

Universidad de Málaga
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación



TESIS DOCTORAL

Desarrollo de Herramientas Numéricas para el Análisis y
Diseño de Dispositivos Fotónicos

Autor:

ALEJANDRO ORTEGA MOÑUX

Directores:

J. GONZALO WANGÜEMERT PÉREZ
ÍÑIGO MOLINA FERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIÓN

Reunido el tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

Presidente: Dr. D. _____

Secretario: Dr. D. _____

Vocales: Dr. D. _____

Dr. D. _____

Dr. D. _____

para juzgar la Tesis Doctoral titulada **Desarrollo de Herramientas Numéricas para el Análisis y Diseño de Dispositivos Fotónicos** realizada por D. Alejandro Ortega Moñux y dirigida por el Dr. D. J. Gonzalo Wangüemert Pérez y el Dr. D. Íñigo Molina Fernández, acordó por

otorgar la calificación de

y para que conste, se extiende firmada por los componentes del tribunal la presente diligencia.

Málaga, a ____ de _____ de ____

El Presidente:

El Secretario:

Fdo.: _____

Fdo.: _____

El Vocal:

El Vocal:

El Vocal:

Fdo.: _____

Fdo.: _____

Fdo.: _____

A mis padres.

Agradecimientos

Es un hecho asumido que en los agradecimientos de una Tesis se debe incluir una mención al director o directores del trabajo. En mi opinión, esta práctica hace que se pueda llegar a cuestionar la sinceridad de este reconocimiento, entendiéndolo como una concesión al comportamiento “políticamente correcto” por parte del autor. Por este motivo, quiero comenzar destacando una de las cualidades que comparten mis directores de Tesis y que creo que no es discutible por nadie que conozca personalmente a Gonzalo o a Íñigo. La característica a la que me refiero es su inmensa calidad humana, que en estos años he aprendido a apreciar y a admirar por encima de cualquier otra cosa. Aunque esto bastaría para que me sintiera afortunado por haber tenido la oportunidad de trabajar con ellos, se da la circunstancia de que además, ambos son expertos en la temática de la Tesis y poseen una capacidad didáctica casi infinita. Por estos y otros muchos motivos, a este doctorando le quedan pocas excusas que justifiquen el no haber sido capaz de rematar antes y mejor este trabajo. Íñigo, Gonzalo, gracias por vuestra confianza, dedicación y paciencia.

Mención especial en esta sección de agradecimientos se merece por supuesto Yolanda, que durante estos últimos años ha sido sin lugar a dudas la que más ha sufrido las consecuencias de mi dedicación al trabajo. Esto se debe, al menos en parte, a mi absoluta incapacidad para preocuparme simultáneamente de más de un problema, lo que ha desembocado gradualmente en una injustificable negligencia en lo que se refiere a asuntos domésticos. En este sentido, Yolanda puede considerarse como coautora de pleno derecho de esta Tesis, que sólo ha sido posible gracias a que ella ha asumido como propias todas las responsabilidades que yo he abandonado.

Por otro lado, quiero aprovechar estas líneas para recordar a mis padres. Ellos me lo han dado todo incluso en las circunstancias más difíciles, sin pensar jamás en sí mismos ni exigir nada a cambio. Espero que en la dedicatoria de esta Tesis sean capaces de apreciar mi más profundo y sincero agradecimiento.

No puedo olvidar tampoco a los profesores que, desde la educación básica a la universitaria, han participado y aún hoy participan en mi proceso de maduración personal e intelectual. A todos ellos es una cuestión de justicia darles también las gracias.

Por último, es necesario agradecer el soporte que durante la realización de esta Tesis me ha proporcionado el Departamento de Ingeniería de Comunicaciones, la Universidad de Málaga y los diferentes organismos públicos que han financiado los proyectos en los que he participado.

Este trabajo ha sido subvencionado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) en el marco de los Proyectos de Investigación TIC2000-1245, TIC2003-07860 y TEC2006-02868.

Resumen

LOS espectaculares avances que han experimentado los sistemas de comunicaciones ópticas a lo largo de las últimas cuatro décadas han sido posibles gracias a la inversión de enormes cantidades de tiempo y recursos económicos en el desarrollo de nuevos componentes ópticos y, por supuesto, a la mejora de prestaciones de los ya existentes. Desde un principio, el procesado *todo-óptico* de señales se reveló como imprescindible para incrementar el ancho de banda disponible, fuertemente comprometido en las primeras redes de comunicaciones ópticas de larga distancia debido a la necesidad de realizar en los nodos intermedios una conversión óptica-eléctrica-óptica para amplificar, regenerar y enrutar dichas señales. En 1969, S. E. Miller emplea por primera vez el término *óptica integrada* para referirse a la fabricación sobre un único sustrato de un cierto número de dispositivos ópticos con diferentes funcionalidades, unidos entre sí por guías de onda ópticas monomodo, que en su conjunto forman lo que se denomina un *circuito óptico integrado*. Desde entonces, una parte importante del esfuerzo investigador se ha dedicado al desarrollo de técnicas y métodos numéricos de simulación específicos para cada uno de los problemas que aparecen típicamente en el ámbito de la *óptica integrada*. Esto ha sido necesario porque, para reducir los tiempos y costes asociados al desarrollo de nuevos productos, el diseñador de dispositivos ópticos necesita disponer de herramientas de modelado precisas y eficientes.

En esta Tesis, el objetivo fundamental es mejorar las prestaciones de una familia de técnicas numéricas de simulación de dispositivos ópticos que se conoce con el nombre genérico de *Métodos Globales* o *Espectrales*. Estas técnicas, que son una alternativa a los *Métodos Locales* como las *Diferencias Finitas* o los *Elementos Finitos*, se basan en desarrollar la función incógnita (habitualmente el campo eléctrico o el magnético) en una serie finita de funciones base globales como las de *Fourier* o *Hermite-Gauss*. Aplicando posteriormente el método de *Galerkin*, se puede formular un sistema de ecuaciones algebraico en el que las incógnitas son los coeficientes del desarrollo en serie de la función buscada.

Las herramientas numéricas de simulación que se proponen en esta Tesis son tres, de las cuales las dos primeras se dedican a la caracterización modal de guías de onda ópticas, mientras que la última permite analizar discontinuidades abruptas entre guías con diferente sección transversal. A continuación se enumeran estas técnicas, detallando algunas de sus características diferenciadoras:

1. Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo (A-HGDM): Se trata de una técnica de análisis modal espectral basada en el espacio funcional de Hermite-Gauss. Utiliza el concepto de transformación de variables junto con una estrategia de optimización para la determinación automática y eficiente de los parámetros óptimos de dicha transformación. Desarrollada inicialmente para el análisis de problemas bajo la aproximación escalar, se ha aplicado también a problemas vectoriales con buenos resultados.
2. Método de Caracterización Modal Basado en la FFT (FFT-MS): Es una herramienta de análisis modal completamente vectorial basada en el espacio funcional de Fourier. Respecto a otros métodos que utilizan el mismo conjunto de funciones base, la técnica propuesta presenta dos ventajas importantes: i) No requiere calcular de forma explícita la matriz del sistema, lo que reduce considerablemente los requerimientos computacionales y ii) independiza el número de puntos de discretización transversal del número de armónicos, con lo que se puede mejorar la precisión en problemas vectoriales de guiado fuerte, donde se requiere un mallado

espacial más denso. Por otro lado, la incorporación de condiciones de contorno absorbentes tipo PML (*Perfectly Matched Layer*), permite analizar estructuras cuyos modos presenten pérdidas por radiación (modos *leaky*), como los que aparecen por ejemplo en ciertas fibras de cristal fotónico.

3. Método de Expansión Modal de Fourier (Fourier-EEM): Esta técnica permite analizar estructuras con discontinuidades abruptas en la dirección de propagación, como por ejemplo los dispositivos de interferencia multimodal (*Multimode Interference* (MMI)) o los *Fiber Bragg Grating* (FBG). Se basa en la aplicación conjunta de un esquema de discretización transversal de Fourier y el conocido como método de expansión o ajuste modal (*mode-matching*), e incluye condiciones de contorno tipo PML para absorber la radiación saliente e impedir que ésta llegue a los extremos de la ventana de cómputo. El análisis de dispositivos periódicos como los *grating* se ha optimizado utilizando el formalismo de los *modos Floquet*.

Abstract

The main objective of this Thesis is the development of simulation tools to analyze state-of-the-art photonic structures, such as high index contrast *Buried* or *Rib* waveguides, *Directional Couplers*, *Photonic Crystal Fibers*(PCFs), *Multimode Interference Devices* (MMIs) or *Fiber Bragg Gratings* (FBGs). The simulation tools proposed in this work belong to a bigger family of numerical techniques known as *Spectral Methods*. They are based on the expansion of the unknown electric or magnetic fields into a series of global and orthogonal basis functions (i.e. *Fourier* or *Hermite-Gauss*), which are non-zero, except at isolated points, over the entire computational domain. For this reason, Spectral Methods are also called *Global Methods*. Although *Spectral Methods* were used extensively at first, in recent years other numerical modelling approaches such as *Finite Difference* methods or *Finite Element* methods have become more common. This fact can be explained taking into account the widely accepted idea that *Spectral Methods* are not efficient enough to accurately analyze strongly guiding structures like *Silicon on Insulator* waveguides or realistic devices such as PCFs composed of an arbitrary number of noncircular air holes. Nevertheless, the techniques proposed in this work have overcome the main drawbacks of *Spectral Methods*, and therefore, they provide an interesting alternative to other numerical strategies. The simulation tools developed in this Thesis are:

1. Adaptive Hermite-Gauss Decomposition Method (A-HGDM): The A-HGDM is a *Spectral Method* with variable transformation which has been developed for the modal analysis of dielectric structures. It includes an optimization strategy to automatically find the quasi-optimum numerical parameters of the variable transformation with a reduced computational effort. Although the A-HGDM was initially developed under the scalar assumption, the technique has been extended to vectorial situations with good results.
2. Fast Fourier Based Mode Solver (FFT-MS): The FFT-MS is a full-vectorial method to accurately calculate the modes of arbitrarily shaped optical dielectric waveguides. The key point of the proposed method is to consider a higher number of transversal discretization points than Fourier coefficients for the description of the field components. Strongly guiding structures have been analyzed showing excellent accuracy with low computational effort compared to previous approaches. The inclusion of *Perfectly Matched Layers* (PMLs) absorbing boundary conditions into the formulation overcomes the limitations imposed by the periodicity of Fourier basis functions and makes it possible to perform the modal analysis of PCFs with a finite number of air holes. In this way, the FFT-MS with PMLs has been successfully applied to the numerical modeling of the fundamental characteristics such as chromatic dispersion, modal birefringence, and confinement losses of index-guiding PCFs.
3. Fourier Eigenmode Expansion Method (Fourier-EEM): The Fourier-EEM is a strategy to analyze optical devices with abrupt discontinuities in the longitudinal direction. It uses a global Fourier based approach to perform the transversal discretization of the structure and includes PMLs to deal with the outgoing radiation. The proposed method has been applied to analyze MMI and FBG devices under the scalar approximation. It has been also used to carry out a full-vectorial analysis of a butt-coupling between *Rib* waveguides with different transversal sections.

Notación

- Las letras itálicas (griegas o latinas), tales como a , X , o ϕ , denotan cantidades numéricas o escalares. Las excepciones a esta regla son por un lado las constantes numéricas como π , o e , y por otro las funciones establecidas del tipo \sin , \cos , o \exp , que se representan todas ellas mediante redondas.
- Las magnitudes vectoriales como los campos electromagnéticos se escriben en letra redonda negrilla, como por ejemplo \mathbf{E} , o \mathbf{h} .
- Para representar un vector columna se utilizan también letras redondas negrillas, tales como \mathbf{f} , o $\mathbf{\Phi}$, mientras que sus elementos individuales se denotan en itálica y con un subíndice que indique su posición dentro del vector, como f_0 , o Φ_k .
En el caso de que el nombre del vector contenga ya un subíndice, como por ejemplo $\mathbf{\Phi}_e$, para hacer más legible la notación sus elementos se referenciarán como $\Phi_e^{(k)}$.
- Las matrices se representan con letra redonda y doble barra superior, como por ejemplo $\overline{\overline{a}}$, o $\overline{\overline{M}}$, mientras que sus elementos se escriben en itálica y con doble subíndice, como a_{00} , o M_{mn} .
En el caso de que el nombre de la matriz contenga ya un subíndice, como por ejemplo $\overline{\overline{M}}_e$, para hacer más legible la notación sus elementos se referenciarán como $M_e^{(m,n)}$.
- Para describir de forma genérica un operador lineal se utiliza la letra \mathcal{H} sin que eso signifique necesariamente que dicho operador se corresponda con un *hamiltoniano*.
- Los vectores unitarios sobre cada uno de los tres ejes cartesianos se denotan respectivamente como $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, mientras que para el vector normal a una superficie genérica se utiliza $\hat{\mathbf{n}}$.
- Para representar la magnitud compleja $\sqrt{-1}$ se utiliza la letra j .
- Las funciones $\Re(a)$, $\Im(a)$, $|a|$ y a^* representan respectivamente la parte real, la parte imaginaria, el módulo y el conjugado del número complejo a .
- El producto escalar entre dos funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} se representa como $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$.
- El producto elemento a elemento entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se expresa como $\mathbf{a} * \mathbf{b}$. Este mismo símbolo se emplea también para representar el producto elemento a elemento entre dos matrices.
- La operación de transposición se denota mediante el superíndice t , de forma que por ejemplo, $\overline{\overline{M}}^t$ representa la matriz transpuesta de $\overline{\overline{M}}$.

Símbolos

Magnitudes electromagnéticas

ϵ	Constante dieléctrica.
n	Índice de refracción; $n = \sqrt{\epsilon}$.
ϵ_0	Permitividad eléctrica del vacío; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ (F/m).
μ_0	Permeabilidad magnética del vacío; $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ (H/m).
λ	Longitud de onda en el vacío.
k_0	Constante de propagación en el vacío; $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$.
V_x	Frecuencia normalizada en dirección x .
V_y	Frecuencia normalizada en dirección y .
\mathbf{E}	Vector de campo eléctrico; $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z$.
\mathbf{H}	Vector de campo magnético; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z$.
\mathbf{E}_t	Componentes transversales del vector de campo eléctrico; $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$.
\mathbf{H}_t	Componentes transversales del vector de campo magnético; $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_y$.
\mathbf{E}_z	Componente longitudinal del vector de campo eléctrico.
\mathbf{H}_z	Componente longitudinal del vector de campo magnético.
$\mathbf{E}_t^{(m)}$	Componentes transversales del vector de campo eléctrico del modo m -ésimo; $\mathbf{E}_t^{(m)} = \mathbf{e}_t^{(m)} \cdot e^{\mp\gamma_m \cdot z}$.
$\mathbf{H}_t^{(m)}$	Componentes transversales del vector de campo magnético del modo m -ésimo; $\mathbf{H}_t^{(m)} = \pm \mathbf{h}_t^{(m)} \cdot e^{\mp\gamma_m \cdot z}$.
$\mathbf{e}_t^{(m)}$	Componentes transversales de la distribución transversal de campo eléctrico del modo m -ésimo; $\mathbf{e}_t^{(m)} = e_x^{(m)}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{x}} + e_y^{(m)}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{y}}$.
$\mathbf{h}_t^{(m)}$	Componentes transversales de la distribución transversal de campo magnético del modo m -ésimo; $\mathbf{h}_t^{(m)} = h_x^{(m)}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{x}} + h_y^{(m)}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{y}}$.
γ	Constante de propagación compleja; $\gamma = \alpha + j \cdot \beta$
α	Constante de pérdidas (Np/m).
β	Constante de fase (rad/m).
N_{eff}	Índice efectivo; $N_{\text{eff}} = -j \cdot \gamma/k_0 = \beta/k_0 - j \cdot \alpha/k_0$.
b	Constante de propagación normalizada.

Discretización transversal

Φ_f	Vector de coeficientes del desarrollo en serie de la función $f(x)$. Para funciones bidimensionales, ordenación en forma de vector de la matriz de coeficientes del desarrollo en serie de $f(x, y)$.
$\overline{\overline{\Phi_f}}$	Matriz de coeficientes del desarrollo en serie de la función $f(x, y)$.
φ_k	Función base de orden k perteneciente a un espacio funcional genérico.
$\overline{\overline{M}}$	Matriz de discretización transversal o matriz del sistema.
$\overline{\overline{D}}$	Operador matricial derivada primera.
$\overline{\overline{DD}}$	Operador matricial derivada segunda.
$\overline{\overline{P}}$	Operador matricial producto.
$\overline{\overline{I}}$	Matriz identidad.
$\overline{\overline{DFT}}$	Matriz transformada directa de Fourier.
$\overline{\overline{IDFT}}$	Matriz transformada inversa de Fourier.
$\overline{\overline{HGT}}$	Matriz transformada directa de Hermite-Gauss.
$\overline{\overline{IHGT}}$	Matriz transformada inversa de Hermite-Gauss.
M	Número de puntos de discretización transversal; $M = M_x \times M_y$.
M_x	Número de puntos de discretización transversal en dirección x .
M_y	Número de puntos de discretización transversal en dirección y .
N	Número de coeficientes empleado en el desarrollo en serie; $N = N_x \times N_y$.
N_x	Número de coeficientes en dirección x .
N_y	Número de coeficientes en dirección y .
X_0	Tamaño de la ventana de cómputo en dirección x .
Y_0	Tamaño de la ventana de cómputo en dirección y .

Acrónimos

ABC	Absorbing Boundary Condition
A-HGDM	Adaptive Hermite-Gauss Decomposition Method
A-FMM	Aperiodic Fourier Modal Method
ARROW	Antiresonant Reflecting Optical Waveguide
AWG	Arrayed Waveguide Grating
BPM	Beam Propagation Method
CMS	Cluster Multiple-Scattering Method
DFT	Discrete Fourier Transform
DWDM	Dense Wavelength Division Multiplexing
EDFA	Erbium Doped Fiber Amplifier
EEM	Eigenmode Expansion Method
FBG	Fiber Bragg Grating
FDM	Fourier Decomposition Method
FEM	Finite Element Method
FMM	Film Mode Matching Method
FFT	Fast Fourier Transform
FFT-MS	FFT Based Mode Solver
FTTH	Fiber To The Home
HGDM	Hermite-Gauss Decomposition Method
HGT	Hermite-Gauss Transform
IDVFEBPM	Imaginary Distance Vectorial Finite-Element Beam Propagation Method
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
IHGT	Inverse Hermite-Gauss Transform
MMI	Multimode Interference
MoL	Method of Lines
NA	Numerical Aperture
OIC	Optical Integrated Circuit
O-HGDM	Optimized Hermite-Gauss Decomposition Method

OTDM	Optical Time Domain Multiplexing
PCF	Photonic Crystal Fiber
PIC	Photonic Integrated Circuit
PML	Perfectly Matched Layer
PON	Passive Optical Network
SOI	Silicon on Insulator
SS-FFT-MS	Spectrum Splitting FFT Based Mode Solver
TBC	Transparent Boundary Condition
V-BEM	Vectorial Boundary Element Method
V-FEM	Vectorial Finite Element Method

A computation is a temptation that should be resisted as long as possible.
J. P. Boyd, paraphrasing T. S. Eliot

Índice de tablas

2.1. Relaciones de continuidad para el campo eléctrico.	29
2.2. Relaciones de continuidad para el campo magnético.	29
2.3. Continuidad de las magnitudes presentes en la ecuación modal.	30
3.1. Funciones de <i>test</i> típicas.	50
3.2. Operadores matriciales unidimensionales.	53
5.1. Fibra de Cristal Fotónico. Precisión del N_{eff} y tiempos de cómputo.	119
5.2. Guía <i>Rib</i> . Área efectiva para diferentes profundidades de grabado.	122
5.3. Guía <i>Rib</i> . N_{eff} para diferentes profundidades de grabado.	124
5.4. Guía <i>Rib</i> . $\Re(N_{\text{eff}})$ para diferentes niveles de pérdidas del material.	125
5.5. Guía <i>Rib</i> . $\Im(N_{\text{eff}})$ para diferentes niveles de pérdidas del material.	125
5.6. Fibra de Cristal Fotónico Básica. Pérdidas por confinamiento.	131
6.1. Transición abrupta en <i>rib</i> . Pérdidas de inserción.	154

Índice de figuras

1.1.	Escenarios de aplicación del conexionado óptico.	3
1.2.	Desarrollo en serie de Hermite-Gauss de la distribución transversal de campo eléctrico del modo TE_0 de un <i>slab</i> de salto de índice ($V = 6,8$). . .	9
1.3.	Aportaciones realizadas en el ámbito del análisis modal.	12
1.4.	Aportaciones realizadas en el ámbito del análisis de discontinuidades. . . .	14
2.1.	Geometría de una guía de onda óptica y sistema de coordenadas elegido. . .	19
2.2.	Definición de permitividades normalizadas.	23
2.3.	Soluciones de la ecuación de análisis modal de una estructura abierta. . .	23
2.4.	Soluciones de la ecuación de análisis modal de una estructura cerrada. . .	25
2.5.	Interfaz entre dos medios dieléctricos homogéneos.	27
2.6.	Representación esquemática de una discontinuidad abrupta.	31
2.7.	Condiciones de Contorno de Conductor Perfecto.	34
2.8.	Condiciones de Contorno Periódicas.	35
2.9.	Condiciones de Contorno Clásicas. Problemas con la radiación saliente. . .	36
2.10.	Condiciones de Contorno Absorbentes.	37
2.11.	Condiciones de Contorno PML. Fundamento de la transformación de variables compleja.	38
2.12.	Condiciones de Contorno PML. Justificación de la característica de no reflexión.	39
2.13.	Condiciones de Contorno PML. Definición de las zonas absorbentes en estructuras bidimensionales.	40
2.14.	Condiciones de Contorno PML. Perfiles de pérdidas típicos.	41
2.15.	Condiciones de Contorno PML. Influencia de la amplitud del perfil de pérdidas.	42
2.16.	Condiciones de Contorno PML. Clasificación de las soluciones de la ecuación modal.	44
2.17.	Condiciones de Contorno PML. Influencia del perfil de pérdidas en la distribución espacial de campo.	44
3.1.	Ejemplos de geometrías analizables con métodos globales.	48
3.2.	Ejemplos de mallado con elementos finitos.	49
3.3.	Interfaces de entrada salida de la rutina <code>eigs.m</code>	58
3.4.	Representación en los dominios espacial y espectral de una función continua y no periódica.	63
3.5.	Representación en los dominios espacial y espectral de una función periodizada. X_0 óptimo.	63
3.6.	Representación en los dominios espacial y espectral de una función periodizada. X_0 superior al óptimo.	64
3.7.	Representación en los dominios espacial y espectral de una función periodizada. X_0 inferior al óptimo.	64
3.8.	Espectro de una señal periódica muestreada espacialmente.	65

Índice de figuras

3.9.	Influencia del número de puntos de muestreo. Error relativo del N_{eff} .	66
3.10.	Influencia del suavizado del índice de refracción. Error relativo del N_{eff} .	66
3.11.	Convolución basada en la FFT.	68
3.12.	Convolución bidimensional basada en la FFT.	72
3.13.	Funciones base de Hermite-Gauss.	76
3.14.	Perfil de índice de refracción constante a tramos.	79
3.15.	Operadores matriciales derivada en el espacio funcional de Hermite-Gauss.	82
3.16.	División en regiones rectangulares de una guíaonda tipo <i>Rib</i> .	83
3.17.	Estructura con perfil de índice de refracción parabólico sin trincar.	83
3.18.	Desarrollo en serie de Hermite-Gauss del modo TE_0 de un <i>slab</i> de salto de índice.	85
3.19.	Distribución transversal de campo eléctrico analítica y recuperada.	85
3.20.	Estrategias para la inclusión del factor de escalado.	86
4.1.	Cálculo de los parámetros óptimos de la transformación en el O-HGDM.	91
4.2.	Criterio de optimización basado en el ancho de banda espectral.	92
4.3.	Algoritmo de optimización utilizado en el A-HGDM.	94
4.4.	Estimación de los coeficientes espectrales en el A-HGDM.	95
4.5.	Guía Rectangular. Definición de la geometría.	96
4.6.	Guía Rectangular. Constante de propagación normalizada.	97
4.7.	Guía Rectangular. Distribución transversal de campo eléctrico.	98
4.8.	Guía Rectangular. Distribución transversal de campo eléctrico.	99
4.9.	Guía Rectangular. Camino seguido por el algoritmo de optimización.	99
4.10.	Guía Rectangular. Camino seguido por el algoritmo de optimización.	100
4.11.	Guía Rectangular. Dependencia de los parámetros de la transformación con el número de términos.	100
4.12.	Guía Rectangular. Tiempos de cálculo.	101
4.13.	Acoplador Direccional. Definición de la geometría.	102
4.14.	Acoplador Direccional. Distribución transversal de campo eléctrico.	103
4.15.	Acoplador Direccional. Distribución transversal de campo eléctrico.	104
4.16.	Acoplador Direccional. Longitud de acoplo.	104
4.17.	Acoplador direccional. Parámetros de centrado.	105
4.18.	Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Tiempos de cálculo.	106
4.19.	Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Constante de propagación normalizada.	107
4.20.	Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Distribución transversal de campo eléctrico.	107
4.21.	Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Distribución transversal de campo eléctrico.	108
5.1.	Perfiles de índice de refracción de las guías analizadas en esta sección.	112
5.2.	Fibra de Salto de Índice. Distribución transversal de campo eléctrico (Solución Analítica).	114
5.3.	Fibra de Salto de Índice. Coeficientes espectrales de la distribución de campo.	114
5.4.	Fibra de Salto de Índice. Distribución transversal de campo eléctrico.	115
5.5.	Fibra de Salto de Índice. Error relativo del N_{eff} .	116
5.6.	Fibra de Salto de Índice. Distribución transversal de campo eléctrico.	116
5.7.	Fibra de Cristal Fotónico. Distribución transversal de campo eléctrico.	117

5.8. Fibra de Cristal Fotónico. Error relativo del N_{eff}	118
5.9. Fibra de Cristal Fotónico. Índice de refracción discretizado.	118
5.10. Fibra de Cristal Fotónico con un número finito de agujeros de aire.	120
5.11. Efectos del carácter periódico del espacio funcional de Fourier.	121
5.12. Guía Rib. Definición de la geometría.	121
5.13. Guía Rib. Distribución transversal de campo eléctrico. $D = 0,5 \mu\text{m}$	123
5.14. Guía Rib. Distribución transversal de campo eléctrico. $D = 0,2 \mu\text{m}$	124
5.15. Fibra de Cristal Fotónico. Definición de las geometrías analizadas.	127
5.16. Fibra de Cristal Fotónico Básica. Curvas de dispersión.	128
5.17. Fibra de Cristal Fotónico Básica. Área efectiva.	129
5.18. Fibra de Cristal Fotónico Básica. Distribución transversal de campo eléctrico.	129
5.19. Fibra de Cristal Fotónico Básica. Pérdidas por confinamiento.	130
5.20. Fibra de Cristal Fotónico de Tres Núcleos. Distribución transversal de campo eléctrico de los seis primeros modos.	133
5.21. Fibra de Cristal Fotónico de Tres Núcleos. Longitud de Acoplo.	133
5.22. Fibra de Cristal Fotónico de Alta Birrefringencia. Definición de la geometría.	134
5.23. Fibra de Cristal Fotónico de Alta Birrefringencia. Distribución transversal de campo eléctrico.	134
5.24. Fibra de Cristal Fotónico de Alta Birrefringencia. Birrefringencia en función de la longitud de onda.	134
6.1. Relación entre el dominio espacial, el espectral y el de los modos.	137
6.2. Ejemplos de Discontinuidades Aisladas.	138
6.3. Estrategia basada en el coeficiente de reflexión. Representación esquemática del proceso de cálculo.	141
6.4. Análisis de estructuras periódicas basado en Modos Floquet.	142
6.5. Discontinuidad Fibra-Aire. Definición de la geometría.	144
6.6. Discontinuidad Fibra-Aire. Propagación del campo eléctrico.	145
6.7. Discontinuidad Fibra-Aire. Potencia remanente en la ventana de cómputo.	146
6.8. Discontinuidad Fibra-Aire. Coeficiente de reflexión en función del radio.	146
6.9. Desalineamiento entre fibras. Definición de la geometría.	147
6.10. Desalineamiento entre fibras. Propagación del campo eléctrico.	148
6.11. Desalineamiento entre fibras. Potencia y parámetros S.	148
6.12. MMI 2x3. Definición de la geometría.	151
6.13. MMI 2x3. Desbalanceo en función de la longitud del MMI.	151
6.14. MMI 2x3. Propagación del campo eléctrico.	152
6.15. MMI 2x3. Parámetros de transmisión en función de la longitud de onda.	152
6.16. MMI 2x3. Parámetros de reflexión en función de la longitud de onda.	153
6.17. MMI 2x3. Tiempos de cómputo.	153
6.18. Transición abrupta en rib. Definición de la geometría.	155
6.19. Transición abrupta en rib. Propagación del campo eléctrico.	155
6.20. Análisis de un <i>Fiber Bragg Grating</i> monomodo.	157
6.21. Análisis de un <i>Fiber Bragg Grating</i> multimodo.	160
7.1. Estrategias de mallado.	165
7.2. Análisis de un <i>Photonic Wire</i> en tecnología SOI.	166

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Notación	VII
Símbolos	IX
Acrónimos	XI
1. Introducción	1
1.1. Breve Introducción a la Óptica Integrada	1
1.2. Modelado de Dispositivos Optoelectrónicos	4
1.3. Breve Introducción a los Métodos Globales	8
1.4. Objetivos de la Tesis	9
1.5. Aportaciones Relevantes de la Tesis	10
1.5.1. Aportaciones en el Ámbito del Análisis Modal	10
1.5.2. Aportaciones en el Ámbito del Análisis de Discontinuidades	12
1.6. Organización de la Tesis	14
2. Fundamentos Electromagnéticos	17
2.1. Introducción	17
2.2. Formulación de las Ecuaciones de Análisis Modal	17
2.2.1. Ecuaciones de Helmholtz	17
2.2.2. Ecuaciones de Análisis Modal	18
2.2.3. Simplificaciones de la Ecuación Modal	20
2.2.4. Ecuación Modal Normalizada	21
2.3. Tipos de Soluciones de la Ecuación de Análisis Modal	23
2.3.1. Soluciones de la Estructura Abierta	23
2.3.2. Soluciones de la Estructura Cerrada	24
2.4. Relaciones de Ortogonalidad y Potencia	25
2.5. Condiciones de Salto	27
2.5.1. Dedución de las Condiciones de Salto	27
2.5.2. Estudio de las Condiciones de Continuidad y Salto en las Ecuaciones de Caracterización Modal	29
2.6. Técnica de Ajuste Modal	30
2.7. Condiciones de Contorno	33
2.7.1. Condiciones de Contorno de Conductor Perfecto	33
2.7.2. Condiciones de Contorno Tipo Impedancia	34
2.7.3. Condiciones de Contorno Periódicas	35
2.7.4. Condiciones de Contorno PML	35
2.7.4.1. Fundamentos de las condiciones de contorno PML versión coordinada compleja	37
2.7.4.2. Formulación de la ecuación de análisis modal con condiciones de contorno PML	40

2.7.4.3.	Soluciones de la ecuación de análisis modal con condiciones de contorno PML	41
3.	Estrategias de Discretización Transversal Basadas en Métodos Espectrales	47
3.1.	Introducción	47
3.2.	Clasificación de las Técnicas de Discretización Transversal	47
3.2.1.	Métodos Locales y Métodos Globales	48
3.2.2.	El Método de los Residuos Ponderados	49
3.3.	Propiedades de los Espacios Funcionales	50
3.3.1.	Complejitud y Ortogonalidad	50
3.3.2.	Condiciones de Contorno	51
3.3.3.	Velocidad de Convergencia y Facilidad de Cálculo	51
3.4.	El Método de Galerkin	52
3.4.1.	Aplicación a Problemas Unidimensionales	52
3.4.2.	Aplicación a Problemas Bidimensionales	53
3.4.2.1.	Formulación matricial de la ecuación de análisis modal vectorial	53
3.4.2.2.	Notación matricial de índice único	54
3.5.	Técnicas de Resolución de Problemas de Autovalores	55
3.5.1.	Técnicas de Resolución Directa	56
3.5.2.	Técnicas de Resolución Iterativa	57
3.6.	Métodos de Descomposición de Fourier	58
3.6.1.	Transformada Discreta de Fourier	59
3.6.1.1.	Transformada Discreta de Fourier Directa	59
3.6.1.2.	Transformada Inversa de Fourier	61
3.6.2.	Enventanado, Muestreo y Suavizado de Funciones	61
3.6.2.1.	Enventanado	62
3.6.2.2.	Muestreo de señales continuas	63
3.6.2.3.	Suavizado de funciones	65
3.6.3.	Operadores Matriciales en el Espacio Funcional de Fourier	67
3.6.3.1.	Operadores matriciales unidimensionales	67
3.6.3.2.	Operadores matriciales bidimensionales	69
3.6.4.	Métodos de Descomposición de Fourier Basados en la FFT	72
3.6.4.1.	Cálculo eficiente de los productos matriz-vector	73
3.6.4.2.	Consideraciones numéricas	74
3.7.	Métodos de Descomposición de Hermite-Gauss	75
3.7.1.	Transformadas de Hermite-Gauss Directa e Inversa	77
3.7.1.1.	Transformada Directa de Hermite-Gauss	77
3.7.1.2.	Transformada inversa de Hermite-Gauss	78
3.7.2.	Operadores Matriciales en el Espacio Funcional de Hermite-Gauss	78
3.7.2.1.	Operadores matriciales unidimensionales	78
3.7.2.2.	Operadores matriciales bidimensionales	80
3.7.3.	Escalado de las Funciones Base	83
3.7.3.1.	El perfil parabólico sin truncar	83
3.7.3.2.	Influencia del factor de escalado	84
3.7.4.	El Método de Descomposición de Hermite-Gauss con Transformación de Variables	85

4. El Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo (A-HGDM)	89
4.1. Introducción	89
4.2. Estrategia de Optimización de Parámetros	89
4.2.1. Criterios de Optimización	90
4.2.1.1. Maximización de la constante de propagación	90
4.2.1.2. Minimización del ancho de banda espectral	91
4.2.2. Algoritmo de Optimización	92
4.3. Resultados	95
4.3.1. Análisis Escalar de la Guía Rectangular	95
4.3.2. Análisis Escalar del Acoplador Direccional	101
4.3.3. Análisis Vectorial de la Guía Rectangular	103
4.4. Conclusiones	109
5. El Método de Caracterización Modal Basado en la FFT (FFT-MS)	111
5.1. Introducción	111
5.2. Validación Preliminar del FFT-MS	111
5.2.1. Parámetros Numéricos Relevantes	112
5.2.2. Análisis de una Fibra de Salto de Índice	113
5.2.3. Análisis de una Fibra de Cristal Fotónico	116
5.2.4. Necesidad de las Condiciones de Contorno PML	119
5.3. Análisis Modal de la Guía <i>Rib</i>	121
5.3.1. Caracterización Modal de la Guía <i>Rib</i> : Materiales Sin Pérdidas	121
5.3.2. Caracterización Modal de la Guía <i>Rib</i> : Materiales Con Pérdidas	123
5.4. Análisis Modal de Fibras de Cristal Fotónico	126
5.4.1. Análisis de la Dispersión	126
5.4.2. Análisis del Área Efectiva	128
5.4.3. Análisis de las Pérdidas por Confinamiento	129
5.4.4. Estudio de la Longitud de Acoplo en una PCF de Tres Núcleos	131
5.4.5. Caracterización de una PCF de Alta Birrefringencia	132
6. El Método de Expansión Modal de Fourier (Fourier-EEM)	135
6.1. Introducción	135
6.2. Formulación	135
6.2.1. Análisis de Secciones z -invariantes	135
6.2.2. Caracterización de Discontinuidades Aisladas	137
6.2.3. Caracterización de Dispositivos con Múltiples Discontinuidades	139
6.2.3.1. Estrategia iterativa	139
6.2.3.2. Estrategia basada en el coeficiente de reflexión	140
6.2.4. Análisis de Estructuras Periódicas Basado en Modos <i>Floquet</i>	141
6.3. Resultados	144
6.3.1. Validación Preliminar del Fourier-EEM	144
6.3.1.1. Discontinuidad Fibra-Aire	144
6.3.1.2. Desalineamiento entre fibras	146
6.3.2. Análisis de un MMI 2x3	149
6.3.3. Análisis Vectorial de una Transición Abrupta en <i>Rib</i>	154
6.3.4. Caracterización de Estructuras Periódicas	156
6.3.4.1. Análisis de un <i>Fiber Bragg Grating</i> monomodo	156
6.3.4.2. Análisis de un <i>Fiber Bragg Grating</i> multimodo	157

Índice general

7. Conclusiones y Líneas Futuras	161
7.1. Conclusiones	161
7.2. Líneas Futuras de Investigación	164
Bibliografía	176

1 Introducción

1.1. Breve Introducción a la Óptica Integrada

DE la misma forma que la invención del transistor después de la Segunda Guerra Mundial marcó el comienzo de una nueva era en el campo de la electrónica, en el desarrollo de los modernos sistemas de comunicaciones ópticas se pueden destacar dos hitos relevantes:

- La invención del láser en 1960 por T.H. Maiman [Maiman1960], que permite disponer por vez primera de una fuente de luz con elevados niveles de coherencia espacial y temporal.
- Los avances en las tecnologías de fabricación de fibras ópticas que se produjeron en la década de los años setenta, que contribuyeron a reducir enormemente tanto las pérdidas de propagación como los costes de producción.

Durante mucho tiempo, la limitación más importante de los sistemas de comunicaciones ópticas fue la necesidad de realizar el procesado de la señal en el dominio eléctrico, de forma que en los nodos y repetidores de la red se debía realizar una conversión óptica-eléctrica-óptica (ver figura 1.1(a)) que limitaba fuertemente el ancho de banda disponible en los enlaces de fibra. En los años siguientes, el rápido desarrollo de internet hizo aumentar exponencialmente la necesidad de transmitir información, lo que requirió mejorar la eficiencia de uso de las redes existentes para conseguir anchos de banda cada vez mayores. En un escenario como éste, parece justificado que durante las tres últimas décadas gran parte de los esfuerzos se hayan dedicado a la eliminación del principal cuello de botella de los primeros sistemas de comunicaciones ópticas, sustituyendo progresivamente el procesado en el dominio eléctrico por dispositivos y sistemas que permitan la amplificación, regeneración y enrutado de señales exclusivamente en el dominio óptico, tal y como se muestra en la figura 1.1(b). El primer paso hacia la consecución de sistemas de comunicaciones basados en el procesado *todo-óptico* de señales se dió en 1987 con la aparición del amplificador de fibra dopada con *Erbio* (*Erbium Doped Fiber Amplifier* (EDFA)) [Mears1987], que revolucionó el mundo de las comunicaciones por fibra óptica a larga distancia [Davidson1996]. Posteriormente, la mejora de las técnicas de compensación de la dispersión [Hill1997a], [Ferrando2001], junto con el desarrollo de dispositivos multiplexores/demultiplexores ópticos como los AWG (*Arrayed Waveguide Grating*) [Smit1996], han permitido aumentar continuamente el ancho de banda efectivo de las redes de comunicaciones ópticas. Mediante la utilización de estrategias DWDM (*Dense Wavelength Division Multiplexing*) es posible conseguir, combinando flujos de datos individuales de hasta 10 Gbps sobre portadoras situadas en diferentes longitudes de onda, anchos de banda totales de entre 40 Gbps y 400 Gbps. Estos valores, muy elevados pero todavía lejos de la capacidad de transmisión teórica de las fibras ópticas monomodo, se superarán probablemente en los próximos años mediante la utilización de técnicas OTDM (*Optical Time Domain Multiplexing*), lo que requerirá desarrollar capacidad de generación, transmisión y procesado de pulsos ultracortos, del orden de los picosegundos. Estos esfuerzos

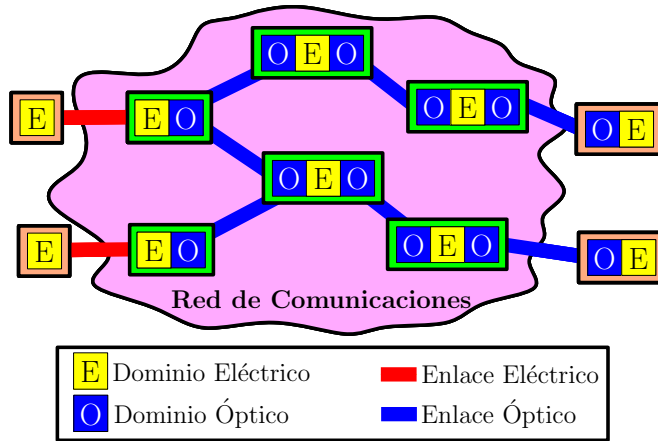
1 Introducción

por incrementar la velocidad de transmisión de información a través de las redes troncales, que a primera vista pudieran parecer exagerados, se justifican si se tienen en cuenta las previsiones de crecimiento de los sistemas de fibra hasta el hogar (*Fiber To The Home* (FTTH)). Con esta tecnología, que cuenta actualmente con diez millones de usuarios en Japón y unas expectativas en EEUU de superar los veinte millones de conexiones en los próximos años [FTTH2007], es posible alcanzar tasas de transferencia al consumidor final de hasta 100Mbps.

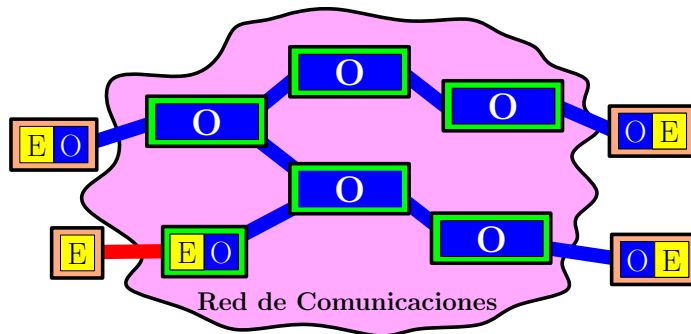
Tradicionalmente, el interés por los sistemas todo-ópticos se ha justificado por su papel en el aumento del ancho de banda disponible para la transmisión de información a larga distancia a través de las grandes redes de comunicaciones mundiales. Más recientemente, ha adquirido también gran importancia el desarrollo de dispositivos ópticos de bajo coste para la implantación de redes ópticas pasivas (*Passive Optical Network* (PON)) que permitan hacer realidad los sistemas de fibra hasta el hogar. Sin embargo, lo cierto es que en los últimos tiempos han aparecido nuevas aplicaciones en las que disponer de tecnologías de transmisión y procesado *todo-óptico* de señales sería muy interesante. Por ejemplo, la interconexión óptica entre diferentes placas de circuito impreso (figura 1.1(c)), entre chips pertenecientes a una misma placa (figura 1.1(d)) o incluso entre componentes dentro de un mismo chip puede llegar a tener importantes ventajas en comparación con las soluciones actuales basadas en conductores metálicos, sobre todo en cuanto a ancho de banda, disipación de potencia e interferencia electromagnética [Young2004], [IBM2005]. Fuera del ámbito de las comunicaciones, otra aplicación interesante de los dispositivos ópticos es la que permite implementar sensores químicos y biomédicos extraordinariamente sensibles y eficientes [Blanco2006], [Densmore2006].

En lo referente a la implementación de los sistemas *todo-ópticos*, la tendencia actual es integrar todos los bloques funcionales que los componen sobre un único sustrato, formando lo que se denomina un *circuito integrado óptico*¹ (*Optical Integrated Circuit* (OIC)). Sin embargo, la posibilidad de incluir en el sustrato las fuentes y los detectores junto con el resto de elementos de circuito está condicionada por el material del que éste está formado. Por ejemplo, en el caso de utilizar semiconductores del grupo III-V como el *Arseniuro de Galio* (GaAs) o el *Fosfuro de Indio* (InP), sí es posible realizar la integración monolítica de todos los elementos sobre un único sustrato. Por el contrario, esto no es factible si se opta por otras tecnologías como las basadas en *Niobato de Litio* (LiNbO₃), por lo que en estos casos será necesario inyectar y detectar la luz desde el exterior del OIC. Otros condicionantes a la hora de escoger el sustrato pueden ser el nivel de pérdidas del material, la relevancia de algunas de sus propiedades físicas (como la respuesta *electro-óptica*, *acústico-óptica*, *termo-óptica* o *no-lineal*), la facilidad de conectorizado e incluso los costes de desarrollo y fabricación. Atendiendo a estas consideraciones, las dos tecnologías más utilizadas en el ámbito de la óptica integrada han sido las de *Niobato de Litio* y las basadas en semiconductores del grupo III-V (sobre todo *Arseniuro de Galio* y *Fosfuro de Indio*) [Tamir1988], [Lifante2003]. La primera de ellas, aprovechando que presenta un acusado efecto electro-óptico lineal (*efecto Pockels*), ha sido la preferida desde mediados de la década de los ochenta para implementar moduladores ópticos de alta velocidad (40 GHz o más), así como conmutadores, rotadores de polarización, filtros, etc. En cuanto a las segundas, además de para implementar fuentes láser operando en las regiones de 0,8 μ m (AlGaAs) y 1,3 μ m-1,5 μ m (InGaAsP), se utilizan frecuentemente para fabricar moduladores de alta velocidad, amplificadores ópticos o AWG. Por otro lado,

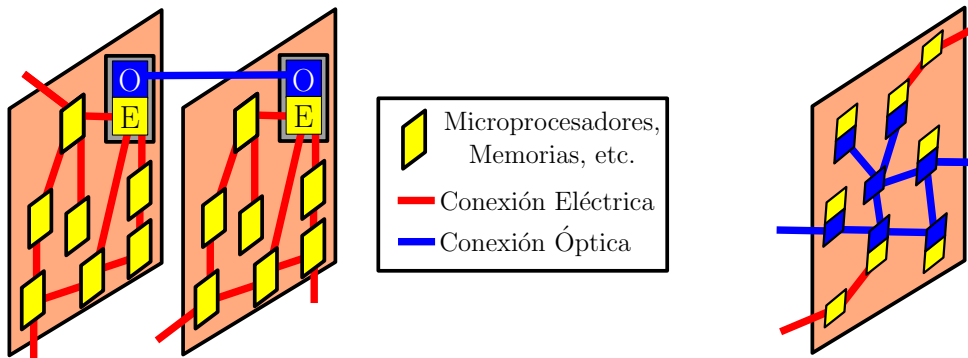
¹El concepto de *óptica integrada*, equivalente en el dominio óptico a los circuitos integrados electrónicos, aparece por primera vez en [Miller1969].



(a) Comunicaciones ópticas de larga distancia con regeneración y enrutado optoelectrónico.



(b) Comunicaciones ópticas de larga distancia con regeneración y enrutado *todo-óptico*.



(c) Interconexión óptica entre placas.

(d) Interconexión óptica entre chips.

Figura 1.1: Escenarios de aplicación del conexionado óptico.

desde hace algunos años la tecnología óptica con mayores previsiones de crecimiento es la denominada *fotónica del Silicio* [Pavesi2003], [Salib2004], [Reed2005], [Soref2006]², que pretende trasladar al ámbito de la óptica la experiencia adquirida en el campo de la microelectrónica, donde los procesos de producción de dispositivos CMOS sobre sustrato SOI (*Silicon on Insulator*) están muy desarrollados. Aunque los problemas a los que se

²En esta última referencia se presenta un estudio muy interesante sobre la evolución histórica de la *fotónica del Silicio*, su situación actual y las previsiones de desarrollo para los próximos cinco años.

tiene que enfrentar la *fotónica del Silicio* son aún muy importantes, existen también razones poderosas que justifican estas expectativas, como la alta capacidad de integración o la posibilidad de producción de circuitos ópticos en grandes cantidades y con costes reducidos.

1.2. Modelado de Dispositivos Optoelectrónicos

Los avances que en el diseño de dispositivos optoelectrónicos se han producido en los últimos años están íntimamente relacionados con tres factores:

- La necesidad de implementar nuevas funcionalidades en el dominio óptico o de mejorar las ya existentes.
- La disponibilidad de materiales cuyas propiedades físicas resulten apropiadas, así como de tecnologías de fabricación baratas y fiables con las que procesar dichos materiales.
- El desarrollo de herramientas numéricas de simulación eficientes y precisas.

Aunque en ocasiones este último factor se considera menos relevante, lo cierto es que la influencia de las técnicas de modelado numérico en el diseño de nuevos dispositivos es crítica. Disponer de un software de simulación eficiente permite probar fácilmente ideas y conceptos novedosos, así como optimizar las prestaciones de diseños preexistentes. En última instancia, esto va a contribuir a reducir significativamente los tiempos y costes asociados a los ciclos de desarrollo de nuevos productos optoelectrónicos.

Evidentemente, las herramientas de simulación se encuentran fuertemente condicionadas por la aplicación concreta para la que han sido desarrolladas, de forma que para el diseño de un láser se utilizará una técnica de modelado diferente a la que resulta apropiada para la caracterización de un acoplador direccional. Incluso para un mismo tipo de problema, resulta habitual que los métodos de simulación evolucionen para adaptarse a los nuevos dispositivos y tecnologías de fabricación que aparecen continuamente en el campo de la optoelectrónica. Por ejemplo, una herramienta de análisis modal escalar puede ser la mejor opción para modelar un dispositivo microfotónico tradicional fabricado en una tecnología de bajo contraste como *Silica on Silicon* ($\Delta n \approx 0,75\%$), pero no para caracterizar una guía de onda de dimensiones nanofotónicas construida en *Silicon on Insulator* ($\Delta n \approx 2\%$).

Una primera clasificación de las herramientas numéricas de simulación de dispositivos ópticos permite agruparlas en dos grandes familias [Scarmozzino2000]: las *técnicas de modelado en el dominio del tiempo* y las *técnicas de modelado en el dominio de la frecuencia*. Las primeras, entre las que destacan los métodos FDTD (*Finite Difference Time Domain*), se caracterizan por discretizar los campos electromagnéticos tanto en el dominio espacial como en el temporal, lo que provoca que sus requerimientos computacionales, sobre todo en problemas 3D vectoriales, sean muy elevados. Afortunadamente, las situaciones en las que resulta imprescindible recurrir a este tipo de herramientas de simulación no se producen muy a menudo, ya que en la mayoría de los problemas de interés las técnicas de modelado en el dominio de la frecuencia, en las que se asume el funcionamiento en régimen permanente sinusoidal, proporcionan excelentes resultados con unos costes computacionales mucho menores.

Por otro lado, atendiendo a la discretización espacial de la estructura que se desea analizar, los métodos numéricos de simulación se pueden clasificar en *Métodos Locales* y

Métodos Globales [Boyd1989]. En los primeros, entre los que destacan las *Diferencias Finitas* y los *Elementos Finitos*, el dominio de computación se divide en un cierto número de subintervalos, sobre los cuales se definen funciones base de carácter local, es decir, distintas de cero sólo en una pequeña porción de dicho dominio. En este tipo de métodos, la forma habitual de mejorar la precisión es aumentar la densidad de muestreo espacial en aquellas zonas del problema que se consideren más relevantes, lo que en general implica trabajar con matrices dispersas de gran tamaño. En cuanto a los métodos globales, la principal diferencia respecto a los anteriores radica en que se basan en el desarrollo de la función incógnita en serie de funciones globales, es decir, diferentes de cero en todo el dominio computacional excepto en puntos aislados del mismo. Estos métodos constituyen el fundamento de todas las técnicas que se van a desarrollar en esta Tesis y a ellos se van a dedicar tanto el siguiente epígrafe, en el que se realizará una somera descripción de algunos de sus fundamentos, como el **Capítulo 3** en su totalidad.

Centrándonos en el modelado de dispositivos pasivos en régimen permanente sinusoidal, es posible definir al menos tres tipos de problemas a los que el diseñador de dispositivos ópticos se debe enfrentar habitualmente:

1. Caracterización modal de guías de onda ópticas.

Los métodos de caracterización modal se utilizan para determinar cada una de las soluciones estacionarias o modos que se propagan a través de una guía de ondas óptica, definida en general por un perfil transversal de índice de refracción arbitrario pero invariante en la dirección de propagación z . Teniendo en cuenta que el campo eléctrico asociado a un modo se va a poder expresar siempre como $\mathbf{E}_t(x, y, z) = \mathbf{E}_t(x, y) \cdot e^{\pm \gamma z}$,³ se entiende que el objetivo del análisis modal es obtener la distribución espacial de campo en la sección transversal de la estructura $\mathbf{E}_t(x, y)$, así como la constante de propagación compleja γ , de cada uno de los modos que se desea calcular.

En cuanto a las técnicas numéricas utilizadas en el ámbito de la caracterización modal, tradicionalmente las más comunes han sido las basadas en estrategias de discretización transversal de carácter local. Hasta tal punto ha sido así que, en el clásico trabajo de Scarmozzino *et.al.* [Scarmozzino2000], en el que se realiza una revisión de los métodos de modelado numérico de dispositivos ópticos más relevantes hasta ese momento, las técnicas globales ni siquiera se tienen en consideración. En cualquier caso, parece que ese olvido no está del todo justificado, ya que las estrategias globales de discretización transversal no solamente existen y son frecuentemente utilizadas, sino que además hoy por hoy son una opción plenamente competitiva con los métodos locales. Esta afirmación, que en opinión del autor queda confirmada por los resultados que se presentan en esta Tesis, se sustenta también en referencias bibliográficas muy recientes. En [Bienstman2006] se realiza una comparativa exhaustiva entre diez de los métodos de análisis modal más relevantes existentes en la actualidad, aplicados sobre un problema de extraordinario interés práctico, como es el modelado de los modos *leaky* de una estructura nanofotónica conocida como *Photonic Wire*. Atendiendo a la forma en la que realizan la discretización transversal, los métodos a los que se hace referencia en ese trabajo se pueden clasificar en tres categorías:

- Método del Índice Efectivo: Este método [Tamir1988], [Rozzi1997], es uno de los más frecuentemente utilizados desde los primeros tiempos de la óptica in-

³En el caso de formular el problema en campo magnético se tendría $\mathbf{H}_t(x, y, z) = \mathbf{H}_t(x, y) \cdot e^{\pm \gamma z}$.

tegrada, ya que permite obtener, con un coste computacional muy reducido, resultados que en muchas ocasiones son lo suficientemente buenos para ciertas aplicaciones. Se trata de un método aproximado que, aunque no puede competir en cuanto a precisión con las técnicas numéricas de análisis modal que se enumeran a continuación, sí que proporciona una estimación inicial válida para la constante de propagación compleja del modo buscado.

- Métodos Locales: Se han incluido cuatro técnicas diferentes: i) un método basado en diferencias finitas [Olympios] con posibilidad de utilizar tanto mallado uniforme como mallado adaptativo, ii) dos implementaciones diferentes del método de los elementos finitos, [Selleri2001], [Uranus2004], que discretizan el problema con un mallado de elementos triangulares para plantear posteriormente una ecuación de autovalores generalizada y iii) una estrategia denominada IDVFEBPM (*Imaginary Distance Vectorial Finite Element Beam Propagation Method*) [Obayya2002], en la que la estructura se malla transversalmente con elementos finitos pero, en lugar de formular y resolver un problema de autovalores como en las anteriores, se utiliza un método de propagación del haz para determinar el modo que se desea calcular.
- Métodos Globales: Cinco en total, de los cuales el primero es un método perturbacional basado en expansión modal, en el que los campos se desarrollan en serie tomando como funciones base los modos de otra estructura similar pero más fácil de analizar. Los otros métodos son muy similares entre sí y se corresponden con: i) dos implementaciones diferentes del *Film Mode Matching Method* (FMM) [Sudbo1993], [Bienstman2004], ii) el conocido como *Aperiodic Fourier Modal Method* (A-FMM) [Hugonin2005] y iii) el *Plane Wave Admittance Method* [Dems2005]. Todas estas técnicas se caracterizan por dividir la estructura en un cierto número de secciones, cada una de las cuales es invariante en una de las direcciones transversales y analizada aplicando una estrategia de discretización de carácter global en la otra. A continuación, se aplica la técnica de ajuste modal o *mode matching* para concatenar las diferentes secciones y se plantea finalmente un problema de *resonancia transversal* [Itoh1989], que permite determinar los modos de la estructura completa.

Por lo tanto, de los diez métodos de análisis modal incluidos en [Bienstman2006], sólo cuatro se corresponden con técnicas locales frente a los cinco que, de una u otra forma, implementan estrategias de discretización global. Además, en términos de precisión estas últimas proporcionan mejores resultados que las diferencias o los elementos finitos. Este hecho está muy relacionado con la geometría de la estructura que se está analizando, ya que la sección transversal de un *Photonic Wire* es fácilmente separable en secciones y por lo tanto idónea para el análisis con métodos como el FMM o el A-FMM. En otros casos en los que la geometría que define la guía de onda es más compleja, como por ejemplo para una fibra de cristal fotónico con agujeros de formas y tamaños arbitrarios, las técnicas locales resultan más apropiadas y su rendimiento mejora notablemente.

2. Estudio de la propagación de la envolvente óptica en estructuras lentamente z -variantes.

Sin lugar a dudas, la familia de técnicas más utilizada para el análisis de este tipo de problemas es la que se conoce de forma genérica como *Métodos de Propagación del Haz* (*Beam Propagation Methods* (BPM)) [Feit1978], [Yevick1994]. La versión más

simple de este conjunto de métodos, que recibe el nombre de *BPM-paraxial*, se basa en imponer la aproximación de *envolvente lentamente variante* a los campos que se propagan por la estructura. Actuando de esta forma se transforma la ecuación de ondas original, que es un problema de condiciones de contorno de segundo orden (aparece un término del tipo $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$) en un problema de valor inicial de primer orden, que recibe el nombre de *ecuación paraxial* o de *Fresnel*. Aunque el BPM-paraxial se utiliza habitualmente para analizar todo tipo de dispositivos ópticos tanto lineales como no-lineales [Oliva2006], este método adolece de ciertas limitaciones que están íntimamente relacionadas con la validez de la aproximación de envolvente lentamente variable, lo que limita su precisión cuando se aplica a problemas en los que la dirección de propagación del campo se aleja mucho del eje z , o cuando la variación con z del índice de refracción que define la estructura es considerable. Además, por su propia naturaleza la ecuación paraxial no admite la posibilidad de ondas reflejadas, esto es, propagándose en sentido $-z$, por lo que con estos métodos no es posible modelar estructuras en los que la reflexión sea significativa. Para superar estas dificultades se han propuesto diferentes estrategias de actuación, que han dado lugar a dos versiones mejoradas del BPM-paraxial: i) los métodos *Wide-Angle BPM* [Hadley1992], [Ilic1996], [Ma1996], que reducen los problemas asociados a la paraxialidad y ii) los *BPM-Bidireccionales* [Kaczmariski1988], [Rao1999], capaces de trabajar con ondas que viajan en ambos sentidos de propagación.

Otro de los avances importantes en el ámbito de los métodos BPM se encuentra relacionado con la aparición de condiciones de contorno cada vez más eficientes, capaces de absorber la radiación saliente impidiendo que ésta llegue a los extremos de la ventana de cómputo. Entre las más relevantes se pueden destacar las *condiciones de contorno transparentes* (*Transparent Boundary Conditions* (TBC)) [Hadley1992], superadas posteriormente en prestaciones por las *condiciones de contorno absorbentes perfectamente adaptadas* (*Perfectly Matched Layer* (PML)) [Berenger1994], [Sacks1995], [Chew1994].

3. Análisis de discontinuidades entre guías de diferente sección transversal.

La forma habitual de enfrentarse al problema de la caracterización de una discontinuidad abrupta entre dos guías de onda es utilizar la técnica de ajuste modal o *mode matching* [Page1992]. Este método se basa en igualar las componentes tangenciales de campo a ambos lados de la discontinuidad, para posteriormente expandir dichos campos en función de los modos de ambas guías y resolver el sistema resultante. En el caso de que se necesite analizar dispositivos con múltiples discontinuidades, como un dispositivo de interferencia multimodal (*Multimode Interference* (MMI)) o un *grating*, lo más conveniente es comenzar dividiendo la estructura en un cierto número de secciones, cada una de las cuales estará definida por una geometría transversal z -invariante y caracterizada por una matriz de propagación diagonal, ya que las ondas incidentes y reflejadas se encuentran desacopladas. Estas secciones estarán conectadas entre sí por interfaces abruptos, en los que se va a producir el acoplo entre las ondas incidentes y reflejadas y que se pueden caracterizar mediante la técnica de ajuste modal. Finalmente, concatenando las matrices de propagación de cada una de las secciones y las que caracterizan las discontinuidades se puede analizar el dispositivo completo. A partir de este procedimiento general se pueden desarrollar estrategias de cálculo muy diferentes. Por ejemplo, para la discretización transversal se encuentran disponibles todas las técnicas locales o globales comentadas anteriormente, mientras que para el cálculo de la propagación en las secciones

z -invariantes se pueden utilizar distintas versiones de métodos BPM. Por su importancia, conviene destacar aquí la existencia de una familia de técnicas, denominada de forma genérica *Método de las Líneas* (*Method of Lines* (MoL)) [Pregla1989], [Pregla1992], [Scarmozzino2000], que se caracteriza por tratar la propagación en dirección longitudinal de forma analítica, con lo que desaparecen los problemas asociados a la aproximación paraxial de los métodos BPM.

