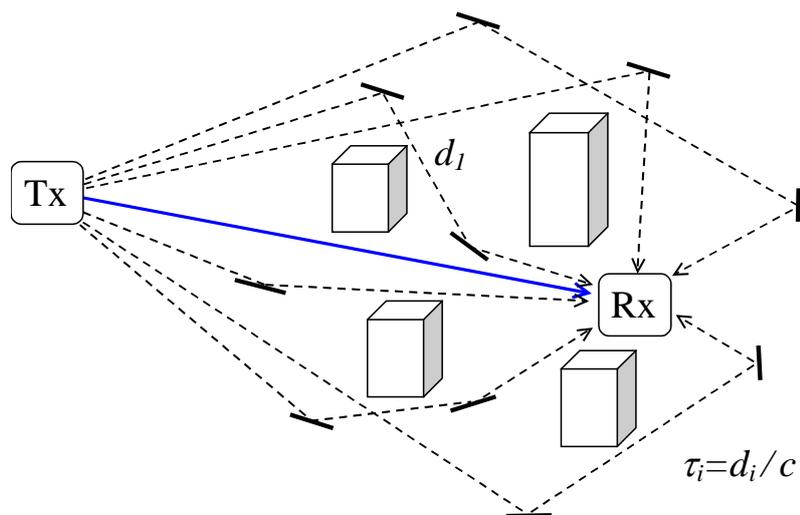


Técnicas de tratamiento de señal y comunicaciones

5 Transmisión en canales con desvanecimientos



Tema 5 Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos
Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia
Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición
Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS
Señales de banda estrecha: canal Rayleigh
Efecto de desplazamiento y movimiento
Señales de banda ancha

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda
Prestaciones con canal gaussiano
Prestaciones con canal Rayleigh
 Canal plano fijo
 Probabilidad de interrupción
 Canal plano móvil o de banda ancha
 Transmisión en bloques con entrelazado
 Tasa binaria de errores
 Realización en tiempo y en frecuencia (con OFDM)

Técnicas basadas en diversidad

Conceptos

Justificación
Combinación de diversidad
Medida de la diversidad

Diversidad espacial en recepción

Conmutación
Selección
Suma coherente
Suma ponderada óptima (MRC)

Diversidad espacial en transmisión

Conformación de haz
Códigos de Alamouti

Multiplexación espacial con canales muticamino

Conceptos

Sistemas MIMO sin precodificación

Receptor ZF (solución LS)

Receptor MMSE (solución MMSE)

Sistemas MIMO con precodificación

Precodificación ideal (SVD)

Capacidad del canal MIMO

Precodificación aproximada

Intercambio Multiplexación - diversidad

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Prestaciones con transmisión PAM (canal fijo de banda estrecha)

Prestaciones con transmisión en bloques (canal variante o de banda ancha)

Técnicas de diversidad espacial

Multiplexación espacial (MIMO)

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

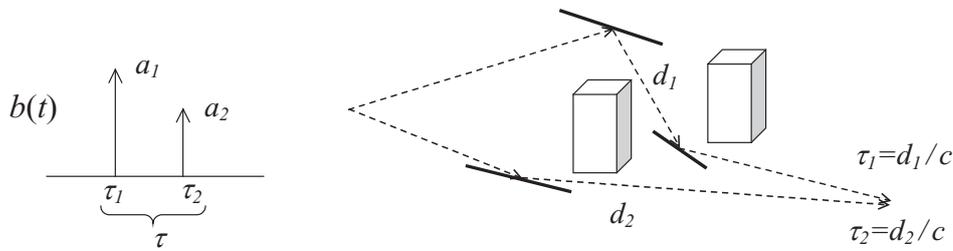
Canal multicamino NLOS

Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

Señales de banda ancha

Canal de dos caminos



Respuesta al impulso: $b(t) = a_1 \cdot \delta(t - \tau_1) + a_2 \cdot \delta(t - \tau_2)$ a_1, a_2 reales (+, -)

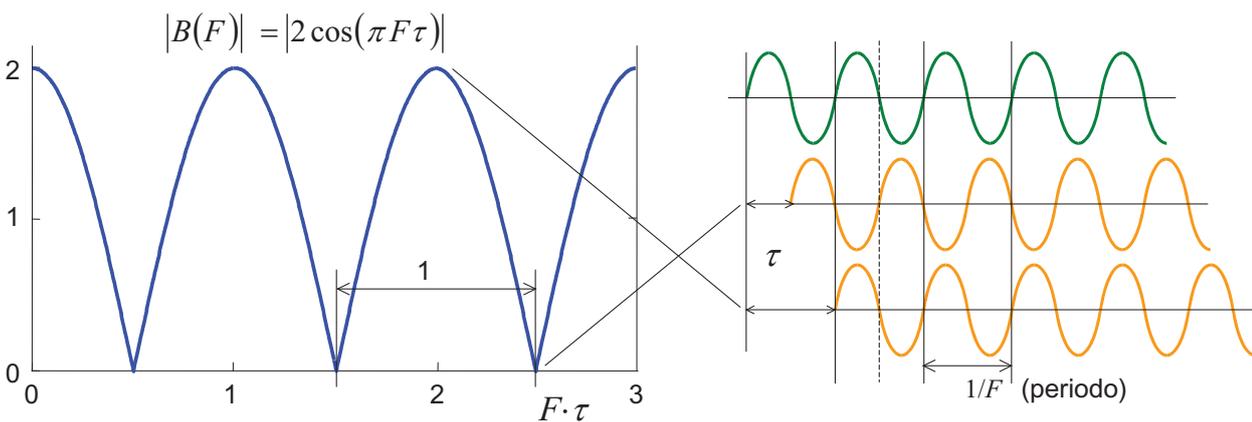
Respuesta en frecuencia $B(\Omega) = a_1 \cdot e^{-j\Omega\tau_1} + a_2 \cdot e^{-j\Omega\tau_2}$

Ejemplo: $a_1 = a_2 = 1$ $\tau_2 = \tau_1 + \tau$

$$B(\Omega) = e^{-j\Omega\tau_1} + e^{-j\Omega(\tau_1 + \tau)} = e^{-j\Omega\tau_1} \cdot (1 + e^{-j\Omega\tau}) = e^{-j\Omega\tau_1} \cdot e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}} \cdot \left(e^{j\frac{\Omega\tau}{2}} + e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}} \right) = e^{-j\Omega\left(\tau_1 + \frac{\tau}{2}\right)} \cdot 2\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

$$|B(\Omega)| = \left| 2\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right| \rightarrow |B(F)| = |2\cos(\pi F\tau)|$$

Canal de dos caminos



$F \cdot \tau = k$	$\tau = \frac{k}{F}$	ganancia 2	suma constructiva
$F \cdot \tau = k + 1/2$	$\tau = \frac{k}{F} + \frac{1}{2F}$	ganancia 0 (desvanecimiento)	suma destructiva

Los **desvanecimientos** se producen cada incremento de 1 en $F \cdot \tau$

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS

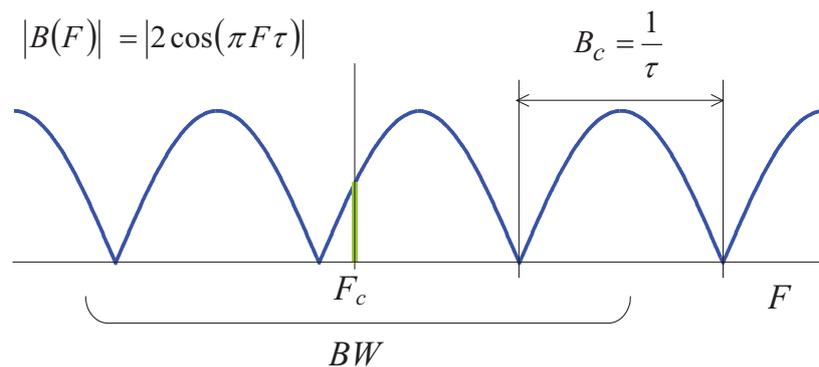
Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

Señales de banda ancha

Canal de dos caminos. Señales de banda ancha

Señales de ancho de banda BW alrededor de portadora F_c



A lo largo de BW se producen desvanecimientos cada

$$B_c = \frac{1}{\tau}$$

ancho de banda de coherencia

Si $BW > B_c$ canal **selectivo en frecuencia**: ganancia varía mucho a lo largo de BW

Si $BW \ll B_c$ canal **plano en frecuencia**: ganancia no varía en el BW

$$|B(F)| \approx |B(F_c)| = |2 \cos(\pi F_c \tau)|$$

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS

Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

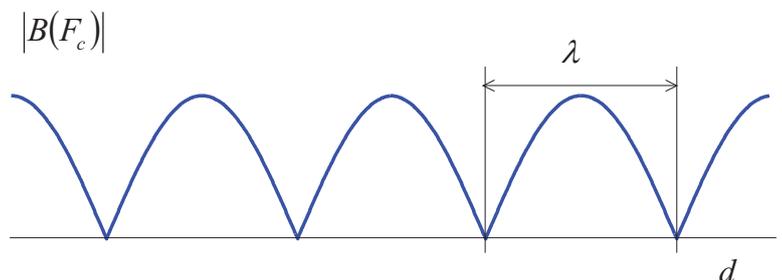
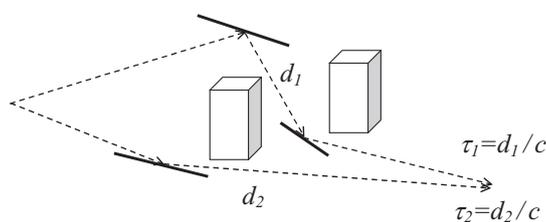
Señales de banda ancha

Canal de dos caminos. Señales de banda estrecha

Canal plano en portadora F_c

$$|B(F_c)| = |2 \cos(\pi F_c \tau)| \quad \tau \text{ depende de la diferencia de caminos } d_1 - d_2 = d$$

$$\tau = \frac{d}{c} \quad F_c \tau = F_c \frac{d}{c} = \frac{d}{\lambda} \quad |B(F_c)| = \left| 2 \cos\left(\pi \frac{d}{\lambda}\right) \right| \quad \lambda = \frac{c}{F_c} \quad \text{Longitud de onda}$$



A variar d se producen desvanecimientos cada longitud de onda

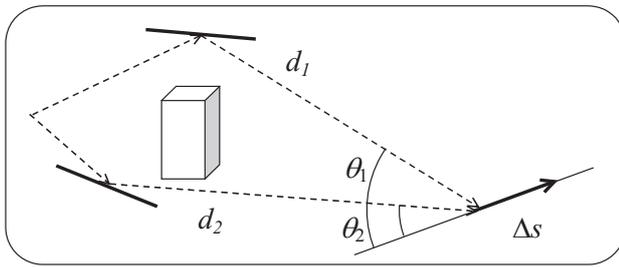
¿Como varía d cuando se desplaza Tx, Rx o los reflectores?

Canal de dos caminos. Señales de banda estrecha. Canal plano en portadora F_c

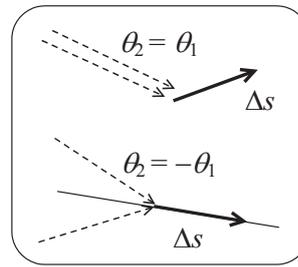
Ejemplo: desplazamiento Δs del receptor ¿ Δd ?

$0 \leq \Delta d \leq 2\Delta s$ dependiendo de los ángulos de los caminos con el desplazamiento

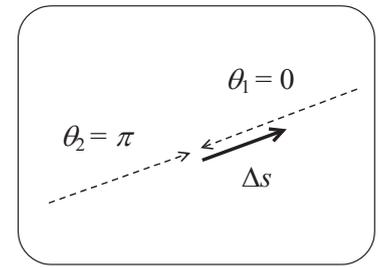
típico: $\Delta d \approx \Delta s$



$$\Delta d = \Delta s \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



$$\Delta d = 0$$



$$\Delta d = 2\Delta s$$

λ es una “distancia de coherencia”

Si $\Delta s \approx \Delta d \ll \lambda$ la ganancia no varía

Si $\Delta s \approx \Delta d \approx \lambda$ la ganancia puede variar mucho

En un canal plano, la ganancia es muy sensible a desplazamientos (Tx, Rx o reflectores) del orden de la longitud de onda

Canal de dos caminos. Señales de banda estrecha. Canal plano en F_c

Ejemplos:

	F_c	$\lambda = c / F_c$
Radio FM	100 MHz	3 m
GSM-UMTS	900 MHz	33 cm
GSM-UMTS	1800 MHz	17 cm
WiFi	2,4 GHz	12,5 cm
WiFi	5 GHz	6 cm

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- Pequeños desplazamientos en Tx, Rx o reflectores pueden provocar entrar en, o salir de, un desvanecimiento
- Mayor sensibilidad a desplazamientos con mayores frecuencias de portadora

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS

Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

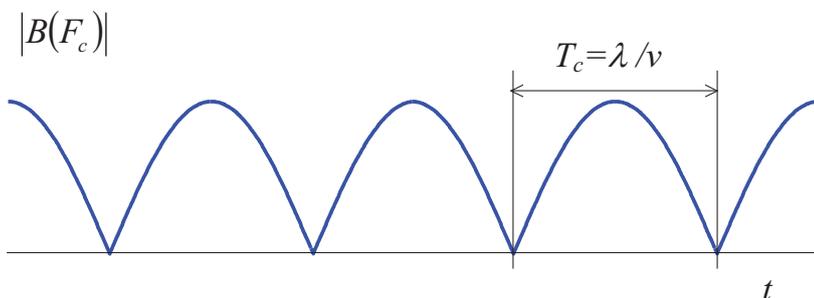
Señales de banda ancha

Canal de dos caminos. Señales de banda estrecha

Efecto del movimiento: $\Delta s = v \cdot t$

$$0 \leq \Delta d \leq 2 \Delta s \quad \text{típico: } \Delta d \approx \Delta s = v \cdot t$$

$$|B(F_c)| = \left| 2 \cos\left(\pi \frac{d + \Delta d}{\lambda}\right) \right| = \left| 2 \cos\left(\pi \frac{d}{\lambda} + \pi \frac{v \cdot t}{\lambda}\right) \right| = \left| 2 \cos\left(\phi_0 + \pi \frac{t}{T_c}\right) \right|$$

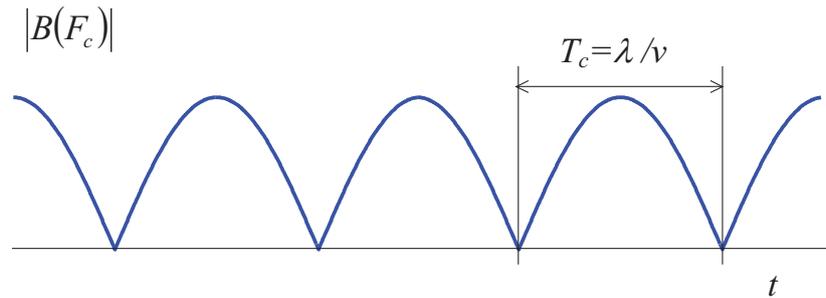


A lo largo del tiempo se producen desvanecimientos cada

$$T_c = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{F_c} \cdot \frac{c}{v} \quad \text{tiempo de coherencia}$$

Canal de dos caminos. Señales de banda estrecha

Efecto del movimiento



- En un intervalo de tiempo $\Delta t \ll T_c$ la ganancia no varía
- En un intervalo de tiempo $\Delta t \approx T_c$ la ganancia varía apreciablemente
- En un intervalo de tiempo $\Delta t \gg T_c$ la ganancia pasa por muchos desvanecimientos
- El inverso del “tiempo de coherencia” se llama “Frecuencia Doppler”:

$$F_D = 1/T_c = v/\lambda = F_c \cdot v/c$$

- F_D es la frecuencia con que pasa por desvanecimientos (desvanecimientos/s)

Canal de dos caminos. Señales de banda estrecha. Efecto del movimiento

Ejemplos

$$T_c = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{F_c} \cdot \frac{c}{v}$$

Tiempo de coherencia

	<i>peatón</i>	<i>coche ciudad</i>	<i>coche carretera</i>	<i>tren</i>
F_c	$v = 5 \text{ km/h}$	$v = 50 \text{ km/h}$	$v = 100 \text{ km/h}$	$v = 200 \text{ km/h}$
900 MHz	240 ms	24 ms	12 ms	6 ms
1800 MHz	120 ms	12 ms	6 ms	3 ms
2,6 GHz	83 ms	8,3 ms	4,1 ms	2 ms

Ej.: peatón - 900 MHz: $T_c = \frac{1}{F_c} \cdot \frac{c}{v} = \frac{1}{900 \cdot 10^6 \text{ Hz}} \times \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{5 \times 1000 / 3600 \text{ m/s}} = 240 \text{ ms}$

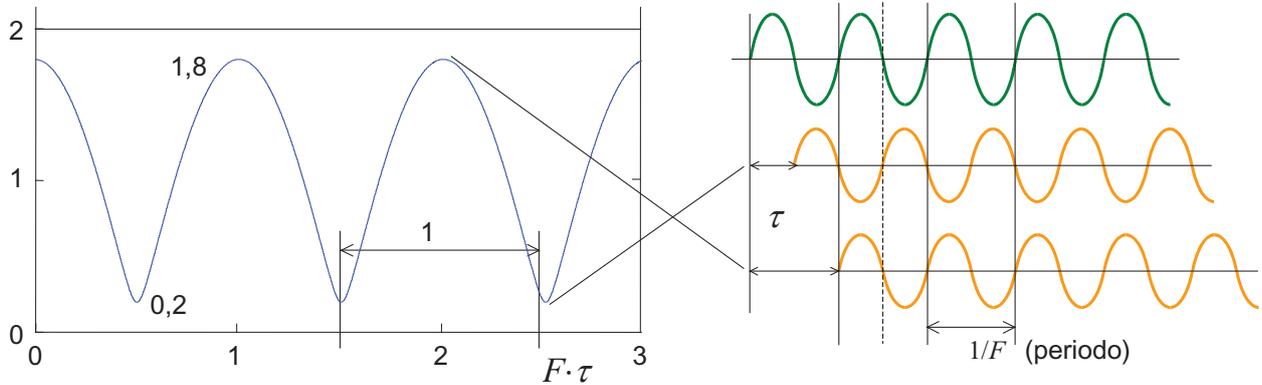
- Sistemas actuales $T_c = 2$ a 200 ms más rápido que la escala humana
- Urbano: reflexiones en edificios ($v = 0$) y coches (50 km/h)

Canal de dos caminos

Caminos de distinta ganancia: $a_1 \neq a_2$

- No se producen “desvanecimientos profundos”
- La ganancia oscila entre la suma ($a_1 + a_2$) y la diferencia ($a_1 - a_2$)

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0,8$$

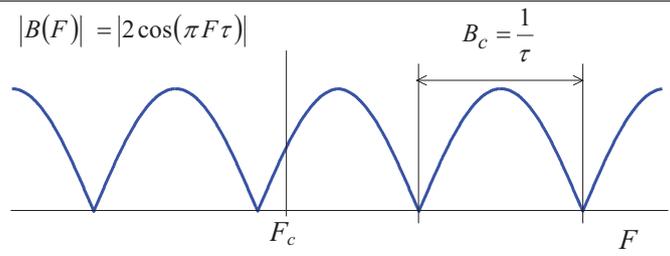
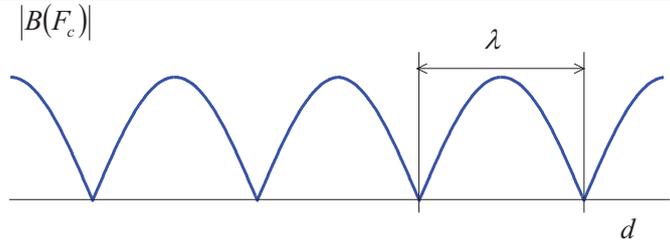
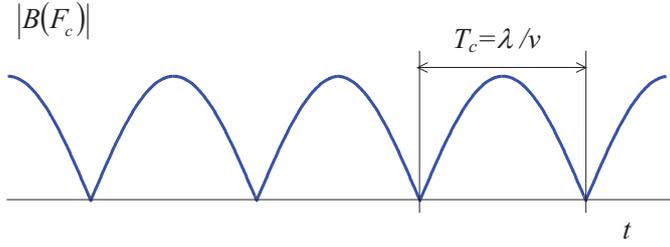


Canal de dos caminos

Resumen

<i>Ancho de banda</i>	<i>Movimiento</i>	<i>Dependencia (selectividad)</i>	<i>Parámetro</i>	
banda ancha	NO	frecuencial	$B_c = \frac{1}{\tau}$	Ancho de banda de coherencia
banda estrecha	NO	espacial	$\lambda = \frac{c}{F_c}$	Distancia de coherencia
banda estrecha	SI	temporal	$T_c = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{F_c} \cdot \frac{c}{v}$	Tiempo de coherencia

Canal de dos caminos

dependencia (selectividad) frecuencial	$ B(F) = 2 \cos(\pi F \tau) $ 	Ancho de banda de coherencia
dependencia (selectividad) espacial	$ B(F_c) $ 	Distancia de coherencia
dependencia (selectividad) temporal	$ B(F_c) $ 	Tiempo de coherencia

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS

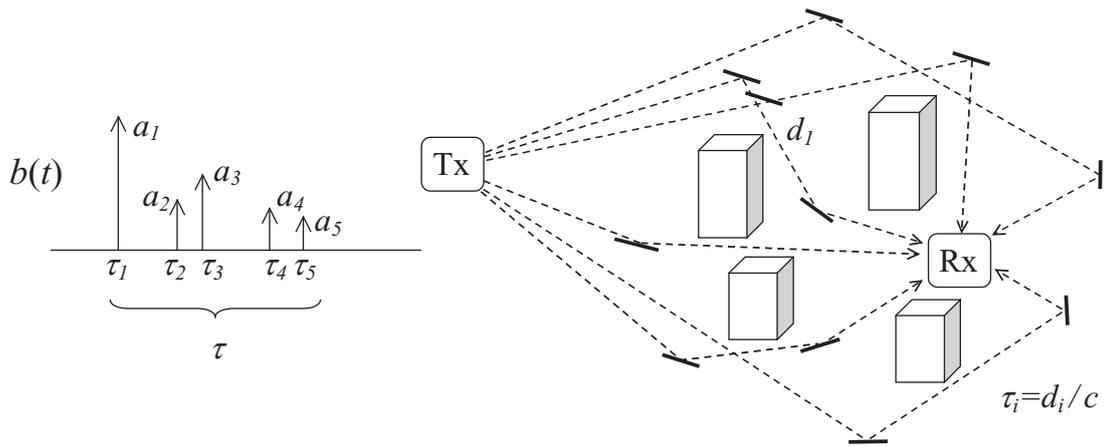
Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

Señales de banda ancha

Canal multicamino sin visión directa (NLOS)

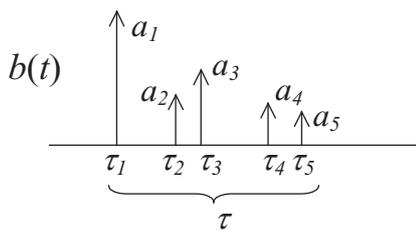
NLOS Non Line Of Sight



- llegan muchos ecos
- desde diferentes ángulos
- con diferentes retardos y ganancias

Canal multicamino sin visión directa (NLOS)

NLOS Non Line Of Sight



τ

Duración de la respuesta al impulso

$$B_c = \frac{1}{\tau}$$

Ancho de banda de coherencia

Señales de ancho de banda BW alrededor de portadora F_c

Si $BW > B_c$ canal **selectivo en frecuencia**: ganancia varía mucho a lo largo de BW

Si $BW \ll B_c$ canal **plano en frecuencia**: ganancia no varía en el BW

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS

Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

Señales de banda ancha

Canal multicamino sin visión directa (NLOS). Banda estrecha

Respuesta al impulso $b(t) = \sum a_i \cdot \delta(t - \tau_i)$ Respuesta en frecuencia $B(\Omega) = \sum a_i \cdot e^{-j\Omega\tau_i}$

