} = (1-d)^n$$

Extrayendo raíz n a la ecuación, queda la relación de equivalencia buscada:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(1+i)^n}} = \sqrt[n]{(1-d)^n} \Rightarrow \frac{1}{1+i} = 1-d$$

Finalmente, despejando d:

$$d = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

El tanto de descuento comercial «d» equivalente al tanto «i» será:

$$\boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

Análogamente, conocido «d» se podrá calcular el tanto «i»:

$$d = \frac{i}{1+i} \Rightarrow d \cdot (1+i) = i \Rightarrow d + d \cdot i = i \Rightarrow d = i - d \cdot i \Rightarrow d = i \cdot (1-d) \Rightarrow i = \frac{d}{1-d}$$

$$\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

Hay que tener en cuenta que la relación de equivalencia **es independiente de la duración de la operación**. Por tanto, se cumple que para un tanto de interés solamente habrá un tipo de descuento que produzca el mismo efecto (sea equivalente) y viceversa, sin tener en cuenta el tiempo en la operación.

EJEMPLO 10

Se desea anticipar el pago de una deuda de 24.000 euros que vence dentro de 3 años. Si el pago se hace en el momento actual, ¿qué cantidad tendremos que entregar si la operación se concierta…?

1º Caso:

…a un tipo de interes del 5% anual compuesto (descuento racional):

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$C_0 = \frac{24.000}{(1+0{,}05)^3} = 20.732{,}10€$$

2º Caso:

…a un tipo de descuento del 5% anual compuesto (descuento comercial):

…/…

.../...

$$C_0 = C_n \cdot (1-d)^n$$

$$C_0 = 24.000 \cdot (1-0{,}05)^3 = 20.577€$$

Por tanto, aplicando un tipo de interés y de descuento idénticos los resultados son distintos, siendo mayor el valor actual obtenido en el descuento racional debido a que el capital productor de intereses es el capital inicial (más pequeño) y en consecuencia menor el ahorro por la anticipación.

Para conseguir el mismo resultado habría que calcular el tipo de descuento equivalente al 5% de interés mediante la relación de equivalencia:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0{,}05}{1+0{,}05} = 0{,}047619 \Rightarrow d = 4{,}762\%$$

Comprobación

Actualizando comecialmente al nuevo tipo de descuento, el resultado será:

$$C_0 = 24.000 \cdot (1-0{,}047619)^3 = 24.000 \cdot 0{,}8638377 = 20.732{,}10€$$

Se demuestra entonces que el tipo de descuento 4,762% es equivalente al tipo de interés del 5%.

5. Aplicaciones del Principio de Equivalencia: Sustitución de Capitales

Para comprobar si dos o más capitales resultan indiferentes (equivalentes) deben tener el mismo valor en el momento en que se comparan: **principio de equivalencia de capitales**.

El principio de equivalencia financiera nos permite determinar si dos o más capitales situados en distintos momentos resultan indiferentes o, por el contrario, hay preferencia por uno de ellos.

Ya vimos en las operaciones en simple la definición y utilidad de la equivalencia de capitales. El principio de equivalencia de capitales y sus aplicaciones siguen siendo válidos. La diferencia fundamental viene dada porque **en régimen de compuesta la fecha donde se realice la equivalencia no afecta al resultado final de la operación**, por tanto, si la equivalencia se cumple en un momento dado, se cumple en cualquier punto y, si no se cumple en un momento determinado, no se cumple nunca.

La sustitución de unos capitales por otro u otros de vencimientos y/o cuantías diferentes a las anteriores sólo se podrá llevar a cabo si financieramente resultan ambas alternativas equivalentes.

Para ver si dos alternativas son financieramente equivalentes se tendrán que valorar en un mismo momento de tiempo y obligar a que tengan el mismo valor, pudiéndose plantear los siguientes casos posibles:

a. Determinación del capital común.

b. Determinación del vencimiento común.

c. Determinación del vencimiento medio.

5.1. DETERMINACIÓN DEL CAPITAL COMÚN

El **capital común** es la **cuantía C de un capital único que vence en t, conocido, y que sustituye a varios capitales C_1, C_2, ... , C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... ,t_n**, respectivamente, todos ellos conocidos..[4]

5.2. DETERMINACIÓN DEL VENCIMIENTO COMÚN

El **vencimiento común** es el **momento de tiempo t en que vence un capital único C, conocido, que sustituye a varios capitales C_1, C_2, ... , C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... ,t_n**, respectivamente, todos ellos conocidos. Se tiene que cumplir: $C \neq C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ [5]

5.3. DETERMINACIÓN DEL VENCIMIENTO MEDIO

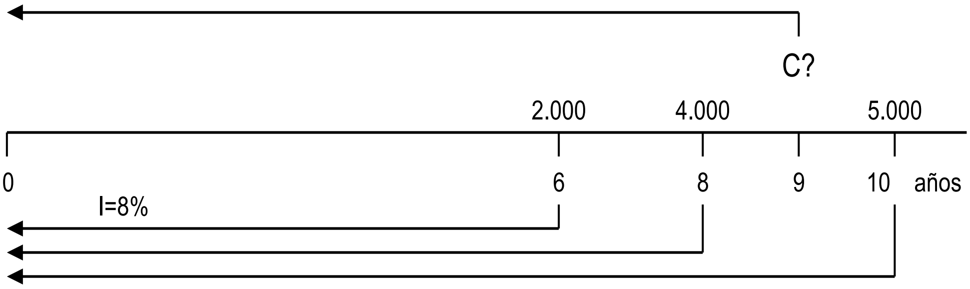
El **vencimiento medio** es el **momento de tiempo t en que vence un capital único C, conocido, que sustituye a varios capitales C_1, C_2, ... , C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... ,t_n**, respectivamente, todos ellos conocidos. Se tiene que cumplir: $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

[4] Para recordar cómo se determina el capital común en la capitalización compuesta habrá que remitirse al tema de la sustitución de capitales en capitalización simple.
[5] Para recordar cómo se determina el capital común en la capitalización compuesta habrá que remitirse al tema de la sustitución de capitales en capitalización simple.

EJEMPLO 11

Un señor tiene tres deudas de 2.000, 4.000 y 5.000 euros con vencimientos a los 6, 8 y 10 años, respectivamente, llegando al acuerdo con el acreedor de sustituir las tres deudas por una sola a pagar a los 9 años. Se pide calcular el importe a pagar en ese momento si la operación se concierta al 8%de interés compuesto anual:

1er caso: fecha de estudio en 0:



Actualizamos cada una de las deudas al momento 0, utilizando el descuento racional, ya que nos dan el tipo de interés:

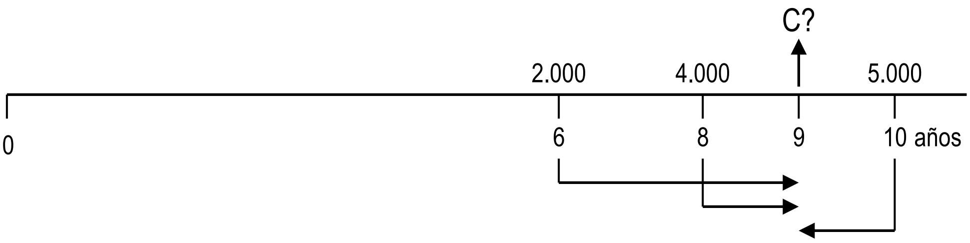
$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$\frac{C}{(1+i)^t} = \left[\frac{C_1}{(1+i)^{t1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{t2}} + ... + \frac{C_n}{(1+i)^{tn}}\right] \Rightarrow \frac{C}{1{,}08^9} = \left[\frac{2.000}{1{,}08^6} + \frac{4.000}{1{,}08^8} + \frac{5.000}{1{,}08^{10}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C}{1{,}08^9} = \left[\frac{2.000}{1{,}08^6} + \frac{4.000}{1{,}08^8} + \frac{5.000}{1{,}08^{10}}\right] \Rightarrow \frac{C}{1{,}999005} = 5.737{,}38 \Rightarrow C = 11.469{,}05€$$

$$C = 11.469{,}05€$$

2º caso: fecha de estudio en 9 años:



Capitalizamos los capitales que vencen antes de los 9 años y actualizamos el capital que vence posteriormente a los 9 años utilizando el descuento racional, ya que nos dan el tipo de interés:

Para la capitalización de los capitales utilizamos la correspondiente fórmula:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

.../...

.../...

y para la actualización:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Por lo tanto:

$$C = C_1 \cdot (1+i)^{t-t1} + C_2 \cdot (1+i)^{t-t2} + \frac{C_3}{(1+i)^{t3-t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 2.000 \cdot (1+0{,}08)^{9-6} + 4.000 \cdot (1+0{,}08)^{9-8} + \frac{5.000}{(1+0{,}08)^{10-9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 2.000 \cdot 1{,}08^3 + 4.000 \cdot 1{,}08^1 + \frac{5.000}{1{,}08^1} \Rightarrow C = 11.469{,}05€$$

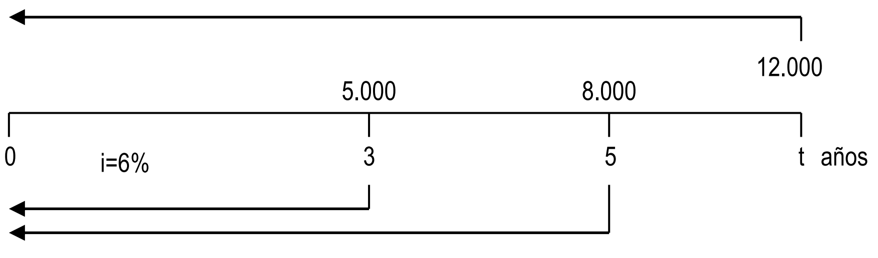
Se confirma la diferencia apuntada anteriormente con las leyes de capitalización simple, según la cual, en régimen de compuesta la fecha donde se realice la equivalencia no afecta al resultado final de la operación.

EJEMPLO 12

Un señor tiene dos cobros pendientes de 5.000 y 8.000 euros con vencimientos a 3 y 5 años, respectivamente. Si quisiera sustituir ambos capitales por uno solo, acordándose la operación a un tipo de interés del 6%, calcular el momento del cobro único en los siguientes supuestos:

1er caso: La cuantía a recibir fuera de 12.000€

Se trata de vencimiento común ya que la suma de 5.000 y 8.000 euros no coincide con los 12.000€.



Actualizamos cada una de las dedas al momento 0, utilizando el descuento racional, ya que nos dan el tipo de interés,sabiendo que ahora la incógnita es la duración:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

.../...

.../...

$$\frac{C}{(1+i)^{t}}=\left[\frac{C_1}{(1+i)^{t1}}+\frac{C_2}{(1+i)^{t2}}+...+\frac{C_n}{(1+i)^{tn}}\right]\Rightarrow\frac{12.000}{1{,}06^{t}}=\left[\frac{5.000}{1{,}06^{3}}+\frac{8.000}{1{,}06^{5}}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{12.000}{1{,}06^{t}}=10.176{,}16\Rightarrow 10.176{,}16\cdot 1{,}06^{t}=12.000\Rightarrow\frac{12.000}{10.176{,}16}=1{,}06^{t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}179227=1{,}06^{t}$$

Aplicamos logaritmos para despejar t:

$$\log 1{,}179227=\log 1{,}06^{t}\Rightarrow\log 1{,}179227=t\cdot\log 1{,}06\Rightarrow t=\frac{\log 1{,}179227}{\log 1{,}06}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{0{,}071597}{0{,}025306}\Rightarrow t=2{,}83\,\text{años}$$

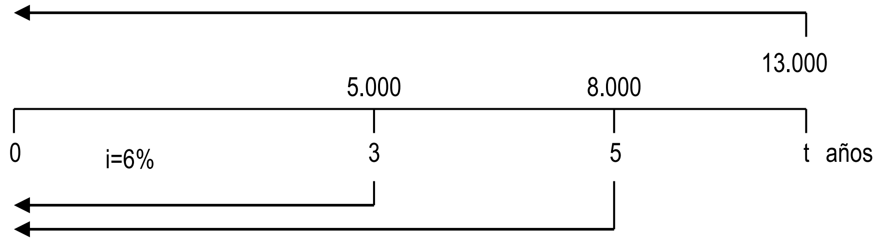
Para pasar los 0,83 años a meses se multiplica por 12 meses que tiene un año. Así: $0{,}83\cdot 12=9{,}96\,\text{meses}$.

Para pasar los 0,96 meses a días se multiplica por 30 días que tiene un mes. Así: $0{,}96\cdot 30=28{,}8\,\text{días}\approx 29\,\text{días}$

Es decir, $t=2\,\text{años},9\,\text{meses y }29\,\text{días}$

2º caso: : La cuantía a recibir fuera de 13.000€

Se trata de vencimiento medio ya que la suma de 5.000 y 8.000 euros coincide con los 13.000€.



Actualizamos cada una de las dedas al momento 0, utilizando el descuento racional, ya que nos dan el tipo de interés,sabiendo que ahora la incógnita es la duración:

$$C_0=\frac{C_n}{(1+i)^{n}}$$

$$\frac{C}{(1+i)^{t}}=\left[\frac{C_1}{(1+i)^{t1}}+\frac{C_2}{(1+i)^{t2}}+...+\frac{C_n}{(1+i)^{tn}}\right]\Rightarrow\frac{13.000}{1{,}06^{t}}=\left[\frac{5.000}{1{,}06^{3}}+\frac{8.000}{1{,}06^{5}}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{13.000}{1{,}06^{t}}=10.176{,}16\Rightarrow 10.176{,}16\cdot 1{,}06^{t}=12.000\Rightarrow\frac{13.000}{10.176{,}16}=1{,}06^{t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}277496=1{,}06^{t}$$

.../...

…/…

Aplicamos logaritmos para despejar t:

$$\log 1{,}277496 = \log 1{,}06^{t} \Rightarrow \log 1{,}277496 = t \cdot \log 1{,}06 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}277496}{\log 1{,}06} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{0{,}106360}{0{,}025306} \Rightarrow t = 4{,}20 \text{ años}$$

$$t = 4{,}20 \text{ años}$$

Para pasar los 0,20 años a meses se multiplica por 12 meses que tiene un año. Así: $0{,}20 \cdot 12 = 2{,}4$ meses.

Para pasar los 0,4 meses a días se multiplica por 30 días que tiene un mes. Así: $0{,}4 \cdot 30 = 12$ días

Es decir, $t = 4$ años, 2 meses y 12 días

TEMA 6: TEORÍA DE RENTAS. RENTAS CONSTANTES

ÍNDICE

1. CONCEPTO DE RENTA FINANCIERA

Hasta ahora las operaciones financieras que venimos realizando se componían de un **capital único (o pocos)** tanto en la prestación como en la contraprestación[1]. Sin embargo, hay un gran número de operaciones que se componen de un elevado número de capitales: la constitución de un capital, los planes de jubilación, los préstamos,... En todas ellas intervienen muchos capitales y sería difícil y poco práctico moverlos de uno en uno, como lo hemos hecho hasta ahora.

Surge la necesidad de buscar un método matemático que nos facilite la tarea de desplazar un elevado número de capitales con relativa facilidad: **las rentas**. Se trata de unas «fórmulas» que en determinados casos permitirán desplazar en el tiempo un grupo de capitales a la vez.

La **renta** se define como un **conjunto de capitales con vencimientos equidistantes de tiempo**.

Para que exista renta se tienen que dar los dos siguientes requisitos:

- Existencia de varios capitales, al menos dos.
- Periodicidad constante entre los capitales, es decir, entre dos capitales consecutivos debe existir siempre el mismo espacio de tiempo (cualquiera que sea).

2. ELEMENTOS DE UNA RENTA FINANCIERA

Los elementos que componen una renta financiera son:

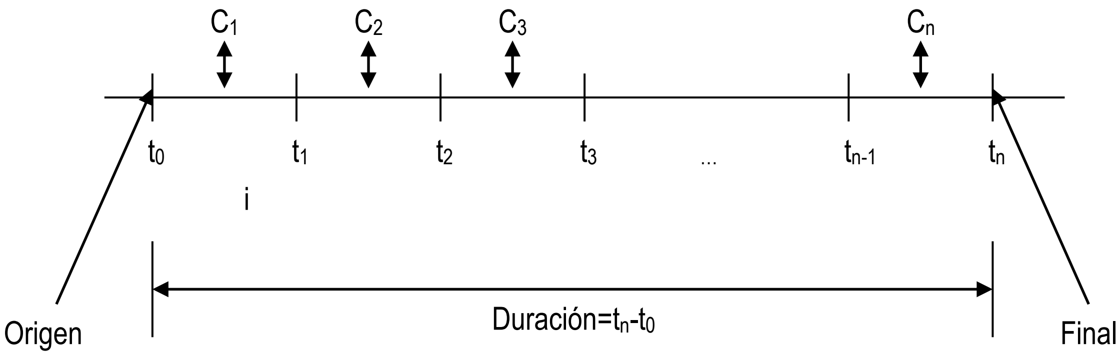
- **Fuente de la renta**: fenómeno económico que da origen al nacimiento de la renta. Por ejemplo, las sucesivas aportaciones a un plan de pensiones o el ingreso periódico de una nómina a lo largo del tiempo.
- **Origen**: momento en el que comienza a devengarse[2] el primer capital.
- **Final**: momento en el que termina de devengarse el último capital.

[1] Aquí la prestación y contraprestación se refiere tanto al dinero que se entrega para capitalizarlo como el que se recibe actualizado respectivamente.

[2] Recordemos que "devengarse" lo podemos considerar equivalente a "producirse".

- **Duración**: tiempo que transcurre desde el origen hasta el final de la renta.
- **Término**: cada uno de los capitales que componen la renta.
- **Período**: intervalo de tiempo entre dos capitales consecutivos.
- **Tanto de interés**: tasa empleada para mover los capitales de la renta.

Gráficamente:



3. CLASES DE RENTAS

Las rentas se pueden clasificar según diferentes criterios, entre los que vamos a destacar los que aparecen en los apartados siguientes.

3.1. SEGÚN LA CUANTÍA DE LOS TÉRMINOS

- **Constante:** cuando todos los capitales son iguales.
- **Variable:** cuando al menos uno de los capitales es diferente al resto, pudiéndose distinguir:
  - **Variables sin seguir una ley matemática**, cuando varían aleatoriamente.
  - **Variables siguiendo una ley matemática**, cuando lo hacen con un orden.
    - En progresión geométrica
    - En progresión aritmética

3.2. SEGÚN EL NÚMERO DE TÉRMINOS

- **Temporal:** tienen un número finito y conocido de capitales.
- **Perpetua:** tienen un número infinito o demasiado grande de capitales.

3.3. Según el Vencimiento del Término

- **Pospagable:** los capitales se encuentran al final de cada periodo de tiempo.
- **Prepagable:** los capitales se sitúan a principio de cada periodo.

3.4. Según el Momento de Valoración

- **Inmediata:** valoramos la renta en su origen o en su final.
- **Diferida:** cuando se valora la renta en un momento anterior a su origen, es decir, el primer término se encuentra en algún momento posterior al que le correspondería a una renta inmediata. [3]
- **Anticipada:** el valor de la renta se calcula con posterioridad al final, es decir, es aquella en la que el último término de la renta se encuentra en algún momento anterior al que le correspondería a una renta inmediata[4].

3.5. Según la Periodicidad del Vencimiento

- **Entera:** el término de la renta viene expresado en la misma unidad de tiempo que el tanto de valoración, cualquiera que sea la unidad tomada, es decir, la frecuencia de los términos de la renta coincide con la frecuencia o periodicidad con la que se capitalizan los intereses.
- **No entera o Periódica:** el término de la renta viene expresado en una unidad de tiempo mayor a la del tanto de valoración.
- **Fraccionada:** el término de la renta se expresa en una unidad de tiempo menor que aquella en la que viene expresada el tipo de valoración de la renta.

3.6. Según la Ley Financiera

- **Simple:** emplea una ley financiera a interés simple para desplazar los capitales.

[3] Por ejemplo, sería el caso de una renta anual en la que el primer término se encuentra en el quinto año.
[4] Por ejemplo, sería el caso de una renta anual cuyo primer término se encuentra en el momento 0.

- **Compuesta:** la ley financiera empleada es la de la capitalización compuesta.

4. VALOR FINANCIERO O CAPITAL DE UNA RENTA

El **valor financiero** o **capital de una renta en un momento t** es el resultado de llevar financieramente (capitalizando o descontando) todos los términos de la renta a dicho momento de tiempo t.

Existen dos casos especialmente relevantes:

⇒ **Si t=0** (siendo 0 el origen de la renta) nos encontramos con el **valor actual**, esto es, resultado de valorar todos los términos de la renta en el momento cero.

⇒ **Si t=n** (siendo n el final de la renta) se define como el **valor final**, resultado de desplazar todos los términos de la renta al momento n.

Para el correcto empleo de las fórmulas financieras de las rentas, será **necesario clasificar las rentas** atendiendo a cada uno de los criterios que hemos visto y, en función de la combinación que presente habrá que aplicar una u otra, según proceda.

A las diferentes rentas que estudiemos a continuación se les va a hallar el valor actual y final y para ello bastará con recordar las fórmulas matemáticas que permiten sumar una serie de términos que varían en progresión aritmética o en progresión geométrica creciente o decreciente. Estas expresiones son las siguientes:

Fórmula de la suma de n términos en progresión aritmética:

$$\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Fórmula de la suma de n términos en progresión geométrica decreciente:

$$\boxed{S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}}$$

Fórmula de la suma de n términos en progresión geométrica creciente:

$$\boxed{S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}}$$

Recordemos también que las fórmulas para calcular un término n-ésimo son:

Fórmula del cálculo del término n-ésimo de una progresión aritmética:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

Fórmula del cálculo del término n-ésimo de una progresión geométrica:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}}$$

donde:

$a_1 \equiv$ Primer término de la progresión

$a_n \equiv$ Último término de la progresión

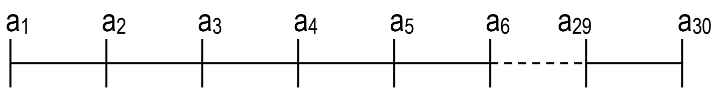
$n \equiv$ Número de términos de la progresión

$r \equiv$ Razón de la progresión

$d \equiv$ Diferencia de la progresión

EJEMPLO 1

Se desea saber a cuánto asciende la suma de los 30 términos de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 5 y a cada uno de los términos se le suman 2 unidades para obtener el siguiente. ¿Cuál sería su suma si en lugar de ser una progresión aritmética fuera una progresión geométrica de 8 términos, cuyo primer término fuese 1.000 y su razón fuese 0,5?