1.3. Breve Introducción a los Métodos Globales

Los métodos globales se basan en la expansión de la función incógnita del problema a resolver, en una suma finita y ponderada de funciones base globales, esto es, definidas para todo el dominio computacional. Por ejemplo, la expansión en serie sobre el espacio funcional global $\varphi(x)$ del campo eléctrico $e_y(x)$ se puede expresar como

$$e_y(x) \approx \sum_{k=0}^N \Phi_k \cdot \varphi_k(x) \quad (1.1)$$

donde los factores Φ_k reciben el nombre de coeficientes del desarrollo en serie o *coeficientes espectrales* y N limita el número de funciones base que se van a usar en el desarrollo.

Evidentemente, la eficiencia de cualquier método global vendrá determinada en primera instancia por la elección del espacio funcional. De entre las diferentes opciones existentes en la bibliografía, en esta Tesis se ha decidido trabajar con dos de las familias de funciones base más frecuentemente usadas, las de *Hermite-Gauss* y las de *Fourier*.

En la figura 1.2(a) se han representado los coeficientes espectrales del desarrollo en serie de Hermite-Gauss de la distribución transversal de campo eléctrico $e_y(x)$ del modo TE_0 de un *slab* de salto de índice para una frecuencia normalizada $V = 6,8$. Sin entrar en los detalles del proceso de cálculo de estos coeficientes, lo cierto es que resulta evidente que con los siete primeros términos del desarrollo va a ser suficiente para obtener una buena representación de dicho campo, ya que $|\Phi_k|_{k \geq 7} \approx 0$. Si se tiene en cuenta además que, dada la simetría de la distribución espacial de campo, los coeficientes impares son nulos, el desarrollo (1.1) se podrá escribir como

$$e_y(x) \approx \Phi_0 \cdot \varphi_0(x) + \Phi_2 \cdot \varphi_2(x) + \Phi_4 \cdot \varphi_4(x) + \Phi_6 \cdot \varphi_6(x) \quad (1.2)$$

En la figura 1.2(b) se han representado cada uno de los sumandos $\Phi_k \cdot \varphi_k(x)$ que aparecen en la expresión anterior, así como el resultado de la suma, que se corresponde aproximadamente con $e_y(x)$. Estas curvas ponen de manifiesto que, a diferencia de lo que ocurre con las técnicas de discretización de carácter local, en los métodos globales cada uno de los términos del desarrollo contribuye a la formación de la función aproximada sobre todo el dominio computacional. Por otro lado, queda también claro que los coeficientes más relevantes suelen ser los que se encuentran en la zona baja del espectro, por lo que habitualmente es suficiente con incluir en los desarrollos en serie sólo las funciones base de menor orden.

Como resultado del proceso de discretización transversal de un problema, los métodos globales dan lugar a matrices densas y en general de tamaño reducido, lo que contrasta con las matrices dispersas de gran tamaño que suelen aparecer en los métodos locales. Aplicados sobre cualquiera de las ecuaciones de caracterización modal que se desarrollarán en el siguiente capítulo, los métodos globales permiten formular un problema de

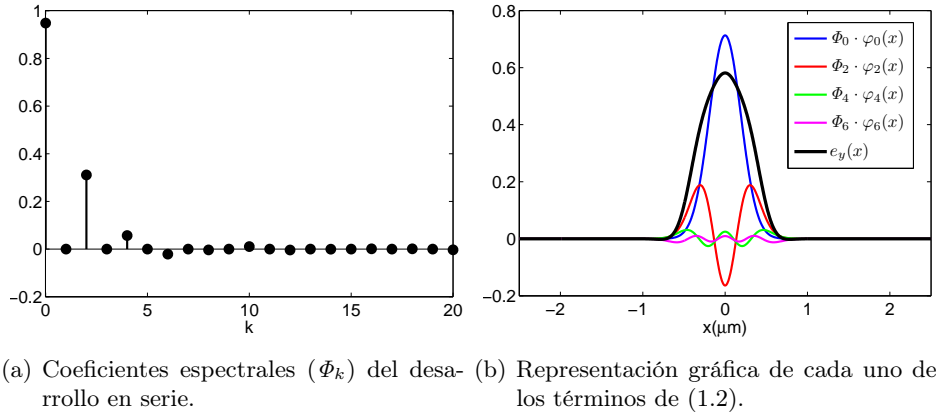


Figura 1.2: Desarrollo en serie de Hermite-Gauss de la distribución transversal de campo eléctrico del modo TE_0 de un *slab* de salto de índice ($V = 6,8$).

autovalores estándar

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}} \Phi = \gamma^2 \Phi \quad (1.3)$$

donde γ representa la constante de propagación compleja y $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ es una matriz densa de tamaño $N \times N$, que recibe el nombre de matriz de discretización transversal o matriz del sistema.

En cuanto a los autovectores Φ , es importante destacar que se corresponden con los coeficientes del desarrollo en serie de la distribución espacial de campo buscada y no con valores de dicho campo, como es característico de los métodos locales. Por lo tanto, parece lógico pensar que los métodos globales serán competitivos siempre que el ancho de banda espectral del campo que se desea calcular sea pequeño, ya que de esa forma se podrán utilizar pocos coeficientes en su desarrollo en serie y el tamaño de la matriz del sistema $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ será reducido. Por supuesto, existen otros muchos factores que influyen en las prestaciones de los métodos globales, como por ejemplo la existencia o no de transformada rápida para el cálculo de los coeficientes espectrales o el cumplimiento de las condiciones de contorno en los extremos del dominio de definición del problema. Estos y otros aspectos serán tratados en profundidad en el **Capítulo 3**.

1.4. Objetivos de la Tesis

El objetivo fundamental de esta Tesis es desarrollar herramientas numéricas de simulación eficientes para el análisis y diseño de dispositivos fotónicos. Los métodos propuestos, pertenecientes a la familia de *técnicas globales*, permiten abordar dos tipos de problemas diferentes: i) La caracterización modal de guías de onda ópticas y ii) el análisis de discontinuidades entre guías de diferente sección transversal.

Es conveniente aclarar aquí que ha quedado fuera de los objetivos definidos para el desarrollo de esta Tesis el estudio de la propagación de la envolvente óptica en estructuras lentamente z -variantes mediante métodos BPM. El desarrollo de herramientas numéricas basadas en técnicas espectrales de discretización transversal y métodos BPM fue tratado en detalle por vez primera en [Wanguemert1999], tras lo cual aparecieron sucesivas mejoras que aumentaron sus prestaciones [Wanguemert2004], [Lopez2005], convirtiendo

1 Introducción

a este nuevo método en una alternativa competitiva en comparación con otras técnicas existentes en la bibliografía como las diferencias finitas o los elementos finitos. Los excelentes resultados obtenidos por los métodos BPM-espectrales en problemas vectoriales indicaron claramente la dirección en la que se debía orientar el grueso del trabajo de esta Tesis. Tomando como punto de partida las herramientas espectrales de análisis modal disponibles [Molina1998], [Wanguemert1999], [Wanguemert2001] y aprovechando la experiencia y los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del método BPM-espectral basado en Fourier que se propuso en [Lopez2005], se definieron los siguientes objetivos intermedios:

- Mejorar las técnicas de caracterización modal basadas en el espacio funcional de Hermite-Gauss, aplicando los conceptos de transformación de variables y optimización de parámetros que se utilizaron con éxito en [Molina1998] y [Wanguemert2001] sobre el espacio funcional de Fourier.
- Incorporar en los métodos de análisis modal de Fourier la estrategia propuesta en [Lopez2005] para el cálculo eficiente de los productos de funciones, lo que va permitir mejorar las prestaciones en problemas vectoriales de guiado fuerte.
- Implementar una herramienta numérica basada en el espacio funcional de Fourier para el cálculo de discontinuidades abruptas entre guías con diferente sección transversal.

1.5. Aportaciones Relevantes de la Tesis

Tras el trabajo que se ha llevado a cabo a lo largo de estos últimos años, se puede afirmar que las herramientas numéricas de simulación basadas en métodos espectrales han mejorado notablemente tanto en prestaciones como en potencialidad de uso en situaciones de interés práctico, siendo ésta la principal contribución de esta Tesis. Evidentemente, este avance es el resultado del esfuerzo y dedicación de un conjunto de personas y no sólo del autor de estas líneas, por lo que evidentemente, tanto las aportaciones que se presentan a continuación y que serán descritas en detalle en capítulos posteriores, como las publicaciones a las que en ocasiones han dado lugar, se deben a todos ellos.

1.5.1. Aportaciones en el Ámbito del Análisis Modal

Las principales aportaciones de esta Tesis en el ámbito de la caracterización modal se muestran de forma resumida en la figura 1.3. Utilizando como criterio de clasificación el espacio funcional, los nuevos métodos que se han propuesto en este trabajo son:

1. Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo (Escalar)

Scalar A-HGDM [Ortega2003]

Este método, que pertenece a la familia de *métodos espectrales con transformación de variables*, introduce dos mejoras importantes respecto a los HGDM publicados con anterioridad:

- Sustituye el factor de escalado de las funciones base por una transformación de variables más general de tipo lineal $u = \alpha \cdot (x - o)$, donde el parámetro de centrado o será diferente de cero para problemas asimétricos.
- Determina de forma automática y con un coste computacional mínimo los parámetros óptimos de la transformación α^{OPT} , o^{OPT} .

Como se puso de manifiesto en [Ortega2003], los valores optimizados consiguen mejorar enormemente la precisión en problemas asimétricos o en modos cerca del corte, cuando la distribución de campo se encuentra muy expandida.

2. **Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo (Vectorial)
Vectorial A-HGDM**

El A-HGDM propuesto inicialmente es una herramienta de análisis modal escalar, que por lo tanto sólo va a proporcionar buenos resultados en dispositivos fabricados en bajo contraste. La ampliación al caso vectorial, manteniendo por supuesto los fundamentos del método original en lo referente al criterio de optimización de parámetros y a su algoritmo de cálculo, ha sido también desarrollada en esta Tesis. Las pruebas preliminares, realizadas sobre estructuras sencillas definidas por un contraste de índice moderado, han demostrando el buen comportamiento de la técnica en simulaciones vectoriales.

3. **Técnica de Análisis Modal basada en la FFT (Vectorial)
Vectorial FFT-MS [Ortega2006]**

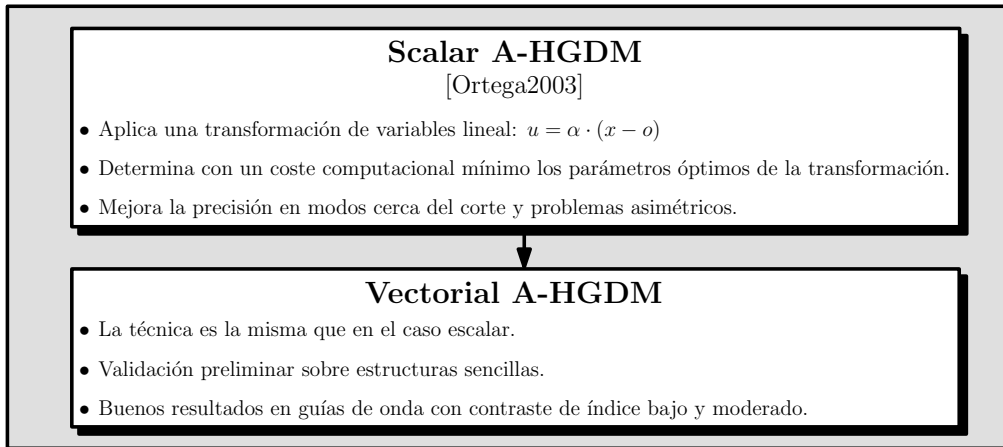
Esta técnica pertenece a la familia de métodos basados en la FFT, una alternativa a los métodos de descomposición de Fourier clásicos que no requiere el cálculo explícito de la matriz del sistema, lo que redundaría en unos menores requerimientos computacionales. La principal ventaja de la técnica propuesta radica en que independiza el número de puntos de discretización transversal del número de armónicos, mientras que en el resto de métodos basados en la FFT ambos deben ser iguales [Silvestre2005]. Esto permite aumentar la densidad de malla espacial sin incrementar el tamaño del problema de autovalores, lo que mejora la precisión en problemas vectoriales de guiado fuerte [Ortega2006].

4. **Técnica de Análisis Modal basada en la FFT con PML (Vectorial)
Vectorial FFT-MS + PML [Ortega2007]**

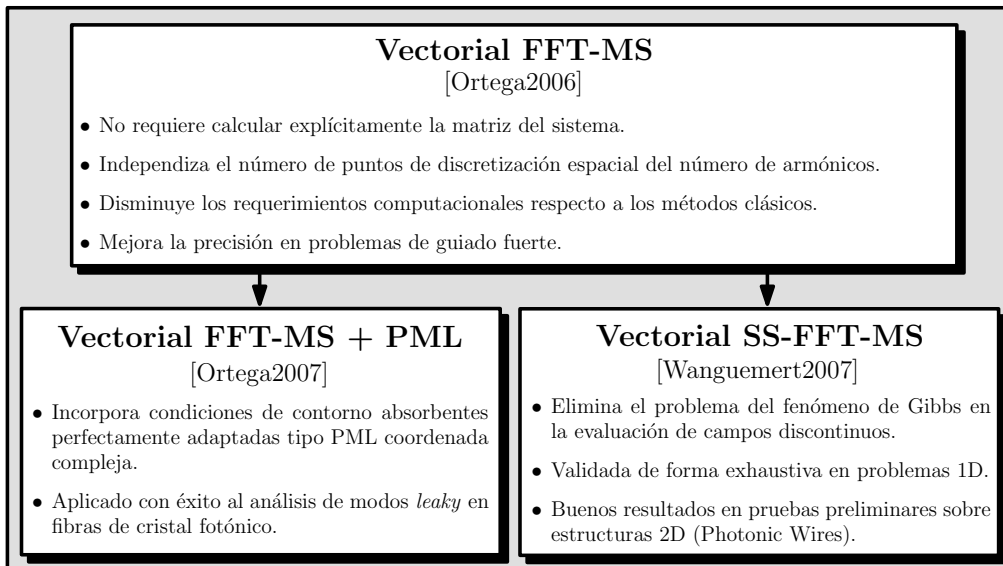
Otra de las aportaciones relevantes de este trabajo es la incorporación a la herramienta de análisis modal vectorial referida anteriormente de condiciones de contorno absorbentes perfectamente adaptadas tipo PML coordinada compleja, que hacen posible analizar estructuras cuyos modos presentan pérdidas por radiación (modos *leaky*), como los que aparecen por ejemplo en ciertas fibras de cristal fotónico [Ortega2007].

5. **Eliminación del fenómeno de Gibbs en los FFT-MS (Vectorial)
Vectorial SS-FFT-MS [Wanguemert2007]**

Respecto a esta última aportación, conviene aclarar que pertenece más al epígrafe de líneas futuras de trabajo que al cuerpo de la Tesis, ya que se encuentra actualmente en una fase de desarrollo muy preliminar. Esta nueva técnica permite eliminar el problema del fenómeno de Gibbs en la evaluación de campos discontinuos, una de las principales limitaciones de los métodos espectrales cuando se aplican a problemas de caracterización modal vectorial de dispositivos nanofotónicos como los *Photonic Wires*. Las pruebas realizadas hasta el momento parecen indicar que en estos casos el SS-FFT-MS consigue aumentar extraordinariamente la velocidad de convergencia con el número de armónicos, alcanzando niveles de precisión que no es posible conseguir con el FFT-MS.



(a) Espacio funcional de Hermite-Gauss.



(b) Espacio funcional de Fourier.

Figura 1.3: Aportaciones realizadas en el ámbito del análisis modal.

1.5.2. Aportaciones en el Ámbito del Análisis de Discontinuidades

La figura 1.4 recoge de forma esquemática las aportaciones realizadas en esta área, caracterizadas todas ellas por utilizar un esquema de discretización transversal basado en el espacio funcional de Fourier junto con el método de expansión modal. Por este motivo, el nombre genérico que recibe esta familia de técnicas es el de *Métodos de Expansión Modal de Fourier* (*Fourier Based Eigenmode Expansion Method* (Fourier-EEM)).

1. Método de Expansión Modal de Fourier (Escalar)

Scalar Fourier-EEM [Ortega2005], [Molina2005]

El Fourier-EEM fue propuesto originalmente en una versión simplificada bajo la aproximación escalar [Ortega2005], que incluía condiciones de contorno PML para absorber la radiación saliente, así como un algoritmo para el cálculo de estructuras

con múltiples discontinuidades como los MMI. Posteriormente, esta técnica fue utilizada con éxito para el análisis y diseño de un circuito fotónico integrado fabricado en tecnología de bajo contraste *Silica on Silicon* [Molina2005]. Esta aplicación de carácter práctico demostró la competitividad del Fourier-EEM en cuanto a tiempos de cómputo y precisión de los resultados obtenidos respecto a algunas de las herramientas de simulación comerciales disponibles en el mercado.

2. Inclusión de los modos Floquet en el Fourier EEM (Escalar)

Scalar Fourier-EEM + Floquet Modes

Incorporando a la técnica inicial el formalismo de los *modos Floquet*, se ha conseguido mejorar de forma considerable su eficiencia computacional cuando se aplica a la caracterización de problemas periódicos tipo *grating*, compuestos habitualmente por cientos o incluso miles de secciones. Al incluir tanto los modos guiados como un subconjunto representativo de los radiados y utilizar condiciones de contorno PML, la técnica propuesta es capaz de analizar *Fiber Bragg Grating* (FBG) definidos sobre fibras multimodo y calcular las pérdidas por radiación que presenta la estructura, lo que no es posible por ejemplo con las técnicas basadas en la teoría de modos acoplados [Lu2006].

3. Método de Expansión Modal de Fourier (Vectorial)

Vectorial Fourier-EEM

Como no podía ser de otra forma, la última aportación incluida en esta Tesis en el ámbito de la caracterización de dispositivos ópticos con discontinuidades abruptas en la dirección de propagación es la extensión al caso vectorial del Fourier-EEM. Esto va a permitir analizar de forma precisa estructuras fabricadas en tecnologías de alto contraste. En su estado actual de desarrollo, todavía muy preliminar, la nueva técnica vectorial sólo está preparada para estudiar discontinuidades aisladas, como el acoplo directo entre guías ópticas de diferente sección transversal.

De momento, estas dos últimas aportaciones han dado lugar únicamente a un congreso nacional. Sin embargo, consideramos que su relevancia es suficiente como para que sean difundidas en un foro más amplio, por lo que se incluirán en un artículo que se enviará próximamente para su posible publicación en una revista internacional.

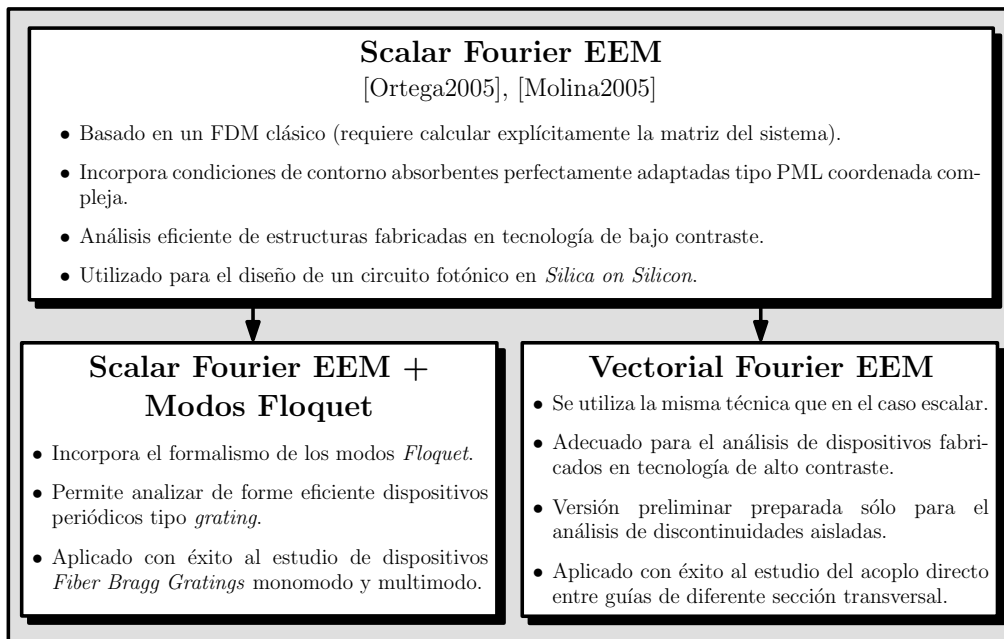


Figura 1.4: Aportaciones realizadas en el ámbito del análisis de discontinuidades.

1.6. Organización de la Tesis

Los contenidos que se incluyen en esta memoria de Tesis han sido estructurados en siete capítulos. El primero de ellos comienza con una breve introducción a la óptica integrada, que sirve para contextualizar el trabajo desarrollado y justificar la necesidad del mismo. En el último se incluyen como es habitual las conclusiones y líneas futuras. Del resto de capítulos se presentan a continuación los contenidos más relevantes.

Capítulo 2: En este capítulo se realiza un breve repaso de aquellos conceptos electromagnéticos que van a ser de utilidad para el desarrollo posterior de los contenidos de la Tesis. Los aspectos más relevantes tratados en el mismo son:

- Formular las ecuaciones de análisis o caracterización modal para las componentes transversales de campo eléctrico y de campo magnético.
- Comparar el espectro modal de soluciones para estructuras abiertas y estructuras cerradas.
- Enunciar las condiciones de continuidad y salto que deben cumplir los campos electromagnéticos en los interfaces entre diferentes materiales.
- Definir la relación de ortogonalidad entre modos, que va a ser la base de la técnica de ajuste modal o *mode matching* que se desarrollará a continuación.
- Formular la técnica de ajuste modal, deduciendo su expresión matricial en función de los coeficientes de expansión modal y señalando los factores que influyen en su precisión.
- Estudiar los diferentes tipos de condiciones de contorno con las que habitualmente se limita la ventana de cómputo en problemas de simulación numérica. Por su

relevancia, se prestará especial atención a las condiciones de contorno absorbentes perfectamente adaptadas PML en su versión variable compleja.

Capítulo 3: Éste es quizá el capítulo más importante de la Tesis. En él se desarrollan, para las ecuaciones de análisis modal deducidas anteriormente, diferentes estrategias espectrales de discretización transversal, que son las que finalmente dan lugar a las herramientas numéricas de simulación que se presentarán en los capítulos siguientes. A continuación se enumeran sus principales contenidos:

- Realizar una somera clasificación de las técnicas de discretización transversal más habituales, estableciendo una primera diferenciación entre *Métodos Globales* y *Métodos Locales*.
- Formular el método de Galerkin, lo que permite introducir el concepto de operador matricial, de gran importancia en los desarrollos posteriores. Esta formulación es en principio genérica, aunque posteriormente se particularizará para los espacios funcionales de Fourier y Hermite-Gauss.
- Realizar una breve introducción a los modernos métodos de resolución de problemas de autovalores, diferenciando entre las técnicas de resolución directa y las iterativas.
- Particularizar el método de Galerkin para el espacio funcional de Fourier. En este epígrafe se comenzará repasando conceptos básicos de teoría de señales, como las transformadas de Fourier directa e inversa o el enventanado, muestreo y suavizado de funciones, para finalmente formular la *Técnica de Análisis Modal basada en la FFT* (FFT-MS) que, como se adelantó anteriormente, constituye una de las principales aportaciones de esta Tesis.
- Particularizar el método de Galerkin para el espacio funcional de Hermite-Gauss, lo que combinado con la técnica de transformación de variables es el fundamento del *Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo* (A-HGDM), al que se dedicará el **Capítulo 4** y que constituye otra de las aportaciones relevantes de la Tesis.

Capítulo 4: En este capítulo se desarrolla una herramienta numérica de caracterización modal basada en el espacio funcional de Hermite-Gauss para el análisis de guías de onda ópticas. La nueva técnica, denominada *Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo* (A-HGDM), pertenece a la familia de los *métodos espectrales con transformación de variables* e incorpora una estrategia de optimización que permite determinar de forma automática y con un reducido coste computacional los parámetros óptimos de la transformación. Aunque el grueso de las simulaciones realizadas se ha centrado en problemas escalares, analizando guías *buried* cercanas al corte y un acoplador direccional en *rib*, los resultados preliminares obtenidos para situaciones vectoriales hacen pensar que la técnica de optimización propuesta sigue siendo útil incluso en esos casos.

Capítulo 5: Este capítulo, sin duda el más completo en cuanto a resultados, se dedica a comprobar el buen funcionamiento y evaluar las prestaciones de la *Técnica de Análisis Modal basada en la FFT* (FFT-MS) que se formuló en el **Capítulo 3**. Las simulaciones realizadas, que han sido siempre vectoriales, se han organizado de la siguiente forma:

1 Introducción

- En primer lugar se ha realizado una validación preliminar del método, en la que se ha prestado especial atención a la influencia que tienen los parámetros numéricos más relevantes en la precisión de los resultados obtenidos. Por otro lado, en este mismo epígrafe se ha justificado de forma intuitiva la necesidad de incorporar condiciones de contorno PML en problemas de análisis modal.
- A continuación se ha realizado un estudio exhaustivo del funcionamiento de una guía *rib*, que es la estructura de prueba que se utiliza habitualmente para analizar el rendimiento de las herramientas numéricas de simulación. Este estudio incluye variaciones en la profundidad de grabado e incluso materiales con diferentes niveles de pérdidas.
- Por último se han analizado numerosas configuraciones de fibras de cristal fotónico, calculando algunos de sus parámetros característicos más habituales como la dispersión, el área efectiva, las pérdidas por confinamiento, etc.

Capítulo 6: En este capítulo se presenta la última aportación relevante de la Tesis, una técnica numérica para el análisis eficiente de estructuras ópticas con discontinuidades abruptas en la dirección de propagación. Esta técnica, que recibe el nombre de *Método de Expansión Modal de Fourier* (Fourier-EEM), incorpora condiciones de contorno PML que se encargan de absorber la radiación saliente impidiendo que ésta llegue a los extremos de la ventana de cómputo. Además se incluye un epígrafe en el que se añade el formalismo de los *modos Floquet*, lo que va a permitir analizar dispositivos periódicos como los *Fiber Bragg Grating*. El funcionamiento del método en su versión escalar se ha validado de forma exhaustiva, comenzando por analizar problemas muy sencillos como una fibra óptica radiando al aire o la unión de dos fibras ligeramente desalineadas. Seguidamente se ha abordado un problema algo más complicado, como es el análisis y diseño de un dispositivo de interferencia multimodal en tecnología de bajo contraste *Silica on Silicon*. Finalmente se han caracterizado FBG basados en fibras monomodo y multimodo. En cuanto a simulaciones vectoriales, sólo se han realizado algunas pruebas sencillas, como la caracterización del acoplo directo entre guías *rib* de diferente sección transversal.

2 Fundamentos Electromagnéticos

2.1. Introducción

EN este capítulo se presentan aquellos conceptos electromagnéticos que se consideran básicos para el desarrollo posterior de los contenidos de la Tesis. Sin duda alguna, las expresiones más relevantes de las que se deducen a continuación son las ecuaciones vectoriales de análisis modal (2.22)-(2.23) y (2.83). Estas ecuaciones carecen de solución analítica para la mayoría de las estructuras de interés en el campo de la óptica, lo que justifica la necesidad de desarrollar métodos numéricos de simulación eficientes como los que se van a proponer en esta Tesis.

Otro contenido interesante incluido en este capítulo es la técnica de ajuste modal o *mode matching*. Esta técnica va a permitir, una vez resuelto el problema de la caracterización modal de una guía de onda, afrontar otro tipo de situaciones que se producen frecuentemente en la práctica, como el acoplo eficiente de potencia óptica a una estructura de guiado o el análisis de discontinuidades abruptas entre guías con diferente sección transversal.

Finalmente, también se dedica un apartado a estudiar los diferentes tipos de condiciones de contorno que utilizan habitualmente las herramientas numéricas de simulación para limitar el dominio computacional, prestando especial atención por su relevancia a las condiciones de contorno absorbentes tipo PML (*Perfectly Matched Layer*).

2.2. Formulación de las Ecuaciones de Análisis Modal

2.2.1. Ecuaciones de Helmholtz

Como es bien sabido, las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento electromagnético a nivel macroscópico de una determinada región del espacio. En ausencia de fuentes y cargas libres y asumiendo régimen permanente sinusoidal, dichas ecuaciones quedan:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j \omega \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j \omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (2.2)$$

donde se ha supuesto que los materiales que se encuentran contenidos en dicho espacio son lineales e isótropos, quedando caracterizados por tanto por dos magnitudes escalares: i) la *constante dieléctrica* $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) = n^2(\mathbf{r}, \omega)$, siendo $n(\mathbf{r}, \omega)$ el índice de refracción del material y ii) la *permeabilidad magnética* $\mu = \mu(\mathbf{r}, \omega)$, que en problemas de óptica integrada se suele igualar a la unidad porque los materiales involucrados habitualmente se pueden considerar como no magnéticos.

Aplicando el operador divergencia a las expresiones anteriores y como consecuencia directa de la ausencia de cargas eléctricas y magnéticas en el problema, se obtienen las

denominadas condiciones de cero-divergencia

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.4)$$

A continuación resulta conveniente eliminar los campos \mathbf{H} y \mathbf{E} de las ecuaciones (2.1) y (2.2) respectivamente, con lo queda

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k_0^2 \epsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \mathbf{H}) = k_0^2 \mathbf{H} \quad (2.6)$$

donde $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}$ es la constante de propagación en el vacío.

Aplicando la relación vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F})$ y las condiciones de cero-divergencia (2.3) y (2.4) se obtienen finalmente las conocidas ecuaciones de Helmholtz vectoriales

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = -\nabla (\nabla (\ln \epsilon) \cdot \mathbf{E}) \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \epsilon \mathbf{H} = -\nabla (\ln \epsilon) \times \nabla \times \mathbf{H} \quad (2.8)$$

En el caso general, todas las componentes de los campos eléctrico y magnético se encuentran acopladas entre sí a través del segundo miembro de (2.7) y (2.8). Este acoplo desaparece por ejemplo para medios homogéneos ($\nabla \epsilon = 0$), ya que el lado derecho de las igualdades se anula.

2.2.2. Ecuaciones de Análisis Modal

En la figura 2.1 se muestra la geometría que describe de forma genérica los problemas que se van a estudiar en este trabajo. El sistema de coordenadas elegido es el de cartesianas rectangulares, donde x e y representan las coordenadas transversales y z la longitudinal. De esta forma, las distribuciones espaciales de campo se pueden descomponer en sus componentes longitudinales (\mathbf{E}_z y \mathbf{H}_z) y transversales (\mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z \quad (2.10)$$

Se puede demostrar que, cuando las ecuaciones de Helmholtz se aplican a estructuras invariantes en la dirección de propagación ($\epsilon(x, y, z) = \epsilon(x, y)$), las componentes longitudinales y transversales de campo quedan desacopladas [Tamir1988], [Marz1995]. En el ámbito de la óptica lo habitual es plantear los problemas en función de estas últimas, llegándose a

$$\nabla^2 \mathbf{E}_t + k_0^2 \epsilon \mathbf{E}_t = -\nabla_t (\nabla_t (\ln \epsilon) \cdot \mathbf{E}_t) \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_t + k_0^2 \epsilon \mathbf{H}_t = -\nabla_t (\ln \epsilon) \times \nabla_t \times \mathbf{H}_t \quad (2.12)$$

donde el nuevo operador ∇_t viene dado por

$$\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (2.13)$$

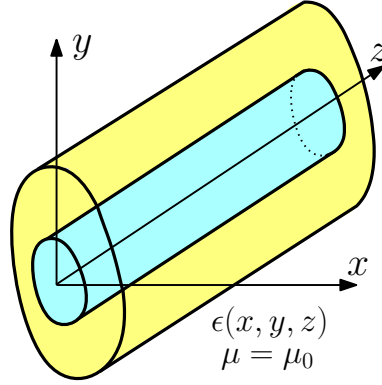


Figura 2.1: Representación esquemática de la geometría de una guía de onda óptica y sistema de coordenadas elegido.

Las expresiones (2.11) y (2.12) plantean respectivamente dos sistemas independientes de ecuaciones diferenciales acopladas en función de las componentes transversales de campo eléctrico (*Formulación-E*) o de campo magnético (*Formulación-H*), que de forma genérica reciben el nombre de *ecuación de ondas*. Se puede demostrar además que estas ecuaciones soportan un conjunto de soluciones del tipo

$$\mathbf{E}_t^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{e}_t^{(m)}(x, y) \cdot e^{\mp\gamma_m z} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{H}_t^{(m)}(x, y, z) = \pm \mathbf{h}_t^{(m)}(x, y) \cdot e^{\mp\gamma_m z} \quad (2.15)$$

Cada una de estas soluciones, identificadas individualmente por el índice m , recibe el nombre de *modo* y queda caracterizada por su distribución de campo ($\mathbf{e}_t^{(m)}(x, y)$ y $\mathbf{h}_t^{(m)}(x, y)$) y su constante de propagación compleja¹ $\gamma_m = \alpha_m + j \cdot \beta_m$.

Sustituyendo (2.14) y (2.15) en la ecuación de ondas correspondiente y tras algunas operaciones se obtienen las ecuaciones características o ecuaciones de análisis modal para ambas formulaciones

$$[\nabla_t^2 + k_0^2 \epsilon + \nabla_t (\nabla_t (\ln \epsilon) \cdot)] \mathbf{e}_t = \mathcal{H}_e \mathbf{e}_t = -\gamma^2 \mathbf{e}_t \quad (2.16)$$

$$[\nabla_t^2 + k_0^2 \epsilon + \nabla_t (\ln \epsilon) \times \nabla_t \times] \mathbf{h}_t = \mathcal{H}_h \mathbf{h}_t = -\gamma^2 \mathbf{h}_t \quad (2.17)$$

donde evidentemente no aparece el índice m , que sólo se utiliza para identificar a cada solución individual de estas ecuaciones.

Las expresiones (2.16) y (2.17) constituyen dos problemas de autovalores estándar, en los que las autofunciones de los operadores lineales \mathcal{H}_e y \mathcal{H}_h se corresponden respectivamente con las distribuciones transversales de campo eléctrico y de campo magnético de los modos que soporta la estructura. Por otro lado es importante destacar que, puesto que tanto \mathcal{H}_e como \mathcal{H}_h describen el mismo sistema físico, ambos operadores presentan el mismo conjunto de autovalores γ^2 [Marcuse1992].

Sobre la conveniencia de usar la formulación en campo eléctrico o en campo magnético, la opinión más extendida en la bibliografía es la que considera preferible utilizar la *formulación-H* [Marz1995]. Esta decisión se justificaría atendiendo a la continuidad de

¹En el epígrafe 2.3 se realizará una clasificación de los diferentes tipos de modos que pueden soportar las guías dieléctricas en función de la posición de su constante de propagación en el plano complejo y de su distribución transversal de campo.

las componentes transversales del campo magnético en los interfaces entre dieléctricos, que en principio haría más simple el cumplimiento de las condiciones de contorno en el proceso de discretización transversal asociado a la resolución numérica del problema. Esta afirmación es sin embargo contraria a la experiencia obtenida tras la aplicación de los métodos de descomposición de Fourier al análisis vectorial de estructuras de alto contraste (que serían las más sensibles a los problemas de falta de continuidad del campo eléctrico), ya que se ha comprobado que ambas formulaciones dan lugar a operadores lineales discretizados con exactamente los mismos autovalores [Marcuse1992].

Con independencia del tipo de formulación usada, las componentes transversales de campo no resueltas se pueden obtener fácilmente utilizando las siguientes expresiones

$$\mathbf{e}_t^{(m)} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{j k_0 \gamma_m} \times \left[\nabla_t \times \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \times \mathbf{h}_t^{(m)} - k_0^2 \mathbf{h}_t^{(m)} \right] \quad (2.18)$$

$$\mathbf{h}_t^{(m)} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{-j k_0 \gamma_m} \times \left[\nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t^{(m)} - k_0^2 \epsilon \mathbf{e}_t^{(m)} \right] \quad (2.19)$$

Por último, la componente longitudinal de campo se puede calcular a partir de las componentes transversales usando

$$e_z^{(m)} = \frac{1}{\gamma_m} \left(\nabla_t \cdot \mathbf{e}_t^{(m)} + \nabla_t (\ln \epsilon) \cdot \mathbf{e}_t^{(m)} \right) \quad (2.20)$$

$$h_z^{(m)} = \frac{1}{\gamma_m} \nabla_t \cdot \mathbf{h}_t^{(m)} \quad (2.21)$$

2.2.3. Simplificaciones de la Ecuación Modal

Una de las principales dificultades a la hora de realizar la caracterización modal de un dispositivo óptico es que en general su ecuación característica carece de solución analítica, lo que hace necesario en la mayoría de las ocasiones recurrir a técnicas de resolución numérica. Sin embargo, la simulación completa de la ecuación modal vectorial resulta enormemente costosa desde el punto de vista computacional, por lo que resulta interesante disponer de modelos simplificados que permitan obtener resultados aproximados con un menor esfuerzo en cuanto a tiempos de cálculo y requerimientos de memoria. Aparecen así dos simplificaciones de la ecuación modal vectorial, que reciben respectivamente los nombres de *aproximación semivectorial* y *aproximación escalar*. En adelante y por simplicidad, los desarrollos se realizarán exclusivamente utilizando la formulación en campo eléctrico, entendiendo que el mismo proceso es aplicable sin dificultad alguna a la *Formulación-H*.

El punto de partida será la ecuación vectorial de análisis modal (2.16) escrita de forma explícita en función de las componentes transversales de campo eléctrico e_x y e_y :

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon e_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial (\epsilon e_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\epsilon e_y)}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial y} = -\gamma^2 e_x \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + k_0^2 \epsilon e_y + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial (\epsilon e_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\epsilon e_y)}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial y} = -\gamma^2 e_y \quad (2.23)$$

Las soluciones de este par de ecuaciones diferenciales acopladas serán en general híbridas, entendiendo como tales aquellas en las que ambas componentes e_x y e_y son distintas de cero. Sin embargo en la mayoría de los dispositivos ópticos se cumple que, para cada uno de los modos de la estructura, una polarización es claramente dominante sobre la

otra. Se pueden definir por tanto dos familias de soluciones de las ecuaciones (2.22) y (2.23), que se denominan habitualmente *Quasi-TE* ($e_x \gg e_y$) y *Quasi-TM* ($e_y \gg e_x$). La aproximación semivectorial consiste en conservar únicamente la componente dominante de cada modo, lo que equivale a suponer que los modos son linealmente polarizados. Haciendo $e_y = 0$ en (2.22) y $e_x = 0$ en (2.23) se obtienen dos ecuaciones diferenciales desacopladas (modelo semivectorial)

$$\text{Quasi-TE} \quad \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon e_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial (\epsilon e_x)}{\partial x} \right) \right] = -\gamma^2 e_x \quad (2.24)$$

$$\text{Quasi-TM} \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + k_0^2 \epsilon e_y + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial (\epsilon e_y)}{\partial y} \right) \right] = -\gamma^2 e_y \quad (2.25)$$

cuya resolución numérica resulta mucho menos costosa al haberse reducido a la mitad la dimensión del problema.

Estas expresiones se pueden simplificar aún más si la estructura que se desea analizar cumple con la condición de guiado débil, es decir, si la diferencia entre los índices de refracción de los materiales que componen la sección transversal de la estructura es lo suficientemente pequeña

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \approx 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \approx 0 \quad (2.26)$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.25) y (2.24) se obtiene el modelo escalar de la ecuación de análisis modal

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon e = -\gamma^2 e \quad (2.27)$$

donde se puede comprobar que ambas polarizaciones se encuentran desacopladas y son degeneradas, es decir, $e_x = e_y = e$.

A la vista de la simplicidad de (2.27), resulta evidente que la aproximación escalar va a reducir considerablemente los requerimientos computacionales asociados a la resolución numérica del problema de caracterización modal, a costa eso sí de una menor precisión en los resultados obtenidos. En general se puede afirmar que la aproximación escalar sólo va a proporcionar buenos resultados cuando se aplique al análisis de dispositivos ópticos fabricados en tecnologías de bajo contraste como *Silica on Silicon* ($\Delta n \approx 0,75\%$). Por otro lado, su utilización en tecnologías de muy alto contraste (p.ej. *Silicon on Insulator* ($\Delta n \approx 2\%$)) no resulta conveniente, ya que en estas estructuras no se cumple la condición de guiado débil (2.26).

2.2.4. Ecuación Modal Normalizada

La ecuación de análisis modal, tal y como se encuentra formulada en (2.22) y (2.23), se define en base a parámetros físicos como la constante de propagación en el vacío k_0 y el perfil de permitividad eléctrica de la guía $\epsilon(x, y)$. Sin embargo, en ciertos casos² resulta mucho más cómodo trabajar con una versión algo diferente de esta ecuación, que recibe el nombre de *ecuación de análisis modal normalizada*. En estructuras con una zona de guiado claramente identificable como la que se representa en la figura 2.2(a), el proceso

²Por ejemplo, cuando se emplea el espacio funcional de Hermite-Gauss en el proceso de discretización transversal de la estructura [Gallawa1991], [Weisshaar1995].

2 Fundamentos Electromagnéticos

de normalización se basa en las siguientes definiciones [Weisshaar1995]:

1. Coordenadas transversales normalizadas \tilde{x} e \tilde{y}

$$\tilde{x} = \frac{x}{d_x} \quad , \quad \tilde{y} = \frac{y}{d_y} \quad (2.28)$$

2. Permitividades normalizadas $\tilde{\epsilon}(\tilde{x}, \tilde{y})$ y $\bar{\epsilon}(\tilde{x}, \tilde{y})$, representadas en las figuras 2.2(b)-(c) y que van a participar respectivamente en los términos escalar y de polarización/acoplo de la ecuación de caracterización modal.

$$\tilde{\epsilon}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\epsilon(\tilde{x}, \tilde{y}) - \epsilon_s}{\epsilon_f - \epsilon_s} \quad , \quad \bar{\epsilon}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\epsilon(\tilde{x}, \tilde{y})}{\epsilon_s} \quad (2.29)$$

3. Frecuencias normalizadas V_x y V_y

$$V_x = k_0 \cdot d_x \cdot NA \quad , \quad V_y = k_0 \cdot d_y \cdot NA \quad (2.30)$$

donde $NA = \sqrt{\epsilon_f - \epsilon_s}$ representa la apertura numérica.

4. Constante de propagación normalizada b , que para los modos guiados se va a encontrar siempre comprendida entre cero (modo próximo al corte) y uno.

$$b = \frac{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - \epsilon_s}{\epsilon_f - \epsilon_s} \quad (2.31)$$

Aplicando estas definiciones sobre (2.22)-(2.23) y tras alguna manipulación, resulta fácil llegar a las siguientes expresiones, que reciben el nombre de *ecuación de análisis modal normalizada*

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_y^2} \frac{\partial^2 e_x}{\partial \tilde{y}^2} + k_0^2 \tilde{\epsilon} e_x + \frac{1}{V_x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\frac{1}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{1}{V_x} \frac{\partial (\bar{\epsilon} e_x)}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{V_y} \frac{\partial (\bar{\epsilon} e_y)}{\partial \tilde{y}} \right) \right] \\ - \frac{1}{V_x V_y} \frac{\partial^2 e_y}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} = b e_x \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_x^2} \frac{\partial^2 e_y}{\partial \tilde{x}^2} + k_0^2 \tilde{\epsilon} e_y + \frac{1}{V_y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\frac{1}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{1}{V_x} \frac{\partial (\bar{\epsilon} e_x)}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{V_y} \frac{\partial (\bar{\epsilon} e_y)}{\partial \tilde{y}} \right) \right] \\ - \frac{1}{V_x V_y} \frac{\partial^2 e_x}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} = b e_y \end{aligned} \quad (2.33)$$

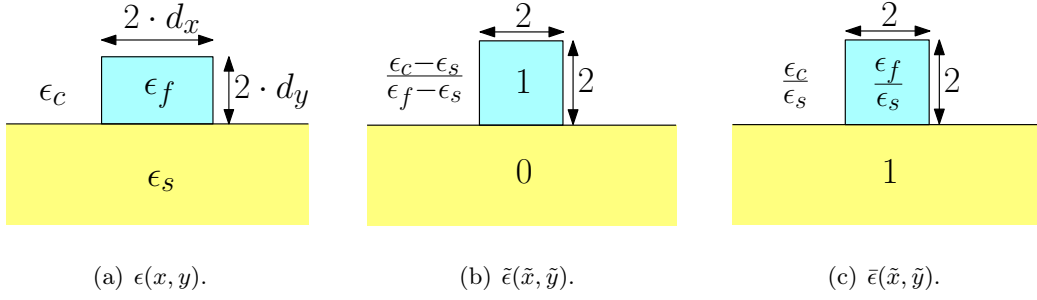


Figura 2.2: Definición de permitividades normalizadas.

2.3. Tipos de Soluciones de la Ecuación de Análisis Modal

2.3.1. Soluciones de la Estructura Abierta

La Figura 2.3 representa esquemáticamente los tipos de soluciones de la ecuación de análisis modal aplicada a una guía dieléctrica sin pérdidas compuesta por un núcleo central con índice de refracción n_n , rodeado por una cubierta infinita con índice de refracción $n_c < n_n$. Por conveniencia, los ejes de la figura se han identificado respectivamente con la parte real e imaginaria del índice efectivo del modo (N_{eff}), definido como

$$N_{\text{eff}} = -\frac{j}{k_0}\gamma = -\frac{j}{k_0}(\alpha + j\beta) = \frac{\beta}{k_0} - j\frac{\alpha}{k_0} \quad (2.34)$$

De forma general, estas soluciones se pueden clasificar en³:

- **Modos Guiados:** Forman un conjunto discreto de soluciones caracterizado por presentar índices efectivos situados sobre el eje real y comprendidos entre los índices de refracción del núcleo y de la cubierta. Su distribución transversal de campo

³No se va a incluir en esta clasificación a los denominados *modos complejos* [Bienstman2001], [Oliner1981], ya que en dispositivos ópticos rara vez forman parte del conjunto de soluciones de la ecuación modal.

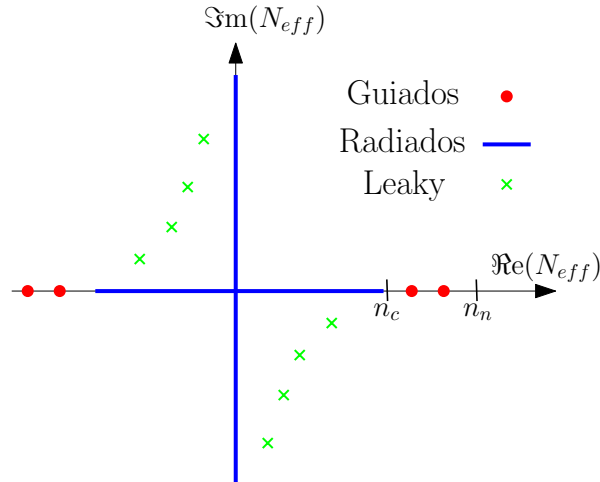


Figura 2.3: Soluciones de la ecuación de análisis modal de una estructura abierta.

se encuentra concentrada fundamentalmente en la zona del núcleo, decayendo exponencialmente en la cubierta hasta valer cero en el infinito. Puesto que su constante de atenuación es nula, son capaces de transmitir potencia sin ningún tipo de pérdidas.

- **Modos Radiados:** Forman un conjunto continuo de soluciones cuyos índices efectivos se encuentran situados sobre el eje real (Modos Radiados Propagándose) o sobre el eje imaginario (Modos Radiados Evanescentes). Los Modos Radiados se caracterizan por presentar una distribución transversal de campo de tipo oscilatorio, por lo que al contrario que los Modos Guiados no tienden a cero en el infinito. Este comportamiento, carente en principio de significado físico⁴, se justifica si se tiene en cuenta que un Modo Radiado nunca puede aparecer aisladamente. Sin embargo, considerados en conjunto, los Modos Radiados son los responsables de describir la pérdida de potencia asociada por ejemplo a la excitación de una guía de onda con una distribución de campo arbitraria o a la presencia de una discontinuidad abrupta en la dirección de propagación.
- **Modos *Leaky*:** Forman un conjunto discreto de soluciones caracterizadas por constantes de propagación situadas en el plano complejo. No pueden ser considerados modos en sentido estricto, ya que su perfil transversal de campo crece exponencialmente en la cubierta y carece por tanto de significado físico. A menudo se los identifica con modos situados por debajo de su frecuencia de corte, ya que cuando se alcanza ésta evolucionan hacia un modo guiado.

En estructuras sin pérdidas, se puede demostrar que el conjunto de los modos guiados y radiados forman un conjunto completo de soluciones, entendiendo como tal aquél que permite describir exactamente una distribución de campo arbitraria. Cuando la guía presenta pérdidas la completitud no está rigurosamente demostrada, pero en la práctica se comprueba que el conjunto de modos guiados y radiados son capaces de representar cualquier distribución de campo. Por el contrario, es sabido que el conjunto discreto de modos guiados y *leaky* no es completo [Snyder1983], pese a lo cual su uso resulta útil para describir algunas situaciones concretas [Rozzi1997].

2.3.2. Soluciones de la Estructura Cerrada

La resolución numérica de cualquier problema electromagnético suele comenzar con la imposición de una ventana de cómputo que delimite la región del espacio que se desea estudiar. En el ámbito de la óptica, esta ventana trunca el dominio original (infinito en su sección transversal) en uno de dimensión finita, imponiendo unas condiciones de contorno que provocan que el conjunto de soluciones de la estructura cerrada (ver figura 2.4) difiera del descrito en el apartado anterior. Asumiendo de nuevo que la estructura no presenta pérdidas⁵, estas diferencias se pueden resumir en:

- Desaparece el continuo de los modos radiados y en su lugar aparece un conjunto discreto de soluciones situadas también sobre los ejes real e imaginario. Estos nuevos modos son el resultado de un proceso de muestreo del espectro continuo original,

⁴ Siguiendo el criterio enunciado en [Bienstman2001], se entiende que un modo tiene significado físico cuando la presencia de ese modo individual puede ser verificada experimentalmente.

⁵ Lo que limita este estudio a condiciones de contorno de conductor perfecto o periódicas. La clasificación de las soluciones en presencia de condiciones de contorno absorbentes tipo PML se tratará en el epígrafe 2.7.4.3

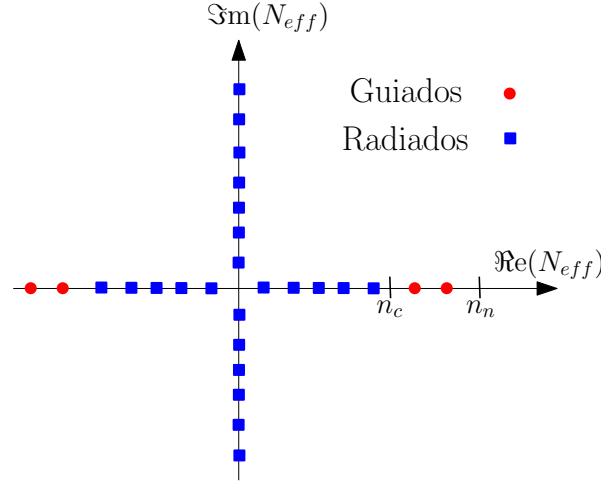


Figura 2.4: Soluciones de la ecuación de análisis modal de una estructura cerrada.

que viene determinado por las condiciones de contorno y el tamaño de la ventana de cómputo.

- Desaparecen los modos *leaky*, cuya distribución de campo (creciente de forma exponencial en la cubierta) no es compatible con el tamaño finito de la ventana de cómputo.

Los modos guiados de las estructuras abierta y cerrada van a coincidir siempre que el tamaño de la ventana de cómputo sea lo suficientemente grande como para que sus perfiles transversales de campo valgan cero en los extremos. Por otro lado y siguiendo la nomenclatura habitual, al conjunto discreto de soluciones que aparecen al imponer las condiciones de contorno se las seguirá denominando modos radiados. En el caso de que la estructura no presente pérdidas, los modos guiados y radiados constituyen aquí también un conjunto completo.

2.4. Relaciones de Ortogonalidad y Potencia

La propiedad de ortogonalidad de los modos de una guía tiene múltiples aplicaciones en problemas electromagnéticos básicos, como pueden ser la excitación de guías de onda o el análisis de discontinuidades. Para demostrar esta propiedad, lo habitual [Tamir1988], [Bienstman2001] es partir del *teorema de reciprocidad de Lorentz* particularizado para dos modos diferentes ($m \neq n$) de una guía z-invariante:

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathbf{E}^{(m)} \times \mathbf{H}^{(n)} - \mathbf{E}^{(n)} \times \mathbf{H}^{(m)} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = 0 \quad (2.35)$$

Teniendo en cuenta que sólo las componentes transversales de los modos contribuyen a (2.35) y considerando la propagación en ambos sentidos ($+\hat{\mathbf{z}}$ y $-\hat{\mathbf{z}}$) para el modo n -ésimo

se llega a:

$$\begin{aligned} -(\gamma_m + \gamma_n) \iint_S \left[\mathbf{e}_t^{(m)} \times \mathbf{h}_t^{(n)} - \mathbf{e}_t^{(n)} \times \mathbf{h}_t^{(m)} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS &= 0 \\ -(\gamma_m - \gamma_n) \iint_S \left[\mathbf{e}_t^{(m)} \times \mathbf{h}_t^{(n)} + \mathbf{e}_t^{(n)} \times \mathbf{h}_t^{(m)} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Finalmente, sumando ambas expresiones y suponiendo que los modos son no degenerados (es decir, que $\gamma_m \neq \gamma_n$) se obtiene la siguiente relación de ortogonalidad

$$\iint_S \left[\mathbf{e}_t^{(m)} \times \mathbf{h}_t^{(n)} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = 0 \quad \gamma_m \neq \gamma_n \quad (2.37)$$

En el caso de que no existan pérdidas, una deducción similar conduce a:

$$\iint_S \left[\mathbf{e}_t^{(m)} \times \mathbf{h}_t^{(n)*} \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = 0 \quad (2.38)$$

Como ya se adelantó en el punto anterior, supuesto que el conjunto de modos que se va a utilizar es completo, cualquier distribución arbitraria de campo en una sección transversal de la estructura se puede expresar como una combinación lineal de los modos de ésta. Considerando únicamente la propagación en sentido $+\hat{\mathbf{z}}$, se tendría entonces que

$$\mathbf{e}_t = \sum_m a_m \cdot \mathbf{e}_t^{(m)} \quad (2.39)$$

donde el símbolo \sum se debe entender en sentido amplio como la suma sobre el conjunto discreto de los modos guiados y la integral sobre el continuo de los modos radiados. Utilizando la relación de ortogonalidad definida anteriormente (2.37), los coeficientes de expansión modal a_m se pueden determinar a partir de la siguiente expresión

$$a_m = \frac{\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{h}_t^{(m)} \rangle}{\langle \mathbf{e}_t^{(m)}, \mathbf{h}_t^{(m)} \rangle} \quad (2.40)$$

en la que $\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{h}_t \rangle$ representa el producto escalar de los campos \mathbf{e}_t y \mathbf{h}_t , definido como:

$$\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{h}_t \rangle = \iint_S (\mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \quad (2.41)$$

Finalmente se puede demostrar que, en una guía sin pérdidas, la potencia total que fluye en sentido $\hat{\mathbf{z}}$ es igual a la suma de la potencia transportada por cada uno de los modos de la estructura:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \Re \langle \mathbf{e}_t, \mathbf{h}_t^* \rangle \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\langle \sum_m a_m \cdot \mathbf{e}_t^{(m)}, \sum_n a_n^* \cdot \mathbf{h}_t^{(n)*} \right\rangle \\ &= \sum_m \sum_n a_m \cdot a_n^* \cdot \frac{1}{2} \Re \langle \mathbf{e}_t^{(m)}, \mathbf{h}_t^{(n)*} \rangle = \sum_m P^{(m)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $P^{(m)}$ representa la potencia transportada por el modo m -ésimo de la guía:

$$P^{(m)} = |a_m|^2 \cdot \frac{1}{2} \Re \langle \mathbf{e}_t^{(m)}, \mathbf{h}_t^{(m)*} \rangle \quad (2.43)$$

2.5. Condiciones de Salto

En este apartado se enunciarán las condiciones de continuidad y salto que deben cumplir tanto los campos electromagnéticos como sus derivadas en las superficies de contacto entre los diferentes materiales que componen las guías dieléctricas. Estas condiciones aparecen de forma implícita en las ecuaciones de caracterización modal deducidas anteriormente y deben por tanto respetarse durante el proceso de resolución de las mismas. El incumplimiento de las condiciones de salto en los interfaces entre dieléctricos puede llegar a comprometer seriamente la precisión de los resultados de simulación, especialmente cuando se trata de caracterizar el comportamiento de estructuras fabricadas en tecnologías de alto contraste.

2.5.1. Deducción de las Condiciones de Salto

La figura 2.5 representa el interfaz entre dos medios homogéneos caracterizados respectivamente por sus constantes dieléctricas ϵ^I y ϵ^{II} , así como el sistema de coordenadas elegido, en el que los símbolos \perp y \parallel representan respectivamente las componentes normal y tangencial a dicho interfaz.

Aplicando el *teorema de Gauss* a la ecuación de cero-divergencia del campo eléctrico

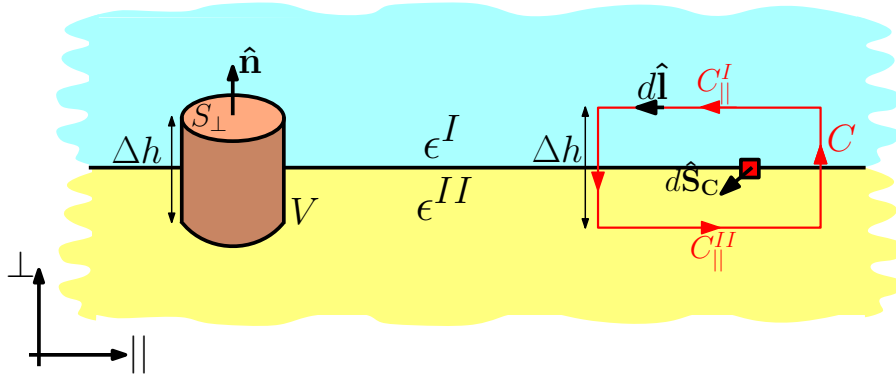


Figura 2.5: Interfaz entre dos medios dieléctricos homogéneos.

(2.3) se obtiene

$$\int_V \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) dV = \oint_S \epsilon \mathbf{E} d\hat{\mathbf{S}} = 0 \quad (2.44)$$

donde V representa un volumen genérico definido en torno al interfaz y $\hat{\mathbf{S}}$ la superficie que envuelve a dicho volumen.

Sin perder generalidad se puede hacer coincidir V con un cilindro orientado en dirección $\hat{\mathbf{n}}$. Haciendo tender a cero su altura ($\Delta h \rightarrow 0$), resulta evidente que sólo van a contribuir a la integral de superficie del segundo miembro de (2.44) las tapas del cilindro (S_\perp), con

lo que

$$\int_{S_{\perp}} \epsilon^I \mathbf{E}^{(I)} \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_{\perp}} \epsilon^{II} \mathbf{E}^{(II)} (-\hat{\mathbf{n}}) dS = 0 \quad (2.45)$$

Lo que en general sólo va a ser cierto si las componentes normales del campo eléctrico a ambos lados del interfaz cumplen con la siguiente condición

$$\epsilon^I \mathbf{E}_{\perp}^{(I)} = \epsilon^{II} \mathbf{E}_{\perp}^{(II)} \quad (2.46)$$

Partiendo de la condición de cero-divergencia para el campo magnético (2.4) y siguiendo el mismo proceso se llega a la siguiente condición para las componentes normales de \mathbf{H}

$$\mathbf{H}_{\perp}^{(I)} = \mathbf{H}_{\perp}^{(II)} \quad (2.47)$$

Para encontrar las relaciones entre las componentes tangenciales de campo eléctrico a ambos lados de la discontinuidad se debe hacer uso del *teorema de Stokes* aplicado sobre la primera de las ecuaciones de Maxwell (2.1)

$$\int_{S_C} (\nabla \times \mathbf{E}) d\hat{\mathbf{S}}_C = \oint_C \mathbf{E} d\hat{\mathbf{l}} = \int_{S_C} -j \omega \mu_0 \mathbf{H} d\hat{\mathbf{S}}_C \quad (2.48)$$

donde $\hat{\mathbf{S}}_C$ es una superficie arbitraria cuyo vector normal es tangencial al interfaz y que contiene una porción del mismo, C es el contorno cerrado que limita dicha superficie y $d\hat{\mathbf{l}}$ es un diferencial de longitud (orientado) del contorno.

Identificando por conveniencia la superficie $\hat{\mathbf{S}}_C$ con un rectángulo y haciendo tender su altura a cero ($\Delta h \rightarrow 0$), la integral de superficie del tercer término de la expresión anterior se anula, mientras que a la integral de superficie del segundo término sólo contribuyen los segmentos paralelos al interfaz, quedando

$$\oint_{C_{\parallel}^{II}} \mathbf{E}^{(II)} d\hat{\mathbf{l}} + \oint_{C_{\parallel}^I} \mathbf{E}^{(I)} d(-\hat{\mathbf{l}}) = 0 \quad (2.49)$$

Lo que demuestra la continuidad de \mathbf{E}_{\parallel} . Actuando de forma similar se puede comprobar también la continuidad de las componentes tangenciales del campo magnético en torno al interfaz.

La deducción del resto de relaciones de continuidad y salto, definidas sobre las derivadas normales y tangenciales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} , resulta algo más laboriosa, por lo que se ha optado simplemente por enumerarlas en las tablas (2.1) y (2.2)⁶.