Banda estrecha (canal plano) ganancia a frecuencia de la portadora

$$B(\Omega_c) = \sum a_i \cdot e^{-j\Omega_c \tau_i} = \alpha \cdot e^{j\phi}$$

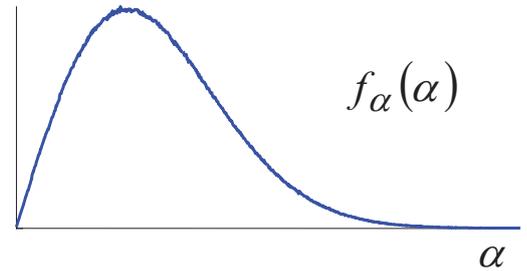
- Si hay muchos caminos la suma de las contribuciones se puede considerar una variable aleatoria **gausiana compleja** con
 - Media cero $\bar{B} = 0$
 - $\text{Re}[B]$ e $\text{Im}[B]$ gaussianas independientes
 - Fase ϕ uniformemente distribuida en $(0, \pi)$
- El módulo $\alpha = |B(\Omega_c)|$ es la ganancia \rightarrow puede ser cero (**desvanecimiento**)
- Se puede demostrar que $\alpha = |B(\Omega_c)|$ tiene la distribución de Rayleigh

Canal multicamino sin visión directa (NLOS). Banda estrecha

$$B(\Omega_c) = \sum a_i \cdot e^{-j\Omega_c \tau_i} = \alpha \cdot e^{j\phi} \quad \text{V.A. gaussiana compleja de media cero}$$

- Fase ϕ distribución uniforme (0, π)
- Módulo $\alpha = |B(\Omega_c)|$ distribución de **Rayleigh**

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{2\alpha}{\Omega} e^{-\frac{\alpha^2}{\Omega}} \quad \Omega = E[\alpha^2]$$



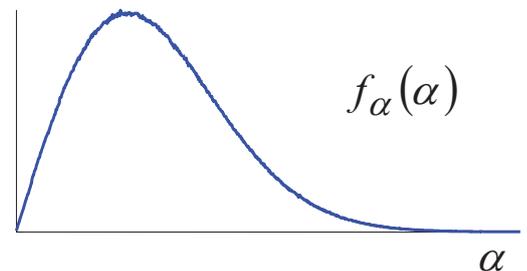
- La **ganancia es aleatoria**: depende del azar, con probabilidad Rayleigh
- Azar: número, posición y características de los **reflectores**
- La ganancia puede ser muy grande cuando todos los ecos se suman...
... pero es poco probable
- La ganancia puede ser muy pequeña cuando lo es la suma de todos los ecos ...
... pero es poco probable

Canal multicamino sin visión directa (NLOS). Banda estrecha

$$B(\Omega_c) = \sum a_i \cdot e^{-j\Omega_c \tau_i} = \alpha \cdot e^{j\phi} \quad \text{V.A. gaussiana compleja de media cero}$$

- Fase ϕ distribución uniforme (0, π)
- Módulo $\alpha = |B(\Omega_c)|$ distribución de **Rayleigh**

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{2\alpha}{\Omega} e^{-\frac{\alpha^2}{\Omega}} \quad \Omega = E[\alpha^2]$$



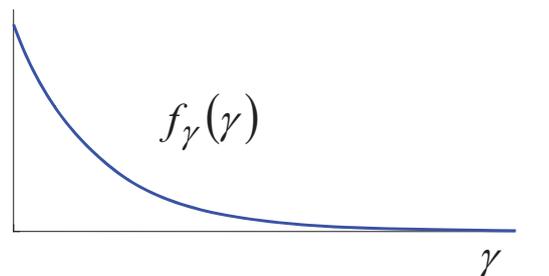
Si α es “Rayleigh” $\rightarrow \gamma = \alpha^2$ es exponencial

$$F_\gamma(\gamma) = 1 - e^{-\frac{\gamma}{\Omega}}$$

Función de
distribución

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\Omega} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\Omega}}$$

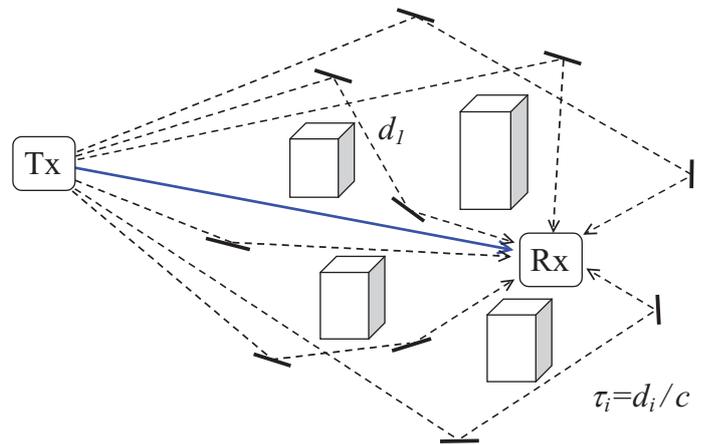
Función densidad
de probabilidad



Canal multicamino con visión directa LOS

LOS Line Of Sight

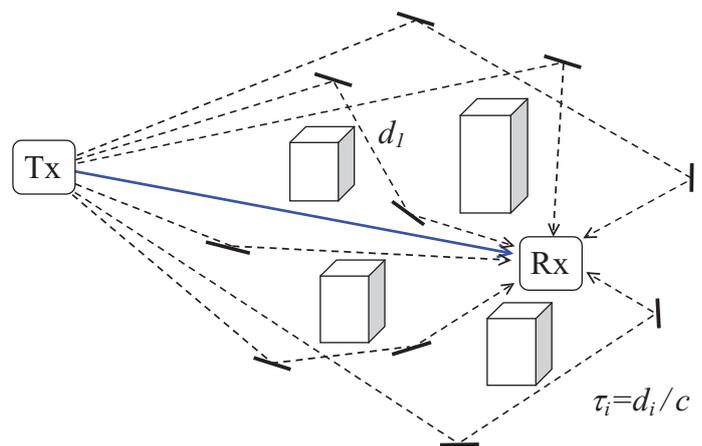
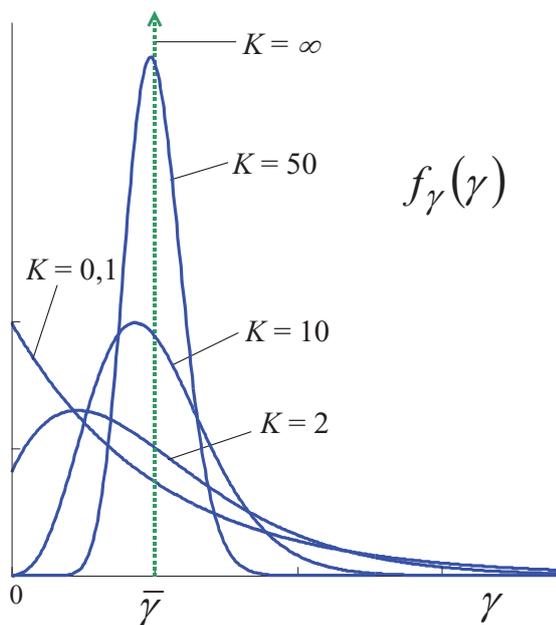
La ganancia del camino de “visión directa”
es la más grande



- Puede ocurrir que la suma de los ecos contrarreste al camino directo ...
... pero es poco probable
- Valores pequeños de ganancia menos probables que con **NLOS**
- **NLOS** (canal Rayleigh) es el caso peor y suele emplearse para el diseño de sistemas

Canal multicamino con visión directa LOS

LOS Line Of Sight



$$K = \frac{\text{potencia señal LOS}}{\text{potencia señal NLOS}}$$

$K \rightarrow 0$ Rayleigh (exponencial)

$K \rightarrow \infty$ Constante, determinista

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS

Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

Señales de banda ancha

Canal multicamino sin visión directa (NLOS). Banda estrecha

Efecto del desplazamiento y del movimiento (Generalización del caso 2 caminos)

Canal fijo (Tx, Rx y reflectores fijos)

- La ganancia depende del azar con probabilidad Rayleigh

Desplazamiento (Tx, Rx o reflectores se desplazan Δs)

- Si desplazamientos $\ll \lambda$ la ganancia no varía (la que le haya tocado en suerte)
- Si desplazamientos $\approx \lambda$ la ganancia varía apreciablemente

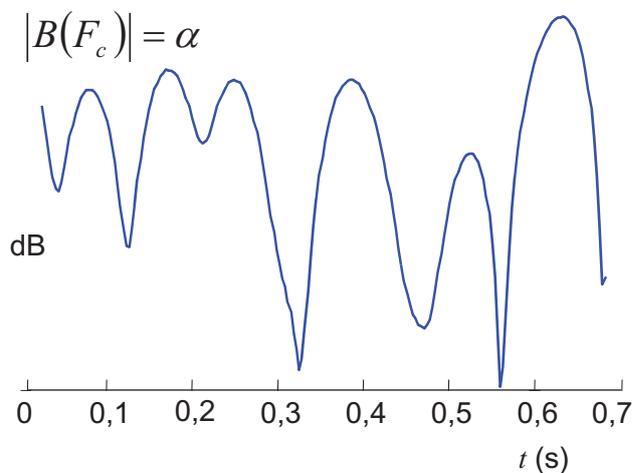
Movimiento (Tx, Rx o reflectores se mueven a velocidad v)

- En un intervalo de tiempo $\Delta t \ll T_c = \lambda/v$ la ganancia no varía
- En un intervalo de tiempo $\Delta t \approx T_c$ la ganancia varía apreciablemente
- En un intervalo de tiempo $\Delta t \gg T_c$ la ganancia pasa por muchos desvanecimientos
 $\approx F_D = 1/T_c$ desvanecimientos/segundo

Canal multicamino sin visión directa (NLOS). Banda estrecha

Efecto del movimiento

Ejemplo



$$F_c = 1800 \text{ MHz}$$

$$v = 6 \text{ km/h}$$

$$T_c = 100 \text{ ms}$$

$$F_D = 10 \text{ Hz}$$

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Canal de dos caminos.

Respuesta en frecuencia. Desvanecimientos

Señales de banda ancha. Dependencia de la frecuencia

Señales de banda estrecha. Dependencia de la posición

Efecto del movimiento. Dependencia de la velocidad

Canal multicamino

Canal multicamino NLOS

Señales de banda estrecha: canal Rayleigh

Efecto de desplazamiento y movimiento

Señales de banda ancha

Canal multicamino sin visión directa (NLOS). Banda ancha

Canal fijo (sin movimiento)

Para cada valor de la frecuencia Ω

- Ganancia $\alpha(\Omega) = |B(\Omega)|$ es aleatoria con distribución de **Rayleigh** pero los valores de la V.A. son diferentes para cada frecuencia

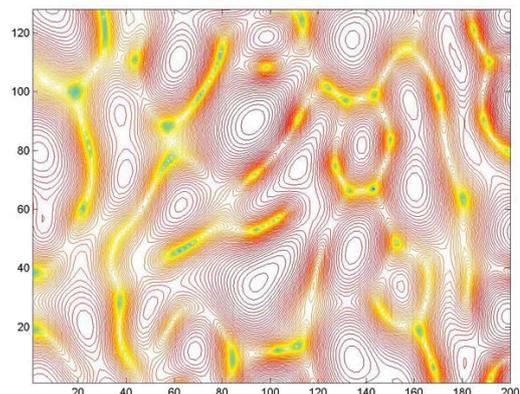
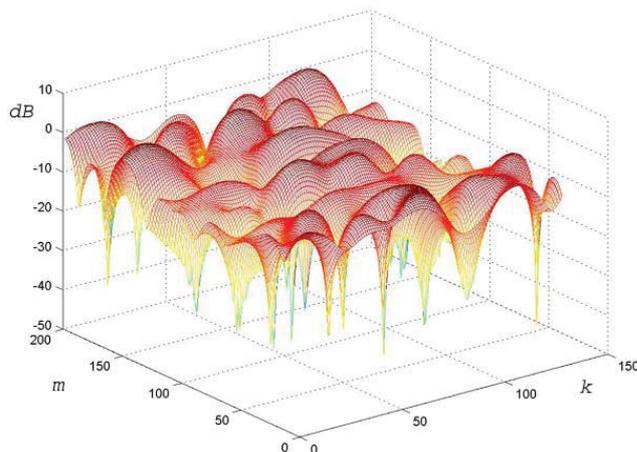
Ancho de banda de coherencia B_c

- En un intervalo de frecuencias $\Delta\Omega \ll B_c$ la ganancia es la misma
- En un intervalo de frecuencias $\Delta\Omega \approx B_c$ la ganancia varía apreciablemente
- En un intervalo de frecuencias $\Delta\Omega \gg B_c$ la ganancia pasa por muchos desvanecimientos

Canal multicamino sin visión directa (NLOS). Banda ancha

Canal de banda ancha con movimiento

- Para cada frecuencia, la ganancia varía temporalmente como en banda estrecha
- Evoluciones temporales a dos frecuencias separadas $\Delta\Omega$ son diferentes a menos que $\Delta\Omega \ll B_c$
- **Desvanecimientos** en tiempo cada $\approx T_c$ en frecuencia cada $\approx B_c$



Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Transmisión en canales con desvanecimientos. Prestaciones

Técnicas basadas en diversidad

Multiplexación espacial

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

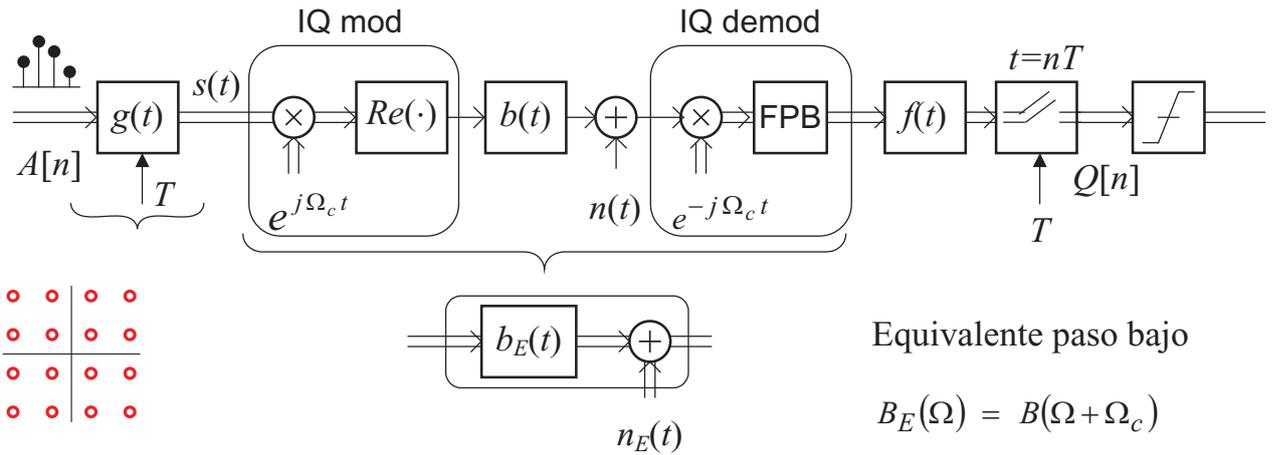
Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

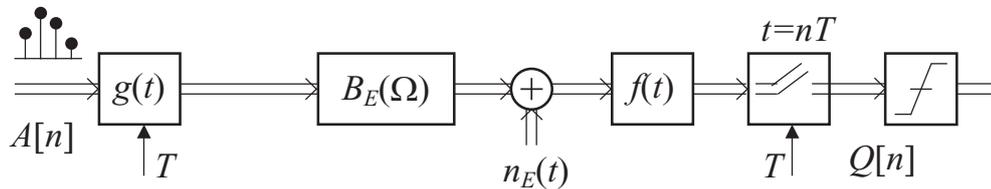
Transmisión en bloques con entrelazado

Tasa binaria de errores

Transmisión paso banda monoportadora



Equivalente paso bajo



Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

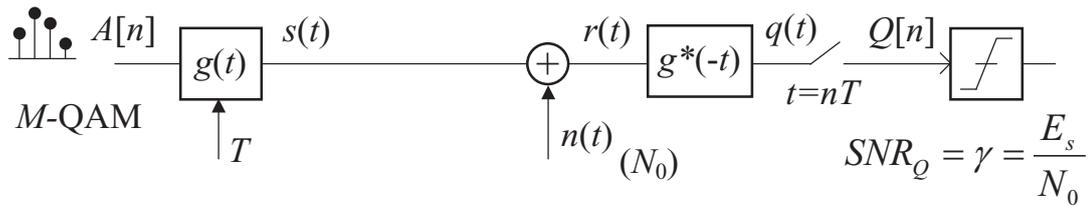
Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

Transmisión en bloques con entrelazado

Tasa binaria de errores

Canal gaussiano. Receptor de correlación. Probabilidad de error



	Prob error de símbolo	Prob error de bit (Gray)
BPSK 2-PAM	$P_s = Q(\sqrt{2\gamma})$	$P_b = Q(\sqrt{2\gamma})$
Q-PSK 4-QAM	$P_s = 2Q(\sqrt{\gamma})$	$P_b = Q(\sqrt{\gamma})$
M-QAM	$P_s = \alpha_M Q(\sqrt{\beta_M \cdot \gamma})$ $\alpha_M = 4 - 4/\sqrt{M}$ $\beta_M = 3/(M-1)$	$P_b = \frac{1}{\log_2 M} \cdot P_s(\gamma)$

Canal gaussiano. Probabilidad de error

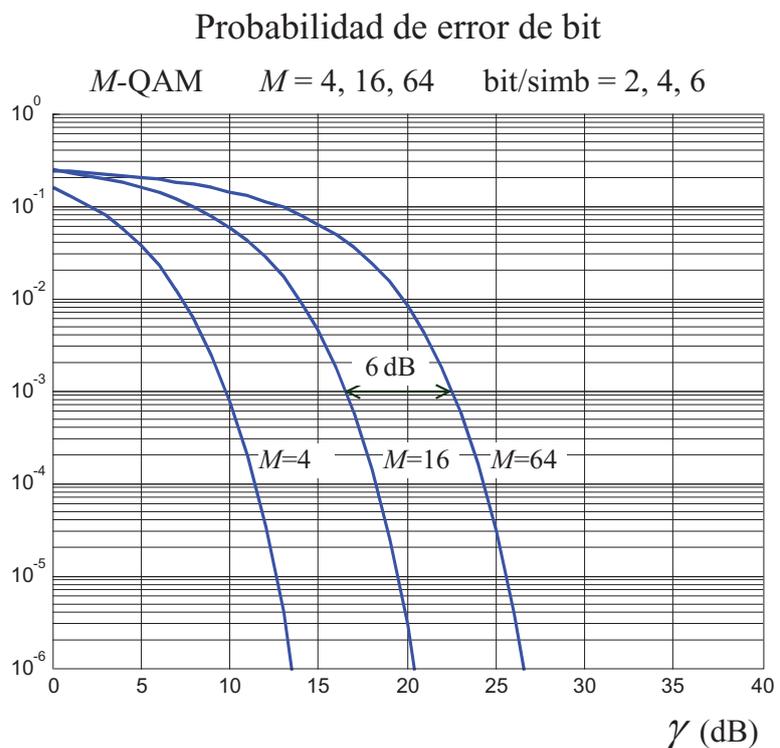
M-QAM

$$P_s = \alpha_M Q(\sqrt{\beta_M \cdot \gamma})$$

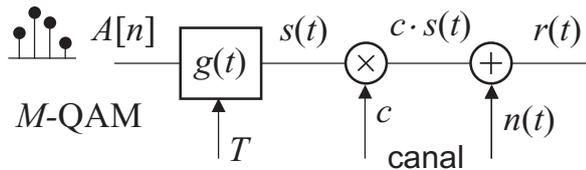
$$\alpha_M = 4 - 4/\sqrt{M}$$

$$\beta_M = 3/(M-1)$$

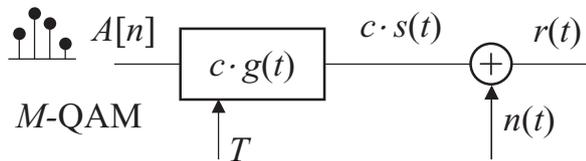
$$P_b = \frac{1}{\log_2 M} \cdot P_s(\gamma)$$



Canal gaussiano con ganancia



- La señal recibida es la que se obtendría con un pulso $c \cdot g(t)$



- Energía por símbolo $|c|^2 \cdot E_s = \alpha^2 \cdot E_s$

- Para un receptor óptimo, las expresiones de probabilidad de error son las mismas del canal gaussiano sin ganancia pero con

$$\gamma = SNR_Q = \alpha^2 E_s / N_0 \quad \alpha^2 E_s \text{ energía del símbolo recibido}$$

$$P_s = \alpha_M Q(\sqrt{\beta_M \cdot \gamma}) \quad P_b(\gamma) = \frac{1}{\log_2 M} \cdot P_s(\gamma)$$

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

Transmisión en bloques con entrelazado

Tasa binaria de errores

Canal multicamino Rayleigh. Plano sin movimiento

- Banda estrecha ($\Omega \approx 0$) $B_E(\Omega) = B(\Omega + \Omega_c) \approx B(\Omega_c) = c = \alpha \cdot e^{j\phi}$
- Canal multicamino Rayleigh: c es una variable aleatoria gaussiana compleja
- Equivale a un **canal gaussiano** con ganancia aleatoria $c = \alpha \cdot e^{j\phi}$
(no se conoce su valor)
- Las expresiones de probabilidad de error son las mismas del canal gaussiano con
 $\gamma = \alpha^2 E_s / N_0$

$$P_s = \alpha_M Q(\sqrt{\beta_M \cdot \gamma}) \quad P_b(\gamma) = \frac{1}{\log_2 M} \cdot P_s(\gamma)$$

- pero... $c \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$ son aleatorias $\Rightarrow P_s(\gamma)$ y $P_b(\gamma)$ **son variables aleatorias**
- P_s y P_b : valor desconocido, dependen del azar
(posición relativa de de transmisor, receptor y reflectores)

Canal multicamino Rayleigh. Plano sin movimiento

- En un canal no aleatorio, las prestaciones se miden con P_s y P_b
- En un canal aleatorio, las prestaciones son aleatorias

¿Cómo se pueden medir las prestaciones de un sistema con comportamiento aleatorio?

Probabilidad de que las prestaciones (reales) sean **aceptables**

- $Prob(P_s < P_{s0})$ con P_{s0} la máxima aceptable
- Si el ruido es gaussiano: $P_{s0} = \alpha_M Q(\sqrt{\beta_M \cdot \gamma_0}) \rightarrow \gamma_0$ mínima aceptable
- Probabilidad de servicio aceptable: $Prob(\gamma > \gamma_0)$ (disponibilidad)
- Probabilidad de interrupción del servicio: $P_{out}(\gamma_0) = P(\gamma < \gamma_0) = F_\gamma(\gamma_0)$
(outage)

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

Transmisión en bloques con entrelazado

Tasa binaria de errores

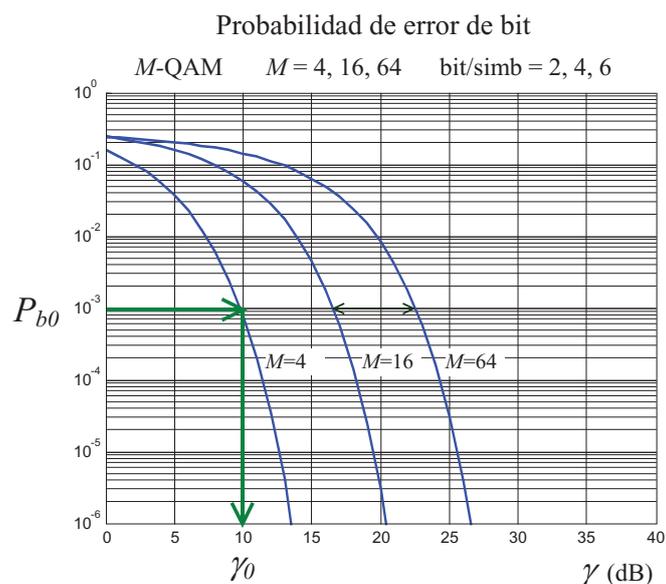
Canal multicamino. Plano sin movimiento. Ruido gaussiano

SNR mínima aceptable

M-QAM

$$P_{0s} = \alpha_M Q\left(\sqrt{\beta_M \cdot \gamma_0}\right)$$

$$P_{b0} = \frac{1}{\log_2 M} \cdot P_s(\gamma_0)$$



Canal Rayleigh fijo. Ruido gaussiano

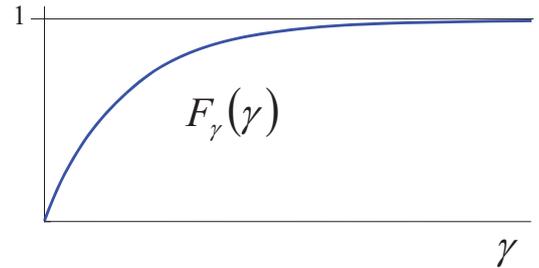
Si α es "Rayleigh" $\rightarrow \gamma = \alpha^2$ es exponencial

$$F_\gamma(\gamma) = 1 - e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}$$

Función de distribución

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}$$

Función densidad de probabilidad



Probabilidad de interrupción (outage)

$$P_{out}(\gamma_0) = P(\gamma < \gamma_0) = F_\gamma(\gamma_0) = 1 - e^{-\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}}} \quad \text{con } \gamma_0 \text{ SNR mínima aceptable}$$

Canal Rayleigh fijo

Ejemplo 1 4-QAM

Servicio: Sea $P_{b0} = 10^{-3}$ la probabilidad de error bit máxima aceptable

$\rightarrow \gamma_0$ 10 dB mínima SNR aceptable
(SNR del canal gaussiano con $P_{b0} = 10^{-3}$)

Canal:

Sea $\bar{\gamma} = 30$ dB (SNR media del canal Rayleigh)

¿cuál es la probabilidad de servicio inaceptable?

