

Análisis Estadístico de Formas Cuadráticas Gaussianas Complejas No Centrales

Pablo Ramírez Espinosa⁽¹⁾, José F. Paris⁽¹⁾, José A. Cortés⁽¹⁾, Eduardo Martos Naya⁽¹⁾
pre@ic.uma.es, paris@ic.uma.es, jaca@ic.uma.es, eduardo@ic.uma.es

⁽¹⁾Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones, Universidad de Málaga. Avda. Cervantes, 2. 29071, Málaga.

Resumen—En este artículo se presenta un nuevo enfoque al análisis estadístico de las formas cuadráticas gaussianas complejas (FCGC) indefinidas y no centrales. Este nuevo enfoque se basa en el estudio de una variable aleatoria auxiliar llamada forma cuadrática confluyente, cuyo análisis es más sencillo pudiendo calcular sus estadísticos de primer orden en términos de funciones elementales. A partir de los estadísticos de la nueva variable es posible obtener, bajo ciertas condiciones, los de la FCGC original, dando como resultados expresiones simples de usar para cálculos analíticos posteriores. Finalmente, las expresiones obtenidas se emplean para estudiar la probabilidad de *outage* en sistemas donde se aplica combinación por razón máxima (MRC) sobre canales con *fading* y correlación arbitraria.

I. INTRODUCCIÓN

La caracterización estadística de formas cuadráticas gaussianas complejas (FCGC) es de suma importancia al analizar las prestaciones de numerosas técnicas de comunicaciones inalámbricas entre las que se incluyen técnicas de diversidad como combinación por razón máxima (MRC) [1], combinación óptima [2] o *beamforming* [3]; así como modulaciones no coherentes [4] y codificación ortogonal en el espacio y el tiempo (OSTBC) [5], entre otras. Debido al gran número de aplicaciones, en las últimas décadas se han realizado considerables esfuerzos por analizar las FCGCs [6]–[10]. Sin embargo, la complejidad del problema hace que en la bibliografía sólo se presenten resultados aproximados difíciles de manejar y poco adecuados para cálculos posteriores.

La función característica de las formas cuadráticas indefinidas se da por primera vez en [6], donde ya se discute la dificultad de obtener la función densidad de probabilidad (PDF) en el caso no central debido a la complicada naturaleza de dicha función característica. En [7] se analizan las formas cuadráticas definidas positivas, expresando su PDF como una serie infinita en términos de polinomios de Laguerre para el caso central y de distribuciones χ^2 para el caso no central. Un resultado más general se da en [9], donde se analizan las formas indefinidas, expandiendo la PDF en series de Laurent y Taylor demasiado complejas de manipular. Un caso particular de FCGC de utilidad en tests de hipótesis binaria se analiza en [8], pero no se da ningún resultado válido para el caso general. Recientemente, en [10] se presenta un nuevo enfoque al problema donde, en lugar de invertir la función característica, se trabaja con la función de distribución (CDF) en forma integral aproximando la misma mediante la técnica de *saddle point* [11]. Sin embargo, los resultados obtenidos siguen siendo difíciles de manipular.

Motivado por la complejidad de los resultados presentes en la bibliografía, los cuales no son tratables matemáticamente a la hora de abordar cálculos posteriores en la mayoría de situaciones, en este artículo se propone un nuevo enfoque

al análisis de las FCGC indefinidas no centrales. Esta nueva aproximación se basa en el estudio de una nueva variable aleatoria auxiliar, a la que llamaremos forma cuadrática confluyente, en vez de abordar directamente el análisis de la FCGC original. La nueva variable presenta un análisis más sencillo, y permite obtener sus estadísticos de forma cerrada en término de funciones elementales. Posteriormente, a partir de estos estadísticos, y bajo ciertas condiciones, se obtendrán los de la forma cuadrática original, dando como resultado expresiones más sencillas de manipular y de usar para futuros análisis.