Por último, se ha considerado conveniente obtener la condición de salto para la derivada normal de la componente del vector desplazamiento eléctrico perpendicular al interfaz, ya que este término aparece de forma explícita en las ecuaciones de caracterización modal (2.22) y (2.23). Para ello se parte de la condición de cero-divergencia particularizada para ambos medios

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}|_I = 0 = \epsilon^I \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}|_I + \nabla_{\perp} \cdot \epsilon \mathbf{E}_{\perp}|_I \quad (2.50)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}|_{II} = 0 = \epsilon^{II} \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}|_{II} + \nabla_{\perp} \cdot \epsilon \mathbf{E}_{\perp}|_{II} \quad (2.51)$$

⁶Los detalles del proceso de cálculo de estas expresiones se encuentran recogidos en el capítulo 2 de [Marz1995]

$\mathbf{E}_{\parallel}^{(I)} = \mathbf{E}_{\parallel}^{(II)}$	$\epsilon^I \mathbf{E}_{\perp}^{(I)} = \epsilon^{II} \mathbf{E}_{\perp}^{(II)}$
$\nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} _I = \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} _{II}$	$\epsilon^I \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\perp} _I = \epsilon^{II} \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\perp} _{II}$
$\nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\parallel} _{II} - \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\parallel} _I =$ $\frac{(\epsilon^{II} - \epsilon^I)}{\epsilon^I} \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\perp} _I$	$\epsilon^{II} \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _{II} - \epsilon^I \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} _I =$ $(\epsilon^I - \epsilon^{II}) \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$

Tabla 2.1: Relaciones de continuidad para el campo eléctrico.

$\mathbf{H}_{\parallel}^{(I)} = \mathbf{H}_{\parallel}^{(II)}$	$\mathbf{H}_{\perp}^{(I)} = \mathbf{H}_{\perp}^{(II)}$
$\nabla_{\parallel} \mathbf{H}_{\parallel} _I = \nabla_{\parallel} \mathbf{H}_{\parallel} _{II}$	$\nabla_{\parallel} \mathbf{H}_{\perp} _I = \nabla_{\parallel} \mathbf{H}_{\perp} _{II}$
$\frac{1}{\epsilon^{II}} \nabla_{\perp} \mathbf{H}_{\parallel} _{II} - \frac{1}{\epsilon^I} \nabla_{\perp} \mathbf{H}_{\parallel} _I =$ $= \left(\frac{1}{\epsilon^I} - \frac{1}{\epsilon^{II}} \right) \nabla_{\parallel} \mathbf{H}_{\perp} _I$	$\nabla_{\perp} \mathbf{H}_{\perp} _I = \nabla_{\perp} \mathbf{H}_{\perp} _{II}$

Tabla 2.2: Relaciones de continuidad para el campo magnético.

donde se ha aplicado que $\nabla_{\parallel} \epsilon = 0$, ya que el interfaz es invariante en la dirección tangencial. Dividiendo entre ϵ_I y ϵ_{II} respectivamente y restando se llega a

$$\frac{\nabla_{\perp} \cdot \epsilon \mathbf{E}_{\perp}|_I}{\epsilon^I} = \frac{\nabla_{\perp} \cdot \epsilon \mathbf{E}_{\perp}|_{II}}{\epsilon^{II}} \quad (2.52)$$

2.5.2. Estudio de las Condiciones de Continuidad y Salto en las Ecuaciones de Caracterización Modal

Como es bien sabido, el incumplimiento de las condiciones de continuidad y salto limita la precisión de los resultados obtenidos por las técnicas numéricas de simulación, especialmente en situaciones de guiado fuerte. Este hecho justifica la conveniencia de identificar en las ecuaciones de análisis modal (2.22) y (2.23) aquellos términos que pueden llegar a ser problemáticos. La tabla 2.3 se ha confeccionado a partir de las condiciones expuestas en el epígrafe anterior y teniendo en cuenta que:

- El estudio se ha centrado en la formulación en campo eléctrico de las ecuaciones de análisis modal (2.22) y (2.23).
- Se ha particularizado para un interfaz situado en un plano $x = cte$, de forma que las componentes normal (\perp) y tangencial (\parallel) se corresponden en este caso con $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ respectivamente⁷.
- Sólo se han considerado variaciones de la permitividad en la dirección del salto, de forma que $\partial\epsilon/\partial y = 0$.

⁷Los resultados son directamente aplicables a una discontinuidad situada en un plano $y = cte$ sin más que intercambiar las coordenadas x e y . Evidentemente, el análisis se complica si el interfaz no se encuentra orientado según alguna de las coordenadas transversales.

DISCONTINUO	CONTINUO
e_x	ϵe_x
$\frac{\partial(\epsilon e_x)}{\partial x}$	$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(\epsilon e_x)}{\partial x}$
$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(\epsilon e_x)}{\partial x} \right]$	$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(\epsilon e_y)}{\partial y}$
$\frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(\epsilon e_y)}{\partial y} \right] - \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial y} = 0$
$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}$	$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(\epsilon e_x)}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial y} = 0$
ϵe_y	$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial(\epsilon e_y)}{\partial y} \right]$

Tabla 2.3: Continuidad de las magnitudes presentes en la ecuación de caracterización modal. Interfaz situado en un plano $x = cte$.

2.6. Técnica de Ajuste Modal

La Técnica de Ajuste Modal o *Mode Matching* [Page1992] es utilizada habitualmente para resolver problemas electromagnéticos típicos, como la excitación de guías de onda o el análisis de discontinuidades abruptas entre estructuras con diferente sección transversal como la representada en la figura 2.6. En este último caso, la técnica de ajuste modal comienza con la imposición de las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos a ambos lados del interfaz. Desarrollando posteriormente dichos campos como una combinación lineal de los modos de cada guía se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N_I} \left(a_I^{(i)} + b_I^{(i)} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{t},I}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N_{II}} \left(b_{II}^{(i)} + a_{II}^{(i)} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{t},II}^{(i)} \quad (2.53)$$

$$\sum_{i=1}^{N_I} \left(a_I^{(i)} - b_I^{(i)} \right) \mathbf{h}_{\mathbf{t},I}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N_{II}} \left(b_{II}^{(i)} - a_{II}^{(i)} \right) \mathbf{h}_{\mathbf{t},II}^{(i)} \quad (2.54)$$

donde N_I y N_{II} representan respectivamente el número de términos que se van a considerar en la expansión modal de los campos a la izquierda y a la derecha de la discontinuidad. Para los coeficientes de expansión modal se ha decidido utilizar la nomenclatura habitual en microondas (ver figura 2.6), denotando como $a_I^{(i)}$, $a_{II}^{(i)}$ las ondas que inciden en la discontinuidad y como $b_I^{(i)}$, $b_{II}^{(i)}$ las que se alejan de ella.

Si se utilizan como funciones de *test* los modos de la primera guía, el procedimiento continúa multiplicando (2.53) por $(\times \mathbf{h}_{\mathbf{t},I}^{(j)})$ y (2.54) por $(\mathbf{e}_{\mathbf{t},I}^{(j)} \times)$. Integrando posteriormente sobre toda la sección transversal y suponiendo que los modos de la guía de entrada

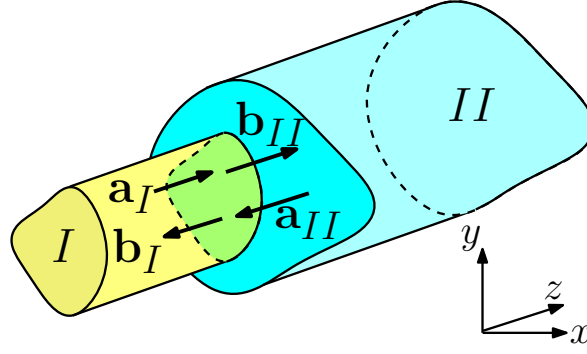


Figura 2.6: Representación esquemática de una discontinuidad abrupta.

se encuentran ortonormalizados, esto es que $\langle \mathbf{e}_{\mathbf{t},I}^{(i)}, \mathbf{h}_{\mathbf{t},I}^{(j)} \rangle = \delta_{j,i}$, se llega a:

$$a_I^{(j)} + b_I^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_{II}} (b_{II}^{(i)} + a_{II}^{(i)}) \langle \mathbf{e}_{\mathbf{t},II}^{(i)}, \mathbf{h}_{\mathbf{t},I}^{(j)} \rangle \quad j = 1 \dots N_I \quad (2.55)$$

$$a_I^{(j)} - b_I^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_{II}} (b_{II}^{(i)} - a_{II}^{(i)}) \langle \mathbf{e}_{\mathbf{t},I}^{(j)}, \mathbf{h}_{\mathbf{t},II}^{(i)} \rangle \quad j = 1 \dots N_I \quad (2.56)$$

Estas expresiones se pueden escribir de forma más compacta utilizando notación matricial, lo que requiere definir previamente las denominadas *matrices de cruce* o *matrices de overlap* entre los modos de ambas guías ($\overline{\overline{O}}_{I,II}$ y $\overline{\overline{O}}_{II,I}$), cuyos elementos se calculan como

$$O_{I,II}(m, n) = \langle \mathbf{e}_{\mathbf{t},I}^{(m)}, \mathbf{h}_{\mathbf{t},II}^{(n)} \rangle \quad m = 1 \dots N_I, \quad n = 1 \dots N_{II} \quad (2.57)$$

$$O_{II,I}(m, n) = \langle \mathbf{e}_{\mathbf{t},II}^{(m)}, \mathbf{h}_{\mathbf{t},I}^{(n)} \rangle \quad m = 1 \dots N_{II}, \quad n = 1 \dots N_I \quad (2.58)$$

De esta forma, las ecuaciones (2.55) y (2.56) quedan

$$\mathbf{a}_I + \mathbf{b}_I = \overline{\overline{O}}_{II,I}^t \cdot (\mathbf{b}_{II} + \mathbf{a}_{II}) \quad (2.59)$$

$$\mathbf{a}_I - \mathbf{b}_I = \overline{\overline{O}}_{I,II} \cdot (\mathbf{b}_{II} - \mathbf{a}_{II}) \quad (2.60)$$

Por otro lado, si se repite el mismo procedimiento utilizando como funciones de *test* los modos de la segunda guía, se llega a

$$\overline{\overline{O}}_{I,II}^t \cdot (\mathbf{a}_I + \mathbf{b}_I) = \mathbf{b}_{II} + \mathbf{a}_{II} \quad (2.61)$$

$$\overline{\overline{O}}_{II,I} \cdot (\mathbf{a}_I - \mathbf{b}_I) = \mathbf{b}_{II} - \mathbf{a}_{II} \quad (2.62)$$

Finalmente, a partir de las cuatro ecuaciones anteriores es prácticamente inmediato desarrollar las siguientes formulaciones

1. Parámetros de Transmisión o Parámetros ABCD

Relacionan los coeficientes de expansión modal de los campos a ambos lados de la

discontinuidad, lo que en forma matricial se expresa como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_s \\ \mathbf{b}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{A}}_{s,t} & \bar{\bar{B}}_{s,t} \\ \bar{\bar{C}}_{s,t} & \bar{\bar{D}}_{s,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t \\ \mathbf{b}_t \end{bmatrix} \quad \begin{cases} s = I, t = II \\ s = II, t = I \end{cases} \quad (2.63)$$

donde los elementos de la *matriz ABCD* se obtienen a partir de las matrices de cruce como

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}}_{s,t} = \bar{\bar{D}}_{s,t} &= \frac{1}{2} \left[\bar{\bar{O}}_{t,s}^t - \bar{\bar{O}}_{s,t} \right] \\ \bar{\bar{B}}_{s,t} = \bar{\bar{C}}_{s,t} &= \frac{1}{2} \left[\bar{\bar{O}}_{t,s}^t + \bar{\bar{O}}_{s,t} \right] \end{aligned} \quad \begin{cases} s = I, t = II \\ s = II, t = I \end{cases} \quad (2.64)$$

2. Parámetros de Scattering o Parámetros S

Relacionan los coeficientes de expansión modal de las ondas que inciden y que se reflejan en la discontinuidad,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_I \\ \mathbf{b}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} & \bar{\bar{S}}_{12} \\ \bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_I \\ \mathbf{a}_{II} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

donde los $\bar{\bar{S}}_{ij}$ se calculan a partir de las matrices de cruce como⁸

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}}_{11} &= \frac{1}{2} \left[\bar{\bar{O}}_{II,I}^t - \bar{\bar{O}}_{I,II} \right] \cdot \bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{12} &= 2 \left[\bar{\bar{O}}_{I,II}^t + \bar{\bar{O}}_{II,I} \right]^{-1} \\ \bar{\bar{S}}_{21} &= 2 \left[\bar{\bar{O}}_{II,I}^t + \bar{\bar{O}}_{I,II} \right]^{-1} & \bar{\bar{S}}_{22} &= \frac{1}{2} \left[\bar{\bar{O}}_{I,II}^t - \bar{\bar{O}}_{II,I} \right] \cdot \bar{\bar{S}}_{12} \end{aligned} \quad (2.66)$$

A la vista de lo que se acaba de exponer, parece evidente que el funcionamiento de la técnica de ajuste modal viene determinado fundamentalmente por dos factores:

- *El subconjunto de modos empleado en la expansión modal:* Tal y como se explicó en el epígrafe 2.3, los modos guiados y radiados constituyen un conjunto completo de modos capaz de representar cualquier distribución arbitraria de campo de la estructura abierta. Sin embargo, la imposición de una ventana de cómputo finita produce una discretización del espectro continuo de los modos radiados, lo que junto con el truncamiento a un número finito de términos N provoca que dicha representación no sea perfecta.
- *La precisión en el cálculo de las integrales de cruce:* Puesto que las estructuras que se desean analizar carecen en general de solución analítica, los modos de los que se dispone en la práctica son habitualmente el resultado de una simulación numérica, cuya precisión influirá directamente en el cálculo de las integrales de cruce (2.57) y (2.58).

⁸Se ha supuesto que el número de modos empleado en la expansión modal a ambos lados de la discontinuidad es el mismo ($N_I = N_{II}$), lo que implica que las matrices de cruce son cuadradas y que por tanto se pueden definir las matrices inversas que aparecen en estas expresiones.

2.7. Condiciones de Contorno

Como ya se comentó anteriormente, el carácter abierto de los problemas electromagnéticos en el ámbito de la óptica requiere la imposición de un conjunto de condiciones de contorno que limiten su sección transversal, estableciendo una ventana de cómputo de dimensión finita. Estas condiciones de contorno tienen una influencia crítica tanto en la precisión de los resultados obtenidos como en los requerimientos computacionales de cualquier método de simulación, por lo que en los últimos años se han dedicado grandes esfuerzos a perfeccionar muchas de las técnicas numéricas ya existentes con la incorporación de condiciones de contorno cada vez más eficientes. La clasificación que se realiza a continuación no pretende en absoluto ser exhaustiva, pero sí que incluye aquellas condiciones de contorno que se utilizan más frecuentemente en la práctica⁹.

2.7.1. Condiciones de Contorno de Conductor Perfecto

Son aquellas en las que el módulo del coeficiente de reflexión en la frontera es igual a la unidad ($|r| = 1$), lo que implica la utilización de paredes de conductor perfecto eléctrico o magnético.

- **Conductor eléctrico perfecto:** También conocida como condición de *Dirichlet*. Implica que tanto el campo eléctrico tangencial al plano conductor, como la derivada normal del campo magnético tangencial al mismo se anulan:

$$\begin{aligned} E_{||}|_C &= 0 \\ \frac{\partial H_{||}}{\partial n}|_C &= 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde C representa el plano conductor y n es la componente normal al mismo. Particularizando para una onda plana E_y incidente en un plano conductor eléctrico perfecto situado en $x = 0$, se puede demostrar fácilmente que el coeficiente de reflexión r es igual a -1:

$$E_y(0) = E_y^f \cdot e^{-j \cdot k_x \cdot x} + E_y^b \cdot e^{j \cdot k_x \cdot x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow r = \frac{E_y^b}{E_y^f} = -1 \quad (2.68)$$

- **Conductor magnético perfecto:** También conocida como condición de *Neumann*. Implica que tanto la derivada normal del campo eléctrico perpendicular al plano conductor, como el campo magnético normal al mismo se anulan.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial n}|_C &= 0 \\ H_{\perp}|_C &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

⁹Una ausencia destacada en esta clasificación es la de las Condiciones de Contorno Transparentes (*Transparent Boundary Conditions* (TBC)) [Hadley1992]. Las razones que justifican esta omisión son dos: i) sus prestaciones han sido claramente superadas por los absorbentes perfectamente adaptados, ii) su aplicación a los métodos espectrales, que son los que se desarrollan en esta Tesis, resulta muy problemática [Wanguemert1999]

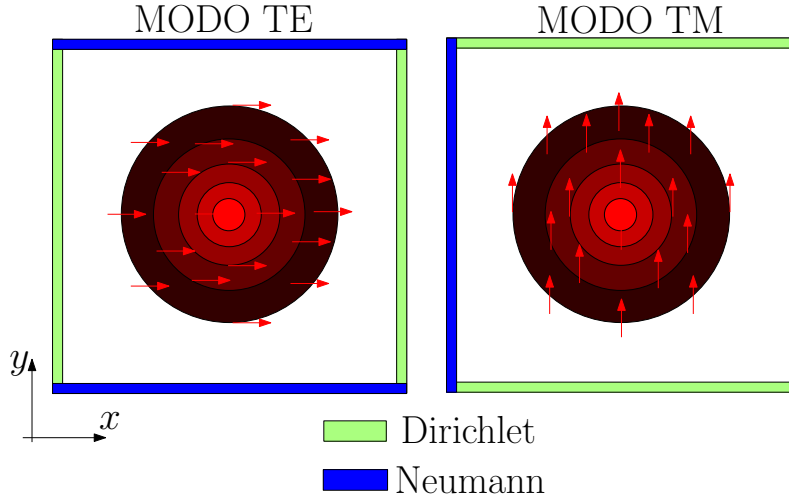


Figura 2.7: Condiciones de Contorno de Conductor Perfecto.

Particularizando en este caso para una onda plana E_y incidente en un plano conductor magnético perfecto situado en $y = 0$, se obtiene que el coeficiente de reflexión es igual a la unidad:

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{y=0} = -j \cdot k_y \cdot \left(E_y^f \cdot e^{-j \cdot k_y \cdot y} - E_y^b \cdot e^{j \cdot k_y \cdot y} \right) \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow r = \frac{E_y^b}{E_y^f} = 1 \quad (2.70)$$

Cuando la sección transversal de un problema electromagnético abierto se limita mediante condiciones de contorno de conductor perfecto, es importante escoger el tamaño de la ventana de cómputo lo suficientemente grande como para garantizar que los campos eléctricos y magnéticos que son solución del problema abierto valen prácticamente cero cuando alcanzan los extremos de dicha ventana. Sólo de esta forma los resultados obtenidos para la estructura cerrada serán una buena aproximación a las soluciones del problema original. Para el caso de una región rectangular como la representada en la figura 2.7, los efectos del tamaño finito de la ventana computacional sobre las simulaciones numéricas se pueden minimizar si se tiene en cuenta que: i) Para el cálculo de los modos Quasi-TE (componente E_x predominante) se deben imponer condiciones tipo *Dirichlet* en los límites izquierdo y derecho de la ventana de cómputo y condiciones tipo *Neumann* en los límites superior e inferior de la misma. ii) Para el cálculo de los modos Quasi-TM (componente E_y predominante) se actuará de la forma contraria, forzando condiciones tipo *Neumann* a izquierda y derecha y tipo *Dirichlet* arriba y abajo.

2.7.2. Condiciones de Contorno Tipo Impedancia

Las condiciones de contorno tipo impedancia, también conocidas como condiciones de contorno de *Robin*, son una combinación de las dos explicadas anteriormente y se caracterizan por imponer sobre la función a calcular una condición que se expresa como la combinación lineal del valor de la función y de su derivada normal en el contorno, es

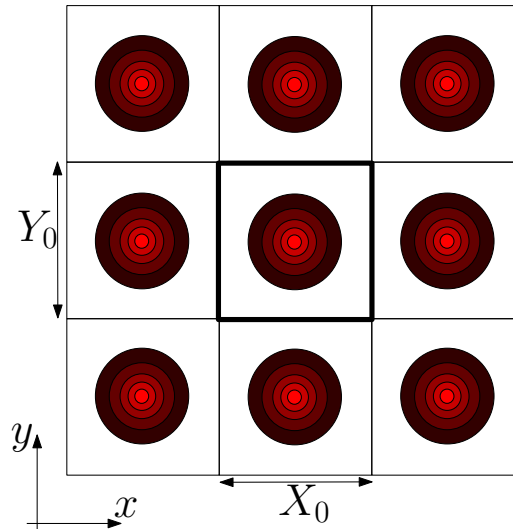


Figura 2.8: Condiciones de Contorno Periódicas.

decir

$$a \cdot \psi|_C + b \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}|_C = g \quad (2.71)$$

donde ψ es la función incógnita del problema que se desea resolver, n es el vector normal al contorno C y a , b , g son constantes o funciones conocidas a priori que definen la condición de contorno.

Las condiciones tipo impedancia son denominadas en ocasiones condiciones de contorno de tercera especie ya que a partir de ellas se pueden obtener como casos particulares las de primera especie (*Dirichlet*, haciendo $g = b = 0$) y las de segunda especie (*Neumann*, escogiendo $g = a = 0$).

2.7.3. Condiciones de Contorno Periódicas

Estas condiciones de contorno aparecen asociadas a la familia de los denominados *Métodos de Descomposición de Fourier* (*Fourier Decomposition Method* (FDM)). Al utilizar un espacio funcional periódico, estas técnicas imponen a su vez ciertas características de periodicidad tanto en el problema que se desea resolver como en las soluciones obtenidas (ver figura 2.8), que deben cumplir con la siguiente condición:

$$\psi(x + mX_0, y) = \psi(x, y + nY_0) = \psi(x, y) \quad (2.72)$$

donde $X_0 \times Y_0$ son las dimensiones transversales de la ventana de cómputo, que al igual que antes debe ser lo suficientemente grande como para garantizar que las soluciones del problema abierto valen prácticamente cero cuando alcanzan los extremos del dominio computacional.

2.7.4. Condiciones de Contorno PML

La principal limitación de las condiciones de contorno que se acaban de presentar es su incapacidad para manejar de forma eficiente la radiación saliente de la ventana de

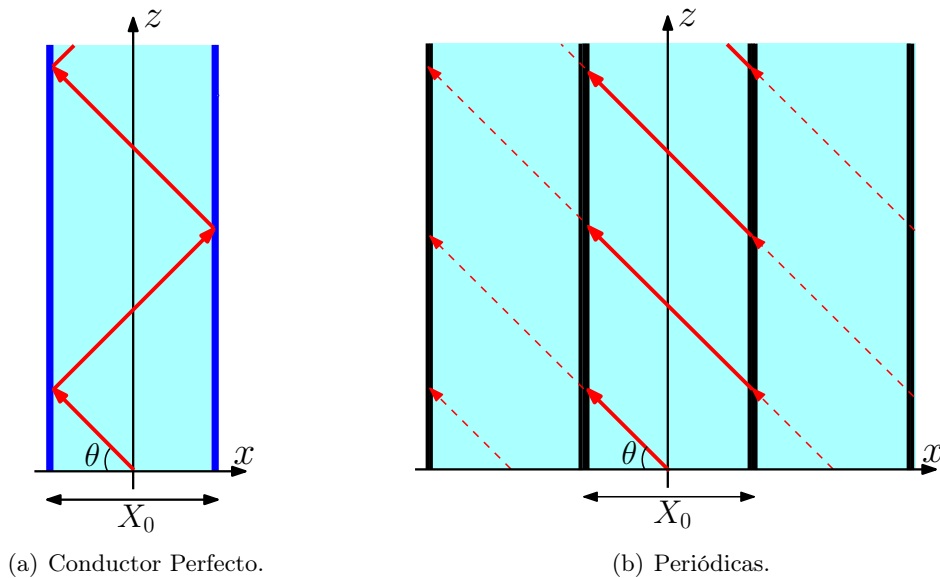


Figura 2.9: Condiciones de Contorno Clásicas. Problemas con la radiación saliente.

cómputo. En el caso de las de conductor perfecto, cuando la radiación alcanza los extremos de la ventana se producen reflexiones asociadas a la imposición de unas condiciones de contorno con coeficiente de reflexión igual a la unidad. Por otro lado, en las condiciones de contorno periódicas la radiación saliente por uno de los extremos del dominio computacional entra por el lado contrario, contaminando así la solución obtenida. Ambas situaciones se muestran de forma esquemática en la figura 2.9, en la que se ha representado la propagación de una onda que forma un ángulo θ con el eje x cuando se utiliza una ventana de cómputo de tamaño X_0 limitada por: i) condiciones de contorno de conductor perfecto (figura 2.9(a)) y ii) condiciones de contorno periódicas (figura 2.9(b)).

Estos problemas se pueden solucionar definiendo regiones absorbentes capaces de eliminar la radiación saliente antes de que llegue a los límites de la ventana de cómputo, tal y como se ve en la figura 2.10. Aunque en realidad estos absorbentes no constituyen en sí mismos unas nuevas condiciones de contorno, lo habitual es referirse a ellos como si lo fueran, denominándolos de forma genérica Condiciones de Contorno Absorbentes (*Absorbing Boundary Conditions* (ABC)). Por otro lado, la emulación de las condiciones de espacio libre sólo será perfecta si el absorbente consigue además evitar que se produzcan reflexiones en el interfaz con la zona de interés para cualquier frecuencia, polarización y ángulo de incidencia, obteniéndose entonces lo que se denomina un absorbente perfectamente adaptado. Las *Condiciones de Contorno Absorbentes Perfectamente Adaptadas* (*Perfectly Matched Layer* (PML)) son actualmente la opción más común a la hora de implementar un absorbente perfectamente adaptado en el ámbito de la simulación de dispositivos ópticos. Esta técnica, proveniente en su primera versión del campo de las microondas [Berenger1994], ha evolucionado posteriormente dando lugar a diferentes formulaciones, entre las que por su importancia se deben destacar las siguientes:

- **Versión Anisotrópica** [Sacks1995]: Se basa en la definición en los extremos de la ventana de cómputo de un material artificial anisotrópico que presente pérdidas tanto eléctricas como magnéticas. Escogiendo de forma adecuada los parámetros que definen dicho material, es posible cumplir con la condición de no-reflexión para cualquier frecuencia, polarización y ángulo de incidencia.

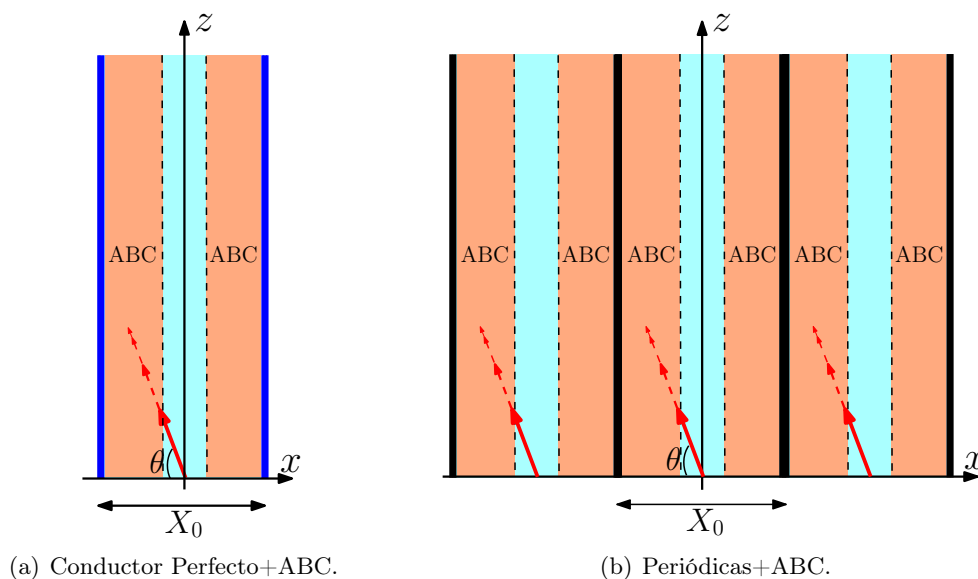


Figura 2.10: Condiciones de Contorno Absorbentes.

- **Versión Coordinada Compleja** [Chew1994], [Chew1997]: En este caso la zona PML queda caracterizada por la aplicación de una transformación de variables que convierte una de las coordenadas espaciales en una magnitud compleja. Tal y como se demostrará en el siguiente epígrafe, esto equivale a atenuar el campo incidente en la zona PML, evitando que alcance los límites de la ventana de cómputo. Eligiendo apropiadamente los parámetros de la transformación se consigue además cumplir la condición de no-reflexión en el interfaz con la zona absorbente.

Aunque se puede demostrar que ambas formulaciones son equivalentes [Teixeira1997], en este trabajo se ha optado por usar la versión coordinada compleja, ya que su incorporación a las ecuaciones de caracterización modal (2.22) y (2.23) resulta ser prácticamente inmediata.

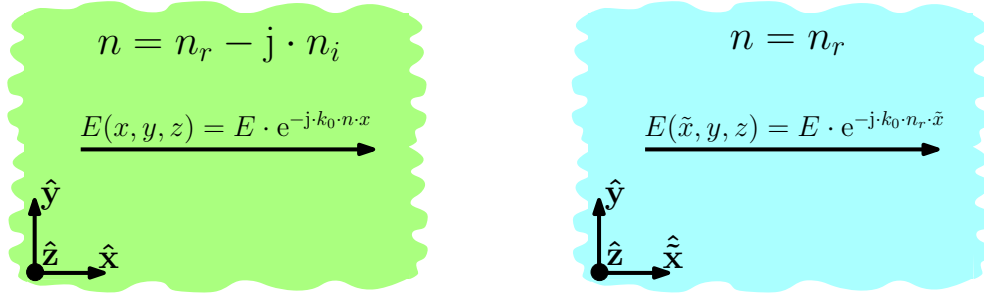
2.7.4.1. Fundamentos de las condiciones de contorno PML versión coordinada compleja

Para explicar el funcionamiento de las condiciones de contorno PML en su versión coordinada compleja es necesario comenzar justificando como es posible que, al menos en términos de atenuación, la aplicación de una transformación de variables sea equivalente a la introducción de un material con pérdidas [Chew1997]. Para esta justificación se va a plantear un problema electromagnético muy sencillo: el cálculo de las soluciones que se propagan en dirección $+\hat{x}$ en el interior de un medio homogéneo como el que se representa en la figura 2.11(a), caracterizado por una constante dieléctrica compleja $n = \sqrt{\epsilon} = n_r - j \cdot n_i$.

Particularizando (2.7) para este caso nos queda la siguiente ecuación de ondas

$$\nabla^2 E + k_0^2 \cdot n^2 \cdot E = 0 \quad (2.73)$$

cuyas soluciones son evidentemente ondas planas que, explicitando únicamente la variación con x , se pueden expresar como



(a) Medio con pérdidas en el sistema de coordenadas original (x, y, z) . (b) Medio sin pérdidas en el nuevo sistema de coordenadas complejas (\tilde{x}, y, z) .

Figura 2.11: Condiciones de Contorno PML. Fundamento de la transformación de variables compleja.

$$E(x, y, z) = E \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot n \cdot x} = E \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot n_r \cdot x} \cdot e^{-k_0 \cdot n_i \cdot x} \quad (2.74)$$

Reordenando términos en la expresión anterior se obtiene

$$E(x, y, z) = E \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot n_r \cdot \left(1 - j \cdot \frac{n_i}{n_r}\right) \cdot x} = E \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot n_r \cdot \tilde{x}} \quad (2.75)$$

donde \tilde{x} representa la extensión al plano complejo de la variable x y se define como

$$\tilde{x} = x \cdot \left(1 - j \cdot \frac{n_i}{n_r}\right) \quad (2.76)$$

Por lo tanto, parece que efectivamente existe una equivalencia entre considerar un medio con pérdidas como el representado en la figura 2.11(a) y trabajar con un material sin pérdidas pero en el que se ha sustituido la coordenada en la que se desea introducir la atenuación por una magnitud compleja, tal y como se muestra en la figura 2.11(b). La extensión al plano complejo de x no cambia de forma sustancial el aspecto de las ecuaciones de Maxwell, que tras la transformación de variables quedan

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_x \times \mathbf{E} &= -j \omega \mu_0 \mathbf{H} \\ \tilde{\nabla}_x \times \mathbf{H} &= j \omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \\ \tilde{\nabla}_x \epsilon \mathbf{E} &= 0 \\ \tilde{\nabla}_x \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

donde el nuevo operador divergencia $\tilde{\nabla}_x$ se ha definido como

$$\tilde{\nabla}_x = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.78)$$

En cuanto a la condición de no reflexión al comienzo de la zona PML, como se verá seguidamente este requerimiento quedará garantizado siempre que la transformación de variables que define la variable compleja \tilde{x} sea continua [Chew1997]. Por este motivo,

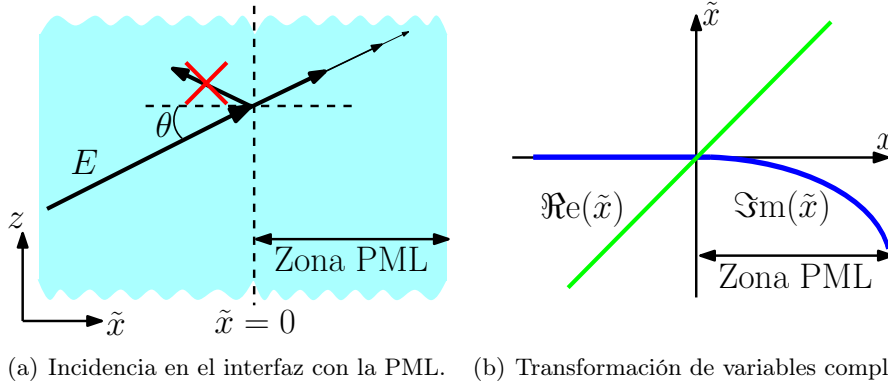


Figura 2.12: Condiciones de Contorno PML. Justificación de la característica de no reflexión.

habitualmente \tilde{x} se obtiene a partir de una expresión integral del tipo

$$\tilde{x} = x - j \int_0^x p_x(x') dx' \quad (2.79)$$

donde la función $p_x(x)$ define el perfil de las pérdidas en la zona de absorción, valiendo cero fuera de ella.

En la figura 2.12(a) se ha representado esquemáticamente, para un medio homogéneo de índice de refracción n , la incidencia sobre el interfaz con la zona PML de una onda cuyo vector director forma un ángulo θ con la normal a dicho interfaz. Como se muestra en la figura, cuando esta onda alcanza el comienzo de la región PML no se va a producir reflexión alguna, ya que no existe ninguna magnitud discontinua en el interfaz que justifique la aparición de una onda reflejada. Dicho de otra forma, puesto que por un lado el índice de refracción del material es el mismo en todo el espacio y por otro la coordenada compleja \tilde{x} varía de forma continua (ver figura 2.12(b)), la onda no aprecia ningún cambio abrupto cuando alcanza la región absorbente, por lo que en teoría no se van a generar reflexiones para ninguna frecuencia, polarización ni ángulo de incidencia¹⁰. Para determinar la atenuación que sufre el campo en la zona PML, es necesario formular la ecuación que describe su propagación en cualquier región del espacio

$$E(x, z) = E \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot n \cdot \text{sen}(\theta) \cdot z} \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot n \cdot \text{cos}(\theta) \cdot \tilde{x}} \quad (2.80)$$

Sustituyendo (2.79) en la expresión anterior y operando se llega a

$$E(x, z) = E \cdot e^{-j \cdot k_0 \cdot n \cdot (\text{sen}(\theta) \cdot z + \text{cos}(\theta) \cdot x)} \cdot e^{-\alpha_x(x)} \quad (2.81)$$

donde el factor de pérdidas $\alpha_x(x)$ se define como

$$\alpha_x(x) = k_0 \cdot n \cdot \text{cos}(\theta) \cdot \int_0^x p_x(x') dx' \quad (2.82)$$

quedando claro que las pérdidas sí dependen del ángulo de incidencia, siendo máximas para incidencia normal ($\theta = 0$) y nulas para incidencia rasante ($\theta = \pi/2$).

¹⁰En la práctica se pueden producir reflexiones de tipo numérico asociadas a la discretización espacial del problema, que se minimizan escogiendo un perfil de pérdidas $p_x(x)$ lo suficientemente suave.

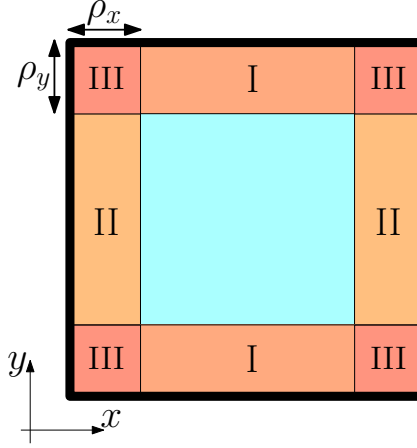


Figura 2.13: Condiciones de Contorno PML. Definición de las zonas absorbentes en estructuras bidimensionales.

Una consecuencia importante de lo anterior es que las condiciones de contorno PML no afectan a la propagación de los modos guiados, que se caracterizan por presentar un vector de onda que apunta en dirección z , mientras que por el contrario sí que actúan sobre los modos radiados, que se verán tanto más atenuados cuanto más se desvíen de la paraxialidad.

2.7.4.2. Formulación de la ecuación de análisis modal con condiciones de contorno PML

Como era de esperar a la vista de lo explicado en el epígrafe anterior, las ecuaciones de análisis modal con condiciones de contorno PML definidas sobre las variables transformadas \tilde{x} e \tilde{y} son formalmente idénticas a (2.22) y (2.23). Expresando dichas ecuaciones en función de las variables x e y originales se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial e_x}{\partial y} + k_0^2 \epsilon e_x + \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial (\epsilon e_x)}{\partial x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial (\epsilon e_y)}{\partial y} \right) \right] \\ - \frac{1}{s_x} \frac{1}{s_y} \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial y} = -\gamma_m^2 e_x \\ \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial e_y}{\partial x} + k_0^2 \epsilon e_y + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial (\epsilon e_x)}{\partial x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial (\epsilon e_y)}{\partial y} \right) \right] \\ - \frac{1}{s_x} \frac{1}{s_y} \frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial y} = -\gamma_m^2 e_y \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde los operadores derivada con respecto a \tilde{x} e \tilde{y} se han desarrollado como

$$\begin{aligned} \tilde{x} = x - j \int_0^x p_x(x') dx' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{(1 - j p_x(x))} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \tilde{y} = y - j \int_0^y p_y(y') dy' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{(1 - j p_y(y))} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Habitualmente los perfiles de pérdidas quedan definidos por una función polinómica del

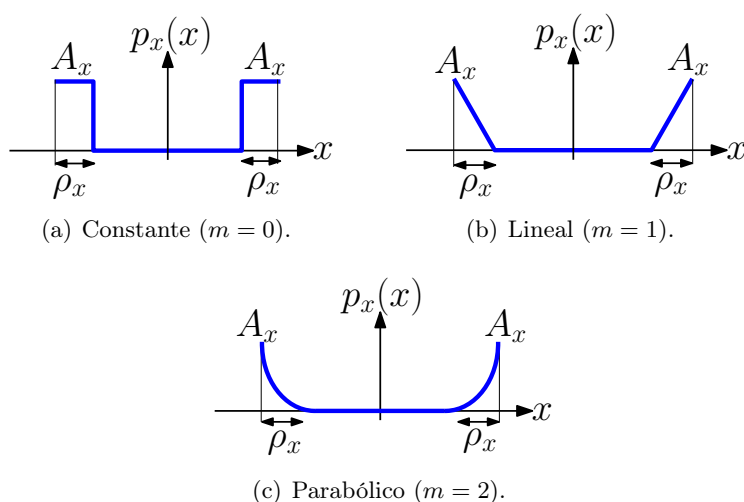


Figura 2.14: Condiciones de Contorno PML. Perfiles de pérdidas típicos.

tipo

$$\begin{aligned}
 p_x(x) &= A_x \cdot \left(\frac{\rho(x)}{\rho_x} \right)^m & x \in \text{Zonas I y III} \\
 p_y(y) &= A_y \cdot \left(\frac{\rho(y)}{\rho_y} \right)^m & y \in \text{Zonas II y III}
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

donde A_x , A_y representan la amplitud de las pérdidas, $\rho(x)$, $\rho(y)$ la distancia al comienzo de las zonas PML (que aparecen definidas en la figura 2.13) y ρ_x , ρ_y el ancho de dichas zonas. En la figura 2.14 se representan esquemáticamente los perfiles de pérdidas $p_x(x)$ para diferentes valores del exponente m . De entre ellos quizá el más utilizado sea el de tipo parabólico ($m = 2$), ya que proporciona un perfil de pérdidas lo suficientemente suave como para minimizar las posibles reflexiones numéricas en el comienzo de la zona PML.

2.7.4.3. Soluciones de la ecuación de análisis modal con condiciones de contorno PML

La utilización de absorbentes PML en los extremos de la ventana de cómputo va a modificar el conjunto de soluciones del problema electromagnético, ya que al contrario de lo que se supuso en el epígrafe 2.3.2, ahora se debe considerar que la estructura va a presentar pérdidas (asociadas evidentemente a la absorción en las zonas PML). El estudio que se va a realizar a continuación se basa en los trabajos de [Bienstman2001] y pretende únicamente dar una interpretación intuitiva al nuevo conjunto de soluciones. Para ello nos centraremos en el análisis de los modos TE de un *slab* de salto de índice compuesto por un núcleo de GaAs ($n = 3,5$) de $1 \mu\text{m}$ de ancho rodeado de aire. A la longitud de onda de trabajo ($\lambda = 1,55 \mu\text{m}$) la estructura soporta varios modos guiados, todos ellos lo suficientemente confinados como para que su perfil transversal de campo sea prácticamente nulo en los extremos de la ventana de cómputo, de $5 \mu\text{m}$ de ancho. La resolución numérica de la ecuación de análisis modal se va a llevar a cabo mediante un método de descomposición de Fourier unidimensional, utilizando un número de armónicos y de puntos de discretización espacial lo suficientemente grande como para que los

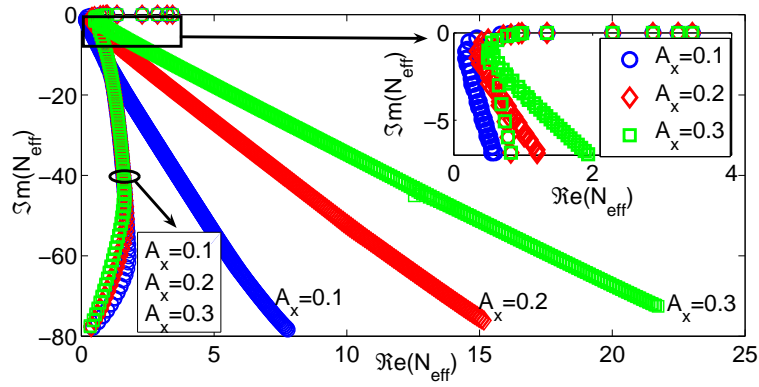


Figura 2.15: Condiciones de Contorno PML. Influencia de la amplitud del perfil de pérdidas en las soluciones de la ecuación modal. $\rho_x = 2 \mu\text{m}$, $m = 0$.

errores asociados a estos parámetros numéricos se puedan considerar despreciables.

La figura 2.15 representa las partes real e imaginaria de los índices efectivos de tres conjuntos de soluciones distintos, obtenido cada uno de ellos utilizando regiones absorbentes PML con un nivel de pérdidas A_x diferente. En todos los casos la zona PML ocupa completamente la cubierta¹¹ ($\rho_x = 2 \mu\text{m}$) y está caracterizada por un perfil de pérdidas constante ($m = 0$). A la vista de estos resultados se pueden establecer las siguientes conclusiones de carácter general:

1. Las condiciones de contorno PML no afectan a los modos guiados de la estructura, que siguen situados sobre el eje real. Este hecho, que ya fue adelantado en el epígrafe 2.7.4.1, se debe a que los vectores de onda de los modos guiados son tangenciales a las zonas de absorción, por lo que las PML no les introducen pérdidas.
2. Los modos radiados, que originalmente se encontraban situados sobre los ejes real e imaginario (ver figura 2.4), se introducen ahora en el plano complejo formando dos grupos de soluciones bien diferenciadas:
 - El primer grupo se encuentra situado cerca del eje imaginario y su posición no parece demasiado sensible al nivel de pérdidas de la zona PML. De hecho se puede comprobar que a medida que aumentan las pérdidas este conjunto de soluciones converge a los mismos valores, que coinciden aproximadamente con los modos *leaky* de la estructura abierta.
 - El segundo grupo de soluciones se introduce mucho más en el plano complejo y es claramente dependiente del nivel de pérdidas de la zona absorbente. Puesto que sus características están condicionadas fundamentalmente por los parámetros que definen las PML y no tanto por la geometría de la estructura que se está analizando reciben el nombre de *modos PML* o *modos Berenger*.

Para justificar la aparición de estos dos tipos de soluciones resulta necesario inspeccionar la distribución transversal de campo de los modos obtenidos. Los resultados mostrados en las figuras 2.16(a) y (b) se han calculado reduciendo ligeramente la anchura de la zona PML de forma que ésta no alcance el interfaz núcleo-cubierta ($\rho_x = 1,5 \mu\text{m}$) y fijando la

¹¹Evidentemente se trata de una situación poco realista, ya que en la práctica la región absorbente no se suele extender hasta la zona de guiado. Sin embargo resulta muy útil para establecer una clasificación de los tipos de soluciones, ya que éstas aparecen claramente diferenciadas en este caso.

amplitud de las pérdidas a $A_x = 0,4$. Para cada uno de los cuatro grupos de soluciones¹² que se muestran en la figura 2.16(a) se ha elegido de forma arbitraria uno de los modos que lo componen y se ha representado su perfil transversal de campo eléctrico (figura 2.16(b)), pudiéndose observar que:

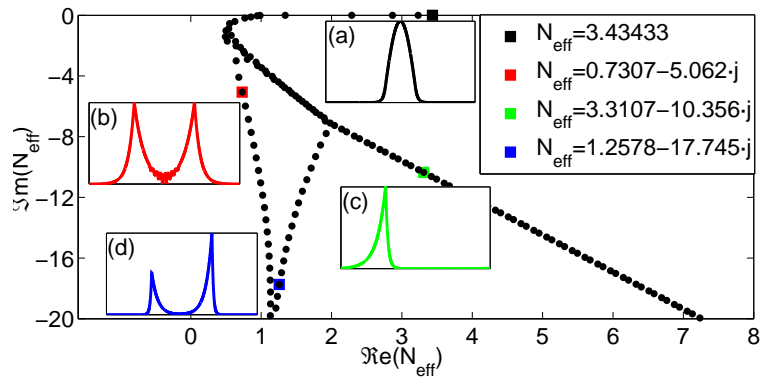
- (a) Modos Guiados: Aparecen confinados en la zona del núcleo y no se ven afectados por las PML.
- (b) Modos *Leaky*: Presentan un comportamiento oscilatorio en la zona del núcleo. En la cubierta su amplitud crece rápidamente hasta alcanzar la zona de absorción, donde son rápidamente atenuados. Para un nivel de pérdidas lo suficientemente alto, su perfil de campo fuera de la zona PML es prácticamente indistinguible del correspondiente al modo *leaky* de la estructura abierta.
- (c), (d) Modos *Berenger*: No se ven apenas influidos por la estructura de guiado, quedando básicamente determinados por las características que definen la región absorbente y la ventana de cómputo. Al contrario de lo que ocurre con los modos guiados y *leaky*, presentan una distribución de campo asimétrica, ya que aparecen como resonancias entre uno de los extremos de la ventana de cómputo y alguno de los interfaces del problema.

Si lo que se ha dicho hasta ahora sobre los modos *leaky* es cierto, su distribución espacial de campo fuera de la zona de absorción deberá ser independiente del perfil de pérdidas elegido siempre que el nivel de absorción sea lo suficientemente alto. En la figura 2.17 se representan, para un modo con $N_{\text{eff}} \approx 0,82 - 0,686j$, los campos eléctricos obtenidos con diferentes formas del perfil de pérdidas (constante: $m = 0$, lineal: $m = 1$ y parabólico: $m = 2$). En todos los casos se han mantenido invariantes la amplitud y el ancho de la PML ($A_x = 0,7$ y $\rho_x = 1,5 \mu\text{m}$). Como era de esperar, las distribuciones de campo son indistinguibles para $|x| < 1 \mu\text{m}$, mientras que en la zona PML se pueden observar dos diferencias importantes: i) cuanto más suave es la variación del perfil de pérdidas, mayor es la penetración del campo en la zona de absorción, y ii) el cambio abrupto en la pendiente de la distribución de campo eléctrico que aparece cuando se usa un perfil de pérdidas constante desaparece al utilizar el perfil lineal o el parabólico. Esta última propiedad justifica la conveniencia de usar perfiles de pérdidas suaves como el parabólico, ya que desde el punto de vista numérico las funciones continuas con derivada continua son más fáciles de tratar¹³.

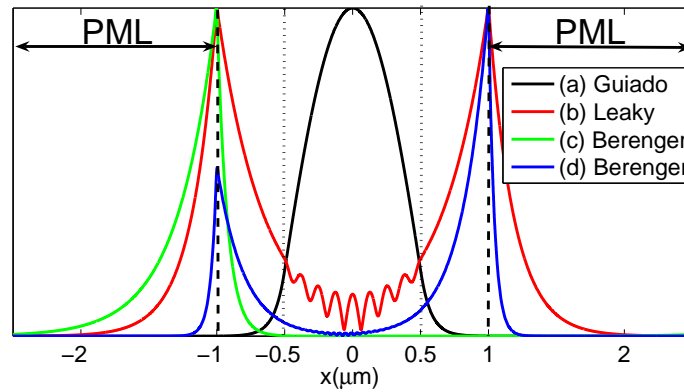
El último punto a tratar hace referencia a la completitud de las soluciones en presencia de absorbentes PML. Como se explicó en el epígrafe 2.3, el conjunto discreto de modos guiados junto con el continuo de radiados constituyen un conjunto completo de modos en el problema abierto, al igual que ocurre para la estructura cerrada con el conjunto discreto de modos guiados y radiados. Por el contrario la suma de los modos guiados y *leaky* de la estructura abierta no es completo, por lo que en base a ellos no se va a poder representar adecuadamente cualquier distribución arbitraria de campo presente en la misma. Cuando se introducen absorbentes PML y en el límite de absorción infinita, se puede demostrar [Biestman2001] que el conjunto de soluciones obtenido se corresponde exactamente con los modos guiados y *leaky* de la estructura abierta, ya que los *modos*

¹²Aunque en apariencia el conjunto de soluciones obtenido en este caso resulte algo más complicado, lo cierto es que no existe ninguna diferencia desde el punto de vista conceptual, ya que el grupo de modos (d) que no aparecía en la figura 2.15 pertenece en realidad a la familia de *modos Berenger*.

¹³Por ejemplo, el ancho de banda espectral de una función continua con derivada continua es menor que el de una función continua con derivada discontinua.



(a) Soluciones de la ecuación modal (N_{eff}).



(b) Distribución espacial de campo de los diferentes tipos de modos.

Figura 2.16: Condiciones de Contorno PML. Clasificación de las soluciones de la ecuación modal. $\rho_x = 1,5 \mu\text{m}$, $A_x = 0,4$, $m = 0$.

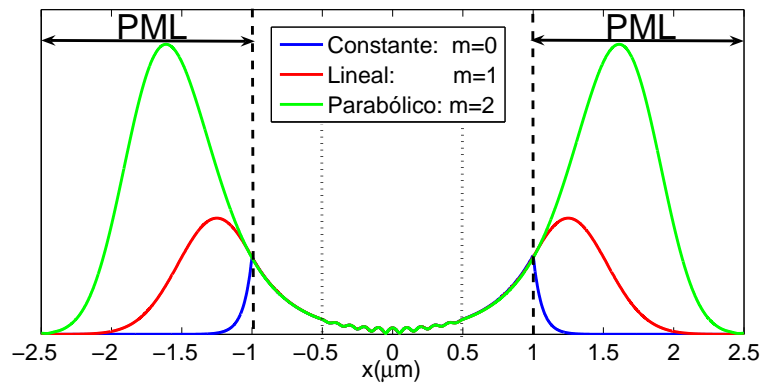


Figura 2.17: Condiciones de Contorno PML. Influencia del perfil de pérdidas en la distribución espacial de campo. $\rho_x = 1,5 \mu\text{m}$, $A_x = 0,7$.

Berenger desaparecen al ser completamente atenuados por las zonas PML. Esto quiere decir que el “grado de completitud” va a depender del nivel de absorción de las zonas PML, ya que en función de este parámetro se pasa de un conjunto completo de modos (guiados y radiados para absorción cero) a uno incompleto (guiados y *leaky* para absorción infinita). En la práctica interesa trabajar con niveles de absorción moderados, con la intención de

2.7 Condiciones de Contorno

conseguir simultáneamente que: i) se atenúe la radiación saliente antes de que alcance los extremos de la ventana de cómputo, ii) el conjunto de soluciones no se introduzca demasiado en el plano complejo.

3 Estrategias de Discretización Transversal Basadas en Métodos Espectrales

3.1. Introducción

EL objetivo fundamental de este capítulo es formular dos métodos espectrales de discretización transversal, basados respectivamente en los espacios funcionales de *Fourier* y *Hermite-Gauss*, para la resolución numérica de las ecuaciones de análisis modal deducidas en el capítulo anterior. Las estrategias que se van a desarrollar a continuación constituyen la base sobre la que se asientan todas las herramientas numéricas de simulación que se presentan en esta Tesis.

3.2. Clasificación de las Técnicas de Discretización Transversal

En este epígrafe se realiza una clasificación de las diferentes técnicas numéricas que se pueden emplear en la resolución de ecuaciones diferenciales o integrales de la forma

$$\mathcal{H}f(x) = q(x) \quad (3.1)$$

donde $f(x)$ es la función que se desea calcular y \mathcal{H} representa el operador que describe la ecuación a resolver.

La mayoría de estas técnicas se basan en aproximar la función buscada $f(x)$ por una suma ponderada de $N + 1$ funciones base $\varphi_k(x)$

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{k=0}^N \Phi_f^{(k)} \varphi_k(x) \quad (3.2)$$

siendo $f_N(x)$ la denominada función de prueba o *trial function*.

Sustituyendo este desarrollo en serie en (3.1) y operando se obtiene la función residual o residuo

$$R(x; \Phi_f^{(0)}, \Phi_f^{(1)}, \dots, \Phi_f^{(N)}) = \mathcal{H}f_N(x) - q(x) \quad (3.3)$$

que representa el error cometido al utilizar la función de prueba $f_N(x)$ en lugar de $f(x)$ en la ecuación (3.1).

Los coeficientes $\Phi_f^{(k)}$ se obtienen minimizando la función residuo, lo que en definitiva equivale a garantizar que $f_N(x)$ va a ser en algún sentido la mejor aproximación posible a la solución exacta. En vista de lo que se acaba de exponer, parece razonable establecer como criterios de clasificación los siguientes:

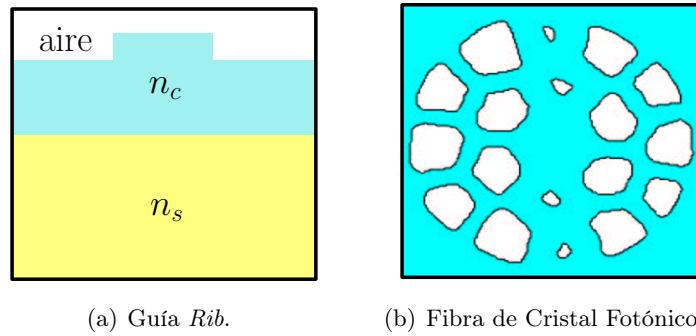


Figura 3.1: Ejemplos de geometrías analizables con métodos globales.

- El espacio funcional elegido para el desarrollo en serie de la función de prueba, es decir, el conjunto de funciones $\varphi_k(x)$.
- La estrategia empleada para la minimización de la función residuo, que en definitiva es la que determina cómo se van calcular los coeficientes $\Phi_f^{(k)}$ de dicho desarrollo.

3.2.1. Métodos Locales y Métodos Globales

En base al primero de los criterios de clasificación y atendiendo al dominio de definición de las funciones base empleadas, las técnicas numéricas se pueden agrupar en dos grandes familias:

1. Métodos Globales

Se caracterizan por utilizar un espacio funcional compuesto por $N + 1$ *funciones globales* de órdenes que van desde $k = 0$ hasta N . Las funciones base $\varphi_k(x)$ reciben el nombre de *funciones globales* cuando se encuentran definidas en todo el dominio computacional, valiendo cero únicamente en puntos aislados. Entre los espacios funcionales de carácter global más comúnmente utilizados destacan los de *Fourier*, *Hermite-Gauss* o *Chebyshev*. Estas familias de métodos dan lugar a sistemas matriciales densos, por lo que resulta fundamental mantener el número de términos empleado en el desarrollo en serie (3.2) lo más bajo posible.

Tradicionalmente, los métodos globales se han considerado útiles únicamente cuando se aplican a problemas definidos por geometrías regulares y con una complejidad espacial moderada (ver figura 3.1(a)), ya que en estos casos permiten obtener soluciones muy precisas con un coste computacional reducido. Sin embargo y gracias en parte a algunas de las aportaciones que se van a proponer en esta Tesis, las nuevas herramientas de simulación basadas en métodos globales han demostrado ser competitivas a la hora de analizar estructuras que por su complejidad hasta hace poco les estaban vetadas, como por ejemplo la fibra de cristal fotónico de alta birrefringencia que se muestra en la figura 3.1(b).

2. Métodos Locales

Se basan en dividir el dominio de computación en un cierto número de subintervalos, sobre los cuales se definen funciones base de carácter local. Al contrario de lo que ocurría en el caso anterior, las *funciones locales* sólo son distintas de cero en una pequeña parte del dominio, implementándose habitualmente mediante polinomios de órdenes bajos. La forma de mejorar la precisión en este tipo de métodos

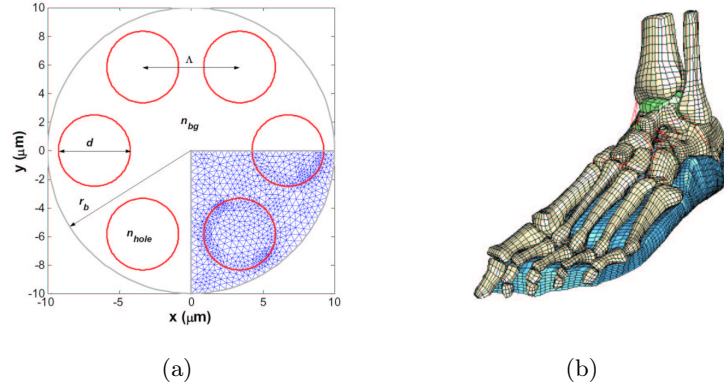


Figura 3.2: Ejemplos de mallado con elementos finitos.

no es incrementar el grado de las funciones base (que se suele mantener fijo), sino aumentar la densidad de mallado en aquellas zonas del dominio más problemáticas (ver figura 3.2(a)), lo que conduce en general a sistemas de ecuaciones de gran tamaño definidos por matrices dispersas. Dentro de la familia de métodos locales, el más significativo es sin duda el método de los *elementos finitos*. Aplicado a problemas de dos o más dimensiones, los elementos en los que esta técnica descompone el dominio se pueden identificar con pequeños triángulos o tetraedros, lo que le convierte en la opción perfecta para modelar objetos con formas irregulares como el que se muestra en la figura 3.2(b).

3.2.2. El Método de los Residuos Ponderados

Aunque bajo el nombre genérico de *método de los residuos ponderados* se agrupan técnicas numéricas muy diferentes entre sí, todas ellas se caracterizan por obtener los coeficientes $\Phi_f^{(k)}$ imponiendo las siguientes $N + 1$ condiciones sobre la función residuo:

$$\left\langle R(x; \Phi_f^{(0)}, \Phi_f^{(1)}, \dots, \Phi_f^{(N)}), w_i(x) \right\rangle = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.4)$$

donde $w_i(x)$ recibe el nombre de función de *test*¹ y $\langle u, v \rangle$ representa el producto escalar entre las funciones u y v , definido como

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v^*(x) dx \quad (3.5)$$

siendo Ω el dominio sobre el que se encuentran definidas dichas funciones.

La elección de las funciones de *test* $w_i(x)$ marca la diferencia entre las diferentes familias de métodos existentes, habiéndose recogido en la Tabla 3.1 únicamente las cuatro más significativas [Boyd1989]. En lo referente a la terminología, se debe tener en cuenta que existe cierta falta de uniformidad entre las diferentes fuentes bibliográficas. En este trabajo se emplearán los términos *espectral* y *pseudoespectral* como sinónimos de *Galerkin* y *Colocación* respectivamente siempre que estos métodos se apliquen sobre espacios funcionales de carácter global [Boyd1989].

¹En castellano es habitual denominar tanto a $f_N(x)$ como a $w_i(x)$ funciones de prueba, como consecuencia de la traducción directa de los términos ingleses *trial* y *test*. Puesto que esta nomenclatura puede resultar confusa, en este trabajo se ha preferido conservar la denominación inglesa para $w_i(x)$.