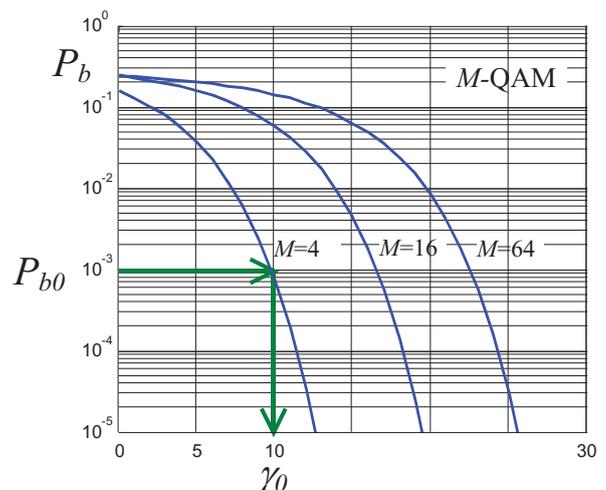
$$\dot{\Pr}(P_b > P_{b0}) = \Pr(\gamma < \gamma_0) ?$$

$$\bar{\gamma}_{dB} - \gamma_{0dB} = 20dB \rightarrow \bar{\gamma} / \gamma_0 = 100$$

$$P_{out} = 1 - e^{-\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}}} = 1 - e^{-0,01} \approx 10^{-2}$$

Probabilidad de interrupción: 1%

Probabilidad de servicio aceptable (disponibilidad): 99%



Canal Rayleigh fijo

Ejemplo 1 4-QAM

Servicio: Sea $P_{b0} = 10^{-3}$ la probabilidad de error bit máxima aceptable

→ γ_0 10 dB mínima SNR aceptable
(SNR del canal gaussiano con $P_{b0} = 10^{-3}$)

Canal:

Sea $\bar{\gamma}$ 10 dB (SNR media del canal Rayleigh)

¿cuál es la probabilidad de servicio inaceptable?

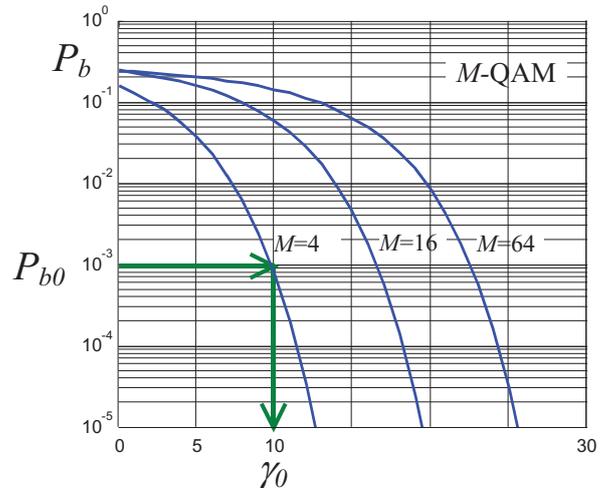
$$\Pr(P_b > P_{b0}) = \Pr(\gamma < \gamma_0) ?$$

$$\bar{\gamma}_{dB} - \gamma_{0dB} = 0dB \rightarrow \bar{\gamma} / \gamma_0 = 1$$

$$P_{out} = 1 - e^{-\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}}} = 1 - e^{-1} \approx 0,63$$

Probabilidad de interrupción: 63%

Probabilidad de servicio aceptable (disponibilidad): 37%



Ejemplo

$P_{s0} = 10^{-3}$ probabilidad de error bit máxima aceptable

- Con $\bar{\gamma}$ 10 dB canal gaussiano da siempre servicio aceptable
- Con $\bar{\gamma}$ 10 dB canal Rayleigh da servicio aceptable sólo en el 37% de los casos

Canal Rayleigh: es necesario subir la SNR media: **margen de desvanecimiento** sobre γ_0

$\bar{\gamma} / \gamma_0$	$\bar{\gamma} / \gamma_0 (dB)$	$P_{out} = 1 - e^{-\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}}}$
1	0	0,63
10	10	0,095
10^2	20	10^{-2}
10^3	30	10^{-3}

Ejemplo:

Hace falta subir la SNR 100 veces (20 dB)

para que la probabilidad de interrupción se reduzca a 10^{-2}

Canal Rayleigh fijo

hacen falta subir 10 dB de SNR
para bajar $\times 10^{-1}$
la probabilidad de interrupción

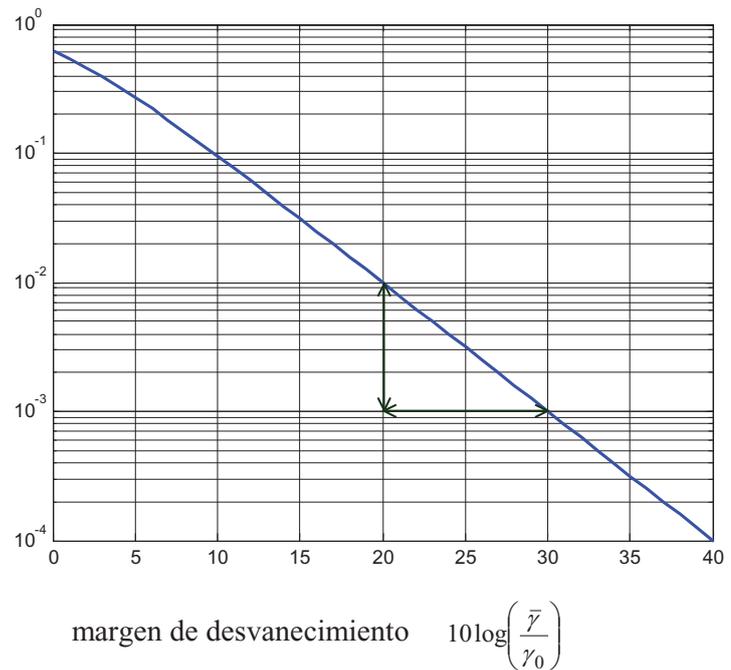
$$P_{out} = 1 - e^{-\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}}}$$

Comportamiento asintótico

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} \rightarrow \infty$$

$$P_{out} \rightarrow \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right)^{-1}$$

Canal Rayleigh. Probabilidad de interrupción



Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

Transmisión en bloques con entrelazado

Tasa binaria de errores

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

Transmisión en bloques

Tasa binaria de errores

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

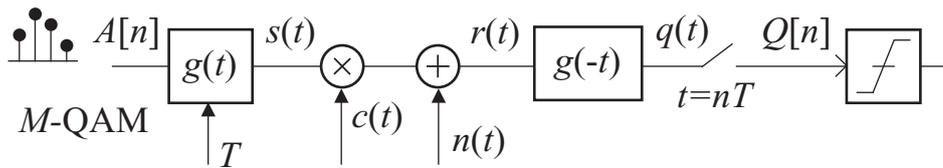
Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

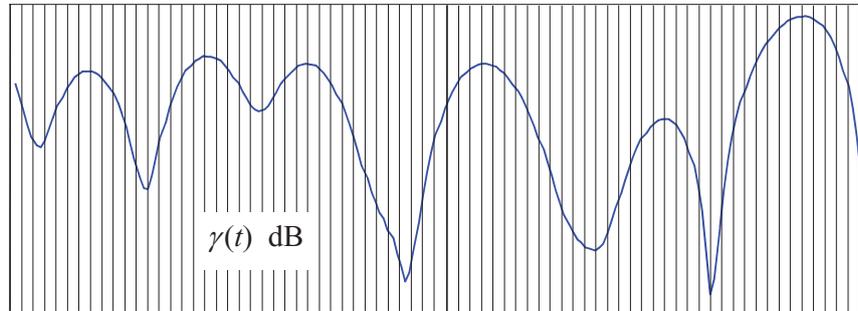
Transmisión en bloques. En tiempo

Tasa binaria de errores

Canal plano móvil. Transmisión en bloques



- Ganancia y SNR varían de un símbolo a otro: $\alpha[n]$ $\gamma[n]$



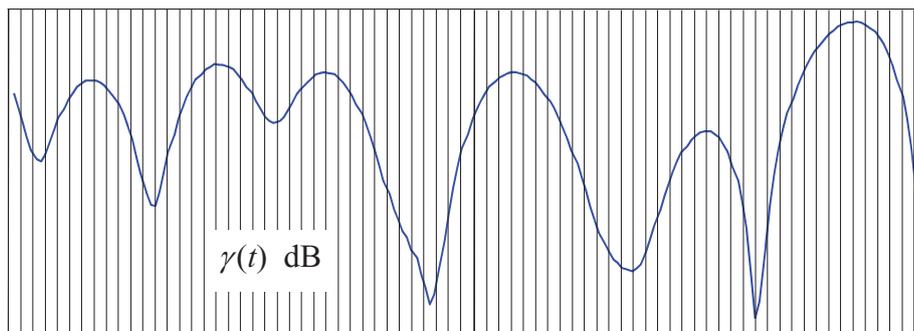
- Probabilidad de error de símbolo $P_s(\gamma[n])$ varía de un símbolo a otro

Canal plano móvil. Transmisión en bloques

- Ejemplo: M -QAM $P_s(\gamma[n]) = \alpha_M \cdot Q(\sqrt{\beta_M \gamma[n]})$
- Para un bloque de N símbolos consecutivos:

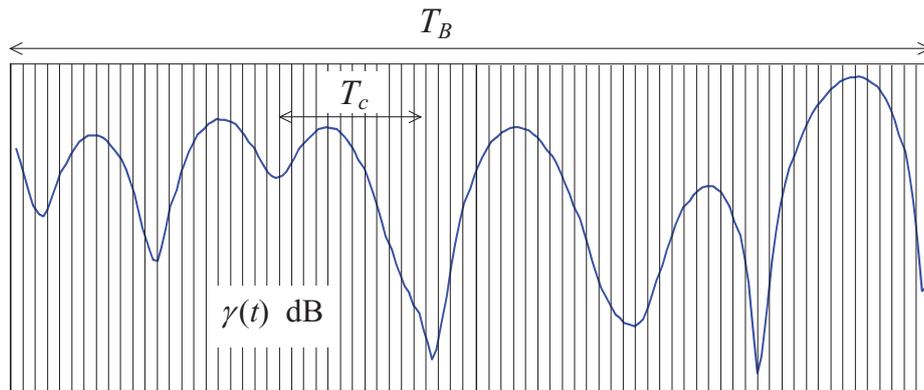
- el número total esperado de símbolos erróneos sería: $\sum_{n=0}^{N-1} P_s(\gamma[n])$

$$\text{con } P_s(\gamma[n]) = \alpha_M \cdot Q(\sqrt{\beta_M \gamma[n]})$$



Canal plano variable con el tiempo. Procesado por bloques

- T_B tiempo de un bloque de símbolos que se procesan conjuntamente:



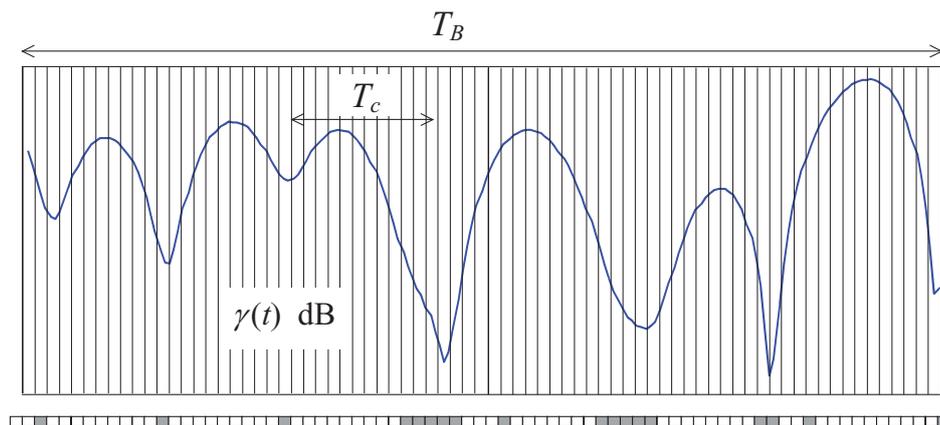
- Si T_B es de al menos varios T_c ... γ pasa por todos sus estados

$$\sum_{n=0}^{N-1} P_s(\gamma[n]) \approx N \cdot \overline{P_s(\gamma)} \quad \overline{P_s(\gamma)} \text{ media en el conjunto de } \gamma \text{ (esperanza)}$$

pero ...

Canal plano variable con el tiempo. Procesado por bloques

- T_B tiempo de un bloque de símbolos que se procesan conjuntamente:



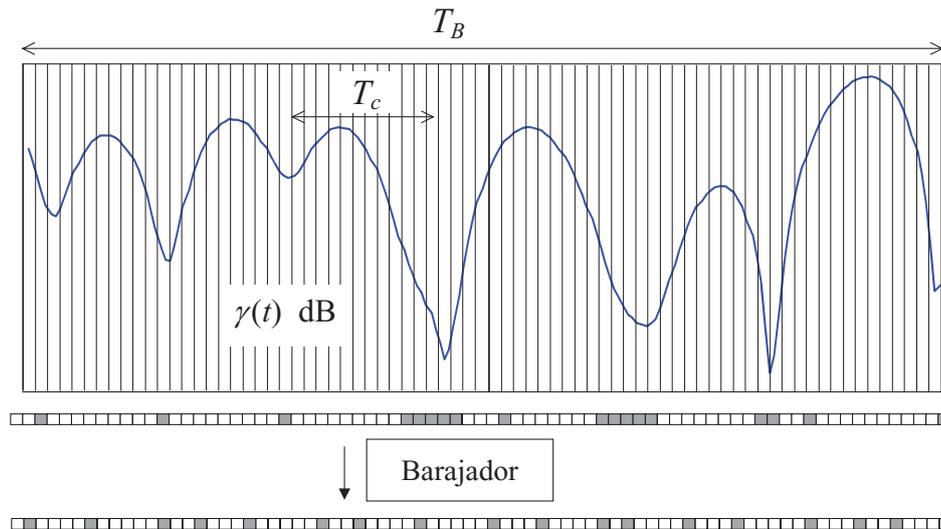
- Si T_B es de al menos varios T_c ... γ pasa por todos sus estados

$$\sum_{n=0}^{N-1} P_s(\gamma[n]) \approx N \cdot \overline{P_s(\gamma)} \quad \overline{P_s(\gamma)} \text{ media en el conjunto de } \gamma \text{ (esperanza)}$$

pero ... se producen **ráfagas** de errores de duración (bits) máxima $\approx R \times T_c$

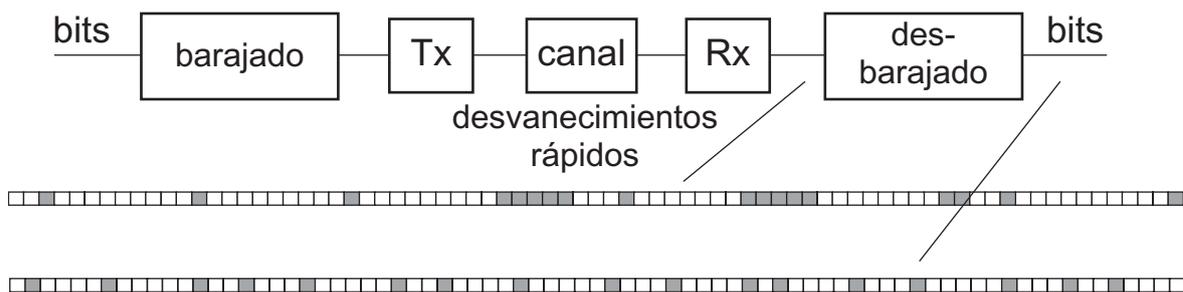
Canal plano variable con el tiempo. Procesado por bloques

- T_B tiempo de un bloque de símbolos/bits que se procesan conjuntamente:



- Se puede dispersar los errores de las ráfagas **barajando** los bits
- Se barajan antes de transmitirlos y a la inversa después de recibirlos

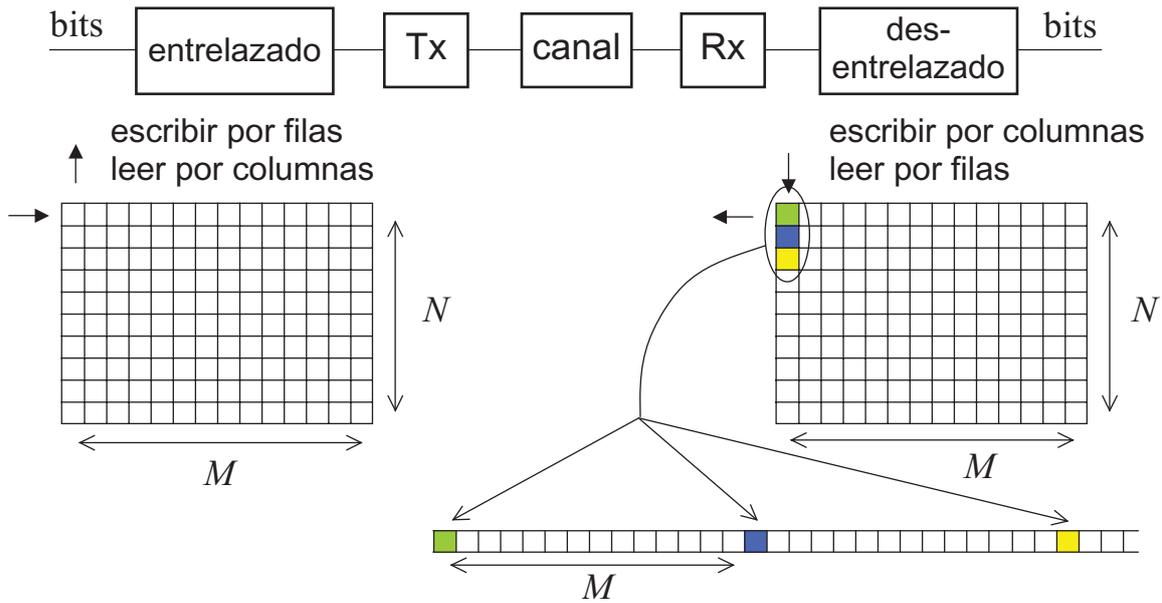
Canal plano variable con el tiempo. Procesado por bloques



- En los desvanecimientos se producen ráfagas de errores
- Se pueden dispersar los errores de las ráfagas **barajando** los bits
- Se barajan antes de transmitirlos y a la inversa después de recibirlos
- Número medio de bit erróneos en bloque de N bits: $N \cdot \overline{P_b(\gamma)}$
- Se consigue así un canal binario simétrico sin memoria con $p = \overline{P_b(\gamma)}$

Canal plano variable con el tiempo. Procesado por bloques

Barajado de bits por entrelazado



- $N > R \times T_c$ duración (bits) de las ráfagas

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

Transmisión en bloques. En tiempo

Tasa binaria de errores

Canal plano Rayleigh rápido con entrelazado. Probabilidad de error

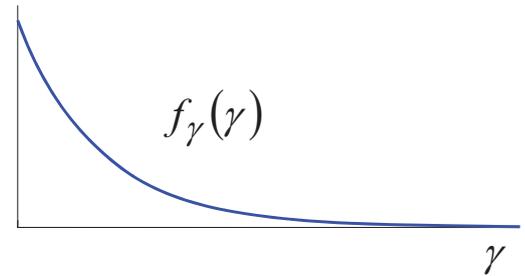
Si α es "Rayleigh" $\rightarrow \gamma = \alpha^2$ es exponencial

$$F_\gamma(\gamma) = 1 - e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}$$

Función de distribución

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}$$

Función densidad de probabilidad



Prob. error de símbolo "instantánea" M-QAM	$P_s(\gamma[n]) = \alpha_M \cdot Q(\sqrt{\beta_M \gamma[n]})$
Prob. error de símbolo media	$\bar{P}_s = \int_0^\infty P_s(\gamma) \cdot f_\gamma(\gamma) d\gamma$
$\bar{P}_s = \int_0^\infty \alpha_M \cdot Q(\sqrt{\beta_M \gamma}) \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} \cdot d\gamma = \frac{\alpha_M}{2} \left(1 - \left(1 + \frac{2}{\beta_M \bar{\gamma}} \right)^{-1/2} \right)$	

Canal plano Rayleigh rápido con entrelazado. Probabilidad de error

hacen falta 10 dB de SNR ($\times 10$)
para bajar $\times 10^{-1}$
la probabilidad de error

Comportamiento asintótico

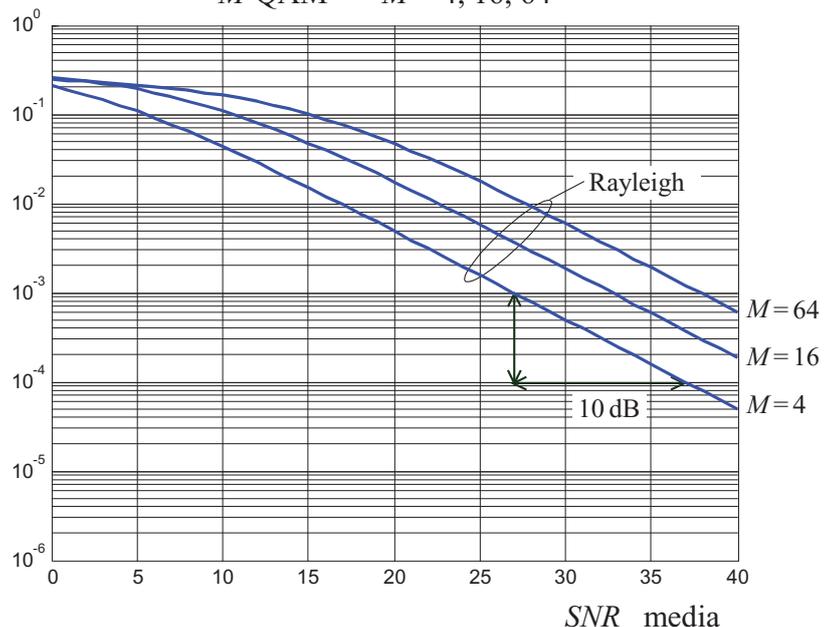
$$\bar{\gamma} \rightarrow \infty$$

$$\bar{P}_s \rightarrow \frac{\alpha_M}{2\beta_M} \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}}$$

$$\bar{P}_b \rightarrow \left(\frac{1}{\log_2 M} \cdot \frac{\alpha_M}{2\beta_M} \right) \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}}$$