La fórmula para calcular los n términos de una progresión aritmética es:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Para ello hay que calcular el valor de a_{30}:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$a_{30} = 5 + (30-1)\cdot 2 = 63$$

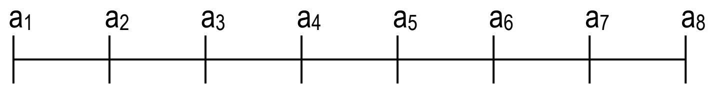
Ya podemos calcular la suma de los 30 términos de la progresión:

$$S = \frac{5+63}{2} \cdot 30 = 1.020$$

Si la progresión fuera geométrica, gráficamente se representaría así:

…/…

…/…



Para calcular la suma tendríamos que actuar de forma análoga a como lo hemos hecho anteriormente, es decir, empezando por calcular el valor del último término:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

$$a_{30} = 1.000 \cdot 0{,}5^{(8-1)} = 7{,}8125$$

Ya podemos calcular la suma de los 8 términos de la progresión, teniendo en cuenta que como la razón es menor que 1, se trata de una progresión geométrica decreciente, por lo que se tiene que aplicar esta fórmula:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

$$S = \frac{1.000 - 7{,}8125 \cdot 0{,}5}{1 - 0{,}5} = 1.992{,}19$$

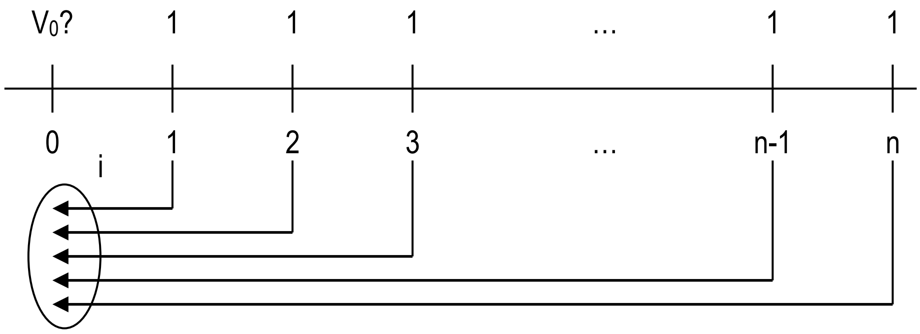
5. Rentas Constantes

5.1. Renta Temporal, Pospagable, Inmediata y Entera

Vamos a estudiar una **renta constante** (términos de igual cuantía), temporal (tiene un número determinado de capitales), **pospagable** (los términos vencen al final del período), **inmediata** (valoraremos la renta en su origen y su final) y **entera** (términos y tanto están en la misma unidad de tiempo). Aunque no se diga expresamente se calculará en **régimen de compuesta** (renta compuesta).

5.1.1. Cálculo del Valor Inicial

Comenzaremos por la renta constante más fácil, la que tiene como término la unidad (**renta unitaria**), cuya representación gráfica es la siguiente:



Recordemos que la fórmula para actualizar un capital en régimen de capitalización compuesta y descuento racional es:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}}$$

Aplicando la definición de valor actual y llevando los términos uno a uno, descontando en régimen de descuento compuesto al tanto de la renta i, desde donde están cada uno de los capitales hasta el origen se obtiene el valor actual, que se denota con la siguiente terminología:

$$a_{\overline{n|}\, i}$$

donde:

$n \equiv$ número de capitales

$i \equiv$ tanto de valoración

llegamos a la siguiente fórmula:

$$\boxed{V_0 = a_{\overline{n|}\, i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}}$$

Para simplificar la expresión anterior, hemos de hacer notar que se trata de una **progresión geométrica** de razón:

$$r = \frac{1}{1+i}$$

Como la razón es menor que la unidad[5], la progresión es **decreciente**, por lo que, tal y como recordamos en el tema anterior, la suma de los n términos de una progresión geométrica decreciente es la siguiente:

$$\boxed{S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}}$$

Aplicando dicha fórmula a los términos actualizados de la renta y simplificando posteriormente:

[5] El numerador es menor que el denominador.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{\frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^n}\cdot\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{1}{1+i}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{\frac{1}{1+i}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)}{\frac{i}{1+i}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+i}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)}{i\cdot\frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{\cancel{1}}{\cancel{1+i}}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)}{i\cdot\frac{\cancel{1}}{\cancel{1+i}}} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Esta es la expresión que permite calcular el valor de una renta **constante**, **temporal**, **pospagable**, **inmediata**, **entera** y **unitaria**.

Sin embargo, el importe de los capitales no suele ser unitario. En el supuesto de encontrarnos con una renta constante cuyos términos fueran de **cuantía c**, el valor actual se representa por:

$$A_{\overline{n}|\,i}$$

y se obtendría de la siguiente forma:

$$\boxed{V_0 = A_{\overline{n}|i} = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \frac{c}{(1+i)^3} + \ldots \frac{c}{(1+i)^{n-1}} + \frac{c}{(1+i)^n}}$$

sacando factor común el término c:

$$\boxed{V_0 = A_{\overline{n}|i} = c\cdot\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right]}$$

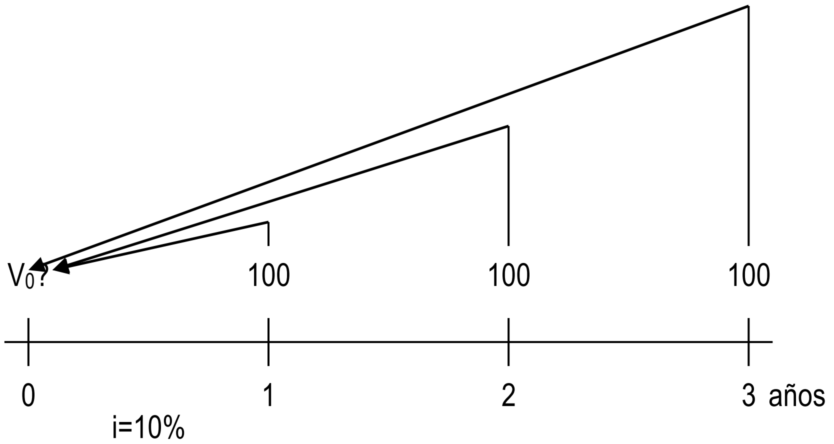
Se puede observar que el corchete es el valor actual de la **renta unitaria, temporal, pospagable, inmediata y entera** de n términos, $a_{\overline{n}|\,i}$, es decir:

$$\boxed{V_0 = A_{\overline{n}|i} = c\cdot a_{\overline{n}|i} = c\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

La expresión $A_{\overline{n}|\,i}$, indica, pues, que la renta es **constante, temporal, pospagable, inmediata, entera y de cuantía c**.

EJEMPLO 2

Calcular el valor actual de una renta de tres términos anuales vencidos[6] de 100 euros cada una a un tanto de interés del 10% efectivo anual.



Moviendo los capitales uno a uno:

$$V_0 = A_{\overline{n}|i} = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \frac{c}{(1+i)^3} + \ldots \frac{c}{(1+i)^{n-1}} + \frac{c}{(1+i)^n}$$

$$V_0 = A_{\overline{3}|0,1} = \frac{100}{1+0,1} + \frac{100}{(1+0,1)^2} + \frac{100}{(1+0,1)^3} = 248{,}69€$$

$$V_0 = 248{,}69€$$

Utilizando la fórmula de la renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera:

$$V_0 = A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = A_{\overline{3}|0,1} = 100 \cdot a_{\overline{3}|0,1} = 100 \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-3}}{0,1} = 248{,}69€$$

$$V_0 = 248{,}69€$$

EJEMPLO 3

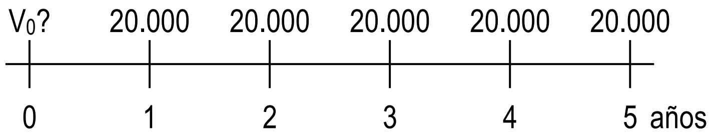
Calcular el valor de la imposición que tendremos que realizar en un banco que capitaliza al 12% de interés efectivo anual compuesto, si queremos disponer de 20.000 euros al final de cada uno de los próximos 5 años.

.../...

[6] Vencidos significa que los capitales se devengan al final del año, es decir, se va a tratar de una renta pospagable.

.../...

Las cantidades a recibir en el futuro constituyen una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera. Por tanto, para que exista equivalencia entre la imposición y los reintegros, aquélla debe coincidir con el valor actualizado de estos últimos. Así, la imposición inicial será el valor actual de la renta formada por los reintegros al tanto que genera la operación.



Calculamos el valor inicial de una renta temporal, pospagable, inmediata y entera:

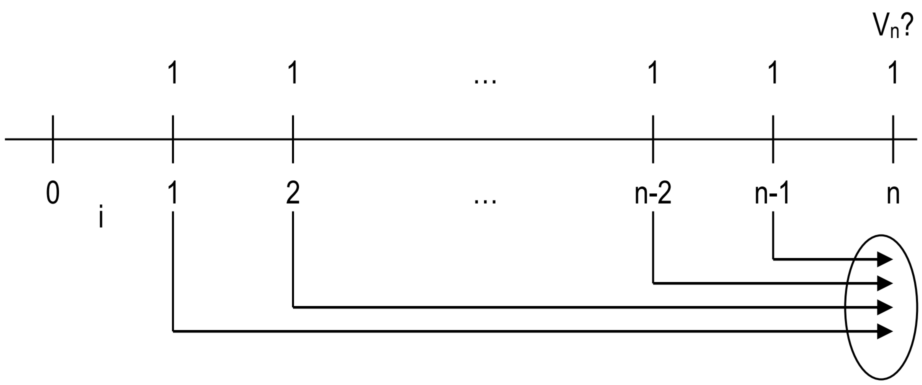
$$V_0 = A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = A_{\overline{5}|0,12} = 20.000 \cdot a_{\overline{5}|0,12} = 20.000 \cdot \frac{1-(1+0,12)^{-5}}{0,12} = 72.095,52€$$

$$V_0 = 72.095,52€$$

5.1.2. CÁLCULO DEL VALOR FINAL

Seguimos trabajando con la misma **renta constante**, **unitaria**, **temporal** –n capitales–, **pospagable**, **inmediata** y **entera**; pero ahora vamos a calcular su valor final, es decir, valoraremos todos los términos de la renta en su final (momento n), quedando gráficamente así:



Recordemos que la fórmula para capitalizar un capital en régimen de capitalización compuesta es:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

Aplicando la definición de valor final y llevando los términos uno a uno, capitalizando en régimen de capitalización compuesta al tanto de la renta i, desde donde se encuentra cada uno hasta el final, se obtiene el valor final, que se denota con la siguiente terminología:

$$s_{\overline{n|}\, i}$$

donde:

$n \equiv$ número de capitales

$i \equiv$ tanto de valoración

llegamos a la siguiente fórmula:

$$V_n = s_{\overline{n|}\, i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}$$

Para simplificar la expresión anterior, hemos de hacer notar que se trata de una **progresión geométrica** de razón:

$$r = 1 + i$$

Como la razón es mayor que la unidad, la progresión es **creciente**, por lo que, tal y como recordamos en el tema anterior, la <u>suma de los n términos de una progresión geométrica creciente</u> es la siguiente:

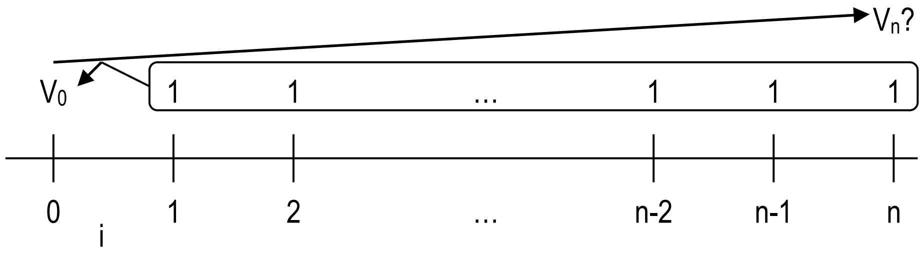
$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Aplicando dicha fórmula a los términos capitalizados de la renta y simplificando posteriormente:

$$s_{\overline{n|}\, i} = \frac{(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^{n-1+1} - 1}{1 + i - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{n|}\, i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Al mismo resultado hubiésemos llegado si se capitaliza el valor actual de la renta hasta su final empleando el mismo tanto de valoración:



Por tanto, el valor final de la renta será la capitalización de su valor actual, como se demuestra a continuación:

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{(1+i)^n \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Esta es la expresión que permite mover n capitales de una unidad monetaria equidistantes entre sí desde su origen hasta el momento n al tanto de interés i.

Sin embargo, el importe de los capitales no suele ser unitario. En el supuesto de encontrarnos con una renta constante cuyos términos fueran de **cuantía c**, el valor final se representa por:

$$S_{\overline{n}|i}$$

y se obtendría de la siguiente forma:

$$V_n = S_{\overline{n}|i} = c + c \cdot (1+i) + c \cdot (1+i)^2 + \ldots + c \cdot (1+i)^{n-1}$$

sacando factor común el término c:

$$V_n = S_{\overline{n}|i} = c \cdot \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}\right]$$

Se puede observar que el corchete es el valor final de la **renta unitaria, temporal, pospagable, inmediata y entera** de n términos, $s_{\overline{n}|i}$, es decir:

$$V_n = S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

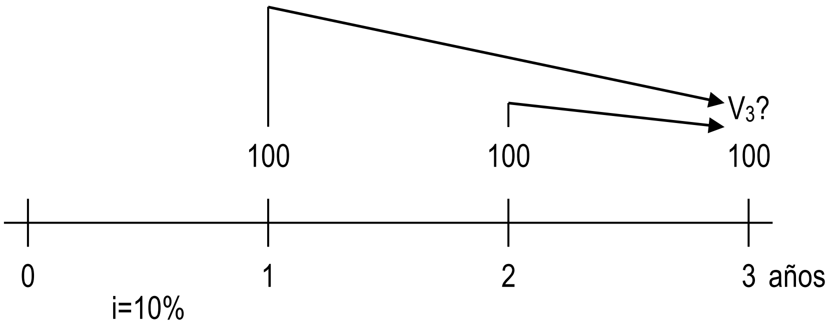
Del mismo modo, se puede llegar a esa expresión capitalizando el valor actual:

$$\boxed{V_n = S_{\overline{n|}i} = c \cdot s_{\overline{n|}i} = (1+i)^n \cdot A_{\overline{n|}i}}$$

La expresión $S_{n\rceil\, i}$, indica, pues, que la renta es **constante, temporal, pospagable, inmediata, entera y de cuantía c**.

EJEMPLO 4

Calcular el valor final de una renta de tres términos anuales vencidos de 100 euros cada una a un tanto de interés del 10% efectivo anual.



Desplazando los capitales uno a uno:

$$V_n = S_{\overline{n|}i} = c + c\cdot(1+i) + c\cdot(1+i)^2 + \ldots + c\cdot(1+i)^{n-1}$$

$$V_3 = S_{\overline{3|}0,1} = 100 + 100\cdot(1+0,1) + 100\cdot(1+0,1)^2 = 331€$$

$$V_3 = 331€$$

Utilizando la fórmula de la renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera:

$$V_n = S_{\overline{n|}i} = c \cdot s_{\overline{n|}i} = c \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_3 = S_{\overline{3|}0,1} = 100 \cdot s_{\overline{3|}0,1} = 100 \cdot \frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} = 331€$$

$$V_3 = 331€$$

Capitalizando el valor actual, calculado en el ejemplo 1:

$$A_{\overline{3|}0,1} = 248,69$$

$$V_n = S_{\overline{n|}i} = c \cdot s_{\overline{n|}i} = (1+i)^n \cdot A_{\overline{n|}i}$$

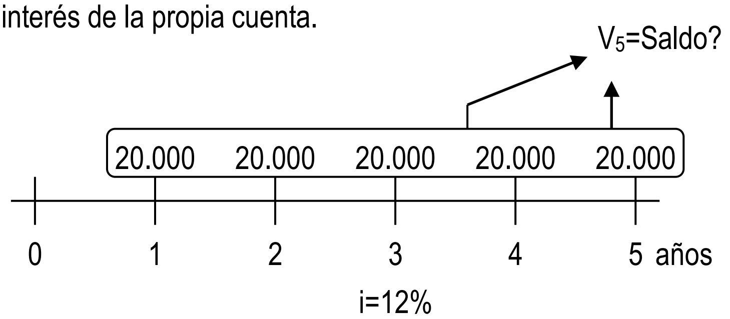
$$V_3 = S_{\overline{3|}0,1} = 100 \cdot s_{\overline{3|}0,1} = (1+0,1)^3 \cdot A_{\overline{3|}0,1} = 1,1^3 \cdot 248,69 = 331€$$

$$V_3 = 331€$$

EJEMPLO 5

Calcular el importe acumulado en un banco al cabo de 5 años, si imponemos al final de cada uno de ellos 20.000 euros siendo el tipo de interés de la cuenta el 12% efectivo anual.

El importe acumulado después de 5 años será el valor final de la renta formada por las imposiciones que se han realizado, utilizando como tanto de valoración el tipo de interés de la propia cuenta.



Calculamos el valor final de una renta temporal, pospagable, inmediata y entera:

$$V_n = S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

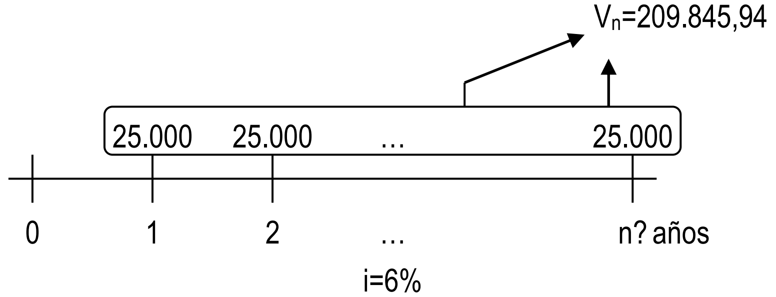
$$V_5 = S_{\overline{5}|0,12} = 20.000 \cdot s_{\overline{5}|0,12} = 20.000 \cdot \frac{(1+0,12)^5 - 1}{0,12} = 127.056,95€$$

$$V_5 = 127.056,95€$$

EJEMPLO 6

Calcular el número de ingresos de 25.000 euros que tenemos que realizar al final de cada año para reunir 209.845,94 euros en un banco que capitaliza al 6% efectivo anual.

En este caso se conoce la cuantía a imponer periódicamente, que constituye una renta constante, y el saldo que queremos tener constituido (el valor final de la renta); lo que se desea conocer es el número de imposiciones a realizar, esto es, el número de términos de la renta (n) que constituyen las imposiciones.



…/…

.../...

Utilizamos la fórmula del valor final de la renta renta temporal, pospagable, inmediata y entera, teniendo como incógnita el número de términos, en este caso años, n:

$$V_n = S_{\overline{n}|i} = c \cdot s_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_n = S_{\overline{n}|0,06} = 25.000 \cdot s_{\overline{n}|0,06} = 25.000 \cdot \frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06} = 209.845,94$$

$$\frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06} = \frac{209.845,94}{25.000} \Rightarrow \frac{1,06^n - 1}{0,06} = 8,3938376 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1,06^n - 1 = 8,3938376 \cdot 0,06 \Rightarrow 1,06^n - 1 = 0,503630256 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1,06^n = 0,503630256 + 1 \Rightarrow 1,06^n = 1,503630256$$

Aplicamos logaritmos para poder despejar n:

$$\log 1,06^n = \log 1,503630256 \Rightarrow n \cdot \log 1,06 = \log 1,503630256 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = \frac{\log 1,503630256}{\log 1,06} = 7 \text{ años}$$

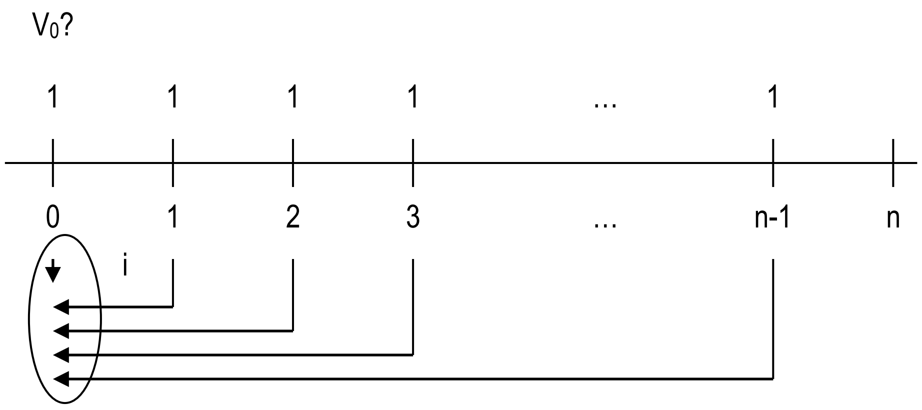
$$n = 7 \text{ años}$$

5.2. RENTA TEMPORAL, PREPAGABLE, INMEDIATA Y ENTERA

Vamos a estudiar una **renta constante** (términos de igual cuantía), temporal (tiene un número determinado de capitales), **prepagable** (los términos vencen al principio del período), **inmediata** (valoraremos la renta en su origen y su final) y **entera** (términos y tipo de interés están en la misma unidad de tiempo). Aunque no se diga expresamente se calculará en **régimen de compuesta** (renta compuesta).

5.2.1. CÁLCULO DEL VALOR INICIAL

Comenzaremos por la renta constante que tiene como término la unidad (**renta unitaria**), cuya representación gráfica es la siguiente:



Aplicando la definición de valor actual y llevando los términos uno a uno, descontando en régimen de descuento compuesto al tanto de la renta i, desde donde está cada capital hasta el origen se obtiene el valor actual, que se denota con la siguiente terminología:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\, i}$$

llegamos a la siguiente fórmula:

$$\boxed{V_0 = \ddot{a}_{\overline{n|}\, i} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots \frac{1}{(1+i)^{n-1}}}$$

Para simplificar la expresión anterior, hemos de hacer notar que se trata de una **progresión geométrica** de razón:

$$r = \frac{1}{1+i}$$

Como la razón es menor que la unidad, la progresión es **decreciente**, por lo que, tal y como recordamos en el tema anterior, la <u>suma de los n términos de una progresión geométrica decreciente</u> es la siguiente:

$$\boxed{S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}}$$

Aplicando dicha fórmula a los términos actualizados de la renta y simplificando posteriormente:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = \frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{1+i}}{1-\dfrac{1}{1+i}} = \frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^{n-1+1}}}{\dfrac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^{n}}}{\dfrac{i}{1+i}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{i}{1+i}}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{i}{1+i}}}$$

Si recordamos, la fórmula de una renta constante, temporal, pospagable, inmediata y entera era:

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Por lo que la fórmula anterior la podemos expresar también en función de $a_{\overline{n|}i}$ de la siguiente forma:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{i}{1+i}} = \frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{1}}{\dfrac{i}{1+i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]\cdot(1+i)}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot(1+i)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i}\cdot(1+i)}$$

Esta es la expresión que permite mover n capitales de una unidad monetaria equidistantes entre sí hasta su origen, al tanto de interés i.