FUNCIÓN DE TEST	FAMILIA DE MÉTODOS
$w_i(x) = \delta(x - x_i), \quad x_i \in \Omega$	Colocación (Pseudoespectral)
$w_i(x) = \varphi_i(x)$	Galerkin (Espectral)
$w_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, N$	Momentos
$w_i(x) = \mathcal{H}\varphi_i(x)$	Mínimos Cuadrados

Tabla 3.1: Funciones de *test* típicas.

3.3. Propiedades de los Espacios Funcionales

En el método de Galerkin, las funciones de *test* $w_i(x)$ se hacen coincidir con las funciones base $\varphi_i(x)$ empleadas en el desarrollo en serie de $f_N(x)$. Esta elección se justifica atendiendo al conjunto de propiedades que poseen los espacios funcionales típicos, que coinciden con las características deseables para las funciones de *test*. Entre estas propiedades destacan las siguientes:

3.3.1. Completitud y Ortogonalidad

Los espacios funcionales empleados habitualmente (Fourier, Hermite-Gauss, etc.) se corresponden con conjuntos de autofunciones que aparecen como solución de un tipo especial de problemas de autovalores, denominados problemas de *Sturm-Liouville*. Se puede demostrar que estas soluciones cumplen con las condiciones de completitud y ortogonalidad que fueron enunciadas en el capítulo anterior en relación con los modos de las guías de onda, de forma que:

- El error de truncamiento cometido al aproximar la función $f(x)$ con N armónicos, definido como $E_T(N) = |f(x) - f_N(x)|$, se puede mantener por debajo de una cota arbitraria sin más que emplear suficiente número de términos en la expansión en serie (3.2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_T(N) = 0 \quad (3.6)$$

Hay que tener en cuenta que el error de truncamiento es una medida global del error cometido en la aproximación, por lo que en general esta afirmación no tiene por qué ser válida aplicada al error punto a punto, $e_{p.p.}(x) = f(x) - f_N(x)$. Por ejemplo, cuando $f(x)$ es discontinua, $e_{p.p.}(x)$ no converge a cero en todos los puntos del dominio, apareciendo el conocido *fenómeno de Gibbs*.

- El producto escalar de sus funciones base cumple con la siguiente condición:

$$\langle \varphi_i(x), \varphi_k(x) \rangle = \nu_k^2 \delta_{i,k} \quad (3.7)$$

donde $\delta_{i,k}$ es la función delta de *Kronecker* y ν_k representa la constante de normalización de la función k -ésima, que es igual a la unidad si las funciones base son ortonormales.

En general resulta más cómodo trabajar con espacios funcionales ortonormales, por lo que cuando éstos no lo son en origen lo habitual es normalizar previamente las funciones base dividiéndolas por ν_k . Esta normalización es además imprescindible

en ciertos casos, como por ejemplo el de Hermite-Gauss, ya que de otra forma pueden aparecer problemas de desbordamiento. En lo que sigue se considerará que las funciones base que se van a utilizar en los desarrollos en serie van a ser siempre ortonormales, es decir, que $\nu_k = 1$.

La propiedad de ortogonalidad de las funciones base (3.7) permite encontrar una expresión genérica para determinar los coeficientes del desarrollo en serie de una función $f(x)$ sobre cualquier espacio funcional φ . Multiplicando (3.2) por $\varphi_i^*(x)$, integrando sobre todo el dominio de definición de las funciones base y utilizando la definición de producto escalar (3.5) se obtiene

$$\langle f(x), \varphi_i(x) \rangle = \sum_{k=0}^N \Phi_f^{(k)} \langle \varphi_k(x), \varphi_i(x) \rangle \quad (3.8)$$

Si a continuación se aplica la propiedad de ortogonalidad (3.7) sobre la expresión anterior se llega finalmente a

$$\Phi_f^{(i)} = \langle f(x), \varphi_i(x) \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.9)$$

3.3.2. Condiciones de Contorno

Habitualmente la ecuación (3.1) lleva asociadas unas condiciones de contorno definidas en los extremos del dominio Ω que tanto $f(x)$ como $f_N(x)$ deben satisfacer, lo que evidentemente queda garantizado de forma inmediata si todas y cada una de las funciones base $\varphi_k(x)$ las cumplen individualmente. Por ejemplo, las funciones de Hermite-Gauss satisfacen las condiciones de contorno homogéneas en el infinito características de las soluciones físicas de la ecuación modal en problemas abiertos, mientras que las de Fourier son ideales para analizar problemas en los que el dominio de definición es periódico. Si las funciones base no cumplen las condiciones de contorno en los extremos del dominio existen varias formas de actuar, como por ejemplo imponer de forma explícita su cumplimiento incorporando nuevas ecuaciones al sistema matricial [Boyd1989].

Cuando se utiliza el espacio funcional de Fourier para analizar problemas abiertos, se puede conseguir que la periodización del dominio asociada al uso de estas funciones base, que evidentemente no cumplen de forma individual las condiciones de contorno homogéneas en el infinito, no afecte a la precisión de los resultados obtenidos. Para ello es necesario garantizar que las soluciones que se desea calcular valgan prácticamente cero en los extremos de la ventana de cómputo elegida, ya que de esa forma se minimiza el *aliasing* espacial. Dada su relevancia en los métodos que se desarrollarán posteriormente, este aspecto se tratará en detalle en el epígrafe 3.6.2.1.

3.3.3. Velocidad de Convergencia y Facilidad de Cálculo

La elección del espacio funcional influye de forma decisiva en la eficiencia computacional de los métodos espectrales, determinando tanto sus requerimientos de memoria como los tiempo de cálculo. Esta influencia está directamente relacionada con las siguientes propiedades de las funciones base:

- **Velocidad de Convergencia:** El número de términos empleado en el desarrollo en serie de la función de prueba $f_N(x)$ determina el tamaño del sistema matricial a resolver. En principio esto parece indicar que, para un problema concreto y una

determinada cota de error, se preferirán aquellos espacios funcionales que precisen un menor número de coeficientes espectrales para describir la solución.

- **Facilidad de Cálculo:** La evaluación de las funciones base en un conjunto arbitrario de puntos debe ser razonablemente rápida, lo que en la práctica limita los espacios funcionales útiles a funciones trigonométricas (Fourier) o polinómicas (Chebyshev o Hermite entre otras). En ese sentido, la disponibilidad de transformadas rápidas como la *Transformada Rápida de Fourier* (*Fast Fourier Transform* (FFT)) es otro factor determinante a la hora de decantarse por un espacio funcional u otro.

De forma genérica, en [Boyd1989] se enuncian las siguientes reglas a la hora de escoger el espacio funcional:

1. En el 95 % de los casos Fourier² va a ser la opción más adecuada.
2. A no ser que exista absoluta certeza de que otro espacio funcional es mejor, se utilizará Fourier.
3. No obstante, la geometría del problema es la que en última instancia va a determinar las funciones base que se deben utilizar.

Esta clara predilección por Fourier puede parecer exagerada. Sin embargo se debe tener en cuenta que, incluso en aquellos casos en los que la geometría del problema garantiza que el uso de otro espacio funcional como el de Hermite-Gauss va a proporcionar mayor velocidad de convergencia, la ausencia de una transformada rápida equivalente a la FFT tiende a equilibrar la balanza a efectos de eficiencia computacional.

3.4. El Método de Galerkin

3.4.1. Aplicación a Problemas Unidimensionales

La aplicación del método de Galerkin a la ecuación (3.1) permite obtener una expresión matricial cuyas incógnitas se corresponden con los $N + 1$ coeficientes espectrales que determinan la función de prueba $f_N(x)$. Sustituyendo en (3.4) la función residuo definida en (3.3) y particularizando las funciones de *test* por las funciones base (esto es, haciendo $w_i(x) = \varphi_i(x)$) se llega a

$$\begin{aligned} \left\langle R(x; \Phi_f^{(0)}, \Phi_f^{(1)}, \dots, \Phi_f^{(N)}), \varphi_i(x) \right\rangle &= \langle \mathcal{H}f_N(x), \varphi_i(x) \rangle - \langle q(x), \varphi_i(x) \rangle \\ &= \sum_k \Phi_f^{(k)} \langle \mathcal{H}\varphi_k(x), \varphi_i(x) \rangle - \Phi_q^{(i)} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $\Phi_q^{(i)}$ representa el coeficiente espectral i -ésimo de $q(x)$.

Reordenando los coeficientes $\Phi_f^{(k)}$ y $\Phi_q^{(i)}$ en dos vectores columna Φ_f y Φ_q respectivamente, y aplicando notación matricial se obtiene finalmente

$$\overline{\overline{\mathbf{H}}} \Phi_f = \Phi_q \quad (3.11)$$

²Considerando los polinomios de Chebyshev como las funciones base de Fourier a las que se les ha aplicado un cambio de variable.

DERIVADA PRIMERA	DERIVADA SEGUNDA	PRODUCTO
$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$	$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = f''(x)$	$g(x) \cdot f(x) = q(x)$
$\overline{\overline{D}} \cdot \Phi_f = \Phi_{f'}$	$\overline{\overline{DD}} \cdot \Phi_f = \Phi_{f''}$	$\overline{\overline{P_g}} \cdot \Phi_f = \Phi_q$
$D_{ik} = \left\langle \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x}, \varphi_i(x) \right\rangle$	$DD_{ik} = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2}, \varphi_i(x) \right\rangle$	$P_g^{(i,k)} = \langle g(x) \cdot \varphi_k(x), \varphi_i(x) \rangle$

Tabla 3.2: Operadores matriciales unidimensionales.

donde los elementos de la matriz $\overline{\overline{H}}$, que describe la proyección del operador lineal \mathcal{H} sobre el espacio funcional φ , se definen como:

$$H_{ik} = \langle \mathcal{H} \varphi_k(x), \varphi_i(x) \rangle \quad i, k = 0, 1, \dots, N \quad (3.12)$$

La tabla (3.2) muestra la particularización de (3.11) y (3.12) para los operadores lineales que habitualmente aparecen en las ecuaciones diferenciales unidimensionales. Para la mayoría de los espacios funcionales, los operadores derivada primera y segunda se pueden obtener analíticamente y conducen a matrices dispersas. Por ejemplo, en el caso de Fourier ambos son diagonales, mientras que si se usan las funciones de Hermite-Gauss se corresponden respectivamente con matrices bibanda y tribanda. El cálculo del operador producto por el contrario conduce a matrices densas y suele requerir integración numérica, siendo el responsable de la mayor parte de la carga computacional durante el proceso de cálculo de la matriz del sistema.

Utilizando estos operadores matriciales resulta inmediato plantear el sistema de ecuaciones asociado a la discretización de cualquier ecuación diferencial. Particularizando para un caso sencillo, como puede ser la ecuación característica para los modos TE de un *slab* [Tamir1988], se llega a:

$$\frac{\partial^2 e_y(x)}{\partial x^2} + k_0^2 \cdot \epsilon(x) \cdot e_y(x) = \beta^2 e_y(x) \Rightarrow \left[\overline{\overline{DD}} + k_0^2 \overline{\overline{P_\epsilon}} \right] \Phi_{e_y} = \beta^2 \Phi_{e_y} \quad (3.13)$$

donde Φ_{e_y} representa el vector de coeficientes espectrales del campo eléctrico.

El sistema de ecuaciones definido en (3.13) se corresponde con un problema de autovalores estándar

$$\overline{\overline{M}} \Phi_{e_y} = \beta^2 \Phi_{e_y} \quad (3.14)$$

en el que $\overline{\overline{M}} = \left[\overline{\overline{DD}} + k_0^2 \overline{\overline{P_\epsilon}} \right]$ recibe el nombre de matriz del sistema, siendo en general densa y de dimensiones $(N+1) \times (N+1)$.

3.4.2. Aplicación a Problemas Bidimensionales

3.4.2.1. Formulación matricial de la ecuación de análisis modal vectorial

La extensión del método de Galerkin a problemas bidimensionales resulta prácticamente inmediata, ya que las expresiones obtenidas en el punto anterior siguen siendo válidas sin más que sustituir la dependencia con x de las funciones involucradas por una dependencia con x e y . Se llega por tanto también en este caso a un problema de autovalores estándar como el descrito por la ecuación (3.14), en el que la matriz del sistema se puede obtener a partir de un conjunto de operadores matriciales equivalentes a los mostrados

en la tabla 3.2. Particularizando para la ecuación vectorial de análisis modal obtenida en el capítulo anterior (2.22), (2.23) se llega a

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{M_{xx}}} & \overline{\overline{M_{xy}}} \\ \overline{\overline{M_{yx}}} & \overline{\overline{M_{yy}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{e_x} \\ \Phi_{e_y} \end{bmatrix} = -\gamma^2 \begin{bmatrix} \Phi_{e_x} \\ \Phi_{e_y} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde Φ_{e_x} y Φ_{e_y} se corresponden, respectivamente, con los vectores de coeficientes espectrales de las componentes x e y del campo eléctrico. Las submatrices que componen $\overline{\overline{M}}$ reciben el nombre de operadores copolares ($\overline{\overline{M_{xx}}}$ y $\overline{\overline{M_{yy}}}$) y contrapolares ($\overline{\overline{M_{xy}}}$ y $\overline{\overline{M_{yx}}}$), definiéndose respectivamente como:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M_{xx}}} &= \overline{\overline{DD_x}} + k_0^2 \overline{\overline{P_\epsilon}} + \overline{\overline{D_x}} \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_x}} \overline{\overline{P_\epsilon}} \\ \overline{\overline{M_{yy}}} &= \overline{\overline{DD_y}} + k_0^2 \overline{\overline{P_\epsilon}} + \overline{\overline{D_y}} \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_y}} \overline{\overline{P_\epsilon}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M_{xy}}} &= \overline{\overline{D_x}} \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_y}} \overline{\overline{P_\epsilon}} - \overline{\overline{D_x}} \overline{\overline{D_y}} \\ \overline{\overline{M_{yx}}} &= \overline{\overline{D_y}} \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_x}} \overline{\overline{P_\epsilon}} - \overline{\overline{D_y}} \overline{\overline{D_x}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

La particularización para los espacios funcionales de Fourier y Hermite-Gauss de los operadores derivada ($\overline{\overline{D_x}}$, $\overline{\overline{DD_x}}$, $\overline{\overline{D_y}}$ y $\overline{\overline{DD_y}}$) y producto ($\overline{\overline{P_\epsilon}}$ y $\overline{\overline{P_{1/\epsilon}}}$) se realizará posteriormente. De momento es suficiente con adelantar que, al igual que ocurría en el caso 1D, las derivadas dan lugar a matrices dispersas que se pueden obtener analíticamente y los productos a operadores matriciales densos cuyo cálculo va a requerir integración numérica.

En problemas bidimensionales, el cálculo explícito y posterior almacenamiento en memoria de $\overline{\overline{M}}$ tiene en general un coste computacional muy elevado, ya que se trata de una matriz densa de enormes dimensiones ($2(N+1) \times 2(N+1)$) cuyos elementos son habitualmente números complejos. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el planteamiento de la ecuación de autovalores (3.15) es sólo es el primer paso del proceso de caracterización modal, que no se completará hasta que dicha ecuación sea resuelta. En el caso de sistemas de grandes dimensiones como los que aparecen en problemas 2D, la estrategia empleada en el cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz del sistema va a ser determinante en la eficiencia computacional del método, por lo que en la sección 3.5 se describirán brevemente las características distintivas de las dos familias en las que se suelen clasificar las modernas técnicas de resolución de problemas de autovalores.

3.4.2.2. Notación matricial de índice único

Los espacios funcionales empleados en problemas bidimensionales, además de cumplir con todas las propiedades (completitud, ortogonalidad, etc.) que se enunciaron en el epígrafe 3.3, suelen estar compuestos por funciones separables, es decir, que se pueden expresar como

$$\varphi_k(x, y) = \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(y) \quad (3.18)$$

De esta forma, el desarrollo en serie de la función de prueba bidimensional va a admitir dos representaciones diferentes aunque equivalentes

$$f(x, y) \approx f_N(x, y) = \sum_{k=0}^N \Phi_f^{(k)} \varphi_k(x, y) = \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_y} \Phi_f^{(m,n)} \varphi_m(x) \varphi_n(y) \quad (3.19)$$

donde $N = (N_x + 1)(N_y + 1) - 1$.

Es importante destacar que, aunque los coeficientes $\Phi_f^{(k)}$ y $\Phi_f^{(m,n)}$ contienen exactamente la misma información, ésta se encuentra organizada de forma muy distinta, dando lugar los primeros a un vector columna $\Phi_{\mathbf{f}}$ de N términos y los segundos a una matriz $\overline{\overline{\Phi}}_{\mathbf{f}}$ de tamaño $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$. La representación de los coeficientes espectrales como un vector columna $\Phi_{\mathbf{u}}$ recibe el nombre de formulación de índice único y es necesaria para plantear y resolver la ecuación de autovalores (3.15), mientras que la notación matricial $\overline{\overline{\Phi}}_{\mathbf{f}}$ resulta mucho más conveniente cuando se desean calcular los coeficientes espectrales a partir de la función definida en el dominio espacial o viceversa. El paso de una notación a otra es inmediato una vez que se decide como se extraen los coeficientes $\Phi_f^{(mn)}$ de la matriz. Si se opta por formar el vector $\Phi_{\mathbf{f}}$ leyendo la matriz $\overline{\overline{\Phi}}_{\mathbf{f}}$ por columnas se obtiene

$$\begin{bmatrix} \Phi_f^{(0,0)} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(N_x,0)} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(0,n)} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(N_x,n)} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(0,N_y)} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(N_x,N_y)} \end{bmatrix} \begin{matrix} k = n(N_x + 1) + m \\ \leftarrow \\ \\ \rightarrow \\ m = \text{mod}(k, N_x + 1) \\ n = \text{div}(k, N_x + 1) \end{matrix} \begin{bmatrix} \Phi_f^{(0,0)} & \dots & \Phi_f^{(0,n)} & \dots & \Phi_f^{(0,N_y)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \Phi_f^{(m,n)} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_f^{(N_x,0)} & \dots & \Phi_f^{(N_x,n)} & \dots & \Phi_f^{(N_x,N_y)} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

donde div y mod devuelven respectivamente la parte entera y el resto del cociente entre dos números.

3.5. Técnicas de Resolución de Problemas de Autovalores

Evidentemente, los requerimientos computacionales de los métodos espectrales van a ser muy dependientes de la estrategia empleada en el cálculo de la ecuación de autovalores³. El objetivo de esta sección es realizar una breve introducción a las modernas técnicas de cálculo de problemas de autovalores. Se va a evitar en todo momento entrar en los detalles de implementación de los métodos, centrándonos únicamente en aquellos aspectos relevantes que debe conocer el usuario de las rutinas estándar de cálculo de

³En realidad esta afirmación se podría aplicar a cualquier método numérico de simulación, incluidos los de carácter local.

autovalores. Estas rutinas, que aparecen integradas en la mayoría de los paquetes matemáticos como Matlab o Mathematica, son el resultado de años de trabajo en una de las líneas de investigación más activas de la matemática aplicada, por lo que presentan una gran complejidad y se encuentran muy optimizadas. En esta Tesis, como por otro lado resulta habitual en aplicaciones de física e ingeniería, las rutinas estándar de cálculo de autovalores se van a utilizar como “cajas negras” descritas por un interfaz de entrada/salida conocido. Sin embargo, incluso restringiéndonos a este uso de alto nivel, es indispensable conocer algunas características de su funcionamiento interno, ya que éstas influyen de forma determinante en los métodos numéricos de simulación que hacen uso de ellas.

3.5.1. Técnicas de Resolución Directa

Bajo esta denominación⁴ se agrupan aquellas técnicas que calculan el conjunto completo de autovalores (y autovectores si así se indica) de una matriz cuadrada $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ de dimensiones $N \times N$, y que en el caso general puede ser densa, compleja, no simétrica y no hermítica. De entre los métodos pertenecientes a esta familia, los más significativos son el QR (para matrices reales y problemas de autovalores estándar) y el QZ (para matrices complejas o problemas de autovalores generalizados). Ambos métodos son muy robustos y proporcionan resultados precisos, siendo las opciones habituales si realmente se desean obtener todos (o un número muy elevado) de autovalores de $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Sin embargo, presentan una serie de inconvenientes que en la práctica limitan su ámbito de aplicación a matrices densas de tamaño reducido:

- Requieren el cálculo explícito de la matriz $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ y su almacenamiento completo en memoria.
- Incluso en el caso de que esto no sea un problema, los requerimientos de memoria de estos algoritmos durante su ejecución (especialmente si se desean calcular también los autovectores) limitan enormemente el tamaño máximo del problema a resolver.
- Los tiempos de cómputo son extraordinariamente altos, ya que su complejidad crece como $O(N^3)$
- Calculan todos los autovalores de $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, aunque en muchas ocasiones sólo se está interesado en un subconjunto de éstos.
- No aprovechan las propiedades de las matrices dispersas.

La llamada a la rutina de Matlab que calcula todos los autovalores y autovectores de una matriz cuadrada es muy sencilla: $[\Phi, \lambda] = \text{eig}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$, de forma que los detalles de implementación quedan ocultos al usuario, para el cual la función `eig.m` es realmente una “caja negra”. De hecho, en realidad Matlab no implementa ningún algoritmo de cálculo de autovalores propio, sino que hace uso del conjunto de rutinas estándar incluidas en la librería de álgebra lineal LAPACK [Anderson1999].

En el caso de los métodos espectrales, el uso de una técnica directa de cálculo de autovalores limita enormemente el número de coeficientes espectrales que se pueden usar en la expansión en serie de la función de prueba. Por ejemplo, cuando se aplica un método de descomposición de Fourier típico para resolver la ecuación modal vectorial de un

⁴En cierto modo engañosa porque todos los métodos de resolución de autovalores tienen una componente iterativa [Radke1996].

dispositivo óptico, el número máximo de armónicos que se puede emplear en cada dirección transversal es del orden de⁵ 40, lo que resulta claramente insuficiente para obtener resultados precisos en dispositivos fabricados en tecnología de alto contraste.

3.5.2. Técnicas de Resolución Iterativa

Aparecen con posterioridad y como alternativa a los métodos directos, ya que son capaces de calcular de forma muy eficiente uno o varios autovalores de una matriz $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, reduciendo enormemente los tiempos de cómputo. Aprovechan además las características de las matrices dispersas y en muchos casos ni siquiera requieren calcular $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ de forma explícita, lo que rebaja considerablemente los requerimientos de memoria. Las técnicas iterativas, entre las que destaca la familia de métodos de *Arnoldi-Lanzcos* [Sorensen1992], [Lehoucq1996], [Lehoucq1998], se han convertido en los últimos años en la opción más empleada para resolver problemas de autovalores de grandes dimensiones. Se resumen a continuación algunas de las características más relevantes de esta familia de métodos:

- Permiten calcular sólo un subconjunto del total de autovalores de una matriz, como por ejemplo los de mayor o menor módulo, parte real o parte imaginaria. En estos casos el método iterativo sólo requiere evaluar repetidas veces productos matriz vector del tipo $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \Phi$, por lo que habitualmente no es necesario calcular ni almacenar $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ de forma explícita.
- Aplicando la transformación denominada *shift and invert* [Lehoucq1998], es posible determinar aquellos autovalores que más se aproximan a un valor determinado σ , lo que permite aumentar considerablemente la velocidad de convergencia del método. Cuando se utiliza esta transformación, el algoritmo iterativo necesita evaluar productos matriz-vector del tipo

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{M}}} - \sigma \overline{\overline{\mathbf{I}}}\right)^{-1} \cdot \Phi \quad (3.21)$$

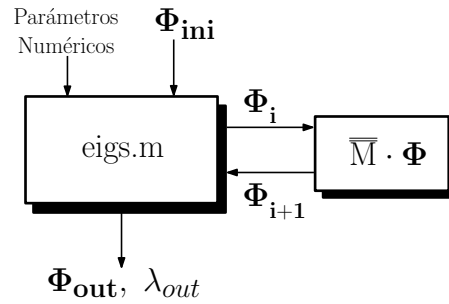
Esta operación no es evidente si se desea evitar la determinación explícita de $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, ya que en este caso cada evaluación de (3.21) requiere a su vez resolver de forma iterativa, en base a productos $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \Phi$, el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{M}}} - \sigma \overline{\overline{\mathbf{I}}}\right) \cdot \mathbf{y} = \Phi \quad (3.22)$$

Esto no siempre es fácil porque los resolutores iterativos de ecuaciones lineales presentan serios problemas de convergencia si la matriz del sistema no se preconditiona adecuadamente [Pearce2005].

- El tiempo de cómputo, e incluso el resultado final obtenido, depende fuertemente de Φ_{ini} , una aproximación inicial al autovector o autovectores buscados que puede ser elegida de forma aleatoria o particularizada a un valor concreto para acelerar la convergencia. Es importante destacar que una mala elección de la aproximación inicial puede provocar que el algoritmo iterativo tarde mucho en converger o incluso que no sea capaz de encontrar el autovalor buscado.

⁵Usando un ordenador personal de última generación con 2GB de RAM.

Figura 3.3: Interfaces de entrada salida de la rutina `eigs.m`

- Existen parámetros numéricos que influyen de forma determinante en la eficiencia del método y cuyo ajuste no resulta evidente para el usuario, ya que su valor óptimo depende del tipo de problema.

El principal inconveniente que presentan los métodos iterativos de resolución es que su uso requiere en general un mayor conocimiento por parte del usuario de su funcionamiento interno. Además, siempre existe la posibilidad de “saltarse” el autovalor buscado, por lo que se debe ser muy cuidadoso y asegurarse siempre de que la solución a la que se ha convergido finalmente es la que se buscaba⁶. En cualquier caso, los métodos iterativos son la única opción para resolver aquellos problemas de autovalores que por sus dimensiones hacen inviable el uso de las técnicas directas. Como se comprobará posteriormente, los métodos de descomposición de Fourier iterativos permiten aumentar el número de armónicos en problemas 2D vectoriales hasta alcanzar o incluso superar los 200 en cada dirección transversal, cifras impensables en los métodos de Fourier clásicos.

La función que permite encontrar un subconjunto del total de autovectores de una matriz cuadrada en Matlab se denomina `eigs.m`, que en realidad no es sino un interfaz de usuario “amigable” definido sobre el conjunto de rutinas agrupadas en la librería ARPACK [Lehouck1998] y que implementan un método iterativo de *Arnoldi-Lanczos* muy sofisticado. En la figura 3.3 se han representado de forma esquemática los interfaces de entrada y salida definidos por esta función. El bloque que evalúa los productos matriz por vector $\bar{M} \cdot \Phi$ determina el problema que se desea resolver y habitualmente es una función que, implementada de la forma adecuada, no va a requerir el cálculo explícito de la matriz \bar{M} . Es importante destacar que ésta es la función sobre la que itera el resolutor de autovalores, por lo que su influencia en el tiempo de cómputo total va a ser decisiva.

3.6. Métodos de Descomposición de Fourier

Se denominan de forma genérica *Métodos de Descomposición de Fourier* (*Fourier Decomposition Method* FDM) a la familia de técnicas numéricas de simulación que usan el espacio funcional de Fourier para realizar la discretización transversal en problemas de óptica integrada, ya sea en el ámbito del análisis modal [Henry1989], [Marcuse1992], [Wanguemert2001], [Silvestre2005], [Ortega2006], [Ortega2007], la propagación de la envolvente óptica [Wanguemert2004], [Lopez2005] o el cálculo de discontinuidades entre guías de diferente sección transversal [Ortega2005], [Molina2005]. En esta sección se

⁶En [Boyd1989] se describe a la perfección el comportamiento habitual del usuario de un método iterativo durante la ejecución del mismo: “*If one must iterate, one must worry over the workstation like a parent watching over a toddler asleep with a high fever.*”

enunciarán las principales propiedades de este espacio funcional y se desarrollarán los operadores matriciales que permiten formular la ecuación de análisis modal vectorial obtenida en el capítulo anterior. Siempre que sea posible, los razonamientos se realizarán referidos a estructuras unidimensionales, ya que así la matemática involucrada es más sencilla y las representaciones gráficas resultan también mucho más claras. Actuando de esta forma no se pierde generalidad, ya que las conclusiones obtenidas en el caso unidimensional son directamente aplicables a espacios bidimensionales.

3.6.1. Transformada Discreta de Fourier

El espacio funcional de Fourier admite diferentes formulaciones para las funciones base. Por ejemplo en [Henry1989] se usan funciones del tipo $\varphi_k = \text{sen}(k\pi x/X_0)$, donde X_0 representa el tamaño de la ventana de cómputo. Sin embargo, en esta Tesis, al igual que ya se hizo en [Wanguemert1999], se ha preferido utilizar la siguiente formulación (más general) basada en exponenciales complejas

$$\varphi_k(x) = e^{jk\frac{2\pi}{X_0}x} = e^{jkK_{X_0}x} \quad (3.23)$$

donde k es el orden de la función base (que puede tomar tanto valores positivos como negativos), X_0 es el periodo (que en ese caso coincide con la ventana de cómputo) y K_{X_0} es la pulsación del armónico fundamental.

Partiendo de este conjunto de funciones base, se puede definir el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica $f(x) = f(x + X_0)$ como

$$f(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \Phi_f^{(k)} \cdot e^{jkK_{X_0}x} \quad (3.24)$$

donde $\Phi_f^{(k)}$ es el coeficiente de Fourier o armónico k -ésimo de $f(x)$.

3.6.1.1. Transformada Discreta de Fourier Directa

Por *Transformada Discreta de Fourier Directa*⁷ (*Direct Discrete Fourier Transform* (DFT)) se entiende el proceso que permite obtener de forma precisa los $N + 1$ primeros armónicos de una función $f(x)$ periódica de período X_0 . En principio esto no debería ser problemático, ya que particularizando (3.9) para el espacio funcional de Fourier se obtiene una expresión muy simple para el cálculo de estos coeficientes

$$\Phi_f^{(k)} = \frac{1}{X_0} \int_{X_0} f(x) \cdot e^{-jkK_{X_0}x} dx, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (3.25)$$

Desafortunadamente, esta expresión carece de solución analítica en la mayoría de los casos de interés, por lo que en muchas ocasiones el cálculo de los coeficientes espectrales sólo se podrá llevar a cabo de una manera aproximada mediante integración numérica. Escogiendo un número de puntos de discretización espacial $M \geq N$ y asumiendo que dichas muestras se encuentran equiespaciadas sobre el eje x , la aplicación del esquema

⁷En esta Tesis se emplearán habitualmente los términos *transformada directa* y *transformada inversa* de forma poco rigurosa, refiriéndose siempre a la *transformada discreta* directa e inversa respectivamente.

de integración por rectángulos conduce a⁸

$$\Phi_f^{(k)} \approx \frac{1}{X_0} \sum_{n=0}^{M-1} f(x_n) \cdot e^{-jkKx_0x_n} \Delta x = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} f(x_n) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (3.26)$$

Utilizando notación matricial, el vector de armónicos $\Phi_{\mathbf{f}}$ se puede obtener como

$$\Phi_{\mathbf{f}} = \frac{1}{M} \overline{\overline{\text{DFT}}} \cdot \mathbf{f} \quad (3.27)$$

donde \mathbf{f} es un vector columna que contiene las M muestras equiespaciadas de la función original y $\overline{\overline{\text{DFT}}}$ es la que se denomina *matriz transformada directa de Fourier*, de dimensiones $N \times M$.⁹

Evidentemente, el grado de exactitud de los armónicos calculados de esta forma depende fuertemente del número de puntos de discretización empleado, de manera que si M es bajo el error cometido puede llegar a ser apreciable. Por otro lado, el cálculo del vector de coeficientes mediante la DFT (3.27) resulta muy costoso computacionalmente para valores de M grandes, ya que requiere un total de $M \cdot N$ multiplicaciones. Afortunadamente, la existencia para el espacio funcional de Fourier de una transformada rápida (la conocida FFT) va a permitir reducir considerablemente el número de operaciones y por tanto los tiempos de cómputo, con la única condición de utilizar un valor de M igual a una potencia de dos. La complejidad de la FFT es del orden de $O(M \cdot \log_2 M)$, mucho menor que la correspondiente a la aplicación directa de la DFT incluso para valores de M elevados. El procedimiento para calcular de forma precisa y eficiente los N primeros coeficientes espectrales de una función periódica $f(x)$ utilizando M puntos de discretización se denominará en lo que sigue $\text{FFT}(N, M)$, y consta de dos pasos:

1. Muestrear la función original en $M = 2^m$ puntos equiespaciados y calcular su FFT, lo que dará lugar a un vector de coeficientes $\Phi_{\mathbf{f}}$ compuesto por los M primeros armónicos (aproximados numéricamente) de $f(x)$

$$\Phi_{\mathbf{f}} = \frac{1}{M} \text{FFT}(\mathbf{f}) \quad (3.28)$$

2. De los M coeficientes recién calculados, seleccionar únicamente los N primeros y eliminar el resto.

$$\Phi_{\mathbf{f}} \xrightarrow{-\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}} \check{\Phi}_{\mathbf{f}} \quad (3.29)$$

Se debe tener en cuenta que, puesto que se ha usado un número de puntos de discretización muy elevado ($M \gg N$), es de esperar que el error cometido en los N armónicos que componen $\check{\Phi}_{\mathbf{f}}$ sea realmente muy bajo.

⁸Para el espacio funcional de Fourier, la integración por rectángulos sobre un eje de muestras equiespaciadas de la función original coincide con la integración numérica en cuadratura [Boyd1989].

⁹Como se detallará en el siguiente epígrafe, la discretización del eje espacial va a provocar la periodización del espectro, de forma que $\Phi_f^{(\frac{N}{2})} = \left(\Phi_f^{(-\frac{N}{2})} \right)^*$. Por ese motivo, como resultado de la aplicación de la DFT se van a obtener únicamente N armónicos en lugar de $N + 1$.

3.6.1.2. Transformada Inversa de Fourier

La *Transformada Inversa de Fourier* permite recuperar la función $f_N(x)$ en un conjunto discreto de M puntos equiespaciados de su dominio de definición a partir de sus N primeros armónicos. La aplicación de notación matricial a la expresión (3.24) conduce directamente a

$$\mathbf{f} = N \cdot \overline{\text{IDFT}} \cdot \Phi_{\mathbf{f}} \quad (3.30)$$

donde \mathbf{f} es un vector de M términos que contiene las muestras de la función $f_N(x)$ en los puntos seleccionados¹⁰.

Si el número de puntos de muestreo espacial y el número de armónicos empleado en el desarrollo en serie coinciden ($M = N$) las matrices de transformación directa e inversa son cuadradas y de dimensiones $N \times N$, pudiéndose demostrar entonces que $\overline{\text{IDFT}} = \overline{\text{DFT}}^{-1}$. Al igual que para la transformada directa, en este caso existe también la posibilidad de acelerar los cálculos haciendo uso de la IFFT, lo que permite escoger un número de puntos M muy superior al número de armónicos N sin incrementar demasiado el coste computacional. El procedimiento para conseguirlo recibirá en lo sucesivo el nombre de IFFT(M, N) y se concreta en la aplicación de estos dos pasos:

1. Se completa el vector de coeficientes $\Phi_{\mathbf{f}}$ (que inicialmente estaba compuesto por N términos) con $(M - N)$ ceros, hasta alcanzar una dimensión final M . Este procedimiento es el denominado habitualmente como *zero-padding*.

$$\Phi_{\mathbf{f}} \xrightarrow{[0, \dots, \Phi_{\mathbf{f}}, \dots, 0]} \hat{\Phi}_{\mathbf{f}} \quad (3.31)$$

2. Se aplica la IFFT al nuevo vector de armónicos $\hat{\Phi}_{\mathbf{f}}$, con lo que se obtienen M muestras equiespaciadas de la función aproximada $f(x)$

$$\mathbf{f} = M \cdot \text{IFFT} \left(\hat{\Phi}_{\mathbf{f}} \right) \quad (3.32)$$

3.6.2. Enventanado, Muestreo y Suavizado de Funciones

Habitualmente, las magnitudes físicas que se pretenden resolver (los campos electromagnéticos por ejemplo) se corresponden con funciones caracterizadas por ser continuas y no periódicas. Sin embargo, el uso de cualquier método numérico de simulación va a imponer en las soluciones obtenidas algunas condiciones que no son propias del problema original. En este caso, la utilización del espacio funcional de Fourier fuerza la periodicidad de la función de prueba con la que se pretende aproximar la solución exacta, que no suele ser periódica. Por otro lado y como consecuencia directa de la necesidad de calcular numéricamente las integrales de cruce (3.25), la discretización espacial del problema va a ser inevitable. En este epígrafe se proporcionan las claves para comprender la influencia de estos dos factores (enventanado y discretización) en la precisión de los resultados obtenidos con los métodos de descomposición de Fourier. También se propone la técnica de suavizado de funciones con el objetivo de reducir los requerimientos en cuanto a número de armónicos y de puntos de discretización de esta familia de métodos espectrales.

¹⁰Al contrario de lo que ocurre con la transformada directa (3.27), la ecuación (3.30) no es el resultado de discretizar una integral, sino que se corresponde directamente con el sumatorio (3.24). Por lo tanto, no se comete error alguno al recuperar la función $f_N(x)$ a partir de los N coeficientes que la definen.

3.6.2.1. Enventanado

Cuando los métodos de descomposición de Fourier son aplicados a problemas no periódicos, la imposición de una ventana de cómputo (relacionada evidentemente con el periodo X_0 de las funciones base) implica necesariamente la periodización del problema original y por lo tanto de sus soluciones. La determinación a priori del tamaño de ventana óptimo para un problema concreto es realmente complicada, pero en cualquier caso ésta deberá ser lo suficientemente grande como para garantizar que la solución exacta $f(x)$ y la periodizada $f^p(x)$ sean prácticamente idénticas en su interior, de forma que

$$f(x) \approx f^p(x), \quad x \in X_0 \quad (3.33)$$

Aplicada por ejemplo a los modos guiados de una guía de onda, esta condición equivale a garantizar que el campo sea aproximadamente cero en los extremos de la ventana de cómputo.

Como es bien sabido de la teórica básica de Fourier, al convertir la función $f(x)$ en periódica, su espectro (continuo originalmente) pasa a ser discreto, con una separación frecuencial entre muestras $K_{X_0} = 2\pi/X_0$. Por un lado, resulta evidente que un mayor tamaño de ventana proporciona una aproximación más fiel al espectro continuo de la función original, ya que la densidad de muestreo es proporcional a X_0 . Por otro lado, aumentar el tamaño de ventana requiere usar un mayor número de armónicos para garantizar que se trabaja con un ancho de banda de señal BW_N suficiente, ya que éste es inversamente proporcional a X_0 para un número de armónicos fijo

$$BW_N = N \cdot K_{X_0} = \frac{2\pi N}{X_0} \quad (3.34)$$

En las figuras 3.4 a 3.7 se representa gráficamente la relación existente entre el tamaño de ventana (X_0) y la versión muestreada del espectro de la función original. Por conveniencia, los espectros se han representado sobre un eje de frecuencias discretizado $\omega_k = k \cdot K_{X_0} = (2 \cdot \pi \cdot k)/X_0$. La figura 3.5 muestra el caso en el que la ventana de cómputo se ha escogido de forma óptima, de manera que la función original y la periodizada son prácticamente indistinguibles en su interior. Para ese tamaño de ventana serán necesarios al menos $N = 22$ armónicos para cubrir todo el ancho de banda relevante del espectro de la señal. Si se duplica el tamaño de ventana manteniendo constante el número de armónicos (figura 3.6), la densidad de muestreo del espectro en baja frecuencia es el doble que en el caso anterior, pero se pierde información importante alojada en las altas frecuencias. Por último, en la figura 3.7 se muestra la típica situación de aliasing, en la que al escoger una ventana de cómputo demasiado pequeña la función periodizada difiere de la original en el periodo. En este caso la densidad de muestreo del espectro en baja frecuencia es claramente insuficiente, ya que sólo 11 de los 23 coeficientes espectrales llevan información relevante. El resto valen prácticamente cero y no contribuyen por tanto a mejorar la precisión.

Parece claro por tanto que estos dos parámetros (tamaño de ventana y número de armónicos) no se pueden escoger de forma independiente. Por ejemplo, si la función $f(x)$ se encuentra muy expandida espacialmente, será necesario fijar tanto X_0 como N a valores elevados, lo que implica trabajar con matrices de gran tamaño e incrementa notablemente los requerimientos computacionales. Ésta es la razón que justifica la baja eficiencia de los métodos de descomposición de Fourier a la hora de caracterizar los modos

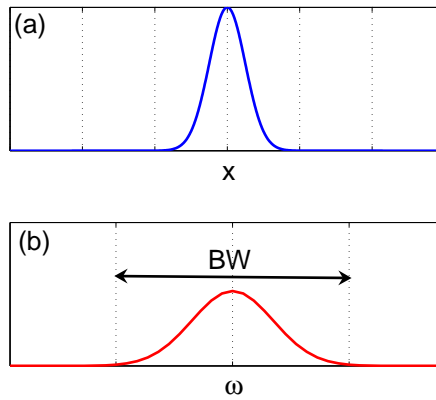


Figura 3.4: Representación en los dominios espacial (a) y espectral (b) de una función $f(x)$ continua y no periódica.

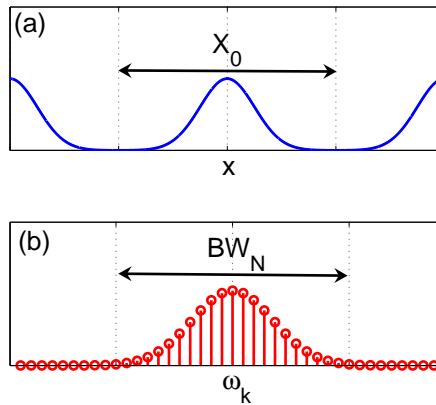


Figura 3.5: Representación en los dominios espacial (a) y espectral (b) de la función periodizada $f^p(x)$. X_0 óptimo.

cercanos al corte en guías dieléctricas¹¹.

3.6.2.2. Muestreo de señales continuas

Como ya se adelantó anteriormente, cualquier proceso de resolución numérica va a requerir una discretización espacial del problema, lo que convierte las magnitudes físicas a calcular (originalmente funciones continuas) en señales discretas. Este proceso de muestreo convierte el espectro en periódico, pudiendo aparecer problemas de solapamiento espectral en el caso de que el muestreo espacial no sea lo suficientemente denso. Para un tamaño de ventana X_0 y un número de muestras M , es inmediato comprobar que el periodo de repetición del espectro vendrá dado por la siguiente expresión

$$\Omega_0 = M \cdot K_{X_0} = \frac{2\pi M}{X_0} \quad (3.35)$$

¹¹Evidentemente, quedan excluidos de esta afirmación general los métodos de Fourier con transformación de variables como los desarrollados en [Hewlett1995], [Wanguemert1999], [Wanguemert2001].

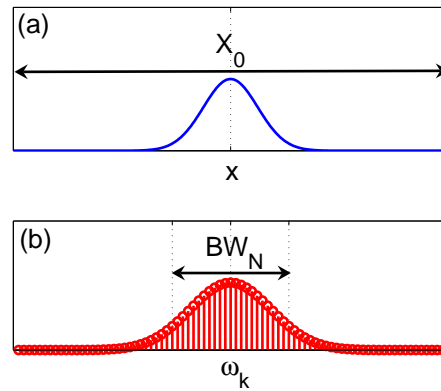


Figura 3.6: Representación en los dominios espacial (a) y espectral (b) de la función periodizada $f^p(x)$. X_0 muy superior al óptimo.

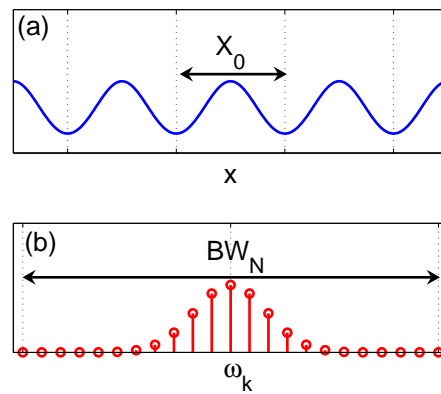


Figura 3.7: Representación en los dominios espacial (a) y espectral (b) de la función periodizada $f^p(x)$. X_0 muy inferior al óptimo.

En las figuras 3.8(a) y 3.8(b) se representan los espectros obtenidos al muestrear una función continua periódica con M y $M/2$ puntos respectivamente. Resulta evidente que sólo en el primer caso el número de muestras es lo suficientemente alto como para evitar el solapamiento espectral, lo que justifica la conveniencia de trabajar con valores de M elevados. Sin embargo se debe tener en cuenta que, dada su influencia en el coste computacional, tampoco resulta recomendable incrementar demasiado este número. En general resulta difícil determinar a priori la densidad de muestreo óptima para un determinado problema, ya que ésta dependerá en gran medida de las características espectrales de las funciones involucradas. En el caso del modelado de dispositivos ópticos, las estructuras fabricadas en tecnologías de alto contraste serán las más exigentes tanto en número de armónicos como en número de puntos de muestreo, debido a que muchas de las funciones involucradas (como por ejemplo los índices de refracción, los campos eléctricos o las derivadas de éstos) son fuertemente discontinuas y caracterizadas por tanto por presentar un gran ancho de banda. A modo de prueba de esta afirmación, en la figura 3.9 se analiza la convergencia con el número de armónicos del índice efectivo ($N_{eff} = \beta/k_0$) para el modo fundamental de un *slab* de salto de índice compuesto por un núcleo de GaAs ($n = 3,5$) de $1 \mu\text{m}$ de ancho rodeado de aire a una longitud de onda de trabajo $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$. El

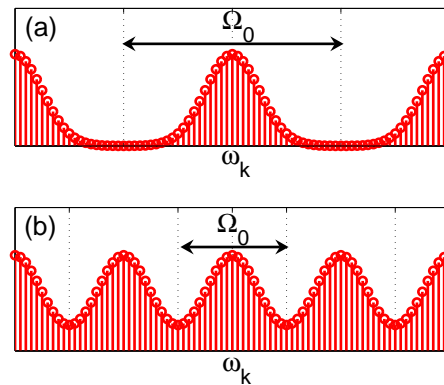


Figura 3.8: Espectro de una señal periódica muestreada espacialmente con M puntos (a) y $M/2$ puntos (b) respectivamente.

tamaño de la ventana de cómputo se ha mantenido fijo ($X_0 = 5 \mu\text{m}$), mientras que la variación del número de puntos de discretización ha dado lugar a tres curvas, obtenidas con $M = 2^{18}$, $M = 2^{15}$ y $M = 2^{11}$ respectivamente. A la vista de estas gráficas, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Cuando el número de armónicos es muy bajo, este factor es el que limita la precisión. Para un tamaño de ventana óptimo (como el que se ha escogido en este ejemplo) esto equivale a decir que no se está muestreando una parte importante del espectro de las funciones involucradas.
- En todos los casos se alcanza la convergencia para valores suficientemente altos de N . El factor limitante a efectos de precisión pasa a ser entonces el número de puntos de discretización M , o lo que es lo mismo, el solapamiento espectral asociado al muestreo espacial del problema.
- Se requieren valores extraordinariamente altos tanto de N como de M para obtener resultados precisos, lo que influye de forma determinante en los tiempos de cómputo, que son muy elevados.

Estas conclusiones tienen carácter general y son directamente aplicables a estructuras bidimensionales. Sin embargo, se debe tener en cuenta que en ese caso el incremento del coste computacional resulta aún más dramático, ya que tanto los tiempos de cómputo como los requerimientos de memoria crecen con el cuadrado de los parámetros numéricos M y N .

3.6.2.3. Suavizado de funciones

Como se acaba de exponer, los requerimientos en cuanto a número de armónicos y número de puntos de muestreo van a ser mucho mayores en estructuras de guiado fuerte (caracterizadas por presentar grandes saltos de índice), que en dispositivos construidos en tecnologías de bajo contraste o con perfiles de índice de refracción graduales. La forma habitual de rebajar estos requisitos cuando se emplean métodos espectrales es aplicar un pequeño suavizado al índice de refracción de la estructura que se desea analizar, lo que equivale a realizar un filtrado paso bajo que limite su ancho de banda. Se debe tener presente en cualquier caso que, si bien esta forma de actuar puede mejorar notablemente la

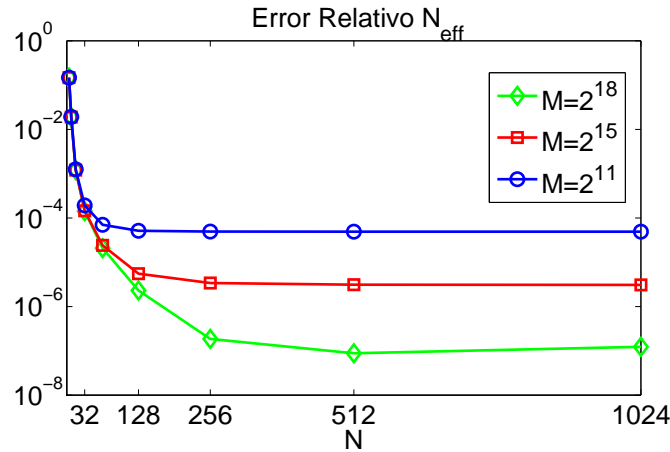


Figura 3.9: Influencia del número de puntos de muestreo. Error relativo del N_{eff} en función del número de armónicos.

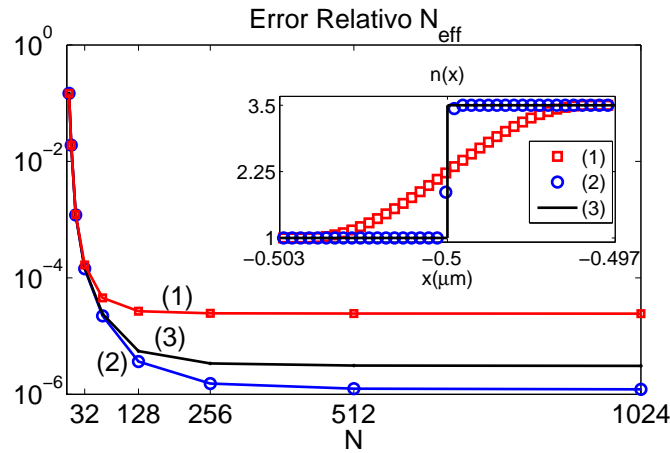


Figura 3.10: Influencia del suavizado del índice de refracción. Error relativo del N_{eff} en función del número de armónicos.

velocidad de convergencia, también se está modificando la geometría del problema y por tanto la solución del mismo. Dicho de otra forma, un suavizado excesivo puede conducir a convergencias extraordinariamente rápidas a valores completamente erróneos. Esta situación se ilustra en la figura 3.10, donde se han representado, para el *slab* analizado en el punto anterior, las curvas de convergencia asociadas al problema resuelto con el índice de refracción original y con dos versiones suavizadas de dicho índice, manteniendo el número de puntos de discretización constante ($M = 2^{15}$). En esa misma gráfica se ha representado también el muestreo espacial del índice de refracción para ambos tipos de suavizado en torno a uno de los interfaces núcleo-cubierta de la estructura. Tal y como se muestra en esta figura, los mejores resultados se suelen obtener para suavizados extraordinariamente pequeños, que afecten a sólo un par de muestras en torno al interfaz. Suavizados más profundos modifican demasiado el problema y conducen a convergencias rápidas pero a valores incorrectos, empeorando incluso los resultados obtenidos respecto al análisis de la estructura sin suavizar.

3.6.3. Operadores Matriciales en el Espacio Funcional de Fourier

3.6.3.1. Operadores matriciales unidimensionales

Como es bien sabido, el espacio funcional de Fourier se caracteriza porque el resultado de derivar sus funciones base o de multiplicarlas entre sí, es siempre una exponencial compleja y por tanto sigue perteneciendo al espacio funcional original:

$$\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} = \frac{\partial e^{jkK_{X_0}x}}{\partial x} = jkK_{X_0} \varphi_k(x) \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e^{jkK_{X_0}x}}{\partial x^2} = (jkK_{X_0})^2 \varphi_k(x) \quad (3.37)$$

$$\varphi_i(x) \cdot \varphi_k(x) = e^{jiK_{X_0}x} \cdot e^{jkK_{X_0}x} = \varphi_{i+k}(x) \quad (3.38)$$

Esta propiedad va a simplificar notablemente la particularización de los operadores matriciales presentados de forma genérica en el epígrafe 3.4.1, que quedan finalmente definidos como:

1. Operadores Derivada Primera y Derivada Segunda

Son matrices diagonales de dimensiones $(N+1) \times (N+1)$, cuyos elementos vienen dados por las siguientes expresiones respectivamente

$$D_{ik} = jkK_{X_0} \cdot \delta_{i,k} \quad (3.39)$$

$$DD_{ik} = D_{ik} \cdot D_{ik} = (jkK_{X_0})^2 \cdot \delta_{i,k} \quad (3.40)$$

2. Operador Producto (Implementación Directa)

Se trata de una matriz densa de dimensiones $(N+1) \times (N+1)$ cuyos elementos se calculan como

$$P_\epsilon^{(i,k)} = \langle \epsilon(x) \cdot \varphi_k(x), \varphi_i(x) \rangle = \langle \epsilon(x), \varphi_{i-k}(x) \rangle = \Phi_\epsilon^{(i-k)} \quad (3.41)$$

y que se corresponde con una matriz de *Toeplitz* formada por los primeros $2N+1$ coeficientes espectrales de la función $\epsilon(x)$

$$\overline{\overline{P}}_\epsilon = \begin{bmatrix} \Phi_\epsilon^{(0)} & \Phi_\epsilon^{(-1)} & \Phi_\epsilon^{(-2)} & \dots & \Phi_\epsilon^{(-N)} \\ \Phi_\epsilon^{(1)} & \Phi_\epsilon^{(0)} & \Phi_\epsilon^{(-1)} & \dots & \Phi_\epsilon^{(-N+1)} \\ \Phi_\epsilon^{(2)} & \Phi_\epsilon^{(1)} & \Phi_\epsilon^{(0)} & \dots & \Phi_\epsilon^{(-N+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi_\epsilon^{(N)} & \Phi_\epsilon^{(N-1)} & \Phi_\epsilon^{(N-2)} & \dots & \Phi_\epsilon^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

El operador producto definido de esta forma no es sino la implementación matricial de la conocida *Regla de Laurent* o *convolución*, mediante la cual se pueden calcular directamente los coeficientes espectrales del producto de dos funciones a partir de los armónicos (que se suponen conocidos y perfectamente calculados) de cada una de ellas

$$d(x) = \epsilon(x) \cdot e(x) \rightarrow \Phi_d = \overline{\overline{P}}_\epsilon \Phi_e \quad (3.43)$$

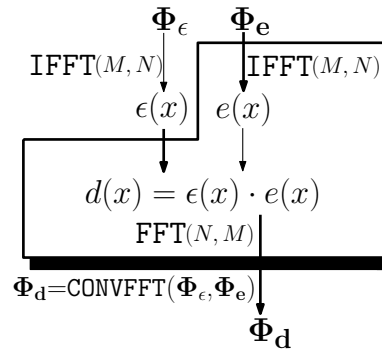


Figura 3.11: Convolución basada en la FFT.

La aplicación directa de la regla de *Laurent* presenta sin embargo dos serios inconvenientes desde el punto de vista de los requerimientos computacionales¹²:

- Implica el almacenamiento en memoria de una matriz densa de dimensiones $(N + 1) \times (N + 1)$.
- El coste en cuanto a número de operaciones del producto matriz por vector $\overline{\overline{\mathbf{P}_\epsilon}} \cdot \Phi_e$ es muy alto, del orden de $O(N^2)$.

3. Operador Producto (Implementación Basada en la FFT)

Existe una alternativa bien conocida a la implementación directa de la regla de *Laurent* que se expuso en el punto anterior. Basándose en la extraordinaria eficiencia de la transformada rápida de Fourier, el cálculo de los coeficientes de la función producto se puede llevar a cabo con un reducido coste computacional aplicando el procedimiento esquematizado en la figura 3.11, que recibe el nombre de *convolución basada en la FFT* o *convolución rápida*. Esta técnica resulta especialmente útil cuando se aplica junto con alguna estrategia de resolución iterativa del problema de autovalores (ver epígrafe 3.5.2), ya que elimina la necesidad de almacenar en memoria la matriz $\overline{\overline{\mathbf{P}_\epsilon}}$ y consigue reducir el número de operaciones necesario para calcular los productos matriz por vector a $O(2 \cdot M \cdot \log_2(M))$, donde M es el número de puntos de discretización espacial en el que se desea calcular el producto $d(x)$. Tal y como se explicó en el epígrafe 3.6.1, en el caso de considerar $M > N$ las operaciones $\text{IFFT}(M, N)$ y $\text{FFT}(N, M)$ que aparecen en la figura 3.11 incluyen de forma implícita el relleno con ceros de los vectores de armónicos Φ_ϵ y Φ_e por un lado y el truncamiento de Φ_d a $N + 1$ términos por otro. Por último, se debe tener en cuenta que en muchas ocasiones es la propia función $\epsilon(x)$ y no su vector de armónicos Φ_ϵ la que resulta conocida. En estos casos la evaluación de dicha función a través de la IFFT no resulta necesaria, lo que redundaría en una reducción aún mayor del tiempo de cómputo.

¹²Los problemas de convergencia que presenta la regla de *Laurent* cuando es aplicada al producto de funciones discontinuas con saltos concurrentes serán obviados de momento.

3.6.3.2. Operadores matriciales bidimensionales

La extensión al caso bidimensional del espacio funcional de Fourier da lugar a las siguientes funciones base

$$\varphi_k(x, y) = \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(y) = e^{jmK_{X_0}x} \cdot e^{jnK_{Y_0}y} \quad (3.44)$$

donde $K_{X_0} = \frac{2\pi}{X_0}$ y $K_{Y_0} = \frac{2\pi}{Y_0}$ se corresponden respectivamente con la pulsación del armónico fundamental en cada una de las direcciones transversales y $(X_0 \times Y_0)$ define la ventana de cómputo, de forma rectangular.

El desarrollo en serie de Fourier bidimensional de una función periódica $f_N(x, y) = f_N(x + X_0, y + Y_0)$ se podrá expresar entonces como

$$f_N(x, y) = \sum_{k=0}^N \Phi_f^{(k)} \varphi_k(x, y) = \sum_{m=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}} \sum_{n=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}} \Phi_f^{(m,n)} \cdot e^{jmK_{X_0}x} \cdot e^{jnK_{Y_0}y} \quad (3.45)$$

donde N_x y N_y determinan cuántos armónicos se van a utilizar en cada dirección transversal y $N = (N_x + 1) \cdot (N_y + 1) - 1$ es el número total de armónicos empleados en el desarrollo en serie.

A partir de (3.45) resulta inmediato obtener la siguiente expresión matricial para el cálculo de la transformada de Fourier inversa bidimensional

$$\bar{\bar{f}} = \overline{\text{IDFT}}_y \cdot \bar{\bar{\Phi}}_f \cdot \overline{\text{IDFT}}_x^t \quad (3.46)$$

donde $\bar{\bar{f}}$ es una matriz de dimensiones $M_x \times M_y$ que contiene las muestras de la función aproximada en los puntos de discretización espacial seleccionados, mientras que $\overline{\text{IDFT}}_x$ y $\overline{\text{IDFT}}_y$ representan las matrices de transformación inversa de Fourier unidimensionales particularizadas respectivamente para los ejes x e y .

La extensión al caso bidimensional de la transformada de Fourier directa es también evidente, pudiéndose expresar como

$$\Phi_f^{(m,n)} = \frac{1}{M_x} \sum_{p=0}^{M_x-1} \left[\frac{1}{M_y} \sum_{q=0}^{M_y-1} f_{p,q} \cdot e^{-jnK_{Y_0}q} \right] \cdot e^{-jmK_{X_0}p} \quad (3.47)$$

lo que que escrito en forma matricial queda

$$\bar{\bar{\Phi}}_f = \overline{\text{DFT}}_y \cdot \bar{\bar{f}} \cdot \overline{\text{DFT}}_x^t \quad (3.48)$$

siendo $\overline{\text{DFT}}_x$ y $\overline{\text{DFT}}_y$ las matrices de transformación directa de Fourier unidimensionales particularizadas para los ejes x e y .

De (3.46) y (3.48) se deduce que el cálculo de las transformadas de Fourier bidimensionales se reduce a la aplicación de forma sucesiva, por filas y columnas, de dos transformadas unidimensionales. Si el número de puntos de muestreo en cada dirección es potencia de dos, estas transformadas se podrán calcular utilizando la FFT, lo que va a permitir calcular la matriz de armónicos $\bar{\bar{\Phi}}_f$ con un coste computacional reducido, del orden de $O(M_x M_y \cdot \log_2(M_x M_y))$.

