

Micro simulación de modelos de supervivencia en edades avanzadas para Ciencias Actuariales

Antonio Fernández Morales,

Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)
Universidad de Málaga, 2020



Esta obra se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada. Puede copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra bajo las condiciones siguientes:

- Reconocimiento: Debe reconocer los créditos de la obra citando al autor.
- No comercial: No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Sin obras derivadas: No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.

1. Introducción

Los modelos paramétricos de supervivencia [1], [2], [3] tienen un papel de gran importancia en el corpus analítico que requiere la profesión actuarial. Tanto el ajuste, como el uso y la graduación de tablas de mortalidad y supervivencia demandan una comprensión profunda de los modelos estocásticos disponibles en la abundante literatura académica [4], que sigue ofreciendo en la actualidad avances considerables.

Más concretamente, el aumento de la longevidad observado en las sociedades occidentales, unido al fenómeno conocido como deceleración de la mortalidad en las edades avanzadas, han planteado importantes retos a las estrategias de modelización paramétrica, que han generado diversas propuestas, entre las que destaca la incorporación de modelos con heterogeneidad [5], [6]. Así, el análisis, descripción y predicción de la mortalidad en las edades más avanzadas se puede considerar un ámbito específico de investigación dentro del gran abanico que contempla el estudio de la supervivencia y mortalidad humanas, que además, tiene un gran interés desde el punto de vista actuarial.

El enfoque de la micro simulación permite un acercamiento al estudio de este campo con notables ventajas. Por un lado, facilita la comprensión de los aspectos estocásticos ligados a los procesos de estimación y de observación de poblaciones, especialmente en los casos de edades avanzadas, en los que se dispone de una menor información muestral y poblacional. Por otro, se puede construir instrumentos interactivos que utilicen micro simuladores de forma que sus usuarios experimenten con los modelos y sus parámetros. Esta segunda línea ha mostrado resultados muy positivos en experiencias anteriores en el campo de modelos de supervivencia [7], [8], de procesos estocásticos de uso en el mercado de los seguros [9], [10], y en otros ámbitos académicos [11].

Por ello, en este trabajo se propone una serie de casos de estudio dedicados al análisis y experimentación de modelos paramétricos de mortalidad en edades avanzadas. Estos casos acompañan a un micro simulador interactivo que facilita la resolución de los mismos. Con esta aproximación, se contribuye al desarrollo de competencias profesionales, tanto de tipo técnico o analítico [12], como de tipo transversal y colaborativo [13]. La flexibilidad que ofrece la posibilidad de su realización en sesiones presenciales o virtuales, de forma individual o en grupo, facilita su uso incluso en modalidades de formación adaptadas a circunstancias como las derivadas de la pandemia de la COVID-19 [14], [15].

2. Metodología

El objetivo de los casos de estudio propuestos es mejorar la comprensión de diversas características de los modelos paramétricos usados en el análisis y predicción de la mortalidad en edades avanzadas, así como de la variabilidad de sus estimaciones.

La micro simulación se realiza mediante un simulador gráfico interactivo que usa métodos de Montecarlo y se muestra visualmente con animaciones que reaccionan en tiempo real a cambios en los parámetros. El diseño de este recurso se ha beneficiado de experiencias anteriores con simuladores de este tipo [7], [8] y de otras con recursos interactivos [16], [17], [18] y de e-learning [19], [20], [21] para los estudios de Ciencias Actuariales.

El diseño resultante permite que el usuario pueda experimentar con modelos analíticos que se emplean en la Ciencia Actuarial para la estimación y proyección de la mortalidad en edades avanzadas, como diversas variantes del modelo de Gompertz, el modelo logístico de Kannisto o el modelo con heterogeneidad Gamma-Gompertz.

Para la elaboración de los casos de estudio se ha prestado especial atención a la contextualización, acudiendo a datos y trabajos académicos del ámbito actuarial, de forma que puedan contribuir al desarrollo de competencias profesionales [22], [23], [24], y teniendo en cuenta el carácter multidisciplinar que con frecuencia demandan [25].