Probabilidad de error de bit

M-QAM M = 4, 16, 64



Canal plano Rayleigh rápido con entrelazado. Probabilidad de error

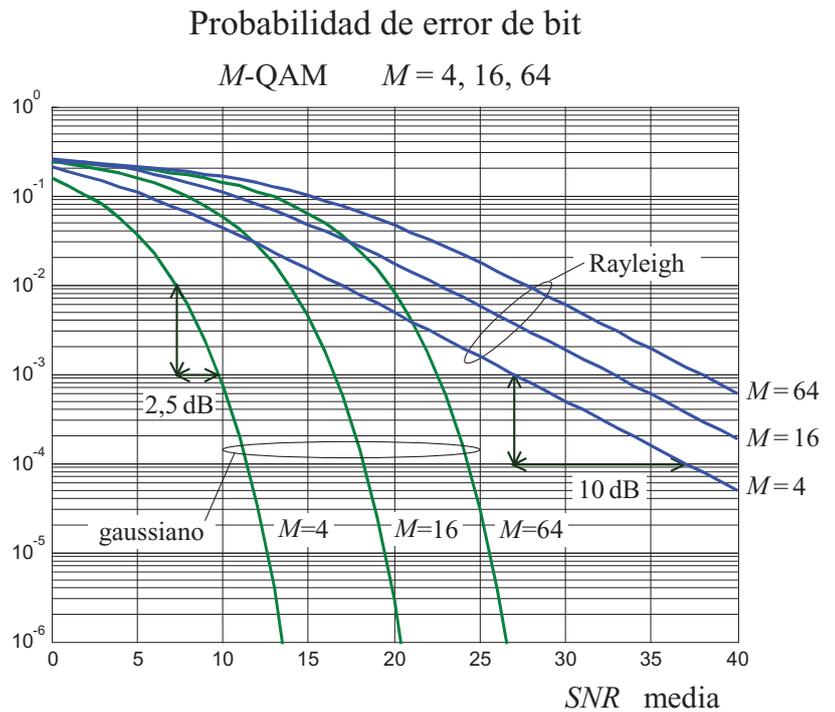
hacen falta 10 dB de SNR ($\times 10$)
para bajar $\times 10^{-1}$
la probabilidad de error
($\sim 2,5$ dB en canal gaussiano)

Comportamiento asintótico

$$\bar{\gamma} \rightarrow \infty$$

$$\bar{P}_s \rightarrow \frac{\alpha_M}{2\beta_M} \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}}$$

$$\bar{P}_b \rightarrow \left(\frac{1}{\log_2 M} \cdot \frac{\alpha_M}{2\beta_M} \right) \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}}$$



Canal plano Rayleigh rápido con entrelazado. Probabilidad de error

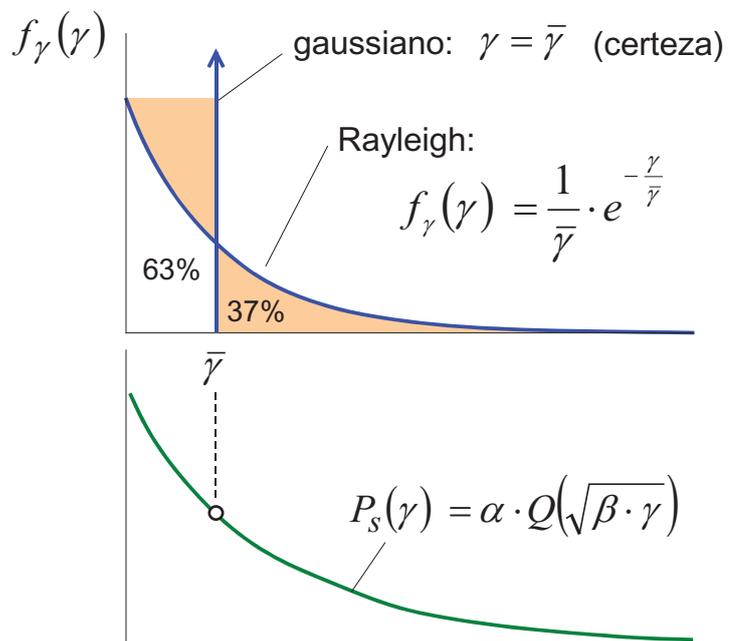
¿Porqué, para una misma $\bar{\gamma}$,
es mucho peor $E[P_s]$ en canal Rayleigh que en canal gaussiano?

$$E[P_s] = \bar{P}_s = \int_0^{\infty} P_s(\gamma) \cdot f_{\gamma}(\gamma) d\gamma$$

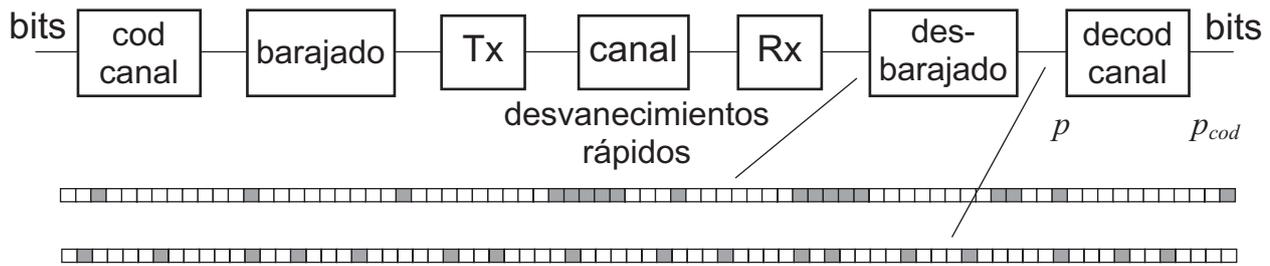
Los valores $\gamma > \bar{\gamma}$ son poco probables

Los valores $\gamma < \bar{\gamma}$ son los más probables

Los valores malos de P_s son los más probables

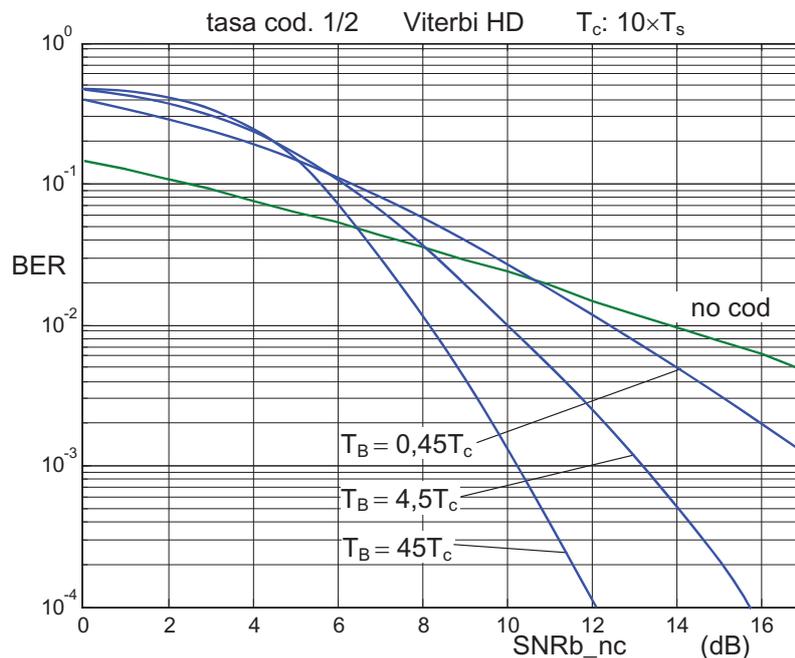
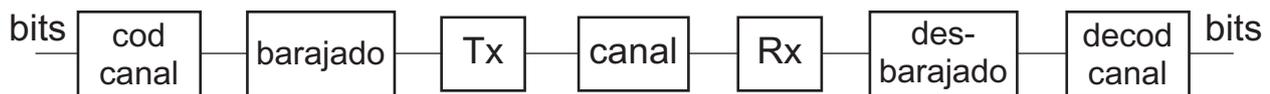


Codificación de canal con entrelazado



- Se añade codificación de canal para reducir las probabilidades de error
- Se eliminan los errores dispersos pero no las ráfagas
- Desbarajado dispersa los errores de ráfagas
- Si los bloques de barajado no son suficientemente largos ...
... la codificación de canal no mejora la tasa de errores

Codificación de canal con entrelazado



Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

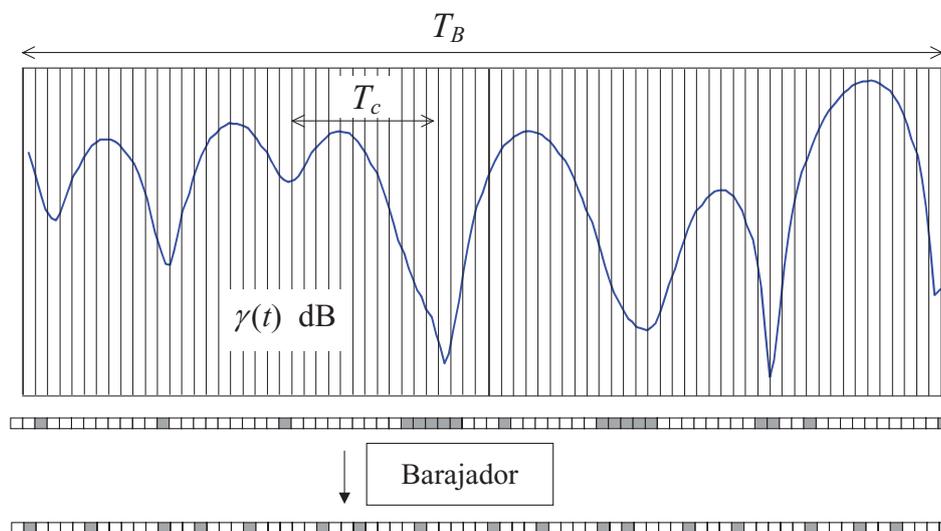
Transmisión en bloques con entrelazado. **En frecuencia**

Tasa binaria de errores

Promediado en tiempo de la probabilidad de error

Problema

- Se procesan conjuntamente **bloques** de bits **barajados** de duración $T_B \gg T_c$
- Se introduce un **retardo** T_B inaceptable en canales muy lentos



Promediado en tiempo de la probabilidad de error

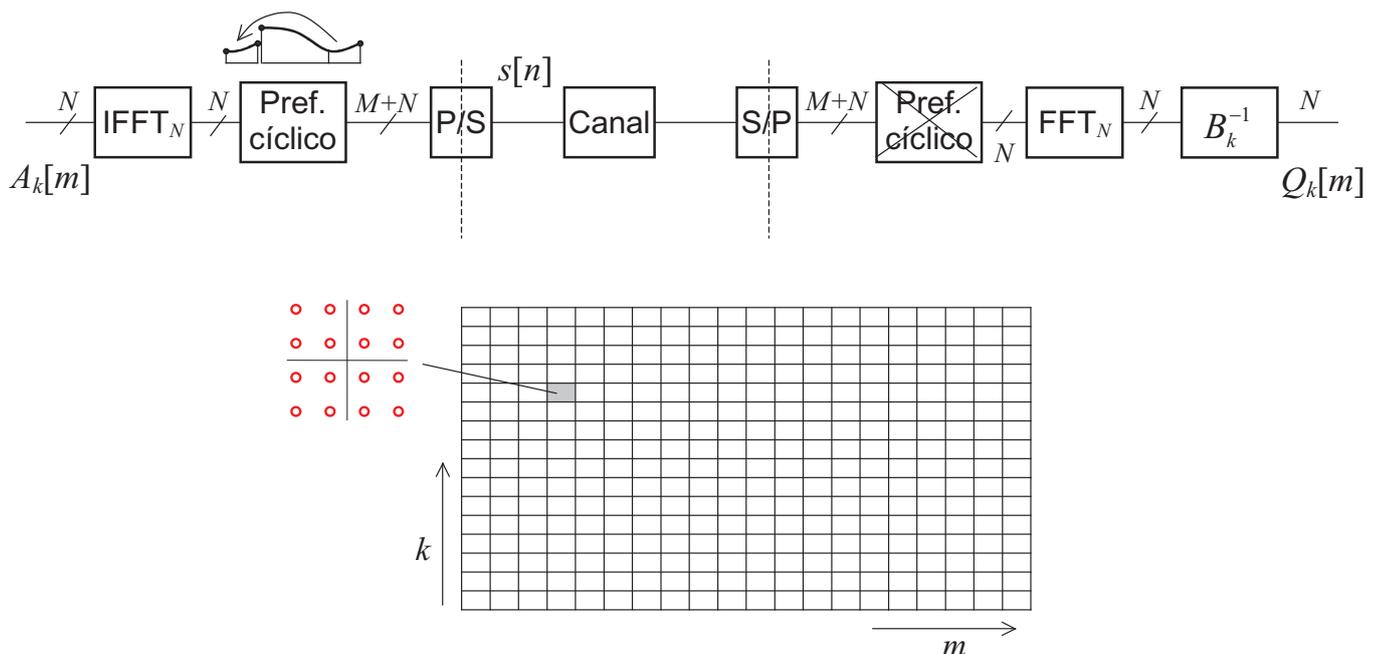
Tiempo de coherencia

	<i>peatón</i>	<i>coche ciudad</i>	<i>coche carretera</i>	<i>tren</i>
F_c	$v = 5 \text{ km/h}$	$v = 50 \text{ km/h}$	$v = 100 \text{ km/h}$	$v = 200 \text{ km/h}$
900 MHz	240 ms	24 ms	12 ms	6 ms
1800 MHz	120 ms	12 ms	6 ms	3 ms
2,6 GHz	83 ms	8,3 ms	4,1 ms	2 ms

Ejemplo: voz

- Retardo admisible $\sim 40 \text{ ms}$
- No aplicable a peatón
- No aplicable a terminal sin movimiento (ej.: equipo de sobremesa Wi-Fi, Televisor)

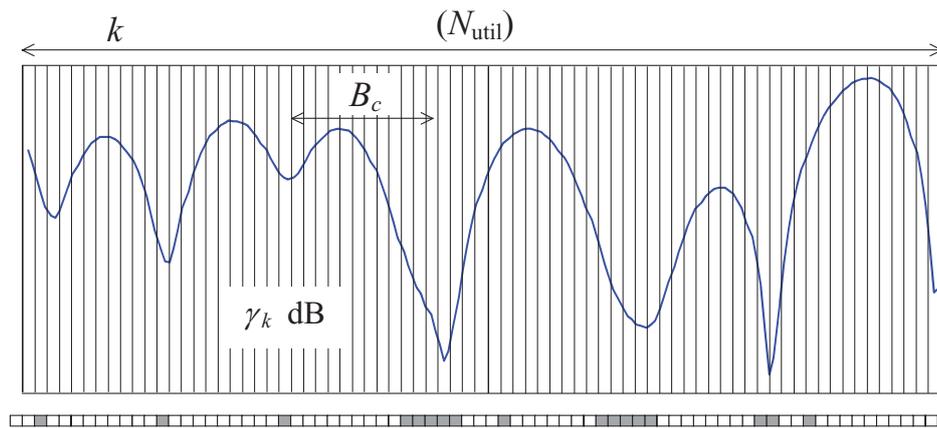
Transmisión en banda ancha: OFDM



- En cada intervalo de símbolo $[m]$ se envían N_{util} símbolos complejos $A_k[m]$

OFDM con canal selectivo en frecuencia

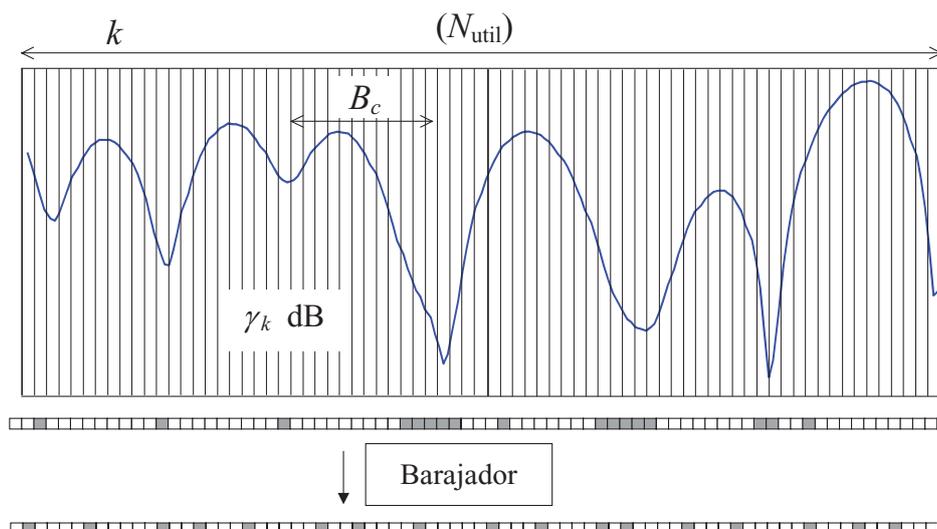
1 símbolo OFDM



- la probabilidad de error varía de una portadora a otra $P_b(\gamma_k[m])$ (gaussiano)
- Si el ancho de banda es $\gg B_c$, La probabilidad media es aproximadamente la esperanza $\overline{P_b(\gamma_k[m])}$ para γ Rayleigh
- pero hay ráfagas de portadoras contiguas con errores

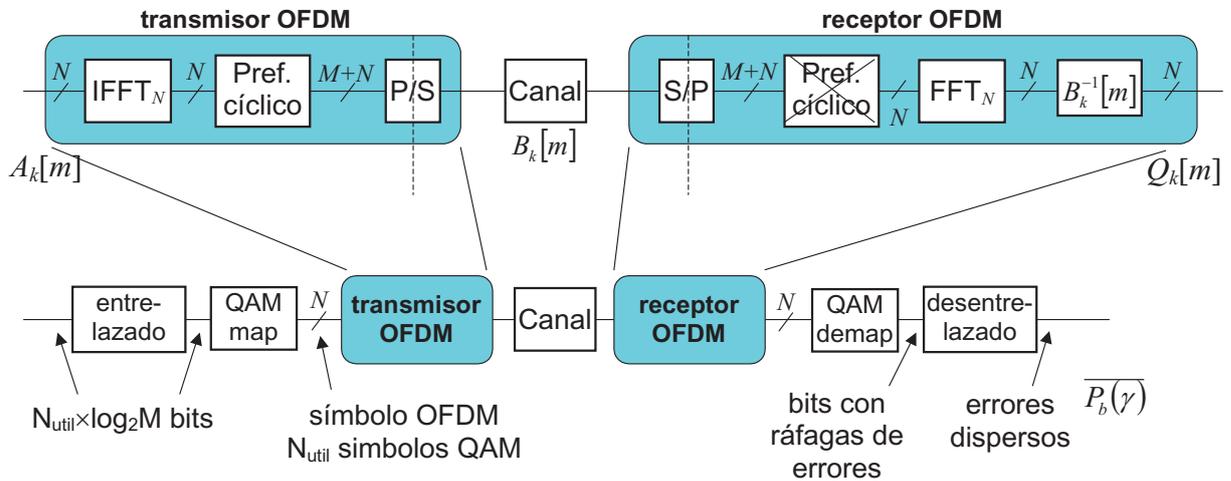
OFDM con canal selectivo en frecuencia

- se pueden evitar las ráfagas barajando los errores en recepción



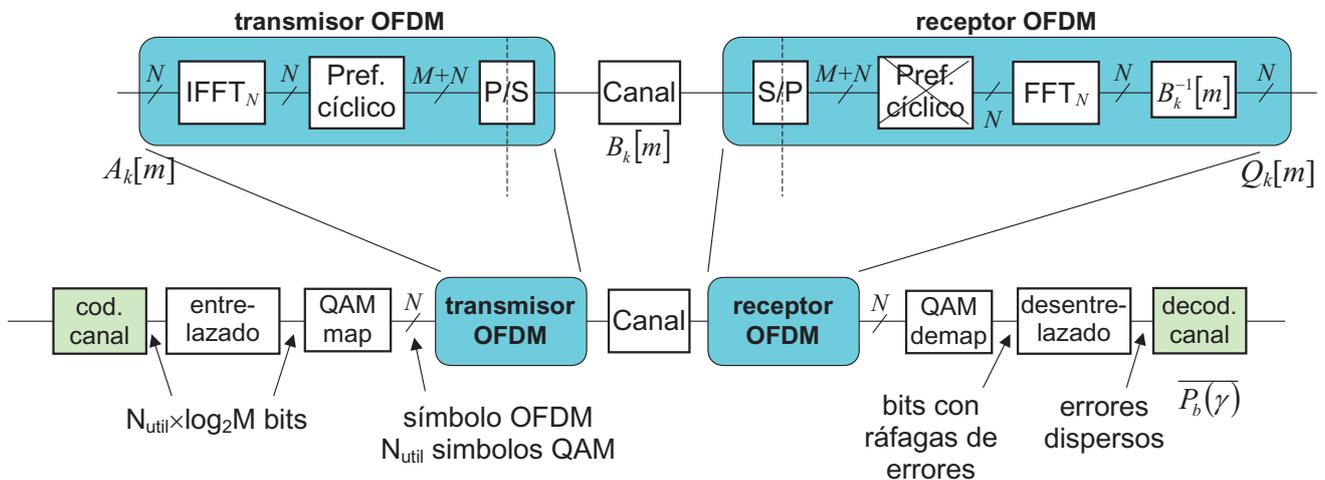
OFDM con entrelazado

- En cada símbolo OFDM se transmiten muchos símbolos QAM ($k = 1: N_{\text{util}}$)
- Ejemplo (TDT-2k) 1705 16QAM: 6820 bits
- Bloque con entrelazado: el conjunto de bits de un símbolo OFDM



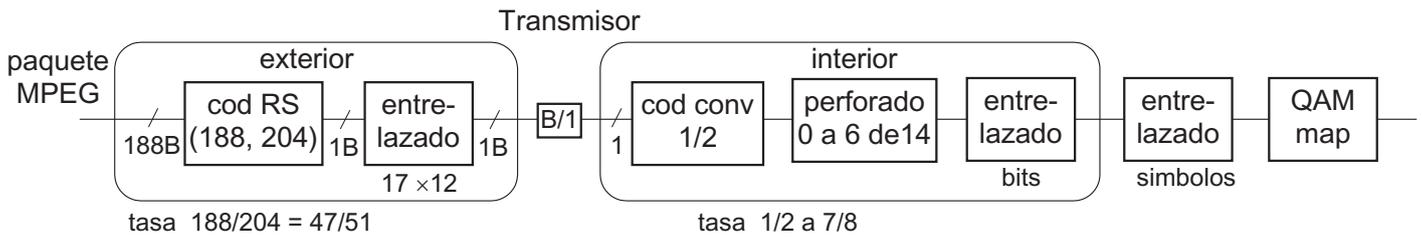
OFDM codificada C-OFDM

- En cada símbolo OFDM se transmiten muchos símbolos QAM ($k = 1: N_{\text{util}}$)
- Ejemplo (TDT-2k) 1705 16QAM: 6820 bits
- Bloque con entrelazado: el conjunto de bits de un símbolo OFDM



Codificación concatenada serie

Ejemplo *Televisión Digital Terrestre*



codificador interior	conv. 1/2	perforado para tasas: 1/2, 2/3, 3/4, 5/6, 7/8	
codificador exterior	RS (204,188) (255,239) acortado	$m - k = 16$	corrige 4 errores en bloque de 204

Entrelazado exterior: bloque de 204 = 17 × 12

Transmisión en canales con desvanecimientos

Transmisión monoportadora paso-banda

Prestaciones con canal gaussiano

Prestaciones con canal Rayleigh

Canal plano fijo

Probabilidad de interrupción

Canal plano móvil o de banda ancha

Transmisión en bloques con entrelazado

Tasa binaria de errores

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

Transmisión en canales con desvanecimientos. Prestaciones

Técnicas basadas en diversidad

Multiplexación espacial

Transmisión en canales con desvanecimientos

Técnicas basadas en diversidad

Conceptos

Justificación

Combinación de diversidad

Medida de la diversidad

Diversidad espacial en recepción

Conmutación

Selección

Suma

Suma ponderada óptima

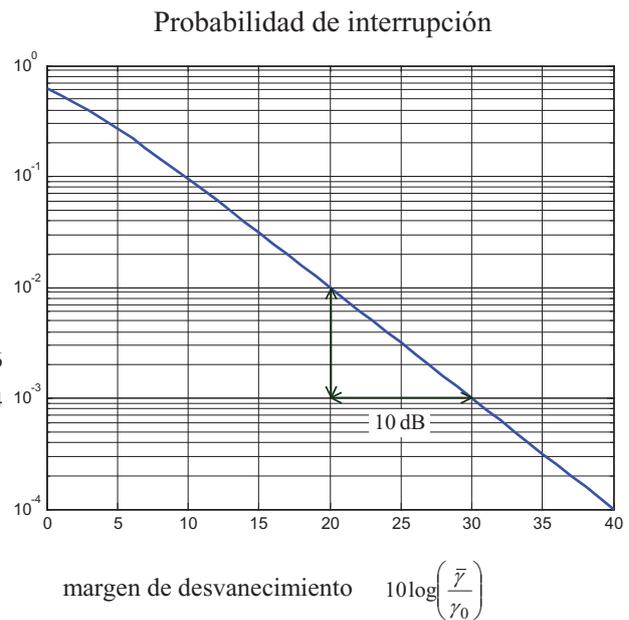
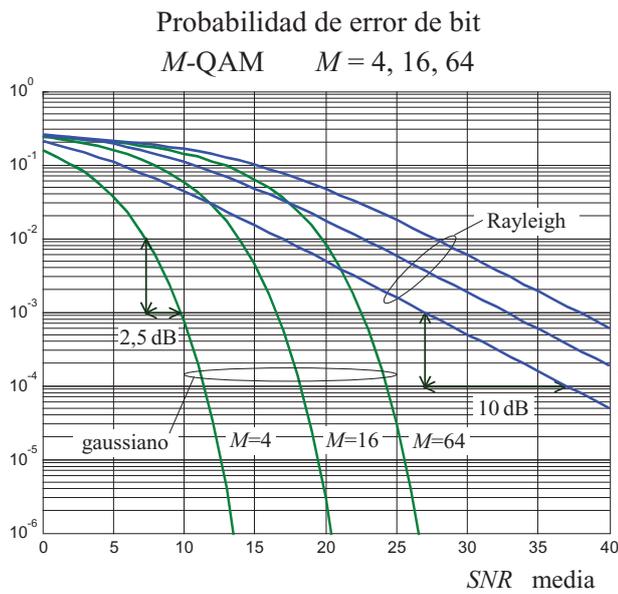
Diversidad espacial en transmisión