Por último, en (3.49) se han incluido las relaciones entre el índice único k y los co-

respondientes a la notación matricial $(m \text{ y } n)$ ¹³, que permiten ordenar los coeficientes espectrales como un vector columna $\Phi_f^{(k)} \rightarrow \Phi_f$ o en forma de matriz $\Phi_f^{(m,n)} \rightarrow \overline{\overline{\Phi}}_f$.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \Phi_f^{(-\frac{N_x}{2}, -\frac{N_y}{2})} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(\frac{N_x}{2}, -\frac{N_y}{2})} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(-\frac{N_x}{2}, n)} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(\frac{N_x}{2}, n)} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(-\frac{N_x}{2}, \frac{N_y}{2})} \\ \vdots \\ \Phi_f^{(\frac{N_x}{2}, \frac{N_y}{2})} \end{array} \right] \xrightarrow[k=(n+\frac{N_y}{2})(N_x+1)+(m+\frac{N_x}{2})]{\substack{\rightarrow \\ m=\text{mod}(k, N_x+1)-\frac{N_x}{2} \\ n=\text{div}(k, N_x+1)-\frac{N_x}{2}}} \left[\begin{array}{ccccc} \Phi_f^{(-\frac{N_x}{2}, -\frac{N_y}{2})} & \dots & \Phi_f^{(-\frac{N_x}{2}, n)} & \dots & \Phi_f^{(-\frac{N_x}{2}, \frac{N_y}{2})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \Phi_f^{(m,n)} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_f^{(\frac{N_x}{2}, -\frac{N_y}{2})} & \dots & \Phi_f^{(\frac{N_x}{2}, n)} & \dots & \Phi_f^{(\frac{N_x}{2}, \frac{N_y}{2})} \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

1. Operadores Derivada Primera y Derivada Segunda

En el caso bidimensional es necesario definir dos operadores derivada primera (uno por cada dirección transversal), cuyos elementos van a venir dados por las siguientes expresiones:

$$D_x^{(i,k)} = jmK_{X_0} \cdot \delta_{ik} \tag{3.50}$$

$$D_y^{(i,k)} = jnK_{Y_0} \cdot \delta_{ik} \tag{3.51}$$

que utilizando las relaciones definidas en (3.49) y expresadas en forma matricial quedan

$$\overline{\overline{D}}_x = j \cdot K_{X_0} \cdot \left[\begin{array}{cccc} \left[\overline{\overline{I}}_X \right] & \left[\overline{\overline{0}} \right] & \dots & \left[\overline{\overline{0}} \right] \\ \left[\overline{\overline{0}} \right] & \left[\overline{\overline{I}}_X \right] & \dots & \left[\overline{\overline{0}} \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\overline{\overline{0}} \right] & \left[\overline{\overline{0}} \right] & \dots & \left[\overline{\overline{I}}_X \right] \end{array} \right] \tag{3.52}$$

¹³Estas expresiones difieren ligeramente de las que se introdujeron en el epígrafe 3.4.2.2, ya que en este caso los índices m y n pueden adoptar tanto valores positivos como negativos.

$$\overline{\overline{D}}_y = j \cdot K_{Y_0} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{N_y}{2} \begin{bmatrix} \overline{\overline{I}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} & (-\frac{N_y}{2} + 1) \begin{bmatrix} \overline{\overline{I}} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} & \cdots & \frac{N_y}{2} \begin{bmatrix} \overline{\overline{I}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

donde $\overline{\overline{0}}$ es la matriz nula, $\overline{\overline{I}}$ se corresponde con la matriz identidad de dimensiones $(N_x + 1) \times (N_x + 1)$ y por último $\overline{\overline{I}}_X$ es una matriz diagonal definida como

$$\overline{\overline{I}}_X = \begin{bmatrix} -\frac{N_x}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (-\frac{N_x}{2} + 1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{N_x}{2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

A la vista de estas expresiones queda claro que, al igual que ocurría en el caso unidimensional, tanto $\overline{\overline{D}}_x$ como $\overline{\overline{D}}_y$ son matrices diagonales. Lo mismo sucede con los operadores derivada segunda, que se pueden obtener de forma inmediata a partir de los anteriores:

$$\overline{\overline{DD}}_x = \overline{\overline{D}}_x \cdot \overline{\overline{D}}_x \quad (3.55)$$

$$\overline{\overline{DD}}_y = \overline{\overline{D}}_y \cdot \overline{\overline{D}}_y \quad (3.56)$$

2. Operador Producto (Implementación Directa)

Se trata de una matriz densa de dimensiones $(N + 1) \times (N + 1)$, cuyos elementos se calculan como

$$P_\epsilon^{(i,k)} = \langle \epsilon(x, y) \cdot \varphi_k(x, y), \varphi_i(x, y) \rangle = \Phi_\epsilon^{(i-k)} = \Phi_\epsilon^{(r-m), (s-n)} \quad (3.57)$$

donde los índices únicos i y k se transforman respectivamente en (r, s) y (m, n) a través de (3.49).

Representando $\overline{\overline{P}}_\epsilon$ de forma explícita y utilizando la notación de índice único para la ordenación de los armónicos, los coeficientes espectrales del producto de dos funciones se calcularán entonces como

$$d(x, y) = \epsilon(x, y) \cdot e(x, y) \rightarrow \Phi_d = \overline{\overline{P}}_\epsilon \Phi_e \quad (3.58)$$

que no es sino la convolución bidimensional de $\overline{\overline{P}}_\epsilon$ y $\overline{\overline{P}}_e$ expresada en forma matricial.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que los problemas asociados a la implementación directa de la matriz producto que se trataron en el epígrafe anterior para el caso 1D son sin duda mucho más graves en el caso bidimensional, ya que ahora los requerimientos computacionales tanto en número de operaciones como en memoria de almacenamiento crecen con $N^2 = (N_x N_y)^2$.

3. Operador Producto (Implementación Basada en la FFT)

De lo que se acaba de exponer se deduce que en el caso bidimensional tiene si cabe

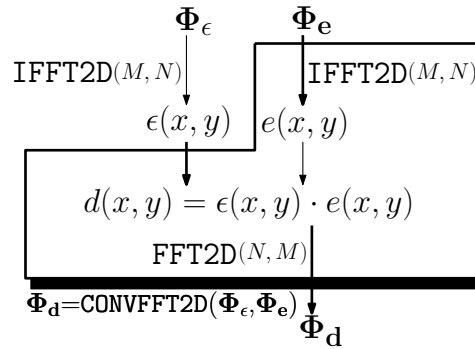


Figura 3.12: Convolución bidimensional basada en la FFT.

más sentido disponer de una convolución rápida capaz de calcular de forma eficiente el espectro del producto de dos funciones sin necesidad de obtener explícitamente la matriz $\overline{\overline{P}}_\epsilon$. Afortunadamente, el procedimiento de cálculo de la convolución rápida unidimensional tratada en el epígrafe anterior se puede extender al caso bidimensional de forma inmediata (ver figura 3.12), siendo su coste computacional del orden de $O(2 \cdot M_x M_y \cdot \log_2(M_x M_y))$. Al igual que en el caso 1D, esta técnica será especialmente útil usada junto con alguna estrategia iterativa de cálculo de autovalores, ya que hace desaparecer la necesidad de calcular explícitamente la matriz del sistema, reduciendo por tanto drásticamente los requerimientos de memoria.

3.6.4. Métodos de Descomposición de Fourier Basados en la FFT

En los *Métodos de Descomposición de Fourier* (*Fourier Decomposition Method* (FDM)) clásicos, la matriz del sistema $\overline{\overline{M}}$ se calcula y almacena en memoria de forma explícita, para ser posteriormente diagonalizada total o parcialmente mediante alguna de las estrategias de cálculo de autovalores presentadas en el epígrafe 3.5. El principal inconveniente de esta forma de actuar es obviamente su elevado coste computacional, lo que en la práctica limita fuertemente el número de armónicos que se puede emplear en el desarrollo en serie de los campos y por tanto la precisión obtenida en problemas vectoriales de guiado fuerte.

Evidentemente, en aquellas situaciones en las que se necesite disponer no sólo de los modos guiados sino también de un subconjunto representativo de los radiados¹⁴, el cálculo explícito de la matriz del sistema seguido de la diagonalización completa de dicha matriz va a ser la única opción posible. Sin embargo, en muchas ocasiones el diseñador de dispositivos ópticos está interesado únicamente en caracterizar de forma precisa los modos guiados de la estructura, pudiendo prescindir del cálculo de los modos radiados. En estos casos, el objetivo es ser capaz de aumentar significativamente el número de armónicos empleado en la resolución del problema (lo que obviamente redundará en una mejora apreciable de la precisión) sin que el coste computacional lo convierta en inabordable. Con esta intención aparecen los *Métodos de Caracterización Modal Basados en la FFT* (*FFT Based Mode Solver* (FFT-MS)) [Johnson2001], [Silvestre2005], [Ortega2006], [Ortega2007] una familia de técnicas alternativa a los FDM clásicos que se caracteriza por:

- Hacer uso de una estrategia iterativa de cálculo de autovalores como por ejemplo

¹⁴Por ejemplo, en problemas de cálculo de discontinuidades mediante la técnica de ajuste modal.

la de *Arnoldi-Lanzcos*.

- Reemplazar el cómputo directo de los operadores producto por convoluciones rápidas basadas en la FFT.
- Evitar el cálculo explícito y almacenamiento en memoria de la matriz del sistema.

Las técnicas de análisis modal basadas en la FFT que aparecieron por primera vez en la bibliografía [Johnson2001], [Silvestre2005], utilizaban como estrategia de discretización transversal un esquema basado en el método de colocación, en el que por tanto el número de puntos de muestreo espacial debía ser igual al de armónicos empleado en el desarrollo en serie de los campos. Esto quiere decir que, en aquellos casos en los que sea preciso realizar una discretización transversal muy fina, el tamaño del problema de autovalores va a crecer considerablemente, lo que se traduce directamente en mayores requerimientos computacionales en cuanto tiempo de cálculo y memoria. Sin embargo, como ya se puso de manifiesto en el epígrafe 3.6.2, en esos casos la precisión de los resultados obtenidos se puede mejorar considerablemente si se aumenta la densidad de mado transversal manteniendo constante el número de coeficientes, de forma que el tamaño del problema de autovalores permanezca constante. Precisamente, el desarrollo de un método de análisis modal basado en la FFT en el que el número puntos de discretización espacial y el número de armónicos se puedan fijar independiente [Ortega2006], [Ortega2007], es una de las aportaciones fundamentales de esta Tesis.

3.6.4.1. Cálculo eficiente de los productos matriz-vector

Tal y como se adelantó en el epígrafe 3.5.2, la evaluación eficiente del producto $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \Phi$ es un factor determinante en los requerimientos computacionales de los métodos iterativos. Las claves que permiten optimizar dicho cálculo en el espacio funcional de Fourier son dos:

1. Todos los operadores derivada son diagonales, por lo que su aplicación sobre el vector de coeficientes tiene un coste computacional muy reducido, del orden de $O(N)$. Por ejemplo, para el operador derivada primera unidimensional quedaría

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \Phi &= \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}}}) \cdot * \Phi \\ &= jK_{X_0} \cdot \left[-\frac{N}{2} \cdot \Phi_{-\frac{N}{2}}, \dots, k \cdot \Phi_k, \dots, \frac{N}{2} \cdot \Phi_{\frac{N}{2}} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde diag devuelve la diagonal de una matriz cuadrada y $*$ representa el producto elemento a elemento de dos vectores de las mismas dimensiones.

2. El cálculo de los productos se puede realizar de forma muy eficiente gracias a la convolución rápida descrita en la sección anterior, por lo que no es necesario obtener explícitamente las matrices $\overline{\overline{\mathbf{P}}}$.

Para un caso unidimensional sencillo, como puede ser la ecuación de los modos TE de un *slab* (3.13), el producto $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \Phi_{\mathbf{e}_y}$ se calcularía como:

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \Phi_{\mathbf{e}_y} = \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}\mathbf{D}}}) \cdot * \Phi_{\mathbf{e}_y} + k_0^2 \cdot \text{CONVFFT}(\epsilon, \Phi_{\mathbf{e}_y}) \quad (3.60)$$

donde CONVFFT agrupa el conjunto de operaciones descrito en la figura 3.11.

La particularización para la ecuación de caracterización modal 2D vectorial (2.22, 2.23)

no introduce ninguna novedad desde el punto de vista conceptual respecto al caso anterior, aunque su implementación resulta algo más complicada. Reordenando términos y utilizando variables de almacenamiento temporal para minimizar el número de operaciones se llega a:

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \Phi_{\mathbf{e}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{e}_x} \\ \Phi_{\mathbf{e}_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * \mathbf{t}_4 + \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \mathbf{t}_3 + k_0^2 \cdot \mathbf{t}_1 \\ \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \mathbf{t}_4 - \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * \mathbf{t}_3 + k_0^2 \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

donde \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{t}_3 y \mathbf{t}_4 se definen como

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \text{CONVFFT2D}(\epsilon, \Phi_{\mathbf{e}_x}) \\ \mathbf{t}_2 &= \text{CONVFFT2D}(\epsilon, \Phi_{\mathbf{e}_y}) \\ \mathbf{t}_3 &= \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \Phi_{\mathbf{e}_x} - \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * \Phi_{\mathbf{e}_y} \\ \mathbf{t}_4 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{\epsilon}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * \mathbf{t}_1 + \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \mathbf{t}_2\right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

El cálculo eficiente de los productos matriz-vector en el caso de que se incluyan condiciones de contorno PML se realiza de forma similar, aunque requiere calcular más convoluciones rápidas debido a que la ecuación de caracterización modal (2.83) es algo más complicada en este caso. Agrupando términos para minimizar el número de operaciones se llega a:

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{M}}}} \cdot \Phi_{\mathbf{e}} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{M}}}} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{e}_x} \\ \Phi_{\mathbf{e}_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_5 + \mathbf{t}_9 + k_0^2 \cdot \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_{11} \\ \mathbf{t}_6 + \mathbf{t}_{10} + k_0^2 \cdot \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_{12} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

donde los vectores de almacenamiento temporal \mathbf{t}_i se definen como

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \text{CONVFFT2D}(\epsilon, \Phi_{\mathbf{e}_x}) & \mathbf{t}_2 &= \text{CONVFFT2D}(\epsilon, \Phi_{\mathbf{e}_y}) \\ \mathbf{t}_3 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_x \cdot \epsilon}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * \mathbf{t}_1\right) & \mathbf{t}_4 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_y \cdot \epsilon}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \mathbf{t}_2\right) \\ \mathbf{t}_5 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_x}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * (\mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_4)\right) \\ \mathbf{t}_6 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_y}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * (\mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_4)\right) \\ \mathbf{t}_7 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_y}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \Phi_{\mathbf{e}_x}\right) & \mathbf{t}_8 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_x}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * \Phi_{\mathbf{e}_y}\right) \\ \mathbf{t}_9 &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_y}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \mathbf{t}_7\right) & \mathbf{t}_{10} &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_x}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}}) \cdot * \mathbf{t}_8\right) \\ \mathbf{t}_{11} &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_x \cdot s_y}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \Phi_{\mathbf{e}_y}\right) \\ \mathbf{t}_{12} &= \text{CONVFFT2D}\left(\frac{1}{s_x \cdot s_y}, \text{diag}(\overline{\overline{\mathbf{D}_x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}_y}}) \cdot * \Phi_{\mathbf{e}_x}\right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

3.6.4.2. Consideraciones numéricas

Desde el punto de vista numérico, la característica más relevante de las técnicas de análisis modal basadas en la FFT es la utilización de una estrategia iterativa de cálculo de autovalores que permite eludir el cálculo y almacenamiento explícito de la matriz del sistema, reduciendo significativamente sus requerimientos de memoria respecto a los

métodos directos. De hecho, habitualmente el factor limitante en esta familia de técnicas suele ser el tiempo de cómputo, que crece rápidamente con el número de puntos de discretización y el número de armónicos. En última instancia esto se debe a que:

1. El coste de cada iteración del algoritmo de cálculo de autovalores viene marcado fundamentalmente por el asociado a la evaluación de las convoluciones rápidas, que depende del número de puntos como $O(2 \cdot M \log_2(M))$, ya que el número de operaciones necesarias para el cálculo de las derivadas es prácticamente despreciable.
2. El número de iteraciones necesario para que el algoritmo iterativo converja depende fuertemente del número de armónicos¹⁵ N . En cualquier caso, se debe tener en cuenta que es posible aumentar significativamente la velocidad de convergencia si se proporciona a la rutina iterativa una buena estimación inicial del autovector buscado, que en general se puede obtener fácilmente resolviendo el mismo problema pero con un menor número de armónicos. En el caso de que se desee calcular más de un modo, resulta conveniente que dicha estimación inicial se corresponda con el promedio de los autovectores de cada una de las soluciones calculadas previamente.

Por último, resulta evidente que la complejidad computacional es mucho mayor en el caso de incluir condiciones de contorno PML, ya que la evaluación de (3.63) requiere calcular doce convoluciones rápidas frente a las tres de (3.61). Además, se puede comprobar que habitualmente el algoritmo iterativo de cálculo de autovalores converge en estos casos mucho más lentamente.

3.7. Métodos de Descomposición de Hermite-Gauss

Los *Métodos de Descomposición de Hermite-Gauss* (*Hermite-Gauss Decomposition Method* (HGDM)) constituyen una familia de métodos espectrales que, usados como alternativa a los FDM y aplicados al análisis de dispositivos ópticos [Gallawa1991], [Weisshaar1995], [Ortega2003], [Rasmussen1993], superan la principal limitación de éstos: la influencia de la ventana de cómputo en la precisión de los resultados obtenidos. Además, el uso de este nuevo espacio funcional consigue en ocasiones aumentar considerablemente la velocidad de convergencia, obteniendo a igual número de armónicos resultados mucho más precisos que los métodos de Fourier. Las dos propiedades más importantes del espacio funcional de Hermite-Gauss son:

1. Se encuentran definidas en todo el eje real y satisfacen de forma natural las condiciones de contorno homogéneas en el infinito. Esto constituye una ventaja importante respecto al espacio funcional de Fourier a la hora de representar los modos guiados de un dispositivo óptico, ya que no es necesario forzar la periodicidad de los perfiles transversales de campo.
2. Son solución exacta de una estructura con perfil de índice de refracción parabólico no truncado, lo que se traduce en que, para un conjunto importante de problemas de interés en el ámbito de la óptica, el número de funciones base necesario para realizar de forma precisa la caracterización modal será muy reducido, con el consiguiente ahorro computacional.

¹⁵Para un problema determinado y con una tolerancia en el cálculo de autovalores fija.

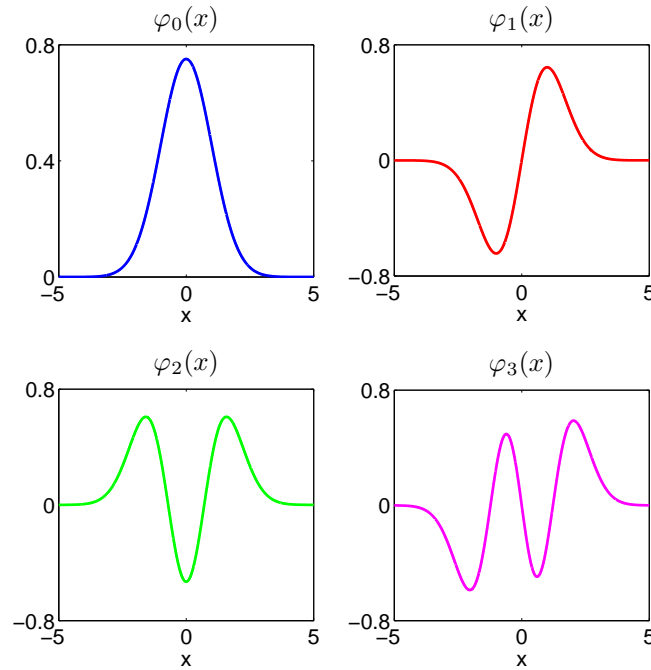


Figura 3.13: Funciones base de Hermite-Gauss de orden $k = 0, 1, 2$ y 3 .

La expresión matemática que define las nuevas funciones base viene dada por [Boyd1989]

$$\varphi_k(x) = \frac{e^{-0,5x^2} H_k(x)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}}, \quad k = 0 \dots N - 1 \quad (3.65)$$

donde $H_k(x)$ representa el polinomio de Hermite de orden k , que se puede obtener fácilmente mediante la siguiente expresión recursiva¹⁶

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ &\vdots \\ H_k(x) &= 2xH_{k-1}(x) - 2(k-1)H_{k-2}(x) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Las funciones base definidas en la ecuación (3.65) han sido previamente ortonormalizadas, de forma que $\langle \varphi_k(x), \varphi_l(x) \rangle = \delta_{kl}$. Asimismo, se puede comprobar que satisfacen las condiciones contorno homogéneas en infinito, ya que para cualquier valor de k se cumple que $\varphi_k(\pm\infty) = 0$. En la figura 3.13 se han representado las cuatro funciones de Hermite-Gauss de órdenes más bajos ($k = 0 \dots 3$), poniéndose claramente de manifiesto el parecido que éstas guardan con los cuatro primeros modos guiados TE de un *slab* de salto de índice.

¹⁶La definición formal de los polinomios de Hermite, a partir de la cual se puede deducir esta expresión recursiva, viene dada por [Tamir1988]: $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{\partial^k e^{-x^2}}{\partial x^k}$

3.7.1. Transformadas de Hermite-Gauss Directa e Inversa

3.7.1.1. Transformada Directa de Hermite-Gauss

Particularizando (3.9) para el nuevo espacio funcional se obtiene la siguiente expresión, que permite calcular cada uno de los términos del desarrollo en serie de Hermite-Gauss de una función $f(x)$ genérica

$$\Phi_f^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{e^{-0,5x^2} H_k(x_n)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} dx, \quad k = 0 \dots N - 1 \quad (3.67)$$

En aquellos casos en los que esta expresión carece de solución analítica, el cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie se realizará de forma aproximada mediante un esquema de integración numérica en cuadratura.

$$\Phi_f^{(k)} \approx \sum_{n=0}^{M-1} w_n \cdot f(x_n) \cdot \frac{e^{-0,5x_n^2} H_k(x_n)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \quad (3.68)$$

Al contrario de lo que ocurría en el espacio funcional de Fourier, en este caso los puntos de muestreo óptimos x_n no se encuentran equiespaciados, sino que coinciden con las raíces del polinomio de Hermite de orden M .¹⁷ Por otro lado, el peso w_n asociado a cada punto de discretización se puede calcular como [Boyd1989]

$$w_n = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{m=0, m \neq n}^{M-1} \frac{x - x_m}{x_n - x_m} dx \quad (3.69)$$

Expresando (3.68) en forma matricial se obtiene

$$\Phi_{\mathbf{f}} = \overline{\overline{\text{HGT}}} \cdot \mathbf{f} \quad (3.70)$$

donde \mathbf{f} es un vector columna que contiene M muestras de la función original evaluada en los puntos de muestreo óptimos y $\overline{\overline{\text{HGT}}}$ es la que se denomina matriz transformada directa de Hermite-Gauss, de dimensiones $N \times M$.

Desde el punto de vista numérico, el cálculo de los puntos de discretización óptimos puede resultar problemático para valores de M grandes, ya que implica determinar las raíces de un polinomio de orden elevado. Por otro lado, lo cierto es que cuando M es lo suficientemente alto no existe demasiada diferencia entre usar los puntos en cuadratura y un conjunto de muestras equiespaciadas, por lo que en la práctica los coeficientes $\Phi_f^{(k)}$ se suelen calcular utilizando algún esquema eficiente de integración numérica sobre un mallaado uniforme.

Respecto al espacio funcional de Fourier, el de Hermite-Gauss presenta la ventaja de que, siempre que la función $f(x)$ sea real, todas las operaciones necesarias para evaluar el vector de coeficientes $\Phi_{\mathbf{f}}$ mediante la expresión (3.70) se desarrollan también en aritmética real. Lamentablemente, la ausencia de una transformada rápida equivalente a la FFT provoca que el número de multiplicaciones asociadas a la evaluación de (3.70) no se pueda reducir, por lo que el coste computacional en este caso es del orden de $O(N \cdot M)$. Lo que va a hacer competitivo a los métodos basados en el espacio funcional de Hermite-Gauss respecto a los FDM será por tanto la posibilidad de trabajar con un número muy

¹⁷Lo que implica que para obtenerlos será necesario resolver la ecuación $H_M(x_n) = 0$.

reducido de funciones base en los desarrollos en serie, ya que sólo de esta forma la complejidad computacional será inferior a las $O(M \cdot \log_2(M))$ multiplicaciones complejas que requiere la FFT.

3.7.1.2. Transformada inversa de Hermite-Gauss

Particularizando 3.2 para el espacio funcional de Hermite-Gauss y empleando notación matricial es inmediato llegar a

$$\mathbf{f} = \overline{\overline{\text{IHGT}}} \cdot \Phi_{\mathbf{f}} \quad (3.71)$$

donde \mathbf{f} es un vector de M términos que contiene las muestras de la función aproximada $f_N(x)$ en los puntos seleccionados.

La matriz de transformación inversa $\overline{\overline{\text{IHGT}}}$, de dimensiones $M \times N$, contiene por columnas las funciones base de Hermite-Gauss particularizadas en los puntos en los que se desea recuperar $f_N(x)$. En el caso de que M y N sean iguales, las matrices de transformación directa e inversa son cuadradas y cumplen que $\overline{\overline{\text{HGT}}} = \overline{\overline{\text{IHGT}}}^{-1}$.

3.7.2. Operadores Matriciales en el Espacio Funcional de Hermite-Gauss

3.7.2.1. Operadores matriciales unidimensionales

El objetivo de este epígrafe es particularizar los operadores matriciales presentados de forma genérica en 3.4.1 para el espacio funcional de Hermite-Gauss, obteniendo expresiones cerradas para los operadores derivada primera, derivada segunda y producto de funciones.

1. Operadores Derivada Primera y Derivada Segunda

A partir de la definición del espacio funcional de Hermite-Gauss (3.65) y sabiendo que

$$\frac{\partial H_k(x)}{\partial x} = 2kH_{k-1}(x) \quad (3.72)$$

las derivadas primera y segunda de las funciones base quedan

$$\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{2k} \cdot \varphi_{k-1}(x) - \frac{1}{2}\sqrt{2(k+1)} \cdot \varphi_{k+1}(x) \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{(k+1)(k+2)} \cdot \varphi_{k+2}(x) \\ &+ \frac{1}{2}(2k+1) \cdot \varphi_k(x) \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{k(k-1)} \cdot \varphi_{k-2}(x) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Con lo que es inmediato obtener las siguientes expresiones para los elementos de los operadores derivada primera y derivada segunda, que se corresponden respectivamente con matrices bibanda y tribanda de dimensiones $N \times N$.

$$D_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{2k} \cdot \delta_{i,k-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2(k+1)} \cdot \delta_{i,k+1} \quad (3.75)$$

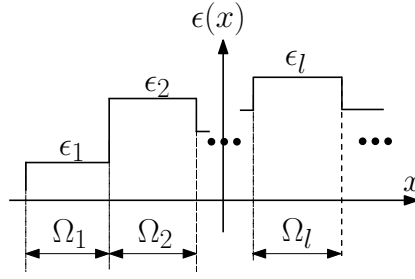


Figura 3.14: Perfil de índice de refracción constante a tramos.

$$\begin{aligned}
 DD_{ik} &= \frac{1}{2} \sqrt{(k+1)(k+2)} \cdot \delta_{i,k+2} \\
 &+ \frac{1}{2} (2k+1) \cdot \delta_{i,k} \\
 &+ \frac{1}{2} \sqrt{k(k-1)} \cdot \delta_{i,k-2}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

2. Operador Producto

Como ya se explicó en el epígrafe 3.4.1, el cálculo de los elementos del operador producto requiere la evaluación del siguiente producto escalar

$$P_\epsilon^{(i,k)} = \langle \epsilon(x) \cdot \varphi_k(x), \varphi_i(x) \rangle = \int_\Omega \epsilon(x) \cdot \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx \tag{3.77}$$

Lamentablemente, al contrario de lo que ocurriría con el espacio funcional de Fourier, el producto de dos funciones base de Hermite-Gauss no pertenece al mismo espacio funcional, por lo que el operador producto no adopta en este caso la forma de una matriz de *Toeplitz*. Esto quiere decir que el coste computacional asociado al cálculo de este operador es enorme, ya que requiere evaluar $N \cdot (N+1)/2$ veces¹⁸ la integral (3.77), que en general carece de solución analítica.

Sin embargo, para ciertas estructuras es posible determinar expresiones cerradas que permitan el cálculo de este operador sin recurrir a la integración numérica. En concreto, para dispositivos definidos por un perfil de índice de refracción como el que se muestra en la figura 3.14, la ecuación (3.77) se puede expresar como

$$P_\epsilon^{(i,k)} = \sum_l \epsilon|_{\Omega_l} \cdot \int_{\Omega_l} \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx \tag{3.78}$$

donde Ω_l define los límites de la integral sobre cada una de las zonas de índice de refracción constante $\epsilon|_{\Omega_l}$ que componen la guía.

Ahora los $P_\epsilon^{(i,k)}$ aparecen en función de integrales del tipo $\int \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx$, que se pueden resolver semi-analíticamente con un coste computacional muy reducido, ya

¹⁸Donde se ha tenido en cuenta que $P_\epsilon^{(i,k)} = P_\epsilon^{(k,i)}$.

que

$$\begin{aligned}
 \int \varphi_k(x)\varphi_i(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2^{k+i} k! i! \pi}} \int H_k(x) \cdot H_i(x) \cdot e^{-x^2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^{k+i} k! i! \pi}} \sum_m c_m \cdot \int x^m \cdot e^{-x^2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^{k+i} k! i! \pi}} \sum_m c_m \cdot I_m
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

donde los coeficientes c_m se corresponden con los del polinomio resultante de multiplicar $H_k(x) \cdot H_i(x)$ y las integrales I_m se calculan mediante la siguiente expresión recursiva

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int e^{-x^2} dx \\
 I_1 &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} \\
 &\vdots \\
 I_m &= -\frac{x^{m-1}}{2}e^{-x^2} + \frac{m-1}{2}I_{m-2}
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

siendo I_0 una función trascendente que es necesario evaluar de forma numérica.

3.7.2.2. Operadores matriciales bidimensionales

La extensión al caso bidimensional del espacio funcional de Hermite-Gauss da lugar a las siguientes funciones base

$$\varphi_k(x, y) = \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(y) = \frac{e^{-0,5x^2} H_m(x)}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}} \cdot \frac{e^{-0,5y^2} H_n(y)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \tag{3.81}$$

donde $m \in (0, \dots, N_x - 1)$ y $n \in (0, \dots, N_y - 1)$.

Las relaciones que permiten pasar de la notación de índice único a la notación matricial y viceversa son prácticamente idénticas a las que se dedujeron en el epígrafe 3.4.2.2, con la única diferencia de que en este caso el número total de funciones base en cada dirección es N_x y N_y respectivamente.

$$k = n \cdot N_x + m \tag{3.82}$$

$$m = \text{mod}(k, N_x), \quad n = \text{div}(k, N_x) \tag{3.83}$$

Al igual que ocurría en el espacio funcional de Fourier, las transformadas bidimensionales directa e inversa se basan en la aplicación sucesiva, por filas y columnas, de dos transformadas unidimensionales, de forma que

$$\overline{\overline{\Phi}}_f = \overline{\overline{\text{HGT}}}_y \cdot \overline{\overline{f}} \cdot \overline{\overline{\text{HGT}}}_x^t \tag{3.84}$$

donde $\overline{\overline{f}}$ es la matriz de discretización transversal de la función a desarrollar, de dimensiones $M_y \times M_x$, y $\overline{\overline{\text{HGT}}}_x$, $\overline{\overline{\text{HGT}}}_y$ representan las matrices de transformación directa

unidimensionales particularizadas para ejes x e y respectivamente.

De manera análoga, la expresión para la transformada inversa bidimensional de Hermite-Gauss queda

$$\bar{f} = \overline{\text{IHGT}}_y \cdot \bar{\Phi}_f \cdot \overline{\text{IHGT}}_x^t \quad (3.85)$$

Evidentemente, la ausencia de una transformada rápida para el espacio funcional de Hermite-Gauss provoca que el coste computacional asociado al cálculo de estas expresiones sea muy elevado, ya que cada una de ellas requiere del orden de $O(M_x M_y \cdot N_x N_y)$ operaciones.

1. Operadores Derivada Primera y Derivada Segunda

En el caso bidimensional va a ser necesario definir un operador derivada primera y segunda por cada dirección transversal. Aplicando las mismas expresiones para las derivadas que se dedujeron en el epígrafe anterior y teniendo en cuenta las relaciones definidas en (3.82) y (3.83) se obtiene

$$D_x^{(i,k)} = \frac{1}{2}\sqrt{2m} \cdot \delta_{i,k-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2(m+1)} \cdot \delta_{i,k+1} \quad (3.86)$$

$$D_y^{(i,k)} = \frac{1}{2}\sqrt{2n} \cdot \delta_{i,k-N_x} - \frac{1}{2}\sqrt{2(n+1)} \cdot \delta_{i,k+N_x} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} DD_x^{(i,k)} &= \frac{1}{2}\sqrt{(m+1)(m+2)} \cdot \delta_{i,k+2} \\ &+ \frac{1}{2}(2m+1) \cdot \delta_{i,k} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{m(m-1)} \cdot \delta_{i,k-2} \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} DD_y^{(i,k)} &= \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(n+2)} \cdot \delta_{i,k+2N_x} \\ &+ \frac{1}{2}(2n+1) \cdot \delta_{i,k} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)} \cdot \delta_{i,k-2N_x} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Al igual que ocurría en el caso unidimensional, los operadores derivada primera y segunda son matrices bidiagonales y tridiagonales respectivamente. En la figura 3.15 se han representado estos operadores para el caso particular de $N_x = N_y = 5$.

2. Operador Producto

El cálculo de los elementos del operador producto requiere la evaluación del si-

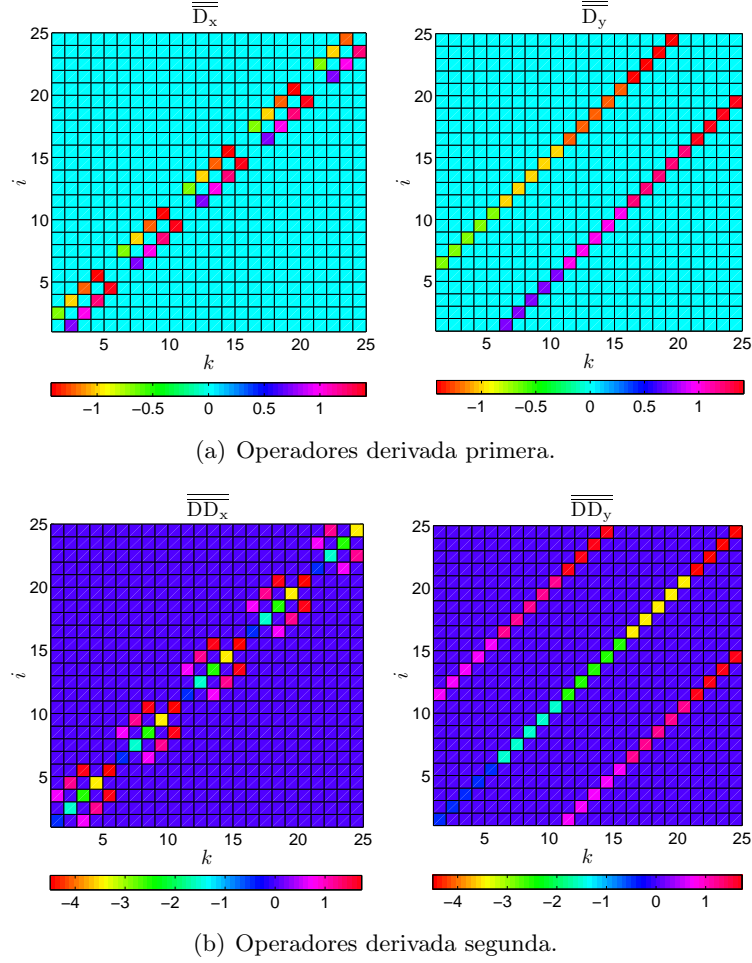


Figura 3.15: Operadores matriciales derivada en el espacio funcional de Hermite-Gauss.
 $N_x = N_y = 5$

guiente producto escalar

$$\begin{aligned}
 P_\epsilon^{(i,k)} &= \langle \epsilon(x, y) \cdot \varphi_k(x, y), \varphi_i(x, y) \rangle = \iint_{\Omega(x,y)} \epsilon(x, y) \cdot \varphi_k(x, y) \varphi_i(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \iint_{\Omega(x,y)} \epsilon(x, y) \cdot \varphi_r(x) \varphi_s(y) \cdot \varphi_m(x) \varphi_n(y) \, dx \, dy \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

donde los índices únicos i y k se transforman respectivamente en (r, s) y (m, n) a través de (3.83).

Puesto que en el caso de Hermite-Gauss el producto de dos funciones base no genera otra función perteneciente al mismo espacio funcional, la expresión anterior debe ser evaluada, en general de forma numérica, un total de $N_x N_y \cdot (N_x N_y + 1)/2$ veces. Este elevadísimo coste computacional se puede reducir cuando la estructura es separable en regiones rectangulares con índice de refracción constante, como ocurre por ejemplo en las guías ópticas *buried* y *rib* (ver figura 3.16). En esos casos la integral (3.90) se puede calcular analíticamente descomponiéndola, para cada una de esas regiones, en dos integrales unidimensionales sobre los ejes x e y , resolubles

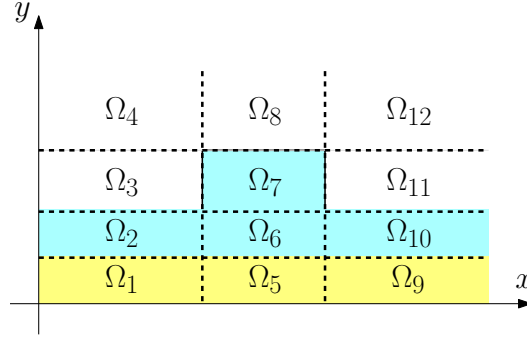
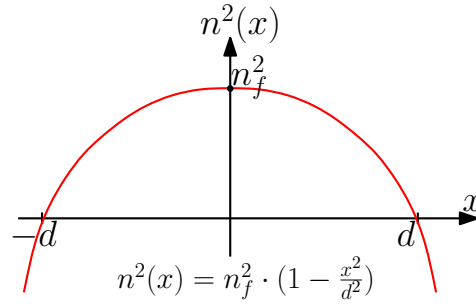

 Figura 3.16: División en regiones rectangulares de una guíaonda tipo *Rib*.


Figura 3.17: Estructura con perfil de índice de refracción parabólico sin truncar.

mediante las expresiones cerradas que se dedujeron en el epígrafe anterior.

$$\begin{aligned}
 P_\epsilon^{(i,k)} &= \sum_l \iint_{\Omega_l(x,y)} \epsilon_{|\Omega_l} \cdot \varphi_r(x) \varphi_s(y) \cdot \varphi_m(x) \varphi_n(y) \, dx \, dy \\
 &= \sum_l \epsilon_{|\Omega_l} \cdot \int_{\Omega_l(x)} \varphi_r(x) \varphi_m(x) \, dx \cdot \int_{\Omega_l(y)} \varphi_s(y) \varphi_n(y) \, dy
 \end{aligned} \quad (3.91)$$

donde $\epsilon_{|\Omega_l}$ es el índice de refracción de la región Ω_l .

3.7.3. Escalado de las Funciones Base

3.7.3.1. El perfil parabólico sin truncar

Como ya se adelantó al comienzo del epígrafe 3.7, se puede demostrar que para una estructura con perfil de índice de refracción de tipo parabólico sin truncar como el mostrado en la figura 3.17, la distribución transversal de campo eléctrico de cada modo se corresponde con una función de Hermite-Gauss convenientemente escalada [Tamir1988]. Trabajando sobre un eje espacial normalizado $\tilde{x} = x/d$ y usando la definición habitual de frecuencia normalizada V particularizada para esta estructura¹⁹, el perfil de campo

¹⁹Evidentemente, esta estructura carece de sentido físico, ya que el índice de refracción toma valores negativos. Sin embargo, la definición de una frecuencia normalizada es posible siempre que se considere el índice de refracción del sustrato igual a cero, con lo que $V = k_0 \cdot d \cdot n_f$

del modo k -ésimo se puede escribir como

$$e_y^{(k)}(\tilde{x}) = \frac{\exp\left(-0,5\left(\tilde{x}\sqrt{V}\right)^2\right) H_k\left(\tilde{x}\sqrt{V}\right)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \quad (3.92)$$

que coincide con la función de Hermite-Gauss de orden k , a la que se ha introducido un factor de escalado igual a \sqrt{V} que se encarga de adaptarla a la geometría del problema. Para estructuras con un perfil de índice de refracción diferente del parabólico, es de esperar que estas funciones base sigan siendo una buena aproximación a las distribuciones transversales de campo de los modos, de forma que se puedan obtener resultados precisos con número reducido de términos. Éste es el motivo por el que, con independencia del perfil de índice de refracción de la guíaonda que se desea analizar, la mayoría de los *Métodos de Descomposición de Hermite-Gauss* publicados en la bibliografía [Gallawa1991], [Weisshaar1995], se caracterizan por:

1. Redefinir el espacio funcional haciéndolo dependiente de un parámetro, el factor de escalado α

$$\hat{\varphi}_k(\tilde{x}, \alpha) = \frac{\exp\left(-0,5\left(\alpha\tilde{x}\right)^2\right) H_k\left(\alpha\tilde{x}\right)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \quad (3.93)$$

2. Escoger siempre dicho factor de escalado igual a la raíz cuadrada de la frecuencia normalizada ($\alpha = \sqrt{V}$).
3. Resolver la ecuación de ondas normalizada, lo que parece razonable si se tiene en cuenta que el factor de escalado elegido es dependiente de V , un parámetro óptico normalizado.

3.7.3.2. Influencia del factor de escalado

Tal y como se ha expuesto en el punto anterior, la adaptación del espacio funcional de Hermite-Gauss al problema que se desea resolver se realiza habitualmente utilizando un factor de escalado igual a \sqrt{V} . Sin embargo, se puede demostrar que dicha elección sólo proporciona buenos resultados cuando el modo que se desea calcular está muy confinado en la zona del núcleo [Ortega2003]. Por el contrario, en situaciones en las que la distribución transversal de campo se encuentra muy expandida, la velocidad de convergencia con el número de términos es relativamente baja, con lo cual se pierde la principal ventaja de este espacio funcional.

Llegados a este punto parece razonable plantearse la posibilidad de que existan escalados que proporcionen mejores resultados que el usado habitualmente, al menos en aquellos casos en los que éste ha demostrado no ser demasiado eficiente. De esta forma, el factor de escala de las funciones base constituiría un nuevo grado de libertad (equivalente al tamaño del período en los FDM) que podría influir decisivamente en la precisión de los resultados obtenidos. A modo de ejemplo, en la figura 3.18 se han representado, para el modo TE_0 de un *slab* de salto de índice con $V = 1$, los coeficientes de su desarrollo en serie de Hermite-Gauss²⁰ empleando dos factores de escalado distintos: $\alpha = \sqrt{V} = 1$ y

²⁰Se debe tener en cuenta que, puesto que la distribución de campo es simétrica respecto al origen, sólo los términos pares son distintos de cero.

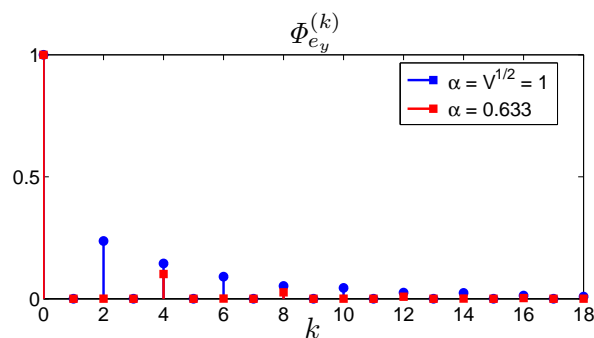


Figura 3.18: Desarrollo en serie de Hermite-Gauss del modo TE₀ de un slab de salto de índice ($V = 1$).

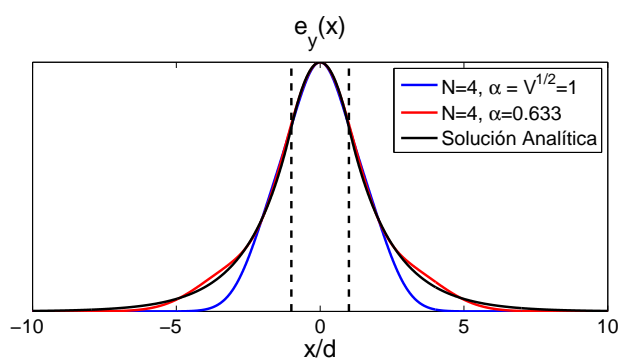


Figura 3.19: Distribución transversal de campo eléctrico analítica y recuperada a partir de los cinco primeros coeficientes del desarrollo en serie.

$\alpha = 0,633$. En la figura 3.19 se ha dibujado la distribución espacial de campo eléctrico recuperada en ambos casos a partir de los cinco primeros términos del desarrollo. A la vista de estos resultados, resulta evidente que el factor de escalado habitual no es el más apropiado en este caso, ya que la amplitud de los términos despreciados en el desarrollo en serie es todavía significativa y el perfil de campo aproximado decae en el substrato mucho más rápido que el analítico. Por el contrario, con $\alpha = 0,633$ el valor de los coeficientes que no se tienen en cuenta en el desarrollo es casi nula y la recuperación del campo es prácticamente perfecta.

Este ejemplo pone claramente de manifiesto la influencia del factor de escalado en la precisión de los resultados obtenidos, lo que justifica el desarrollo de estrategias que permitan obtener de forma automática y con un coste computacional reducido el factor de escalado óptimo para un problema dado [Rasmussen1993], [Ortega2003].

3.7.4. El Método de Descomposición de Hermite-Gauss con Transformación de Variables

Aunque la modificación de las funciones base descrita anteriormente es la forma habitual de trabajar en la bibliografía, lo cierto es que es posible mantener la definición original del espacio funcional (3.65) si se aplica a la ecuación diferencial que se desea resolver un cambio de variable lineal del tipo $u = f(x) = \alpha \cdot \tilde{x}$, en el que ahora el factor de escalado se encarga de adaptar la geometría del problema al espacio funcional, que permanece fijo. Pese a que, tal y como se muestra en la figura 3.20, ambas formas de ac-

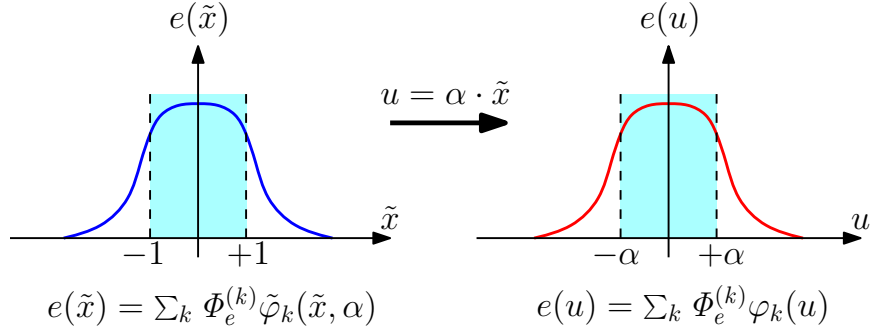


Figura 3.20: Estrategias para la inclusión del factor de escalado. Izquierda: Modificación del espacio funcional. Derecha: Aplicación de una transformación de variables.

tuar son en principio equivalentes, en esta Tesis se ha preferido utilizar el nuevo enfoque, ya que resulta mucho más versátil. Por ejemplo, es posible mejorar el comportamiento en problemas asimétricos definiendo un nuevo cambio de variable que incorpore un factor de centrado u *offset* o , con lo que la transformación propuesta quedaría²¹

$$u = \alpha \cdot (\tilde{x} - o) \quad (3.94)$$

Evidentemente, la aplicación de cualquier cambio de variable va a provocar que los operadores de diferenciación que aparecen en la ecuación diferencial se vean modificados. Para una función de transformación genérica y aplicando la regla de la cadena, resulta inmediato obtener

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \xrightarrow{u=f(\tilde{x})} f'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \xrightarrow{u=f(\tilde{x})} f'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(f'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \right) \quad (3.96)$$

donde $f'(u)$ se define como

$$f'(u) = \left. \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=f^{-1}(u)} \quad (3.97)$$

Particularizando para la transformación propuesta en (3.94), la ecuación característica en el dominio transformado para los modos TE de un *slab* quedaría

$$\frac{\alpha^2}{V^2} \frac{\partial^2 e_y(u)}{\partial u^2} + k_0^2 \cdot \tilde{\epsilon}(u) \cdot e_y(u) = b e_y(u) \quad (3.98)$$

²¹En realidad, esta estrategia permite incluso la utilización de transformaciones no lineales como las que se emplean en los los métodos de Fourier con transformación de variables [Hewlett1995], [Wanguemert2001].

que utilizando la notación matricial de operadores descrita en el epígrafe 3.4.1 se puede escribir como

$$\frac{\alpha^2}{V^2} \left[\overline{\overline{DD}} + k_0^2 \overline{\overline{P_\epsilon}} \right] \Phi_{e_y} = b \Phi_{e_y} \quad (3.99)$$

donde Φ_{e_y} representa el vector de coeficientes del desarrollo en serie de Hermite-Gauss del campo eléctrico $e_y(u)$.

Para estructuras bidimensionales lo habitual es definir dos transformaciones diferentes, lineales en este caso, que actúan independientemente sobre cada una de las coordenadas transversales

$$u = \alpha \cdot (\tilde{x} - o_x) \quad , \quad v = \alpha_y \cdot (\tilde{y} - o_y) \quad (3.100)$$

Utilizando notación matricial, la ecuación de caracterización modal normalizada en el dominio transformado quedaría

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{M_{uu}}} & \overline{\overline{M_{uv}}} \\ \overline{\overline{M_{vu}}} & \overline{\overline{M_{vv}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{e_u} \\ \Phi_{e_v} \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} \Phi_{e_u} \\ \Phi_{e_v} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

donde los operadores copolares y contrapolares se definen respectivamente como²²

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M_{uu}}} &= \frac{\alpha_x^2}{V_x^2} \overline{\overline{D_u}} \left[\overline{\overline{D_u}} + \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_u}} \overline{\overline{P_\epsilon}} \right] + k_0^2 \overline{\overline{P_\epsilon}} \\ \overline{\overline{M_{vv}}} &= \frac{\alpha_y^2}{V_y^2} \overline{\overline{D_v}} \left[\overline{\overline{D_v}} + \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_v}} \overline{\overline{P_\epsilon}} \right] + k_0^2 \overline{\overline{P_\epsilon}} \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M_{uv}}} &= \frac{\alpha_x}{V_x} \frac{\alpha_y}{V_y} \left[\overline{\overline{D_u}} \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_v}} \overline{\overline{P_\epsilon}} - \overline{\overline{D_u}} \overline{\overline{D_v}} \right] \\ \overline{\overline{M_{vu}}} &= \frac{\alpha_x}{V_x} \frac{\alpha_y}{V_y} \left[\overline{\overline{D_v}} \overline{\overline{P_{1/\epsilon}}} \overline{\overline{D_u}} \overline{\overline{P_\epsilon}} - \overline{\overline{D_u}} \overline{\overline{D_v}} \right] \end{aligned} \quad (3.103)$$

Es importante destacar que, al utilizarse en este caso una transformación de variables lineal, el esfuerzo computacional necesario para formular el problema de autovalores en el dominio transformado es el mismo que en el dominio original. Este hecho contrasta con lo que ocurre en los métodos de Fourier con *mapping* arcotangente [Wanguemert2001], que al emplear una transformación no lineal complican considerablemente la ecuación diferencial, lo que hace crecer los tiempos de cómputo.

Estas expresiones de discretización transversal, junto con la estrategia de cálculo de los parámetros óptimos de la transformación, han dado lugar a un nuevo método denominado *Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo* (*Adaptive Hermite-Gauss Decomposition Method* (A-HGDM)) [Ortega2003], que constituye una de las principales aportaciones de esta Tesis y al que se dedicará el siguiente capítulo.

²²Los operadores derivada $\overline{\overline{D_u}}$ y $\overline{\overline{D_v}}$ son idénticos a los definidos en el epígrafe 3.7.2.2, habiéndose modificado los subíndices únicamente a efectos de coherencia en la notación.

4 El Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo (A-HGDM)

4.1. Introducción

EN el capítulo anterior se desarrolló la formulación de un método espectral con transformación de variables basado en el espacio funcional de Hermite-Gauss. La elección adecuada de los parámetros que definen dicha transformación va a permitir adaptar la geometría del problema a resolver a las funciones base, lo que redundará en una mejora de la velocidad de convergencia y finalmente en la reducción del coste computacional. En este capítulo se va a proponer un método de análisis modal que incorpora una estrategia para la determinación automática y eficiente de los parámetros óptimos de la transformación. Este método, denominado *Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo* (*Adaptive Hermite-Gauss Decomposition Method* (A-HGDM)) [Ortega2003] será validado mediante simulaciones de estructuras ópticas de gran interés práctico, como la guía rectangular de salto de índice y el acoplador direccional en *rib*.

4.2. Estrategia de Optimización de Parámetros

En esta sección se va a describir la estrategia que permite determinar de forma automática y con un reducido coste computacional los parámetros óptimos de la transformación para un problema dado. Desde un punto de vista matemático, esta técnica se puede plantear como la optimización (minimización o maximización) de un funcional \mathcal{F} definido sobre los parámetros de la transformación \mathbf{p} , es decir

$$\begin{pmatrix} \text{mín} \\ \text{máx} \end{pmatrix} \{\mathcal{F}(\mathbf{p})\} \Rightarrow \mathbf{p}^{\text{OPT}} \quad (4.1)$$

Tal y como se adelantó en el capítulo anterior, para el espacio funcional de Hermite-Gauss las ecuaciones de transformación de variables definidas sobre las coordenadas transversales normalizadas \tilde{x} e \tilde{y} son de tipo lineal

$$u = \alpha_x \cdot (\tilde{x} - o_x) \quad , \quad v = \alpha_y \cdot (\tilde{y} - o_y) \quad (4.2)$$

donde u y v son los nuevos ejes transversales transformados.

Para el caso bidimensional son cuatro los parámetros que caracterizan la transformación: i) dos factores de escalado (α_x, α_y) , que adaptan el problema a resolver al ancho de las funciones base y ii) dos parámetros de centrado (o_x, o_y) , que mejoran la precisión en problemas asimétricos. Por tanto, el vector de parámetros de la transformación \mathbf{p} se puede definir de forma genérica como

$$\mathbf{p} = (\alpha_x, \alpha_y, o_x, o_y) \quad (4.3)$$

donde se debe tener en cuenta que los parámetros de centrado o_x y o_y van a valer cero cuando la estructura a analizar presente simetría espacial con respecto a los ejes x y y respectivamente, lo que permite reducir la dimensión de \mathbf{p} y por tanto la complejidad computacional del problema de optimización.

4.2.1. Criterios de Optimización

Evidentemente, la elección de un funcional adecuado $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ es determinante a la hora de obtener de forma eficiente los parámetros óptimos de la transformación, lo que en última instancia va a repercutir directamente en la precisión de los resultados obtenidos. A continuación se exponen los dos únicos criterios de optimización de parámetros que aparecen en la bibliografía para el espacio funcional de Hermite-Gauss.

4.2.1.1. Maximización de la constante de propagación

En el primer trabajo publicado que aborda el problema de la optimización del factor de escalado para el espacio funcional de Hermite-Gauss [Rasmussen1993] se proponía una estrategia iterativa basada en la maximización de la constante de propagación normalizada. Las principales características de este método, denominado *Optimized Hermite-Gauss Decomposition Method* (O-HGDM), son:

1. Sigue el enfoque habitual de introducir el escalado en las funciones base, que pasan a depender de los parámetros (α_x, α_y)

$$\hat{\varphi}_{mn}(\tilde{x}, \tilde{y}, \alpha_x, \alpha_y) = \hat{\varphi}_m(\tilde{x}, \alpha_x) \cdot \hat{\varphi}_n(\tilde{y}, \alpha_y) \quad (4.4)$$

donde las funciones de Hermite-Gauss modificadas $\hat{\varphi}(\tilde{x}, \alpha_x)$, $\hat{\varphi}(\tilde{y}, \alpha_y)$ se definieron en el capítulo anterior (3.93).

2. No incorpora ningún término que modifique el centrado de las funciones base, de forma que el vector de parámetros a optimizar sólo tiene dos términos: $\mathbf{p} = (\alpha_x, \alpha_y)$.
3. Elige como funcional la constante de propagación normalizada b obtenida tras resolver el problema de autovalores. En el caso escalar, ésta se encuentra siempre por debajo de la exacta [Rasmussen1993], con lo que el proceso de optimización consiste en maximizar dicha constante de propagación

$$\text{máx } \{b(\mathbf{p})\} \Rightarrow \mathbf{p}^{\text{OPT}} \quad (4.5)$$

4. Como consecuencia de lo anterior, el O-HGDM proporciona la mejor solución para la constante de propagación que es posible obtener utilizando el espacio funcional de Hermite-Gauss con un número de términos dado y bajo la aproximación escalar.

El principal inconveniente de este método es su elevado coste computacional, ya que tal y como se muestra en la figura 4.1, requiere formular y resolver varias veces la ecuación de autovalores completa en cada iteración del proceso de optimización. Este problema se verá agravado si se añaden los factores de centrado necesarios para adaptar el espacio funcional a situaciones asimétricas, ya que en ese caso serán cuatro y no dos los parámetros a calcular, aumentando por tanto el número de iteraciones necesario para que el algoritmo de optimización alcance la convergencia. Por otro lado, se debe tener en cuenta que no es posible aplicar el O-HGDM a problemas vectoriales, ya que el funcional optimizado sólo se puede utilizar en el caso escalar.

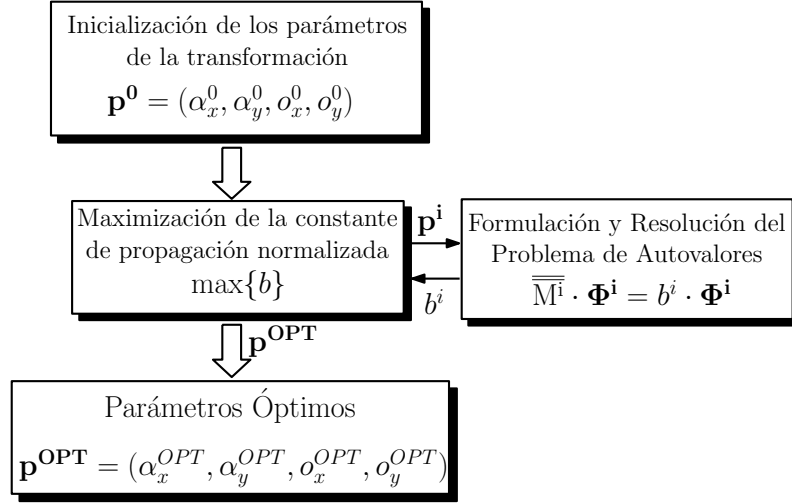


Figura 4.1: Cálculo de los parámetros óptimos de la transformación en el O-HGDM.

4.2.1.2. Minimización del ancho de banda espectral

La idea de utilizar el contenido espectral de la señal para determinar los parámetros de transformación óptimos fue propuesta por primera vez en [Molina1998] y [Wanguemert2001], donde se aplicó con éxito sobre un método de Fourier modificado con *mapping* arcotangente. Este criterio de optimización se basa en realidad en una idea muy simple: *Los parámetros óptimos de la transformación serán aquellos que minimicen el ancho de banda de la función en el dominio transformado, ya que de esta forma se minimiza el error de truncamiento asociado al uso de un número finito de términos en su desarrollo en serie.*

Aunque la influencia del factor de escalado en el ancho de banda ya se puso de manifiesto para un caso concreto en el epígrafe 3.7.3.2 del capítulo anterior, ahora resulta conveniente abordar esta cuestión de forma más general. Para ello, en la figura 4.2 se ha representado esquemáticamente el resultado de aplicar sobre una función genérica unidimensional $f(x)$, simétrica respecto al punto $x = x_0$, dos transformaciones diferentes definidas respectivamente por los vectores $\mathbf{p}^0 = (\alpha_x^0, 0)$ y $\mathbf{p}^{\text{OPT}} = (\alpha_x^{\text{OPT}}, x_0)$. En el primer caso, la elección de un conjunto de parámetros de la transformación incorrecto provoca que los coeficientes espectrales del desarrollo en serie de la función en el dominio transformado decaigan muy lentamente. Por el contrario, cuando se aplican los parámetros óptimos de la transformación (\mathbf{p}^{OPT}) se consigue que la función en el dominio transformado $f^{\text{OPT}}(u)$ se adapte de forma mucho más conveniente a las funciones base¹, lo que disminuye considerablemente el ancho de banda espectral respecto al caso anterior. De esta forma, el número de términos que se deben emplear en el desarrollo en serie para conseguir que el error de truncamiento sea despreciable se puede reducir considerablemente, con el consiguiente ahorro computacional.

Como medida del ancho de banda espectral se propone utilizar la varianza del espectro

¹Se ha representado por simplicidad sólo la función de Hermite-Gauss de orden cero $\varphi_0(u)$.

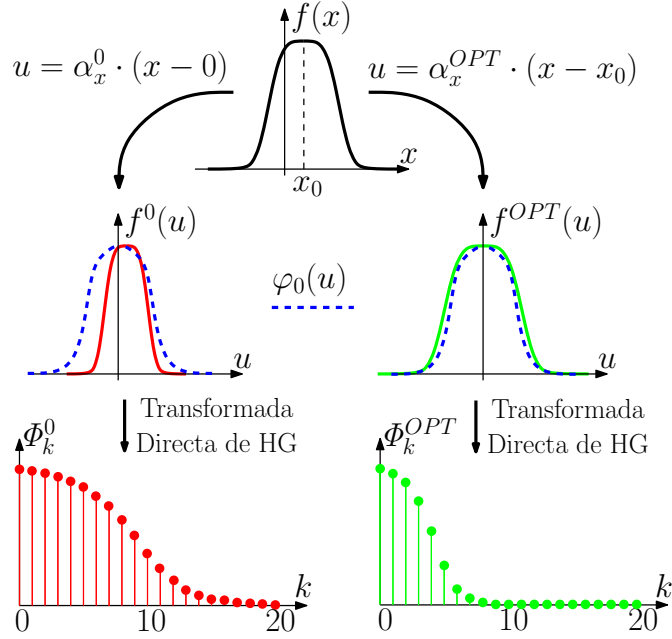


Figura 4.2: Criterio de optimización basado en el ancho de banda espectral.

normalizado, que se puede definir como

$$\text{Var}(\mathbf{p}) = \frac{\sum_m \sum_n m^2 n^2 |\Phi_{mn}(\mathbf{p})|^2}{\sum_m \sum_n |\Phi_{mn}(\mathbf{p})|^2} \quad (4.6)$$

donde $\Phi_{mn}(\mathbf{p})$ representa el coeficiente mn -ésimo del desarrollo en serie de Hermite-Gauss de la función en el dominio transformado para el vector de parámetros \mathbf{p} .