Otra posibilidad consiste en calcular el valor actual de la renta prepagable **valorando por separado el primer capital, que ya está en el origen, y el resto de capitales (n – 1) como renta pospagable inmediata**:

Es decir:

$$\boxed{V_0 = \ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + a_{\overline{n-1|}i}}$$

Para rentas constantes cuyos términos fueran de **cuantía c**, el valor actual se representa por:

$$\ddot{A}_{\overline{n}|\, i}$$

y se obtendría de la siguiente forma:

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{n}|\, i} = c + \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \frac{c}{(1+i)^3} + \ldots \frac{c}{(1+i)^{n-1}}$$

sacando factor común el término c:

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{n}|\, i} = c \cdot \left[1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Se puede observar que el corchete es el valor actual de la **renta unitaria, temporal, prepagable, inmediata y entera** de n términos, $\ddot{a}_{\overline{n}|\, i}$, es decir:

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{n}|\, i} = c \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|\, i} = c \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

La expresión $\ddot{A}_{\overline{n}|\, i}$, indica, pues, que la renta es **constante, temporal, pospagable, inmediata, entera y de cuantía c**.

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{n}|\, i} = c \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|\, i}$$

<u>NOTA</u>: los valores actuales y finales de las rentas prepagables se obtienen a partir de las rentas pospagables multiplicando por (1 + i), es decir, las rentas prepagables son el resultado de capitalizar un período las rentas pospagables.

5.2.2. CÁLCULO DEL VALOR FINAL

Dado que los valores finales de las rentas prepagables se obtienen a partir de las rentas pospagables multiplicando por (1+i), podemos establecer las siguientes fórmulas:

<u>Valor final de una renta constante, temporal, prepagable, inmediata, entera y unitaria</u>:

$$V_n = \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\cdot(1+i)$$

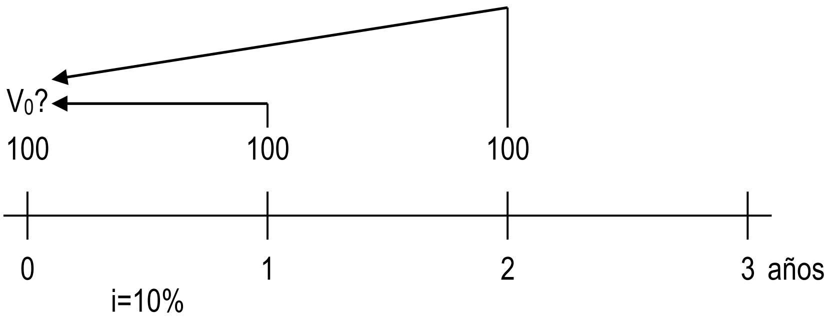
Valor final de una renta constante, temporal, prepagable, inmediata, entera y de cuantía c:

$$V_n = \ddot{S}_{\overline{n}|i} = c\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}\cdot(1+i)$$

EJEMPLO 7

Calcular el valor actual y final de una renta de tres términos anuales situados a principios del año de 100 euros cada uno a un tanto de interés del 10% efectivo anual.

Valor actual:



Moviendo los capitales uno a uno:

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{n}|i} = c + \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \frac{c}{(1+i)^3} + \ldots \frac{c}{(1+i)^{n-1}}$$

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{3}|0,1} = 100 + \frac{100}{1+0,1} + \frac{100}{(1+0,1)^2} = 273,55€$$

$$V_0 = 273,55€$$

Utilizando la fórmula de la renta constante, temporal, prepagable, inmediata y entera:

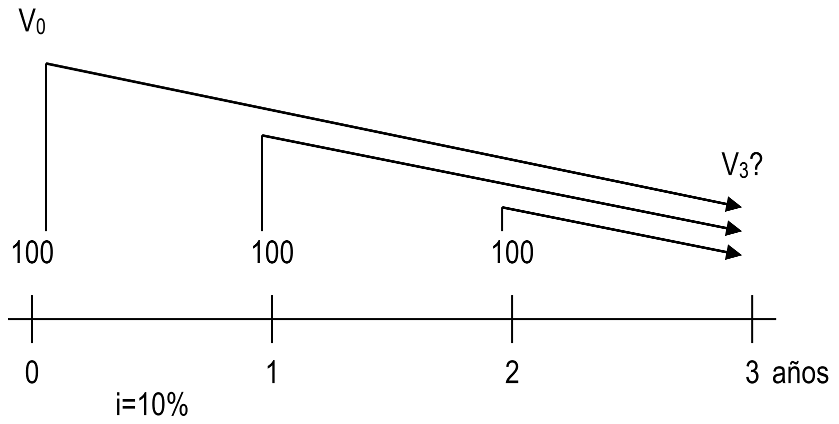
$$V_0 = c\cdot(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 100\cdot(1+0,1)\cdot\frac{1-(1+0,1)^{-3}}{0,1} = 273,55€$$

$$V_0 = 273,55€$$

.../...

Valor final:



Moviendo los capitales uno a uno:

$$V_n = \ddot{S}_{\overline{n}|i} = \left[c + c\cdot(1+i) + c\cdot(1+i)^2 + \ldots + c\cdot(1+i)^{n-1}\right]\cdot(1+i)$$

$$V_3 = \ddot{S}_{\overline{3}|0,1} = \left[100 + 100\cdot(1+0,1) + 100\cdot(1+0,1)^2\right]\cdot(1+0,1) = 331\cdot 1,1 = 364,10€$$

$$V_3 = 364,10€$$

Utilizando la renta:

$$V_n = c\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}\cdot(1+i)$$

$$V_3 = 100\cdot\frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1}\cdot(1+0,1) = 364,10€$$

$$V_3 = 364,10€$$

Capitalizando el valor actual:

$$V_n = V_0\cdot(1+i)^n$$

$$V_3 = 273,55\cdot(1+0,1)^3 = 364,10€$$

$$V_3 = 364,10€$$

5.3. RENTAS PERPETUAS, INMEDIATAS Y ENTERAS

Este tipo de rentas **sólo se le podrá calcular valor actual pero nunca el valor final**, y todo ello con independencia de que sea pospagable o prepagable, constante o variable, etc.

El valor actual de estas rentas se obtendrá viendo qué ocurre si aplicamos las fórmulas empleadas para rentas temporales y en lugar de utilizar un número finito de capitales (n) trabajamos con infinitos términos (∞). En definitiva, se trata de trabajar con el concepto matemático de los límites, cuando la duración de la renta (y por tanto, el número de capitales) tiende a infinito.

5.3.1. RENTAS POSPAGABLES

En el caso de **renta constante**, **perpetua, pospagable**, **inmediata** y **entera**, veremos los casos para rentas unitarias y no unitarias:

- **RENTA UNITARIA ($a_{\infty\rceil i}$):**

Recordemos que $a_{n\rceil i}$:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Cuando n tiende a infinito:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^\infty}}{i} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{i} = \frac{1-0}{i} = \frac{1}{i}$$

$$\boxed{V_0 = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}}$$

- **RENTA NO UNITARIA ($A_{\infty\rceil i}$):**

Recordemos que $A_{n\rceil i}$:

$$A_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Cuando n tiende a infinito:

$$A_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = c \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+i)^\infty}}{i} =$$

$$= c \cdot \frac{1-\frac{1}{\infty}}{i} = c \cdot \frac{1-0}{i} = \frac{c}{i}$$

$$\boxed{V_0 = A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}}$$

5.3.2. RENTAS PREPAGABLES

En el caso de **renta constante**, **perpetua, prepagable**, **inmediata** y **entera**, se puede hacer uso de la regla habitual para calcular la renta prepagable que consiste en multiplicar su correspondiente renta pospagable por (1+i):

- **RENTA UNITARIA ($\ddot{a}_{\infty\urcorner i}$):**

  Recordemos que $a_{\infty\urcorner i}$:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

  Multiplicando por (1+i):

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} \cdot (1+i) = \frac{1}{i} \cdot (1+i) = \frac{1+i}{i}$$

$$\boxed{V_0 = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1+i}{i}}$$

- **RENTA NO UNITARIA ($\ddot{A}_{\infty\urcorner i}$):**

  Recordemos que $A_{\infty\urcorner i}$:

$$A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}$$

  Multiplicando por (1+i):

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = A_{\overline{\infty}|i} \cdot (1+i) = \frac{c}{i} \cdot (1+i) = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

$$\boxed{V_0 = \ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = c \cdot \frac{1+i}{i}}$$

EJEMPLO 8

Hallar el valor actual de una renta perpetua semestral con un término de 25.000 euros si el tanto de valoración es el 12% nominal capitalizable por semestres, en los siguientes casos:

a. Si los capitales son pospagables

b. Si los capitales son prepagables

.../...

.../...

Previo a resolver los valores de las rentas, hay que calcular el tanto efectivo semestral equivalente al tanto nominal. Recordemos que:

$$i_k = \frac{J_k}{k}$$

$$i_2 = \frac{12}{2} = 0{,}06 = 6\%$$

Ahora ya podemos calcular el valor inicial de las rentas planteadas:

a. Capitales pospagables

$$V_0 = A_{\overline{\infty}|i} = \frac{c}{i}$$

$$V_0 = A_{\overline{\infty}|0{,}06} = \frac{25.000}{0{,}06} = 416.666{,}67€$$

$$V_0 = 416.666{,}67€$$

b. Capitales prepagables

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

$$V_0 = \ddot{A}_{\overline{\infty}|0{,}06} = 25.000 \cdot \frac{1+0{,}06}{0{,}06} = 441.666{,}67€$$

$$V_0 = 441.666{,}67€$$

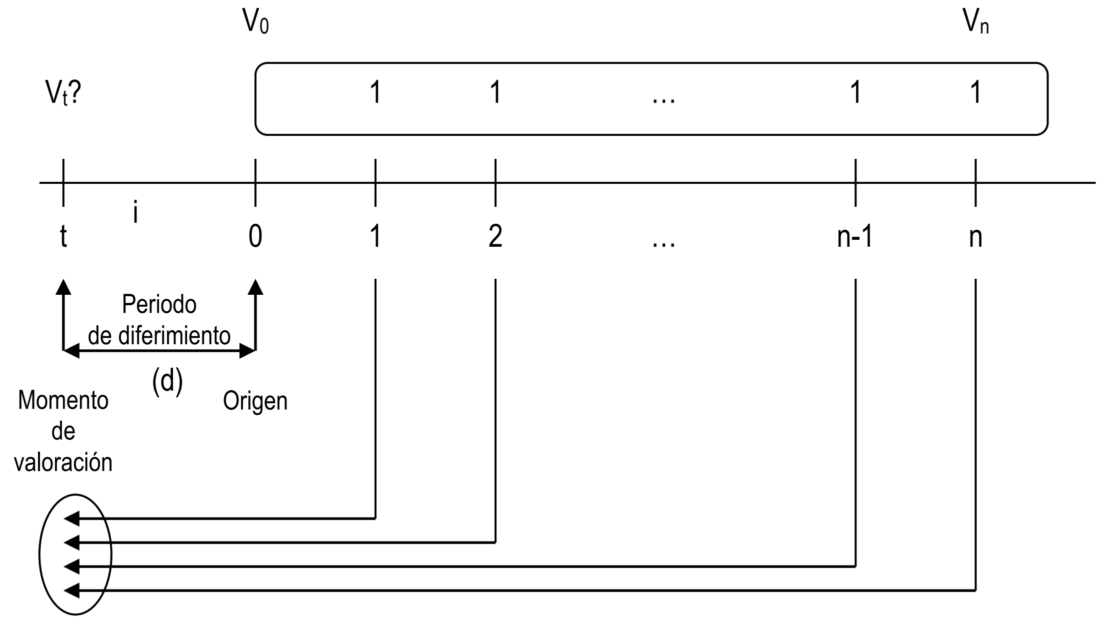
5.4. Rentas Diferidas

Son aquellas que **se valoran con anterioridad a su origen**. El tiempo que transcurre entre el origen de la renta y el momento de valoración se denomina **período de diferimiento** de la renta.

5.4.1. Rentas Temporales, Pospagables y Enteras

Si partimos de una **renta unitaria**, **temporal** (de n términos) y **pospagable** se trata de valorar los capitales directamente, uno a uno, en el momento de valoración elegido.

Gráficamente quedaría:



Al aplicar la definición de valor financiero en el momento t:

$$V_t = \frac{1}{(1+i)^{d+1}} + \frac{1}{(1+i)^{d+2}} + \frac{1}{(1+i)^{d+3}} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{d+n}}$$

Sacando factor común:

$$\frac{1}{(1+i)^{d}}$$

quedaría:

$$V_t = \frac{1}{(1+i)^{d}} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^{1}} + \frac{1}{(1+i)^{2}} + \frac{1}{(1+i)^{3}} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n}} \right]$$

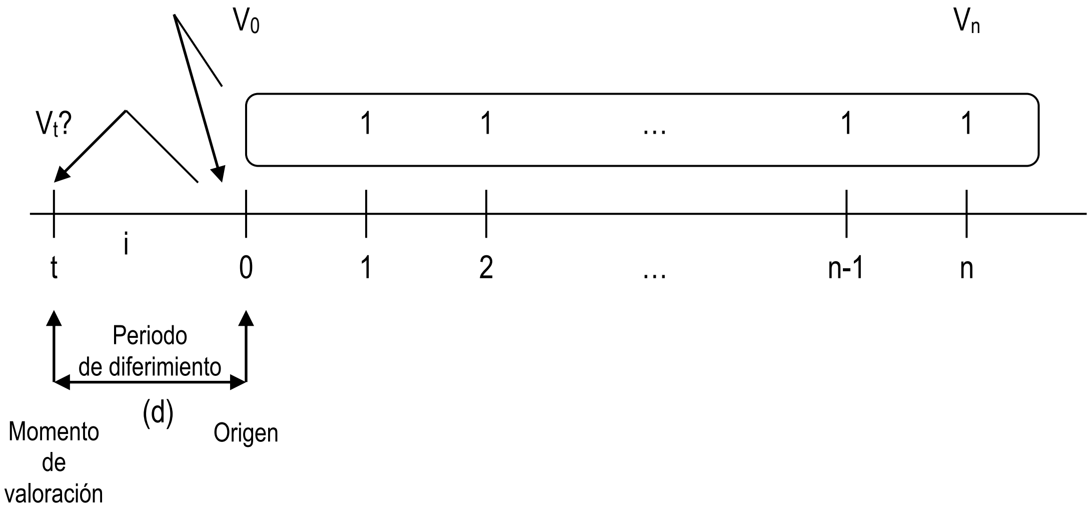
El corchete de esta expresión representa el **valor actual de la renta unitaria**, **temporal** (n términos), **pospagable**, **inmediata** y **entera** ($a_{\overline{n}|i}$) que posteriormente se descuenta como un capital único, al mismo tipo (i), durante el período de diferimiento (d).

$$V_t = \frac{1}{(1+i)^{d}} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Por tanto, **se obtendría el mismo resultado si valoramos la renta en su origen (se considera como inmediata y se calcula su valor actual) y posteriormente se descuenta dicho valor actual (como un solo capital) hasta el momento t elegido, en régimen de descuento**

compuesto al tanto de interés vigente durante el período de diferimiento.

Gráficamente sería:



Aplicando la definición de valor actual y llevando los términos uno a uno, descontando en régimen de descuento compuesto al tanto de la renta i, desde donde están cada uno de los capitales hasta el origen se obtiene el valor actual, que se denota con la siguiente terminología:

$$ {}^{d}/a_{\overline{n}|i} $$

donde:

$n \equiv$ número de términos de la renta

$i \equiv$ tanto de valoración

$d \equiv$ periodo de diferimiento

Analíticamente quedaría así:

$$ V_t = {}^{d}/a_{\overline{n}|i} = \frac{V_0}{(1+i)^d} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} = \frac{1}{(1+i)^d} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

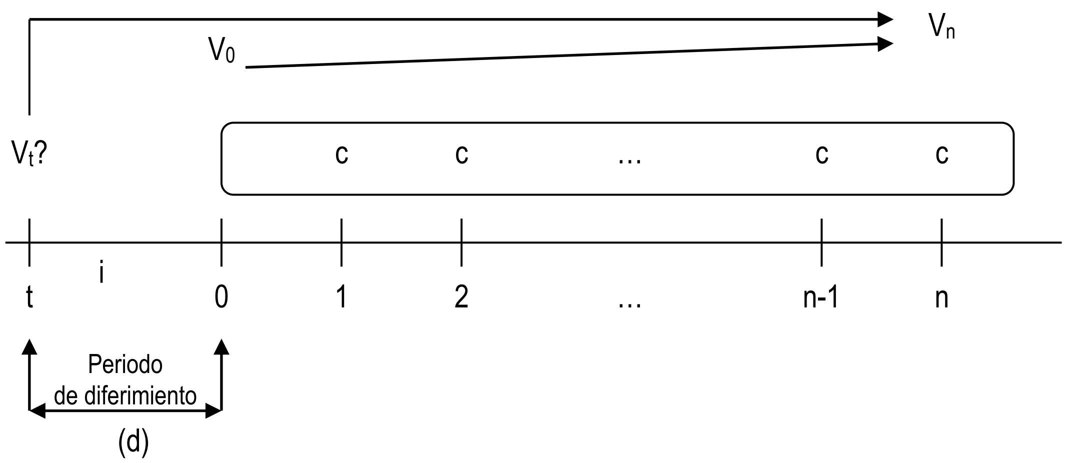
Si la renta fuera constante, pero de cuantía diferente de la unidad (no unitaria), es decir, los términos fueran de **cuantía c,** el valor actual se representa por:

$$ {}^{d}/A_{\overline{n}|i} $$

En este caso, **todo lo dicho seguiría siendo válido y bastaría con multiplicar el valor de la renta unitaria por la cuantía del término**. Es decir:

$$ {}^{d/}A_{\overline{n}|i} = c \cdot {}^{d/}a_{\overline{n}|i} = \frac{A_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} = \frac{c \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} = \frac{c}{(1+i)^d} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

El diferimiento solamente afecta al valor actual, por tanto, si lo que se quiere calcular es el valor final de la renta, aplicando la definición de valor final se tratará como una renta inmediata, <u>aunque también se podría obtener dicho valor final a partir del valor actual diferido</u>:



Analíticamente:

$$ V_n = V_0 \cdot (1+i)^n = V_t \cdot (1+i)^{d+n} $$

5.4.2. RENTAS TEMPORALES, PREPAGABLES Y ENTERAS

Si la renta fuese **constante**, **temporal**, **prepagable**, **diferida**, **unitaria** y **entera** tendríamos que calcular:

$$ {}^{d/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} $$

Recordando que los valores actuales y finales de las rentas prepagables se obtienen a partir de las rentas pospagables multiplicando por (1 + i), es decir, las rentas prepagables son el resultado de capitalizar un período las rentas pospagables.

$$V_t = {}^{d}/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\cdot\frac{a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} = (1+i)\cdot\frac{1}{(1+i)^d}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{V_t = {}^{d}/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^{d-1}}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

De igual forma, si la renta fuese **constante**, **temporal**, **prepagable**, **diferida**, **de cuantía c**, y **entera** tendríamos que calcular:

$${}^{d}/\ddot{A}_{\overline{n}|i}$$

Multiplicando por (1 + i):

$$V_t = {}^{d}/\ddot{A}_{\overline{n}|i} = (1+i)\cdot\frac{A_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} = c\cdot(1+i)\cdot\frac{1}{(1+i)^d}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{V_t = {}^{d}/\ddot{A}_{\overline{n}|i} = c\cdot\frac{1}{(1+i)^{d-1}}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

5.4.3. Rentas Perpetuas, Pospagables y Enteras

Si la renta fuese **constante**, **perpetua**, **pospagable**, **diferida**, **unitaria** y **entera** tendríamos que calcular:

$${}^{d}/a_{\overline{\infty}|i}$$

Recordando que:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

y que:

$${}^{d}/a_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d}$$

entonces:

$$\boxed{V_t = {}^{d}/a_{\overline{\infty}|i} = \frac{a_{\overline{\infty}|i}}{(1+i)^d} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^d}}$$

Si la renta fuese **constante**, **perpetua**, **pospagable**, **diferida**, **de cuantía c** y **entera** tendríamos que calcular:

$$^{d}/A_{\overline{\infty|}i}$$

Recordando que:

$$A_{\overline{\infty|}i} = \frac{c}{i}$$

y que:

$$^{d}/A_{\overline{n|}i} = \frac{A_{\overline{n|}i}}{(1+i)^{d}}$$

entonces:

$$\boxed{V_t = {}^{d}/A_{\overline{\infty|}i} = \frac{A_{\overline{\infty|}i}}{(1+i)^{d}} = \frac{c}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{d}}}$$

5.4.4. RENTAS PERPETUAS, PREPAGABLES Y ENTERAS

Si la renta fuese **constante**, **perpetua**, **prepagable**, **diferida**, **unitaria** y **entera** tendríamos que calcular:

$$^{d}/\ddot{a}_{\overline{\infty|}i}$$

Recordando que:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}i} = \frac{1+i}{i}$$

y que:

$$^{d}/\ddot{a}_{\overline{n|}i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}i}}{(1+i)^{d}}$$

entonces:

$$\boxed{V_t = {}^{d}/\ddot{a}_{\overline{\infty|}i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{\infty|}i}}{(1+i)^{d}} = \frac{1+i}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{d}}}$$

Si la renta fuese **constante**, **perpetua**, **prepagable**, **diferida**, **de cuantía c** y **entera** tendríamos que calcular:

$$^{d}/\ddot{A}_{\overline{\infty|}i}$$

Recordando que:

$$\ddot{A}_{\overline{\infty|}i} = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

y que:

$$ {}_{d/}\ddot{A}_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{A}_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} $$

entonces:

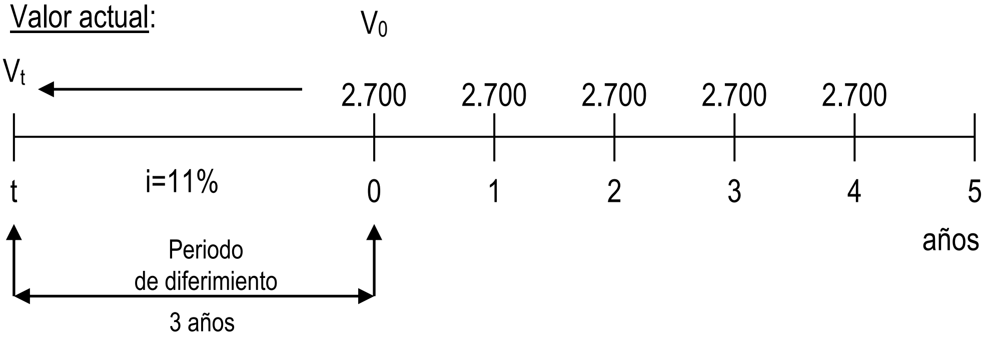
$$ V_t = {}_{d/}\ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = \frac{\ddot{A}_{\overline{\infty}|i}}{(1+i)^d} = c \cdot \frac{1+i}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^d} $$

EJEMPLO 9

Calcular el valor actual y final de una renta cuya duración es de 5 años, con términos anuales prepagables de 2.700 euros sabiendo que se empiezan a devengar dentro de 3 años. Tanto de valoración 11% efectivo anual.

Se trata de una renta diferida 3 años, con términos prepagables y 5 términos.