Conformación de haz

Códigos de Alamouti

Canal Rayleigh

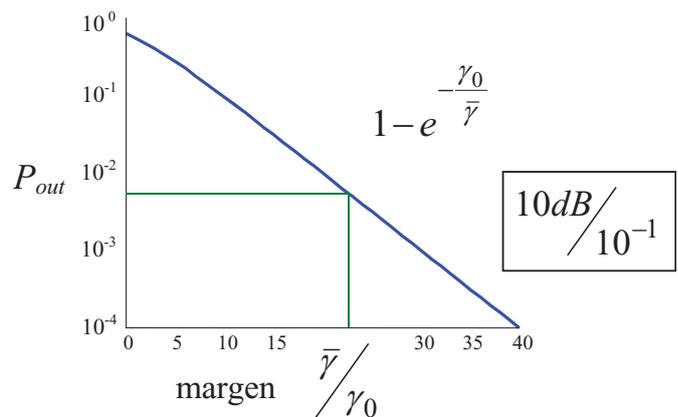
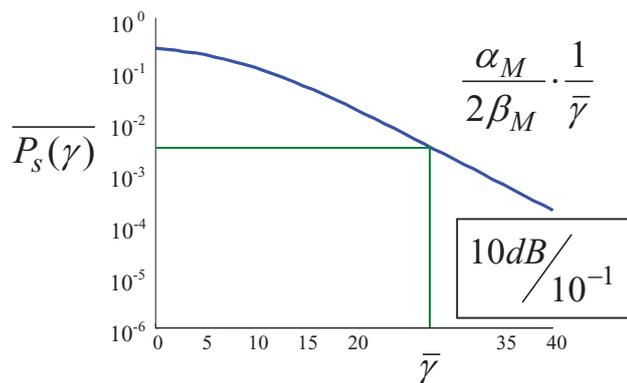
- Prestaciones mucho peores que canal gaussiano



(canal gaussiano no necesita *margen de desvanecimiento*)

Canal Rayleigh

- Prestaciones mucho peores que canal gaussiano



Comportamiento asintótico:

- Hacén falta 10 dB (10 veces de potencia) para mejorar 10 veces las prestaciones

Transmisión en canales con desvanecimientos

Técnicas basadas en diversidad

Conceptos

Justificación

Combinación de diversidad

Medida de la diversidad

Diversidad espacial en recepción

Conmutación

Selección

Suma

Suma ponderada óptima

Diversidad espacial en transmisión

Conformación de haz

Códigos de Alamouti

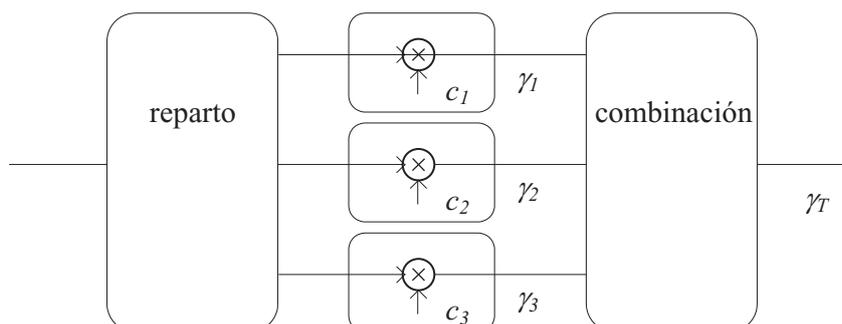
Técnicas de diversidad: combinación de canales diversos

Objetivos

- Mejorar prestaciones de canales aleatorios (ej.: Rayleigh)
– Reduciendo la varianza (*aleatoriedad*)

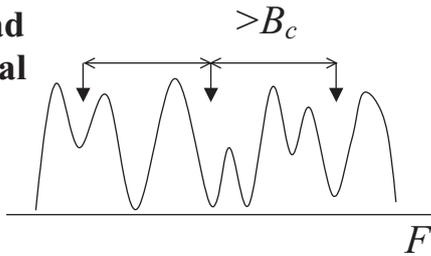
Método: combinación de varios canales aleatorios

- Usar **varios** canales aleatorios independientes o poco correlados (diversos)
- Repartir entre ellos la señal y **combinar** señales recibidas
- Es poco probable que todos estén en un desvanecimiento



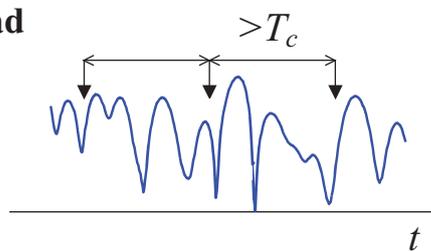
Técnicas de diversidad. Canales aleatorios independientes

Diversidad frecuencial



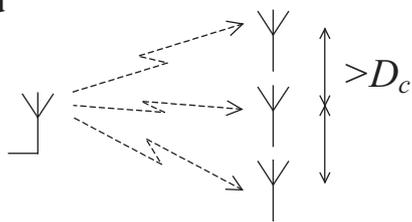
- Varios canales de banda estrecha
- Separación mayor que **ancho de banda de coherencia** B_c

Diversidad temporal



- Varios instantes (muestras)
- Separación mayor que **tiempo de coherencia** T_c

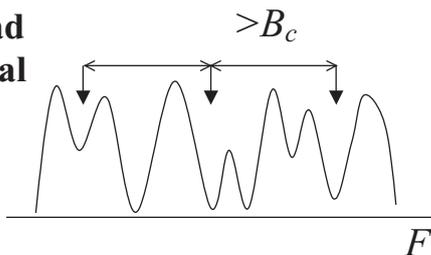
Diversidad espacial



- Varios caminos entre antenas
- Con varias antenas en Transmisión o Recepción
- Separación mayor que **distancia de coherencia** λ

Técnicas de diversidad. Canales aleatorios independientes

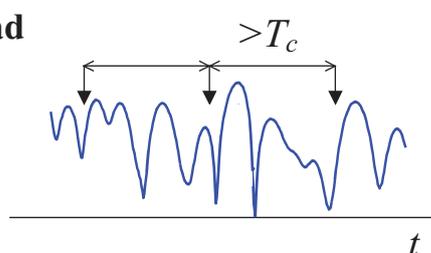
Diversidad frecuencial



Canal independientes:

- es poco probable que todos estén en un desvanecimiento

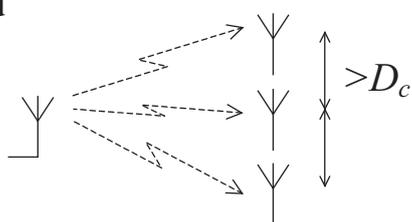
Diversidad temporal



Ejemplo de reparto

- código de repetición
- repetir el mismo símbolo transmitido
- repartir (o no) la potencia entre ellos

Diversidad espacial



Ejemplo de combinación

- seleccionar canal de mayor ganancia
- combinación línea óptima

Transmisión en canales con desvanecimientos

Técnicas basadas en diversidad

Conceptos

Justificación

Combinación de diversidad

Medida de la diversidad

Diversidad espacial en recepción

Conmutación

Selección

Suma

Suma ponderada óptima

Diversidad espacial en transmisión

Conformación de haz

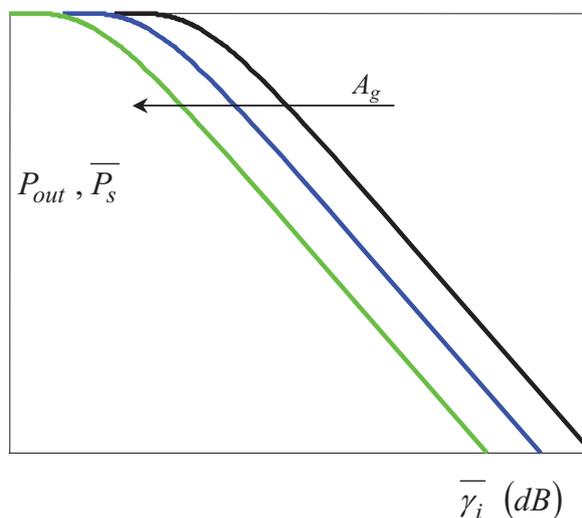
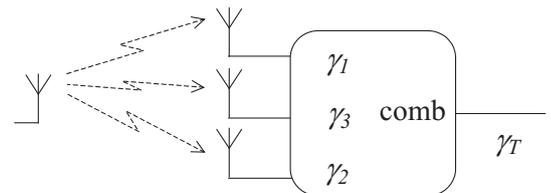
Códigos de Alamouti

Medida de la diversidad

Ganancia por conjunto (array gain)

- Mejora de la SNR

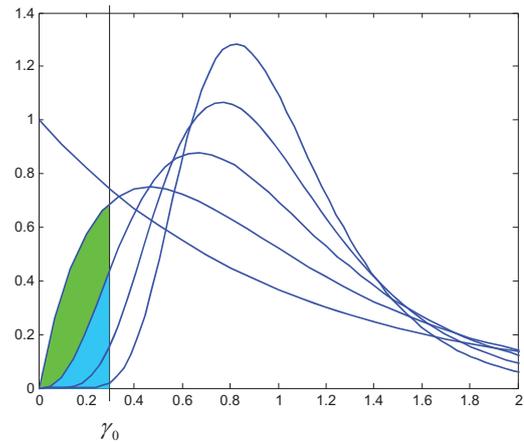
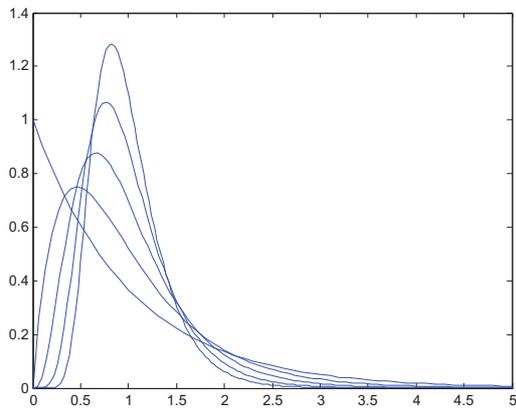
$$A_g = \frac{\bar{\gamma}_T}{\bar{\gamma}_i}$$



Medida de la diversidad

Ganancia por diversidad (*diversity gain*)

- Se debe a la mejor distribución de la SNR: $f_{\gamma_T}(\gamma)$ mejor que $f_{\gamma_i}(\gamma)$



- Se mide con la mejora en: probabilidad de interrupción probabilidad de error

$$P_{out}(\gamma_0) = \int_0^{\gamma_0} f_{\gamma_T}(\gamma) d\gamma \quad \bar{P}_s \approx \int_0^{\infty} P_s(\gamma) f_{\gamma_T}(\gamma) d\gamma$$

Medida de la diversidad

Ganancia por diversidad (*diversity gain*)

Comportamiento asintótico $\bar{\gamma}_i \rightarrow \infty$

$$P_{out}(\gamma_0) = F_{\gamma_T}(\gamma_0) = \int_0^{\gamma_0} f_{\gamma_T}(\gamma) d\gamma \rightarrow K_F \left(\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}_i} \right)^d \quad \bar{P}_s \approx \int_0^{\infty} P_s(\gamma) f_{\gamma_T}(\gamma) d\gamma \rightarrow K_e \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_i} \right)^d$$

$\bar{\gamma}_i \rightarrow \infty$

$\bar{P}_s, P_{out} \rightarrow K \cdot \bar{\gamma}_i^{-d}$

d: orden de diversidad

($d \leq N$)

depende de la combinación

Ejemplo. Rayleigh $N = 1$

$$\bar{\gamma}_i \rightarrow \infty \quad \bar{P}_s \rightarrow \frac{\alpha_M}{2\beta_M} \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}_i} = \frac{\alpha_M}{2\beta_M} \cdot \bar{\gamma}_i^{-1}$$

$$\bar{\gamma}_i \rightarrow \infty \quad P_{out} \rightarrow \frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}_i} = \gamma_0 \cdot \bar{\gamma}_i^{-1}$$

orden de diversidad $d = N = 1$

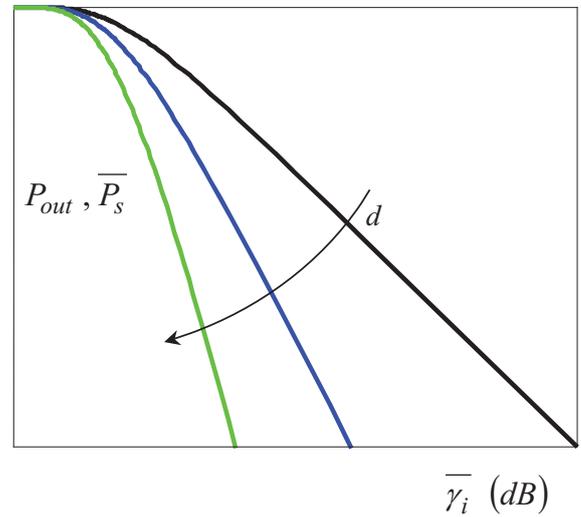
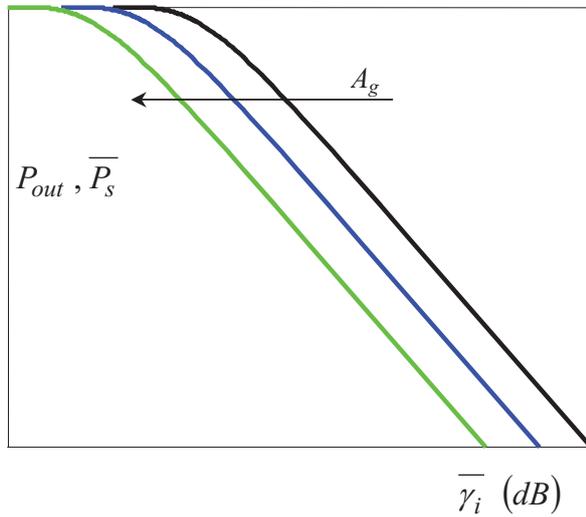
Transmisión con diversidad

Efecto de la ganancia por conjunto

Efecto de la ganancia por diversidad

Desplazamiento horizontal
(ganancia de SNR)

Aumento de pendiente
(ganancia de orden de diversidad)

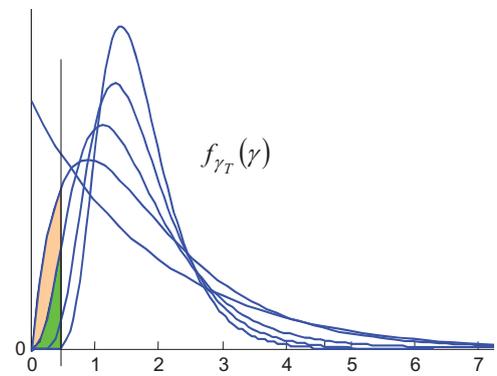
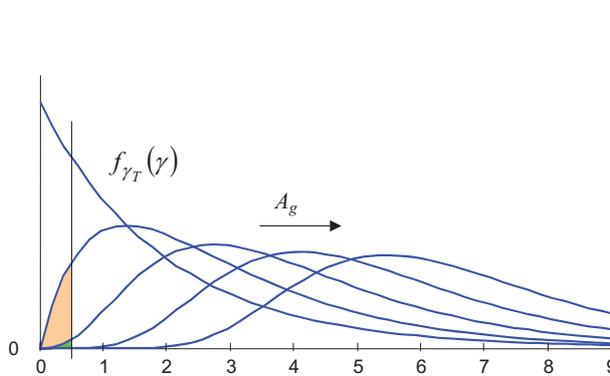


Medida de la diversidad

Ganancia por diversidad
(diversity gain)

$$\bar{P}_s \approx \int_0^{\infty} P_s(\gamma) f_{\gamma_T}(\gamma) d\gamma$$

$$P_{out}(\gamma_0) = \int_0^{\gamma_0} f_{\gamma_T}(\gamma) d\gamma$$



- Puede haber ganancia por diversidad y no por conjunto
- P_{out} disminuye con d (aunque no haya ganancia por conjunto)

Transmisión en canales con desvanecimientos

Técnicas basadas en diversidad

Conceptos

- Justificación
- Combinación de diversidad
- Medida de la diversidad

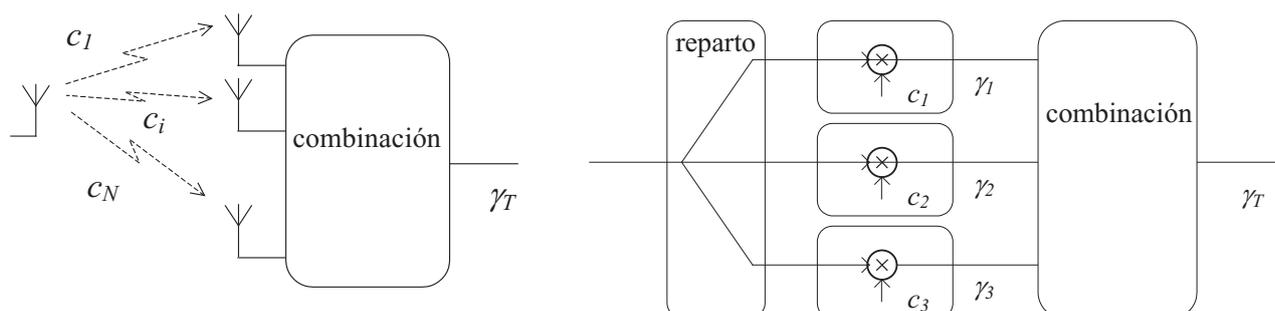
Diversidad espacial en recepción

- Conmutación
- Selección
- Suma
- Suma ponderada óptima

Diversidad espacial en transmisión

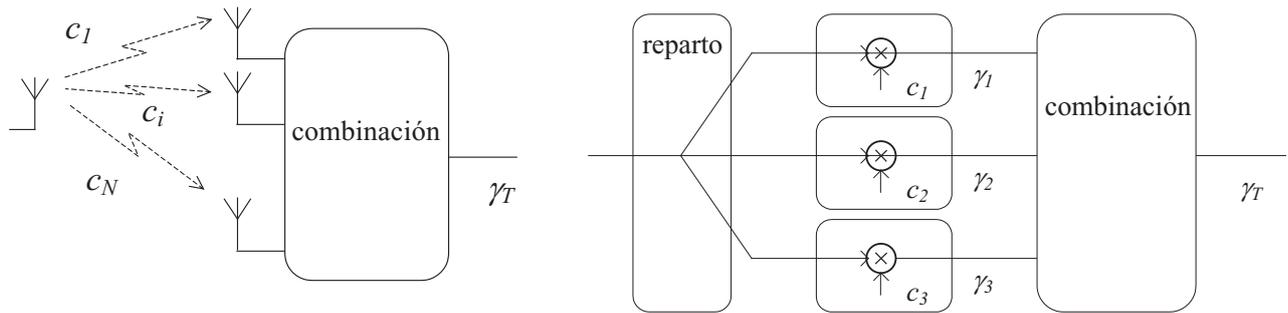
- Conformación de haz
- Códigos de Alamouti

Diversidad espacial en recepción



- Varias antenas receptoras
- Reciben el mismo símbolo (reparto por repetición)
- La combinación pretende mejorar la SNR:
 - reducir la varianza (ganancia por diversidad) (sólo si canales independientes)
 - aumentar la media (ganancia por repetición)

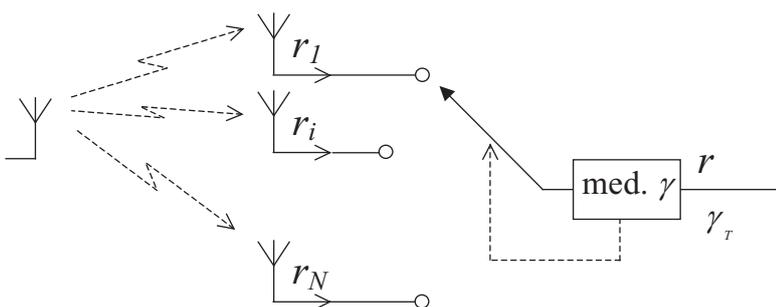
Diversidad espacial en recepción



TC	<i>Threshold Combining</i>	conmutación cuando inaceptable
SC	<i>Selection Combining</i>	selección del mejor
EGC	<i>Equal Gain Combining</i>	suma
MRC	<i>Maximal Ratio Combining</i>	suma ponderada óptima

Diversidad espacial en recepción

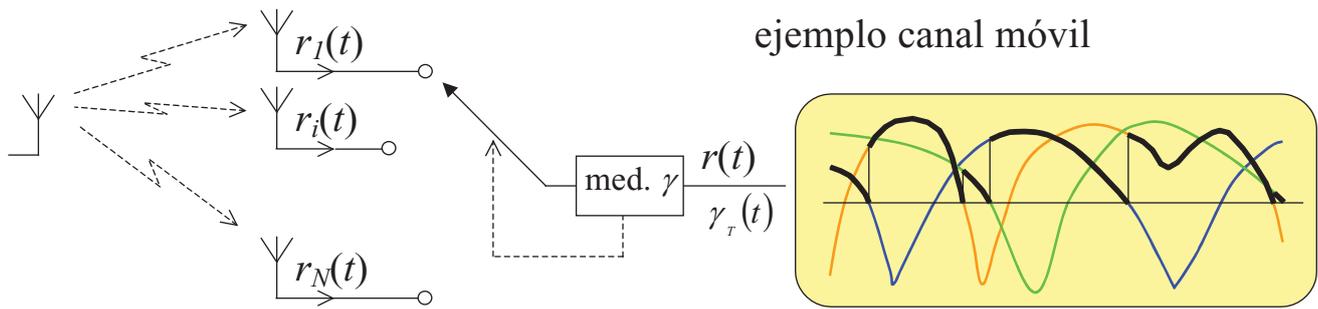
Combinación por umbral (*Threshold Combining*)



- Cuando la SNR baja de un valor umbral:
 - se conmuta a otra entrada (ordenado o aleatorio)
- Es poco probable que todas estén en desvanecimiento
- Se reduce la probabilidad de interrupción
- Requiere un medidor de potencia y un sólo receptor

Diversidad espacial en recepción

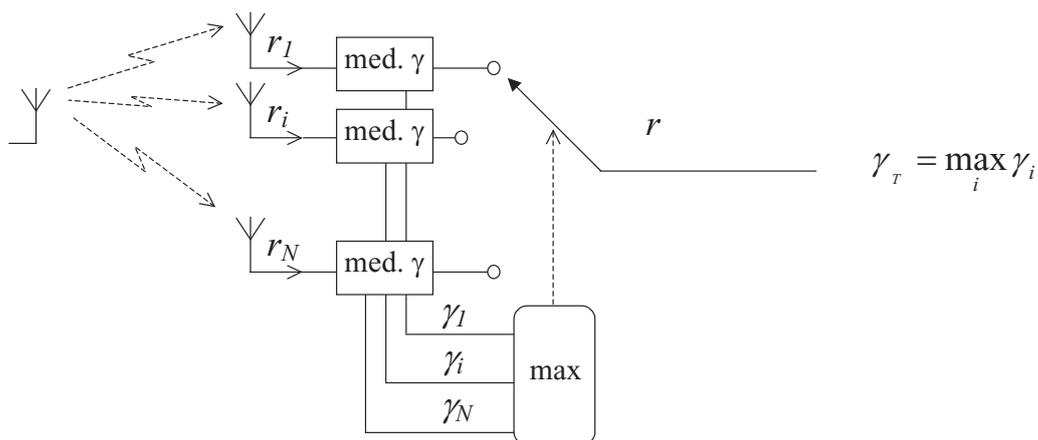
Combinación por umbral (*Threshold Combining*)