3. Casos de estudio

Caso 1

Disponemos de las estimaciones de [26] para proyectar las tasas de mortalidad de la población femenina alemana con edades superiores a los 100 años. Para ello se ha utilizado un modelo de Gompertz con tanto instantáneo de mortalidad, en forma logarítmica,

$$\text{Ln}(\mu_x) = \text{Ln}(A) + Bx.$$

Los parámetros estimados de este modelo se muestran en la tabla 1:

Tabla 1: Modelo de Gompertz estimado

Parámetro	Estimación
Ln(A)	-12,1
B	0,113

Fuente: Pflaumer (2018).

A Ejecute el simulador con los parámetros del modelo de Gompertz estimados para la población femenina alemana por [26] para obtener estimaciones estables de la edad modal de fallecimiento (de acuerdo con la curva de fallecimientos representada en la figura 1) y de la esperanza de vida a los 90 años.

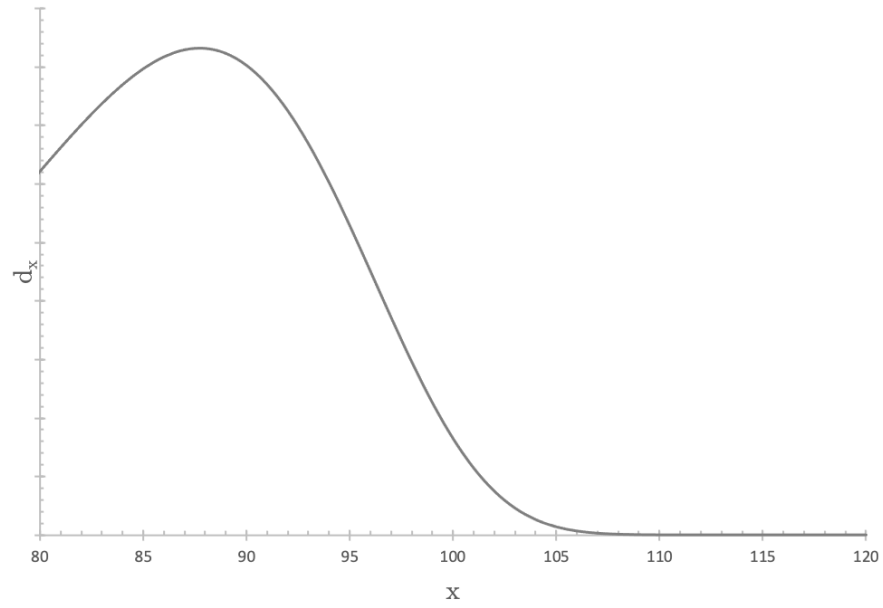


Figura 1: Curva de fallecimientos del modelo

B Obtenga el efecto que produciría en los dos indicadores de la actividad A cambiar el parámetro B a un valor de 0,108.

Caso 2

Se ha utilizado un modelo de tipo logístico (modelo de Kannisto) para cerrar las tablas de mortalidad norteamericanas *U.S. Decennial Life Tables 2009-2011* para edades superiores a 99 años [27].

La especificación usada para el tanto instantáneo de mortalidad, μ_x , es la siguiente:

$$\mu_x = \frac{Ae^{Bx}}{1 + Ae^{Bx}}.$$

La estimación se ha realizado especificando el logit de μ_x :

$$\text{Ln} \left(\frac{\mu_x}{1 - \mu_x} \right) = \text{Ln}(A) + Bx.$$

A Simule vidas que superen los 85 años exactos con los parámetros del modelo para la población femenina del país mencionado, usando los parámetros de la tabla 2 para obtener una estimación estable de la edad modal de fallecimiento. ¿Cuántas se necesita simular para alcanzar una estimación estable?

Tabla 2: Modelo de Kannisto estimado

Parámetro	Estimación
Ln(A)	-14,4
B	0,134

Fuente: Arias *et al.* (2020).

Caso 3

Para cerrar las tablas de mortalidad *U.S. Decennial Life Tables 2009-2011* de la población masculina estadounidense podemos utilizar los parámetros del modelo de Kannisto estimados por [27]:

- $\ln(A) = -13,4$
- $B = 0,127$

comparables a los utilizados en el Caso 2 para la población femenina.

A Ejecute el simulador y compare las estimaciones muestrales de la esperanza de vida a los 90 y 100 años con los obtenidos para la población femenina en el Caso 2, teniendo en cuenta las tasas de mortalidad predichas por ambos modelos (ver figura 2).

