

Casos de estudio de modelos de supervivencia para Ciencias Actuariales

Antonio Fernández Morales

Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)
Universidad de Málaga, 2022



Esta obra se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada. Puede copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra bajo las condiciones siguientes:

- Reconocimiento: Debe reconocer los créditos de la obra citando al autor.
- No comercial: No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Sin obras derivadas: No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.

1. Introducción

En este trabajo se propone un conjunto de casos y aplicaciones de modelos de supervivencia paramétricos orientados al ámbito actuarial. Estos modelos han desempeñado un papel muy relevante en la literatura académica actuarial [1], [2], [3], así como en el desarrollo y actividad profesional de este campo, en el cual se siguen produciendo avances significativos. Más concretamente, la problemática actual de envejecimiento progresivo de las poblaciones y deceleración de la mortalidad observada en edades avanzadas ocupa en la actualidad un notable grado de atención [4], [5].

La contextualización con fuentes adecuadas e información estadística relevante, especialmente en un ámbito donde el *big data* se está abriendo paso con fuerza [6], se revela como un elemento de gran interés para el desarrollo de las competencias profesionales demandadas por la profesión actuarial [7], [8], [9], que suele requerir un alto grado de multidisciplinariedad, [10], motivo por el cual los casos propuestos pueden añadir un componente adicional de interés a la formación actuarial.

Los casos presentados en este trabajo pueden ser complementados con instrumentos interactivos de microsimulación [11], [12], que han resultado muy efectivos en experiencias anteriores, tanto en la disciplina actuarial, aplicados a modelos de supervivencia [13], [14] y a otros procesos estocásticos [15], [16], como en otras [17]. La combinación de ambos enfoques de trabajo, que se puede complementar con otros recursos interactivos ([18], [19], [20], [21]) y de *e-learning* ([22], [23], [24]), se plantea como una herramienta muy positiva para la adquisición de competencias profesionales [25], [26], que puede ser empleada incluso en circunstancias de enseñanza virtual por motivos excepcionales, como fue la ocasionada por la COVID-19 [27], [28], [29].

2. Casos de estudio

Caso 1

Se ha especificado para un grupo homogéneo cerrado de una cartera un sencillo modelo biométrico con

$$\mu_x = \frac{1}{(110 - x)}, \quad x \geq 0,$$

de acuerdo con el modelo de A. de Moivre.

- a) Representar gráficamente la función μ_x .
- b) Obtener la función de distribución de la variable X y representarla gráficamente.
- c) Obtener la probabilidad de que una persona con edad 50 muera antes de los 55.
- d) Obtener la probabilidad de que una persona con edad 60 sobreviva cinco años más.

Caso 2

Las circunstancias especiales de un colectivo asegurado nos han permitido especificar un modelo de supervivencia muy simplificado para un rango de edades $80 \leq x \leq 90$, caracterizado por $\mu_x = 0,08$.

- a) Representar gráficamente la función μ_x .
- b) Obtener la función de supervivencia de la variable T_{80} y representarla gráficamente.
- c) Obtener la probabilidad de que una persona con edad 80 muera antes de los 85.
- d) Obtener la probabilidad de que una persona con edad 85 sobreviva cinco años más.

Caso 3

De acuerdo con la notación actuarial internacional [30], [31], ¿cuál es el significado de las siguientes expresiones?

- a) ${}_5p_{50}$
- b) ${}_4p_{60}$
- c) ${}_{10}q_{55}$
- d) ${}_5q_{70}$
- e) ${}_{3|2}q_{30}$
- f) ${}_{1|3}q_{42}$
- g) ${}_{2|1}q_{35}$
- h) ${}_3p_{62} \cdot {}_4q_{65}$
- i) ${}_3p_{30} \cdot {}_2q_{33}$

Caso 4

Expresé con la notación actuarial las siguientes proposiciones:

- a) Probabilidad de que una persona con 50 años sobreviva a los 55 años.
- b) Probabilidad de que una persona con 70 años sobreviva tres años más.
- c) Probabilidad de que una persona con 45 años muera con más de 70 años.
- d) Probabilidad de que una persona con 62 años no sobreviva cinco años más.
- e) Probabilidad de que una persona con 10 años muera entre los 70 y los 75 años.
- f) Probabilidad de que una persona con 80 años viva tres años más y posteriormente muera en los siguientes seis años.

Caso 5

Obtener la esperanza de vida completa asociada a la función de supervivencia

$$S(x) = e^{-\frac{x}{15}}, \quad x \geq 0.$$

Caso 6

En un determinado colectivo, la función de distribución de la vida futura a la edad x tiene la siguiente expresión matemática:

$$F_x(t) = \begin{cases} \frac{t}{110-x}, & 0 \leq t \leq 110-x \\ 1, & t > 110-x \end{cases}$$

Obtener la esperanza completa de vida a la edad x .