Valor actual:



$$ V_t = {}_{d/}\ddot{A}_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{A}_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} $$

Recordemos que:

$$ \ddot{A}_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

Por lo que:

$$ V_t = {}_{d/}\ddot{A}_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{A}_{\overline{n}|i}}{(1+i)^d} = (1+i)^{-d} \cdot \left[c \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] $$

$$ V_t = (1+i)^{-d} \cdot \left[c \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] $$

$$ V_t = (1+0{,}11)^{-3} \cdot \left[2.700 \cdot (1+0{,}11) \cdot \frac{1-(1+0{,}11)^{-5}}{0{,}11} \right] = 8.099{,}12€ $$

.../...

.../...

$$V_t = 8.099,12€$$

Valor final:

El diferimiento no afecta al valor final, que se podía haber calculado como el de una renta inmediata de 5 términos prepagables:

$$V_n = \ddot{S}_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

$$V_5 = \ddot{S}_{\overline{5}|0,11} = 2.700 \cdot \frac{(1+0,11)^5 - 1}{0,11} \cdot (1+0,11) = 18.664,72€$$

$$V_5 = 18.664,72€$$

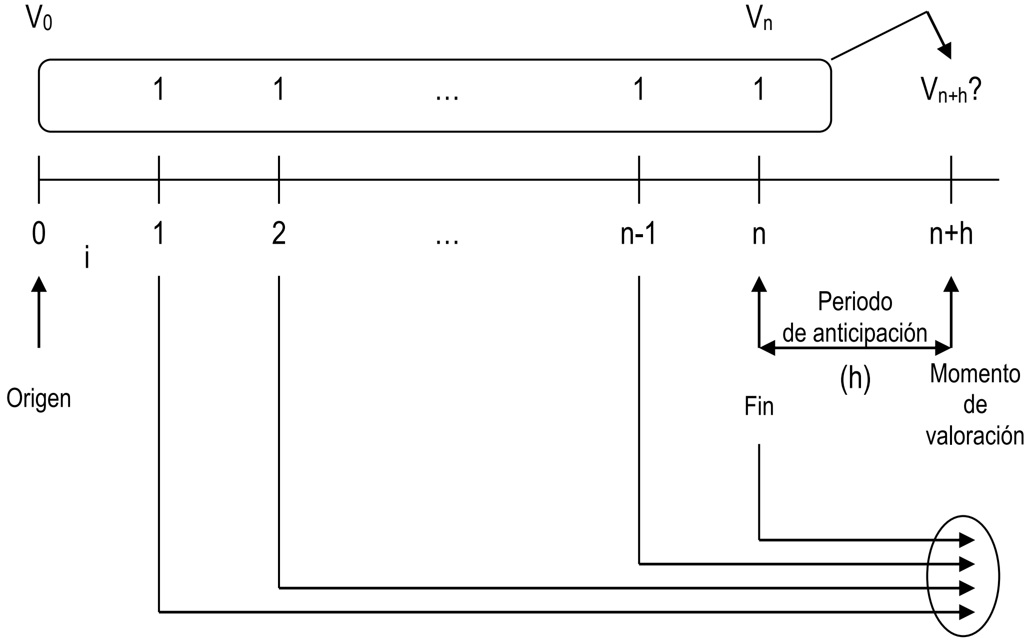
5.5. RENTAS ANTICIPADAS

Son aquellas que **se valoran con posterioridad a su final**. El tiempo que transcurre entre el final de la renta y el momento de valoración se denomina **período de anticipación** de la renta.

5.5.1. RENTAS TEMPORALES, POSPAGABLES Y ENTERAS

Si partimos de una **renta unitaria**, **temporal** (de n términos) y **pospagable** se trata de valorar los capitales directamente, uno a uno, en el momento de valoración elegido.

Gráficamente quedaría:



Al aplicar la definición de valor financiero en el momento t:

$$V_{n+h} = (1+i)^h + (1+i)^{h+1} + (1+i)^{h+2} + \ldots + (1+i)^{h+n-1}$$

Sacando factor común:

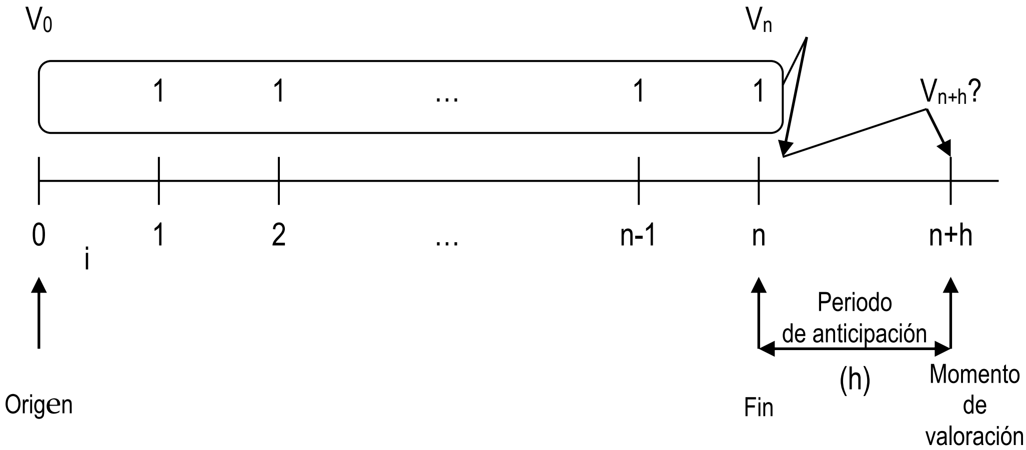
$$(1+i)^h$$

quedará:

$$V_{n+h} = (1+i)^h \cdot \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}\right]$$

El corchete representa el **valor final de la renta unitaria**, **temporal** (n términos), **pospagable**, **inmediata** y **entera** ($s_{\overline{n}|\,i}$), que posteriormente se capitaliza como un capital único, al mismo tipo (i), durante el período de anticipación (h). Por tanto, **si primero se valora la renta en su final y posteriormente capitalizamos el valor final, como un solo capital, se obtendría el mismo resultado**.

Gráficamente sería:



Analíticamente quedaría así:

$$V_{n+h} = (1+i)^h \cdot V_n = (1+i)^h \cdot s_{\overline{n}|\,i}$$

Esta expresión puede notarse de forma abreviada de la siguiente forma:

$$h/s_{\overline{n}|\,i}$$

donde:

$n \equiv$ número de términos de la renta

$i \equiv$ tanto de valoración

$h \equiv$ periodo de anticipación

Analíticamente quedaría así:

$$V_{n+h} = {}^{h}/s_{\overline{n}|i} = (1+i)^h \cdot V_n = (1+i)^h \cdot s_{\overline{n}|i} = (1+i)^h \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

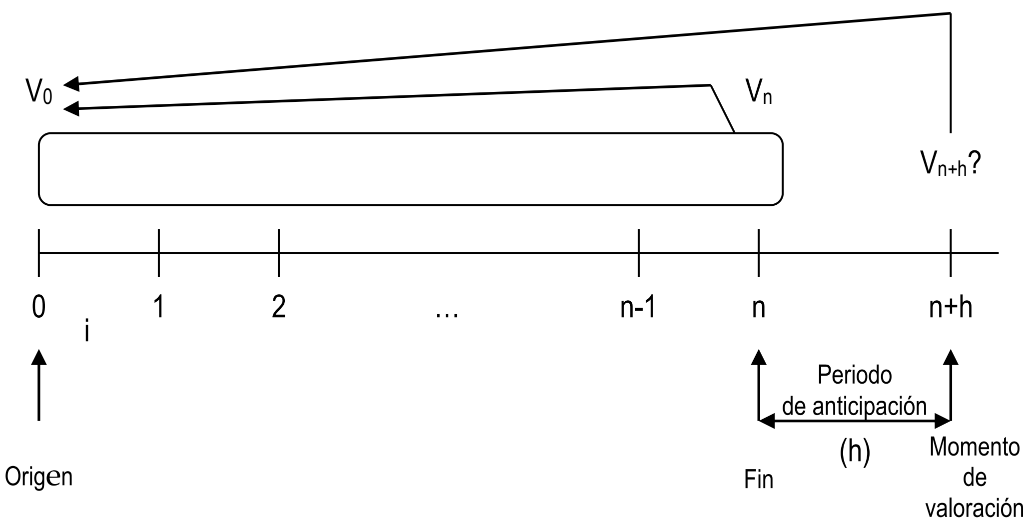
Si la renta fuera constante, pero de cuantía diferente de la unidad (no unitaria), es decir, los términos fueran de **cuantía c,** el valor final se representa por:

$${}^{h}/S_{\overline{n}|i}$$

En este caso, **todo lo dicho seguiría siendo válido y bastaría con multiplicar el valor de la renta unitaria por la cuantía del término**. Es decir:

$$V_{n+h} = {}^{h}/S_{\overline{n}|i} = c \cdot {}^{h}/s_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i)^h \cdot s_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i)^h \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

La anticipación solamente afecta al valor final pero no al valor actual, que se realizará como si de una renta inmediata se tratara, cumpliéndose la siguiente relación entre diferentes valores de la renta:



Analíticamente:

$$\boxed{V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n} = \frac{V_{n+h}}{(1+i)^{n+h}}}$$

Como veremos a continuación, todo lo anterior se cumple, de igual forma, para rentas constantes prepagables y perpetuas.

5.5.2. RENTAS TEMPORALES, PREPAGABLES Y ENTERAS

Si la renta fuese **constante**, **temporal**, **prepagable**, **anticipada**, **unitaria** y **entera** tendríamos que calcular:

$${}^{h}/\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

Recordando que los valores actuales y finales de las rentas prepagables se obtienen a partir de las rentas pospagables multiplicando por (1 + i), es decir, las rentas prepagables son el resultado de capitalizar un período las rentas pospagables.

$$V_{n+h} = {}^{h}/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\cdot {}^{h}/s_{\overline{n}|i} = (1+i)\cdot(1+i)^h \cdot s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{h+1}\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\boxed{V_{n+h} = {}^{h}/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{h+1}\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

De igual forma, si la renta fuese **constante**, **temporal**, **prepagable**, **anticipada**, **de cuantía c**, y **entera** tendríamos que calcular:

$${}^{h}/\ddot{S}_{\overline{n}|i}$$

Multiplicando la renta unitaria por c:

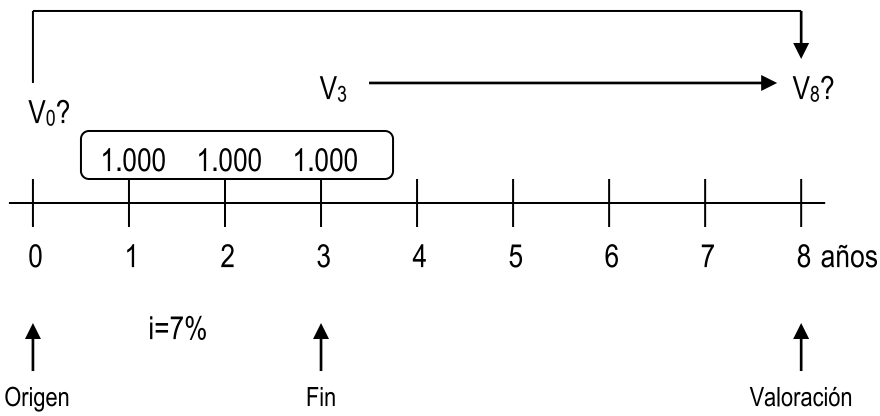
$$V_{n+h} = {}^{h}/\ddot{S}_{\overline{n}|i} = c\cdot {}^{h}/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = c\cdot(1+i)^{h+1}\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\boxed{V_{n+h} = {}^{h}/\ddot{S}_{\overline{n}|i} = c\cdot(1+i)^{h+1}\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

EJEMPLO 10

Calcular el valor actual y final de una renta de 3 términos anuales de 1.000 euros pagaderos por vencido si la valoración al 7% anual se efectúa a los 8 años de comenzada la renta.

Se trata de una renta anticipada, puesto que la valoración se realiza 5 años después de haberse hecho efectivo el último capital. No obstante, la anticipación no afecta al valor actual que se resolverá como una renta inmediata.



Valor actual:

Recordemos que el valor actual de una renta constante, temporal, pospagable, inmediata, entera y de cuantía c es:

$$V_0 = A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i} = c \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = A_{\overline{3}|0,07} = 1.000 \cdot a_{\overline{3}|0,07} = 1.000 \cdot \frac{1-(1+0,07)^{-3}}{0,07} = 2.624,32€$$

$$V_0 = 2.624,32€$$

Valor final:

Para calcular el valor final de una renta constante, temporal, pospagable, anticipada, de cuantía c y entera se utiliza la siguiente fórmula:

$$V_{n+h} = {}^{h}/S_{\overline{n}|i} = c \cdot (1+i)^h \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_8 = {}^{5}/S_{\overline{3}|0,07} = 1.000 \cdot (1+0,07)^5 \cdot \frac{(1+0,07)^3 - 1}{0,07} = 4.509,06€$$

$$V_8 = 4.509,06€$$

…/…

.../...

También se puede calcular capitalizando 8 años el valor actual de la renta. Es decir:

$$V_{n+h} = V_0 \cdot (1+i)^{n+h}$$

$$V_8 = 2.624{,}32 \cdot (1+0{,}07)^8 = 4.509{,}06€$$

$$V_8 = 4.509{,}06€$$

TEMA 7: RENTAS VARIABLES

ÍNDICE

1. RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

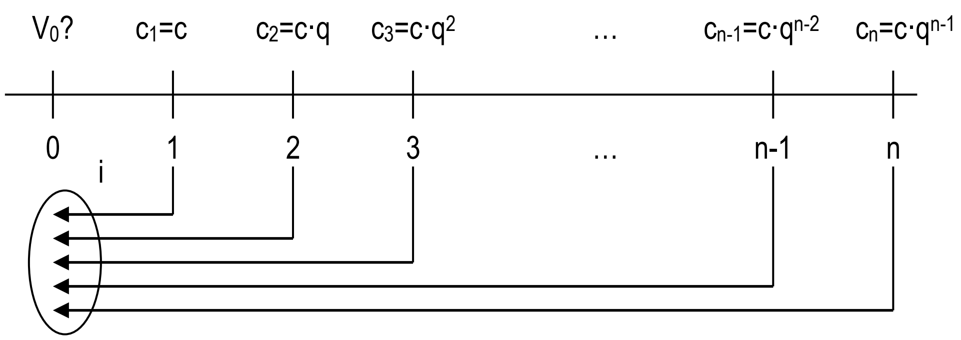
Este tipo de rentas sirve para valorar un **conjunto de capitales equidistantes en el tiempo cuyas cuantías son variables siguiendo una ley en progresión geométrica**, esto es, cada término es igual al anterior multiplicado por un mismo número (que se denomina razón de la progresión geométrica) y que denotaremos por «q».

Para calcular cualquier término basta con conocer, por tanto, el primero de ellos «c» y la razón de la progresión «q».

1.1. RENTA TEMPORAL, POSPAGABLE, INMEDIATA Y ENTERA

1.1.1 CÁLCULO DEL VALOR ACTUAL

La representación gráfica de una **renta variable** en **progresión geométrica**, **temporal**, **pospagable**, **inmediata** y **entera** es la siguiente:



Se trata de valorar en el origen todos los términos que componen la renta. Para ello llevaremos, uno a uno, descontando en régimen de descuento compuesto al tanto de la renta i, desde donde está cada capital hasta el origen, obteniéndose el valor actual, que se denota con la siguiente terminología:

$$A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i}$$

donde:

c ≡ primer término de la progresión

q ≡ razón de la progresión

n ≡ número de capitales

i ≡ tanto de valoración

llegamos a la siguiente fórmula:

$$\boxed{V_0 = A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = \frac{c}{1+i} + \frac{c \cdot q}{(1+i)^2} + \frac{c \cdot q^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{c \cdot q^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{c \cdot q^{n-1}}{(1+i)^n}}$$

Sacando factor común:

$$\frac{c}{1+i}$$

se obtiene:

$$\boxed{V_0 = A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = \frac{c}{1+i} \cdot \left[1 + \frac{q}{1+i} + \frac{q^2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right]}$$

Se puede observar que el corchete es la **suma de n términos en progresión geométrica de razón**:

$$r = \frac{q}{1+i}$$

Aplicando la expresión que suma términos que siguen esta ley, es decir, que suman los n términos de una progresión geométrica, que recordamos que es la siguiente:

$$\boxed{S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}}$$

siendo:

$a_1 \equiv$ primer término de la progresión

$a_n \equiv$ último término de la progresión

$r \equiv$ razón de la progresión[1]

Aplicando dicha fórmula a los términos actualizados de la renta, el valor actual de la renta queda de la siguiente forma:

$$A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = \frac{c}{1+i} \cdot \left[\frac{1 - \dfrac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \cdot \dfrac{q}{1+i}}{1 - \dfrac{q}{1+i}} \right] = \frac{c}{1+i} \cdot \left[\frac{1 - \dfrac{q^n}{(1+i)^n}}{\dfrac{1+i-q}{1+i}} \right] =$$

$$= \frac{c}{1+i} \cdot \left[\frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{\dfrac{1+i-q}{1+i}} \right] = \frac{c}{1+i} \cdot \left[\frac{\dfrac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1}}{\dfrac{1+i-q}{1+i}} \right] =$$

$$= \frac{c}{1+i} \cdot \left[\frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n} \cdot (1+i)}{1+i-q} \right] = \frac{c}{1+i} \cdot \left[\frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n} \cdot (1+i)}{1+i-q} \right] =$$

$$\frac{c}{\cancel{1+i}} \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n} \cdot (\cancel{1+i})}{1+i-q}$$

de donde finalmente se puede obtener:

$$\boxed{A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}}$$

Esta es una expresión que solamente se podrá utilizar cuando:

$$q \neq 1+i$$

<u>Cuando se cumple</u>:

$$q = 1+i$$

la expresión del valor actual quedará de la siguiente forma:

$$\boxed{A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = \frac{c}{1+i} + \frac{c \cdot (1+i)}{(1+i)^2} + \frac{c \cdot (1+i)^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{c \cdot (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}}$$

Sacando factor común:

[1] Obsérvese que la progresión geométrica del corchete a la que nos referimos en esta ocasión, de razón «r» es diferente a la progresión geométrica de la propia renta, cuya razón es «q».

$$\frac{c}{1+i}$$

se obtiene:

$$A_{(c;\,q)\;\overline{n|}\,i} = \frac{c}{1+i}\cdot\left[1+\frac{(1+i)}{(1+i)}+\frac{(1+i)^2}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{\cdot(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right]=$$

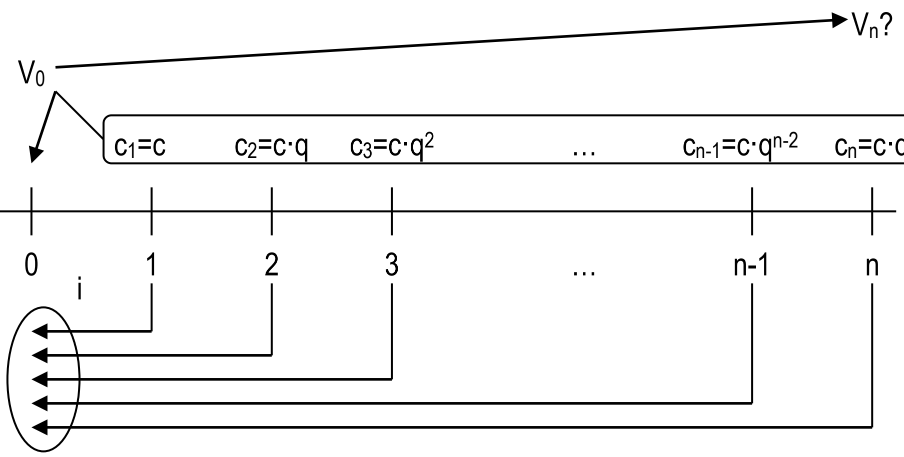
$$\frac{c}{1+i}\cdot[1+1+1+(n\ \text{veces})\ldots+1]$$

El corchete, al simplificarse, no es más que la suma aritmética de n veces la unidad, quedando el valor actual así:

$$\boxed{A_{(c;\,q)\;\overline{n|}\,i} = \frac{n\cdot c}{1+i}}$$

1.1.2 CÁLCULO DEL VALOR FINAL

A partir del valor actual se podrá calcular el valor de la renta en cualquier otro momento, utilizando la relación que existe entre los valores financieros en los diferentes momentos de tiempo. En concreto, el valor final será el resultado de capitalizar el valor actual antes calculado.



Matemáticamente, recordando que la fórmula de la capitalización compuesta para calcular el valor final de un determinado capital inicial n períodos es:

$$\boxed{C_n = C_0\cdot(1+i)^n}$$

esta relación se expresa así:

$$\boxed{S_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i} = (1+i)^n \cdot A_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i}}$$

Se hubiese llegado al mismo resultado si se hubiese capitalizado cada uno de los términos de la progresión hasta el momento n y posteriormente se hubiesen sumado los valores finales de cada uno de ellos.

EJEMPLO 1

Hallar el valor actual y final de los ingresos anuales vencidos de un trabajador que el primer año va a ganar 20.000 euros y espera que crezcan un 5% anual de forma acumulativa para un horizonte temporal de 4 años.

a. Suponiendo una tasa de valoración del 7%.
b. Suponiendo una tasa de valoración del 5%.

V_0? V_4?

20.000 | $20.000 \cdot 1{,}05$ | $20.000 \cdot 1{,}05^2$ | $20.000 \cdot 1{,}05^3$

0 1 2 3 4 años

i=7%
i=5%

a. Valorando al 7%.

Como la razón de la progresión q=1,05 y el tanto de valoración i=0,07, no se cumple $q = 1+i$, por lo que se para calcular el valor actual se tiene que aplicar la siguiente fórmula:

$$A_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i} = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$A_{(20.000;1{,}05)\ \overline{4|}\,0{,}07} = 20.000 \cdot \frac{1 - 1{,}05^4 \cdot (1+0{,}07)^{-4}}{1+0{,}07-1{,}05} = 72.696{,}10€$$

$$A_{(20.000;1{,}05)\ \overline{4|}\,0{,}07} = 72.696{,}10€$$

El valor final se calcula con la siguiente fórmula:

$$S_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i} = (1+i)^n \cdot A_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i}$$

$$S_{(20.000;1{,}05)\ \overline{4|}\,0{,}07} = (1+0{,}07)^4 \cdot A_{(20.000;1{,}05)\ \overline{4|}\,0{,}07} =$$
$$= 1{,}07^4 \cdot 72.696{,}10 = 95.289{,}76€$$

$$S_{(20.000;1{,}05)\ \overline{4|}\,0{,}07} = 95.289{,}76€$$

.../...

.../...

b. Valorando al 5%.