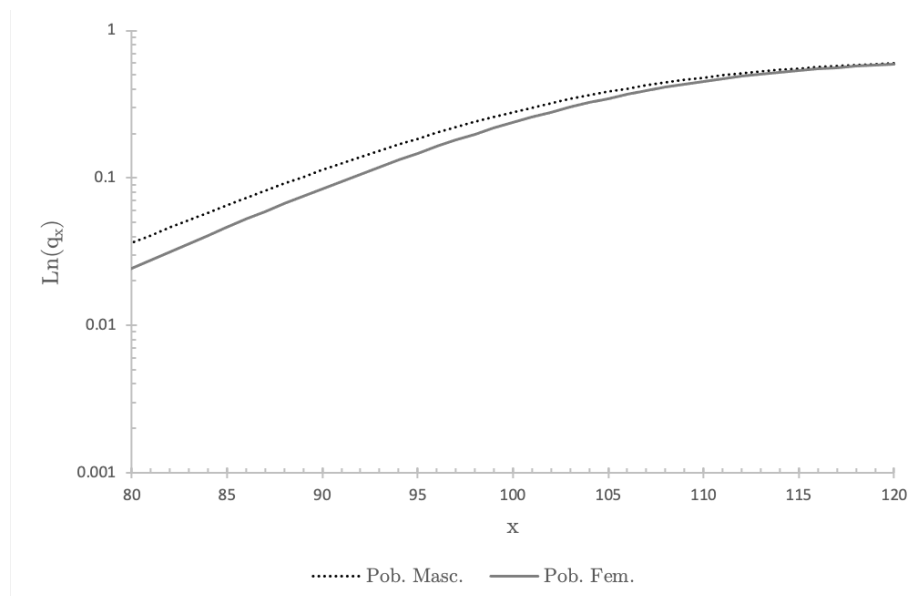


Figura 2: Tasas q_x de los modelos (escala logarítmica)

Caso 4

Disponemos de las estimaciones realizadas por [28] relativas a la mortalidad de la población femenina en Italia (2010) para edades de 80 años y superiores. Se ha utilizado un modelo que incluye deceleración de la mortalidad, incorporando heterogeneidad a un tanto instantáneo de mortalidad de tipo Gompertz con un modelo Gamma que representa la fragilidad individual [29].

En este tipo de modelos, la selección resultante del fallecimiento más temprano de los individuos más frágiles (*more frailty*) conduce a tasas de mortalidad observadas menores que las pronosticadas por el modelo de base en las edades más altas, [30], [31].

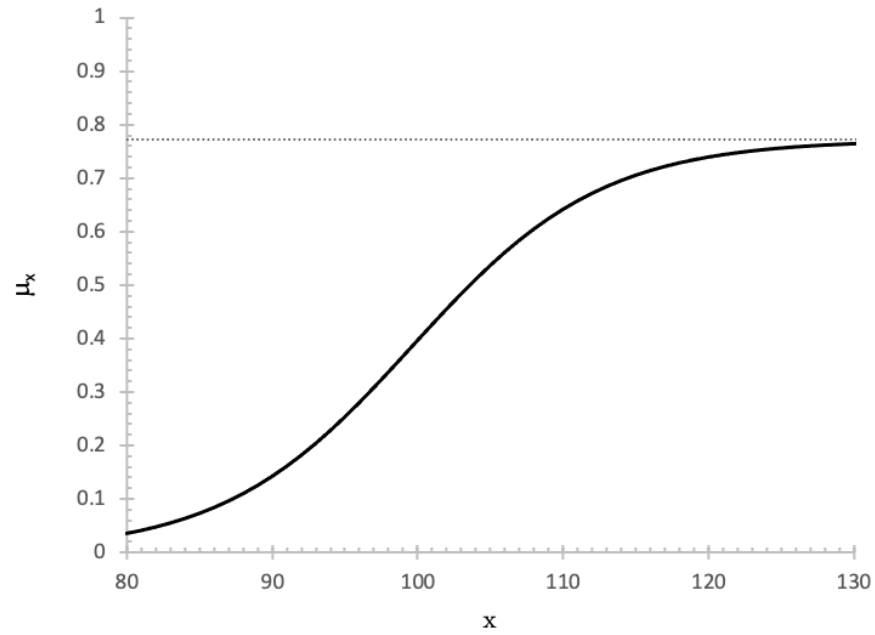
De acuerdo con la estrategia de modelización elegida, el tanto instantáneo empleado sigue una especificación Gamma-Gompertz:

$$\mu_x = \frac{Ae^{bx}}{1 + \frac{A\gamma}{B}(e^{Bx} - 1)}$$

Los parámetros estimados son:

- $\ln(A) = -15,6$
- $B = 0,154$
- $\gamma = 0,2$

A Obtenga el límite al que tiende el tanto instantáneo de mortalidad en este modelo, y que está representado en la Figura 3.

Figura 3: Función μ_x del modelo

B Realice una simulación de 5000 vidas con edad de fallecimiento igual o superior a 80 años. ¿Qué estimación de la esperanza de vida a los 80, 90 y 100 años ha obtenido con la simulación?

Caso 5

Partiendo del modelo estimado por [28] para la mortalidad observada en la población femenina en Italia (2010) con edades de 80 años y superiores, realice una modificación en los parámetros que aumente la heterogeneidad atribuible al componente de la fragilidad individual (*frailty*), dando un valor al parámetro γ de 0,3. El modelo modificado genera tasas anuales de mortalidad representadas en la Figura 4.

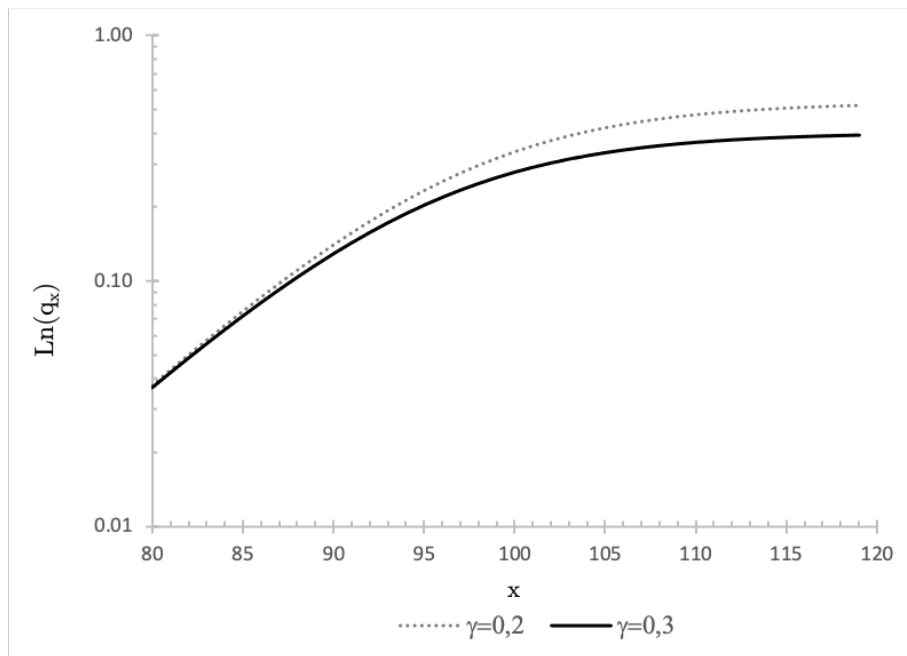


Figura 4: Tasas q_x del modelo (escala logarítmica)

A Realice una simulación de 5000 vidas, obtenga una estimación de la esperanza de vida a los 80, 90 y 100 años y compárela con los resultados obtenidos en el Caso 4.

Caso 6

En el estudio realizado por [28] se incluye una estimación del modelo Gamma-Gompertz para la población femenina de Japón (2010) con edades iguales o superiores a 80 años.

Los parámetros correspondientes al colectivo femenino de Japón son los siguientes:

- $\ln(A) = -15,9$
- $B = 0,153$
- $\gamma = 0,195$

A Obtenga el límite al que tiende el tanto instantáneo de mortalidad para esta población según el modelo estimado.

B Realice una simulación de 5000 vidas para obtener una estimación de la edad modal de fallecimiento.