Caso 7

Se ha estimado un modelo de Gompertz que describe la mortalidad del colectivo de mujeres con pensiones superiores a £10000 anuales, pertenecientes a una cartera de pensionistas del Reino Unido, con datos de 2007-2012 [32]. La especificación del modelo estimada es la siguiente:

$$\mu_x = 0,000002363 \cdot 1,126153676^x, \quad 60 \leq x \leq 99$$

- Obtenga la función de supervivencia del modelo $S(x)$ y realice una representación gráfica.
- Calcule ${}_{10}q_{70}$.
- Calcule ${}_{10|10}q_{60}$.

Caso 8

Disponemos de las estimaciones de [33] para proyectar las tasas de mortalidad de la población femenina alemana con edades superiores a los 100 años. Para ello se ha utilizado un modelo de Gompertz con tanto instantáneo de mortalidad, en forma logarítmica,

$$\ln(\mu_x) = -12,1 + 0,113x, \quad x \geq 80.$$

- Obtenga la función q_x del modelo y realice una representación gráfica.
- Calcule ${}_{20}p_{80}$.

Caso 9

Basándose en el modelo definido por un tanto instantáneo de mortalidad igual a:

$$\mu_x = 0,02 + 0,0003 \cdot 1,11^x,$$

calcular los valores de ${}_{10}q_{60}$ y ${}_{10}p_{60}$.

Caso 10

En el modelo definido por la función

$$p_x = 0,9999 \cdot 0,9993^{1,105^x(1,105-1)},$$

calcular ${}_4p_{30}$, ${}_4q_{30}$, ${}_4|q_{30}$ y μ_{30} .

Caso 11

Disponemos del siguiente modelo paramétrico para la mortalidad masculina de la comunidad autónoma andaluza en 2004-2005, como alternativa a los propuestos en [34], especificado como sigue:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = 0,00043(x+0,026)^{0,1168} + 0,00047e^{-9,71(\ln(\frac{x}{20,99}))^2} + 0,000033 \cdot 1,1038^x$$

- ¿Qué tipo de modelo es?
- Calcule q_{18} , q_{20} y q_{22} .

Caso 12

En un estudio sobre un cartera de seguro médico en el mercado belga [35], se utiliza como modelo para la mortalidad general la especificación siguiente:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = 0,00054(x+0,017)^{0,101} + 0,00013e^{-10,72(\ln(\frac{x}{18,67}))^2} + 0,00001464 \cdot 1,11^x$$

- Represente gráficamente la función q_x para el rango de edades 1-109.
- Obtenga las probabilidades p_{80} , p_{90} y p_{100} que genera el modelo.

Caso 13

Se ha estimado para un conjunto de aseguradas en el Reino Unido los siguientes modelos para los colectivos femeninos de fumadoras y no fumadoras [36]:

No fumadoras:

$$\mu_x = 0,00022054 + e^{-12,812945+0,1170184x}$$

Fumadoras:

$$\mu_x = 0,00023434 + e^{-14,26691608+0,19217377x-0,00058880x^2}$$

- ¿De qué tipo de modelos se trata?
- Compare μ_{60} en los dos colectivos.
- Calcule q_{50} para el colectivo de no fumadoras.

Caso 14

Con la información de la mortalidad de la población general en Italia hasta 2019, se ha estimado un modelo de Lee-Carter. Utilizando los parámetros estimados y predichos siguientes:

X	a_x	b_x
20	-6.5569268	0.015231432
40	-5.8088746	0.010818187
60	-4.3552824	0.006653973

t	κ_t	Intervalo confianza $1 - \alpha = 0,95$	
		Lim. inf.	Lim. sup
2034	-35.782900	-93.51314	21.94734
2035	-38.168427	-97.97570	21.63885

- a) Estime q_{20} , q_{40} y q_{60} para 2034, incluyendo un intervalo de confianza ($1 - \alpha = 0,95$).
- b) Estime q_{20} , q_{40} y q_{60} para 2035 y calcule la mejora anual (%) esperada de la tasa de mortalidad prevista por este modelo para 2035 en las tres edades.

Caso 15

Un estudio en Estados Unidos [37] ha utilizado el modelo logístico de Kannisto para completar las tablas de supervivencia *U.S. Decennial Life Tables 2009-2011* en las edades de 100 y más años. El modelo se especifica como sigue:

$$\mu_x = \frac{Ae^{Bx}}{1 + Ae^{Bx}}, \quad x \geq 85$$

Se ha estimado por separado los parámetros para la población femenina y masculina con los resultados:

Parámetro	P. Femenina	P. Masculina
A	0,00000057006	0,00000152155
B	0,1337931	0,1266491

- a) Estime q_{90} , q_{100} y q_{110} para la población femenina según el modelo.
- b) Estime q_{90} , q_{100} y q_{110} para la población masculina según el modelo.
- c) Represente gráficamente las probabilidades q_x , para $85 \leq x \leq 120$, de los colectivos femenino y masculino.