La nueva técnica, denominada *Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo* (*Adaptive Hermite-Gauss Decomposition Method* (A-HGDM)) [Ortega2003], se caracterizará por tanto por calcular los parámetros óptimos de la transformación \mathbf{p}^{OPT} minimizando la función varianza del espectro definida anteriormente

$$\text{mín} \{ \text{Var}(\mathbf{p}) \} \Rightarrow \mathbf{p}^{\text{OPT}} \quad (4.7)$$

Es importante destacar que, a diferencia de lo que ocurría en el O-HGDM, ahora en cada paso del algoritmo de optimización se debe conocer el espectro de la distribución transversal de campo en el dominio transformado $\Phi_{mn}(\mathbf{p})$ y no la constante de propagación normalizada del modo. Como se verá en el siguiente epígrafe esto constituye una ventaja fundamental, ya que elimina la necesidad de formular y resolver el problema de autovalores en todas y cada una de las iteraciones, reduciéndose así enormemente el coste computacional asociado a la determinación de los parámetros óptimos de la transformación.

4.2.2. Algoritmo de Optimización

El objetivo del algoritmo de optimización propuesto, cuyo diagrama de flujo se esquematiza en la figura 4.3, es realizar de forma eficiente el cálculo del conjunto de parámetros

de la transformación que minimiza la función varianza del espectro (4.6). Para ello, en cada iteración del algoritmo se realizan los siguientes pasos:

1. Formulación y resolución del problema de autovalores:

Es el paso más costoso desde el punto de vista computacional, tanto en tiempo de cálculo como en requerimientos de memoria. Se debe tener en cuenta que, aunque el vector de parámetros con el que se resuelve el problema (\mathbf{p}^0) se actualiza en cada iteración, resulta conveniente inicializar el algoritmo con un conjunto de parámetros razonable, ya que de esta forma se reduce el número de iteraciones y con ello los tiempos de cómputo.

2. Minimización de la función varianza:

A partir de los coeficientes espectrales calculados en el paso anterior (Φ^0) se calcula el conjunto de parámetros \mathbf{p}^{OPT} que minimiza la función varianza. La principal diferencia respecto al O-HGDM es que ahora, en cada paso del algoritmo de optimización no es necesario resolver de nuevo el problema de autovalores, sino que basta con aplicar el procedimiento de estimación de coeficientes espectrales que se explicará posteriormente.

3. Actualización del vector de parámetros de la transformación:

Si el algoritmo ha convergido el conjunto de parámetros buscado es precisamente \mathbf{p}^{OPT} . En caso contrario se actualiza el vector de parámetros inicial ($\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^{\text{OPT}}$) y se vuelve al **paso 1**.

De cara a la eficiencia computacional, el punto clave del algoritmo de optimización es el procedimiento de estimación de los coeficientes espectrales que se realiza en el **paso 2**. Esto es así porque, sea cual sea el método numérico elegido para minimizar la varianza del espectro, éste necesitará evaluar repetidamente una función que le permita calcular, para cualquier vector de parámetros de la transformación \mathbf{p}^i , los coeficientes espectrales del desarrollo en serie del campo en el dominio transformado $\Phi^i = \Phi(\mathbf{p}^i)$. La forma inmediata de realizar este cálculo es formular y resolver de nuevo el problema de autovalores para cada nuevo \mathbf{p}^i , pero la escasa eficiencia computacional de este procedimiento hace que ésta sea una opción poco atractiva. Afortunadamente, existe una alternativa que permite realizar la estimación de los coeficientes Φ^i a partir de Φ^0 con un coste computacional mínimo. El procedimiento a seguir es muy sencillo y consta únicamente de tres pasos:

1. Determinación de eje de muestras transformado \mathbf{u}^i :

Este eje de muestras debe estar formado por los puntos de cuadratura de Gauss, que tal y como se explicó en el epígrafe 3.7.1 se corresponden con las raíces del polinomio de Hermite de orden $N + 1$.

2. Determinación de un nuevo eje de muestras transformado \mathbf{u}^0 :

Este nuevo eje de muestras se corresponde con los puntos en los que debe ser evaluado el perfil de campo para proporcionar el vector de amplitudes \mathbf{f}^0 , que tal y como se ve en la figura 4.4(a) debe coincidir con el vector de campo \mathbf{f}^i evaluado sobre el eje \mathbf{u}^i . A partir de \mathbf{u}^i y siguiendo el procedimiento mostrado en la figura 4.4(b), resulta inmediato deducir la siguiente expresión para calcular \mathbf{u}^0

$$\mathbf{u}^0 = \alpha_x^0 \cdot \left(\frac{\mathbf{u}^i}{\alpha_x^i} + o^i - o^0 \right) \quad (4.8)$$

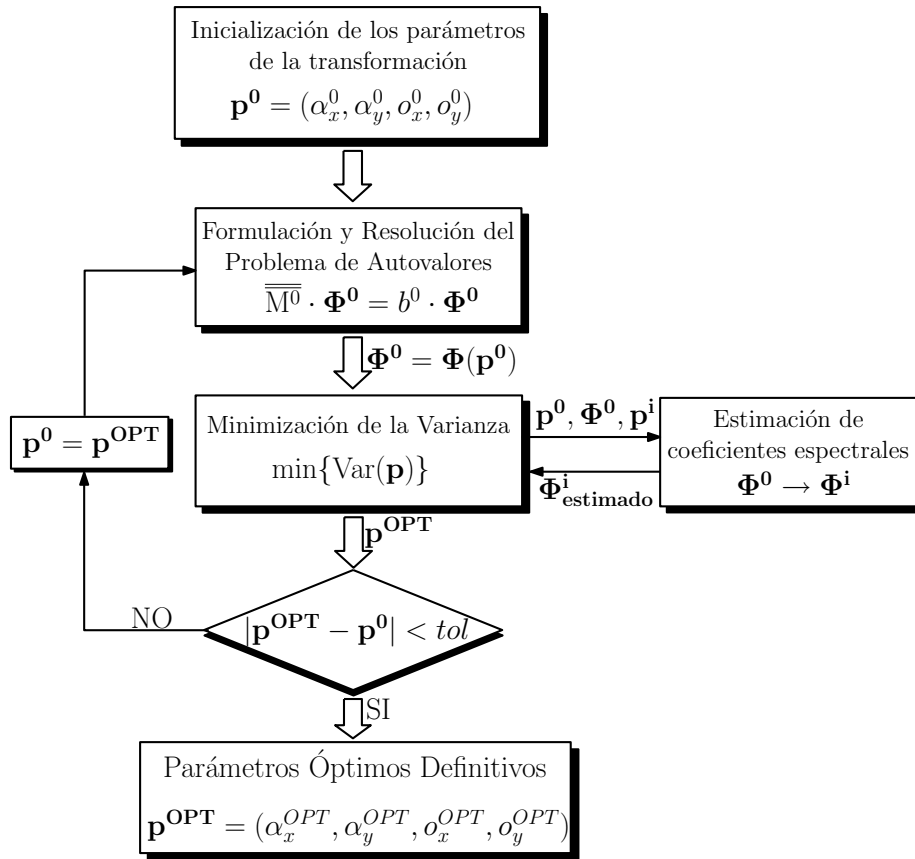


Figura 4.3: Algoritmo de optimización utilizado en el A-HGDM.

3. Cálculo de $\Phi^i = \Phi(p^i)$:

Por último, el vector de coeficientes buscado Φ^i , definido sobre el conjunto de parámetros de la transformación p^i , se puede calcular a partir de Φ^0 utilizando

$$\Phi^i = \overline{\text{HGT}}\Big|_{\mathbf{u}^i} \cdot \overline{\text{IHGT}}\Big|_{\mathbf{u}^0} \cdot \Phi^0 \quad (4.9)$$

donde $\overline{\text{HGT}}\Big|_{\mathbf{u}^i}$ y $\overline{\text{IHGT}}\Big|_{\mathbf{u}^0}$ se corresponden con las matrices transformadas de Hermite-Gauss directa e inversa definidas respectivamente sobre los ejes de muestras \mathbf{u}^i y \mathbf{u}^0 .

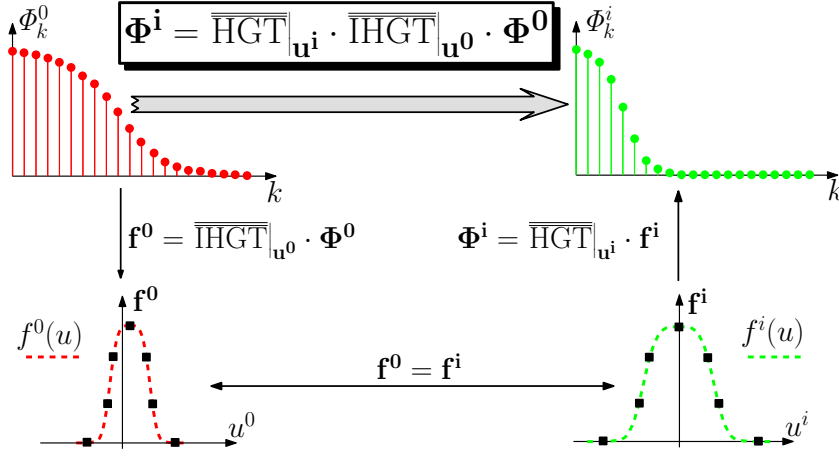
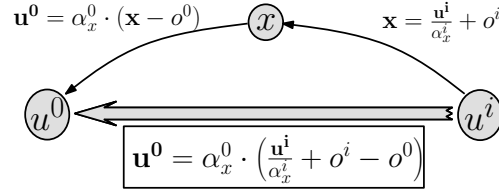
(a) Cálculo del vector de coeficientes Φ^i (b) Cálculo del eje de muestras transformado u^0

Figura 4.4: Estimación de los coeficientes espectrales en el A-HGDM.

4.3. Resultados

El objetivo de este epígrafe es validar el funcionamiento de la estrategia de optimización de parámetros propuesta en el punto anterior. Para ello se han analizado dos estructuras muy utilizadas habitualmente en el campo de la óptica integrada: la guía rectangular de salto de índice y el acoplador direccional en rib. En ambos casos la práctica totalidad de los resultados presentados han sido obtenidos bajo la aproximación escalar, ya que de esta forma el coste computacional de las simulaciones es mucho menor y se evita el problema de la reducida velocidad de convergencia asociada a la representación de campos discontinuos mediante funciones globales continuas. No obstante, en el punto 4.3.3 se han incluido algunos resultados preliminares del análisis modal completamente vectorial de la guía rectangular que demuestran la validez de la técnica propuesta también en este tipo de problemas.

4.3.1. Análisis Escalar de la Guía Rectangular

La primera de las estructuras que se va a analizar es una guíaonda rectangular como la representada en la figura 4.5(a). Esta guía recibe habitualmente el nombre de *buried*, ya que la zona de guiado (n_f) se encuentra rodeada completamente (enterrada) por el sustrato, de menor índice de refracción que el núcleo ($n_s < n_f$). En esta guía el proceso de normalización resulta inmediato, ya que las coordenadas transversales normalizadas se calculan como $\tilde{x} = x/d_x$, $\tilde{y} = y/d_y$ (ver figura 4.5(b)), con lo que el problema queda perfectamente definido en función de las frecuencias normalizadas V_x y V_y (2.30). Al tratarse de una estructura simétrica, los parámetros de centrado van a ser nulos

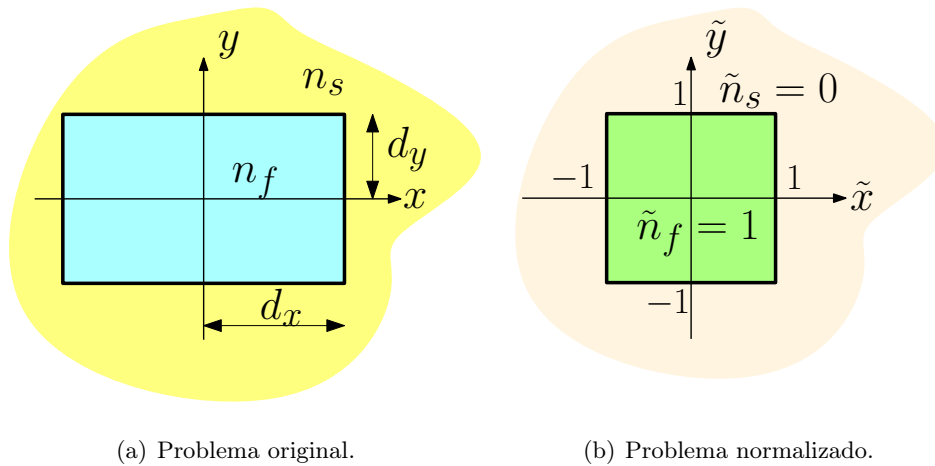


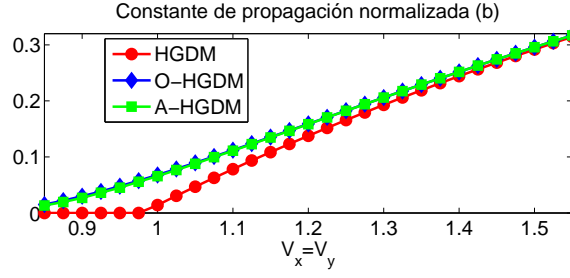
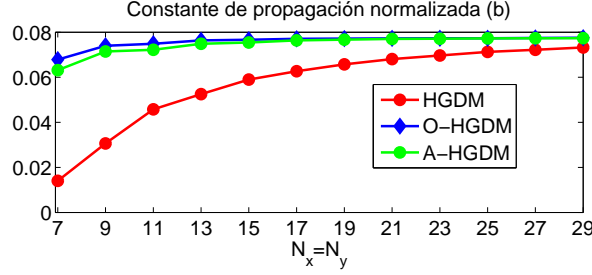
Figura 4.5: Guía Rectangular. Definición de la geometría.

$\alpha_x = \alpha_y = 0$, con lo que la transformación queda definida en base a únicamente los factores de escalado α_x y α_y , que en el caso del HGDM se calculan directamente como $\alpha_x = \sqrt{V_x}$ y $\alpha_y = \sqrt{V_y}$. Es importante destacar que, al carecer la guía rectangular de solución analítica, la validación de la técnica propuesta se llevará a cabo tomando como referencia los resultados obtenidos con el O-HGDM que, como se explicó anteriormente, proporciona la mejor solución posible de la constante de propagación para un número de coeficientes dado.

En la figura 4.6(a) se representa, en función de la frecuencia normalizada y para cada uno de los tres métodos a los que se acaba de hacer referencia, la constante de propagación normalizada b del modo fundamental (2.31). A la vista de estos resultados, obtenidos empleando únicamente $N_x = N_y = 7$ términos en el desarrollo en serie del campo eléctrico, se puede afirmar que:

- Las soluciones obtenidas con el A-HGDM y el O-HGDM son prácticamente indistinguibles para cualquier valor de V , lo que constituye una primera validación de la técnica propuesta.
- El HGDM proporciona resultados aceptables sólo para frecuencias normalizadas relativamente altas $V_x = V_y \geq 1,45$. Para valores menores las soluciones calculadas con este método son cada vez menos precisas, hasta el punto de que para $V_x = V_y \leq 0,975$ ni siquiera es capaz de encontrar el modo guiado.

Para demostrar que estas conclusiones son independientes del número de términos, en la figura 4.6(b) se muestran las curvas de convergencia de los tres métodos para una frecuencia normalizada baja ($V_x = V_y = 1$). La reducida velocidad de convergencia del HGDM se debe a una selección inadecuada de los factores de escalado de la transformación, que provoca que las funciones base no se encuentren adaptadas convenientemente a la solución del problema. Este hecho se pone de manifiesto en la figura 4.7, en la que se han dibujado los mapas de contorno correspondientes a las distribuciones transversales de campo del modo fundamental obtenidas con el HGDM y el A-HGDM respectivamente. En el primer caso (figura 4.7(a)-(b)), la elección incorrecta de los factores de escalado es responsable de que el campo decaiga demasiado rápido, mientras que por el contrario, cuando se utilizan los factores de escalado optimizados (figura 4.7(c)-(d)) la solución decae mucho más lentamente, proporcionando resultados aceptables incluso cuando el

(a) En función de la frecuencia normalizada. $N_x = N_y = 7$.(b) En función del número de términos. $V_x = V_y = 1$.Figura 4.6: Guía Rectangular. Constante de propagación normalizada b .

número de términos es muy bajo ($N_x = N_y = 7$). En la figura 4.8 se muestra de forma más clara la convergencia con el número de armónicos de la distribución de campo obtenida con ambos métodos. Para el HGDM, la caracterización correcta del modo en la región más alejada de la zona de guiado requiere utilizar valores de N muy elevados, ya que las soluciones obtenidas con 27 y 57 coeficientes son claramente diferentes en el rango $5 < |x| < 10$ (figura 4.8(a)). Sin embargo, el A-HGDM (figura 4.8(b)) parece haber alcanzado la convergencia con sólo $N_x = N_y = 17$ términos, lo que es coherente con la curva de convergencia de la constante de propagación normalizada mostrada en la figura 4.6(b).

Si bien con los resultados anteriores se ha demostrado que el A-HGDM es capaz de mejorar enormemente la precisión respecto al HGDM en aquellos casos en los que el modo se encuentra muy expandido, todavía queda por comprobar que, en términos de eficiencia computacional, la técnica propuesta sea superior al O-HGDM. Con este objetivo, en las figuras 4.9 y 4.10 se han representado los mapas de contorno correspondientes a la evaluación de los cocientes $b(\alpha_x, \alpha_y)/b_{max} \times 100\%$ para diferentes valores de los parámetros de la transformación (α_x, α_y) , siendo el valor de referencia b_{max} la solución obtenida con el O-HGDM para un número de coeficientes dado. Superpuesto sobre estos mapas de contorno se ha dibujado el camino seguido por el algoritmo de optimización propuesto, cuyo punto de partida es en todos los casos $(\alpha_x, \alpha_y) = (\sqrt{V_x}, \sqrt{V_y})$. A partir de estas gráficas es posible llegar a las siguientes conclusiones:

- Existe siempre una zona en la que la precisión de los resultados obtenidos mejora respecto a la solución calculada con el escalado tradicional. El nivel de mejora disminuye tanto con el número de términos como con la frecuencia normalizada, lo que está relacionado con el aumento de la precisión del HGDM para valores altos de N o V .
- El algoritmo de optimización propuesto alcanza la zona de máxima mejora con un

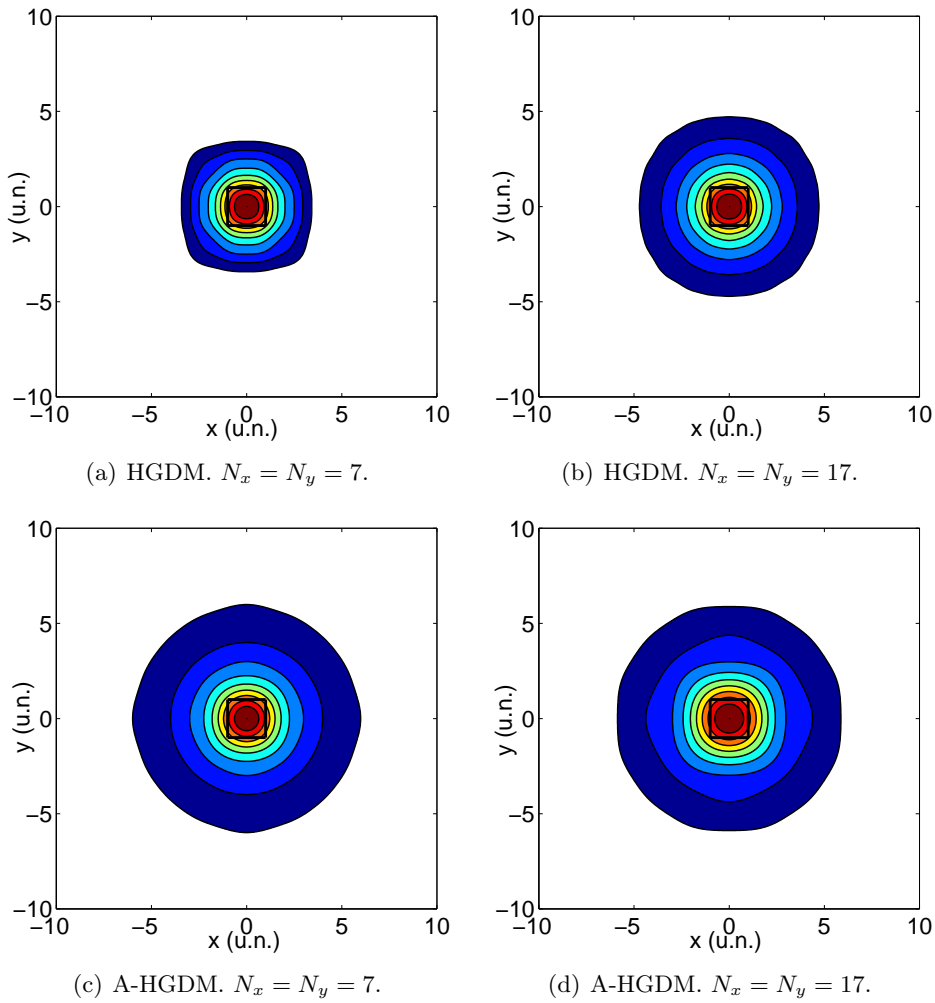


Figura 4.7: Guía Rectangular. Distribución transversal de campo del modo fundamental. $V_x = V_y = 1$.

número de iteraciones muy bajo (típicamente entre tres y seis), lo que en la práctica implica una reducción significativa del coste computacional respecto al O-HGDM, ya que esta última técnica precisa habitualmente unas cincuenta evaluaciones del problema de autovalores para obtener los parámetros óptimos de la transformación.

- En ciertos casos es posible mejorar la precisión de los resultados obtenidos por el A-HGDM sin aumentar el coste computacional, seleccionando de entre las soluciones intermedias obtenidas por el algoritmo de optimización aquella que proporciona una constante de propagación normalizada mayor. Por ejemplo, en la figura 4.9(a) se observa claramente como, seleccionando la cuarta iteración del algoritmo en lugar de la solución final, la precisión en la b se puede incrementar desde el 96 % hasta alcanzar el 99,5 % del valor calculado con el O-HGDM.
- Los parámetros óptimos de la transformación parecen ser poco dependientes del número de términos, como se puede comprobar en los valores finales a los que converge el algoritmo de optimización propuesto en las figuras 4.9(a)-(b).

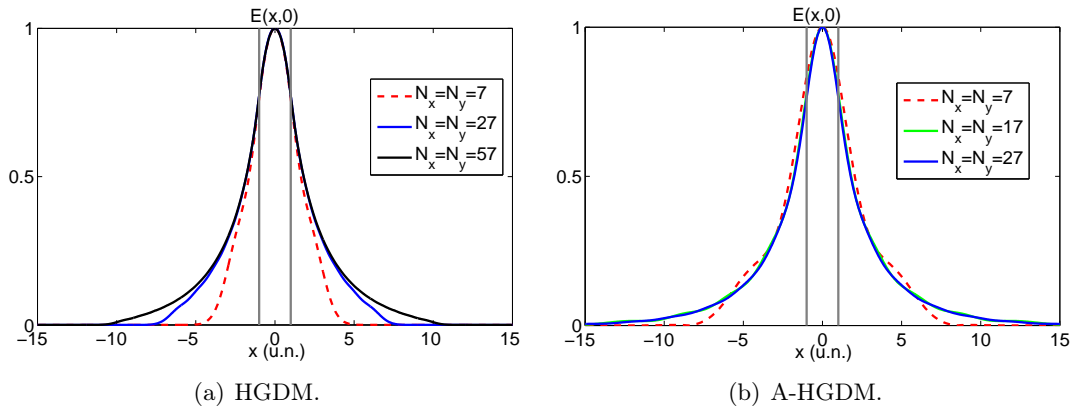


Figura 4.8: Guía Rectangular. Distribución transversal de campo del modo fundamental (Corte por $y = 0$). $V_x = V_y = 1$.

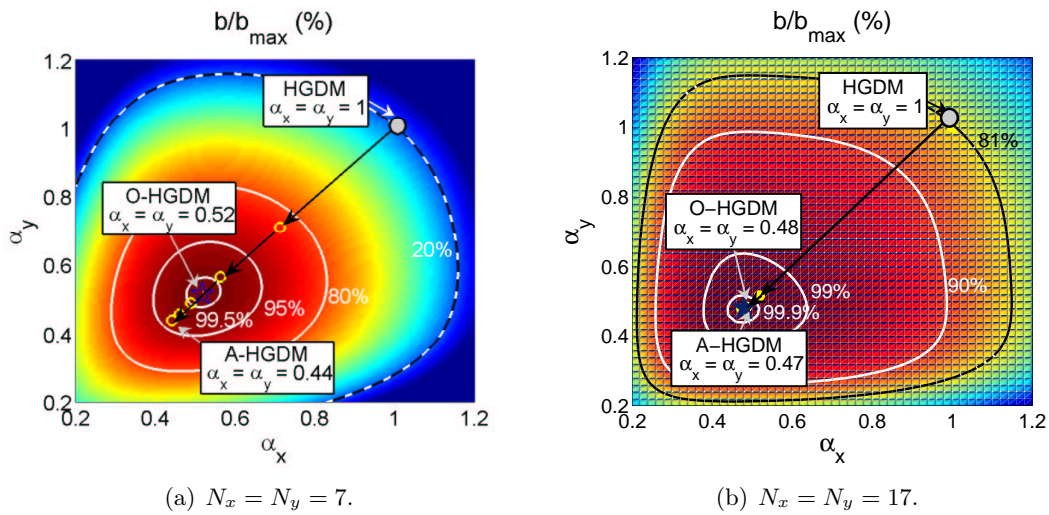


Figura 4.9: Guía Rectangular. Mapa de contorno del cociente $b/b_{max}(\%)$ y camino seguido por el algoritmo de optimización. $V_x = V_y = 1$.

Esta última afirmación queda confirmada por los resultados que se muestran en la figura 4.11, donde se analiza la variación de los parámetros óptimos de la transformación con el número de coeficientes. Un nivel de dependencia bajo como el que se refleja en esta figura no sólo confirma la validez del criterio de optimización propuesto, sino que además permite utilizar la siguiente estrategia a la hora de realizar simulaciones precisas con el mínimo coste computacional:

1. Comenzar evaluando los parámetros óptimos de la transformación para un número de términos bajo, lo que implica evidentemente un menor tiempo de cálculo.
2. Seguidamente, formular y resolver el problema de autovalores utilizando los parámetros calculados en el paso anterior pero con un mayor número de coeficientes, con lo que se mejora la precisión de los resultados obtenidos.

Por último, en la figura 4.12 se muestran los tiempos de cómputo asociados a la formulación y resolución del problema para cada iteración del algoritmo de optimización.

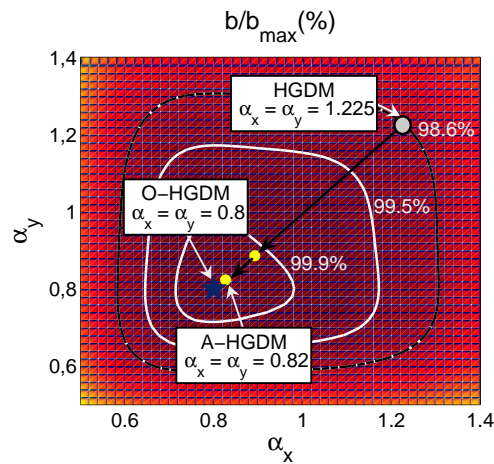


Figura 4.10: Guía Rectangular. Mapa de contorno del cociente $b/b_{max}(\%)$ y camino seguido por el algoritmo de optimización. $V_x = V_y = 1,5$. $N_x = N_y = 7$.

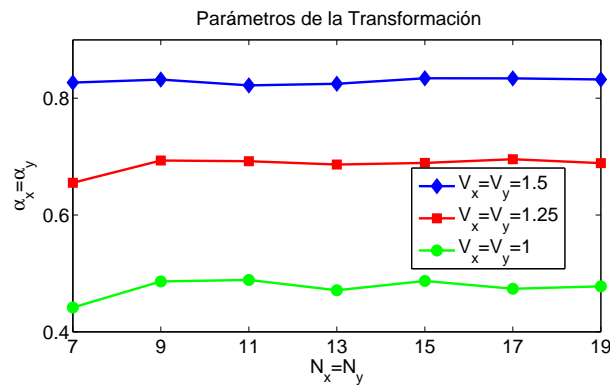


Figura 4.11: Guía Rectangular. Dependencia de los parámetros de la transformación con el número de términos.

Como era de esperar, el tiempo total de cálculo crece muy rápidamente con el número de términos, lo que justifica la necesidad del método propuesto ya que, tal y como se mostró en la figura 4.6(b), el uso de los parámetros óptimos de la transformación consigue acelerar considerablemente la velocidad de convergencia del A-HGDM respecto al HGDM. Por otro lado, conviene destacar que la mayor parte del tiempo total de cómputo se dedica a la generación de la matriz del sistema, y más concretamente a la evaluación del operador producto, que como se adelantó en el epígrafe 3.7.2.2 resulta extraordinariamente costosa. Una vez calculada la matriz del sistema, la resolución del problema de autovalores y autovectores consume un tiempo que no supera en ningún caso el 15% del total, pudiéndose considerar por tanto prácticamente despreciable.

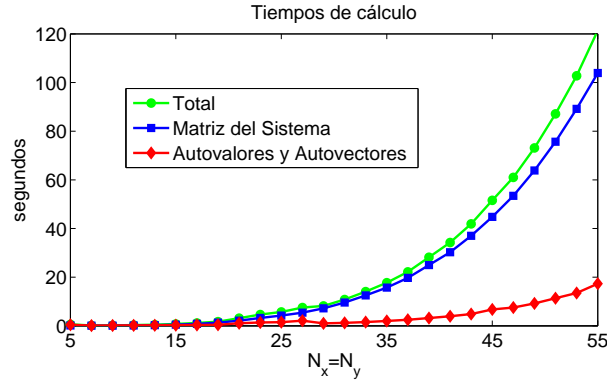


Figura 4.12: Guía Rectangular. Tiempos de cálculo por cada iteración del algoritmo de optimización.

4.3.2. Análisis Escalar del Acoplador Direccional

Una vez establecida la validez de la técnica propuesta en un caso sencillo como la guía rectangular, en este epígrafe se va a aplicar el A-HGDM al análisis modal de una estructura algo más complicada, el acoplador direccional en *rib* cuya geometría se muestra en la figura 4.13. La primera dificultad a la hora de aplicar el HGDM a este dispositivo es la definición de la zona de guiado, en función de la cual se obtienen las constantes de normalización de la estructura d_x y d_y , las frecuencias normalizadas V_x y V_y y finalmente los factores de escalado tradicionales $\alpha_x = \sqrt{V_x}$ y $\alpha_y = \sqrt{V_y}$. En lo que sigue se considerará que el HGDM va a utilizar como constantes de normalización las que se muestran en la figura 4.13. Esta elección parece razonable dada la geometría de la estructura, ya que es de suponer que la mayor parte del campo se encontrará situado en esa zona. En cuanto a los parámetros de centrado o_x y o_y , al no tratarse de una estructura simétrica, su valor será en general diferente de cero. En el caso del HGDM se ha decidido, también en base a consideraciones físicas, ajustarlos de forma que el origen de coordenadas en el dominio transformado se sitúe en el centro de la zona de guiado rectangular definida por $2 \cdot d_x$ y $2 \cdot d_y$. Evidentemente, esta elección de los parámetros de la transformación basada exclusivamente en la geometría de la estructura no va a conducir en general a los mejores resultados. Como se mostrará a continuación, este problema es superado por el A-HGDM, cuyo algoritmo de optimización es capaz de calcular, de forma automática y con un coste computacional reducido, los parámetros óptimos de la transformación $\mathbf{p}^{\text{OPT}} = (\alpha_x^{\text{OPT}}, \alpha_y^{\text{OPT}}, o_x^{\text{OPT}}, o_y^{\text{OPT}})$ con independencia de las constantes de normalización y el origen de coordenadas elegido. En la figura 4.14(a)-(b) se han representado las distribuciones de campo eléctrico obtenidas con el HGDM ($N_x = N_y = 12, 20$) para los dos primeros supermodos (simétrico y antisimétrico) del acoplador direccional simétrico ($2 \cdot W_2 = 3 \mu\text{m}$). En este caso los parámetros de la transformación han sido fijados a partir de la geometría de la estructura, siendo iguales a $\mathbf{p}^{\text{Geom}} = (3,458, 1,16, 0 \mu\text{m}, 0,45 \mu\text{m})$. Comparados con los resultados calculados con el método propuesto y doce términos (figura 4.14(c)), se observa que el principal problema del HGDM es su incapacidad para representar correctamente la distribución espacial de los modos en dirección x , ya que el factor de escalado elegido ($\alpha_x = 3,458$) no es el adecuado para caracterizar el campo en esa dirección. Estas dificultades se ponen aún más de manifiesto durante el análisis del acoplador direccional fuertemente asimétrico ($2 \cdot W_2 = 1 \mu\text{m}$) que se muestra en la figura 4.15. En este caso los modos presentan unas características en cuanto a su distri-

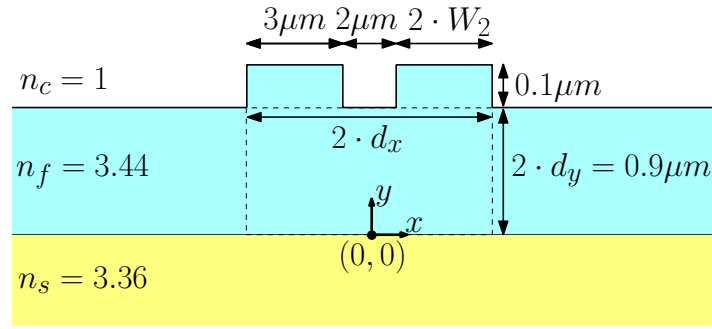


Figura 4.13: Acoplador Direccional. Definición de la geometría.

bución transversal muy diferentes, ya que mientras el fundamental aparece claramente confinado por el *rib* más ancho, el segundo modo se encuentra muy expandido por la zona del *slab*. Tal y como se pone de manifiesto en las figuras 4.15(a)-(c), la elección en base a consideraciones geométricas de un único conjunto de parámetros para ambos modos provoca que la velocidad de convergencia del HGDM a la hora de representar el segundo modo sea mucho más lenta que en lo que se refiere al fundamental. Por el contrario, con el A-HGDM se pueden determinar los parámetros óptimos de la transformación para cada uno de los modos por separado, lo que le permite adaptarse individualmente a sus características, tal y como se observa en la figura 4.15(d).

Para realizar el análisis cuantitativo de la velocidad de convergencia de ambos métodos se ha decidido utilizar la longitud de acoplo L_{acop} , definida habitualmente como

$$L_{acop} = \frac{\pi}{\beta_2 - \beta_1} \quad (4.10)$$

donde β_2 y β_1 se corresponden respectivamente con las constantes de propagación de los dos primeros modos de la estructura.

Como es bien sabido, este parámetro es muy sensible a los errores cometidos en el cálculo de las constantes de propagación, por lo que constituye una excelente figura de mérito a la hora de caracterizar las prestaciones de los métodos numéricos. En la figura 4.16 se ha representado la longitud de acoplo en función del número de términos para los dos acopladores direccionales estudiados anteriormente. Como era de esperar, aunque ambas técnicas terminan convergiendo al mismo valor cuando el número de armónicos es elevado, el A-HGDM presenta una velocidad de convergencia mucho mayor. Esto se pone especialmente de manifiesto en el acoplador direccional simétrico ($2 \cdot W_2 = 3 \mu\text{m}$), ya que en ese caso las constantes de propagación de los dos modos se encuentran muy próximas entre sí y cualquier pequeña variación en las mismas se traduce en un error apreciable en la longitud de acoplo. Por otro lado, aunque en el acoplador asimétrico los errores en la estimación de las constantes de propagación son menos graves, las soluciones obtenidas con el HGDM para un bajo número de términos son tan poco precisas que la convergencia, aunque prácticamente monótona, es también muy lenta. Por último, y para poner de manifiesto de forma explícita la función de los parámetros de centrado (o_x y o_y) en problemas asimétricos, en la figura 4.17 se muestran los valores de dichos parámetros calculados para el modo fundamental del acoplador direccional en función de $2 \cdot W_2$. Por un lado, se puede comprobar que o_y se mantiene aproximadamente constante, ya que el modo apenas cambia de posición sobre el eje y al variar el ancho del *rib*. Por otro lado, se observa claramente como el parámetro o_x tiende a seguir la posición del máximo de

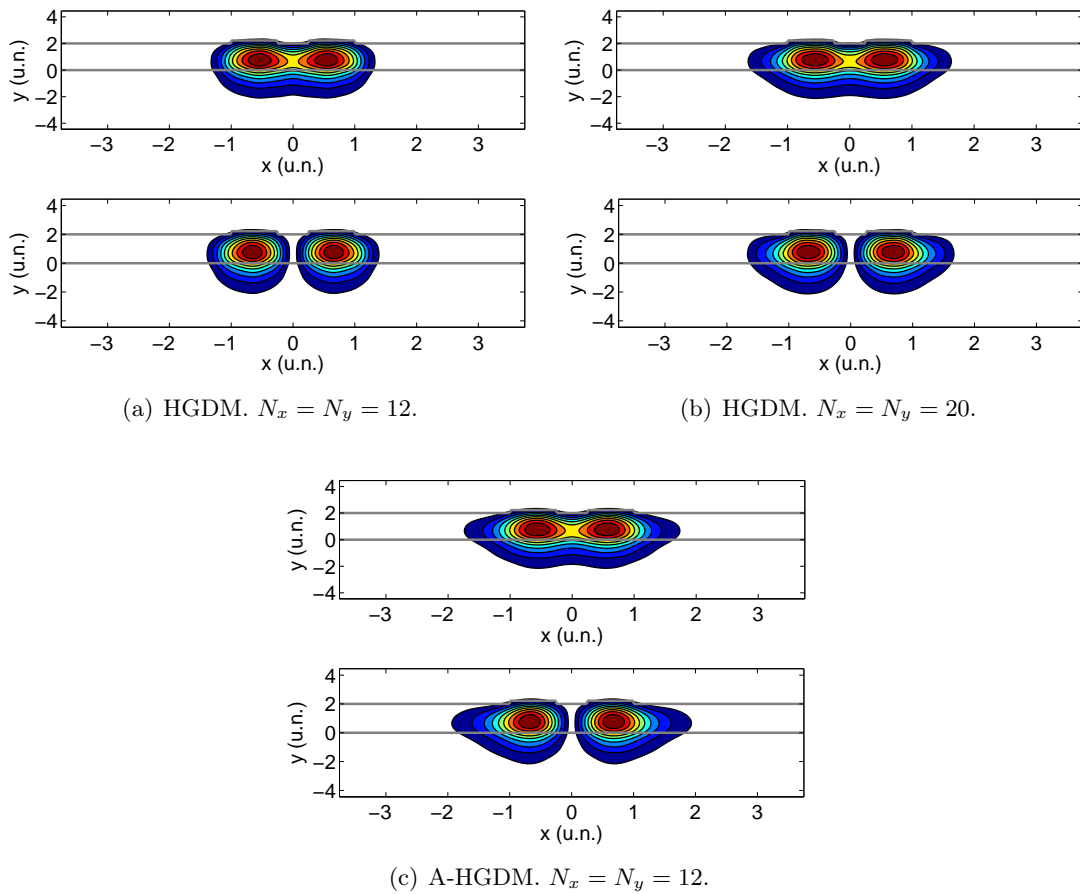


Figura 4.14: Acoplador Direccional. Distribución transversal de campo de los dos primeros modos. $2 \cdot W_2 = 3 \mu\text{m}$.

la distribución de campo que, como se muestra en las subfiguras incluidas en la gráfica, pasa de estar centrado en el *rib* izquierdo para $2 \cdot W_2 = 1 \mu\text{m}$ a colocarse bajo el derecho cuando $2 \cdot W_2 = 6 \mu\text{m}$.

4.3.3. Análisis Vectorial de la Guía Rectangular

En los epígrafes anteriores se ha verificado el buen funcionamiento y la eficacia computacional de la técnica propuesta mediante simulaciones realizadas siempre bajo la aproximación escalar, siguiendo un enfoque similar al utilizado en [Ortega2003]. En este punto se presentarán algunos resultados preliminares obtenidos tras la aplicación del A-HGDM al análisis completamente vectorial de una guía rectangular de salto de índice.

La principal dificultad asociada al análisis vectorial de dispositivos ópticos mediante métodos espectrales está relacionada con el carácter discontinuo de las distribuciones de campo eléctrico en los interfaces entre dieléctricos, que puede llegar a reducir considerablemente la velocidad de convergencia. Este problema se va a poner de manifiesto sobre todo en estructuras con saltos de índice de refracción elevados y un grado de confinamiento bajo de la distribución de campo en la zona de guiado. En estos casos, la competitividad del espacio funcional de Hermite-Gauss respecto a otros como Fourier puede llegar a verse fuertemente comprometida, ya que al no disponer de transforma-

4 El Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo (A-HGDM)

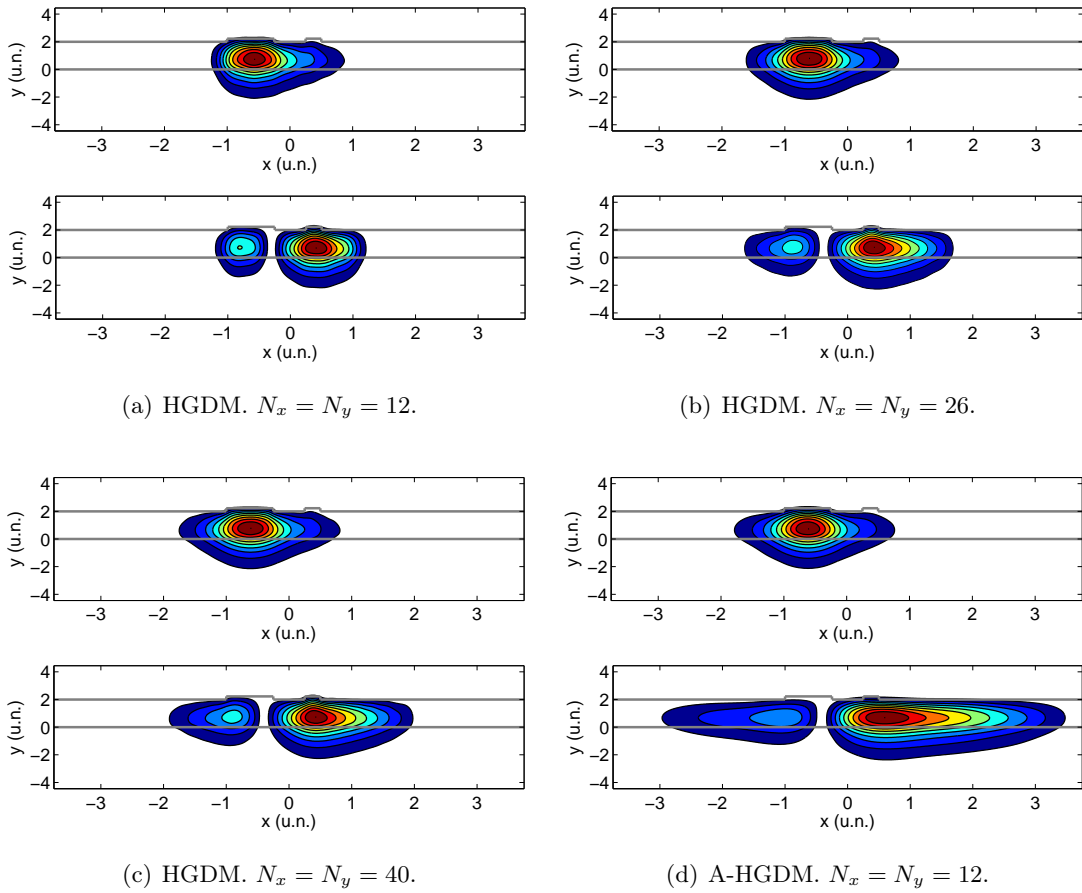


Figura 4.15: Acoplador Direccional. Distribución transversal de campo de los dos primeros modos. $2 \cdot W_2 = 1 \mu\text{m}$.

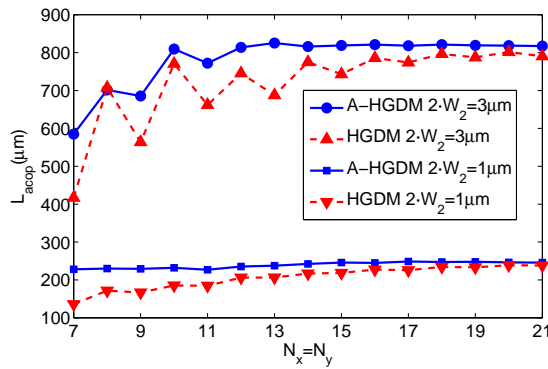


Figura 4.16: Acoplador Direccional. Longitud de acoplo (L_{acop}) en función del número de términos.

da rápida los tiempos de cómputo crecen muy rápidamente con el número de términos, tal y como se muestra en la figura 4.18. Por este motivo, el estudio que se presenta a continuación se ha restringido a estructuras caracterizadas por mantener el contraste de índice en el interfaz núcleo-substrato a un valor lo suficientemente bajo como para que

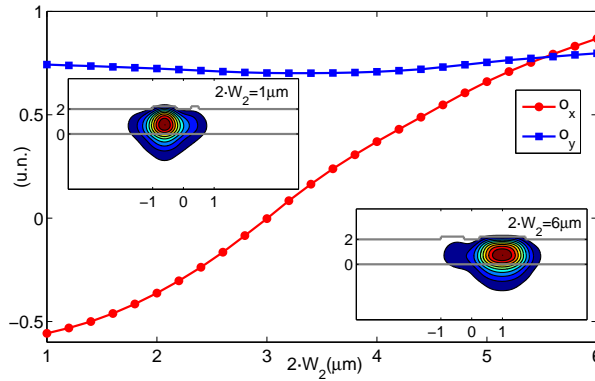


Figura 4.17: Acoplador direccional. Parámetros de centrado (o_x, o_y) para el modo fundamental. $N_x = N_y = 12$.

la discontinuidad de campo eléctrico no sea demasiado apreciable, lo que va a permitir obtener resultados razonablemente buenos con un número de términos reducido.

Al igual que ocurría bajo la aproximación escalar, en el problema vectorial los factores de escalado tradicionales utilizados por el HGDM resultan claramente inapropiados para frecuencias de trabajo bajas, cuando la distribución de campo se encuentra muy expandida. Afortunadamente, se puede comprobar que la tasa de convergencia aumenta de forma espectacular sin más que sustituir los factores de escalado incorrectos por aquellos determinados por el algoritmo de optimización de parámetros para la ecuación de ondas escalar. De esta forma, el A-HGDM para el caso vectorial se reduce a aplicar los siguientes pasos:

1. Determinar los parámetros óptimos de la transformación bajo la aproximación escalar y con un número de armónicos bajo, lo que disminuye considerablemente el coste computacional.
2. Resolver el problema vectorial con los parámetros calculados en el paso anterior y el número de armónicos necesario para conseguir la precisión deseada.

La elección para la versión vectorial del A-HGDM del conjunto de parámetros de la transformación óptimo para el problema escalar, que en principio puede parecer arbitraria, se justifica en base a las siguientes consideraciones:

- En el caso escalar, la velocidad de decaimiento de los coeficientes espectrales para un problema dado depende fundamentalmente de los parámetros de la transformación, por lo que la minimización del ancho de banda espectral de la distribución de campo conduce a la determinación de sus valores óptimos.
- Por el contrario, en problemas vectoriales el espectro de la distribución espacial de campo eléctrico está fuertemente condicionado por el carácter discontinuo de éste en los interfaces entre dieléctricos, ya que el espacio funcional de Hermite-Gauss es continuo en todo su dominio de definición. Por este motivo la minimización del ancho de banda espectral no garantiza en el caso vectorial la obtención de los parámetros óptimos de la transformación.
- La solución escalar, especialmente para saltos de índice no muy grandes, se puede considerar como una versión paso bajo (continua en los interfaces entre dieléctricos)

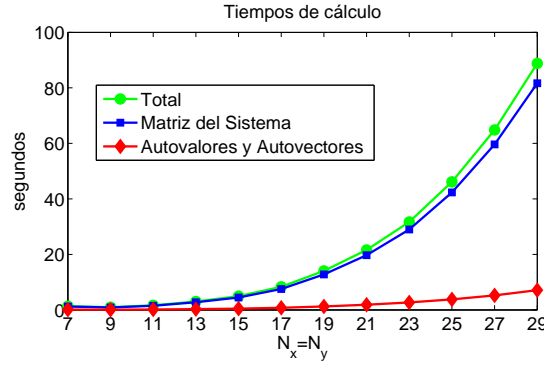
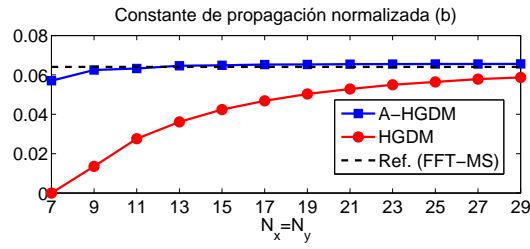


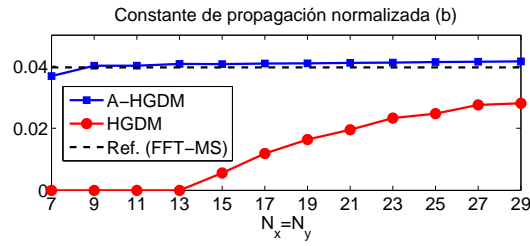
Figura 4.18: Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Tiempos de cálculo.

de la vectorial. Por lo tanto, parece razonable pensar que los parámetros de la transformación calculados para el caso escalar aseguran que el campo en el dominio transformado se adapta convenientemente a las funciones base de Hermite-Gauss, al menos en zonas lo suficientemente alejadas de los interfaces.

La validez de la estrategia propuesta para el análisis modal completamente vectorial de guías dieléctricas mediante el espacio funcional de Hermite-Gauss se pone claramente de manifiesto en la figura 4.19, en la que se compara la convergencia de la constante de propagación normalizada obtenida con ambos métodos (HGDM y A-HGDM) para dos saltos de índice diferentes ($\Delta = n_f - n_s = 0,1$ y $\Delta = n_f - n_s = 0,3$) y manteniendo constante la frecuencia normalizada ($V_x = V_y = 1$). El valor de referencia ha sido determinado con un método vectorial de Fourier muy optimizado denominado FFT-MS, que constituye otra de las aportaciones relevantes de esta Tesis y al que se dedicará el siguiente capítulo. La mejora de prestaciones asociada al uso de los factores de escalado óptimos es extraordinaria, permitiendo al A-HGDM obtener resultados precisos con un número de términos muy reducido, lo que atendiendo a los tiempos de cálculo que se mostraron en la figura 4.18 se traduce en una reducción muy relevante del coste computacional. En la figura 4.20 se ha representado la distribución de campo de la componente dominante (E_x) del modo fundamental obtenida con ambos métodos para $\Delta = 0,1$. En este caso el salto de índice es lo suficientemente pequeño como para que la discontinuidad de campo sea prácticamente inapreciable, observándose un comportamiento similar al descrito para el caso escalar. Por el contrario, si el salto de índice aumenta hasta $\Delta = 0,3$ la situación cambia considerablemente. Tal y como se muestra en las figuras 4.21(a)-(b), cuando se utiliza el HGDM la discontinuidad de la distribución de campo comienza a ser relevante, siendo claramente visible el conocido fenómeno de Gibbs en los interfaces núcleo-substrato situados en $x = \pm 1$. Sin embargo, la aplicación del A-HGDM (figura 4.21(c)) proporciona una solución muy diferente, carente de sentido físico en los interfaces según x (donde la distribución de campo obtenida es prácticamente continua), pero que se adapta mucho mejor a la reducida velocidad de decaimiento del campo en el sustrato. Obviamente, la mejora en la curva de convergencia que se puso de manifiesto en la figura 4.19(b) está íntimamente relacionada con este hecho, y es que al estar la distribución de campo tan expandida, de cara a la precisión en la constante de propagación resulta mucho más importante caracterizar correctamente el campo en el sustrato que describir fielmente la discontinuidad de éste en los interfaces.

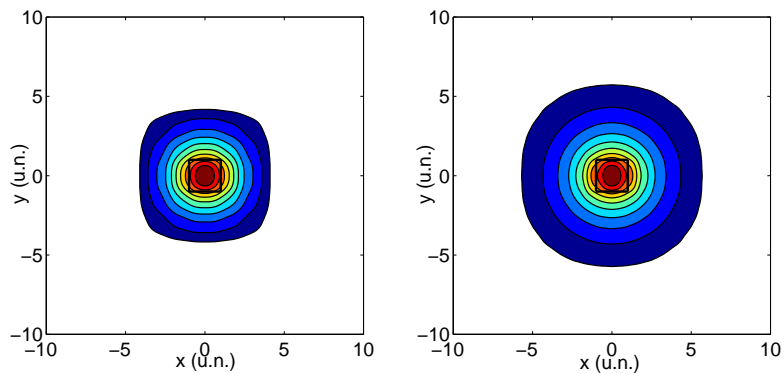


(a) $n_f = 1,5, n_s = 1,4.$



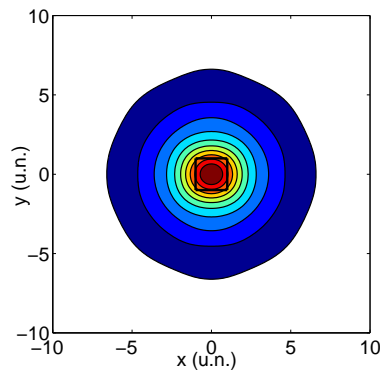
(b) $n_f = 1,5, n_s = 1,2.$

Figura 4.19: Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Constante de propagación normalizada b . $V_x = V_y = 1$.



(a) HGDM. $N_x = N_y = 11.$

(b) HGDM. $N_x = N_y = 29.$



(c) A-HGDM. $N_x = N_y = 11.$

Figura 4.20: Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Distribución transversal de campo de la componente dominante del primer modo. $V_x = V_y = 1, n_f = 1,5, n_s = 1,4.$

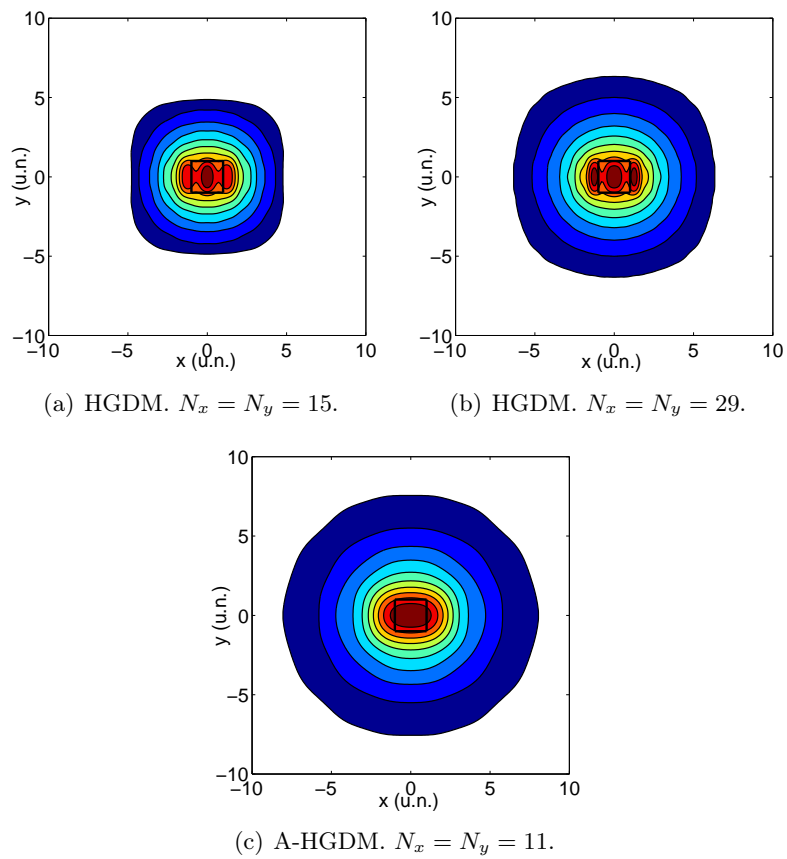


Figura 4.21: Análisis Vectorial de la Guía Rectangular. Distribución transversal de campo de la componente dominante del primer modo. $V_x = V_y = 1$, $n_f = 1,5$, $n_s = 1,2$.

4.4. Conclusiones

De forma general, se puede afirmar que la principal limitación de los métodos espectrales basados en el espacio funcional de Hermite-Gauss reside en la ausencia de una transformada rápida similar a la FFT, lo que provoca que los tiempos de cálculo, especialmente para problemas vectoriales, crezcan muy rápidamente con el número de términos. Sólo en aquellos casos en los que se cumpla la hipótesis de partida sobre el parecido entre las funciones base y los modos de la estructura se podrán obtener resultados precisos con un reducido número de términos, haciendo competitivos a esta familia de métodos frente a los basados en el espacio funcional de Fourier. En este capítulo se ha propuesto un método espectral con transformación de variables de tipo lineal y basado en el espacio funcional de Hermite-Gauss, que incorpora una estrategia para la determinación automática de los parámetros óptimos de dicha transformación. De esta forma se consigue adaptar el espacio funcional a las soluciones de campo del problema a resolver, aumentando el parecido entre las funciones base y los modos. Respecto a otras técnicas de optimización existentes en la bibliografía, el nuevo método presenta las siguientes ventajas:

1. Incorpora parámetros de centrado que permiten una mejor adaptación a problemas asimétricos.
2. Reduce el coste computacional asociado al cálculo de los parámetros óptimos, minimizando el número de veces que es necesario formular y resolver el problema de autovalores.

La estrategia de optimización de parámetros propuesta se basa en la minimización del ancho de banda espectral, medido a partir de la función varianza del espectro. Se ha demostrado que la aplicación de este criterio a problemas de análisis modal bajo la aproximación escalar proporciona excelentes resultados, mejorando extraordinariamente la velocidad de convergencia cuando la distribución de campo se encuentra muy expandida. En problemas asimétricos como el acoplador direccional en *rib*, se ha comprobado que el algoritmo de optimización es capaz de determinar los parámetros de centrado óptimos para los diferentes modos de la estructura, lo que contribuye a mejorar la precisión en el cálculo de la longitud de acoplo, un parámetro muy sensible a los errores cometidos en la estimación de las constantes de propagación de dichos modos. Por otro lado, las pruebas que se han llevado a cabo en situaciones vectoriales (todavía muy preliminares) parecen confirmar que la validez de la técnica propuesta no se restringe al caso escalar.

5 El Método de Caracterización Modal Basado en la FFT (FFT-MS)

5.1. Introducción

EL objetivo fundamental de este capítulo es comprobar el buen funcionamiento y evaluar exhaustivamente las prestaciones de la técnica de análisis modal basada en la FFT desarrollada en el epígrafe 3.6.4. Para ello, el método propuesto será aplicado sobre diferentes guías de onda ópticas de gran interés práctico, como guías *rib* o fibras de cristal fotónico (*Photonic Crystal Fiber* (PCF)). Como es bien sabido, la caracterización modal precisa de este tipo de estructuras requiere el uso de herramientas numéricas de simulación completamente vectoriales y de gran eficiencia computacional, por lo que han sido frecuentemente utilizadas como banco de pruebas de las diferentes técnicas de análisis modal que han sido publicadas en la bibliografía a lo largo de los últimos años. Aprovechando esta circunstancia, los resultados obtenidos con el método propuesto, al que en lo sucesivo se hará mención con las siglas FFT-MS (*Fast Fourier Transform Based Mode Solver*), serán comparados siempre que sea posible con los proporcionados en referencias bibliográficas recientes.