Como la razón de la progresión q=1,05 y el tanto de valoración i=0,05, se cumple $q = 1 + i$, por lo que se para calcular el valor actual se tiene que aplicar la siguiente fórmula:

$$A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = \frac{n \cdot c}{1+i}$$

$$A_{(20.000;1,05)\,\overline{4|}\,0,05} = \frac{4 \cdot 20.000}{1+0,05} = 76.190,48€$$

$$A_{(20.000;1,05)\,\overline{4|}\,0,05} = 76.190,48€$$

El valor final se calcula con la misma fórmula que en el caso anterior:

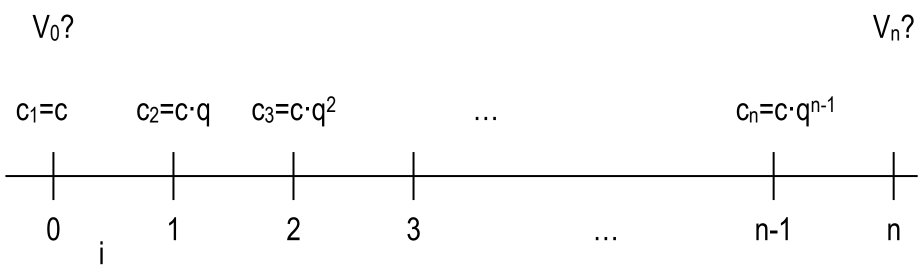
$$S_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^n \cdot A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i}$$

$$S_{(20.000;1,05)\,\overline{4|}\,0,05} = (1+0,05)^4 \cdot A_{(20.000;1,05)\,\overline{4|}\,0,05} =$$
$$= 1,05^4 \cdot 76.190,48 = 92.610,00€$$

$$S_{(20.000;1,05)\,\overline{4|}\,0,05} = 92.610,00€$$

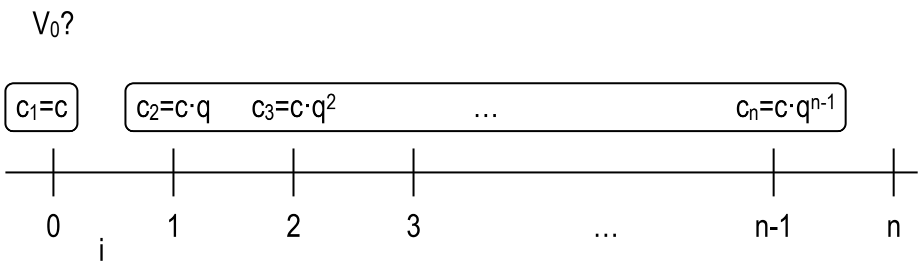
1.2. RENTA TEMPORAL, PREPAGABLE, INMEDIATA Y ENTERA

Para una **renta variable** con términos en **progresión geométrica**, **temporal** (n capitales), **prepagable**, **inmediata**, **entera** y **valorada en compuesta**, la representación gráfica queda de la siguiente forma:



1.2.1. CÁLCULO DEL VALOR ACTUAL

Una posibilidad consiste en valorar los n capitales moviendo, por una parte, el primer capital, que ya está en el origen y el resto de capitales, n–1, como renta pospagable inmediata de n–1 términos:

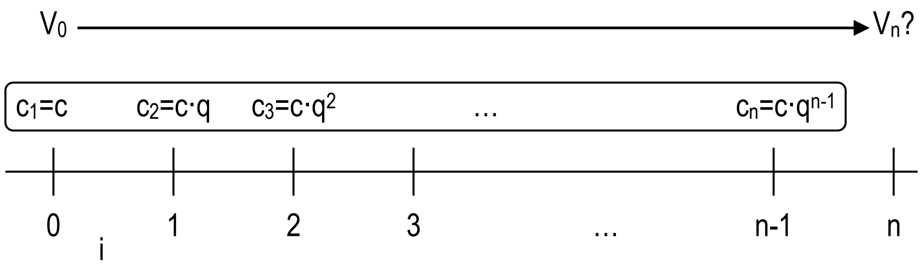


Otra posibilidad consiste en convertirla en pospagable multiplicando por (1 + i) todos los términos.

$$\ddot{A}_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i} = (1+i)\cdot A_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i}$$

1.2.2. Cálculo del Valor Final

Se puede obtener capitalizando el valor actual de la misma renta.



La expresión a la que se llega es:

$$\ddot{S}_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i} = (1+i)^{n}\cdot \ddot{A}_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i}$$

1.3. Rentas Perpetuas

El cálculo de la **renta en progresión geométrica perpetua** se realiza, como las demás rentas perpetuas, **a través del límite cuando el número de términos de la renta (n) tiende a infinito**.

1.3.1. Rentas Pospagables

En primer lugar consideraremos que no se cumple:

$$q = 1 + i$$

así que utilizamos la fórmula del valor actual de una renta variable en progresión geométrica, temporal, pospagable, inmediata y entera y le aplicamos los límites:

$$A_{(c;\,q)\,\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} = c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} =$$

$$= c \cdot \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\left[q^n \cdot (1+i)^{-n}\right]}{1+i-q} = c \cdot \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{q^n}{(1+i)^n}\right]}{1+i-q} = c \cdot \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{q}{(1+i)}\right]^n}{1+i-q}$$

Resulta que finalmente el límite, y por tanto el resultado del valor actual, está en función de la relación existente entre el valor de la razón de la progresión (q) y (1 + i), y sólo tendrá sentido financiero cuando:

$$q < 1+i$$

dado que de esa manera el corchete de la ecuación elevado a n es un número menor que 1, que elevado a un número excesivamente alto tiende a cero, quedando el siguiente valor actual:

$$A_{(c;\,q)\,\overline{\infty}|\,i} = c \cdot \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{q}{(1+i)}\right]^n}{1+i-q} = c \cdot \frac{1}{1+i-q}$$

$$\boxed{A_{(c;\,q)\,\overline{\infty}|\,i} = \frac{c}{1+i-q}}$$

Como recordaremos del tema anterior, **no tiene sentido calcular el valor final de una renta perpetua**.

1.3.2. RENTAS PREPAGABLES

Para calcular el valor actual de una renta perpetua, prepagable, inmediata y entera basta con multiplicar el valor actual de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

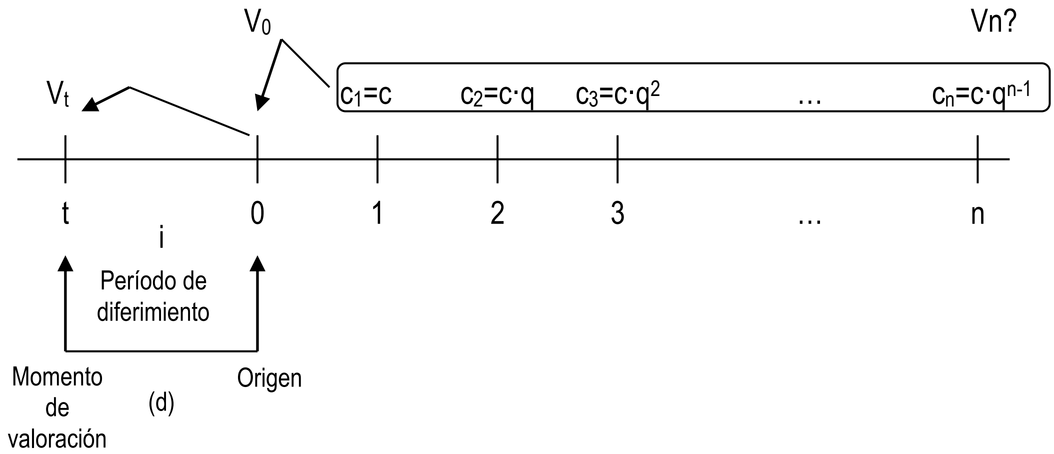
$$\boxed{\ddot{A}_{(c;\,q)\,\overline{\infty}|\,i} = (1+i) \cdot A_{(c;\,q)\,\overline{\infty}|\,i}}$$

1.4. RENTAS DIFERIDAS

Se habla de **rentas diferidas** cuando **se valoran con anterioridad a su origen**. Al tiempo que transcurría entre el origen de la renta y el momento de valoración lo denominábamos **período de diferimiento de la renta**.

1.4.1. Rentas Temporales, Pospagables y Enteras

Para valorar la renta diferida, primero valoraremos la renta en su origen (se considera como inmediata y se calcula su valor actual) y posteriormente descontaremos dicho valor actual (como un solo capital) hasta el momento t elegido, en régimen de descuento compuesto al tanto de interés vigente durante el período de diferimiento. Gráficamente sería:



El resultado final quedaría así:

$$ {}^{d}/A_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i} = A_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i}\cdot(1+i)^{-d} = \frac{A_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i}}{(1+i)^{d}} $$

El diferimiento solamente afecta al valor actual, por tanto, el valor final se calcula como en una renta inmediata.

1.4.2. Rentas Temporales, Prepagables y Enteras

Al igual que razonamos para las rentas perpetuas, prepagables, inmediatas y enteras, para calcular el valor actual de una renta temporal, prepagable, diferida y entera basta con multiplicar el valor actual de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

$$ {}^{d}/\ddot{A}_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i} = (1+i)\cdot {}^{d}/A_{(c;\,q)\ \overline{n}|\,i} $$

1.4.3. Rentas Perpetuas, Pospagables y Enteras

Al igual que hemos hecho anteriormente, para calcular el valor actual de una renta perpetua, pospagable, diferida y entera basta con aplicar límites cuando n tiende a infinito en el valor actual de una renta temporal, pospagable, diferida y entera. Así:

$$ {}^{d}/A_{(c;q)\,\overline{\infty|}\,i} = \lim_{n\to\infty} {}^{d}/A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i} = \lim_{n\to\infty} A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i} \cdot (1+i)^{-d} = (1+i)^{-d} \cdot \lim_{n\to\infty} A_{(c;q)\,\overline{n|}\,i} = $$

$$ = (1+i)^{-d} \cdot \frac{c}{1+i-q} $$

Es decir:

$$ \boxed{{}^{d}/A_{(c;q)\,\overline{\infty|}\,i} = (1+i)^{-d} \cdot A_{(c;q)\,\overline{\infty|}\,i}} $$

Tal y como sucedía con las rentas inmediatas, hay que recordar dos cuestiones:

- El valor actual de la renta perpetua, pospagable, diferida y entera sólo tendrá sentido financiero cuando:

$$ q < 1+i $$

- No tiene sentido calcular el valor final de una renta perpetua.

1.4.4. Rentas Perpetuas, Prepagables y Enteras

Al igual que hemos hecho anteriormente, para calcular el valor actual de una renta perpetua, prepagable, diferida y entera basta con multiplicar el valor actual de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

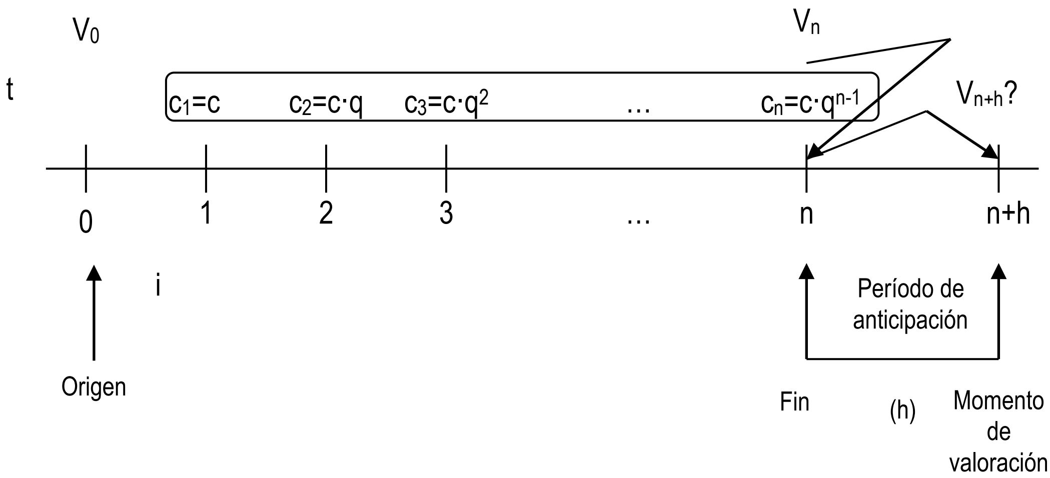
$$ \boxed{{}^{d}/\ddot{A}_{(c;q)\,\overline{\infty|}\,i} = (1+i) \cdot {}^{d}/A_{(c;q)\,\overline{\infty|}\,i}} $$

1.5. Rentas Anticipadas

Son aquellas que **se valoran con posterioridad a su final**, siendo el **período de anticipación de la renta** el tiempo que transcurre entre el final de la renta y el momento de su valoración.

1.5.1. Rentas Temporales, Pospagables y Enteras

Valoraremos la renta, tratándola como renta inmediata, en su final y posteriormente capitalizamos este valor, al mismo tipo (i), durante el período de anticipación (h). También se podrá valorar la renta en su origen y posteriormente capitalizamos hasta el punto deseado.



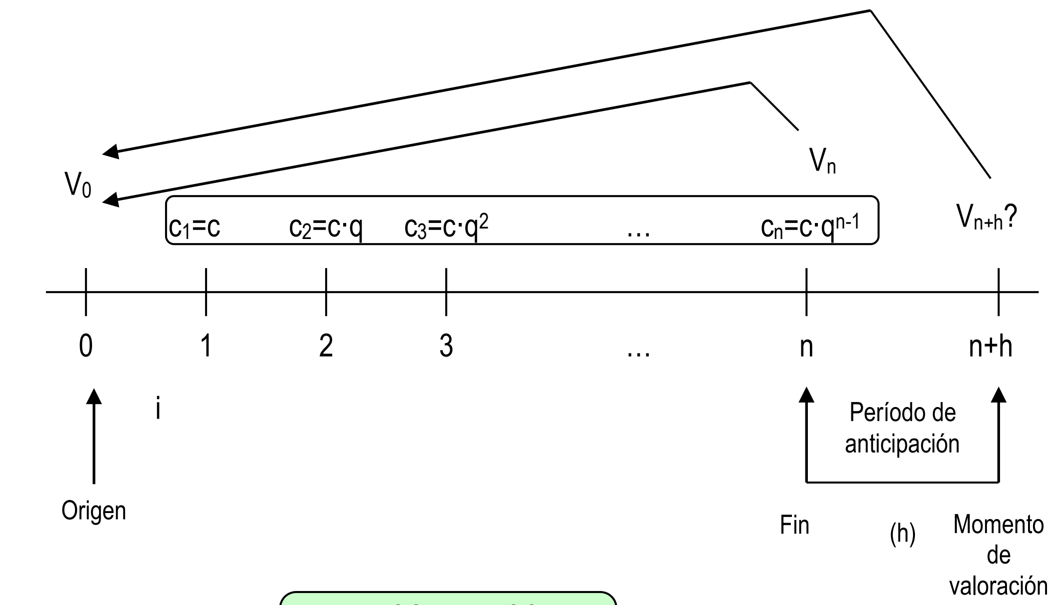
El resultado será:

$$V_{n+h} = {}^{h}/S_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^h \cdot S_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^{h+n} \cdot A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i}$$

Es decir:

$$\boxed{{}^{h}/S_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^h \cdot S_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^{h+n} \cdot A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i}}$$

La anticipación solamente afecta al valor final pero no al valor actual, que se realizará como si de una renta inmediata se tratara, cumpliéndose la siguiente relación, como en cualquier otro tipo de renta, entre diferentes valores de la renta:



$$\boxed{V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n} = \frac{V_{n+h}}{(1+i)^{n+h}}}$$

1.5.2. RENTAS TEMPORALES, PREPAGABLES Y ENTERAS

Al igual que hemos hecho anteriormente, para calcular el valor actual de una renta temporal, prepagable, anticipada y entera basta con multiplicar el valor final de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

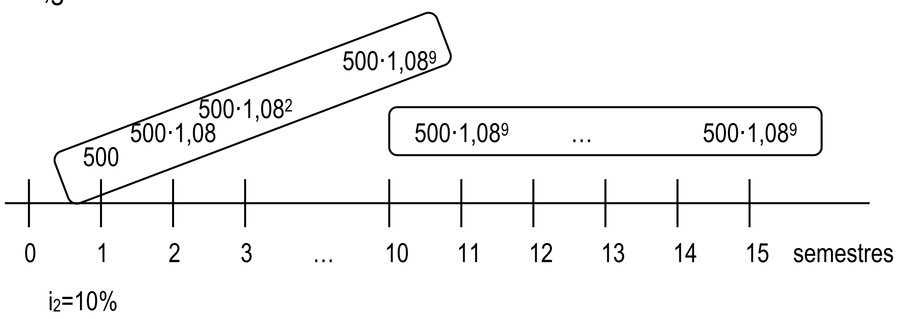
$$\boxed{{}^{h}/\ddot{S}_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)\cdot {}^{h}/S_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i}}$$

EJEMPLO 2

Determinar el valor actual de los ingresos de una empresa para los próximos 15 semestres si para el primer período ascienden a 500 euros y se estima un incremento semestral del 8% durante los primeros 10 semestres y manteniéndose constante a partir de entonces. Tipo de valoración el 10% efectivo semestral.

Los 15 ingresos constituyen una renta, pero tomados conjuntamente sería aleatoria. Por el contrario, si se consideran en primer lugar los 10 primeros términos (renta en progresión geométrica, inmediata, pospagable, temporal y entera) y a continuación los 5 últimos (renta constante, pospagable, temporal, diferida y entera), podremos emplear fórmulas de rentas.

Así,gráficamente:



<u>Fórmula del valor actual de la renta variable en progresión geométrica, temporal, pospagable, inmediata y entera, cuando no se cumple que q=1+i</u>:

$$A_{(c;\,q)\,\overline{n|}\,i} = c\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$A_{(500;1{,}08)\,\overline{10|}\,0{,}1} = 500\cdot\frac{1-1{,}08^{10}\cdot(1+0{,}10)^{-10}}{1+0{,}10-1{,}08} = 4.191{,}02€$$

$$A_{(500;1{,}08)\,\overline{10|}\,0{,}1} = 4.191{,}02€$$

.../...

.../...

Fórmula del valor actual de la renta constante, pospagable, temporal, diferida y entera[2]:

$$ {}^{d}/A_{\overline{n}|i} = \frac{A_{\overline{n}|i}}{(1+i)^{d}} $$

$$ A_{\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i} $$

$$ a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

$$ a_{\overline{5}|0,10} = \frac{1-(1+0,10)^{-5}}{0,1} = 3,790787 $$

$$ A_{\overline{5}|0,10} = 500 \cdot 1,08^{9} \cdot a_{\overline{5}|0,10} = 500 \cdot 1,08^{9} \cdot 3,790787 = 3.788,90€ $$

$$ {}^{10}/A_{\overline{5}|0,10} = \frac{A_{\overline{5}|0,10}}{(1+0,10)^{10}} = \frac{3.788,90}{(1+0,10)^{10}} = 1.460,78€ $$

Ya podemos sumar los valores actuales de las dos rentas:

$$ A_{(500;1,08)\ \overline{10}|0,1} + {}^{10}/A_{\overline{5}|0,10} = 4.191,02 + 1.460,78 = 5.651,80€ $$

$$ V_0 = 5.651,80€ $$

2. RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Este tipo de rentas se refiere a un **conjunto de capitales cuyas cuantías van variando y lo hacen siguiendo una ley en progresión aritmética**, esto es, cada término es el anterior aumentado (o disminuido) en una misma cuantía (que se denomina razón de la progresión aritmética) y que notaremos por «d», siempre expresada en unidades monetarias.

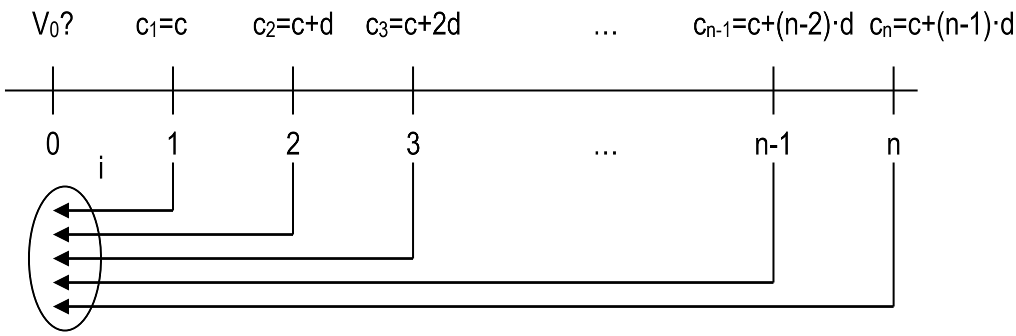
Para calcular cualquier término basta con conocer, por tanto, el primero de ellos «c» y la razón de la progresión «d».

[2] Este tipo de rentas las estudiamos en el tema anterior.