- Cuando la SNR baja de un valor umbral:
 - se conmuta a otra entrada (ordenado o aleatorio)
- Es poco probable que todas estén en desvanecimiento
- Se reduce la probabilidad de interrupción
- Requiere un medidor de potencia y un sólo receptor

Diversidad espacial en recepción

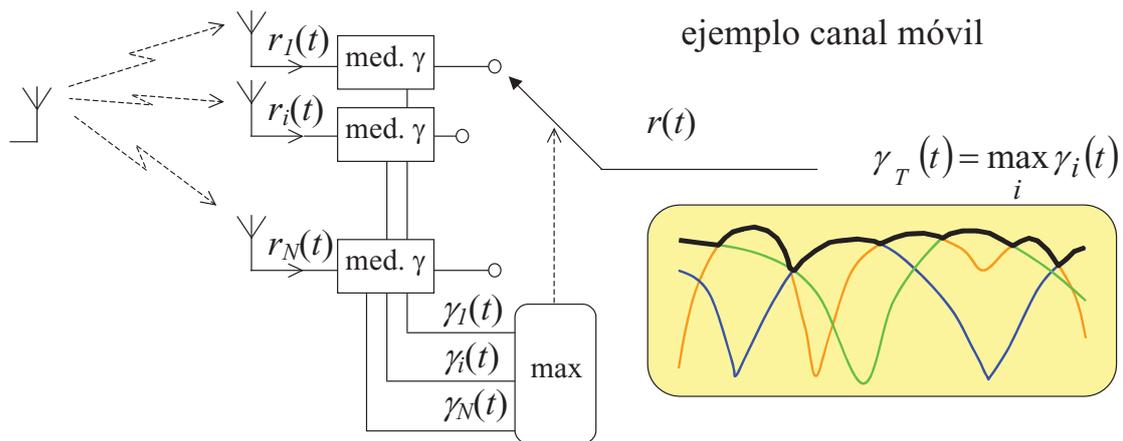
Combinación por selección (SC: *Selection Combining*)



- Se usa la señal de mayor potencia
- Es poco probable que todas estén en desvanecimiento
- Requiere sólo un receptor pero N medidores de potencia

Diversidad espacial en recepción

Combinación por selección (SC: *Selection Combining*)

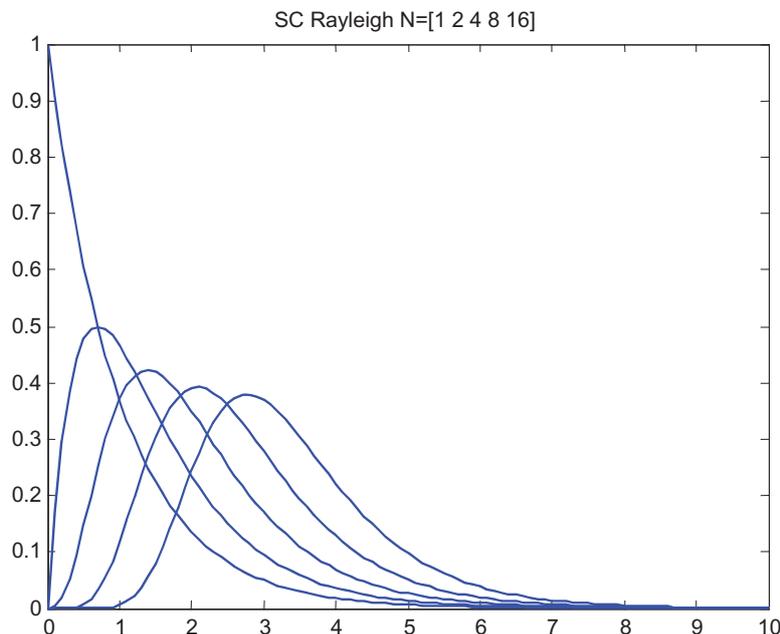


- Se usa la señal de mayor potencia
- Es poco probable que todas estén en desvanecimiento
- Requiere sólo un receptor pero N medidores de potencia
- Mejora la SNR media y la probabilidad de error de símbolo respecto a TC

SC Combinación por selección - Canal Rayleigh

$$F(\gamma) = P(\gamma_T < \gamma) = \prod_{i=1}^N P(\gamma_i < \gamma) = \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{\gamma}}\right)^N$$

$$f(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} F(\gamma) = \frac{N}{\gamma} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\gamma}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{\gamma}}\right)^{(N-1)}$$



SC Combinación por selección - Canal Rayleigh

Ganancia por conjunto

$$\overline{\gamma_T} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \right) \cdot \overline{\gamma_i} \quad A_g = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \right) \quad i \rightarrow \infty \quad A_g \rightarrow \log(N)$$

$\overline{\gamma_T}$ crece logarítmicamente con el número de antenas

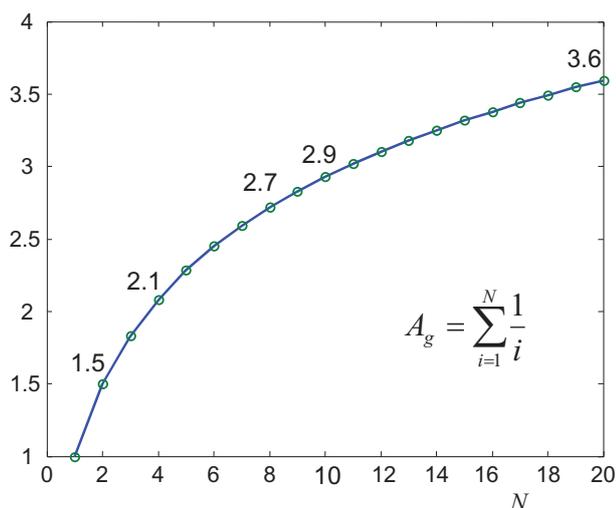
Ganancia por diversidad (canales de igual SNR media)

$$P_{out}(\gamma_0) = P(\gamma_T < \gamma_0) = \prod_{i=1}^N P(\gamma_i < \gamma_0) = \left(1 - e^{-\frac{\gamma_0}{\overline{\gamma_i}}} \right)^N \quad \overline{\gamma_i} \rightarrow \infty \quad P_{out} \rightarrow \left(\frac{\gamma_0}{\overline{\gamma_i}} \right)^N$$

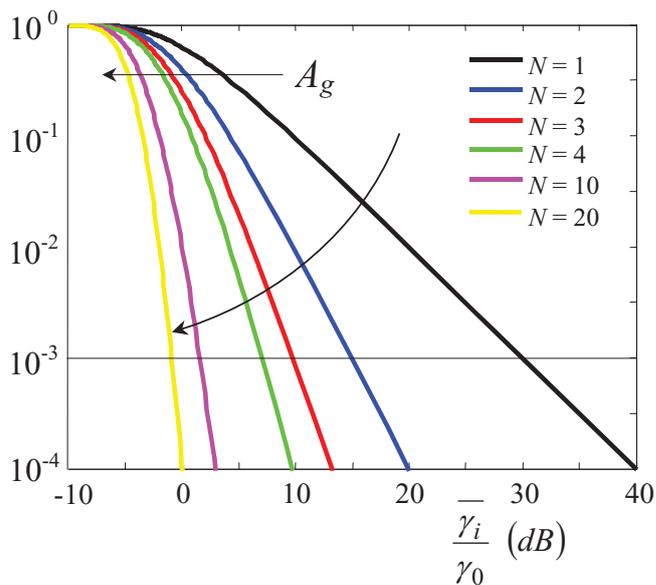
- Orden de diversidad: $d = N$ (número de antenas, máximo posible))

Combinación por selección - Canal Rayleigh

Ganancia de SNR media



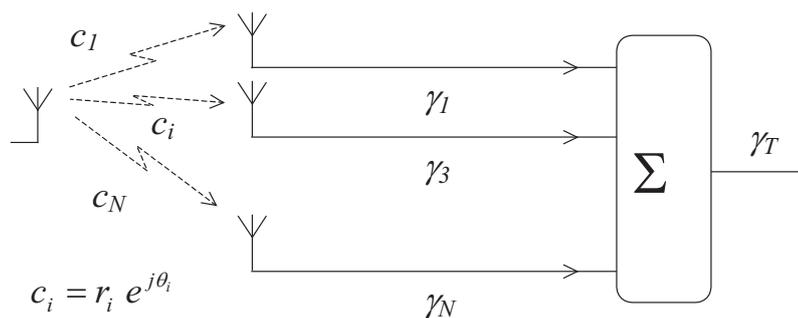
Probabilidad de interrupción



- La mayor ganancia se consigue al pasar de 1 a 2 antenas

Diversidad espacial en recepción

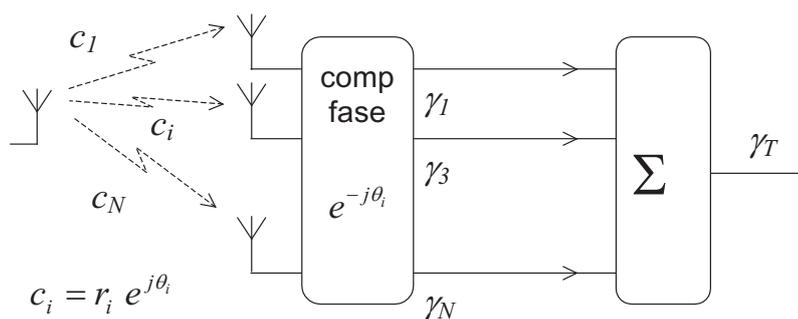
Combinación por suma



- En vez de desechar canales ... ¿se pueden aprovechar todos? ¿sumando?
- La suma resulta en un canal Rayleigh de mayor ganancia, se obtiene ganancia por conjunto ... pero no ganancia por diversidad ($M=1$)
- Las sumas pueden ser destructivas
- Para reducir los desvanecimientos hay que compensar las fases

Diversidad espacial en recepción

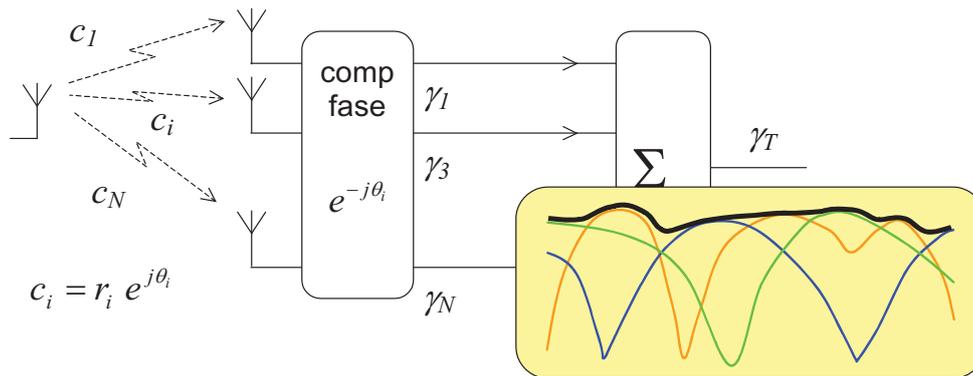
Combinación por suma coherente (EGC: *Equal Gain Combining*)



- Se compensan las fases : cada camino queda con ganancia r_i
- Se suman las contribuciones: ganancia total equivalente $\sum r_i$

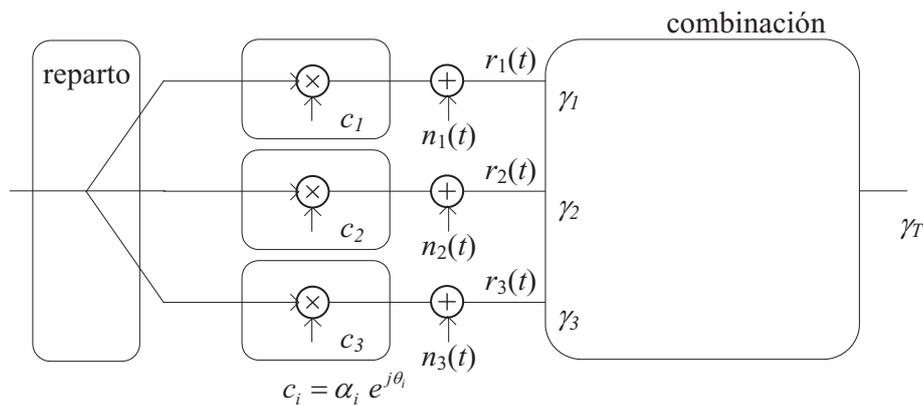
Diversidad espacial en recepción

Combinación por suma coherente (EGC: *Equal Gain Combining*)



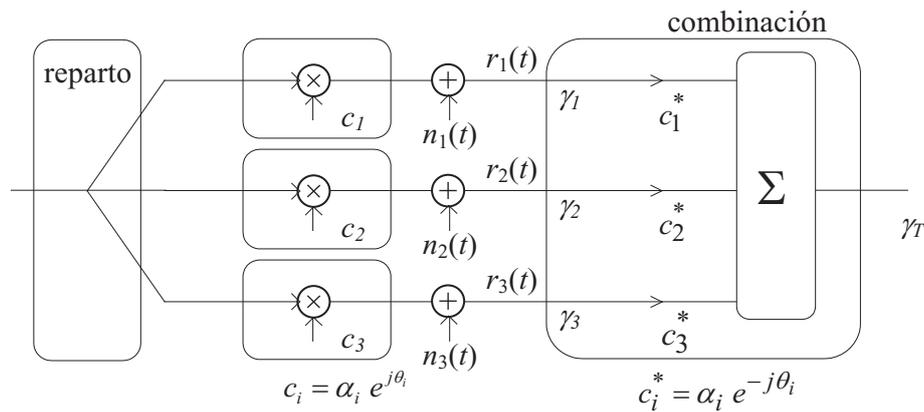
- Aprovecha los canales peores en vez de desecharlos
Ganancia por conjunto A_g mejor que SC
- Orden de diversidad N (igual que SC, máximo posible)
- Requiere N receptores - no requiere medir ganancias

Diversidad espacial en recepción - Combinación óptima



¿Cual es la combinación que maximiza la SNR γ_T ?

Diversidad espacial en recepción - Combinación óptima



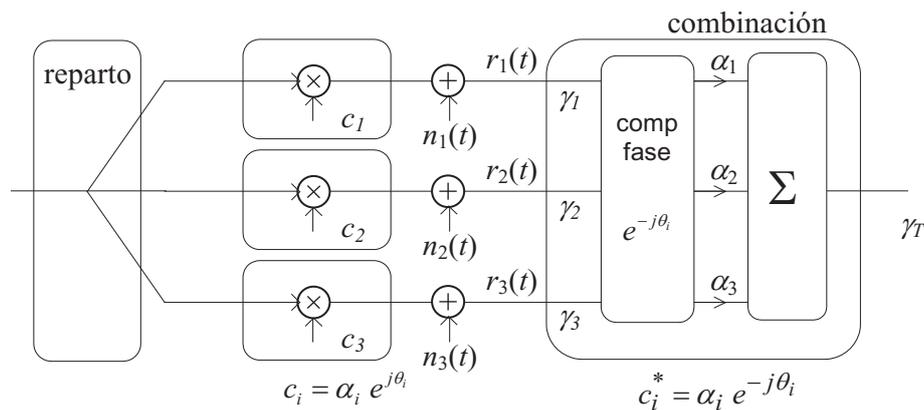
¿Cual es la combinación que maximiza la SNR γ_T ?

Filtro adaptado: correlación con el vector de señal recibida:

$$\sum_i r_i \cdot c_i^* = \sum_i r_i \cdot e^{-j\theta_i} \cdot \alpha_i$$

Compensar las fases y añadir ganancias iguales a las de cada canal

Diversidad espacial en recepción - Combinación óptima (MRC)



MRC *Maximal Ratio Combining*

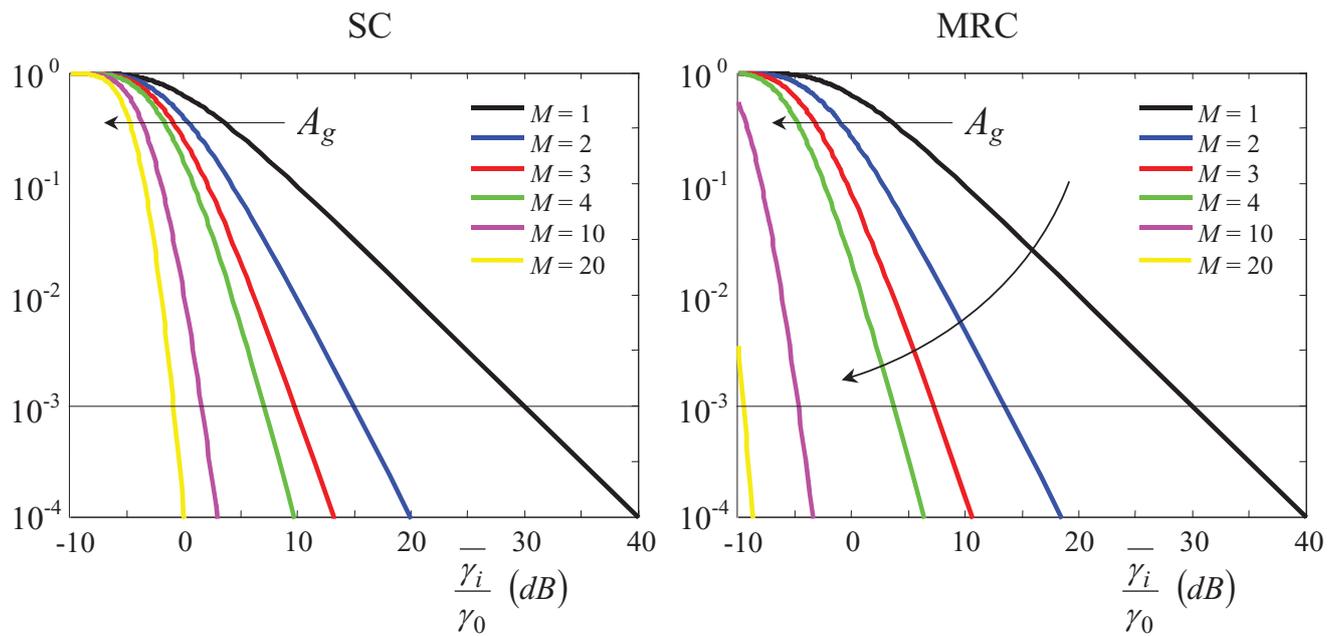
Ganancia por conjunto

$$\gamma_T = \sum_{i=1}^N \gamma_i \quad \rightarrow \quad \overline{\gamma_T} = \sum_{i=1}^N \overline{\gamma_i} = N \cdot \overline{\gamma_i} \quad A_g = N \quad \text{mejor que EGC}$$

Ganancia por diversidad:

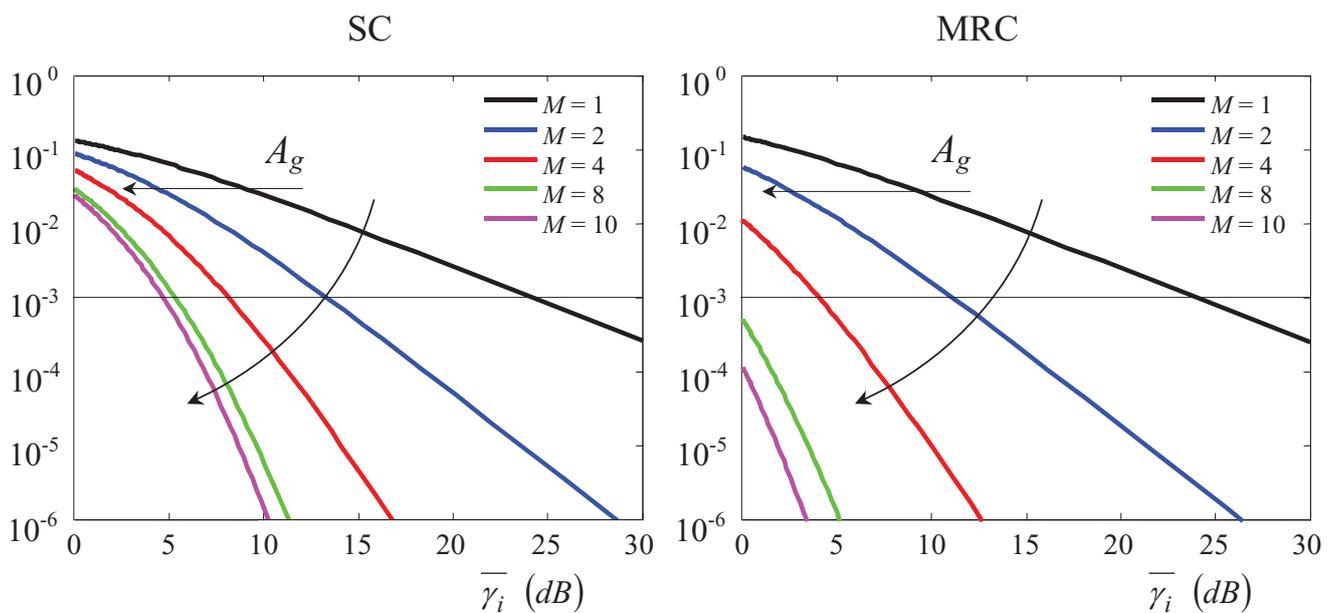
orden de diversidad N (igual que SC, máximo posible)

Probabilidad de interrupción



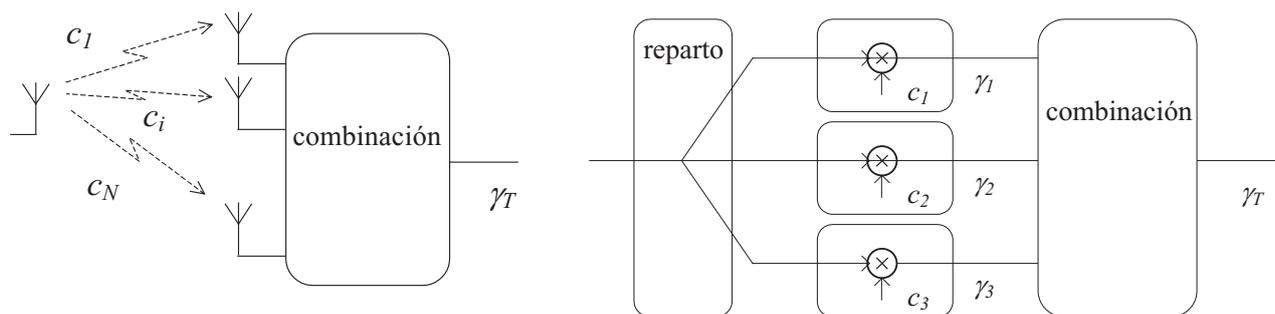
- Igual ganancia por diversidad (orden N) MRC tiene más ganancia por conjunto
- La mayor ganancia se consigue al pasar de 1 a 2 antenas

Esperanza de la probabilidad de error de símbolo (BPSK)



- Igual ganancia por diversidad (orden N) MRC tiene más ganancia por conjunto
- La mayor ganancia se consigue al pasar de 1 a 2 antenas

Diversidad espacial en recepción



TC	<i>Threshold Combining</i>	conmutación cuando inaceptable
SC	<i>Selection Combining</i>	selección del mejor
EGC	<i>Equal Gain Combining</i>	suma
MRC	<i>Maximal Ratio Combining</i>	suma ponderada óptima

Diversidad espacial en recepción

			Medidores de potencia	Receptores (fase)
TC	<i>Threshold Combining</i>	conmutación cuando inaceptable	1	
SC	<i>Selection Combining</i>	selección del mejor	N	
EGC	<i>Equal Gain Combining</i>	suma		N
MRC	<i>Maximal Ratio Combining</i>	suma ponderada óptima	N	N

- La ganancia por diversidad es similar en todos: orden de diversidad $\approx N$
- El orden de diversidad disminuye al aumentar la correlación entre los canales (antenas con separación insuficiente)