Caso 16

Para analizar el fenómeno de la supervivencia de la población en edades avanzadas, se ha estimado con la población femenina italiana de 80 y más años [38] un modelo que incorpora deceleración de la mortalidad, mediante la inclusión de fragilidad individual con un modelo Gamma sobre una función base de tipo Gompertz [39]. Con esta modelización se puede generar probabilidades de fallecimiento en edades avanzadas menores que las pronosticadas por modelos convencionales, [40], [41].

El modelo estimado tiene la especificación:

$$\mu_x = \frac{0,0000001621e^{0,15433x}}{1 + \frac{0,0000001621 \cdot 0,19981}{0,15433}(e^{0,15433x} - 1)}$$

- a) Calcule el límite estimado por el modelo para μ_x .
- b) Represente gráficamente la función μ_x estimada e identifique el *mortality plateau*.

Referencias

- [1] Currie, I. D. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 6(4), 356-383.
- [2] Basellini, U., Canudas-Romo, V., Lenart, A. (2019). Location–Scale Models in Demography: A Useful Re-parameterization of Mortality Models. *European Journal of Population*, 35, 645–673 .
- [3] McDonald, A. S., Richards, S. J., Currie, I. D. (2018). *Modelling Mortality with Actuarial Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Pitacco, E. (2016). High Age Mortality and Frailty. Some Remarks and Hints for Actuarial Modeling. *ARC Centre of Excellence in Population Ageing Research Working Paper* 2016/19.
- [5] Pitacco, E. (2019). Heterogeneity in mortality: a survey with an actuarial focus. *European Actuarial Journal*, 9, 3–30.
- [6] Mayorga-Toledano, M. C. (2021). Limitaciones legales de la analítica predictiva y el big data en el ámbito asegurador. *Derecho de seguros: nuevas realidades y nuevos retos*. Marcial Pons, 313-327.
- [7] Trigo-Martínez, E., Fernández-Morales, A: (2017). Collaborative projects for developing technological and professional competences in Actuarial Science, *EDULEARN17 Proceedings, 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*, Valencia: IATED, pp. 2767-2772.
- [8] Fernández-Morales, A., Trigo-Martínez, E., Moreno-Ruiz, R., Gómez-Pérez-Cacho, O. (2019). Involving professionals in curricular activities for developing actuarial skills. *INTED2019 Proceedings*, pp. 9113-9117, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/inted.2019.2267>
- [9] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2018). Coordination, transversality and professional skills in actuarial education. *11th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2018 Proceedings*, pp. 2714-2719, Sevilla: IATED. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/iceri.2018.1601>
- [10] Fernández-Morales, A., Trigo-Martínez, E., Gómez Pérez-Cacho, O. (2020). Multidisciplinary collaborative projects for a more coordinated Actuarial Education. *12th annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN20 Proceedings*, pp. 5409-5414. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2020.1424>

- [11] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2021). Using an on-line interactive graphical simulator to experiment with late-life mortality models. *115th International Technology, Education and Development Conference, INTED2021 Proceedings*, pp. 9656-9662.
- [12] Fernández-Morales, A. (2020). Micro simulación de modelos de supervivencia en edades avanzadas para Ciencias Actuariales. RIUMA, Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/20543>.
- [13] Fernández-Morales, A. (2011). Learning survival models with on-line simulation activities in the Actuarial Science Degree. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, Vol. 6, no. 1, pp. 15–19.
- [14] Fernández-Morales, A. (2017). Simulating lifetimes with actuarial survival models. *9th International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN17 Proceedings*, pp. 725-731, Valencia: IATED, 2017. <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2017.1161>
- [15] Fernández-Morales, A. (2017). Enriching the statistics learning experience with D3.js interactive animations: Insurance applications of Markov chains. *International Journal of Educational Research and Innovation*, vol. 7, pp. 25-39, 2017. URI: <http://hdl.handle.net/10433/4923>
- [16] Fernández-Morales, A. (2015). Application of a Discrete-time Markov Chain Simulation in Insurance. *International Journal of Recent Contributions from Engineering, Science & IT*, vol.3, no.3, pp. 27-32, 2015. doi: <http://dx.doi.org/10.3991/ijes.v3i3.4929>
- [17] Fernández-Morales, A. (2015). Simulating seasonal concentration in tourism series, *Journal of Hospitality, Leisure, Sport and Tourism Education*, 15, pp. 116–123.
- [18] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2019). Enhancing Actuarial education with interactive online resources. *13th International Technology, Education and Development Conference, INTED2019 Proceedings*, pp. 9139-9145, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/inted.2019.2270>
- [19] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2017). Interactive resources based on serious gaming for Actuarial Education, *EDULEARN17 Proceedings, 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*, Valencia: IATED, pp. 3245-3251.
- [20] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2018). Using serious games un Higher Education. An Application in actuarial studies.