2.1. RENTA TEMPORAL, POSPAGABLE, INMEDIATA Y ENTERA

2.1.1. CÁLCULO DEL VALOR ACTUAL

La representación gráfica de una **renta variable** en **progresión aritmética**, **temporal**, **pospagable**, **inmediata** y **entera** es la siguiente:



Se trata de valorar en el origen todos los términos que componen la renta. Para ello llevaremos, uno a uno, descontando en régimen de descuento compuesto al tanto de la renta i, desde donde está cada capital hasta el origen, obteniéndose el valor actual, que se denota con la siguiente terminología:

$$A_{(c;d)\ \overline{n|}\ i}$$

donde:

$c \equiv$ primer término de la progresión

$d \equiv$ razón de la progresión

$n \equiv$ número de capitales

$i \equiv$ tanto de valoración

llegamos a la siguiente fórmula:

$$\boxed{V_0 = A_{(c;\,d)\ \overline{n|}\,i} = \frac{c}{1+i} + \frac{c+d}{(1+i)^2} + \frac{c+2d}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{c+(n-2)\cdot d}{(1+i)^{n-1}} + \frac{c+(n-1)\cdot d}{(1+i)^n}}$$

Para facilitar la operatividad de la expresión superior, llamaremos:

$$v = (1+i)^{-1}$$

con lo que la expresión queda de la forma:

$$A_{(c;\,d)\ \overline{n|}\,i} = c\cdot v + (c+d)\cdot v^2 + (c+2d)\cdot v^3 + \ldots + [c+(n-2)\cdot d]\cdot v^{n-1} +$$
$$+ [c+(n-1)\cdot d]\cdot v^n$$

Si multiplicamos ambos miembros por v:

$$v \cdot A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = c \cdot v^2 + (c+d) \cdot v^3 + (c+2d) \cdot v^4 + \ldots + [c+(n-2) \cdot d] \cdot v^n + \\ + [c+(n-1) \cdot d] \cdot v^{n+1}$$

Y si restamos a esta expresión la anterior tendremos:

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} - v \cdot A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = c \cdot v + (c+d) \cdot v^2 + (c+2d) \cdot v^3 + \ldots + \\ + [c+(n-2) \cdot d] \cdot v^{n-1} + [c+(n-1) \cdot d] \cdot v^n - c \cdot v^2 - (c+d) \cdot v^3 - \\ - (c+2d) \cdot v^4 - \ldots - [c+(n-2) \cdot d] \cdot v^n - [c+(n-1) \cdot d] \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} \cdot (1-v) = c \cdot v + [(c+d)-c] \cdot v^2 + [(c+2d)-(c+d)] \cdot v^3 + \\ + \ldots + [(c+(n-1) \cdot d)-(c+(n-2) \cdot d)] \cdot v^n - [c+(n-1) \cdot d] \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} \cdot (1-v) = c \cdot v + [c+d-c] \cdot v^2 + [c+2d-c-d] \cdot v^3 + \ldots + \\ + [c+(n-1) \cdot d - c - (n-2) \cdot d] \cdot v^n - [c+(n-1) \cdot d] \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} \cdot (1-v) = c \cdot v + d \cdot v^2 + d \cdot v^3 + \ldots + [c+nd-d-c-nd+2d] \cdot v^n - \\ - [c+nd-d] \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} \cdot (1-v) = c \cdot v + d \cdot v^2 + d \cdot v^3 + \ldots + d \cdot v^n - [c+nd-d] \cdot v^{n+1}$$

Operando en el segundo miembro de la igualdad:

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} \cdot (1-v) = c \cdot v + d \cdot v^2 + d \cdot v^3 + \ldots + d \cdot v^n - \\ - [c+nd-d] \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} \cdot (1-v) = c \cdot v + d \cdot v^2 + d \cdot v^3 + \ldots + d \cdot v^n - c \cdot v^{n+1} - \\ - nd \cdot v^{n+1} + d \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} \cdot (1-v) = c \cdot v \cdot (1-v^n) + d \cdot v \cdot (v + v^2 + \ldots + v^n) - nd \cdot v^{n+1}$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$v = (1+i)^{-1}$$

entonces:

$$1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = i \cdot v$$

$$v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Esta última expresión es el valor actual de una renta unitaria, constante, pospagable, temporal, inmediata y entera, por lo que ocurre que:

$$v + v^2 + \ldots + v^n = a_{\overline{n}|\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si:

$$v = (1+i)^{-1}$$

entonces:

$$v^n = (1+i)^{-n}$$

Así:

$$v + v^2 + \ldots + v^n = a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-v^n}{i}$$

Retomando y sustituyendo en la fórmula anterior:

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} \cdot (1-v) = c \cdot v \cdot (1-v^n) + d \cdot v \cdot (v + v^2 + \ldots + v^n) - nd \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} \cdot i \cdot v = c \cdot v \cdot (1-v^n) + d \cdot v \cdot a_{\overline{n}|i} - nd \cdot v^{n+1};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = \frac{c \cdot v \cdot (1-v^n) + d \cdot v \cdot a_{\overline{n}|i} - nd \cdot v^{n+1}}{i \cdot v};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = \frac{c \cdot v \cdot (1-v^n)}{i \cdot v} + \frac{d \cdot v \cdot a_{\overline{n}|i}}{i \cdot v} - \frac{nd \cdot v^{n+1}}{i \cdot v};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = \frac{c \cdot (1-v^n)}{i} + \frac{d \cdot a_{\overline{n}|i}}{i} - \frac{nd \cdot v^n}{i};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = c \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d \cdot a_{\overline{n}|i}}{i} - \frac{nd}{i} \cdot v^n;$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = \left(c + \frac{d}{i}\right) \cdot a_{\overline{n}|} - \frac{nd}{i} \cdot v^n;$$

Por último, si en el segundo miembro de esta igualdad sumamos y restamos:

$$\frac{nd}{i}$$

tendremos:

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = \left(c + \frac{d}{i}\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{nd}{i} \cdot v^n + \frac{nd}{i} - \frac{nd}{i};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = \left(c + \frac{d}{i}\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{nd}{i} \cdot (v^n - 1) - \frac{nd}{i};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n}|i} = \left(c + \frac{d}{i}\right) \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{nd}{i} \cdot (1-v^n) - \frac{nd}{i};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = \left(c + \frac{d}{i}\right)\cdot a_{\overline{n|}\,i} + nd\cdot\frac{1-v^n}{i} - \frac{nd}{i};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = \left(c + \frac{d}{i}\right)\cdot a_{\overline{n|}\,i} + nd\cdot a_{\overline{n|}\,i} - \frac{nd}{i};$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right)\cdot a_{\overline{n|}\,i} - \frac{nd}{i};$$

Es decir, la fórmula que se emplea para calcular el **valor actual** de una **renta variable** en **progresión aritmética**, **inmediata**, **temporal** y **pospagable** de **término c** y de **razón d** es:

$$\boxed{A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right)\cdot a_{\overline{n|}\,i} - \frac{nd}{i}}$$

2.1.2. CÁLCULO DEL VALOR FINAL

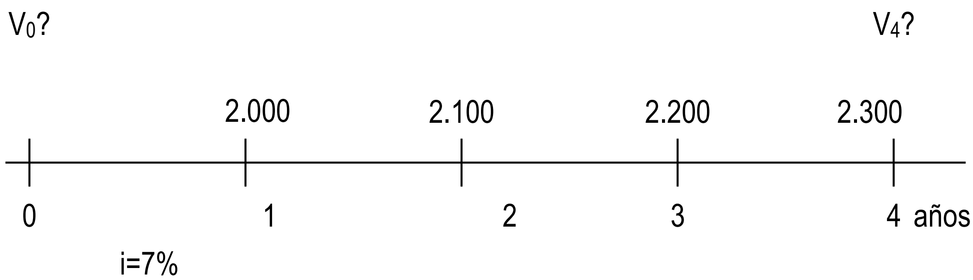
A partir del valor actual se podrá calcular cualquier otro valor financiero, utilizando la relación que existe entre los diferentes valores financieros en los distintos momentos de tiempo:

Así, el valor final:

$$\boxed{S_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^n \cdot A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i}}$$

EJEMPLO 3

Hallar el valor actual y final de una corriente de gastos anuales vencidos de un negocio que el primer año van a ser 2.000 euros y se espera que aumenten 100 euros cada año, suponiendo una tasa de valoración del 7% y para un horizonte temporal de 4 años.



Valor actual:

$$A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right)\cdot a_{\overline{n|}\,i} - \frac{nd}{i}$$

..../...

.../...

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A_{(2.000;100)\ \overline{4|}0,07} = \left(2.000 + \frac{100}{0,07} + 4 \cdot 100\right) \cdot a_{\overline{4|}0,07} - \frac{4 \cdot 100}{0,07}$$

$$a_{\overline{4|}0,07} = \frac{1-(1+0,07)^{-4}}{0,07} = 3,387211$$

$$A_{(2.000;100)\ \overline{4|}0,07} = \left(2.000 + \frac{100}{0,07} + 4 \cdot 100\right) \cdot 3,387211 - \frac{4 \cdot 100}{0,07} = 7.253,89€$$

$$A_{(2.000;100)\ \overline{4|}0,07} = 7.253,89€$$

Valor final:

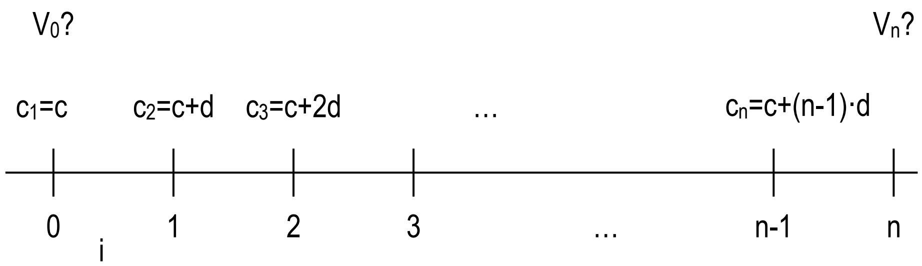
$$S_{(c;\,d)\ \overline{n|}i} = (1+i)^{n} \cdot A_{(c;\,d)\ \overline{n|}i}$$

$$S_{(2.000;100)\ \overline{4|}0,07} = (1+0,07)^{4} \cdot 7.253,89 = 9.508,37€$$

$$S_{(2.000;100)\ \overline{4|}0,07} = 9.508,37€$$

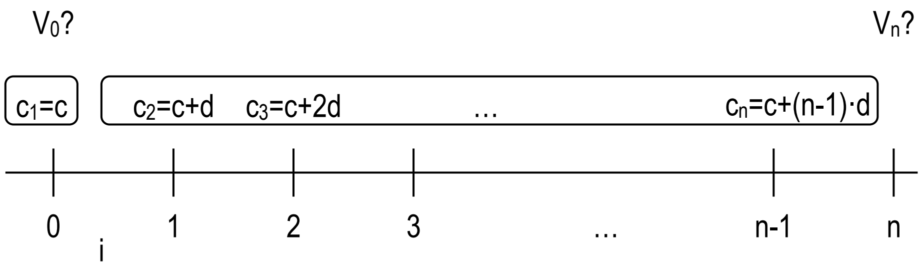
2.2. RENTA TEMPORAL, PREPAGABLE, INMEDIATA Y ENTERA

Para una **renta variable** con términos en **progresión aritmética**, **temporal** (n capitales), **prepagable**, **inmediata**, **entera** y **valorada en compuesta**, la representación gráfica queda de la siguiente forma:



2.2.1. CÁLCULO DEL VALOR ACTUAL

Una posibilidad consiste en valorar los n capitales moviendo, por una parte, el primer capital, que ya está en el origen y el resto de capitales, n–1, como renta pospagable inmediata de n–1 términos:



Otra posibilidad consiste en convertirla en pospagable multiplicando por (1 + i) todos los términos.

$$\boxed{\ddot{A}_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = (1+i)\cdot A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i}}$$

2.2.2. Cálculo del Valor Final

A partir del valor actual se podrá calcular cualquier otro valor financiero, utilizando la relación que existe entre los diferentes valores financieros en los distintos momentos de tiempo:

Así, el valor final:

$$\boxed{\ddot{S}_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = (1+i)^{n}\cdot \ddot{A}_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i}}$$

2.3. Rentas Perpetuas

El cálculo de la **renta en progresión aritmética perpetua** se realiza, como las demás rentas perpetuas, **a través del límite cuando el número de términos de la renta (n) tiende a infinito**.

2.3.1. Rentas Pospagables

Si aplicamos el concepto de límites cuando n tiende a infinito:

$$A_{(c;\,d)\,\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}+nd\right)\cdot a_{\overline{n}|\,i}-\frac{nd}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot a_{\overline{n}|\,i}+nd\cdot a_{\overline{n}|\,i}-\frac{nd}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}+nd\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-\frac{nd}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}+\frac{nd\cdot\left[1-(1+i)^{-n}\right]-nd}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\,\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}+\frac{nd-nd\cdot(1+i)^{-n}-nd}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-\frac{nd\cdot(1+i)^{-n}}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{nd\cdot(1+i)^{-n}}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{nd\cdot(1+i)^{-n}}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-0}{i}\right]-0;$$

$$A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{i}\right];$$

$$A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1}{i}$$

Es decir:

$$\boxed{A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1}{i}}$$

<u>**NOTA**</u>**:** Todas las fórmulas se han desarrollado suponiendo que la **razón es positiva (d > 0)**, es decir, **que los términos van aumentando**, aunque <u>siguen siendo válidas para el caso contrario</u>, **bastaría con cambiar el signo de la razón (d) en las fórmulas**.

2.3.2. RENTAS PREPAGABLES

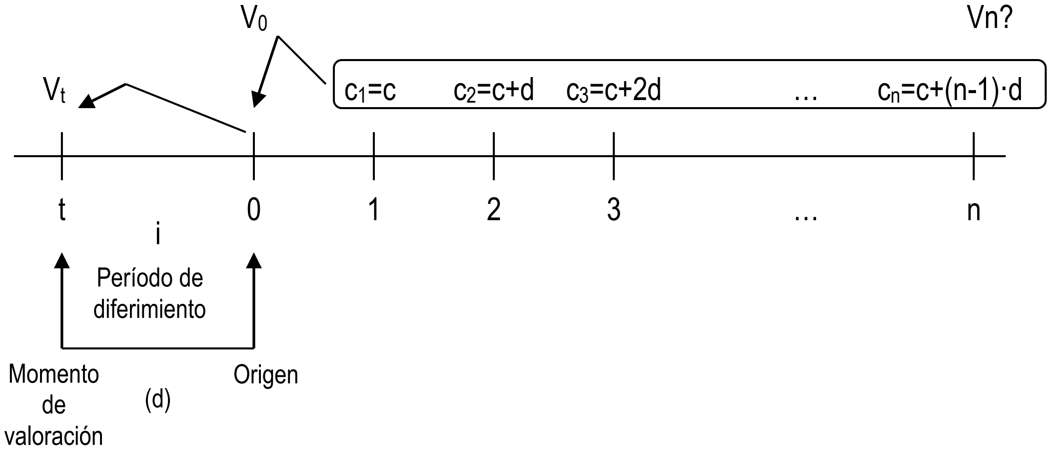
Para calcular el valor actual de una renta perpetua, prepagable, inmediata y entera basta con multiplicar el valor actual de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

$$\boxed{\ddot{A}_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i} = (1+i)\cdot A_{(c;\,d)\ \overline{\infty}|i}}$$

2.4. RENTAS DIFERIDAS

2.4.1. RENTAS TEMPORALES, POSPAGABLES Y ENTERAS

Para valorar la renta diferida, primero <u>valoraremos renta en su origen</u> (se considera como inmediata y se calcula su valor actual) y <u>posteriormente descontaremos dicho valor actual</u> (como un solo capital) <u>hasta el momento t elegido</u>, en régimen de descuento compuesto al tanto de interés vigente durante el período de diferimiento. Gráficamente sería:



El resultado final quedaría así:

$$\boxed{{}^{d}/A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i}\cdot(1+i)^{-d} = \frac{A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i}}{(1+i)^{d}}}$$

El diferimiento solamente afecta al valor actual, por tanto, el valor final se calcula como en una renta inmediata.

2.4.2. Rentas Temporales, Prepagables y Enteras

Al igual que razonamos para las rentas perpetuas, prepagables, inmediatas y enteras, para calcular el valor actual de una renta temporal, prepagable, diferida y entera basta con multiplicar el valor actual de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

$$\boxed{{}^{d}/\ddot{A}_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = (1+i)\cdot {}^{d}/A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i}}$$

2.4.3. Rentas Perpetuas, Pospagables y Enteras

Al igual que hemos hecho anteriormente, para calcular el valor actual de una renta perpetua, pospagable, diferida y entera basta con aplicar límites cuando n tiende a infinito en el valor actual de una renta temporal, pospagable, diferida y entera. Así:

$$ {}^{d}/A_{(c;\,d)\,\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty} {}^{d}/A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = \lim_{n\to\infty} A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i}\cdot(1+i)^{-d} == $$

$$ = (1+i)^{-d}\cdot \lim_{n\to\infty} A_{(c;\,d)\,\overline{n}|\,i} = (1+i)^{-d}\cdot\left(c+\frac{d}{i}\right)\cdot\frac{1}{i} $$

Es decir:

$$\boxed{{}^{d/}A_{(c;\,d)\,\overline{\infty|}\,i} = (1+i)^{-d}\cdot A_{(c;\,d)\,\overline{\infty|}\,i}}$$

Tal y como sucedía con las rentas inmediatas, no tiene sentido calcular el valor final de una renta perpetua.

2.4.4. Rentas Perpetuas, Prepagables y Enteras

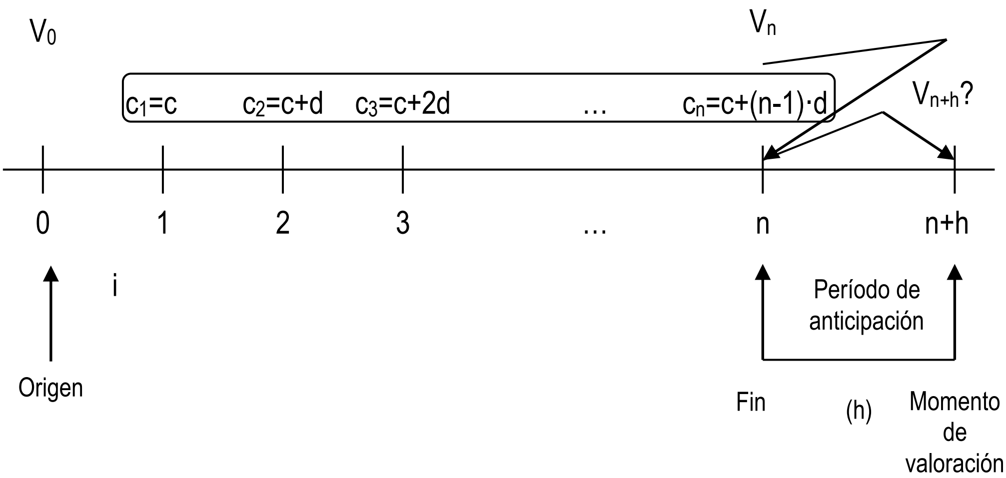
Al igual que hemos hecho anteriormente, para calcular el valor actual de una renta perpetua, prepagable, diferida y entera basta con multiplicar el valor actual de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

$$\boxed{{}^{d/}\ddot{A}_{(c;\,d)\,\overline{\infty|}\,i} = (1+i)\cdot {}^{d/}A_{(c;\,d)\,\overline{\infty|}\,i}}$$

2.5. Rentas Anticipadas

2.5.1. Rentas Temporales, Pospagables y Enteras

Valoraremos la renta, tratándola como renta inmediata, en su final y posteriormente capitalizamos este valor, al mismo tipo (i), durante el período de anticipación (h). También se podrá valorar la renta en su origen y posteriormente capitalizamos hasta el punto deseado.



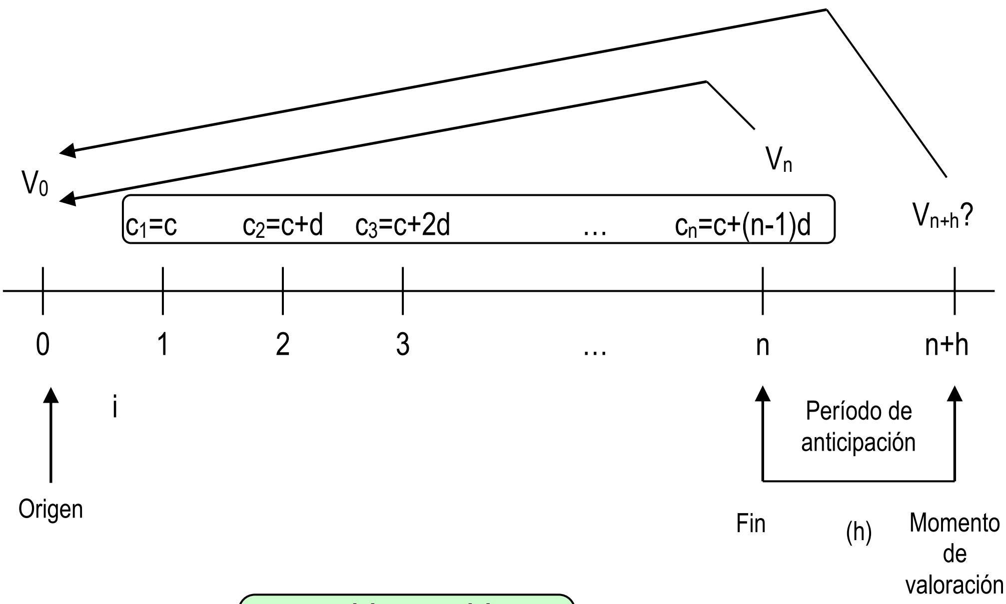
El resultado será:

$$V_{n+h} = {}^{h/}S_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^{h}\cdot S_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^{h+n}\cdot A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i}$$

Es decir:

$$\boxed{{}^{h/}S_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^{h}\cdot S_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = (1+i)^{h+n}\cdot A_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i}}$$

La anticipación solamente afecta al valor final pero no al valor actual, que se realizará como si de una renta inmediata se tratara, cumpliéndose la siguiente relación, como en cualquier otro tipo de renta, entre diferentes valores de la renta:



$$V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n} = \frac{V_{n+h}}{(1+i)^{n+h}}$$

2.5.2. Rentas Temporales, Prepagables y Enteras

Al igual que hemos hecho anteriormente, para calcular el valor actual de una renta temporal, prepagable, anticipada y entera basta con multiplicar el valor final de una renta de las mismas características, pero pospagable por (1 + i). Así:

$$_{h/}\ddot{S}_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i} = (1+i) \cdot {}_{h/}S_{(c;\,d)\,\overline{n|}\,i}$$

3. Rentas Fraccionadas

El valor de las rentas constantes y variables, estudiadas anteriormente, está determinado por el término de la renta, la duración y el tanto de interés; en las rentas variables en progresión de ley conocida, además de los parámetros anteriores aparece también la razón de la progresión.

Cuando estudiamos la capitalización y el descuento, uno de los principios utilizados para efectuar la valoración, era que los parámetros que determinan ésta, **el tiempo** y el **tanto de interés**, **deben estar referidos a la misma unidad de tiempo**, y en caso contrario realizar las oportunas transformaciones.

Las **rentas fraccionadas** o de **frecuencia distinta a la anual**, son aquellas en las que el **período de capitalización** del tanto **no coincide** con el **período del pago o cobro del término de la renta**.

Ante este planteamiento, pueden darse dos situaciones distintas que analizaremos en los siguientes epígrafes.

3.1. TÉRMINO ANUAL Y TANTO DE FRECUENCIA

Que el término de la renta se perciba anualmente, mientras que el tanto de capitalización sea de frecuencia inferior al año, es decir, que nos den un **interés i_k** de frecuencia y que el **término c de la renta se perciba anualmente**.

En este caso, para convertir las rentas fraccionadas en rentas enteras y poder aplicar todo lo que hemos visto de rentas hasta ahora, calcularemos el tanto efectivo anual «i» a partir de la frecuencia «i_k».

Tal y como vimos en temas anteriores, el tanto efectivo se calcula a partir de la relación de equivalencia de tantos:

$$1+i=(1+i_k)^k$$

de donde:

$$\boxed{i=(1+i_k)^k-1}$$

3.2. TÉRMINO DE FRECUENCIA Y TANTO ANUAL

En este caso el período de capitalización es superior al período en que se percibe la renta, es decir, nos dan el **interés efectivo anual i**, mientras que el **término c** de la renta se percibe **k veces** dentro del año.

Para encontrar el valor de este tipo de rentas fraccionadas, tendremos también que referir ambos parámetros –término y tanto– a la misma unidad de tiempo.

Ahora, para convertir las rentas fraccionadas en enteras, calcularemos el tanto de frecuencia «i_k» a partir del tanto efectivo anual «i», teniendo en cuenta que ahora la duración de la misma no debe expresarse en años, sino en **«n ·k» períodos**.