5.2. Validación Preliminar del FFT-MS

Antes de aplicar el FFT-MS a problemas realistas, conviene realizar una validación preliminar de la técnica propuesta sobre estructuras más sencillas, de forma que el buen funcionamiento de la misma quede garantizado desde el primer momento. En este análisis se pretende también poner de manifiesto la importancia de fijar adecuadamente los parámetros numéricos de simulación del FFT-MS, lo que evidentemente va resultar crítico cuando se requieran precisiones elevadas en problemas vectoriales de guiado fuerte. Para llevar a cabo este estudio preliminar, se han escogido dos guías ópticas típicas como las que se muestran en la figura 5.1:

1. Fibra circular de salto de índice: Dispone de solución analítica con la que cuantificar la precisión de los resultados obtenidos. Además, pese a presentar una geometría espacial muy simple, su análisis numérico en situaciones de muy alto contraste ($n_{co} \gg n_{clad}$) y frecuencias de trabajo relativamente bajas puede llegar a ser muy complicado, debido al carácter discontinuo de las distribuciones transversales de campo eléctrico de los modos que soporta la estructura en esos casos.
2. Fibra de cristal fotónico de núcleo sólido y agujeros circulares de aire: Las PCF se caracterizan por presentar un perfil de índice de refracción mucho más complejo desde el punto de vista espacial que las fibras de salto de índice convencionales. Sin embargo, en muchas ocasiones las distribuciones transversales de campo de sus modos son prácticamente continuas, ya que están muy confinadas en la zona central de guiado y apenas penetran en los agujeros de aire. Se trata por tanto de una estructura de prueba complementaria a la anterior, ya que por un lado la

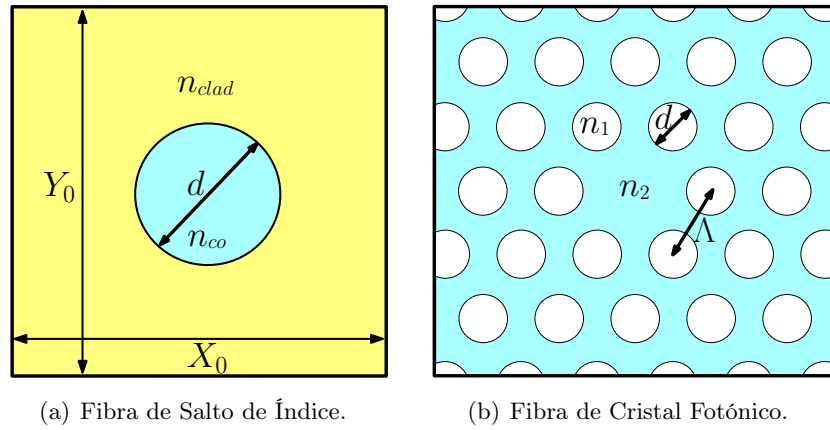


Figura 5.1: Perfiles de índice de refracción de las guías analizadas en esta sección.

geometría del índice de refracción que la define es mucho más compleja y por otro la distribución transversal de campo de los modos que soporta se puede considerar casi continua¹.

5.2.1. Parámetros Numéricos Relevantes

A modo de resumen de los conceptos explicados en detalle en la sección 3.6, se enumeran a continuación los parámetros numéricos más relevantes del método propuesto:

- **Tamaño de la ventana de cómputo ($X_0 \times Y_0$):** En problemas bidimensionales la ventana de cómputo es una región rectangular que, dado el carácter periódico del espacio funcional de Fourier, va a determinar la periodización de la geometría del problema que se desea analizar y por tanto también de las soluciones obtenidas. Como regla general, la ventana de cómputo se debe escoger de forma que el solapamiento espacial (*aliasing*) entre las soluciones correspondientes a periodos adyacentes sea mínimo. En la práctica este requerimiento es equivalente a garantizar que la solución de campo en los extremos de la ventana de cómputo se encuentre por debajo de una determinada cota, de manera que pueda considerarse despreciable.
- **Número de armónicos ($N = N_x \times N_y$):** Para una ventana de cómputo dada, el número de armónicos que se debe utilizar en el desarrollo en serie debe ser lo suficientemente alto como para asegurar que se están considerando todas las componentes espectrales relevantes de la distribución de campo que se desea calcular.
- **Número de puntos de discretización espacial ($M = M_x \times M_y$):** En métodos con resolución espacial uniforme como el que se propone en esta Tesis, la densidad de mallado para una ventana de cómputo fija viene determinada exclusivamente por el número de puntos de muestreo. Este número se debe escoger de forma que se garantice que: i) la discretización espacial del problema sea lo suficientemente densa como para representar fielmente su geometría; ii) el solapamiento espectral asociado a la periodización del espectro sea prácticamente despreciable.

¹Evidentemente, esta afirmación depende de la longitud de onda de trabajo y de los parámetros geométricos que definen la PCF. Para el caso que se estudiará en el epígrafe 5.2.3, estos valores han sido escogidos ex-profeso con ese propósito.

Llegados a este punto es importante destacar que, como ocurre en cualquier otro método numérico, la precisión de los resultados obtenidos va a estar condicionada por el parámetro de simulación más limitante. Por ejemplo, de nada sirve aumentar el número de armónicos o refinar la discretización transversal de la estructura si el *aliasing* espacial asociado al tamaño finito de la ventana de cómputo ocasiona un error de orden superior al del resto de parámetros numéricos.

5.2.2. Análisis de una Fibra de Salto de Índice

La fibra circular de salto de índice, al disponer de una solución analítica bien conocida, resulta muy adecuada para llevar a cabo una primera validación de cualquier método numérico de caracterización modal. El estudio que se presenta a continuación se ha centrado en el análisis del modo fundamental de una guía circular de índice de refracción $n_{co} = 1,5$ y diámetro $d = 1,22 \mu\text{m}$ rodeada de aire ($n_{clad} = 1$), a una longitud de onda de trabajo $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$. Como referencia, en las figuras 5.2 y 5.3 se han representado respectivamente, para la solución analítica del modo fundamental con polarización horizontal, la distribución espacial de campo eléctrico y sus coeficientes espectrales. A la vista de estas gráficas y antes de comenzar con las simulaciones numéricas, se puede adelantar que:

- El elevado salto de índice de refracción provoca que, a la longitud de onda de trabajo, la discontinuidad de campo eléctrico en el interfaz núcleo-cubierta sea relevante (ver figuras 5.2(a)-(b)).
- La distribución espacial de campo no se encuentra demasiado confinada en la zona del núcleo, lo que tendrá implicaciones a la hora de elegir la ventana de cómputo. Por ejemplo, y tal como se muestra en la figura 5.2(b), para $x \approx \pm 2,4 \mu\text{m}$ (unas cuatro veces el núcleo), el módulo del campo es del orden de $7 \cdot 10^{-4}$, magnitud que desciende hasta $3,5 \cdot 10^{-5}$ para $x \approx \pm 3,3 \mu\text{m}$.
- El ancho de banda espectral de la solución modal es relativamente elevado, lo que evidentemente está muy relacionado con el hecho de que la distribución espacial de campo sea discontinua. Los cuadrados de trazo discontinuo dibujados sobre el espectro bidimensional representado en la figura 5.3(a) delimitan las zonas que es necesario considerar en el desarrollo en serie para tener en cuenta el 90 %, 95 % y 99 % de la energía del modo, lo que implica utilizar respectivamente 32, 64 y 192 armónicos en cada dirección.
- Por último, destacar que la velocidad de decaimiento de los coeficientes espectrales $\Phi_x^{(m,n)}$ no es igual en cada una de las dos direcciones transversales. Como era de esperar, éstos decaen mucho más lentamente con el índice m que con n (ver figura 5.3(b)), ya que la distribución espacial de campo es discontinua según x pero continua según y .

En la figura 5.4 se muestran las distribuciones espaciales de campo eléctrico obtenidas con el FFT-MS cuando se utilizan $N = 32 \times 32$ y $N = 128 \times 128$ armónicos respectivamente, para una ventana de cómputo en apariencia lo suficientemente grande ($4,8 \times 4,8 \mu\text{m}^2$) y un número de puntos de discretización espacial extraordinariamente elevado, $M = 512 \times 512$. Con estos parámetros numéricos, el error relativo cometido en la evaluación del índice efectivo ($N_{\text{eff}} = \beta/k_0$) ha sido en cada caso de $-2,5 \cdot 10^{-4}$ y $-1,7 \cdot 10^{-4}$. A partir de estos resultados, parece razonable plantear las siguientes cuestiones:

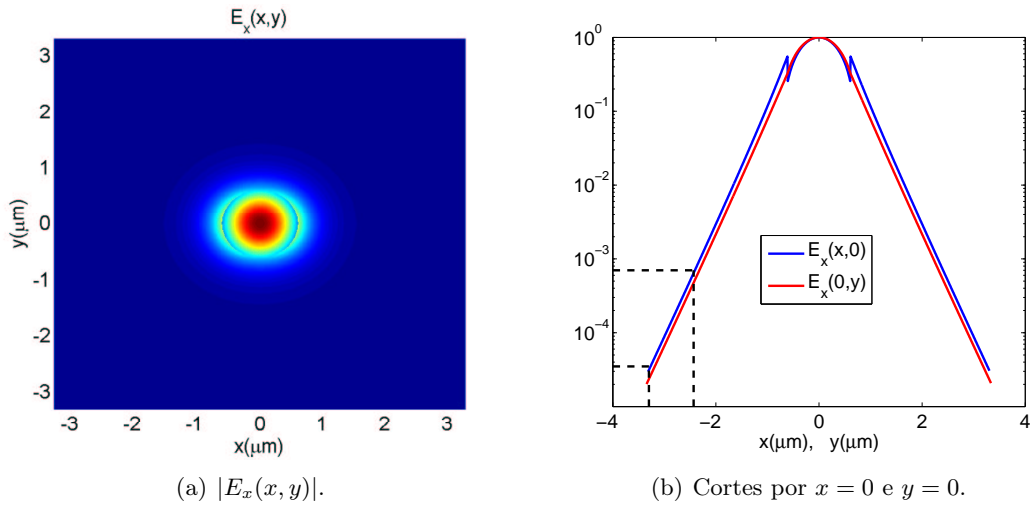


Figura 5.2: Fibra de Salto de Índice. Distribución transversal de campo eléctrico del modo fundamental con polarización horizontal (Solución Analítica).

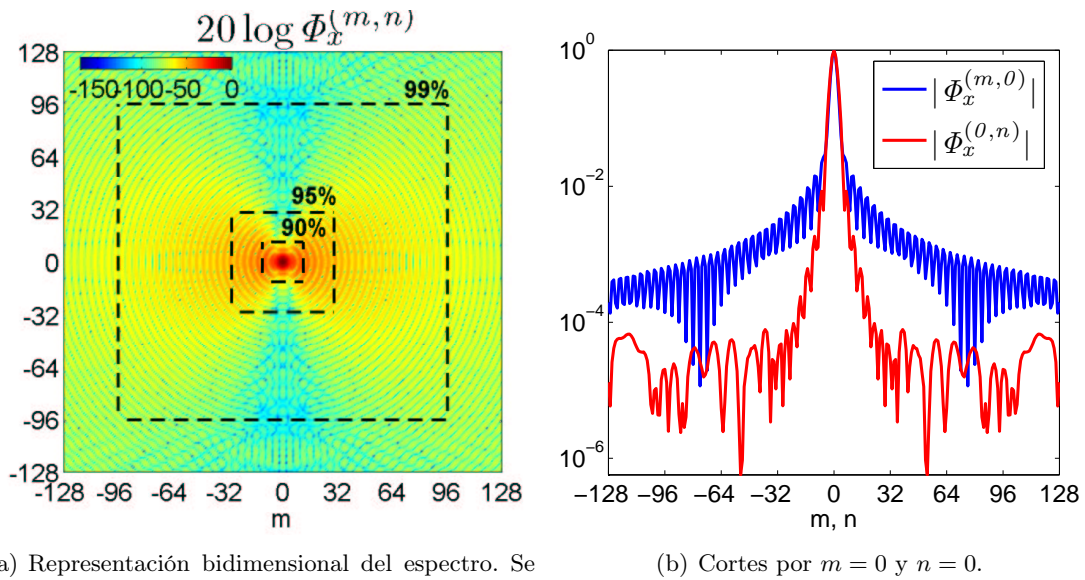


Figura 5.3: Fibra de Salto de Índice. Coeficientes espectrales de la distribución de campo eléctrico del modo fundamental con polarización horizontal (Solución Analítica).

1. Como era de esperar, el incremento en el número de armónicos mejora claramente la distribución espacial de campo obtenida en las proximidades de la discontinuidad. Sin embargo, ¿por qué el error cometido en la evaluación del N_{eff} no disminuye significativamente pese a haber cuadruplicado el número de armónicos en cada dirección transversal?
2. Por otro lado, y teniendo en cuenta que en este caso se ha utilizado un malla espacial extraordinariamente fina, cabe preguntarse también, ¿hasta que punto es

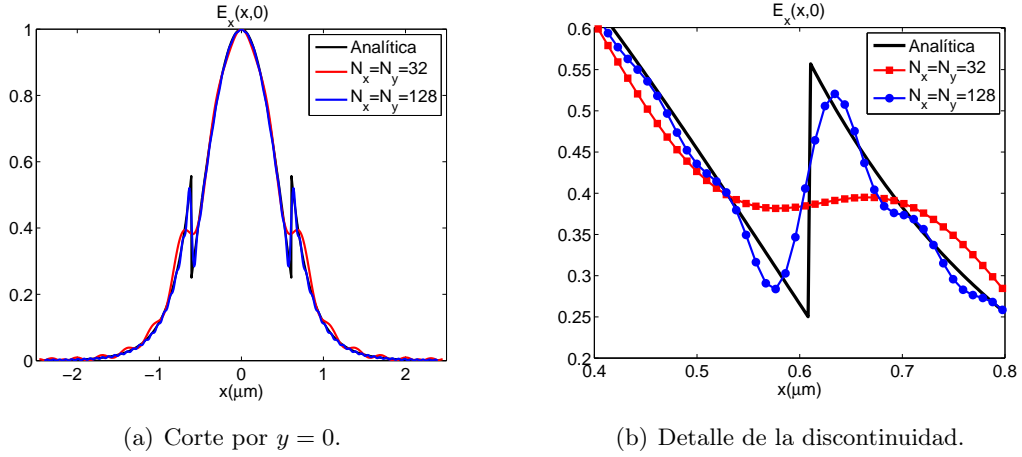


Figura 5.4: Fibra de Salto de Índice. Distribución transversal de campo eléctrico del modo fundamental con polarización horizontal. $M_x = M_y = 512$, $X_0 = Y_0 = 4,8 \mu\text{m}$.

posible disminuir M sin que afecte a la precisión de los resultados obtenidos?

Para responder a estas preguntas, en la figura 5.5(a) se han representado las curvas de convergencia con el número de armónicos del error relativo cometido en la evaluación del índice efectivo, parametrizadas para diferentes valores de M y dejando el tamaño de ventana fijo e igual a $4,8 \times 4,8 \mu\text{m}^2$. A la vista de estos resultados, resulta evidente que el parámetro numérico más crítico de los aquí analizados es el número de puntos de discretización transversal M , ya que garantizado un valor mínimo ($M \geq 400 \times 400$) la convergencia con el número de armónicos N es extraordinariamente rápida. Por otro lado, también conviene destacar que existe una cota de error, situada aproximadamente en $-1,5 \cdot 10^{-4}$, que no es posible mejorar por más que se aumenten M o N . Este hecho está directamente relacionado con el tamaño insuficiente de la ventana de cómputo utilizada que, tal y como se muestra en la figura 5.6(a), provoca un *aliasing* apreciable en la distribución espacial de campo. Por lo tanto, si se desea mejorar la exactitud de los resultados obtenidos será necesario definir una ventana de cómputo algo mayor, como por ejemplo la utilizada para calcular la distribución de campo representada en la figura 5.6(b). En este caso el *aliasing* espacial se ha reducido en casi un orden de magnitud respecto a la ventana de menor tamaño, lo que se debe traducir en una mejora apreciable de la cota de error. Esta predicción se confirma en las curvas de convergencia incluidas en la figura 5.5(b), que ponen claramente de manifiesto la importancia de trabajar con una ventana de cómputo de tamaño suficiente y con un número de puntos de discretización espacial elevado. Una vez fijados estos parámetros a valores adecuados, la convergencia con el número de armónicos es razonablemente rápida teniendo en cuenta el carácter discontinuo de la distribución de campo, lo que permite alcanzar finalmente cotas de error relativo en el índice efectivo inferiores a 10^{-6} . En este sentido el método propuesto en esta Tesis [Ortega2006], [Ortega2007] es claramente superior a otras técnicas de análisis modal basadas en la FFT publicadas previamente en la bibliografía [Johnson2001], [Silvestre2005], ya que permite elegir de forma independiente el número de armónicos y la resolución espacial².

²Para una estrategia de mado uniforme, la resolución espacial en cada una de las direcciones transversales se puede definir como: $\Delta x = X_0/M_x$ y $\Delta y = Y_0/M_y$.

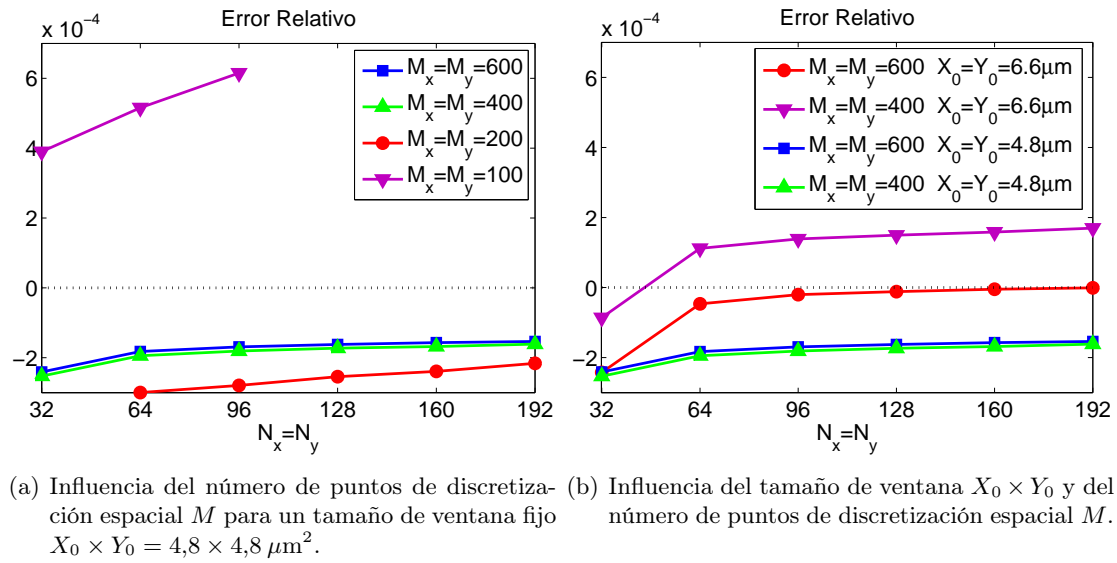


Figura 5.5: Fibra de Salto de Índice. Error relativo del N_{eff} en función de N .

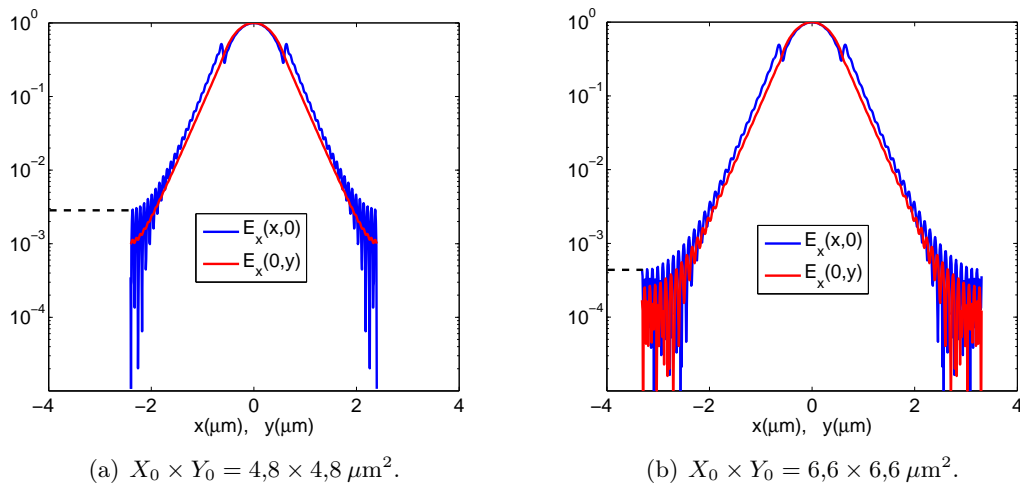


Figura 5.6: Fibra de Salto de Índice. Distribución transversal de campo eléctrico del modo fundamental con polarización horizontal (Cortes por $x = 0$ e $y = 0$). $N_x = N_y = 192$, $M_x = M_y = 600$.

5.2.3. Análisis de una Fibra de Cristal Fotónico

En una fibra de cristal fotónico de núcleo sólido como la que se muestra en la figura 5.1(b), el mecanismo de guiado de la luz es similar al que se produce en una fibra de salto de índice como la analizada anteriormente, basándose por tanto en el principio de reflexión total. Debido a que la región que rodea a la zona central está formada por una combinación de agujeros de aire ($n_1 = 1$) y Dióxido de Silicio (*Silica*, $n_2 = 1,46$), su índice de refracción medio es algo inferior al de este material, actuando de forma parecida a la cubierta en una fibra óptica convencional. La diferencia es que ahora, optimizando el tamaño y la posición de los agujeros de aire, se pueden conseguir características muy diferentes a las que proporciona cualquier cubierta homogénea en una fibra convencional.

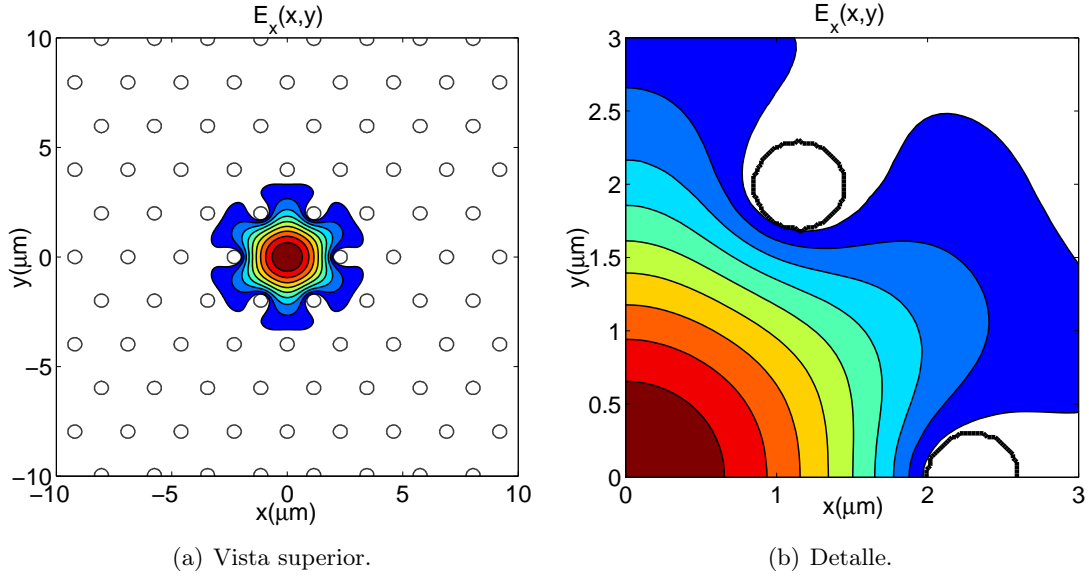


Figura 5.7: Fibra de Cristal Fotónico. Distribución transversal de campo eléctrico del modo fundamental con polarización horizontal. $N_x = N_y = 256$, $M_x = M_y = 300$.

De hecho, la región de *Silica* con agujeros de aire se comporta en la práctica como un dieléctrico artificial [Collin1990], cuyas características quedan determinadas básicamente por los parámetros geométricos que la definen y que para la PCF representada en la figura 5.1(b) se reducen a dos: el diámetro de los agujeros d y su separación Λ .³ Escogidos de la forma adecuada, estos parámetros geométricos proporcionan una versatilidad que es imposible conseguir con las fibras convencionales en cuanto a la dispersión modal [Silvestre2005], la birrefringencia [Ortigosa2000], el área efectiva de la distribución transversal de campo [Obayya2005] o el régimen de funcionamiento monomodo [Saitoh2005].

En este caso se ha decidido analizar una PCF formada por agujeros de aire de diámetro $d = 0,6 \mu\text{m}$, separados una distancia $\Lambda = 2,3 \mu\text{m}$ y para una longitud de onda de trabajo $\lambda = 0,46 \mu\text{m}$. Con estos datos y utilizando $N = 128 \times 128$ armónicos y $M = 300 \times 300$ puntos de discretización espacial, la distribución de campo eléctrico obtenida para la componente dominante del modo fundamental con polarización horizontal es la que se muestra en la figura 5.7. Es importante destacar que, a diferencia de lo que ocurría con la fibra de salto de índice analizada anteriormente, ahora la distribución espacial de campo eléctrico es prácticamente continua, por lo que su ancho de banda espectral va a ser menor. Evidentemente, esto va a tener una influencia directa en la velocidad de convergencia, que en este caso será algo más rápida. En la figura 5.8 se muestra, para tres valores diferentes de M , la evolución del error cometido en el cálculo del índice efectivo en función del número de armónicos. Al carecer esta estructura de solución analítica, se ha utilizado como valor de referencia $N_{\text{eff}}^{\text{ref}} = 1,458242$, que se corresponde con el obtenido para $N = 256 \times 256$ armónicos y $M = 300 \times 300$ puntos de discretización transversal. A partir de estos resultados se deben realizar las siguientes consideraciones:

- La curva correspondiente a $M = 100 \times 100$ puntos de discretización transversal

³Se debe tener en cuenta que existen geometrías mucho más complicadas que la representada en esta figura, que permiten incorporar grados de libertad adicionales utilizando, por ejemplo, agujeros de diferentes tamaños o modificando la posición de éstos alrededor de la zona central.

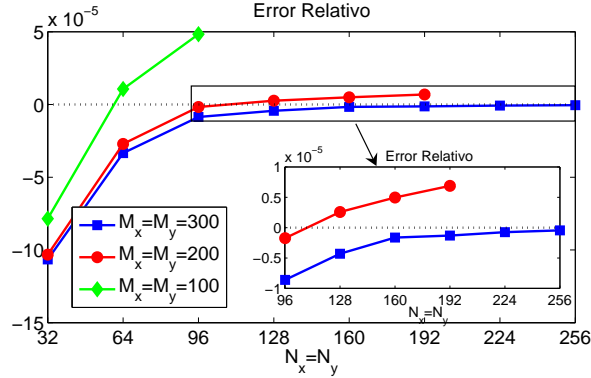


Figura 5.8: Fibra de Cristal Fotónico. Error relativo del N_{eff} en función de N , para diferentes valores de M .

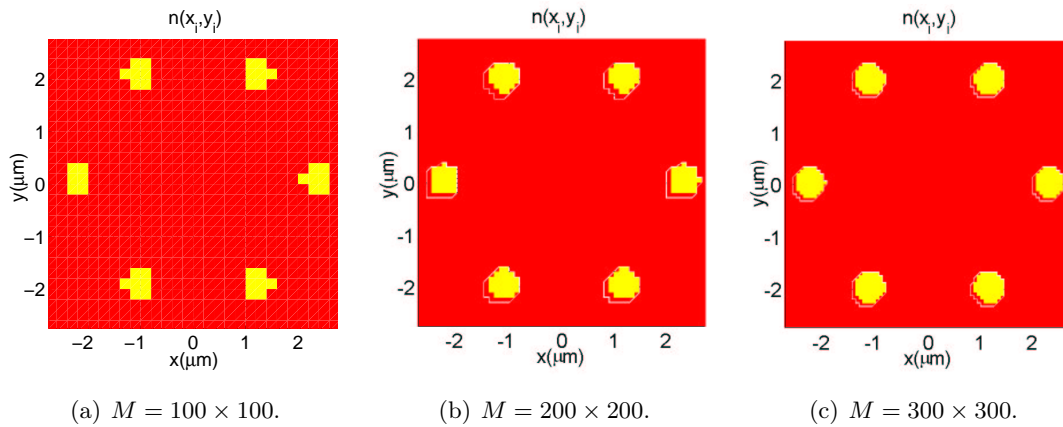


Figura 5.9: Fibra de Cristal Fotónico. Índice de refracción discretizado (ampliación de la zona central) para diferentes valores de M .

muestra una absoluta falta de convergencia, lo que refleja claramente que la densidad de mallado espacial es insuficiente. Esta situación se pone de manifiesto de forma evidente en la figura 5.9(a), en la que se ha dibujado una ampliación de la zona central del índice de refracción discretizado $n(x_i, y_i)$.

- Cuando M se incrementa hasta alcanzar 200 puntos en cada dirección, la convergencia mejora considerablemente, alcanzándose una cota de error inferior a 10^{-5} para $N \geq 96 \times 96$ armónicos. En este caso la densidad de mallado alcanza los diez puntos por micrómetro, lo que proporciona una representación razonablemente buena de los agujeros de aire (figura 5.9(b)).
- Para $M = 300 \times 300$ puntos y $N \geq 192 \times 192$ armónicos se consigue un error en la evaluación del N_{eff} por debajo de $2 \cdot 10^{-6}$, prácticamente del orden de la tolerancia empleada en la rutina iterativa de cálculo del problema de autovalores. La representación del índice de refracción discretizado para este mallado transversal se muestra en la figura 5.9(c).

Finalmente resulta imprescindible hacer referencia a la influencia de los parámetros numéricos en el coste computacional de las simulaciones. En la tabla 5.1 se han incluido,

N	M	Error	Tiempo
32×32	200×200	$\approx 10^{-4}$	7 s
96×96	200×200	$\approx 10^{-5}$	22 s
192×192	300×300	$\approx 2 \cdot 10^{-6}$	176 s
256×256	300×300	$< 10^{-6}$	347 s

Tabla 5.1: Fibra de Cristal Fotónico. Precisión en la evaluación del N_{eff} y tiempos de cómputo.

para un conjunto de valores de M y N significativo, la precisión de las soluciones obtenidas⁴ y los correspondientes tiempos de cálculo. Como era de esperar, el coste de las simulaciones crece muy rápidamente con ambos parámetros numéricos, lo que en la práctica implica multiplicar por cincuenta el tiempo de cómputo si se desea mejorar la precisión de 10^{-4} a 10^{-6} .

5.2.4. Necesidad de las Condiciones de Contorno PML

El objetivo de este epígrafe es justificar de forma intuitiva la necesidad de utilizar condiciones de contorno absorbentes perfectamente adaptadas (PML) para realizar el análisis modal de determinadas estructuras ópticas, como por ejemplo la fibra de cristal fotónico con un número finito de agujeros de aire representada en la figura 5.10(a). Es un hecho conocido que en este tipo de guías todos los modos son inherentemente *leaky* [Saitoh2005],[Obayya2005], ya que a medida que se propagan pierden parte de su energía por radiación hacia la región de la cubierta, cuyo índice de refracción es el mismo que el de la zona de guiado. En el caso de las fibras de cristal fotónico estas pérdidas reciben el nombre de *pérdidas por confinamiento* y no deben confundirse ni con las de *absorción del material* ni con las de *scattering*.

Tal y como se muestra en la figura 5.10(b), el conjunto de soluciones de la ecuación de análisis modal de este tipo de estructuras difiere del que se presentó en el epígrafe 2.3.1, ya que ahora todos los autovalores se introducen en el plano complejo. La relación entre cada autovalor λ_m y la constante de propagación compleja γ_m del modo correspondiente viene dada por la siguiente expresión

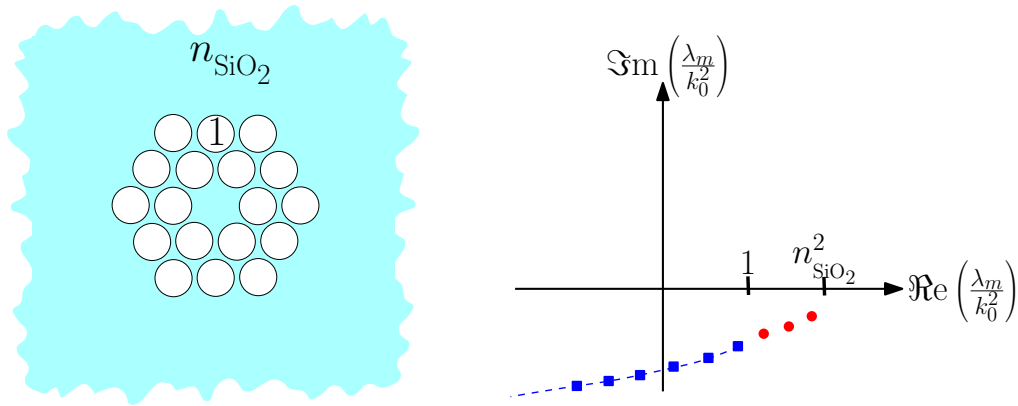
$$\lambda_m = -\gamma_m^2 = -(\alpha_m + j \cdot \beta_m)^2 = (\beta_m^2 - \alpha_m^2) - 2 \cdot \alpha_m \cdot \beta_m \cdot j \quad (5.1)$$

donde β_m es la constante de fase del modo m -ésimo y α_m su factor de pérdidas, que despejando de la ecuación anterior queda

$$\alpha_m = \frac{\Im m(\lambda_m)}{-2 \cdot \beta_m} \quad (5.2)$$

En un problema numérico de análisis modal, en el que el tamaño de la ventana de cómputo ha de ser necesariamente finito, la función más evidente de las PML es absorber la radiación saliente e impedir que ésta llegue a los extremos de dicha ventana falseando los resultados obtenidos. Como se pondrá de manifiesto en el epígrafe 5.4.3, una selección adecuada de los parámetros que definen las PML permitirá realizar estimaciones muy precisas de las pérdidas por confinamiento.

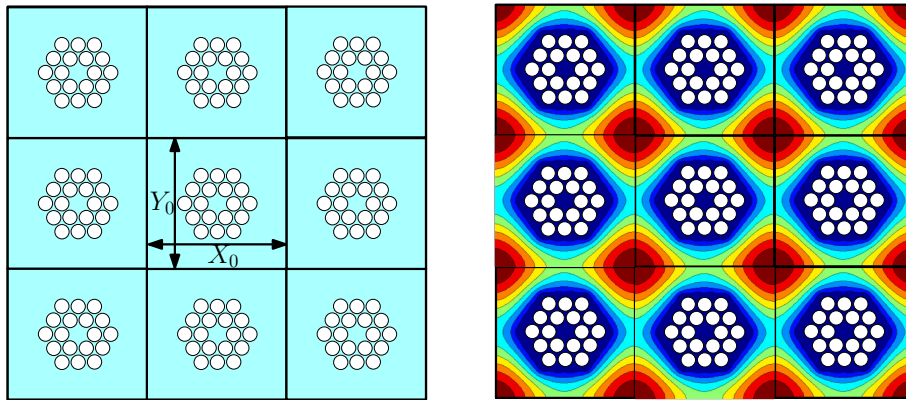
⁴Por conveniencia, en este caso el error se ha definido respecto al valor final de convergencia para cada discretización espacial.



(a) Perfil de índice de refracción de una PCF compuesta por dos anillos de agujeros de aire. (b) Representación esquemática del espectro complejo de soluciones del problema de autovalores.

Figura 5.10: Fibra de Cristal Fotónico con un número finito de agujeros de aire.

Por otro lado, en el FFT-MS las PML cumplen con una función adicional: facilitar la selección de los modos guiados durante el proceso iterativo de cálculo de autovalores. Como ya se explicó anteriormente, las condiciones de periodicidad del espacio funcional de Fourier fuerzan a su vez la periodización del problema. Esto quiere decir que, para el caso de una PCF con un número finito de agujeros de aire como la que nos ocupa, la estructura que realmente se resuelve es la que se muestra en la figura 5.11(a), compuesta por la repetición en ambas direcciones transversales y con periodo $X_0 \times Y_0$ de la guía original. En el caso de que no se introduzcan condiciones de contorno PML, los autovalores del problema periodizado no se van a corresponder con los representados en la figura 5.10(b), ya que al tratarse de una estructura periódica y sin pérdidas van a ser todos reales. En la figura 5.11(b) se muestra la distribución transversal de campo del modo fundamental de la estructura periodizada. Evidentemente, ésta es una solución espuria que aparece como resultado de las condiciones de contorno periódicas utilizadas, y carece de sentido físico para la estructura aislada de la figura 5.10(a). Sin embargo, al encontrarse el campo claramente confinado en las esquinas de la ventana de cómputo y no penetrar apenas en los agujeros de aire, su autovalor es mayor que el correspondiente a la solución del modo guiado de la PCF original. Afortunadamente, la utilización de las PML introduce el espectro de soluciones en el plano complejo y va a permitir diferenciar fácilmente las soluciones físicas de las espurias. En la estructura periodizada y con condiciones de contorno absorbentes, los modos guiados presentan en general un factor de pérdidas α mucho menor que el de las soluciones no-físicas, lo que permite seleccionarlos haciendo que la rutina iterativa de cálculo de autovalores encuentre sólo aquellos con mayor parte imaginaria (más próxima a cero).



(a) Perfil de índice de refracción periodizado. (b) Solución del problema periodizado.

Figura 5.11: Efectos del carácter periódico del espacio funcional de Fourier.

5.3. Análisis Modal de la Guía Rib

La guía *rib*, cuya geometría se representa en la figura 5.12, es una de las estructuras más frecuentemente usadas en el campo de la óptica para implementar dispositivos de gran interés práctico, como guías de interconexión, acopladores direccionales o dispositivos de interferencia multimodal (MMI). Por otro lado, esta guía es también utilizada de forma habitual como estructura de prueba para analizar el rendimiento de los diferentes métodos de simulación de dispositivos ópticos que aparecen continuamente en la bibliografía [Maruyama1994], [Vassallo1997], [Selleri2001], [Lou2003], [Hugonin2005], [Wik2005], [Ortega2006].

5.3.1. Caracterización Modal de la Guía Rib: Materiales Sin Pérdidas

En la figura 5.13 se representa la distribución espacial de campo de los dos primeros modos que soporta la estructura para $D = h = 0,5 \mu\text{m}$ y $\lambda = 1,15 \mu\text{m}$. Obviamente, el tamaño de la ventana de cómputo utilizada en la simulación es sensiblemente mayor a la que se muestra en estas representaciones gráficas ($9 \times 4 \mu\text{m}^2$ frente a $6 \times 3 \mu\text{m}^2$), ya que sólo de esta forma se puede garantizar que el *aliasing* espacial sea prácticamente despre-

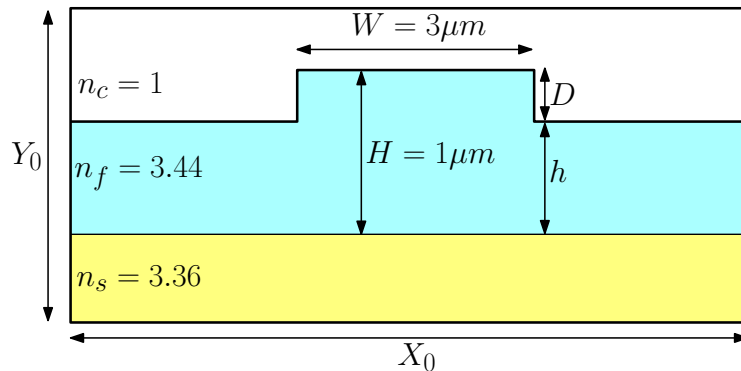


Figura 5.12: Guía Rib. Definición de la geometría.

	$D = 0,2 \mu\text{m}$	$D = 0,5 \mu\text{m}$	$D = 0,8 \mu\text{m}$
Quasi-TE	$3,86 \mu\text{m}^2$	$2,75 \mu\text{m}^2$	$2,44 \mu\text{m}^2$
Quasi-TM	$3,83 \mu\text{m}^2$	$2,81 \mu\text{m}^2$	$2,52 \mu\text{m}^2$

Tabla 5.2: Guía *Rib*. Área efectiva de los dos primeros modos para diferentes profundidades de grabado.

ciable. Por otro lado, tanto el número de armónicos como el de puntos de discretización transversal ($N = 128 \times 128$ y $M = 256 \times 256$ respectivamente) se han escogido lo suficientemente elevados como para que se pueda considerar que la solución ha convergido. A la vista de estos resultados, resulta conveniente hacer notar que:

- Ambos modos son casi-linealmente polarizados, por lo que recibirán en adelante el nombre de modos Quasi-TE ($E_x \gg E_y$) y Quasi-TM ($E_y \gg E_x$) respectivamente.
- La distribución espacial de campo de la componente fundamental se encuentra claramente confinada bajo el *rib*, extendiéndose de forma apreciable por la zona del substrato y prácticamente nada por la cubierta. Este comportamiento se debe a que el salto de índice de refracción núcleo-cubierta es muy alto en comparación con el existente en el interfaz núcleo-substrato.
- La componente minoritaria se encuentra muy concentrada en las proximidades de las esquinas situadas en $(x, y) = (\pm 1, 5 \mu\text{m}, 1 \mu\text{m})$.

En la figura 5.14 se muestra el efecto sobre la distribución transversal de campo de reducir la profundidad de grabado hasta $D = 0,2 \mu\text{m}$, manteniendo constante la altura de la capa de Silicio ($H = 1 \mu\text{m}$). En comparación con la situación anterior, la principal diferencia se encuentra en el grado de confinamiento de los campos en la dirección horizontal. Los modos siguen siendo casi-linealmente polarizados y su componente fundamental se sitúa en su mayor parte bajo el *rib*, pero ahora se extienden mucho más por la zona del *slab*, que en este caso es considerablemente más ancha ($h = 0,8 \mu\text{m}$). Se debe ser por tanto muy cuidadoso a la hora de escoger el tamaño de la ventana de cómputo, ya que cualquier variación en la geometría de la estructura puede influir decisivamente en el grado de confinamiento de la distribución de campo y por consiguiente en el nivel de *aliasing* espacial en los extremos de dicha ventana. Una forma habitual de medir el grado de confinamiento de las distribuciones de campo es el área efectiva (A_{eff}), que se puede definir como [Agrawal1995], [Saitoh2005]

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\iint_{\Omega} |\mathbf{E}_t|^2 dx dy \right)^2}{\iint_{\Omega} |\mathbf{E}_t|^4 dx dy} \quad (5.3)$$

donde \mathbf{E}_t representa la distribución transversal de campo eléctrico y Ω se corresponde con la ventana de cómputo.

La evaluación de esta expresión para tres valores diferentes de D conduce a los resultados mostrados en la tabla 5.2, que confirman claramente la idea de que el grado de confinamiento de los modos aumenta con la profundidad de grabado.

Para realizar un análisis cuantitativo de la precisión de los resultados obtenidos y teniendo en cuenta que esta estructura carece de solución analítica, se ha decidido utilizar como

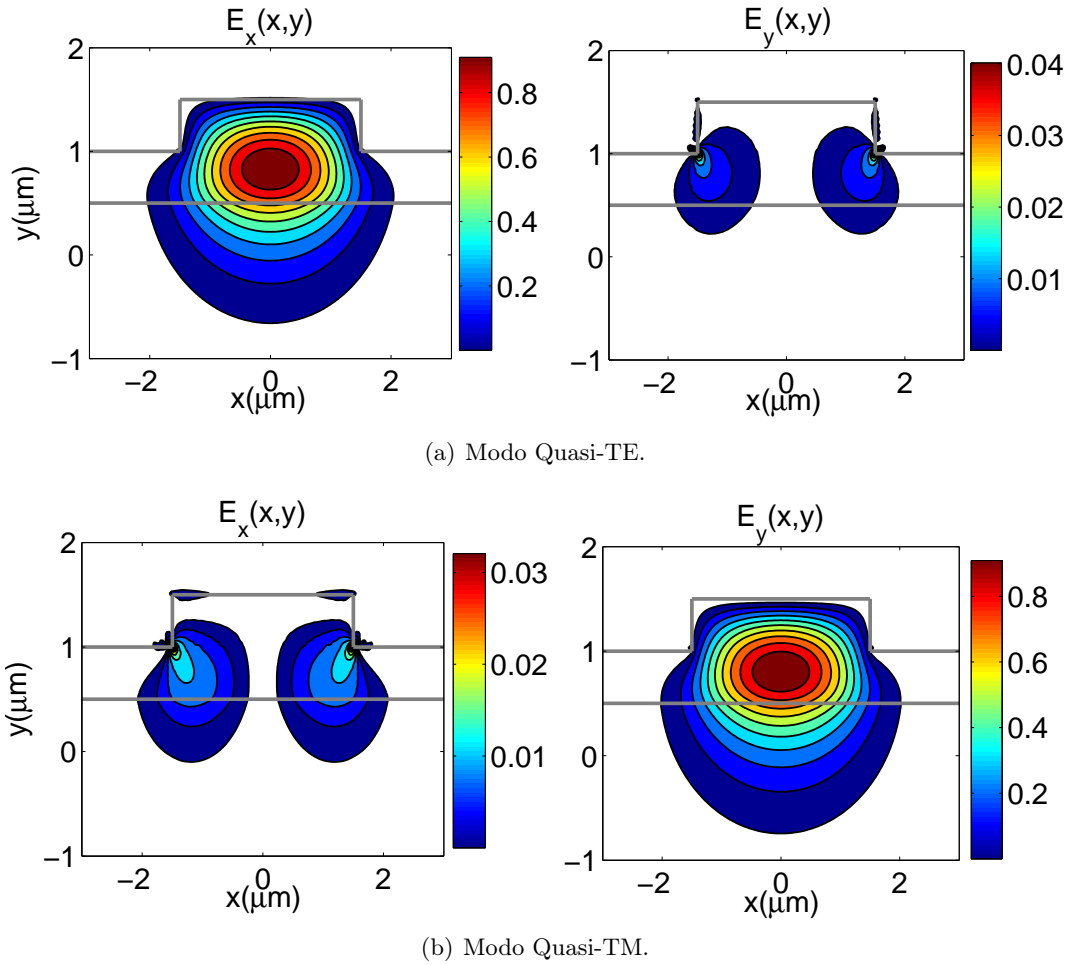


Figura 5.13: Guía Rib. Distribución transversal de campo eléctrico de los dos primeros modos. $D = 0,5 \mu\text{m}$. $N = 128 \times 128$, $M = 256 \times 256$.

referencia los valores de N_{eff} incluidos en trabajos publicados previamente en la bibliografía. En concreto, la tabla 5.3 compara los resultados calculados utilizando el FFT-MS con los que se proporcionan en [Maruyama1994] (*Vectorial Finite Element Method with Mixed Elements (V-FEM)*) y en [Lou2003] (*Vectorial Boundary Element Method (V-BEM)*). Se puede comprobar como en todos los casos el método propuesto consigue el mismo nivel de precisión que el resto de técnicas (en torno a cinco cifras significativas), lo que es coherente con el grado de exactitud al que se hace referencia en otros trabajos más recientes [Hugonin2005].

5.3.2. Caracterización Modal de la Guía Rib: Materiales Con Pérdidas

Hasta ahora, en todas las pruebas realizadas se han considerado exclusivamente dieléctricos sin pérdidas, esto es, definidos por índices de refracción cuya parte imaginaria es igual a cero. Sin embargo, el método propuesto es capaz también de analizar directamente estructuras que incluyan materiales con pérdidas, para lo cual basta con definir el perfil de índice de refracción adecuadamente. El funcionamiento del FFT-MS en estas situaciones se ha verificado analizando una guía rib similar a la referida anteriormente,

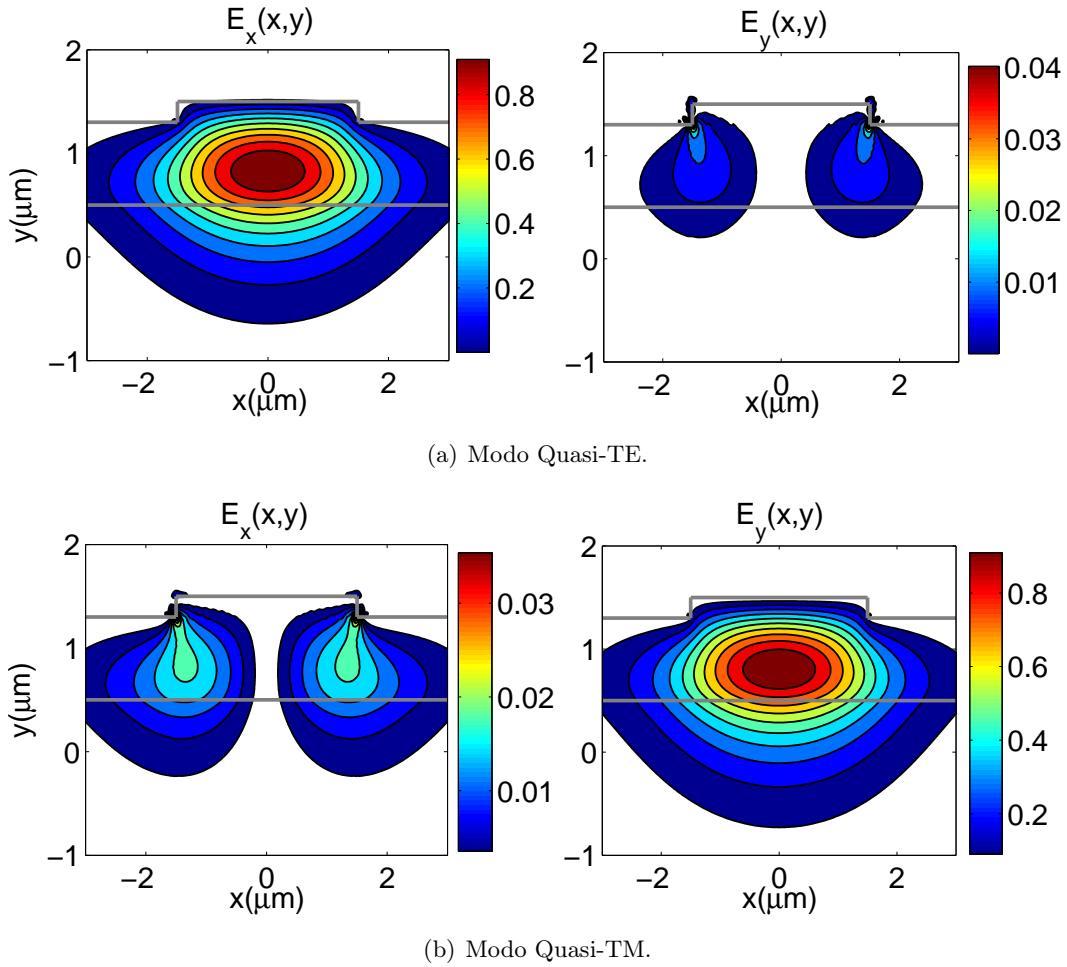


Figura 5.14: Guía *Rib*. Distribución transversal de campo eléctrico de los dos primeros modos. $D = 0,2 \mu\text{m}$. $N = 128 \times 128$, $M = 256 \times 256$.

$D(\mu\text{m})$	FFT-MS $N_x = N_y = 64$	FFT-MS $N_x = N_y = 128$	V-BEM [Lou2003]	V-FEM [Maruyama1994]
Quasi-TE				
0,2	3,41217	3,41227	3,41226	3,41219
0,5	3,41299	3,41310	3,41314	3,41307
0,8	3,41465	3,41474	3,41471	3,41475
Quasi-TM				
0,2	3,41082	3,41088	3,41085	3,41064
0,5	3,41151	3,41158	3,41161	3,41142
0,8	3,41310	3,41311	3,41304	3,41300

Tabla 5.3: Guía *Rib*. Índice efectivo obtenido para diferentes profundidades de grabado.

con una profundidad de grabado $D = 0,5 \mu\text{m}$ y un índice de refracción en la zona de guiado $n_f = 3,44 - j \cdot \Im\text{m}(n_f)$. A partir de los resultados obtenidos, que se muestran en

las tablas 5.4 y 5.5, se puede concluir que:

- Como era de esperar, cuando el nivel de pérdidas del material es muy bajo ($\Im m(n_f) = 0,001$), la parte real del índice efectivo apenas difiere de la presentada en la tabla 5.3, mientras que su parte imaginaria es prácticamente despreciable.
- Por otro lado, para $\Im m(n_f) = 0,1$, la parte real se diferencia del caso sin pérdidas en la segunda cifra decimal, mientras que la imaginaria (directamente relacionada con las pérdidas de propagación del modo) crece considerablemente.
- En todos los casos se puede comprobar que las soluciones calculadas con el FFT-MS son coherentes con las que proporcionan otras técnicas numéricas [Selleri2001] (*Finite Element Method* (FEM)), así como la mejora de precisión a medida que aumenta el número de armónicos empleado en las simulaciones.

$\Im m(n_f)$	FFT-MS $N_x = N_y = 64$	FFT-MS $N_x = N_y = 128$	FFT-MS $N_x = N_y = 200$	FEM [Selleri2001]
Quasi-TE				
0,001	3,412676	3,413093	3,413118	3,413126
0,01	3,412301	3,412732	3,412758	3,412764
0,1	3,403517	3,404260	3,404306	3,404326
Quasi-TM				
0,001	3,411218	3,411595	3,411607	3,411599
0,01	3,410801	3,411190	3,411203	3,411192
0,1	3,403517	3,401453	3,401476	3,401466

Tabla 5.4: Guía Rib. Parte real del índice efectivo para diferentes niveles de pérdidas del material. $D = 0,5 \mu\text{m}$.

$\Im m(n_f)$	FFT-MS $N_x = N_y = 64$	FFT-MS $N_x = N_y = 128$	FFT-MS $N_x = N_y = 200$	FEM [Selleri2001]
Quasi-TE				
0,001	0,00078213	0,00079051	0,00079108	0,00079115
0,01	0,0078980	0,0079788	0,0079842	0,0079870
0,1	0,093596	0,093904	0,093929	0,093948
Quasi-TM				
0,001	0,00075004	0,00075842	0,00075872	0,00075812
0,01	0,0075845	0,0076650	0,0076677	0,0076655
0,1	0,092176	0,092484	0,092495	0,092491

Tabla 5.5: Guía Rib. Parte imaginaria del índice efectivo para diferentes niveles de pérdidas del material. $D = 0,5 \mu\text{m}$.

5.4. Análisis Modal de Fibras de Cristal Fotónico

En esta sección se va a aplicar el FFT-MS a diferentes problemas relacionados con la caracterización modal de fibras de cristal fotónico. Antes de comenzar a presentar resultados, es importante hacer notar que este método no impone ningún tipo de restricción sobre el índice de refracción que define la estructura a analizar. Por este motivo, las rutinas de cálculo implementadas son válidas para analizar tanto estructuras planares como fibras de cristal fotónico. Por la misma razón, no existe dificultad alguna en resolver PCF realistas, definidas por un perfil de índice de refracción irregular que habitualmente difiere del diseñado inicialmente debido a las no-idealidades del proceso de fabricación. Sin embargo, la mayor parte de los resultados que se presentarán a continuación provienen del análisis de estructuras idealizadas, en las que se ha asumido que los agujeros de aire son perfectamente circulares y están situados justo en los vértices de un hexágono regular. Esta forma de actuar se justifica en primer lugar por la necesidad de comparar las soluciones obtenidas con las proporcionadas en trabajos previamente publicados en la bibliografía y que habitualmente se centran en el estudio de este tipo de guías. Por otro lado, hay que tener en cuenta que la caracterización modal precisa de estructuras idealizadas es siempre el primer paso en el proceso de diseño de fibras de cristal fotónico de características optimizadas en cuanto a dispersión, área efectiva, birrefringencia, etc. En la figura 5.15 se muestran esquemáticamente los cuatro tipos de fibras de cristal fotónico que se van a analizar en esta sección. La representada en la figura 5.15(a) es la configuración más básica, ya que todos los agujeros de aire son circulares e iguales entre sí, extendiéndose éstos hasta los límites de la ventana de cómputo. Este modelo es suficiente para obtener la distribución transversal de campo de los modos que soporta la estructura o realizar cálculos precisos de la dispersión o el área efectiva. Sin embargo, en ciertos casos no se corresponde con la situación real, en la que el número de agujeros de aire que rodea a la zona de guiado puede ser muy reducido. En la figura 5.15(b) se muestra una PCF similar a la anterior pero en la que sólo se han incluido dos anillos de agujeros de aire en torno al núcleo. Como ya se adelantó en el epígrafe 5.2.4, gracias a la utilización de condiciones de contorno PML será posible modelar las pérdidas por confinamiento de esta estructura, que como se verá posteriormente son muy dependientes tanto del número de anillos como del tamaño y separación de los agujeros de aire. La figura 5.15(c) representa una fibra de cristal fotónico de tres núcleos, que en este caso se encuentran dispuestos sobre los vértices de un triángulo equilátero de lado $3 \cdot A$. A las longitudes de onda de trabajo típicas esta guía soporta varios modos guiados que interaccionan fuertemente entre sí, por lo que uno de los parámetros que caracterizan su funcionamiento es la longitud de acoplo entre dichos modos. Por último, en la figura 5.15(d) se ha representado el perfil de índice de refracción correspondiente a la implementación física de una PCF de alta birrefringencia cuyos agujeros de aire tienen, al contrario que en los casos anteriores, tamaños y formas muy diferentes.

5.4.1. Análisis de la Dispersión

Una de las principales ventajas de las fibras de cristal fotónico respecto a las fibras de salto de índice convencional reside en la posibilidad de diseñar su respuesta dispersiva prácticamente a voluntad, mediante la optimización de algunos de sus parámetros geométricos. Si se considera una PCF como la representada en la figura 5.15(a), cuyos agujeros de aire son todos circulares e iguales entre sí, sólo se dispone de dos grados de libertad para controlar la dispersión: el diámetro d y la separación A de dichos agujeros.

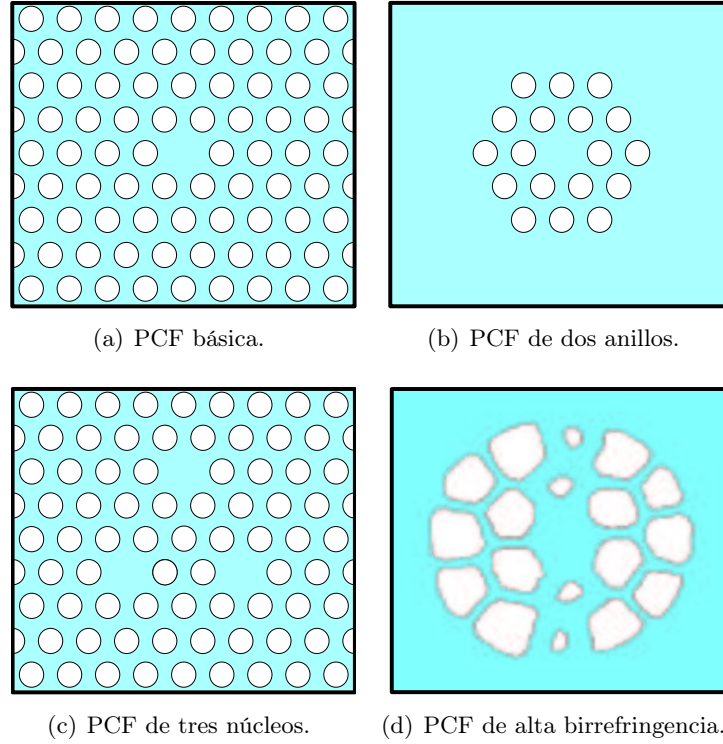


Figura 5.15: Fibra de Cristal Fotónico. Definición de las geometrías analizadas en esta sección.

Afortunadamente, tal y como se demuestra en [Ferrando2001], esto es suficiente para diseñar fibras de cristal fotónico con curvas de dispersión prácticamente planas en un amplio margen de longitudes de onda. En la figura 5.16 se han representado, para dos configuraciones de los parámetros geométricos d y Λ propuestas en esa referencia, las curvas de dispersión resultantes. Estas curvas han sido calculadas a partir del $N_{\text{eff}}(\lambda)$ utilizando la siguiente expresión

$$D = -\frac{\lambda}{c} \cdot \frac{d^2 N_{\text{eff}}}{d\lambda^2} \quad (5.4)$$

En todas las simulaciones presentadas en este epígrafe se ha tenido en cuenta la dispersión cromática del material (*Silica*) a través del modelo de Sellmeier de tres polos

$$n_{\text{SiO}_2}^2(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{B_i}{(1 - \lambda_i/\lambda)^2} \quad (5.5)$$

donde $B_1 = 0,6961663$, $B_2 = 0,4079426$, $B_3 = 0,8974794$, $\lambda_1 = 0,0684043 \mu\text{m}$, $\lambda_2 = 0,1162414 \mu\text{m}$, $\lambda_3 = 9,896161 \mu\text{m}$.

La inclusión de la dispersión cromática es imprescindible en este caso, ya que la característica de dispersión plana se consigue como resultado de la cancelación de los efectos de la dispersión geométrica y de la dispersión del material [Ferrando2001].

En relación con la técnica de simulación propuesta, destacar que una vez más los resultados obtenidos con el FFT-MS son prácticamente coincidentes con los proporcionados en la bibliografía [Ferrando2001], donde se utilizó como método de simulación el deno-

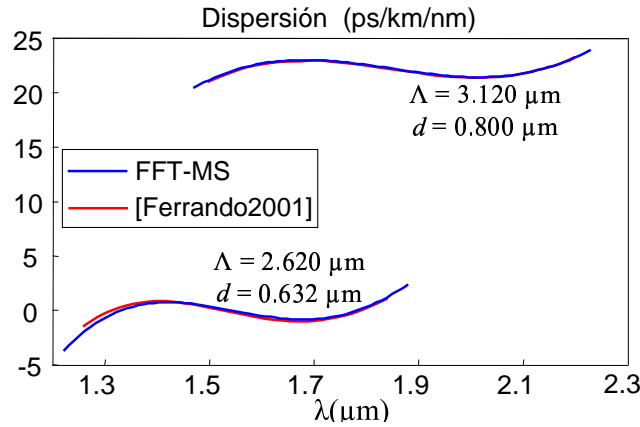


Figura 5.16: Fibra de Cristal Fotónico Básica. Curvas de dispersión para dos configuraciones de los parámetros geométricos. $N_x = N_y = 70$, $M_x = M_y = 300$.

minado *Biorthonormal-basis method* [Silvestre1998]. Para conseguir estos resultados no ha sido necesario aumentar demasiado el número de armónicos ($N = 70 \times 70$), pero sí garantizar una buena discretización espacial de la estructura mediante la utilización de un número de puntos de muestreo relativamente elevado ($M = 300 \times 300$).