C Compare los perfiles del tanto instantáneo de mortalidad μ_x del modelo para la población femenina de Japón y de Italia (Caso 4) de acuerdo con los parámetros estimados en ambos casos (ver Figura 5).

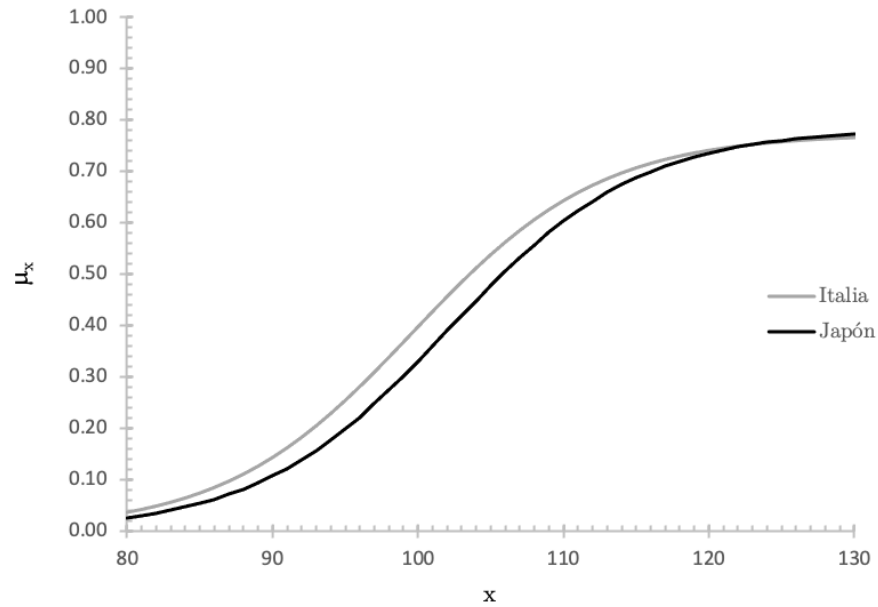


Figura 5: Funciones μ_x de los modelos

D Realice una simulación de 5000 vidas, obtenga una estimación de la esperanza de vida a los 80, 90 y 100 años y compárela con los resultados obtenidos en el Caso 4.

Referencias

- [1] Currie, I. D. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 6(4), 356-383.
- [2] Basellini, U., Canudas-Romo, V., Lenart, A. (2019). Location–Scale Models in Demography: A Useful Re-parameterization of Mortality Models. *European Journal of Population*, 35, 645–673 .
- [3] McDonald, A. S., Richards, S. J., Currie, I. D. (2018). *Modelling Mortality with Actuarial Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Fernández-Morales, A. (2008). Métodos de graduación paramétrica de la mortalidad en el ámbito actuarial para la población andaluza. *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, 36, 83-100.
- [5] Pitacco, E. (2016). High Age Mortality and Frailty. Some Remarks and Hints for Actuarial Modeling. *ARC Centre of Excellence in Population Ageing Research Working Paper 2016/19*.
- [6] Pitacco, E. (2019). Heterogeneity in mortality: a survey with an actuarial focus. *European Actuarial Journal*, 9, 3–30
- [7] Fernández-Morales, A. (2011). Learning survival models with on-line simulation activities in the Actuarial Science Degree. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, Vol. 6, no. 1, pp. 15–19.
- [8] Fernández-Morales, A. (2017). Simulating lifetimes with actuarial survival models. *9th International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN17 Proceedings*, pp. 725-731, Valencia: IATED, 2017. <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2017.1161>
- [9] Fernández-Morales, A. (2017). Enriching the statistics learning experience with D3.js interactive animations: Insurance applications of Markov chains. *International Journal of Educational Research and Innovation*, vol. 7, pp. 25-39, 2017. URI: <http://hdl.handle.net/10433/4923>
- [10] Fernández-Morales, A. (2015). Application of a Discrete-time Markov Chain Simulation in Insurance. *International Journal of Recent Contributions from Engineering, Science & IT*, vol.3, no.3, pp. 27-32, 2015. doi: <http://dx.doi.org/10.3991/ijes.v3i3.4929>
- [11] Fernández-Morales, A. (2015). Simulating seasonal concentration in tourism series, *Journal of Hospitality, Leisure, Sport and Tourism Education*, 15, pp. 116–123.