El presente artículo se estructura como sigue. En la sección II se presenta la notación y algunos conceptos previos sobre formas cuadráticas gaussianas. En la sección III se presenta el nuevo enfoque de análisis basado en el estudio de las formas confluentes. Los resultados obtenidos se ejemplifican en la sección IV mediante el estudio de la probabilidad de *outage* en MRC sobre canales correlados. Finalmente, en la sección V se presentan algunas conclusiones.

II. PRELIMINARES

A. Notación y definiciones previas

A lo largo de este artículo se empleará la siguiente notación. El símbolo \sim significa *estadísticamente distribuido como*. Las matrices y los vectores son representados en negrita con letras mayúsculas y minúsculas, respectivamente. La matriz $\mathbf{0}_{p \times q}$ simboliza una matriz de dimensiones $p \times q$ cuyos elementos son todos nulos. Por otro lado, el superíndice $(\cdot)^\dagger$ indica matriz hermítica y $(\cdot)_b$ denota el símbolo de Pochhammer. Además, $u(\cdot)$ es la función escalón unitario cuyo valor es 1 para argumentos no negativos y 0 en otro caso. $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo cuyo valor es 1 para argumentos no negativos y -1 para argumentos negativos. Finalmente, se define a continuación una distribución estadística que será de utilidad a lo largo del presente trabajo.

Definición 1 (Distribución gamma): Sea X una variable aleatoria real que sigue una distribución gamma con parámetros $k \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \mathbb{R}^+$, i.e. $X \sim \Gamma(k, \theta)$. Entonces, la PDF de X viene dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta}, \quad (1)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma.

B. Formas cuadráticas gaussianas complejas

Definición 2 (FCGC): Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ un vector aleatorio que sigue una distribución normal multivariante con media nula y matriz de covarianza $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, i.e. $\mathbf{v} \sim \mathcal{CN}_n(\mathbf{0}_{n \times 1}, \mathbf{L})$, y sea $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ un vector constante y una matriz

hermítica e indefinida, respectivamente. Entonces, la variable aleatoria

$$Q = (\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}})^\dagger \mathbf{A} (\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}) \quad (2)$$

es una FCGC indefinida y no central.

Si todas las entradas de $\bar{\mathbf{v}}$ son nulas, i.e. $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$, entonces se dice que Q es una FCGC central [12]. Igualmente, si la matriz \mathbf{A} es definida positiva o negativa (o semidefinida) entonces se dice que la forma cuadrática Q también lo es.

A diferencia de las funciones de probabilidad, la función generadora de momentos (MGF) de Q sí puede obtenerse de forma analítica. A partir de [13, eq. (12)], la MGF de Q se expresa como

$$M_Q(s) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp\left(\frac{\lambda_i \mu_i s}{1 - \lambda_i s}\right)}{1 - \lambda_i s}, \quad (3)$$

donde λ_i para $i = 1, \dots, n$ son los autovalores de $\mathbf{L}\mathbf{A}$ y $\mu_i = [\mathbf{U}^{-1} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}]_{i,i}$, donde \mathbf{U} es la matriz modal de $\mathbf{L}\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$ con $\mathbf{\Lambda}$ la matriz diagonal cuyos elementos son λ_i .

La dificultad de obtener la PDF de Q a partir de su MGF viene dado por la presencia del término exponencial en (3), el cual impide el cálculo directo de la transformada inversa de Laplace de $M_Q(s)$. Nótese que este término exponencial es fruto de la no centralidad de la forma cuadrática en (2). Si $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$, entonces $\mu_i = 0 \forall i$, desapareciendo el término exponencial y simplificando considerablemente el análisis estadístico de Q .

III. FORMAS CUADRÁTICAS GAUSSIANAS COMPLEJAS CONFLUENTES

En lugar de analizar directamente la FCGC dada en (2), se va a caracterizar una nueva variable aleatoria a la que vamos a denominar como forma confluyente, cuyo análisis nos va a permitir caracterizar la forma cuadrática original. En esta sección se presenta tanto la definición de las formas cuadráticas confluentes como su análisis estadístico, así como las condiciones necesarias para caracterizar Q a partir de esta nueva variable.