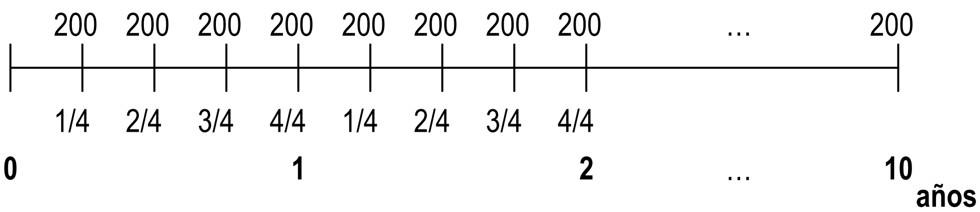
El tanto de frecuencia lo calculamos a través de la relación de equivalencia de tantos y será, como ya estudiamos en temas anteriores:

$$\boxed{i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$

EJEMPLO 4

Calcular el valor actual de una renta de 40 términos pospagables y trimestrales, de 10 años de duración, valorada al 6% anual, siendo el término de cada trimestre 200€.

Dado que los términos son trimestrales y el tanto de actualización es anual, estamos en el segundo caso que hemos visto. Gráficamente:



Calculamos el interés «i_4» de frecuencia trimestral a partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera (porque ya la habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización). Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}06)^{1/4} - 1 = 0{,}014674$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$$A_{\overline{n|}i} = c \cdot a_{\overline{n|}i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Así:

$$A_{\overline{4\cdot 10|}0{,}014674} = 200 \cdot a_{\overline{4\cdot 10|}0{,}014674}$$

.../...

.../...

$$a_{\overline{4\cdot 10|}0{,}014674} = \frac{1-(1+0{,}014674)^{-40}}{0{,}014674} = 30{,}094631$$

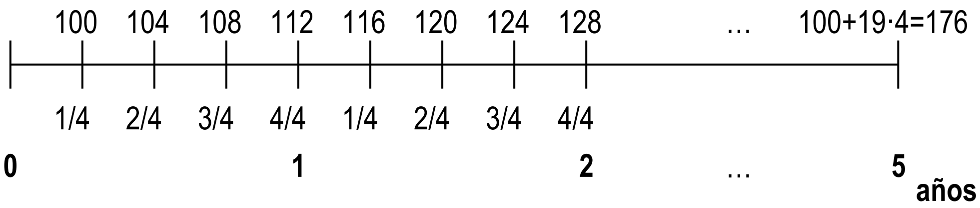
$$A_{\overline{4\cdot 10|}0{,}014674} = 200 \cdot 30{,}094631 = 6.018{,}93€$$

$$A_{\overline{4\cdot 10|}0{,}014674} = 6.018{,}93€$$

EJEMPLO 5

Calcular los valores actual y final de una renta de 20 términos trimestrales pospagables, de primer término 100€ sabiendo que los pagos trimestrales crecen en 4€ al trimestre y siendo el tanto de valoración del 6% anual.

Dado que los términos son trimestrales y el tanto de actualización es anual, estamos en el segundo caso que hemos visto. Gráficamente:



Tendremos que convertir la renta fraccionada en entera. Es decir, ya que el término de la renta es trimestral, habrá que pasar del tanto anual al tanto trimestral. Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}06)^{1/4} - 1 = 0{,}014674$$

El <u>valor actual</u> de una renta variable en progresión arimética, temporal, pospagable, inmediata y entera (ya la hemos convertido en entera) es el siguiente:

$$A_{(c;d)\,\overline{n|}i} = \left(c + \frac{d}{i} + nd\right) \cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{nd}{i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A_{(100;4)\,\overline{20|}0{,}014674} = \left(100 + \frac{4}{0{,}014674} + 20 \cdot 4\right) \cdot a_{\overline{20|}0{,}014674} - \frac{20 \cdot 4}{0{,}014574}$$

.../...

.../...

$$a_{\overline{20|}0,014674} = \frac{1-(1+0,014674)^{-20}}{0,014674} = 17,223940$$

$$A_{(100;4)\ \overline{20|}0,014674} = \left(100 + \frac{4}{0,014674} + 20 \cdot 4\right) \cdot 17,223940 - \frac{20 \cdot 4}{0,014674} = 2.343,58€$$

$$A_{(100;4)\ \overline{20|}0,014674} = 2.343,58€$$

El <u>valor final</u> de una renta variable en progresión arimética, temporal, pospagable, inmediata y entera (ya la hemos convertido en entera, conocido el valor incial lo podemos calcular capitalizando aquél 20 trimestres al 1,46764% trimestral o bien 5 años al 6% anual. Esto es:

$$V_n = V_0 \cdot (1+i)^n$$

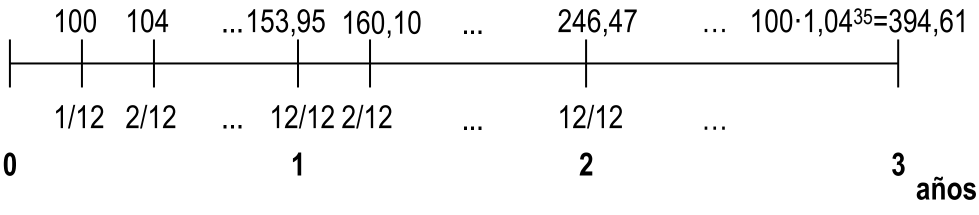
$$V_{20} = 2.343,58 \cdot (1+0,014674)^{20} = V_6 = 2.343,58 \cdot (1+0,06)^5 = 3.136,25€$$

$$S_{(100;4)\ \overline{20|}0,014674} = 3.136,25€$$

<u>EJEMPLO 6</u>

Determinar los valores actual y final de una renta de 36 términos mensuales pospagables y variables en progresión geométrica de primer término 100€ y razón 1,04, siendo el tanto de valoración el 8% anual.

Dado que los términos son mensuales y el tanto de actualización es anual, estamos en el segundo caso que hemos visto. Gráficamente:



Ya que se trata de una renta variable, tendremos que resolver el problema por el único procedimiento de referir el tanto de capitalización al mismo período de tiempo al que está referido el término de la renta. Es decir, ya que el término de la renta es trimestral, habrá que pasar del tanto anual al tanto mensual. Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

.../...

.../...

$$i_{12} = (1 + 0{,}08)^{1/12} - 1 = 0{,}006434$$

El valor actual de una renta variable en progresión geométrica, temporal, pospagable, inmediata y entera (ya la hemos convertido en entera) es el siguiente:

$$A_{(c;\,q)\ \overline{n|}\,i} = c \cdot \frac{1 - q^{n} \cdot (1+i)^{-n}}{1 + i - q}$$

.../...

$$A_{(100;1{,}04)\ \overline{36|}\,0{,}006434} = 100 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{36} \cdot (1 + 0{,}006434)^{-36}}{1 + 0{,}006434 - 1{,}04} = 6.726{,}56€$$

$$A_{(100;1{,}04)\ \overline{36|}\,0{,}006434} = 6.726{,}56€$$

El valor final de una renta variable en progresión geométrica, temporal, pospagable, inmediata y entera (ya la hemos convertido en entera, conocido el valor incial lo podemos calcular capitalizando aquél 36 meses al 0,6434% mensuall o bien 3 años al 8% anual. Esto es:

$$V_n = V_0 \cdot (1+i)^{n}$$

$$V_{36} = 6.726{,}56 \cdot (1 + 0{,}006434)^{36} = V_3 = 6.726{,}56 \cdot (1 + 0{,}08)^{3} = 8.473{,}52€$$

$$S_{(100;1{,}04)\ \overline{36|}\,0{,}006434} = 8.473{,}52€$$

EJEMPLO 7

Determinar el valor actual de una renta perpetua, siendo el tanto de valoración el 7% efectivo anual y sus términos de 850€ trimestrales prepagables.

Dado que los términos son trimestrales y el tanto de actualización es anual, estamos en el segundo caso que hemos visto. Gráficamente:

850	850	850	850	850	850	850	850	850	…	
	1/4	2/4	3/4	4/4	1/4	2/4	3/4	4/4		
0				**1**				**2**	…	**años**

Calcularemos el interés «i_4» de frecuencia trimestral a partir del tanto efectivo anual «i». Para ello utilizamos la fórmula que los relaciona y, posteriormente, la fórmula de una renta constante, inmediata, temporal, pospagable y entera (porque ya la

.../...

.../...

habremos forzado a ser entera al hacer coincidir el período del término con el del tanto de capitalización). Así:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$i_4 = (1+0{,}07)^{1/4} - 1 = 0{,}017059$$

El valor actual de este tipo de renta es:

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|i} = c \cdot \frac{1+i}{i}$$

Así:

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|0,17059} = 850 \cdot \frac{1+0{,}017059}{0{,}017059} = 50.677{,}07€$$

$$\ddot{A}_{\overline{\infty}|0,17059} = 50.677{,}07€$$

TEMA 8: PRÉSTAMOS

ÍNDICE

1. CONCEPTO DE PRÉSTAMO: SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS

El **préstamo** es una **operación financiera de prestación única** y **contraprestación múltiple**. En ella, una parte (llamada prestamista) entrega una cantidad de dinero (C_0) a otra (llamada prestatario) que lo recibe y se compromete a devolver el capital prestado en el (los) vencimiento(s) pactado(s) y a pagar unos intereses (precio por el uso del capital prestado) en los vencimientos señalados en el contrato.

La operación de amortización consiste en distribuir con periodicidad la devolución del principal (C_0), junto con los intereses que se vayan devengando a lo largo de la vida del préstamo. Los pagos periódicos que realiza el prestatario tienen, pues, la finalidad de reembolsar, extinguir o amortizar el capital inicial. Esto justifica el nombre de **operación de amortización** y el de **términos amortizativos** que suele asignarse a estos pagos.

Según la finalidad a la que se destinen los términos amortizativos es posible admitir diversas interpretaciones de amortización, es decir, diferentes formas de llevar a cabo la amortización (devolución) del capital inicial: es lo que se denomina **«sistema amortizativo»** o **«sistema de amortización» del préstamo**:

a) Préstamos amortizables mediante reembolso único del principal al final de la operación.
   - Sin pago periódico de intereses: préstamo simple.
   - Con pago periódico de intereses: sistema americano.

b) Préstamos reembolsables mediante una serie de pagos periódicos que constituyan renta, esto es, fraccionamiento del principal en varios pagos parciales (cuotas de amortización) con vencimientos periódicos, que se pagan conjuntamente con los intereses, formando los términos amortizativos. A su vez, según la cuantía de los términos amortizativos, podemos distinguir los siguientes casos:
   - Términos amortizativos constantes.
   - Términos amortizativos variables:
     - Cuota de amortización constante.
     - Términos amortizativos variables en progresión geométrica.
     - Términos amortizativos variables en progresión aritmética.

Todo ello con independencia de que los intereses se paguen con una frecuencia u otra, sean fijos o variables, pagaderos por anticipado o al final de cada período.

En este tema no nos dedicaremos a los dos últimos casos de términos amortizativos variables en progresión aritmética ni geométrica, por ser el nuestro un tema introductorio de préstamos.

2. Nomenclatura para Préstamos de Amortización Fraccionada

La terminología utilizada será la siguiente:

$C_0 \equiv$ Importe del préstamo, cantidad financiada.

$n \equiv$ Número de pagos a realizar durante el tiempo que se mantiene contraída la deuda.

$i \equiv$ Tipo de interés efectivo convenido (coste de la financiación).

$I_k \equiv$ Cuota de interés del período k, cantidad destinada a remunerar al prestamista por el período correspondiente.

$A_k \equiv$ Cuota de amortización del período k, cantidad destinada a devolver deuda en cada vencimiento.

$a_k \equiv$ Término amortizativo al final del período k, pago total realizado por el prestatario en cada vencimiento (mensual, trimestral, semestral,...). Se cumple siempre que:

$$\boxed{a_k = I_k + A_k}$$

$C_k \equiv$ Capital pendiente de amortización al final del momento k. También se llama capital vivo, saldo de la operación o reserva matemática.

$m_k \equiv$ Capital total amortizado al final del período k.

3. Cuadro de Amortización General

A continuación se definen los pasos que, de un modo general, hay que seguir para poder calcular las diferentes variables que se han definido anteriormente:

1. Los **intereses** de cada período se calculan sobre el capital vivo a principio del período o a finales del período anterior.

$$\boxed{I_k = C_{k-1} \cdot i}$$

2. El parámetro que amortiza directamente el capital es la **cuota de amortización** (A_k).

3. El **capital a amortizar** siempre es la suma aritmética de todas las cuotas de amortización.

$$C_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

4. El **capital amortizado** es el total del capital que ya se ha devuelto en un determinado período de tiempo.

$$m_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$$

5. El **capital vivo** (pendiente) al final del período k es la suma aritmética de las cuotas de amortización que queden por amortizar.

$$C_k = A_{k+1} + A_{k+2} + \ldots + A_n$$

Aunque también se obtiene por la diferencia entre el importe del préstamo y el total amortizado hasta ese momento.

$$C_k = C_0 - \left(A_1 + A_2 + \ldots + A_k\right) = C_0 - m_k$$

Sin embargo, y a pesar de la sencillez de los sistemas anteriormente comentados, lo más frecuente consiste en fraccionar la devolución de la deuda destinando los términos amortizativos simultáneamente a pagar los intereses devengados en el período y cancelar parte de la deuda pendiente.

En estos casos resulta útil recoger en un cuadro el proceso de amortización del capital, reflejando de forma clara y concisa el valor que toman las principales variables en los diversos vencimientos de la operación.

La denominación será la de **cuadro de amortización**, y en él vamos a reflejar las cuantías de los términos amortizativos (a_k), las cuotas de intereses (I_k) y las cuotas de amortización (A_k) correspondientes a cada uno de los períodos, así como las cuantías del capital vivo (C_k) y del capital amortizado (m_k) referidos a cada período de la operación. El cuadro resultante es:

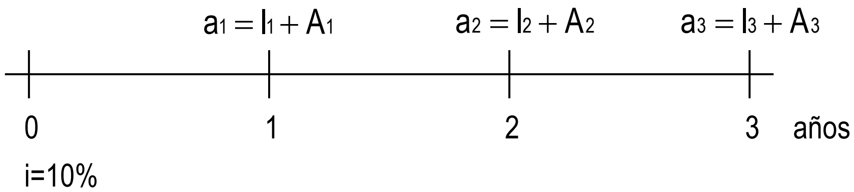
Perí.	Térm. amor.	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Capital vivo
0	-	-	-	-	C_0
1	a_1	$I_1 = C_0 \cdot i_1$	$A_1 = a_1 - I_1$	$m_1 = A_1$	$C_1 = C_0 - A_1$
2	a_2	$I_2 = C_1 \cdot i_2$	$A_2 = a_2 - I_2$	$m_2 = A_1 + A_2$	$C_2 = C_0 - A_1 - A_2$
…	…	…	…	…	…
n	a_n	$I_n = C_{n-1} \cdot i_n$	$A_n = a_n - I_n$	$m_n = A_1 + \ldots + A_n$	$C_n = 0$

EJEMPLO 1

Construir el cuadro de amortizacion del siguiente préstamo:

- Importe: 30.000€
- Devolución del principal en tres pagos anuales vencidos de igual cuantía
- Tipo de interés anual del 10%

Gráficamente, el esquema de pagos de la operación es:



Cuadro de amortización:

Años	(5) Térm. amor.	(4) Cuota de interés	(1) Cuota de amortización	(2) Total amortizado	(3) Capital vivo
0	-	-	-	-	30.000
1	13.000	3.000	10.000	10.000	20.000
2	12.000	2.000	10.000	20.000	10.000
3	11.000	1.000	10.000	30.000	0
Total	**36.000**	**6.000**	**30.000**	**30.000**	**0**

Descripción de los pasos a seguir para construir el cuadro:

(1) Se calcula la cuota de amortización a través del fraccionamiento en pagos iguales del importe del préstamo.

(2) Se calcula el total amortizado por sumas parciales de las cuotas de amortización practicadas hasta la fecha.

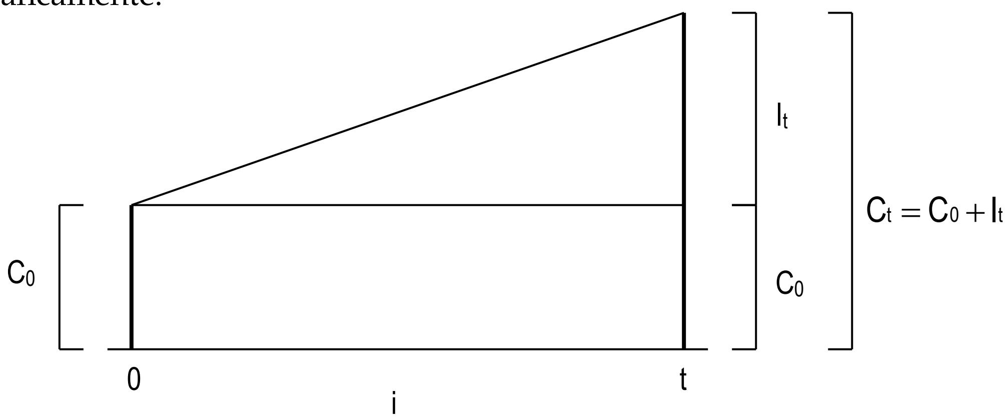
(3) La deuda pendiente se obtendrá de restar al capital a principios de cada período la cuota de amortización de ese mismo período, o bien, al importe del préstamo (C_0) se le resta el total amortizado (2) ya acumulado.

(4) Las cuotas de interés se calculan sobre el capital pendiente a finales del período anterior (3), es decir, aplicándoles el correspondiente tipo de interés.

(5) El término amortizativo de cada período será la suma de las columnas (1) y (4).

4. AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMO MEDIANTE REEMBOLSO ÚNICO SIN PAGO PERIÓDICO DE INTERESES

Se trata de diferir la devolución del capital y de los intereses devengados hasta el final de la operación, pagando todo conjuntamente de una sola vez. Gráficamente:



Para el prestatario esta operación solamente produce dos flujos de caja: uno de entrada (cobro) en el origen, por el importe del préstamo, y otro al final, de salida (pago), por el importe del préstamo más los intereses devengados y acumulados.

La acumulación de intereses se puede realizar tanto en régimen de capitalización simple como en compuesta, utilizando sus correspondientes fórmulas:

Capitalización simple:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)}$$

Capitalización compuesta:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n}$$

EJEMPLO 2

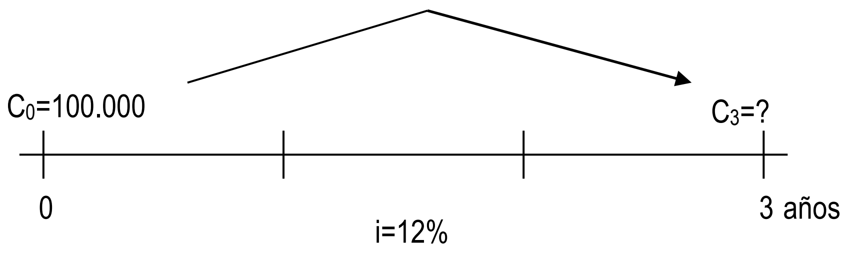
Se solicita el siguiente préstamo simple:

- Capital prestado: 100.000€
- Duración: 3 años
- Interés anual del 12% compuesto

.../...

.../...

Se pide: Determinar el capital a devolver si la amortización del préstamo se hace mediante rembolso único sin pago periódico de intereses.



Tendrá que abonar el capital prestado más los intereses en régimen de capitalización compuesta. Es decir:

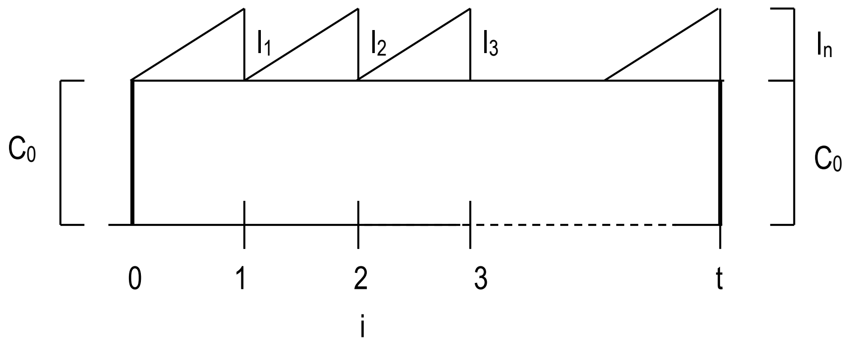
$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

$$C_3 = 100.000 \cdot (1+0{,}12)^3 = 140.292{,}80€$$

$$C_3 = 140.292{,}80€$$

5. Amortización de Préstamo mediante Reembolso Único y Pago Periódico de Intereses: Préstamo Americano

Se trata de devolver el capital al final del período, aunque los intereses se vayan pagando al finalizar cada período. Gráficamente:



Para el prestatario en esta operación se producen varios flujos de caja: uno de entrada (cobro) en el origen, por el importe del préstamo, otro al final de cada período por el importe de los intereses devengados y uno último al final por el importe del capital devuelto (pago).

Los intereses que no se van acumulando al capital ya que se van pagando conforme se generan, se calculan de la siguiente forma:

$$\boxed{I_n = C_0 \cdot i}$$

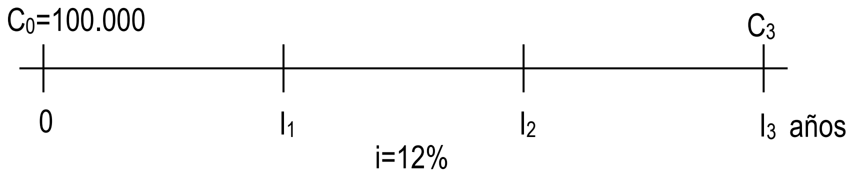
Hay que tener en cuenta que tanto la i como la periodicidad de los pagos de intereses tienen que estar expresados en la misma unidad de tiempo.

EJEMPLO 3

Se solicita el siguiente préstamo simple:

- Capital prestado: 100.000€
- Duración: 3 años
- Interés anual del 12% compuesto

Se pide: Determinar el capital a devolver mediante reembolso único y pago anual de intereses.



Los intereses que se abonan al final de cada año son:

$$I_n = C_0 \cdot i$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = 100.000 \cdot 0{,}12 = 12.000€$$

Además de los intereses, en el tercer año tiene que devolver los 100.000€.

6. AMORTIZACIÓN DE UN PRÉSTAMO CON CUOTA DE AMORTIZACIÓN CONSTANTE: MÉTODO LINEAL

En este tipo de préstamos, el prestatario se compromete a devolver todos los períodos la misma cantidad de capital, esto es, la cuota de amortización (A_k) se mantiene constante durante todo el préstamo.