Transmisión en canales con desvanecimientos

Técnicas basadas en diversidad

Conceptos

- Justificación
- Combinación de diversidad
- Medida de la diversidad

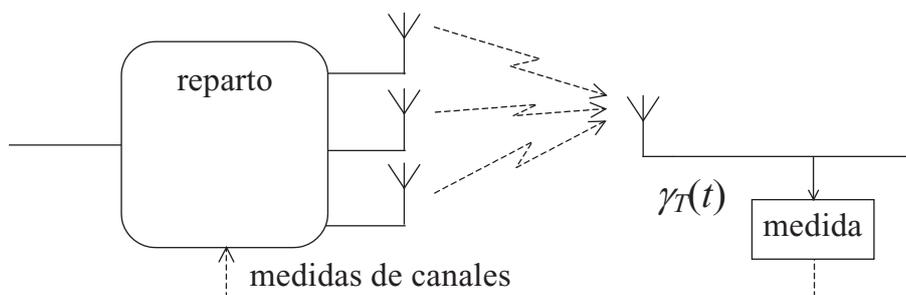
Diversidad espacial en recepción

- Conmutación
- Selección
- Suma
- Suma ponderada óptima

Diversidad espacial en transmisión

- Conformación de haz
- Códigos de Alamouti

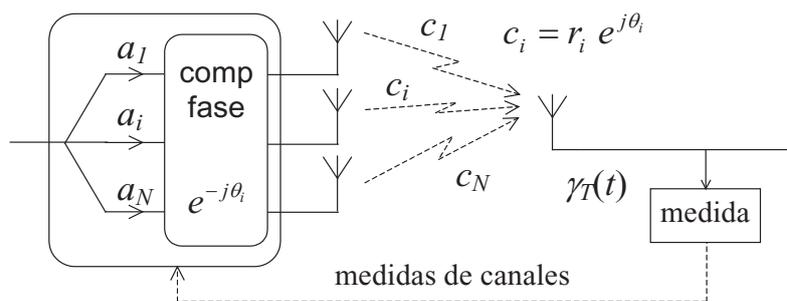
Diversidad espacial en transmisión



- Se envía cada símbolo mediante señales por el conjunto de antenas
- La única antena receptora suma todas las señales recibidas
- Se pueden usar técnicas similares a las usadas en diversidad en recepción pero...
... eso requiere que el receptor mida y envíe sus medidas al transmisor:

SC	<u>índice</u> del mejor canal	para seleccionar antena transmisora
MRC / EGC	<u>fases</u>	para compensarlas antes de transmitir
MRC	<u>fases</u> y <u>ganancias</u>	para aplicarlas antes de transmitir

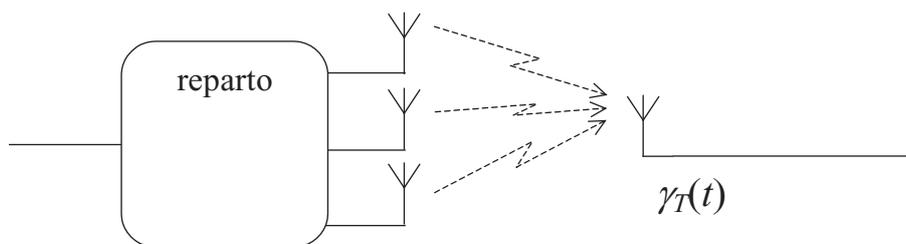
Diversidad espacial en transmisión



Conformación de haz (*beamforming*)

- Se compensan las fases para que la antena receptora sume coherentemente (~ "apuntar" hacia el receptor el diagrama de radiación del *array* de antenas)
- EGC: se transmite con igual potencia por todas las antenas
- MRC: ganancias proporcionales a las de los caminos $a_i = r_i$
- Comportamiento igual a diversidad en recepción

Diversidad espacial en transmisión



¿Se puede hacer un reparto en transmisión

- que permita sumas coherentes en recepción
- sin necesidad de que el transmisor conozca los canales?

Una solución para 2 antenas:

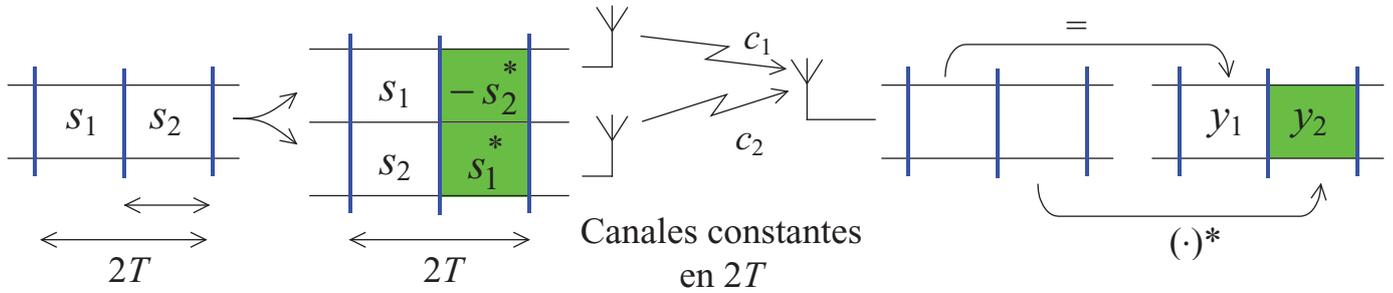
- Código de repetición conjugada en transmisión (dos símbolos y sus conjugados)
- Usando dos intervalos de símbolo seguidos o dos subportadoras OFDM
- Los canales se se consideren iguales para ambos tiempos o frecuencias (pero distintos desde cada antena)

Diversidad espacial en transmisión

Código de repetición espacio-temporal

(Alamouti - 1998)

- Se envían dos símbolos, uno por cada antena
- En otro intervalo se envían de nuevo intercambiados y conjugados
- El receptor recibe dos símbolos mezclados y conjuga el segundo



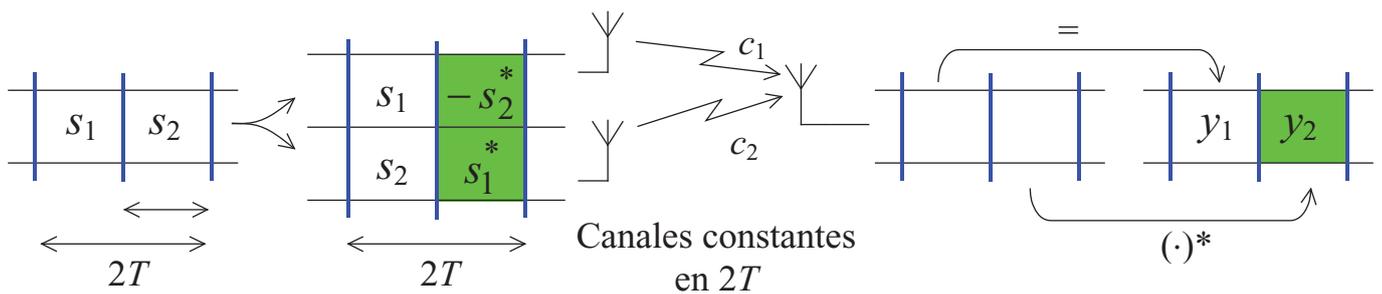
$$y_1 = c_1 \cdot s_1 + c_2 \cdot s_2$$

$$y_2 = (-c_1 \cdot s_2^* + c_2 \cdot s_1^*)^* = c_2^* \cdot s_1 - c_1^* \cdot s_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2^* & -c_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

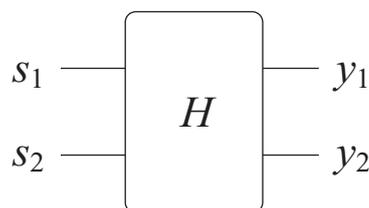
Diversidad espacial en transmisión

Código de repetición espacio-temporal



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2^* & -c_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = H \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2^* & -c_1^* \end{bmatrix}$$



canal equivalente

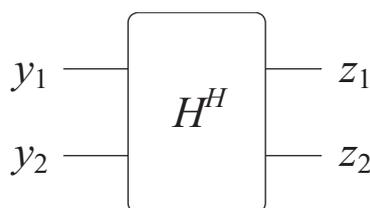
Diversidad espacial en transmisión

Código de repetición espacio-temporal

$$H^H H = \begin{bmatrix} c_1^* & c_2 \\ c_2^* & -c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2^* & -c_1^* \end{bmatrix} = (|c_1|^2 + |c_2|^2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{diagonal})$$

Receptor

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = H^H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = H^H H \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = (|c_1|^2 + |c_2|^2) \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad \text{se obtienen los dos símbolos separados (sin interferencia)}$$

Diversidad espacial en transmisión

Código de repetición espacio-temporal

Se obtienen los dos símbolos separados (sin interferencia)

con ganancia $|c_1|^2 + |c_2|^2$ no hay cancelación
se suman las potencias de las señales

Ganancia por conjunto

Si la potencia transmitida se divide entre las dos antenas

$$\gamma_T = \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \quad \rightarrow \quad \overline{\gamma_T} = \frac{1}{2} (\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}) = \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_2} \quad A_g = 1$$

Ganancia por diversidad:

- orden de diversidad 2 (máximo con 2 antenas)
- se obtiene la ganancia por diversidad de pasar de 1 a 2 antenas
- sin que el transmisor necesite conocer el canal (lazo abierto)

Diversidad espacial en transmisión

(sin conocimiento de canal en transmisión)

Técnica de Alamouti

STBC Space Time Block Coding

- Código de repetición espacio-temporal
- Se puede extender a más antenas

ej.: UMTS, HSDPA

SFBC Space Frequency Block Coding

- Código de repetición espacio-frecuencial
- En sistema de transmisión OFDM
- SFBC 2×2: Se usan dos subportadoras contiguas y dos antenas
- Se puede extender a más antenas

ej.: LTE

Transmisión en canales con desvanecimientos

Técnicas basadas en diversidad

Conceptos

Justificación

Combinación de diversidad

Medida de la diversidad

Diversidad espacial en recepción

Conmutación

Selección

Suma

Suma ponderada óptima

Diversidad espacial en transmisión

Conformación de haz

Códigos de Alamouti

Transmisión en canales con desvanecimientos

Canales con desvanecimientos

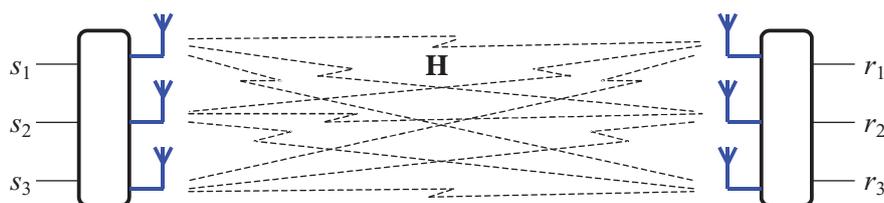
Prestaciones con transmisión monoportadora

Técnicas basadas en diversidad

Multiplexación espacial

Multiplexación espacial con canales muticamino

Canales fijos Rayleigh NLOS

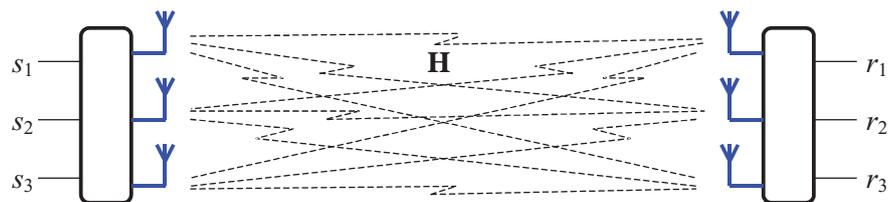


- Transmisor y receptor usan varias antenas
- Las ganancias de los canales entre cada par de antenas son aleatorias: $\mathbf{H} = c_{ij}$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad r_i = \sum_j c_{ij} \cdot s_j$$

Multiplexación espacial con canales muticamino

Canales fijos Rayleigh NLOS



antenas muy juntas ($\ll \lambda$)

matriz tiene todos los elementos iguales

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} c & c & c \\ c & c & c \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

antenas separadas ($> \lambda$)

matriz puede tener filas independientes

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

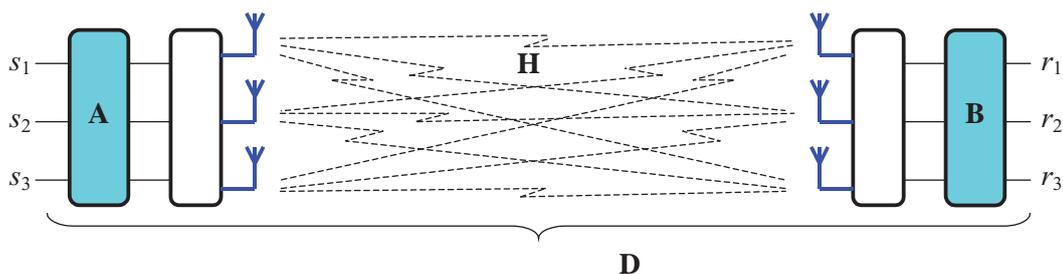
Multiplexación espacial con canales muticamino

Canales fijos Rayleigh NLOS

- Sean **A** y **B** dos matrices tales que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}$ es una matriz diagonal

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

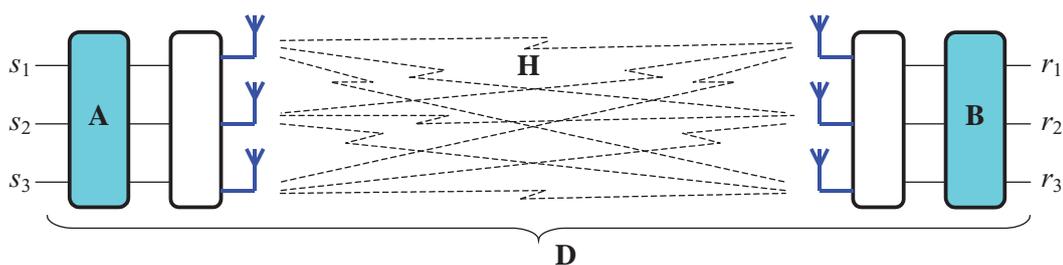
- Multiplicando en Tx por matriz **A** y en Rx por matriz **B**:



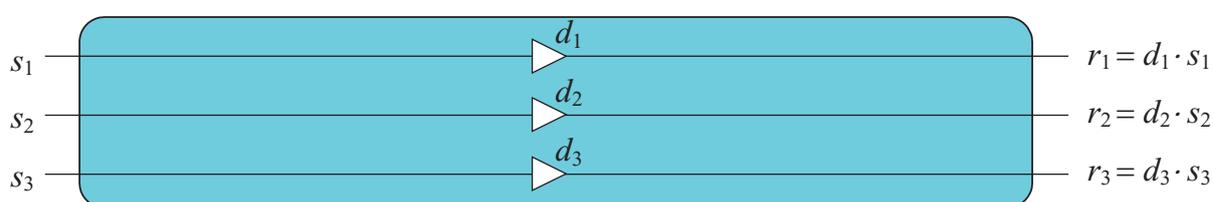
- La matriz equivalente del conjunto es **D** (diagonal)

Multiplexación espacial con canales muticamino

Canales fijos Rayleigh NLOS

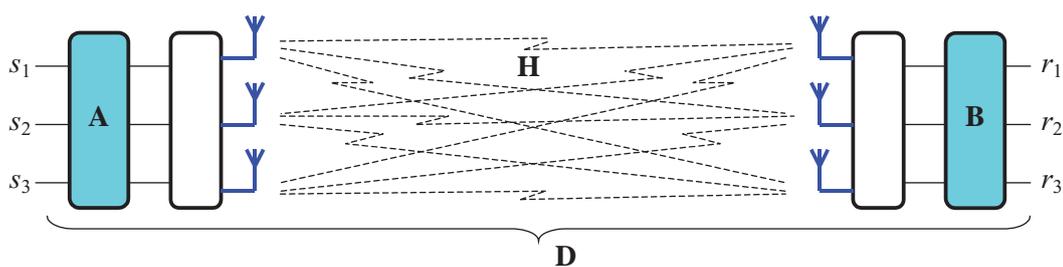


$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

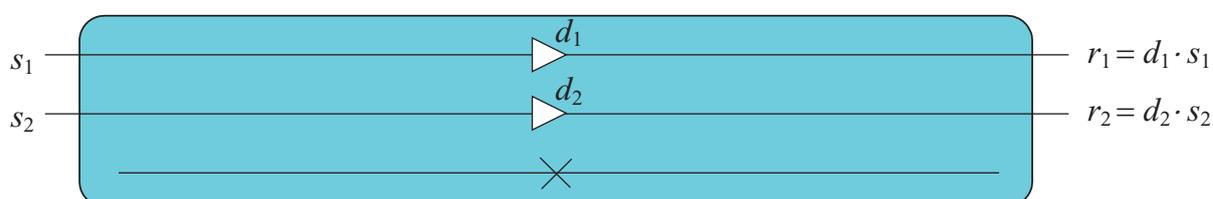


Multiplexación espacial con canales muticamino

Canales fijos Rayleigh NLOS Si rango < 3 D tiene elementos nulos

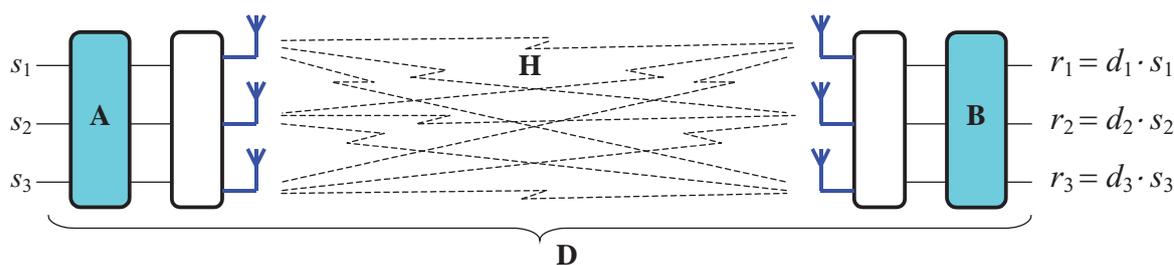


$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$



Multiplexación espacial con canales muticamino

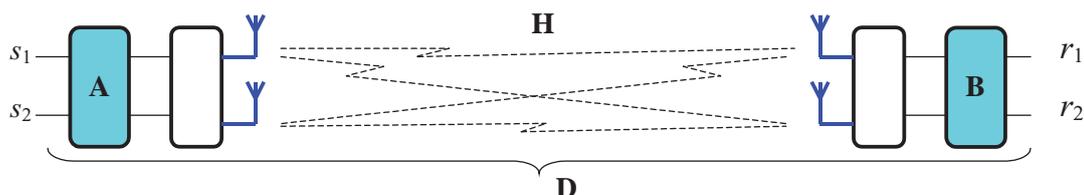
Canales fijos Rayleigh NLOS



- Gracias a la precodificación (**A**) y la postcodificación (**B**) ...
... se pueden transmitir tantas señales como el rango de **H** ...
... y separarlas en recepción
- Esta técnica se denomina **multiplexación espacial MIMO**
- El transmisor necesita conocer la matriz **A**
- No es posible si hay visión directa (LOS) o las antenas están muy juntas
(rango **H** = 1)

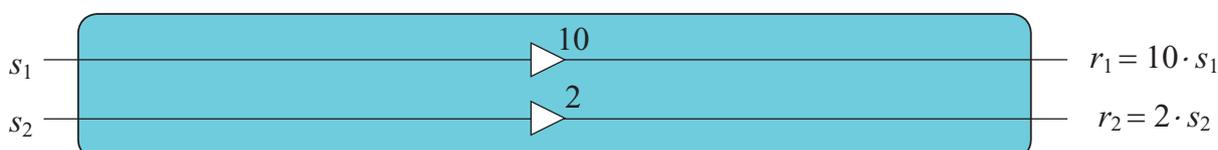
Multiplexación espacial con canales muticamino

Ejemplo



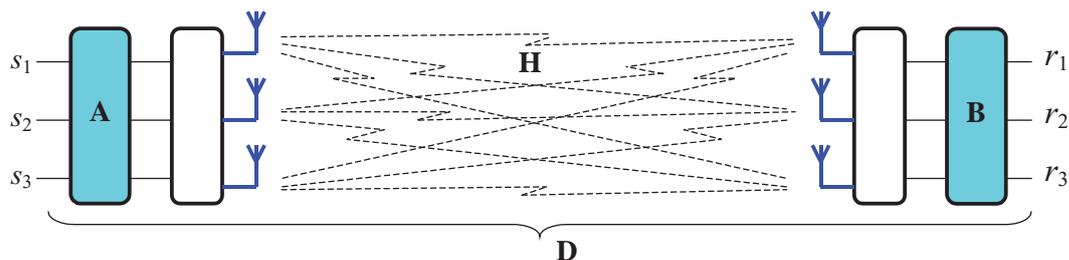
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Multiplexación espacial con canales muticamino

Precodificación imperfecta



- Es difícil calcular y usar valores exactos de **A** y **B**
- Con valores aproximados se tiene **Interferencia entre Canales (ICI)**

$$r_i = \sum_j d_{ij} \cdot s_j = d_{ii} \cdot s_i + \underbrace{\sum_{j \neq i} d_{ij} \cdot s_j}_{\text{ICI}} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} \end{pmatrix}$$

- Se admiten valores pequeños de d_{ij} $i \neq j$ (ej.: potencia comparable al_ruido)
- Sólo si $d_{ij} = 0$ $i \neq j$ no hay ICI

¿efecto del ruido?