Definición 3 (FCGC confluyente): Considérese la FCGC dada en (2) y sea ξ una variable aleatoria tal que $\xi^2 \sim \Gamma(m, 1/m)$ con $\mathbb{E}[\xi^2] = 1$. Entonces, la variable aleatoria

$$Q_m = (\mathbf{v} + \xi \bar{\mathbf{v}})^\dagger \mathbf{A} (\mathbf{v} + \xi \bar{\mathbf{v}}) \quad (4)$$

es una FCGC confluyente.

Como se observa en (4), se añade una fluctuación aleatoria al vector constante $\bar{\mathbf{v}}$. Dicha aleatorización, al contrario de lo que pueda parecer, simplifica sustancialmente el análisis de la forma cuadrática. Igualmente, cuando $m \rightarrow \infty$, (4) converge a (2) ya que la variable ξ se convierte en una constante de valor unidad. Esto se explica como sigue. Debido a que ξ^2 sigue una distribución Gamma, su PDF se va comprimiendo conforme m aumenta. En el límite, la PDF de ξ tiende a la función delta de Dirac centrada en $\mathbb{E}[\xi^2] = 1$ y por tanto ξ tiende a la unidad. Esta propiedad se mantiene también para la MGF y las funciones de probabilidad de Q_m , convergiendo los estadísticos de Q_m a los de Q cuando $m \rightarrow \infty$. En la práctica, esto implica emplear un valor de

m suficientemente alto. Por lo tanto, visto que es posible caracterizar Q a partir de la MGF, PDF y CDF de Q_m , calculamos en las siguientes proposiciones los estadísticos de la forma cuadrática confluyente Q_m .

Proposición 1: Considérese Q_m la FCGC confluyente dada en (4). Entonces, la MGF de Q_m viene dada por

$$M_{Q_m}(s) = \left(1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \mu_i s}{1 - \lambda_i s}\right)^{-m} \prod_{j=1}^n (1 - \lambda_j s)^{-1}. \quad (5)$$

Demostración: Partiendo de (3), el cálculo de la MGF de Q_m condicionada a ξ es inmediato, obteniendo

$$M_{Q_m|\xi}(s) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp\left(\frac{\xi^2 \lambda_i \mu_i s}{1 - \lambda_i s}\right)}{1 - \lambda_i s}. \quad (6)$$

La MGF sin condicionar puede obtenerse promediando (6) por la PDF de ξ^2 dada en (1), llegando a (5) tras aplicar [14, eq. 3.381 4]. ■

La fluctuación aleatoria añadida en (4) tiene como consecuencia la desaparición del término exponencial en (5). Nótese que, cuando $m \rightarrow \infty$, entonces (5) converge a (3). Este hecho se puede demostrar fácilmente tomando el límite en (5), donde aplicando la definición de la función exponencial se obtiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \mu_i s}{1 - \lambda_i s}\right)^{-m} = \exp\left(\frac{\lambda_i \mu_i s}{1 - \lambda_i s}\right). \quad (7)$$

A partir de la MGF, la PDF y la CDF de Q_m se calculan en las siguientes proposiciones.

Proposición 2: Considérese Q_m la FCGC confluyente dada en (4). Entonces, la PDF de Q_m viene dada por

$$f_{Q_m}(x) = \sum_{i=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{\hat{p}_i} \alpha_{i,j}(x) e^{-\beta_i x} x^{j-1}, \quad (8)$$

donde β_i para $i = 1, \dots, n_\beta$ son las raíces distintas del polinomio

$$P(s) = m \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i s) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k s \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (1 - \lambda_l s), \quad (9)$$

$\hat{p}_i = p_i m$ con p_i la multiplicidad de β_i y $\alpha_{i,j}(x)$ viene dado por

$$\alpha_{i,j}(x) = \frac{A_{i,j} \left(1 + \sum_{l=1}^n \mu_l / m\right)^{-m}}{(j-1)! \prod_{k=1}^n \lambda_k} u(\beta_i x) \operatorname{sgn}(x), \quad (10)$$

con $A_{i,j}$ dado en (11) al comienzo de la siguiente página donde $N = n_\beta + n$ y el índice del sumatorio denota que hay tantos sumandos como combinaciones distintas de k_1, \dots, k_{N-1} existen que cumplan $\sum_{t=1}^{N-1} k_t = \hat{p}_i - j$.