Considerando que el importe del préstamo es C_0, con un tipo de interés constante i, y amortizable en n períodos, en este caso debe cumplirse que:

$$\boxed{A = A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_n}$$

Se calcula en primer lugar todo lo que tenga que ver con las cuotas de amortización, fáciles de calcular, a continuación los intereses y, finalmente, los términos amortizativos. En concreto, los pasos a seguir son:

1. Cálculo de la cuota de amortización (A):

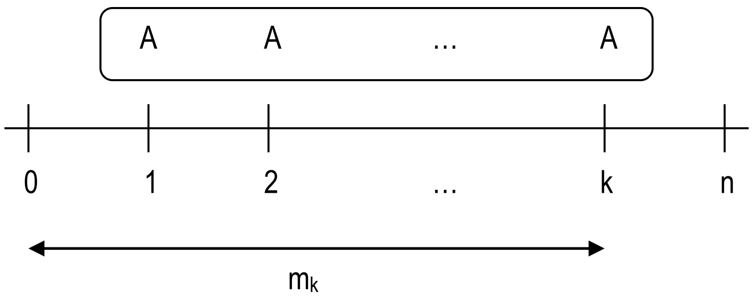
   Sabiendo que la suma de todas las cuotas de principal es el importe del préstamo y que éstas se mantienen constantes se debe cumplir:

$$\boxed{C_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = A \cdot n}$$

   de donde se obtiene:

$$\boxed{A = \frac{C_0}{n}}$$

2. Cálculo del total amortizado después de k períodos (m_k):

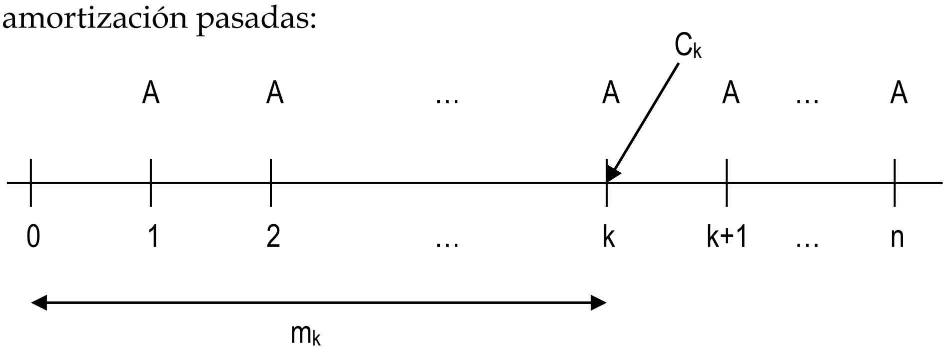


   Si se conoce lo que se amortiza en cada momento, el total amortizado hasta una fecha será la suma aritmética de las cuotas ya practicadas.

$$\boxed{m_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_k = A \cdot k}$$

3. Cálculo del capital vivo a finales del período k (C_k):

   Se realizará a través de las cuotas de amortización (pasadas o futuras). Nosotros calcularemos el capital vivo en función de las cuotas de amortización pasadas:



El capital pendiente será el importe del préstamo disminuido en la totalidad de las cuotas de amortización ya practicadas. Es decir:

$$\boxed{C_k = C_0 - m_k = C_0 - [A + A + \ldots + A] = C_0 - A \cdot k}$$

4. <u>Cálculo de la cuota de interés del período k</u> (I_k):

Los intereses de cualquier período se calcularán a partir de la deuda pendiente a fianales del período anterior, al tanto efectivo vigente durante el mismo.

$$\boxed{I_k = C_{k-1} \cdot i}$$

5. <u>Cálculo de los términos amortizativos: ley de recurrencia</u> (a_k):

Puesto que los términos amortizativos son la suma de la cuota de interés (decrecientes porque se calculan sobre capitales cada vez menores) y la cuota de amortización (en este caso constantes), los términos variarán como lo hacen las cuotas de interés y seguirán una ley matemática.

Una forma de hallar los términos amortizativos consiste en calcular el primer término y obtener todos a través de la ley de recurrencia que estos siguen y que se obtiene al relacionar, por diferencias, dos términos amortizativos consecutivos cualesquiera:

Período k-1: $a_{k-1} = I_{k-1} + A = C_{k-2} \cdot i + A$

Período k+1: $a_k = I_k + A = C_{k-1} \cdot i + A$

……………………………………………………

Por diferencia: $a_{k-1} - a_k = (C_{k-2} - C_{k-1}) \cdot i$

siendo: $C_{k-2} - C_{k-1} = A$,

queda: $a_{k-1} - a_k = A \cdot i$,

de donde se obtiene: $a_k = a_{k-1} - A \cdot i$,

lo que indica que cualquier término amortizativo es el anterior menos una cuantía constante, es decir, los términos varían en progresión aritmética de razón $-A \cdot i$, por lo que todos los términos se pueden calcular a partir del primero de ellos.

Recordemos que para calcular cualquier término de una progresión aritmética se tiene que cumplir que:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Como hemos considerado que:

$$n = k$$
$$d = -A \cdot i$$

sustituimos en la fórmula anterior del cálculo de cualquier término según una progresión aritmética para poder obtener la expresión que nos permitirá hallar los cualquier término amortizativo en función del primero:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot (-A \cdot i)$$

$$\boxed{a_k = a_1 - (k-1) \cdot A \cdot i}$$

siendo:

$$\boxed{a_1 = A + I_1}$$

EJEMPLO 4

Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 300.000€, al 10% de interés anual, amortizable en 3 años, con cuotas de amortización constantes:

	(5)	**(4)**	**(1)**	**(2)**	**(3)**
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	300.000
1	130.000	30.000	100.000	100.000	200.000
2	120.000	20.000	100.000	200.000	100.000
3	110.000	10.000	100.000	300.000	0
Total	**360.000**	**60.000**	**300.000**	**300.000**	**0**

Descripción de los pasos a seguir para contruir el cuadro:

(1) Se calcula la cuota de amortización a través del fraccionamiento del importe del préstamo en pagos iguales:

.../...

…/…

$$A = \frac{C_0}{n}$$

$$A = \frac{300.000}{3} = 100.000€$$

(2) Se calcula el total amortizado por las sumas parciales de las cuotas de amortización practicadas hasta la fecha.

(3) La deuda pendiente se obtedrá de restar al capital pendiente a principios de cada período la cuota de amortización de ese mismo período, o bien, al importe del préstamo se le resta el total amortizado (2) ya acumulado.

(4) Las cuotas de interés se calculan sobre el capital pendiente a finales del período anterior (3) y se pagan al final del mismo.

(5) El término amortizativo de cada período será la suma de las columnas (1) y (4).

7. AMORTIZACIÓN CON TÉRMINOS AMORTIZATIVOS CONSTANTES: MÉTODO FRANCÉS

Este sistema de amortización se caracteriza porque:

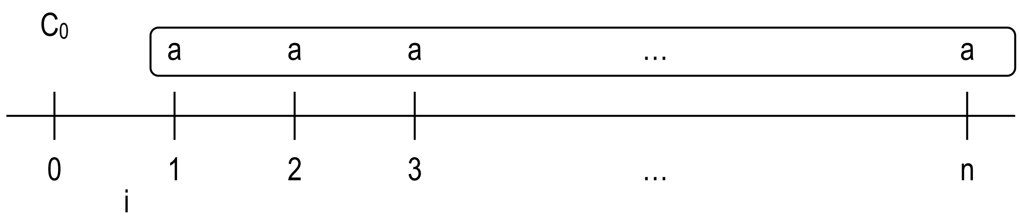
- Los términos amortizativos permanecen constantes, y
- El tanto de valoración permanece constante.

ambos durante toda la vida del préstamo.

De esta forma al principio la mayor parte de la cuota son intereses, siendo la cantidad destinada a amortización muy pequeña. Esta proporción va cambiando a medida que el tiempo va transcurriendo.

Gráficamente, el esquema de cobros y pagos que origina para el prestatario el préstamo es el siguiente:

Prestación (cobro)
Contraprestación (pagos)



Donde C_0 representa el importe del préstamo, n el número de pagos en los que se amortiza el préstamo, a el término amortizativo e i el tipo de interés de la operación.

Se trata de ver los cálculos a realizar con el fin de construir el cuadro de amortización del préstamo, esto es, saber la cantidad a pagar en cada momento (término amortizativo) y su descomposición en cuota de amortización (A_k) y cuota de interés (I_k), así como otros datos como capitales vivos en cada momento (C_k) sobre los que calcular los intereses y el total amortizado (m_k). En concreto, los pasos a seguir son:

1. Cálculo del término amortizativo (a):

   Los pagos constantes que se realizan durante la vida del préstamo incorporan, en parte el coste del aplazamiento (cuota de interés), en parte la devolución de una porción de la deuda (cuota de amortización). Para eliminar los intereses bastaría con actualizar los términos amortizativos a la tasa de interés del préstamo, con lo cual sólo quedarían las cuotas de principal, que sumadas coinciden con el importe del préstamo.

   Es decir, planteamos una equivalencia financiera en el origen entre el importe del préstamo y la renta formada por los términos amortizativos:

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{n|}\,i}$$

   de donde se despeja el término:

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}}$$

   Recordemos que:

$$a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

   por lo que:

$$\boxed{a = \frac{C_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

2. Cálculo de las cuotas de amortización: ley de recurrencia (A_k):

Al ser constante el término amortizativo las cuotas de amortización necesariamente tendrán que ir creciendo, mientras que las cuotas de intereses decrecerán (porque se van calculando sobre capitales vivos cada vez menores). Y además, lo hacen siguiendo una ley matemática (ley de recurrencia).

La ley de recurrencia es la relación en la que se encuentran dos términos consecutivos, en este caso, las cuotas de amortización y para buscarla se relacionan por diferencias los términos amortizativos de dos períodos consecutivos cualesquiera, así:

Período k-1: $a = I_{k-1} + A_{k-1} = C_{k-2} \cdot i + A_{k-1}$

Período k: $a = I_k + A_k = C_{k-1} \cdot i + A_k$

…………………………………………………………

Por diferencia: $a - a = (C_{k-2} - C_{k-1}) \cdot i + A_{k-1} - A_k$

siendo: $C_{k-2} - C_{k-1} = A_{k-1}$

queda: $0 = A_{k-1} \cdot i + A_{k-1} - A_k$,

de donde se obtiene: $A_k = A_{k-1} \cdot (1+i)$

Al aplicar esta ley para cualesquiera dos períodos consecutivos, se observa que varían siguiendo una progresión geométrica de razón 1+i, por tanto, cualquier cuota se puede calcular a partir de la anterior, de la primera o de cualquiera conocida. Con carácter genérico, se pondrán en función de la primera –que es la más fácil de obtener–.

Recordemos que para calcular cualquier término de una progresión geométrica se tiene que cumplir que:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Como hemos considerado que:

$$n = k$$

$$r = 1 + i$$

sustituimos en la fórmula anterior del cálculo de cualquier término según una progresión geométrica para poder obtener la expresión que nos permitirá hallar los cualquier término amortizativo en función del primero:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

$$\boxed{A_k = A_1 \cdot (1+i)^{(k-1)}}$$

Es por esto, que las cuotas de amortización van aumentando conforme una progresión geométrica, por lo que a este método se le conoce como método progresivo.

Una vez calculada la primera cuota, todas las demás se podrán obtener aplicando la ley de recurrencia anterior. El cálculo de la primera cuota de amortización se puede realizar a través de la estructura del primer término amortizativo:

$$a = I_1 + A_1 = C_0 \cdot i + A_1$$

$$\boxed{A_1 = a - C_0 \cdot i}$$

3. <u>Cálculo del total amortizado después de k períodos</u> (m_k):

Para conocer la totalidad de la deuda amortizada en un momento de tiempo concreto se puede hacer por sumas de cuotas de amortización practicadas hasta la fecha:

$$m_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$$

Además, todas las cuotas de amortización se pueden poner en función de la primera de ellas, ya que recordemos que seguían una progresión geométrica de razón 1+i:

$$m_k = A_1 + A_1 \cdot (1+i) + A_1 \cdot (1+i)^2 + \ldots + A_1 \cdot (1+i)^{k-1}$$

Simplificando la expresión:

$$m_k = A_1 + \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{k-1}\right]$$

donde el corchete es el valor final de una renta unitaria, pospagable e inmediata, de k términos al tanto del préstamo, por tanto:

$$m_k = A_1 \cdot s_{\overline{k|}i}$$

donde:

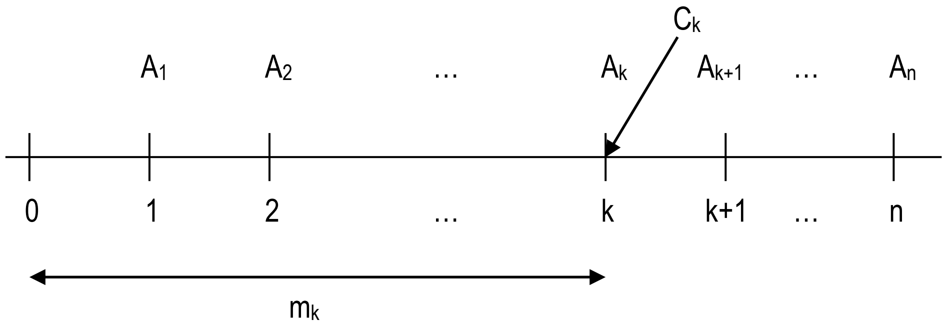
$$s_{\overline{k|}i} = \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

por lo que:

$$\boxed{m_k = A_1 \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i}}$$

4. Cálculo del capital vivo a finales del período k (C_k):

   Se puede calcular a través de las cuotas de amortización.



Por el método retrospectivo, según el cual el capital pendiente será el importe del préstamo disminuido en la totalidad de las cuotas de amortización ya practicadas. Es decir:

$$\boxed{C_k = C_0 - m_k}$$

5. Cálculo de la cuota de interés del período k (I_k):

   Los intereses de cualquier período se calcularán a partir de la deuda pendiente a finales del período anterior, al tanto efectivo vigente durante el mismo.

$$\boxed{I_k = C_{k-1} \cdot i}$$

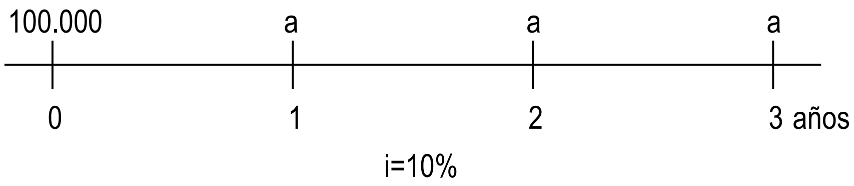
EJEMPLO 5

Construir el cuadro de amortización del siguiente préstamo:

- Importe: 100.000€
- Duración: 3 años
- Tipo de interés: 10% anual
- Términos amortizativos anuales constantes

.../...

…/…



	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	300.000
1	40.211,48	10.000	30.211,48	30.211,48	69.788,52
2	40.211,48	6.978,85	33.232,63	63.444,11	36.555,89
3	40.211,48	3.655,59	36.555,89	100.000	0
Total	**120.634,44**	**20.634,44**	**100.000**	**100.000**	**0**

Descripción de los pasos a seguir para contruir el cuadro:

(1) Se calcula el importe del pago total a realizar (término amortizativo) a través de la fórmula anterior:

$$a = \frac{C_0 \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$a = \frac{C_0 \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{100.000 \cdot 0{,}1}{1 - (1+0{,}1)^{-3}} = 40.211{,}48€$$

(2) La cuota de interés se calcula sobre el capital pendiente a finales del período anterior (5) y se pagan al final del período anterior.

(3) La cantidad destinada a amortizar será la diferencia entre el total pagado en el período (1) y lo que se dedica a intereses (2).

(4) Se calcula el total amortizado por sumas parciales de las cuotas de amortización practicadas hasta la fecha.

(5) La deuda pendiente se obtendrá de restar al capital vivo a principios de cada período la cuota de amortización de ese mismo período, o bien, al importe del préstamo se le resta el total amortizado (4) ya acumulado.

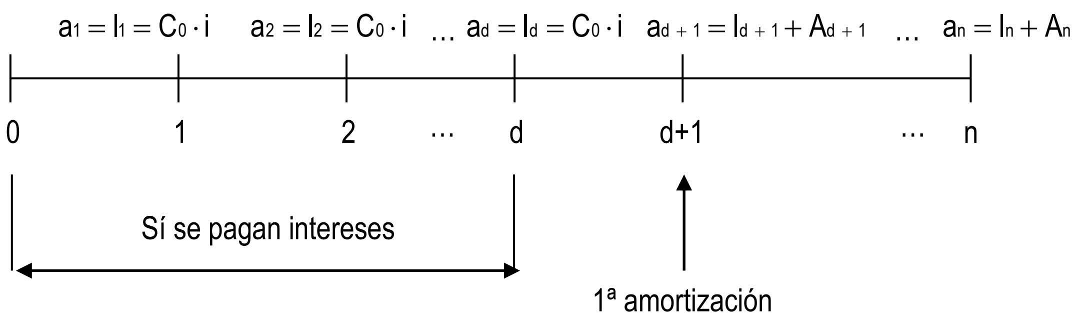
8. PRÉSTAMOS DIFERIDOS

También denominados **préstamos con carencia**, son aquellos en los que, desde su concesión y durante una parte de su vida, no se realiza devolución de capital. Por tanto, los préstamos diferidos son aquellos en los que **se retrasa el pago de la primera cuota de amortización**.

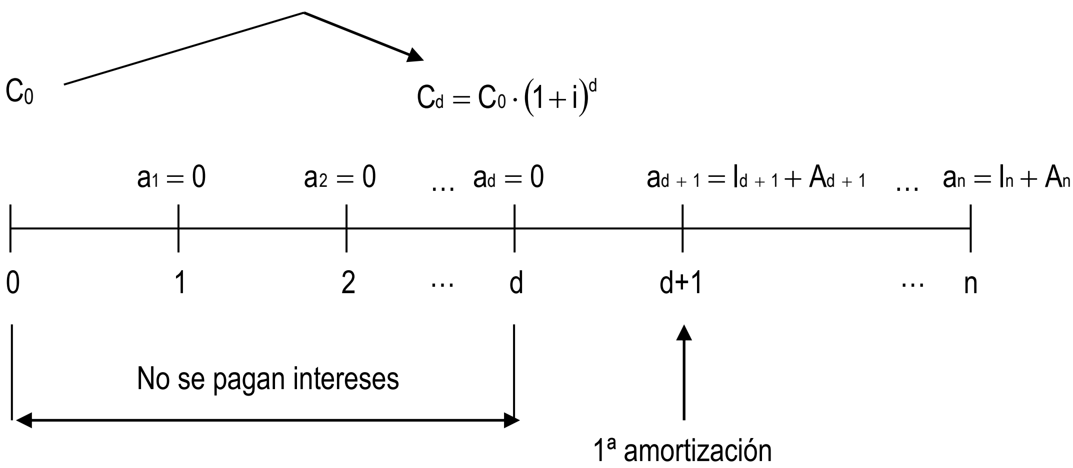
Puede ocurrir que durante este primer tiempo en el cual no se amortiza deuda, se vayan pagando periódicamente los intereses a medida que éstos se van devengando y con la periodicidad acordada: estamos refiriéndonos a préstamos con carencia parcial. Cuando durante este primer período no se realiza pago alguno, estamos ante una carencia total. En este último caso, los intereses devengados y no satisfechos se acumularán al capital de partida (capitalización de intereses).

Una vez pasado el período de carencia, estaremos ante un préstamo normal cualquiera que sea el sistema de amortización que presente (francés, lineal, con términos en progresión,...). Pueden darse dos situaciones:

1. CARENCIA CON PAGO DE INTERESES: CARENCIA PARCIAL



2. CARENCIA SIN PAGO DE INTERESES: CARENCIA TOTAL



Es importante señalar que en ambos casos se plantea la amortización efectiva del préstamo desde d hasta n y el período de amortización es n – d.

El tipo más extendido es el de carencia de capital (parcial), esto es, durante el período de carencia sólo pagamos intereses. Esto se debe a que en la gran mayoría de las operaciones las garantías solicitadas son las necesarias para el principal solicitado, y no para el principal más los intereses.

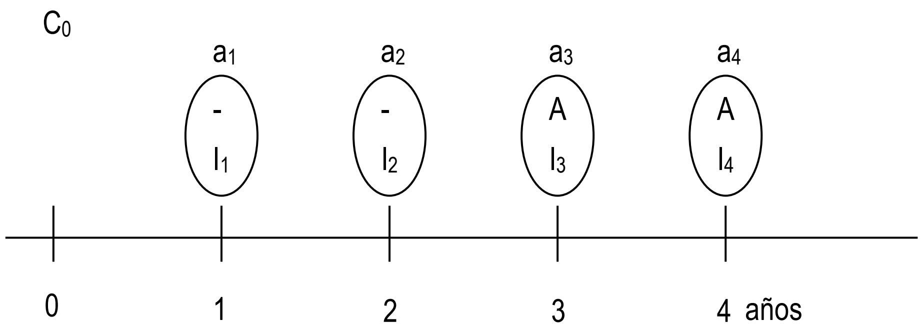
En este sentido, en el caso de carencia total (sin pago de intereses) la deuda es mayor que aquella para la que se solicitaron las garantías.

Si bien es cierto que la carencia en los préstamos supone un alivio financiero durante un cierto período de tiempo al pagar sólo los intereses (o nada, en el caso de carencia total), el préstamo al final se encarece considerablemente, ya que una vez finalizado este período de diferimiento tendrá que hacer frente a unos pagos posteriores superiores.

EJEMPLO 6

Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 100.000 euros, al 10% de interés anual y 4 años de duración. Se amortizará por el sistema lineal con cuotas de amortización anuales, sabiendo que el primer pago de principal se realiza transcurridos 3 años en los siguientes casos:

Caso 1: Con pago de intereses durante el diferimiento



$$A = \frac{100.000}{2} = 50.000$$

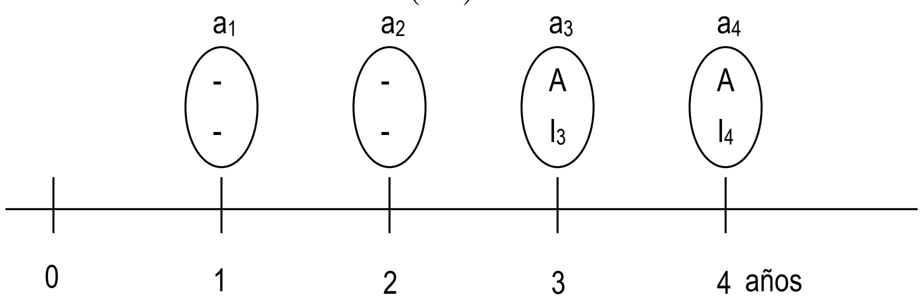
.../...

…/…

	(5)	(4)	(1)	(2)	(3)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	100.000
1	10.000	10.000	0	0	100.000
2	10.000	10.000	0	0	100.000
3	60.000	10.000	50.000	50.000	50.000
4	55.000	5.000	50.000	100.000	0
Total	**135.000**	**35.000**	**100.000**	**100.000**	**0**

Caso 2: Sin pago de intereses durante el diferimiento

$$C_0 \longrightarrow C_2 = C_0 \cdot (1+i)^2$$



$$A = \frac{100.000 \cdot (1+0{,}1)^2}{2} = \frac{121.000}{2} = 60.500$$

	(5)	(4)	(1)	(2)	(3)
Años	**Térm. amor.**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Total amortizado**	**Capital vivo**
0	-	-	-	-	100.000
1	0	0	0	0	110.000
2	0	0	0	0	121.000
3	72.600	12.100	60.500	60.500	60.500
4	66.550	6.050	60.500	121.000	0
Total	**139.150**	**18.150**	**121.000**	**121.000**	**0**