- 11th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2018 Proceedings*, pp. 2727-2734, Sevilla: IATED. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/iceri.2018.1603>
- [21] Fernández-Morales, A. (2021). Tablas actuariales de supervivencia y mortalidad dinámicas con hoja de cálculo. RIUMA, Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/23265>.
- [22] Mayorga-Toledano, M. C. (2010). Integrating e-learning activities in the teaching and learning of banking and securities market law. *Education and Law Review*, vol. 1, pp. 177-196.
- [23] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2004). Learning tools for java enabled phones. An application for actuarial studies. In *Learning with mobile devices. Research and Development* (J. Attewell, C. Savill-Smith, cords.), London: Learning and Skills Development Agency, pp. 95-98.
- [24] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2010). Using iPhone Web-Apps to Enhance Learning and Teaching in Actuarial Education, In *Mobile Learning: Pilot Projects and Initiatives* (R. Guy, ed.), Santa Rosa: Informing Science Press, pp. 83-104.
- [25] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A., Moreno-Ruiz, R. (2020). Actions for the contextualization and development of professional competences. *12th Annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN20 Proceedings*, pp. 5379-5385. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2020.1417>
- [26] Fernández Morales, A., Mayorga Toledano, M.C. (2013). Developing Creativity and Innovation through Collaborative Projects. *Interdisciplinary Studies Journal 2* (3), pp. 70-82.
- [27] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2020). Assessing the face-to-face to virtual learning adaptation process of the MSc in Actuarial Science at the University of Malaga. *13th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2020 Proceedings*, pp. 6232-6240.
- [28] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2020). Using COVID19 outbreak data to engage students in the learning process. *13th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2020 Proceedings*, pp. 6205-6211.
- [29] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2021). Students' perceptions of the teaching and learning mode adopted in the MSc in Actuarial Science at the University of Malaga during COVID-19

- first wave. *115th International Technology, Education and Development Conference, INTED2021 Proceedings*, pp. 9650-9655.
- [30] Dickson, D. C., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2019). Actuarial mathematics for life contingent risks, 3rd Ed. Cambridge University Press.
- [31] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. & Nesbitt, C. J. (1997). Actuarial Mathematics, 2nd Ed. Society of Actuaries, Schaumburg, IL.
- [32] Macdonald, A. S., Richards, S. J., & Currie, I. D. (2018). Modelling mortality with actuarial applications. Cambridge University Press.
- [33] Pflaumer, P. (2018). Projecting Age-Specific Death Probabilities at Advanced Ages Using the Mortality Laws of Gompertz and Wittstein. *Joint Statistical Meetings 2018 - Social Statistics Section American Statistical Association*, Vancouver, Canada, 28 julio - 2 agosto, 2018.
- [34] Fernández-Morales, A. (2008). Métodos de graduación paramétrica de la mortalidad en el ámbito actuarial para la población andaluza. *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, 36, 83-100.
- [35] Denuit, M., Dhaene, J., Hanbali, H., Lucas, N. & Trufin, J. (2017). Updating mechanism for lifelong insurance contracts subject to medical inflation. *European Actuarial Journal* 7, 133–163.
- [36] Continuous Mortality Investigation (2005). The Graduation of the CMI 1999-2002 Mortality Experience: Feedback on Working Paper 8 and Proposed Assured Lives Graduations. Mortality Committee Working Paper 12. Institute and Faculty of Actuaries.
- [37] Arias, E., Curtin, S. C., Tejada-Vera, B. (2020). U.S. Decennial Life Tables for 2009–2011, Methodology of the United States Life Tables. *National Vital Statistics Reports* 69 (10), pp. 1-11.
- [38] Rau, R., Ebeling, M., Peters, F., Bohk-Ewald, C. Missov, T.I. (2017). Where is the mortality plateau? *Living to 100. Society of Actuaries International Symposium*, Orlando, Florida, 4-6 January 2017.
- [39] Missov, T.I. and Vaupel, J.W. (2015). Mortality Implications of Mortality Plateaus. *SIAM Review* 57(1), pp. 61–70.
- [40] Vaupel, J.W. (2010). Biodemography of human aging. *Nature* 464, pp. 536–542.
- [41] Fernández-Morales, A. (2009). Graduación de la mortalidad en Andalucía con modelos de mortalidad con heterogeneidad inobservable. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 15, pp. 23-50.