Demostración: La PDF de Q_m puede obtenerse como la transformada inversa de Laplace de $M_{Q_m}(-s)$. Para ello, se aplica una serie de manipulaciones algebraicas a (5) donde, tras realizar una descomposición en fracciones simples, se obtiene (8) sin más que aplicar los pares transformados dados en [15, Tabla 9.2]. El cálculo de los residuos $A_{i,j}$ se realiza a partir de [15, eq. (A.36)] aplicando la regla general de Leibniz. ■

$$A_{i,j} = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_{N-1}=\hat{p}_i-j \\ k_1,\dots,k_n \leq m-1}} \frac{1}{\prod_{q=1}^{N-1} k_q!} \prod_{t=1}^n \frac{\Gamma(m) \left(\frac{1}{\lambda_t} - \beta_i\right)^{m-k_t-1}}{\Gamma(m-k_t)} \prod_{r=1}^{i-1} \frac{(-1)^{k_r+n} (\hat{p}_r)_{k_r+n}}{(\beta_r - \beta_i)^{\hat{p}_r+k_r+n}} \prod_{l=i+1}^{n_\beta} \frac{(-1)^{k_l+n-1} (\hat{p}_l)_{k_l+n-1}}{(\beta_l - \beta_i)^{\hat{p}_l+k_l+n-1}}. \quad (11)$$

$$C_{i,j} = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_N=\hat{p}_i-j \\ k_1,\dots,k_n \leq m-1}} \frac{1}{\prod_{q=1}^N k_q!} \prod_{t=1}^n \frac{\Gamma(m) \left(\frac{1}{\lambda_t} - \beta_i\right)^{m-k_t-1}}{\Gamma(m-k_t)} \prod_{r=1}^{i-1} \frac{(-1)^{k_r+n} (\hat{p}_r)_{k_r+n}}{(\beta_r - \beta_i)^{\hat{p}_r+k_r+n}} \prod_{l=i+1}^{n_\beta} \frac{(-1)^{k_l+n-1} (\hat{p}_l)_{k_l+n-1}}{(\beta_l - \beta_i)^{\hat{p}_l+k_l+n-1}} \frac{k_N! (-1)^{k_N}}{(-\beta_i)^{1+k_N}}. \quad (12)$$

Proposición 3: Considérese Q_m la FCGC confluyente definida en (4). Entonces, la CDF de Q_m viene dada por

$$F_{Q_m}(x) = u(x) + \sum_{i=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{\hat{p}_i} \omega_{i,j}(x) e^{-\beta_i x} x^{j-1}, \quad (13)$$

donde $\omega_{i,j}(x)$ es calculado como

$$\omega_{i,j}(x) = \frac{C_{i,j} \left(1 + \sum_{l=1}^n \mu_l/m\right)^{-m}}{(j-1)! \prod_{k=1}^n \lambda_k} u(\beta_i x) \operatorname{sgn}(x), \quad (14)$$

con $C_{i,j}$ dado en (12) al comienzo de esta página.