- [12] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A., Moreno-Ruiz, R. (2020). Actions for the contextualization and development of professional competences. *12th Annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN20 Proceedings*, pp. 5379-5385. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2020.1417>
- [13] Fernández Morales, A., Mayorga Toledano, M.C. (2013). Developing Creativity and Innovation through Collaborative Projects. *Interdisciplinary Studies Journal 2* (3), pp. 70-82.
- [14] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2020). Assessing the face-to-face to virtual learning adaptation process of the MSc in Actuarial Science at the University of Malaga. *13th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2020 Proceedings*, pp. 6232-6240.
- [15] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2020). Using COVID19 outbreak data to engage students in the learning process. *13th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2020 Proceedings*, pp. 6205-6211.
- [16] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2019). Enhancing Actuarial education with interactive online resources. *13th International Technology, Education and Development Conference, INTED2019 Proceedings*, pp. 9139-9145, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/inted.2019.2270>
- [17] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2017). Interactive resources based on serious gaming for Actuarial Education, *EDULEARN17 Proceedings, 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*, Valencia: IATED, pp. 3245-3251.
- [18] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2018). Using serious games un Higher Education. An Application in actuarial studies. *11th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2018 Proceedings*, pp. 2727-2734, Sevilla: IATED. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/iceri.2018.1603>
- [19] Mayorga-Toledano, M. C. (2010). Integrating e-learning activities in the teaching and learning of banking and securities market law. *Education and Law Review*, vol. 1, pp. 177-196.
- [20] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2004). Learning tools for java enabled phones. An application for actuarial studies. In *Learning with mobile devices. Research and Development* (J. Attewell, C. Savill-Smith, cords.), London: Learning and Skills Development Agency, pp. 95-98.

- [21] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2010). Using iPhone Web-Apps to Enhance Learning and Teaching in Actuarial Education, In *Mobile Learning: Pilot Projects and Initiatives* (R. Guy, ed.), Santa Rosa: Informing Science Press, pp. 83-104.
- [22] Trigo-Martínez, E., Fernández-Morales, A: (2017). Collaborative projects for developing technological and professional competences in Actuarial Science, *EDULEARN17 Proceedings, 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*, Valencia: IATED, pp. 2767-2772.
- [23] Fernández-Morales, A., Trigo-Martínez, E., Moreno-Ruiz, R., Gómez-Pérez-Cacho, O. (2019). Involving professionals in curricular activities for developing actuarial skills. *INTED2019 Proceedings*, pp. 9113-9117, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/inted.2019.2267>
- [24] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2018). Coordination, transversality and professional skills in actuarial education. *11th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2018 Proceedings*, pp. 2714-2719, Sevilla: IATED. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/iceri.2018.1601>
- [25] Fernández-Morales, A., Trigo-Martínez, E., Gómez Pérez-Cacho, O. (2020). Multidisciplinary collaborative projects for a more coordinated Actuarial Education. *12th annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN20 Proceedings*, pp. 5409-5414. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2020.1424>
- [26] Pflaumer, P. (2018). Projecting Age-Specific Death Probabilities at Advanced Ages Using the Mortality Laws of Gompertz and Wittstein. *Joint Statistical Meetings 2018 - Social Statistics Section American Statistical Association*, Vancouver, Canada, 28 julio - 2 agosto, 2018.
- [27] Arias, E., Curtin, S. C., Tejada-Vera, B. (2020). U.S. Decennial Life Tables for 2009–2011, Methodology of the United States Life Tables. *National Vital Statistics Reports* 69 (10), pp. 1-11.
- [28] Rau, R., Ebeling, M., Peters, F., Bohk-Ewald, C. Missov, T.I. (2017). Where is the mortality plateau? *Living to 100. Society of Actuaries International Symposium*, Orlando, Florida, 4-6 January 2017.
- [29] Missov, T.I. and Vaupel, J.W. (2015). Mortality Implications of Mortality Plateaus. *SIAM Review* 57(1), pp. 61–70.
- [30] Vaupel, J.W. (2010). Biodemography of human aging. *Nature* 464, pp. 536–542.

- [31] Fernández-Morales, A. (2009). Graduación de la mortalidad en Andalucía con modelos de mortalidad con heterogeneidad inobservable. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 15, pp. 23-50.