Receptores para sistemas MIMO

Sistemas MIMO sin precodificación

Receptor ZF (solución LS)

Receptor MMSE (solución MMSE)

Sistemas MIMO con precodificación

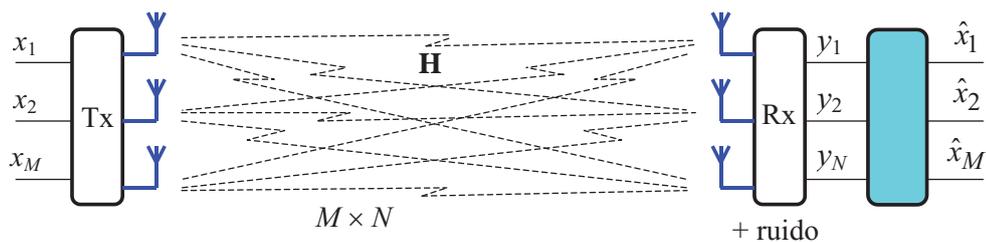
Precodificación ideal (SVD)

Capacidad del canal MIMO

Precodificación aproximada

Receptores para sistemas MIMO

Sistemas MIMO sin precodificación



El número de antenas puede ser distinto en cada extremo: M, N

entrada $\mathbf{x} = [x_1, x_1, \dots, x_M]^T$ observación / salida $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$

ruido $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T$ estimación $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M]^T$

muestras de ruido

- independientes
- de igual potencia σ^2

$$E[\mathbf{n} \mathbf{n}^H] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad \hat{\mathbf{x}}?$$

\mathbf{y} : interferencia + ruido

Sistemas MIMO sin precodificación

$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$

 $\hat{\mathbf{x}}?$

receptor lineal

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{y}$

 $\mathbf{F}?$

Receptor lineal de mínimos cuadrados (LS *Least Square*)

$\hat{\mathbf{x}}$ que minimiza el error cuadrático de la observación \mathbf{y} $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}\|$

Solución $\mathbf{F} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$ (seudoinversa)

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{y} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}) = \mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{n}$ **ZF zero-forcing**
solución exacta en ausencia de ruido
elimina la interferencia entre canales

Si \mathbf{H} es cuadrada y tiene inversa $\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1}$ (inversa)

Problema: **amplificación de ruido**

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{n} = \mathbf{x} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{n}$$

Canales con poca ganancia \rightarrow valores pequeños de h_{ij} \rightarrow valores grandes de \mathbf{H}^{-1} \rightarrow
 \rightarrow amplifican ruido en otros canales

Sistemas MIMO sin precodificación

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}} \quad \hat{\mathbf{x}}? \quad \text{receptor lineal} \quad \boxed{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{y}} \quad \mathbf{F}?$$

Receptor lineal de mínimo error cuadrático medio (MMSE)

$\hat{\mathbf{x}}$ que minimiza la esperanza del error cuadrático de la estimación $\hat{\mathbf{x}} \quad E\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$

Solución $\mathbf{F} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{D}_\sigma)^{-1} \mathbf{H}^H$

siendo $\mathbf{D}_\sigma = \text{diag}(\sigma^2/P_i)$ y

P_i las potencias transmitidas

La matriz diagonal $\mathbf{D}_\sigma = \text{diag}(\sigma^2/P_i)$ reduce la amplificación de ruido al invertir

Con el receptor ZF:

$E\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$ es mayor y puede ser muy grande si hay valores pequeños de ganancia

Sistemas MIMO sin precodificación

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}} \quad \hat{\mathbf{x}}? \quad \text{receptores lineales} \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{y}$$

ZF LS	MMSE
mínimos cuadrados	mínimo error cuadrático medio
minimiza: error cuadrático de la observación \mathbf{y}	minimiza: esperanza del error cuadrático de la estimación $\hat{\mathbf{x}}$
$\min\ \mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}\ $	$\min E\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\ $
$(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$	$(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \text{diag}(\sigma^2/P_i))^{-1} \mathbf{H}^H$
elimina interferencia amplifica el ruido	minimiza interferencia + ruido

Receptores para sistemas MIMO

Sistemas MIMO sin precodificación

Receptor ZF (solución LS)

Receptor MMSE (solución MMSE)

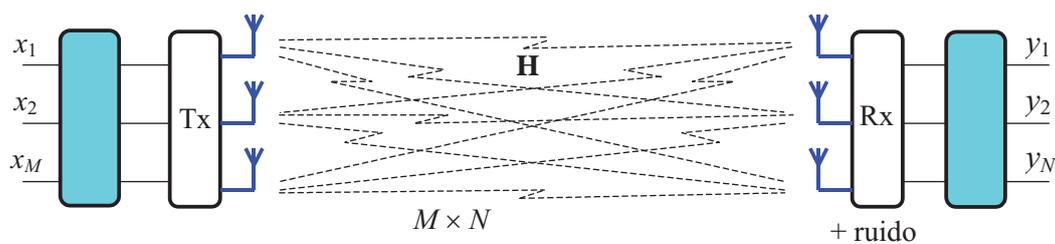
Sistemas MIMO con precodificación

Precodificación ideal (SVD)

Capacidad del canal MIMO

Precodificación aproximada

Sistemas MIMO con precodificación



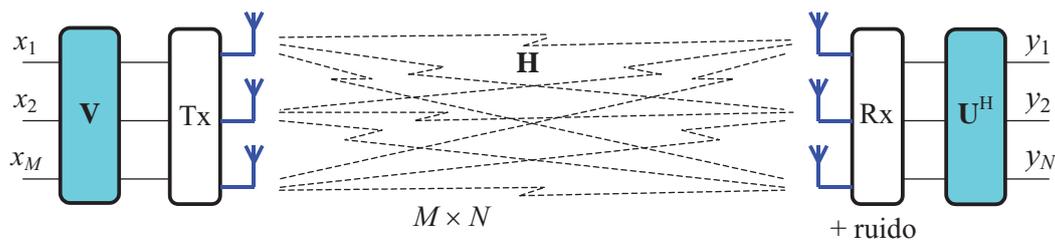
Descomposición en valores singulares (SVD *Singular Value Decomposition*)

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$$

\mathbf{U} \mathbf{V} matrices ortogonales unitarias $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_M$ $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I}_N$
 $\mathbf{\Sigma}$ valores singulares $M \times N$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas MIMO con precodificación - SVD



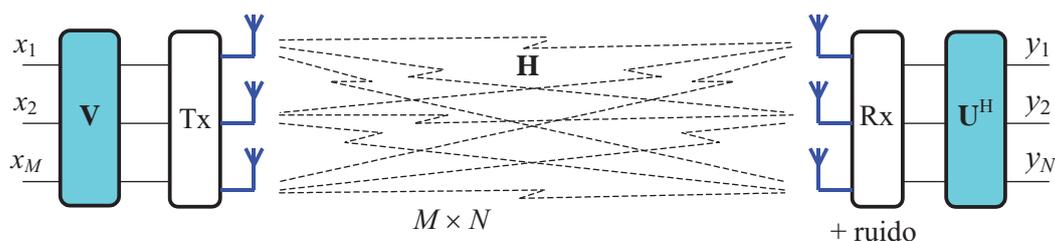
La precodificación no cambia las potencias transmitidas (\mathbf{V} es unitaria)

Canal equivalente $\mathbf{U}^H \mathbf{H} \mathbf{V} = \mathbf{U}^H (\mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H) \mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}$ diagonal: sin interferencia

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Número de valores singulares: $\max(M, N)$ = número de canales
- Número de valores singulares $\neq 0$ = número de canales útiles (ganancia > 0)

Sistemas MIMO con precodificación - SVD



Caso $M = N$

$$\mathbf{y} = (\text{señal} + \text{ruido}) = \mathbf{\Sigma} \mathbf{x} + \mathbf{U}^H \mathbf{n} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{x} + \mathbf{n}_e$$

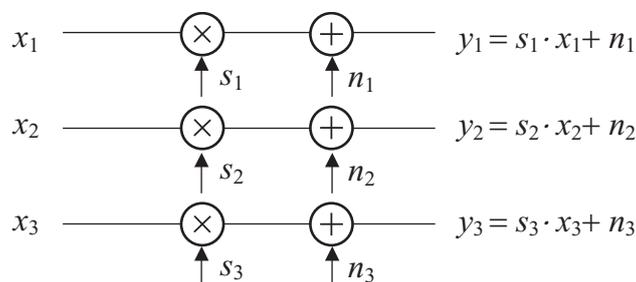
Ruido equivalente: $\mathbf{n}_e = \mathbf{U}^H \mathbf{n}$ también muestras independientes y de igual potencia

$$\begin{aligned} E[\mathbf{n}_e \mathbf{n}_e^H] &= E[(\mathbf{U}^H \mathbf{n}) (\mathbf{U}^H \mathbf{n})^H] = E[\mathbf{U}^H \mathbf{n} \mathbf{n}^H \mathbf{U}] = \\ &= \mathbf{U}^H E[\mathbf{n} \mathbf{n}^T] \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \sigma^2 \mathbf{I} \mathbf{U} = \sigma^2 \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

Sistemas MIMO con precodificación - SVD

Sistema equivalente

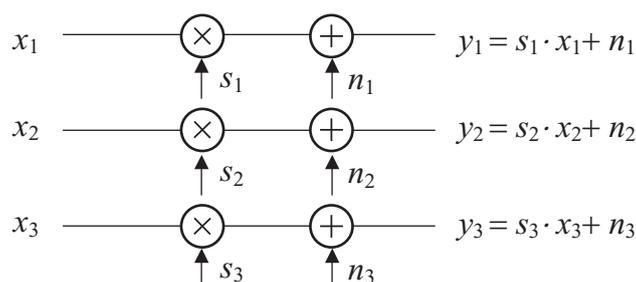
$$\mathbf{y} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{x} + \mathbf{n}_e \quad \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\mathbf{s}) \quad E[\mathbf{n}_e \mathbf{n}_e^H] = \sigma^2 \mathbf{I}$$



- Los canales se desacoplan (se elimina la interferencia)
- La precodificación (\mathbf{V} unitaria) no cambia las potencias transmitidas
- La postcodificación (\mathbf{U}^H unitaria) no cambia el ruido
(independientes y de igual potencia)

Sistemas MIMO con precodificación - SVD

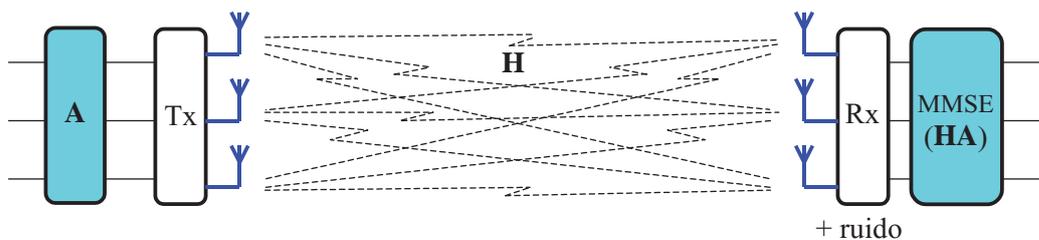
Sistema equivalente - Capacidad



- Si el ruido es gaussiano: canales gaussianos independientes potencia σ^2
- Para potencias transmitidas P_i ...
... la **capacidad agregada** de los “canales” MIMO es

$$C = \sum_i C_i = \sum_i \log_2 \left(1 + \frac{P_i \cdot |s_i|^2}{\sigma^2} \right) \quad C = \sum_i \log_2 (1 + \gamma_i)$$

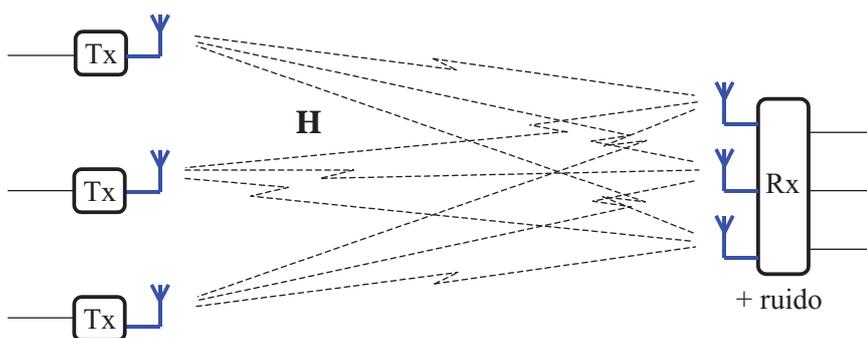
Multiplexación espacial - MIMO



Caso práctico 1

- Precodificación aproximada (\sim SVD): \mathbf{A} (ortogonal unitaria: $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{I}$)
- Canal MIMO equivalente $\mathbf{H} \mathbf{A}$
- Receptor MMSE para el canal $\mathbf{H} \mathbf{A}$

Multiplexación espacial - MIMO



Caso práctico 2

- **Multiacceso Enlace ascendente (UL *UpLink*)**
- No es posible la precodificación
- Receptor MMSE

Multiuser MIMO

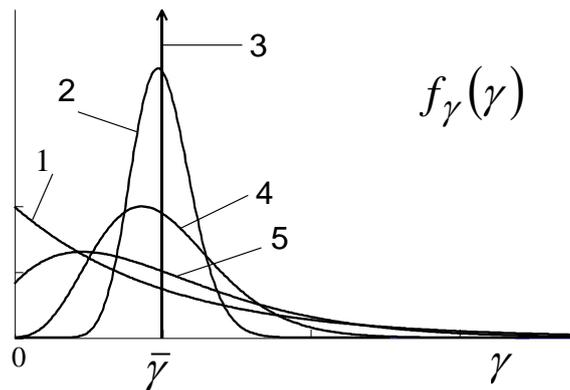
5.1

Rellene la siguiente tabla con los valores de ancho de banda de coherencia (B_c), tiempo de coherencia (T_c) y longitud de onda (λ) para los casos que se indican de F_c (frecuencia de portadora), τ (duración de la respuesta al impulso) y v (velocidad del terminal)

	F_c	τ	v	B_c	T_c	λ
Caso 1	100 MHz	80 μ s	5 km/h			
Caso 2	500 MHz	10 μ s	5 km/h			
Caso 3	500 MHz	20 μ s	100 km/h			
Caso 4	1 GHz	5 μ s	5 km/h			
Caso 5	1 GHz	20 μ s	100 km/h			
Caso 6	5 GHz	2 μ s	1 km/h			
Caso 7	10 GHz	2 μ s	1 km/h			

5.2

En la figura se muestran varias funciones densidad de probabilidad de la relación señal a ruido de canales aleatorios multicamino.



- ¿Cual de ellos puede corresponder a un canal sin visión directa ?
- ¿Cual de ellos corresponde a un canal con visión directa única sin reflexiones
- Ordene los canales de mayor a menor valor del factor K (relación entre potencias recibidas con visión directa y reflejada)

5.3

Un sistema de transmisión de banda estrecha 4-QAM se diseña para usar canales multicamino fijos sin visión directa (Rayleigh). Se desea que tenga una calidad de la transmisión correspondiente a una probabilidad de error de bit $P_b = 10^{-3}$.

- a) ¿Se puede tener certeza de obtener esa calidad?
- b) ¿Cuál debe ser la relación señal-ruido media para que la probabilidad de obtener esa calidad sea superior al 99%?
- c) Repita el ejercicio para las siguientes combinaciones de datos

4-QAM	$P_b = 10^{-2}$
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$

5.4

Un sistema de transmisión de banda estrecha 4-QAM se diseña para usar canales multicamino móviles sin visión directa (Rayleigh). Se desea que tenga una calidad de la transmisión correspondiente a una probabilidad de error de bit $P_b = 10^{-2}$. La frecuencia de la portadora es 2 GHz. El terminal se mueve a 100 km/h. El sistema transmite bloques de 4.000 bits a una velocidad de símbolo de 100 kilobaudios.

- a) ¿Cuál es el tiempo de coherencia del canal?
- b) ¿Cuál es la velocidad binaria de transmisión?
- c) ¿Cuál es el tiempo que se tarda en transmitir un bloque de bits?
- d) ¿Cuál es el número medio de bits erróneos por bloque que puede esperarse?
- e) ¿Cuál debe ser la relación señal-ruido media para obtener ese número de errores por bloque?

5.5

Repita el ejercicio 5.3 añadiendo diversidad en recepción con 2 antenas y combinación por selección (SC). Considere los siguientes casos e indique para cada uno la relación señal-ruido media necesaria (para tener es P_b con probabilidad del 99%):

2 antenas

4-QAM	$P_b = 10^{-3}$
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$

5.6

Repita el ejercicio 5.5 para el caso de 3 antenas

3 antenas

4-QAM	$P_b = 10^{-3}$
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$

5.7

Repita los ejercicios 5.3, 5.5 y 5.6 para que se tenga P_b con probabilidad del 99,9%

2 antenas

4-QAM	$P_b = 10^{-3}$
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$

2 antenas

4-QAM	$P_b = 10^{-3}$
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$

3 antenas

4-QAM	$P_b = 10^{-3}$
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$

5.8

Un sistema de transmisión de banda estrecha usa una modulación 4-QAM, entrelazado matricial y codificación convolucional. La longitud de los bloques de entrelazado es suficiente para que se pueda aproximar la tasa de errores en cada bloque a la esperanza (promedio en el conjunto de la distribución de la SNR).

- Calcule la SNR media de la señal recibida para que la tasa binaria de errores de los bits codificados sea $P_{b-c} = 10^{-2}$. [valores aproximados de las gráficas]
- Repita el apartado a) con la fórmula aproximada del comportamiento asintótico y compare con los valores de las gráficas. [Para 4-QAM: $\alpha_M = 2$ $\beta_M = 1$]
- Repita los apartados a) y b) para sea $P_{b-c} = 10^{-3}$

5.9

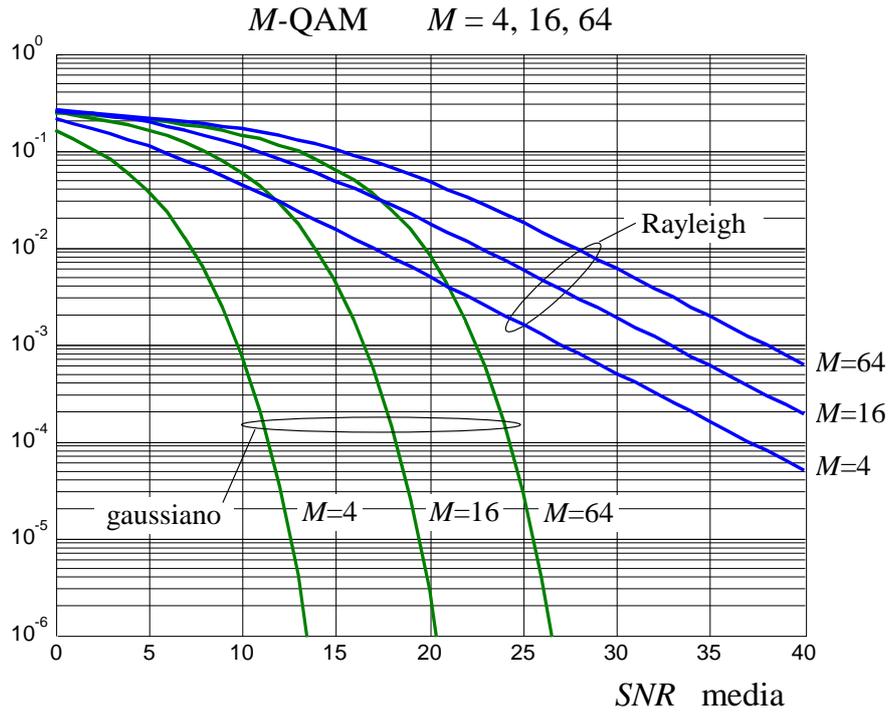
Un sistema MIMO transmite igual potencia P por cada antena. En recepción la varianza del ruido en ambas entradas es σ^2 . La matriz del canal es la siguiente:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

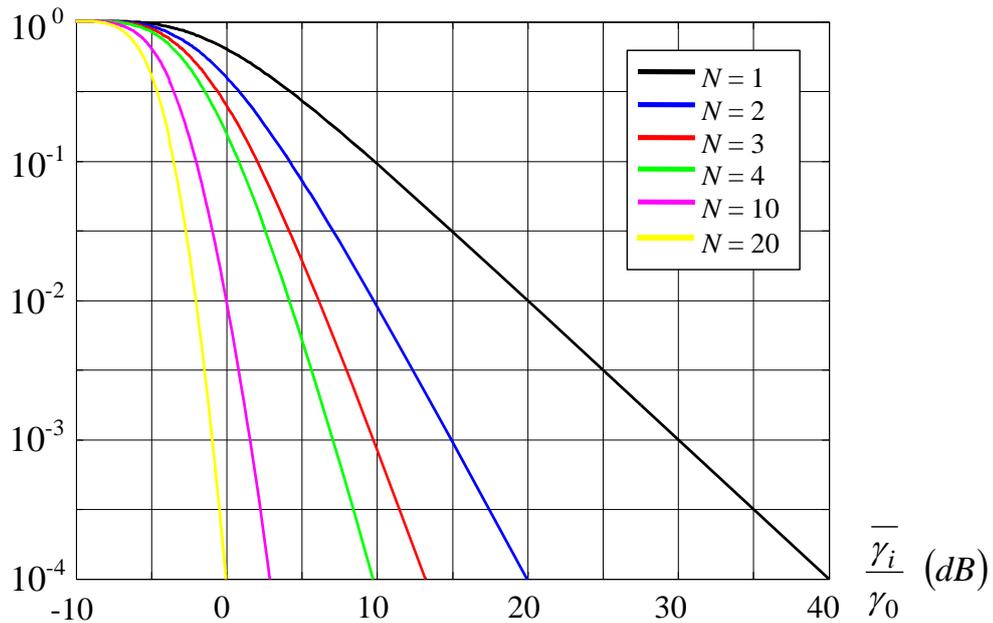
- Calcule el receptor ZF
- Calcule los receptores MMSE para P/σ^2 5dB y 30dB y compárelos con el receptor ZF
- Calcule la precodificación ideal por descomposición en valores singulares

[Puede usar MATLAB con las siguientes funciones: `inv` `eye` `svd`]

Esperanza de la probabilidad de error de bit



Canal Rayleigh Probabilidad de interrupción SC



Nota

Se pueden usar las gráficas o las expresiones asintóticas para SNR grandes, por ejemplo, para el cálculo de márgenes de desvanecimiento:

$$\frac{\bar{\gamma}_i}{\gamma_0} \rightarrow \infty \quad P_{out} \rightarrow \left(\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}_i} \right)^N$$

o

$$P_{out} = (\text{margen})^{-N}$$

$$\text{margen} = (P_{out})^{-1/N}$$

$$\text{margen(dB)} = 10 \log_{10}(\text{margen}) = -10 (1/N) \log_{10} (P_{out}) = -10 \log_{10} (P_{out}) / N$$

5.1

	F_c	τ	v	B_c	T_c	λ
Caso 1	100 MHz	80 μ s	5 km/h	12,5 kHz	2,16 s	3 m
Caso 2	500 MHz	10 μ s	5 km/h	100 kHz	432 ms	60 cm
Caso 3	500 MHz	20 μ s	100 km/h	50 kHz	21,6 ms	60 cm
Caso 4	1 GHz	5 μ s	5 km/h	200 kHz	216 ms	30 cm
Caso 5	1 GHz	20 μ s	100 km/h	50 kHz	10,8 ms	30 cm
Caso 6	5 GHz	2 μ s	1 km/h	500 kHz	216 ms	6 cm
Caso 7	10 GHz	2 μ s	1 km/h	500 kHz	108 ms	3 cm

5.2

- a) 1
- b) 3
- c) 3 2 4 5 1

5.3

- a) NO, ya que la probabilidad de error de bit depende de la ganancia del canal y ésta no se conoce con certeza
- b)

	$P_b = 10^{-3}$	γ_0	margen	γ_{media}
4-QAM		10	20	30

- c) Repita el ejercicio para las siguientes combinaciones de datos

	$P_b = 10^{-2}$	γ_0	margen	γ_{media}
4-QAM		7,5	20	27,5
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$	16,5	20	36,5
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$	14	20	34

5.4

- a) 5,4 ms
- b) 200 kbit/s
- c) 20 ms (~ 4 veces el tiempo de coherencia)
 la media de errores en un bloque será similar a la media en el conjunto (esperanza) para canal Rayleigh
- d) 40
- e) 17 dB (para $P_b =$ esperanza de la probabilidad de error con canal Rayleigh)

5.5

Disponibilidad 99% 2 antenas

		γ_0	margen	γ_{media}
4-QAM	$P_b = 10^{-3}$	10	10	20
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$	7,5	10	17,5
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$	16,5	10	26,5
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$	14	10	24

5.6

Disponibilidad 99% 3 antenas

		γ_0	margen	γ_{media}
4-QAM	$P_b = 10^{-3}$	10	6,6	16,6
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$	7,5	6,6	14,1
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$	16,5	6,6	23,1
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$	14	6,6	20,6

5.7

Disponibilidad 99,9%

1 antena

		γ_0	margen	γ_{media}
4-QAM	$P_b = 10^{-3}$	10	30	10
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$	7,5	30	37,5
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$	16,5	30	46,5
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$	14	30	44

2 antenas

		γ_0	margen	γ_{media}
4-QAM	$P_b = 10^{-3}$	10	15	25
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$	7,5	15	22,5
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$	16,5	15	31,5
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$	14	15	29

3 antenas

		γ_0	margen	γ_{media}
4-QAM	$P_b = 10^{-3}$	10	10	20
4-QAM	$P_b = 10^{-2}$	7,5	10	17,5
16-QAM	$P_b = 10^{-3}$	16,5	10	26,5
16-QAM	$P_b = 10^{-2}$	14	10	24

5.8

a) 17 dB (canal Rayleigh 4-QAM)

$$b) P_s = \frac{\alpha_M}{2\beta_M} \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{P_s} = \frac{1}{2P_b} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} \quad \bar{\gamma}(dB) = -3dB + 20dB = 17dB$$

c) Graficas: 27 dB (canal Rayleigh 4-QAM)

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{P_s} = \frac{1}{2P_b} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \quad \bar{\gamma}(dB) = -3dB + 30dB = 27dB$$

5.9

```
H=[2 3
    3 2];
```

```
% a)
```

```
HrZF1=inv(H'*H)*H'
```

```
HrZF2=inv(H) % al ser cuadrada se puede calcular también con la inversa
```

```
% b)
```

```
P_s2dB =5;
```

```
s2_P=10^-(P_s2dB/10);
```

```
HrMMSE1=inv(H'*H + s2_P*eye(2))*H'
```

```
P_s2dB =30;
```

```
s2_P=10^-(P_s2dB/10);
```

```
HrMMSE2=inv(H'*H + s2_P*eye(2))*H'
```

```
% c)
```

```
[U,S,V] = svd(H);
```

```
disp('U''')
```

```
disp(U')
```

Resultados:

```
HrZF1 =
```

```
-0.4000    0.6000
    0.6000   -0.4000
```

```
HrZF2 =
```

```
-0.4000    0.6000
    0.6000   -0.4000
```

```
HrMMSE1 =
```

```
-0.2811    0.4786
    0.4786   -0.2811
```

```
HrMMSE2 =
```

```
-0.3995    0.5995
    0.5995   -0.3995 (más parecido al ZF al ser grande la SNR)
```

```
U'
```

```
-0.7071   -0.7071
 -0.7071    0.7071
```