Demostración: La CDF de Q_m se obtiene como la transformada inversa de $M_{Q_m}(-s)/s$ siguiendo los mismos pasos que en la prueba anterior. Igualmente, $C_{i,j}$ se obtienen a partir de [15, eq. (A.36)] del mismo modo que $A_{i,j}$. ■

La PDF y la CDF de Q_m dadas en (8) y (13) están expresadas en términos de funciones elementales (combinaciones de exponenciales y potencias), siendo ésta una de sus principales ventajas frente a otras expansiones en serie dadas en la bibliografía sustancialmente más complejas de manipular. Curiosamente, para valores negativos de x , tanto $\alpha_{i,j}(x)$ como $\omega_{i,j}(x)$ son cero para toda $i = 1, \dots, n_\beta$ tal que $\beta_i > 0$. Análogamente, para valores positivos de x dichas constantes son nulas para todo i que cumpla $\beta_i < 0$. Es decir, las raíces β_i positivas gobiernan el comportamiento de la PDF y la CDF para valores positivos de x y viceversa.

Sin embargo, el enfoque aquí presentado no es adecuado para valores altos de m ya que surgen problemas numéricos a la hora de evaluar las expresiones dadas para los residuos en (11) y (12). Centrándonos en estas expresiones, se observa una doble tendencia con m . En primer lugar, el número de combinaciones (términos del sumatorio) crece exponencialmente con m , derivando en el problema conocido como explosión combinatoria. Por otro lado, al aparecer m en los distintos exponentes, se pueden producir importantes errores numéricos conforme m aumenta, ya que cualquier pequeño error numérico producido se multiplica debido a los elevados exponentes. Por tanto, el enfoque aquí presentado, aunque teóricamente válido, no es útil para la evaluación numérica con valores elevados de m .

IV. PROBABILIDAD DE OUTAGE EN MRC CON CORRELACIÓN ARBITRARIA

En esta sección se emplean las expresiones teóricas derivadas anteriormente para analizar la probabilidad de *outage* en

sistemas MRC sobre canales correlados.

A. Modelo de sistema

La señal recibida por cada una de las ramas puede expresarse como

$$r_k = g_k s + w_k, \quad (15)$$

donde s es el símbolo complejo transmitido, w_k denota ruido aditivo blanco y gaussiano (AWGN) con media cero y densidad espectral de potencia N_0 y g_k para $k = 1, \dots, P$ son los elementos del vector de ganancias del canal $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{P \times 1}$ que sigue una distribución multivariante normal tal que $\mathbf{g} \sim \mathcal{CN}_P(\bar{\mathbf{g}}, \Sigma)$, con P el número de antenas empleadas y Σ la matriz de covarianzas. Asumiendo sincronización de símbolo y estimación de canal ideales, la señal a la salida del receptor al aplicar MRC viene dada por

$$r_{out} = \sum_{k=1}^P r_k \frac{g_k^\dagger}{\mathbf{g}^\dagger \mathbf{g}} = s + \sum_{k=1}^P \frac{g_k^\dagger w_k}{\mathbf{g}^\dagger \mathbf{g}}, \quad (16)$$

y la señal relación a ruido (SNR) a la salida queda

$$\gamma = \frac{E_s}{N_0} \mathbf{g}^\dagger \mathbf{g}, \quad (17)$$

donde E_s es la energía por símbolo. Dado que (17) es una FCGC, se va a analizar empleando el nuevo enfoque presentado en este artículo. Para ello, definimos la variable aleatoria confluyente auxiliar γ_m tal y como se indica en (4), quedando

$$\gamma_m = \frac{E_s}{N_0} (\mathbf{z} + \xi \bar{\mathbf{g}})^\dagger (\mathbf{z} + \xi \bar{\mathbf{g}}), \quad (18)$$

con $\mathbf{z} \sim \mathcal{CN}_P(\mathbf{0}_{P \times 1}, \Sigma)$.

B. Probabilidad de outage

Definiendo γ_u como la mínima SNR necesaria para un servicio, la probabilidad de *outage* viene dada por [16, eq. (6.46)]. Siguiendo el enfoque aquí presentado, analizamos la variable γ_m en lugar de γ , quedando por tanto

$$P_{out}(\gamma_u) = P(\gamma_m < \gamma_u) = \int_0^{\gamma_u} f_{\gamma_m}(\gamma_m) d\gamma_m, \quad (19)$$

que corresponde con la definición de la CDF de γ_m , la cual se obtiene de forma inmediata escalando por $\gamma_0 = E_s/N_0$ y sustituyendo en (13), llegando a

$$P_{out}(\gamma_u) = 1 + \sum_{i=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{\hat{p}_i} \omega_{i,j} e^{-\beta_i \gamma_u / \gamma_0} (\gamma_u / \gamma_0)^{j-1}, \quad (20)$$

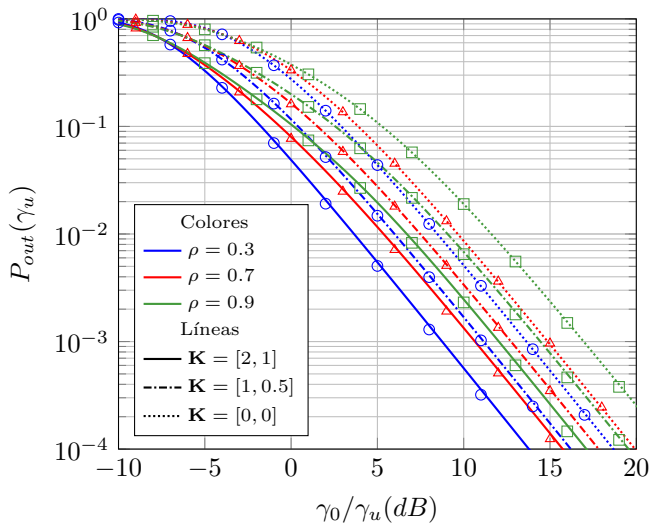


Fig. 1. P_{out} en función de γ_0/γ_u para $P = 2$ y distintos valores de ρ y K . Las líneas sólidas corresponden con los cálculos teóricos mientras que las marcas corresponden con simulaciones de Monte Carlo. Los valores de m empleados para la simulación son $m \in [1, 25]$.

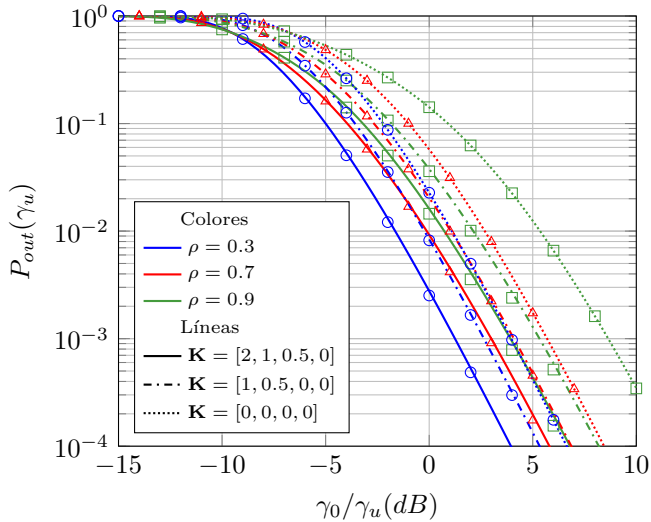


Fig. 2. P_{out} en función de γ_0/γ_u para $P = 4$ y distintos valores de ρ y K . Las líneas sólidas corresponden con los cálculos teóricos mientras que las marcas corresponden con simulaciones de Monte Carlo. Los valores de m empleados para la simulación son $m \in [1, 25]$.

donde, al ser γ_m definida positiva, $u(\cdot)$ y $\text{sgn}(\cdot)$ desaparecen de (14).

El resultado en (20) se emplea para evaluar P_{out} en distintos escenarios. Para ello se asume que la potencia de *fading* en cada rama $i = 1, \dots, P$ sigue una distribución Rician con parámetro K_i . Por simplicidad, denotamos $\mathbf{K} = [K_1, \dots, K_P]$. A las distintas ramas se le aplica una matriz de covarianzas exponencial con elementos $[\Sigma]_{i,j} = \rho^{|i-j|}$ con $0 \leq \rho < 1$. Los resultados para distintos valores de \mathbf{K} , ρ y P se muestran en las figuras 1 y 2, donde se añaden simulaciones para validar los resultados teóricos. Como es de esperar, valores altos de \mathbf{K} (mayor potencia en la línea de visión) y menores valores de ρ (menor correlación) proporcionan mejores resultados.

Los valores de m empleados se indican en los pies de

figura, siendo mayor el valor de m necesario conforme aumentamos P o \mathbf{K} . Debido a los problemas numéricos comentados en la sección III, los resultados aquí presentados se limitan a escenarios con \mathbf{K} bajo (y consecuentemente m bajo).

V. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un nuevo enfoque al análisis estadístico de las formas cuadráticas gaussianas complejas. En lugar de abordar el problema directamente, se ha estudiado una nueva variable aleatoria Q_m , llamada forma confluyente, cuyo análisis es más sencillo. Se han obtenido los estadísticos de primer orden de dicha variable (MGF, PDF y CDF) en términos de funciones elementales, los cuales convergen a los estadísticos de la forma original cuando $m \rightarrow \infty$. No obstante, las expresiones derivadas presentan problemas numéricos para valores elevados de m . Finalmente, el enfoque aquí presentado se ha ejemplificado con el estudio la probabilidad de *outage* en MRC sobre canales correlados con *fading* Rician, observando un mejor comportamiento para baja correlación y valores altos de K .

REFERENCIAS

- [1] B. D. Rao, M. Wengler, and B. Judson, "Performance analysis and comparison of MRC and optimal combining in antenna array systems," in *2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No.01CH37221)*, vol. 5, 2001, pp. 2949–2952 vol.5.
- [2] D. Lao and A. M. Haimovich, "Exact closed-form performance analysis of optimum combining with multiple cochannel interferers and Rayleigh fading," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 6, pp. 995–1003, June 2003.
- [3] C. Kim, S. Lee, and J. Lee, "SINR and Throughput Analysis for Random Beamforming Systems with Adaptive Modulation," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 12, no. 4, pp. 1460–1471, April 2013.
- [4] D. Raphaeli, "Noncoherent coded modulation," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 2, pp. 172–183, Feb 1996.
- [5] G. A. Ropokis, A. A. Rontogiannis, and P. T. Mathiopoulos, "Quadratic forms in normal RVs: theory and applications to OSTBC over hoyt fading channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, no. 12, pp. 5009–5019, December 2008.
- [6] G. L. Turin, "The characteristic function of Hermitian quadratic forms in complex normal variables," *Biometrika*, vol. 47, no. 1/2, pp. 199–201, 1960.
- [7] G. Tziritas, "On the distribution of positive-definite Gaussian quadratic forms," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 33, no. 6, pp. 895–906, November 1987.
- [8] K. H. Biyari and W. C. Lindsey, "Statistical distributions of hermitian quadratic forms in complex gaussian variables," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 39, no. 3, pp. 1076–1082, May 1993.
- [9] D. Raphaeli, "Distribution of noncentral indefinite quadratic forms in complex normal variables," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 3, pp. 1002–1007, May 1996.
- [10] T. Y. Al-Naffouri, M. Moinuddin, N. Ajeeb, B. Hassibi, and A. L. Moustakas, "On the Distribution of Indefinite Quadratic Forms in Gaussian Random Variables," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 64, no. 1, pp. 153–165, Jan 2016.
- [11] C. Goutis and G. Casella, "Explaining the Saddlepoint Approximation," *The American Statistician*, vol. 53, no. 3, pp. 216–224, 1999.
- [12] S. Provost and A. Mathai, *Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications*, ser. Statistics : textbooks and monographs. Marcel Dek ker, 1992.
- [13] M. P. Slichenko, "Characteristic function of a quadratic form formed by correlated complex Gaussian variables," *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 59, no. 5, pp. 433–440, 2014.
- [14] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2007.
- [15] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals & Systems (2Nd Ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [16] A. Goldsmith, *Wireless communications*. Cambridge university press, 2005.