5.4.2. Análisis del Área Efectiva

Como ya se adelantó en el estudio de la guía *rib*, el área efectiva proporciona información sobre el grado de confinamiento de la distribución espacial de campo de los modos. En las fibras de cristal fotónico el área efectiva tiende a disminuir cuando aumenta el cociente d/Λ [Saitoh2005], [Obayya2005], lo que equivale a decir que el modo se encuentra en general más confinado cuanto mayor es el tamaño de los agujeros de aire o menor es la separación entre éstos. Por otro lado, como en cualquier otra guía óptica, el área efectiva aumenta con la longitud de onda. Ambos comportamientos son evidentes en la figura 5.17, donde se han representado las curvas de A_{eff} en función de λ para las dos PCF analizadas en el epígrafe anterior. Sobre estas curvas se han señalado tres puntos ((a), (b) y (c)), cuyas respectivas distribuciones de campo se muestran en la figura 5.18. A la vista de estos resultados se pueden realizar las siguientes apreciaciones:

- En las figuras 5.18(a) y 5.18(b) se pone claramente de manifiesto que, puesto que ambas soluciones presentan en este caso el mismo área efectiva ($A_{\text{eff}} \approx 43 \mu\text{m}^2$), las distribuciones de campo correspondientes exhiben un grado de confinamiento similar.
- Por el contrario, si se comparan las figuras 5.18(b) y 5.18(c), resulta evidente que el nivel de confinamiento es ahora muy distinto, lo que implica a su vez áreas efectivas muy diferentes.
- Finalmente, las figuras 5.18(a) y 5.18(c) muestran claramente como disminuye el grado de confinamiento de la distribución de campo con la longitud de onda, lo que se refleja en un rápido aumento del área efectiva del modo.

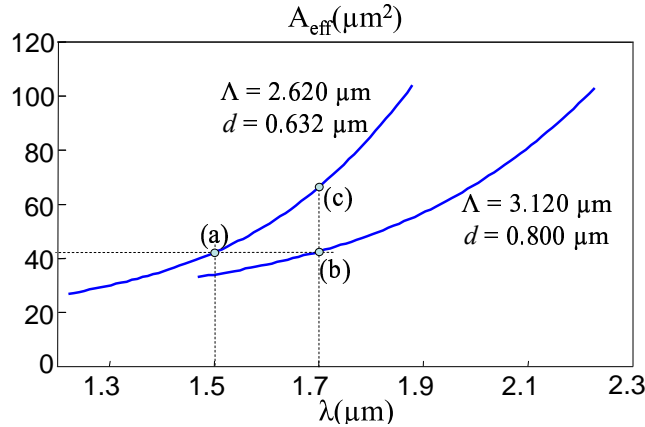


Figura 5.17: Fibra de Cristal Fotónico Básica. Área efectiva para dos configuraciones de los parámetros geométricos. $N_x = N_y = 70$, $M_x = M_y = 300$.

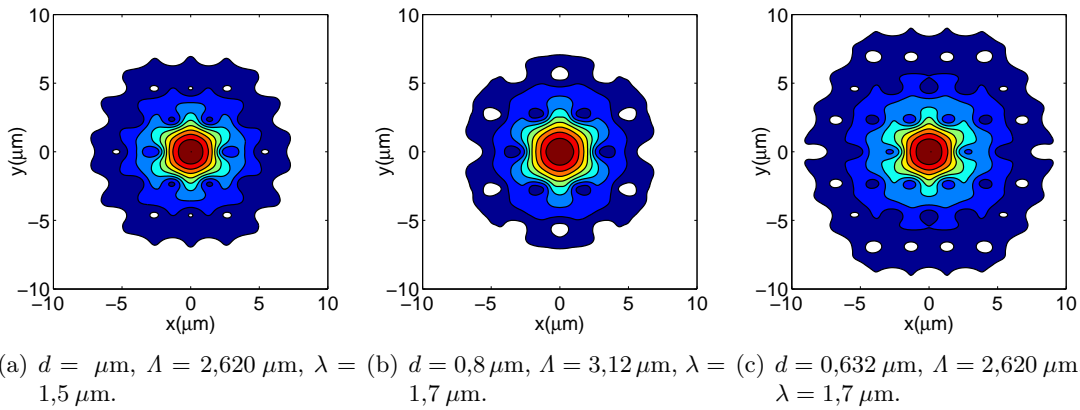


Figura 5.18: Fibra de Cristal Fotónico Básica. Distribución transversal de campo eléctrico del modo fundamental con polarización horizontal para los puntos señalados en la gráfica anterior. $N_x = N_y = 70$, $M_x = M_y = 300$.

5.4.3. Análisis de las Pérdidas por Confinamiento

Como se explicó en el epígrafe 5.2.4, las *pérdidas por confinamiento* en una PCF como la de la figura 5.15(b) están relacionadas con la radiación de parte de la potencia que se encuentra inicialmente en la zona de guiado hacia la región exterior sin agujeros de aire. Por lo tanto, parece razonable que estas pérdidas dependan fuertemente de los parámetros geométricos d y Λ , ya que como se demostró en el punto anterior éstos influyen decisivamente en la distribución transversal de campo de los modos y por lo tanto en la fracción de potencia que se va a perder por radiación al alcanzar la zona exterior de la fibra. En la figura 5.19 se han representado, para el modo fundamental de una PCF de dos anillos ($n_2 = 1,45$, $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$) y diferentes valores del cociente d/Λ , las pérdidas por confinamiento en función de la separación entre los agujeros de aire. Además de los resultados obtenidos con el FFT-MS, se han incluido también los proporcionados para el mismo caso de estudio en [Koshiba2003] y [Obayya2005], basados ambos en una variante del método de elementos finitos denominada *Imaginary Distance Vectorial Finite-Element Beam Propagation Method* (IDVFEBPM). De los resultados

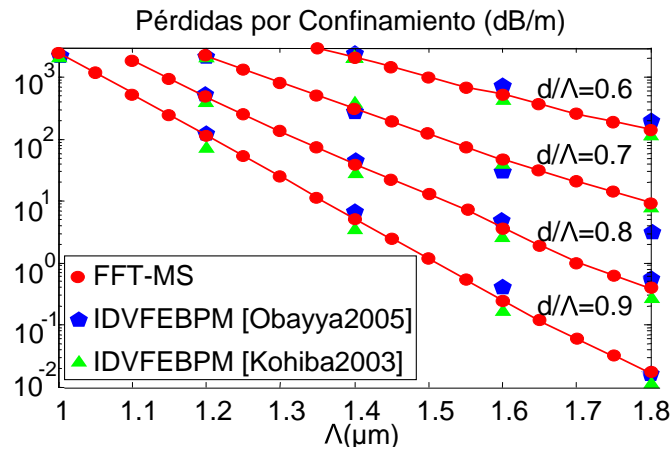


Figura 5.19: Fibra de Cristal Fotónico Básica. Pérdidas por confinamiento (dB/m) en función de Λ para diferentes valores del cociente d/Λ .

que se muestran en esta gráfica, conviene destacar que:

- Como era de esperar, las pérdidas son siempre menores para valores crecientes de d/Λ , ya que cuanto mayor es ese cociente mayor es también el confinamiento del modo.
- De igual forma, para un valor constante de d/Λ las pérdidas disminuyen exponencialmente con la separación entre los agujeros de aire. Esto se debe a que, al aumentar con Λ el tamaño de la zona central de guiado, la fracción de campo que alcanza la región exterior de la guía es menor.
- En cuanto a la precisión de las soluciones calculadas con el FFT-MS, resulta evidente que el ajuste con las referencias anteriores es muy bueno en todos los casos excepto en uno. Para $d/\Lambda = 0,7$ los resultados obtenidos sólo coinciden con los presentados en [Koshiba2003], desviándose claramente de los proporcionados en [Obayya2005].
- En la mayoría de las simulaciones llevadas a cabo con el método propuesto, ha sido suficiente con utilizar $N = 128 \times 128$ armónicos y $M = 256 \times 256$ puntos de discretización espacial para obtener una estimación precisa de las pérdidas por confinamiento. Sin embargo, cuando estas pérdidas bajan de 1 dB/m aproximadamente hay que ser mucho más cuidadoso en su cálculo para mantener acotado el error numérico. Por ese motivo, la curva $d/\Lambda = 0,9$ para valores de $\Lambda > 1,4 \mu\text{m}$ ha sido obtenida utilizando unos parámetros de simulación algo más estrictos, concretamente $N = 192 \times 192$ y $M = 384 \times 384$.

Por último, en la tabla 5.6 se incluyen las pérdidas por confinamiento calculadas para tres fibras de cristal fotónico con los mismos parámetros geométricos ($\Lambda = 1,7 \mu\text{m}$, $d/\Lambda = 0,6$), pero compuestas respectivamente por dos, tres y cuatro anillos de agujeros de aire alrededor de la zona de guiado. Como era de esperar, las pérdidas disminuyen exponencialmente con el número de anillos, ya que de esa forma se aumenta el grado de confinamiento del modo en la zona de guiado. Por otro lado, se observa de nuevo una discrepancia entre algunas de las soluciones proporcionadas en [Obayya2005] y las

	2 anillos	3 anillos	4 anillos
FFT-MS	270 dB/m	2,85 dB/m	0,11 dB/m
[Obayya2005]	400 dB/m	5 dB/m	0,1 dB/m
[Koshiba2003]	260 dB/m	2,7 dB/m	—

Tabla 5.6: Fibra de Cristal Fotónico Básica. Pérdidas por confinamiento en función del número de anillos.

que se incluyen en [Koshiba2003], siendo estas últimas coherentes con las simulaciones realizadas utilizando el FFT-MS⁵.

5.4.4. Estudio de la Longitud de Acoplo en una PCF de Tres Núcleos

El análisis de una PCF de tres núcleos como la representada en la figura 5.15(c), propuesta inicialmente en [Roberts2001], es una prueba excelente para medir las prestaciones de cualquier técnica numérica de caracterización modal. A las longitudes de onda de trabajo típicas, esta estructura soporta seis modos guiados casi degenerados, por lo que se requiere una gran precisión en el cálculo de las constantes de propagación (del orden de 10^{-7} en algunos casos) para ser capaz de diferenciar las diferentes soluciones entre sí. En la figura 5.20(a)-(f) se ha representado ampliada la zona central de la distribución espacial de campo eléctrico de los seis modos guiados de la estructura para una longitud de onda de trabajo $\lambda = 1 \mu\text{m}$. De estas soluciones, calculadas con el FFT-MS ($N = 150 \times 150$, $M = 600 \times 600$), las dos primeras son degeneradas. El resto de modos presentan constantes de propagación alejadas de las anteriores pero muy próximas entre sí, pudiéndose considerar en la práctica casi degenerados [Roberts2001]. En la figura 5.21 se ha representado, en función de la longitud de onda de trabajo, la longitud de acoplo (L_{acop}) entre los dos primeros modos y el resto de soluciones de la estructura, que por coherencia con la referencia anterior se ha definido como

$$L_{acop} = \frac{\lambda}{N_{\text{eff}}^{fund} - \overline{N_{\text{eff}}^{sup}}} \quad (5.6)$$

donde N_{eff}^{fund} es el índice efectivo de los dos modos fundamentales (degenerados) y $\overline{N_{\text{eff}}^{sup}}$ es la media de los índices efectivos de los cuatro modos superiores (casi degenerados entre sí).

A efectos de comparación, se han incluido en la gráfica las longitudes de acoplo calculadas utilizando tres métodos de simulación diferentes:

- El método propuesto en esta Tesis trabajando en dos configuraciones diferentes, i) $N = 100 \times 100$, $M = 300 \times 300$ y ii) $N = 200 \times 200$, $M = 600 \times 600$. Los tiempos de simulación asociados al cálculo de los seis modos guiados con estos parámetros numéricos son de aproximadamente 180 y 1200 segundos respectivamente.
- El denominado *Cluster Multiple-Scattering Method* (CMS), una técnica semi-analítica particularizada en este caso [Roberts2001] para estudiar fibras de cristal fotónico.

⁵Aunque resulta difícil explicar estas diferencias (sobre todo teniendo en cuenta que en ambas referencias se implementa esencialmente la misma técnica numérica, el IDVFEbpm), lo más probable es que se deban a un mal ajuste de los parámetros de simulación utilizados en [Obayya2005].

- Un software comercial basado en diferencias finitas denominado *Lumerical Mode Solutions* trabajando al máximo de sus posibilidades en cuanto número de puntos de discretización de la estructura.

De los resultados que se muestran en la figura 5.21, se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- La longitud de acoplo decrece rápidamente con la longitud de onda. Este comportamiento es razonable si se tiene en cuenta que, puesto que el grado de confinamiento de los modos decrece con λ , a longitudes de onda mayores existirá mayor interacción entre los modos y por tanto la longitud de acoplo será menor.
- Todos los métodos proporcionan aproximadamente los mismos resultados para $\lambda > 0,7 \mu\text{m}$ ($L_{acop} < 40 \text{ cm}$), ya que en ese margen de longitudes de onda el grado de precisión en el cálculo de las constantes de propagación no necesita ser demasiado elevado.
- Por el contrario, sólo dos métodos son capaces de realizar una estimación precisa de las longitudes de acoplo cuando éstas son superiores a un metro aproximadamente: el CMS y el FFT-MS ($N = 200 \times 200$ armónicos y $M = 600 \times 600$ puntos). Esto se debe a que, para ese rango de valores de la longitud de acoplo, la separación entre los índices efectivos de los dos modos fundamentales y los del resto de modos es del orden 10^{-7} , lo que marca una cota máxima muy estricta para el error que se puede cometer en la resolución del problema.

5.4.5. Caracterización de una PCF de Alta Birrefringencia

Para demostrar el buen funcionamiento del FFT-MS en situaciones más realistas, en este epígrafe se va a analizar una fibra de cristal fotónico de alta birrefringencia como la propuesta originalmente en [Ortigosa2000]. Generalmente, el diseño de una PCF de alta birrefringencia se basa en la introducción de asimetrías geométricas en la estructura que rompan la degeneración entre sus dos modos fundamentales. En el caso de la fibra de cristal fotónico que se muestra en la figura 5.22(a), los cuatro agujeros de aire centrados en $x = 0$ tienen un diámetro sensiblemente inferior al resto, lo que permite conseguir una birrefringencia muy elevada, del orden de 10^{-3} [Ortigosa2000], [Saitoh2005]. Por otro lado, es un hecho conocido que, como resultado de las no idealidades del proceso de fabricación, el perfil de índice de refracción de la estructura física puede llegar a diferir bastante del diseñado inicialmente. En la figura 5.22(b) se muestra una micro-fotografía de la implementación física correspondiente a la guía idealizada de la figura 5.22(a). En este caso resulta evidente que los agujeros de aire distan mucho de tener la forma y tamaño diseñados, por lo que es imprescindible realizar simulaciones sobre el perfil de índice de refracción real de la estructura fabricada. Todos los resultados que se van a presentar a continuación se basan en el análisis modal del perfil transversal de índice de refracción que se muestra en la figura 5.22(c), obtenido a partir de la micro-fotografía referida anteriormente.

En la figura 5.23 se muestran, superpuestos sobre el perfil de índice de refracción de la guía, las distribuciones espaciales de campo eléctrico de las componentes fundamentales de los dos modos guiados que soporta la estructura, casi linealmente polarizados en las direcciones x e y respectivamente [Saitoh2005]. Los cálculos se han realizado utilizando el FFT-MS con $N = 32 \times 32$ armónicos y $M = 256 \times 256$ puntos de discretización espacial,

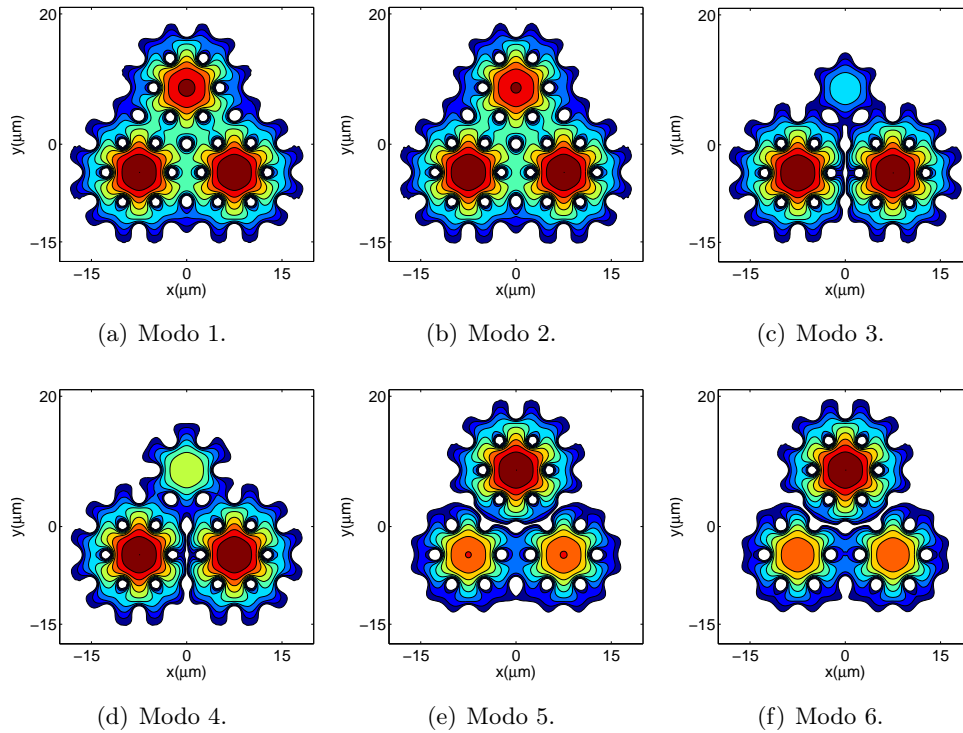


Figura 5.20: Fibra de Cristal Fotónico de Tres Núcleos. Distribución transversal de campo eléctrico de los seis primeros modos. $\lambda = 1\mu\text{m}$. $N_x = N_y = 150$, $M_x = M_y = 600$.

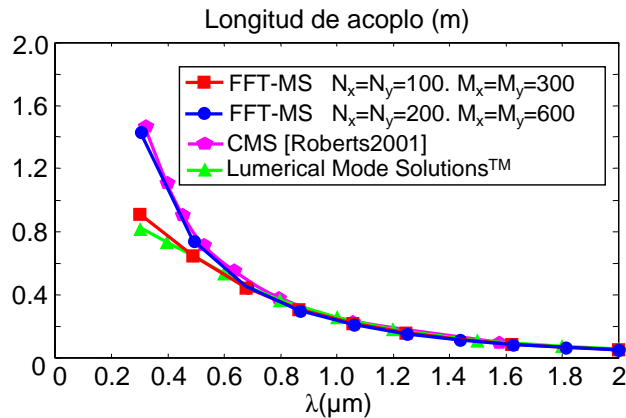
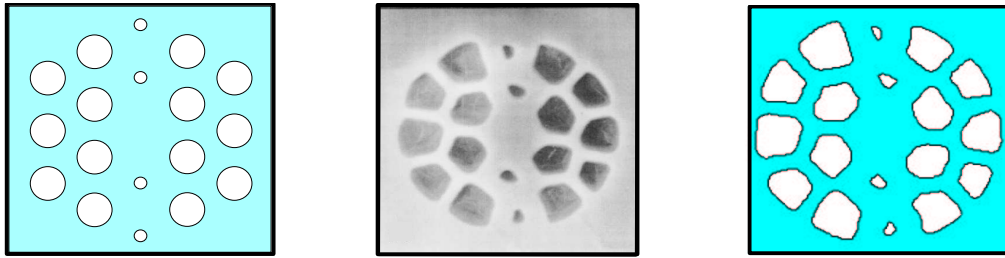


Figura 5.21: Fibra de Cristal Fotónico de Tres Núcleos. Longitud de Acoplo.

lo que tiene un coste computacional de 180 segundos aproximadamente. En la figura 5.24 se han representado las curvas de birrefringencia⁶ en función de la longitud de onda simuladas respectivamente con el FFT-MS y el IDVFEBPM [Saitoh2005], observándose un excelente ajuste entre ambas. Sobre ellas se ha superpuesto el valor experimental proporcionado en [Ortigosa2000] para $\lambda = 1,54\mu\text{m}$. Esta medida resulta prácticamente indistinguible del resultado obtenido con las simulaciones anteriores, lo que confirma el buen funcionamiento de las técnicas de modelado numérico existentes en la actualidad.

⁶Definida como la diferencia entre los índices efectivos de los modos Quasi-TE y Quasi-TM.



(a) Perfil de índice de refracción de la estructura idealizada. (b) Micro-fotografía de la sección transversal de la estructura fabricada. (c) Perfil de índice de refracción utilizado en las simulaciones.

Figura 5.22: Fibra de Cristal Fotónico de Alta Birrefringencia. Definición de la geometría.

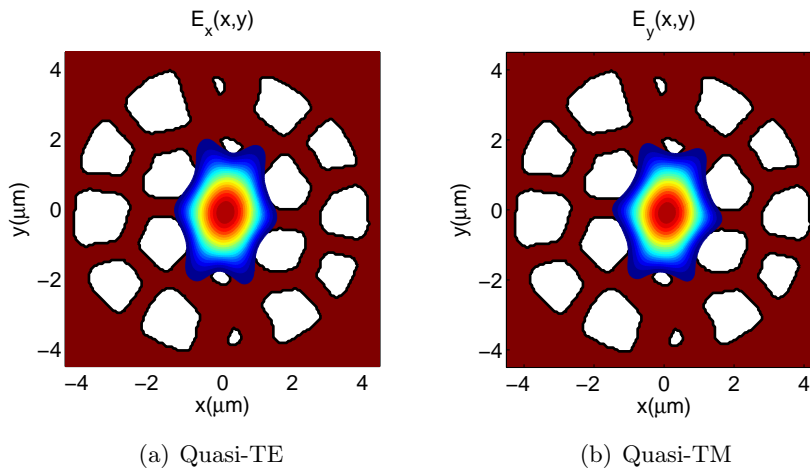


Figura 5.23: Fibra de Cristal Fotónico de Alta Birrefringencia. Distribución transversal de campo eléctrico de la componente fundamental de los dos primeros modos. $\lambda = 1,54 \mu\text{m}$. $N_x = N_y = 32$, $M_x = M_y = 256$.

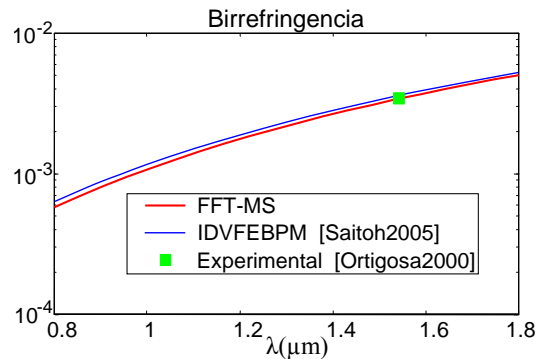


Figura 5.24: Fibra de Cristal Fotónico de Alta Birrefringencia. Birrefringencia en función de la longitud de onda. $N_x = N_y = 32$, $M_x = M_y = 256$.

6 El Método de Expansión Modal de Fourier (Fourier-EEM)

6.1. Introducción

EN este capítulo se va a presentar una técnica numérica para el análisis eficiente de estructuras ópticas que presenten discontinuidades abruptas en la dirección de propagación, como por ejemplo los conocidos dispositivos de interferencia multimodal (*Multimode Interference* (MMI)) o los *Fiber Bragg Grating* (FBG). El método propuesto, perteneciente a la familia de los denominados Métodos de Expansión Modal (*Eigenmode Expansion Method* (EEM)), se caracteriza por:

1. Utilizar un esquema de discretización transversal de carácter global basado en el espacio funcional de Fourier, lo que justifica que en adelante se denomine a esta técnica Fourier-EEM [Ortega2005].
2. Incorporar condiciones de contorno absorbentes perfectamente adaptadas del tipo PML versión coordinada compleja. De esta forma va a ser posible tratar eficientemente la radiación saliente de la ventana de cómputo, superando las limitaciones asociadas a la periodicidad del espacio funcional de Fourier.

Como se pondrá de manifiesto en la sección de resultados, el Fourier-EEM constituye una herramienta de simulación extraordinariamente valiosa para el diseñador de dispositivos ópticos, lo que quedó demostrado durante el proceso de análisis y diseño del circuito fotónico integrado propuesto en [Molina2005].

6.2. Formulación

En esta sección se va a desarrollar la formulación, y a detallar los procedimientos algorítmicos, que permiten el análisis de dispositivos ópticos que presenten una o varias discontinuidades abruptas en la dirección de propagación. La línea argumental será similar a la del conocido Método de las Líneas (*Method of Lines* (MoL)) [Pregla1989], [Pregla1992], [Scarmozzino2000], con el que la técnica propuesta guarda un gran parecido.

6.2.1. Análisis de Secciones z -invariantes

El punto de partida de este desarrollo es la ecuación (2.11), que describe la propagación de las componentes transversales de campo eléctrico $\mathbf{E}_t(x, y, z)$ en una estructura z -invariante, y que se reproduce a continuación por conveniencia

$$\Delta \mathbf{E}_t + k_0^2 \epsilon \mathbf{E}_t = -\nabla_t (\nabla_t (\ln \epsilon) \cdot \mathbf{E}_t) \quad (6.1)$$

Utilizando el operador lineal \mathcal{H}_e (2.16) para describir la sección transversal del problema físico, la expresión anterior se puede escribir como

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathcal{H}_e \right] \mathbf{E}_t = 0 \quad (6.2)$$

La resolución de esta ecuación, que no posee habitualmente solución analítica, requiere la discretización precisa y eficiente del operador transversal \mathcal{H}_e , utilizando para ello alguna de las técnicas numéricas presentadas en el **Capítulo 3**. En el caso de utilizar un método espectral basado en el espacio funcional de Fourier, la ecuación de ondas discretizada quedaría

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \overline{\overline{\mathbf{M}_e}} \right] \Phi_e = 0 \quad (6.3)$$

donde Φ_e representa el vector de coeficientes espectrales del desarrollo en serie de Fourier del campo eléctrico transversal y $\overline{\overline{\mathbf{M}_e}}$ es la matriz de caracterización modal o matriz del sistema.

Antes de continuar con el desarrollo matemático, conviene hacer notar que:

- La matriz $\overline{\overline{\mathbf{M}_e}}$ es en general densa, por lo que la expresión (6.3) describe un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas cuya resolución no es inmediata. El tamaño de este sistema de ecuaciones crece con el número de armónicos empleado en el desarrollo en serie de Fourier del campo eléctrico que se desea calcular.
- Las simplificaciones de la ecuación de análisis modal que se describieron en el epígrafe 2.2.3 son directamente aplicables a la matriz del sistema $\overline{\overline{\mathbf{M}_e}}$. Por ejemplo, asumiendo la hipótesis escalar se consigue reducir a la cuarta parte su tamaño, con el consiguiente ahorro computacional.
- Por último, la utilización de condiciones de contorno PML no introduce ningún término adicional en la expresión (6.3), aunque evidentemente sí que complica el cálculo de la matriz del sistema, al ser la ecuación de caracterización modal (2.83) algo más compleja.

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (6.3), lo más conveniente es comenzar diagonalizando la matriz del sistema

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{T}_e}} \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}_e}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}_e}} = -\overline{\overline{\Gamma^2}} \quad (6.4)$$

siendo $-\overline{\overline{\Gamma^2}}$ la matriz diagonal de autovalores de $\overline{\overline{\mathbf{M}_e}}$ y $\overline{\overline{\mathbf{T}_e}}$ su matriz de autovectores. Evidentemente, este proceso de diagonalización no es sino la resolución del problema de análisis modal de la sección transversal de la guía, ya que $\overline{\overline{\mathbf{T}_e}}$ contiene por columnas los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de cada uno de los modos que soporta la estructura, mientras que sus correspondientes constantes de propagación se obtienen de forma inmediata a partir de los autovalores.

Sin embargo, en este caso resulta quizá más conveniente interpretar la función de la matriz de autovectores $\overline{\overline{\mathbf{T}_e}}$ como la propia de una matriz de cambio de base, a partir de la cual resulta inmediato proyectar el vector de armónicos Φ_e de una distribución transversal campo eléctrico genérica sobre el espacio funcional de los modos de la guía Ψ y

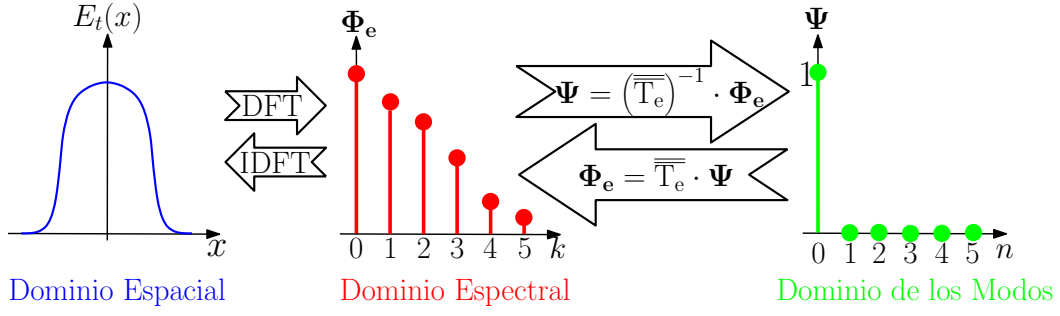


Figura 6.1: Relación entre el dominio espacial, el espectral y el de los modos.

viceversa, tal y como se muestra en la figura 6.1

$$\begin{aligned}\Psi &= (\overline{T_e})^{-1} \cdot \Phi_e \\ \Phi_e &= \overline{T_e} \cdot \Psi\end{aligned}\quad (6.5)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (6.3) y tras alguna operación se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \overline{\Gamma^2} \right] \cdot \Psi = 0 \quad (6.6)$$

cuya solución analítica viene dada por

$$\Psi(z) = \Psi_{\mathbf{f}}(0) \cdot e^{-\overline{\Gamma} \cdot z} + \Psi_{\mathbf{b}}(0) \cdot e^{\overline{\Gamma} \cdot z} \quad (6.7)$$

donde los subíndices \mathbf{f} y \mathbf{b} hacen referencia respectivamente a los sentidos de propagación *forward* ($+z$) y *backward* ($-z$).

Evidentemente, puesto que la propagación en sentido longitudinal se trata de forma analítica, la precisión del método en secciones z -invariantes va a depender exclusivamente de la estrategia de discretización transversal empleada y de las condiciones de contorno aplicadas en los extremos de la ventana de cómputo. Además, al contrario de lo que ocurre en las implementaciones básicas de los métodos de propagación del haz (*Beam Propagation Method* (BPM)), la técnica propuesta es inherentemente bidireccional y no ha requerido imponer en ningún momento la aproximación paraxial.

6.2.2. Caracterización de Discontinuidades Aisladas

En este epígrafe se va a desarrollar una formulación matricial compacta para la caracterización de discontinuidades abruptas en la dirección de propagación como las mostradas en la figura 6.2. En realidad, el procedimiento que se describe a continuación es simplemente una particularización de la técnica de ajuste modal desarrollada en la sección 2.6, de forma que ésta pueda ser aplicada sobre la estrategia de discretización transversal de carácter global basada en el espacio funcional de Fourier que se describió en el **Capítulo 3**.

Como es habitual, el primer paso consiste en imponer la igualdad de las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético a los dos lados de la discontinuidad, esto es, $\mathbf{E}_t^I = \mathbf{E}_t^{II}$ y $\mathbf{H}_t^I = \mathbf{H}_t^{II}$. Desarrollando estas distribuciones de campo en serie de Fourier y proyectándolas a continuación sobre el espacio funcional de los modos se

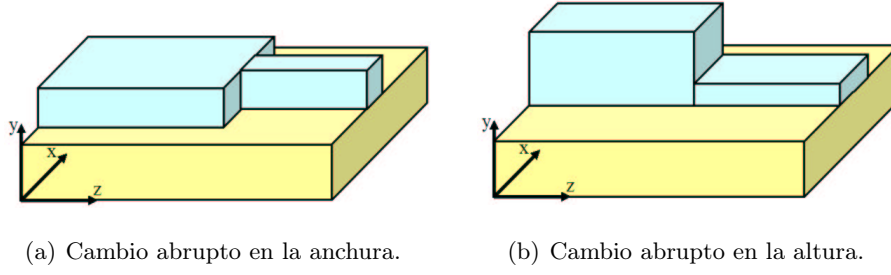


Figura 6.2: Ejemplos de Discontinuidades Aisladas.

llega a

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_e^I \cdot (\Psi_f^I + \Psi_b^I) = \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e^{II} \cdot (\Psi_f^{II} + \Psi_b^{II}) \quad (6.8)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^I \cdot (\Psi_f^I - \Psi_b^I) = \overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^{II} \cdot (\Psi_f^{II} - \Psi_b^{II}) \quad (6.9)$$

donde $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^I$ y $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^{II}$ son los autovectores o matrices de cambio de base definidas para las componentes transversales de campo magnético en las guías *I* y *II* respectivamente.

Afortunadamente $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_h$ se puede calcular fácilmente a partir de $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_e$, no siendo necesario por lo tanto formular y resolver dos veces el problema de autovalores, lo que sería enormemente costoso desde el punto de vista computacional. Teniendo en cuenta las relaciones entre las componentes transversales de campo eléctrico y magnético y aplicando la notación matricial de operadores se obtiene la siguiente expresión

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_h = \overline{\overline{\mathbf{U}}} \cdot \hat{\overline{\overline{\mathbf{T}}}}_e \quad (6.10)$$

donde las matrices $\hat{\overline{\overline{\mathbf{T}}}}_e$ y $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ se definen respectivamente como¹

$$\hat{\overline{\overline{\mathbf{T}}}}_e \Big|_{mn} = \frac{j}{k_0 \cdot \Gamma_n} \cdot T_e \Big|_{mn} \quad (6.11)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} -\overline{\overline{\mathbf{P}}}(s_x^{-1} \cdot s_y^{-1}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_x \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_y & \overline{\overline{\mathbf{P}}}(s_x^{-1}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_x \cdot \overline{\overline{\mathbf{P}}}(s_x^{-1}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_x + k_0^2 \cdot \overline{\overline{\mathbf{P}}}(\epsilon) \\ -\overline{\overline{\mathbf{P}}}(s_y^{-1}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_y \cdot \overline{\overline{\mathbf{P}}}(s_y^{-1}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_y - k_0^2 \cdot \overline{\overline{\mathbf{P}}}(\epsilon) & \overline{\overline{\mathbf{P}}}(s_x^{-1} \cdot s_y^{-1}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_x \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}_y \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Por último, imponiendo la ausencia de onda reflejada en la segunda guía ($\Psi_b^{II} = 0$) y tras alguna manipulación se llega a

$$\begin{aligned} \Psi_f^{II} &= 2 \left(\left(\overline{\overline{\mathbf{T}}}_e^I \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e^{II} + \left(\overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^I \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^{II} \right)^{-1} \cdot \Psi_f^I \\ \Psi_b^I &= \Psi_f^I - \left(\overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^I \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}_h^{II} \cdot \Psi_f^{II} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Estas expresiones permiten calcular fácilmente las distribuciones de campo a ambos lados de una discontinuidad aislada para una excitación genérica Ψ_f^I . A partir de ellas resulta inmediato definir parámetros útiles para el diseñador de dispositivos ópticos, co-

¹En el caso escalar $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ se reduce a la matriz identidad, lo que contribuye a disminuir aún más el coste computacional respecto al análisis completamente vectorial.

mo los coeficientes de transmisión y reflexión de los modos guiados o la potencia que se pierde por radiación en los interfaces abruptos entre guías de diferente sección transversal.

6.2.3. Caracterización de Dispositivos con Múltiples Discontinuidades

Como no podía ser de otra forma, la caracterización de dispositivos con múltiples discontinuidades se basa en la aplicación ordenada de las expresiones deducidas en los epígrafes anteriores. Por un lado, la ecuación (6.7) describe la propagación del campo en las secciones z -invariantes del dispositivo, mientras que por otro las expresiones (6.8), (6.9) y (6.13) permiten calcular las ondas incidentes y reflejadas en cada uno de los interfaces longitudinales de la estructura. Tomando como punto de partida estas ecuaciones, en la práctica existen diferentes estrategias que permiten abordar con éxito el análisis de dispositivos con múltiples discontinuidades en la dirección de propagación. Todas ellas se caracterizan por:

- Evitar los problemas de inestabilidad numérica asociados al cálculo directo de las exponenciales crecientes que aparecen en el segundo sumando de (6.7), que son especialmente graves cuando las secciones que componen el dispositivo son relativamente largas.
- Utilizar algoritmos de cálculo simples (fáciles de programar), versátiles (aplicables a todo tipo de estructuras) y eficientes (reducido coste computacional).

6.2.3.1. Estrategia iterativa

Este procedimiento, propuesto inicialmente en [Dorazio2000] y [Dorazio2003] para un esquema de discretización transversal de diferencias finitas, se basa en la aplicación del siguiente algoritmo iterativo:

1. **Partiendo de una excitación inicial dada, se resuelve el problema en sentido $+z$.**

Para ello, en las secciones z -invariantes del dispositivo se utiliza la expresión

$$\Psi_{\mathbf{f}}^{(i)}(z) = \Psi_{\mathbf{f}}^{(i)}(0) \cdot e^{-\overline{\Gamma^{(i)}} \cdot z}, \quad 0 \leq z \leq d_i \quad (6.14)$$

donde d_i es la longitud de la sección i -ésima.

Por otro lado, las ondas incidentes y reflejadas en cada una de las discontinuidades entre secciones homogéneas de la estructura se calculan mediante la ecuación (6.13).

2. **A continuación se repite el mismo procedimiento en sentido $-z$.**

En las secciones homogéneas la onda reflejada se calcula como

$$\Psi_{\mathbf{b}}^{(i)}(z) = \Psi_{\mathbf{b}}^{(i)}(d_i) \cdot e^{\overline{\Gamma^{(i)}} \cdot (z-d_i)}, \quad 0 \leq z \leq d_i \quad (6.15)$$

donde, al ser el exponente negativo ($z - d_i \leq 0$), no aparecen tampoco problemas de inestabilidad numérica.

3. **Seguidamente se suman las ondas incidentes y reflejadas calculadas en los dos primeros pasos.**

$$\Psi^{(i)}(z) = \Psi_{\mathbf{f}}^{(i)}(z) + \Psi_{\mathbf{b}}^{(i)}(z) \quad (6.16)$$

4. **Finalmente, se repite el algoritmo de forma iterativa hasta alcanzar la convergencia.**

Se entiende que el algoritmo ha convergido si la diferencia entre dos iteraciones sucesivas del mismo es menor que una cantidad dada, es decir,

$$\left| \Psi^{(i)}(z) \Big|_{(iter+1)} - \Psi^{(i)}(z) \Big|_{(iter)} \right| \leq \epsilon_{conv} , \forall i , \forall z \quad (6.17)$$

Esta estrategia de cálculo iterativo es muy intuitiva y fácil de formular, pero su aplicación está limitada a estructuras compuestas por pocas secciones, ya que de otra forma su eficiencia computacional se reduce considerablemente. En el ámbito de los métodos de discretización transversal de carácter global basados en el espacio funcional de Fourier, esta técnica fue utilizada con éxito en [Ortega2005] y [Molina2005] para realizar el análisis y diseño de diferentes MMI fabricados en tecnología de bajo contraste *Silica on Silicon*.

6.2.3.2. Estrategia basada en el coeficiente de reflexión

Para superar las limitaciones del método anterior, la caracterización de dispositivos con un número arbitrario de discontinuidades se aborda habitualmente mediante estrategias basadas en la definición de magnitudes como la impedancia [Rogge1993] o el coeficiente de reflexión [Helfert2002], que pueden ser calculadas a lo largo de secciones z -invariantes arbitrariamente largas de forma eficiente y sin que aparezcan problemas de inestabilidad numérica. En este epígrafe se va a describir esta última técnica, cuyo punto de partida es obviamente la definición del coeficiente de reflexión \bar{r} , una matriz diagonal que relaciona las ondas incidentes y reflejadas en cualquier punto de la estructura bajo estudio

$$\Psi_{\mathbf{b}}^{(i)} = \bar{r}^{(i)} \cdot \Psi_{\mathbf{f}}^{(i)} \quad (6.18)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las expresiones (6.14) y (6.15) y operando un poco, el coeficiente de reflexión a la entrada de la sección i -ésima se puede escribir en función del existente a su salida, quedando finalmente

$$\bar{r}^{(i)}(z) = e^{-\bar{\Gamma}^{(i)} \cdot d_i} \cdot \bar{r}^{(i)}(z + d_i) \cdot e^{-\bar{\Gamma}^{(i)} \cdot d_i} \quad (6.19)$$

donde hay que destacar que no aparecen problemas de inestabilidad numérica al ser ambas exponenciales decrecientes.

En los interfaces entre secciones diferentes, el coeficiente de reflexión se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\bar{r}^{(i)} = \left(\bar{e}^{(i+1)} - \bar{h}^{(i+1)} \right) \cdot \left(\bar{e}^{(i+1)} + \bar{h}^{(i+1)} \right)^{-1} \quad (6.20)$$

en la que las matrices $\bar{e}^{(i+1)}$ y $\bar{h}^{(i+1)}$ se definen como

$$\begin{aligned} \bar{e}^{(i+1)} &= \left(\bar{T}_e^{(i)} \right)^{-1} \cdot \bar{T}_e^{(i+1)} \cdot \left(\bar{\mathbf{I}} + \bar{r}^{(i+1)} \right) \\ \bar{h}^{(i+1)} &= \left(\bar{T}_h^{(i)} \right)^{-1} \cdot \bar{T}_h^{(i+1)} \cdot \left(\bar{\mathbf{I}} - \bar{r}^{(i+1)} \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

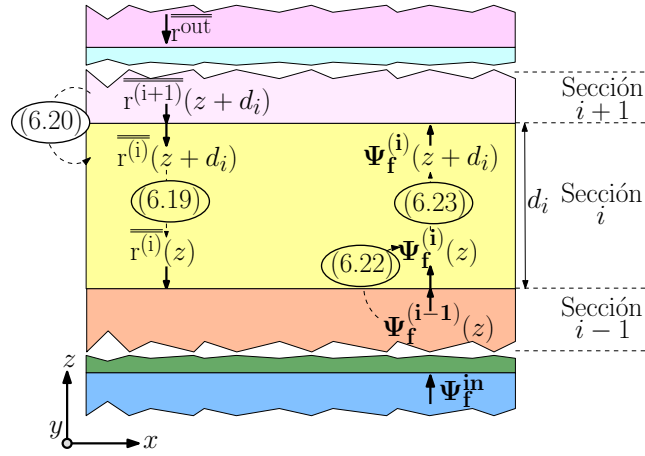


Figura 6.3: Estrategia basada en el coeficiente de reflexión. Representación esquemática del proceso de cálculo.

siendo $\overline{\overline{T_e^{(i)}}}$, $\overline{\overline{T_h^{(i)}}}$, $\overline{\overline{T_e^{(i+1)}}}$ y $\overline{\overline{T_h^{(i+1)}}}$ las matrices de autovectores o matrices de cambio de base para las componentes transversales de campo eléctrico y magnético en las secciones i -ésima e $(i+1)$ -ésima respectivamente, e $\overline{\overline{I}}$ la matriz identidad.

Utilizando alternativamente las ecuaciones (6.19) y (6.20), y suponiendo conocido el coeficiente de reflexión a la salida del dispositivo $\overline{\overline{r^{out}}}$, el cálculo del coeficiente de reflexión en cada uno de los interfaces de éste resulta inmediato, tal y como se muestra en la figura 6.3.

Por otro lado, las componentes del campo que se propagan en sentido $+z$ se calculan a partir de la onda incidente en la primera sección de la estructura Ψ_f^{in} , aplicando sucesivamente la ecuación (6.22) en los interfaces y (6.23) en las secciones homogéneas.

$$\Psi_f^{(i)} = 2 \cdot \left(\overline{\overline{e^{(i)}}} + \overline{\overline{h^{(i)}}} \right)^{-1} \cdot \Psi_f^{(i-1)} \quad (6.22)$$

$$\Psi_f^{(i)}(z+d_i) = \Psi_f^{(i)}(z) \cdot e^{-\overline{\overline{\Gamma^{(i)}}} \cdot d_i} \quad (6.23)$$

Por último, el campo en sentido $-z$ se calcula mediante la ecuación (6.18), aplicada en cada uno de los interfaces sobre los $\overline{\overline{r^{(i)}}}$ y $\Psi_f^{(i)}$ obtenidos previamente.

En cuanto al coste computacional, resulta evidente que éste crece rápidamente con el número de secciones, ya que es necesario calcular y almacenar el coeficiente de reflexión asociado a cada una de las discontinuidades entre secciones homogéneas que componen el dispositivo.

6.2.4. Análisis de Estructuras Periódicas Basado en Modos Floquet

Aunque el método descrito en la sección anterior es aplicable a cualquier dispositivo óptico, con independencia del número de secciones que lo compongan y de la longitud de éstas, lo cierto es que en la práctica no resulta útil para analizar estructuras periódicas tipo *Fiber Bragg Grating* (FBG) en las que el número de períodos puede ser de varios miles. Sin embargo, la introducción en estos casos del concepto de *Modos Floquet* [Collin1990], [Helfert2002] reduce espectacularmente tanto los tiempos de cómputo como los requerimientos de memoria, haciendo posible el análisis riguroso de estructuras pe-

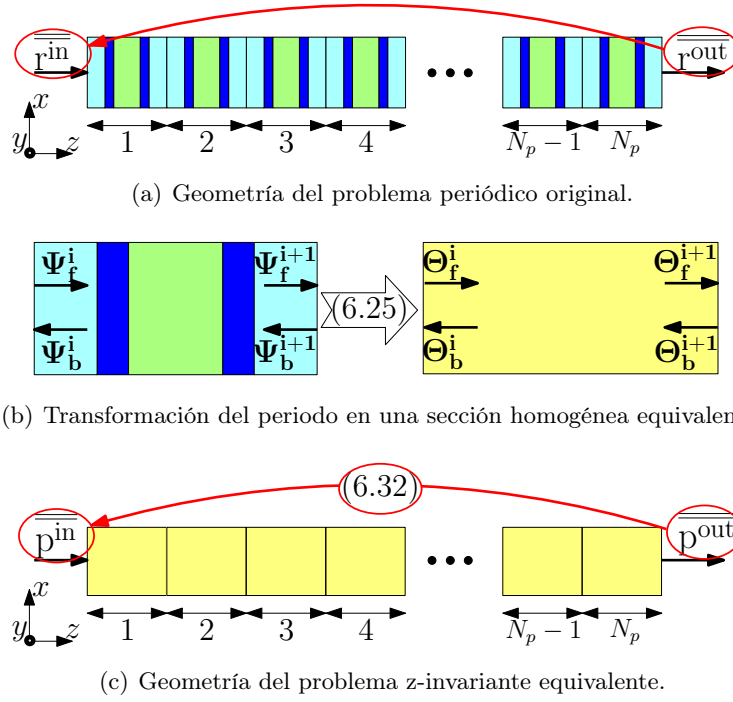


Figura 6.4: Análisis de estructuras periódicas basado en Modos Floquet.

riódicas 3D.

El análisis basado en modos *Floquet* de un dispositivo periódico como el mostrado en la figura 6.4(a), compuesto por la concatenación de N_p periodos iguales entre sí, pasa necesariamente por la caracterización precisa de uno de estos periodos. Con independencia de su perfil de variación con z , un periodo se podrá descomponer siempre en una sucesión de secciones z -invariantes de diferente sección transversal. Utilizando la estrategia descrita en la sección anterior es posible determinar la matriz de transferencia del periodo $\overline{\overline{A}}_p$, que relaciona entre sí las ondas incidentes y reflejadas a la entrada y a la salida del mismo

$$\begin{pmatrix} \Theta_f^{i+1} \\ \Theta_b^{i+1} \end{pmatrix} = \overline{\overline{A}}_p \cdot \begin{pmatrix} \Theta_f^i \\ \Theta_b^i \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Si a continuación se diagonaliza esta matriz,

$$\left(\overline{\overline{X}}\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{A}}_p \cdot \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\Gamma}}_F \quad (6.25)$$

se obtienen $\overline{\overline{\Gamma}}_F$ y $\overline{\overline{X}}$, que se corresponden respectivamente con la matriz diagonal de autovalores y la matriz densa de autovectores de $\overline{\overline{A}}_p$.

Tal y como se muestra en la figura 6.4(b), se puede entender que esta diagonalización transforma el periodo original z -variante en una sección homogénea equivalente, cuyas soluciones van a recibir el nombre de modos *Floquet*. La proyección del espacio de modos original (Ψ) sobre los modos *Floquet* (Θ) se realiza a través de la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} \Theta_f \\ \Theta_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{X}}_1 & \overline{\overline{X}}_2 \\ \overline{\overline{X}}_2 & \overline{\overline{X}}_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_f \\ \Psi_b \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

donde la matriz de autovectores $\overline{\overline{\mathbf{X}}}$ se ha particularizado para el caso de que los períodos sean simétricos, ya que de esta forma se reduce el coste computacional de la diagonalización² [Helfert2002].

Evidentemente, el cálculo de la propagación de los modos *Floquet* en una de estas secciones homogéneas equivalentes es inmediato a partir de la matriz diagonal de autovalores $\overline{\overline{\Gamma}}_F$, ya que

$$\Theta_f^{i+1} = e^{-\overline{\overline{\Gamma}}_F} \cdot \Theta_f^i \quad (6.27)$$

$$\Theta_b^{i+1} = e^{\overline{\overline{\Gamma}}_F} \cdot \Theta_b^i \quad (6.28)$$

Sin embargo, los problemas de inestabilidad numérica asociados a la exponencial creciente en la expresión anterior hacen recomendable calcular las componentes en sentido $-z$ como

$$\Theta_b = \overline{\overline{\mathbf{p}}} \cdot \Theta_f \quad (6.29)$$

donde $\overline{\overline{\mathbf{p}}}$ representa el coeficiente de reflexión para los modos *Floquet*, que se relaciona con el original ($\overline{\mathbf{r}}$) a través de la siguiente expresión

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}} = \left(\overline{\mathbf{r}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{X}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{X}}}_1 \right)^{-1} \cdot \left(-\overline{\mathbf{r}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{X}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{X}}}_2 \right) \quad (6.30)$$

De esta forma, conocido el coeficiente de reflexión a la salida de una sección homogénea equivalente $\overline{\overline{\mathbf{p}}}^{(i+1)}$ resulta inmediato calcular el coeficiente de reflexión a su entrada

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}^{(i)} = e^{-\overline{\overline{\Gamma}}_F} \cdot \overline{\overline{\mathbf{p}}}^{(i+1)} \cdot e^{-\overline{\overline{\Gamma}}_F} \quad (6.31)$$

Teniendo en cuenta además que las matrices $\overline{\overline{\Gamma}}_F$ son diagonales, la conexión en cascada de las N_p secciones homogéneas equivalentes tiene un coste computacional mínimo, ya que

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}^{\text{in}} = \left(e^{-\overline{\overline{\Gamma}}_F} \right)^{N_p} \cdot \overline{\overline{\mathbf{p}}}^{\text{out}} \cdot \left(e^{-\overline{\overline{\Gamma}}_F} \right)^{N_p} = e^{-\overline{\overline{\Gamma}}_F \cdot N_p} \cdot \overline{\overline{\mathbf{p}}}^{\text{out}} \cdot e^{-\overline{\overline{\Gamma}}_F \cdot N_p} \quad (6.32)$$

Finalmente, el coeficiente de reflexión a la entrada del dispositivo se determina a partir de $\overline{\overline{\mathbf{p}}}^{\text{in}}$ como

$$\overline{\overline{\mathbf{r}}}^{\text{in}} = \left(\overline{\overline{\mathbf{X}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{X}}}_1 \cdot \overline{\overline{\mathbf{p}}}^{\text{in}} \right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{X}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{X}}}_2 \cdot \overline{\overline{\mathbf{p}}}^{\text{in}} \right)^{-1} \quad (6.33)$$

Es interesante hacer notar que la expresión (6.32) es formalmente idéntica a (6.20), que describía la traslación del coeficiente de reflexión a través de un tramo de guía z -invariante. Por lo tanto, el formalismo de los modos *Floquet* permite transformar el problema periódico original representado en la figura 6.4(a) en una guía z -invariante equivalente de longitud N_p como la que se muestra en la figura 6.4(c). En lo referente al coste computacional, hay que destacar que éste es independiente del número de períodos, viniendo determinado exclusivamente por el proceso de cálculo y posterior diagonalización de la matriz de transferencia de un periodo $\overline{\overline{\mathbf{A}}}_p$.

²Si esto no se tiene en cuenta los requerimientos computacionales del problema de diagonalización son enormes, ya que el tamaño de $\overline{\overline{\mathbf{X}}}$ es cuatro veces mayor que el de la matriz de discretización transversal.

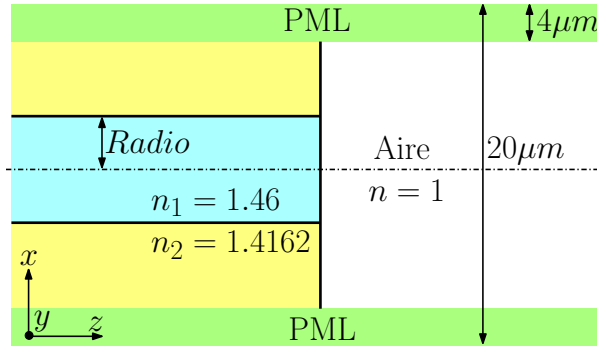


Figura 6.5: Discontinuidad Fibra-Aire. Definición de la geometría.

6.3. Resultados

6.3.1. Validación Preliminar del Fourier-EEM

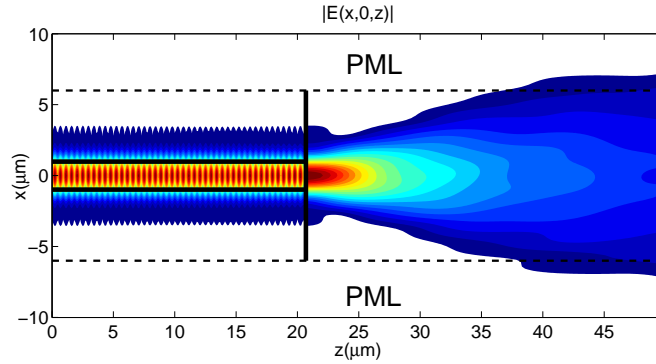
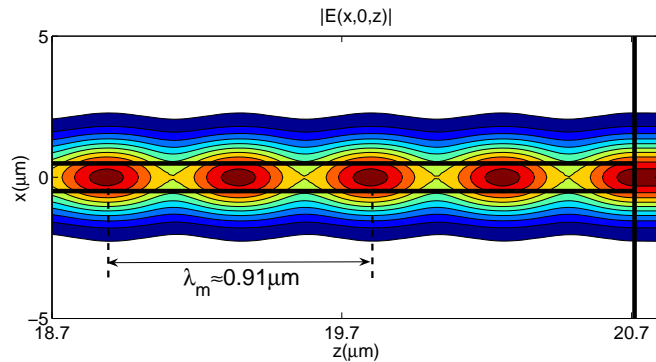
Como validación preliminar del método propuesto se ha decidido comenzar por el análisis escalar de dos estructuras muy simples: una discontinuidad abrupta fibra-aire y un pequeño desalineamiento entre dos fibras de la misma sección.

6.3.1.1. Discontinuidad Fibra-Aire

La geometría del problema que se va a analizar en este epígrafe se muestra en la figura 6.5. El tamaño de la ventana de cómputo se ha mantenido constante en todas las simulaciones ($X_0 = Y_0 = 20 \mu\text{m}$), al igual que el ancho de la zona PML ($X_{PML} = Y_{PML} = 4 \mu\text{m}$). Como se puede apreciar en la figura 6.6(a), cuando se excita la fibra con su modo fundamental y éste llega al interfaz abrupto con el aire se producen dos efectos fácilmente identificables:

- Un patrón de onda estacionaria a la izquierda de la discontinuidad, que se corresponde con el batido entre la ondas incidente y reflejada del modo fundamental. El periodo de repetición de este batido se debe corresponder aproximadamente con la mitad de la longitud de onda del modo, que en este caso vale $\lambda_m = 2 \cdot \pi / \beta \approx 0,91 \mu\text{m}$. En la figura 6.6(b) se ha ampliado la zona de la fibra más próxima a la discontinuidad, observándose claramente un par de repeticiones del patrón de onda estacionaria y el valor de su periodo que, como no podía ser de otra forma, es coherente con el predicho anteriormente.
- El esperado patrón de difracción en la región de aire. Es importante destacar el buen funcionamiento de las condiciones de contorno PML, que al absorber rápidamente el campo radiado, impide que éste alcance los límites de la ventana de cómputo contaminando los resultados obtenidos.

En la figura 6.7 se representa la potencia remanente en la ventana de cómputo en función de la distancia de propagación para simulaciones realizadas con diferente número de armónicos, de forma que la desviación respecto al 100 % se corresponde obviamente con la fracción de potencia absorbida por las PML. A la vista de estas curvas, parece evidente que los resultados obtenidos con $N_x = N_y = 8$ coeficientes no son lo suficientemente

(a) Corte por $y = 0$.

(b) Detalle de la reflexión en la fibra.

Figura 6.6: Discontinuidad Fibra-Aire. Propagación del campo eléctrico cuando se excita con el modo fundamental. $N_x = N_y = 16$. Radio= $0,98 \mu\text{m}$, $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$.

precisos. Por el contrario, utilizando el doble de armónicos la diferencia máxima respecto a la solución calculada con veinte coeficientes en cada dirección es inferior al 1%, por lo que $N_x = N_y = 16$ armónicos se puede considerar como un valor de compromiso entre coste computacional y precisión numérica. Por otro lado, de estas curvas se puede deducir que el acoplo a los modos radiados de la fibra es prácticamente despreciable, ya que la pérdida de potencia es casi nula hasta alcanzar el interfaz con el aire. Esto quiere decir que casi toda la potencia reflejada en la discontinuidad es transportada por el modo fundamental de la fibra. En el aire, la disminución de potencia en la ventana está relacionada con la llegada de radiación a la zona PML. Hasta $z = 35 \mu\text{m}$ estas pérdidas se mantienen por debajo del 2%, comenzando entonces a aumentar hasta superar el 15% para $z > 50 \mu\text{m}$, lo que es coherente con la propagación de campo que se muestra en la figura 6.6(a).

Para obtener una valoración cuantitativa de la bondad de los resultados obtenidos, en la figura 6.8 se compara el coeficiente de reflexión calculado con la técnica propuesta con los datos proporcionados en [Imtaar1995]. El coeficiente de reflexión se define en este caso como la fracción de potencia que se acopla al modo fundamental reflejado cuando se incide con el modo fundamental de la fibra. No incluye por tanto el traspaso de potencia a los modos radiados de la fibra o a los modos guiados superiores en el caso de que éstos existan. De las curvas representadas en la figura se deduce que:

- El ajuste con la referencia es extraordinariamente bueno si se utilizan al menos $N_x = N_y = 16$ armónicos. Con ocho coeficientes también es posible obtener resul-

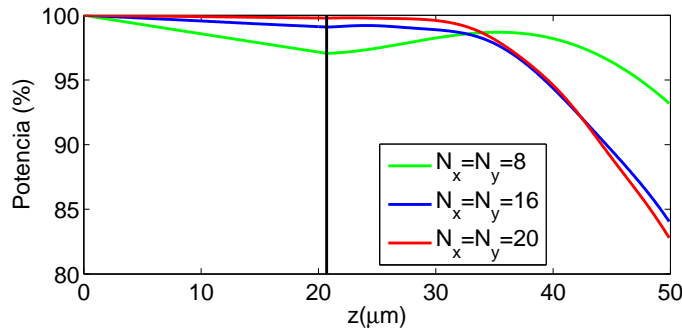


Figura 6.7: Discontinuidad Fibra-Aire. Potencia remanente en la ventana de cómputo cuando se excita con el modo fundamental. Radio= $0,98 \mu\text{m}$, $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$.

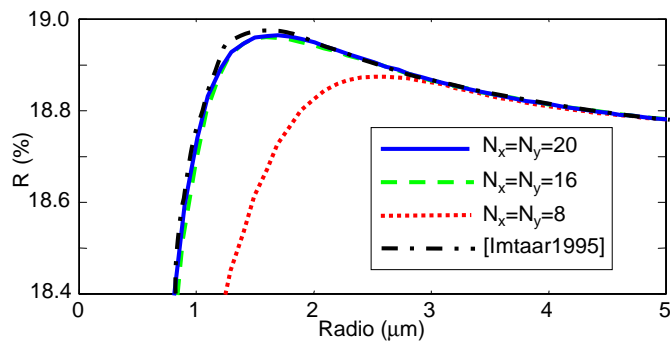


Figura 6.8: Discontinuidad Fibra-Aire. Coeficiente de reflexión del modo fundamental en función del radio. $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$.

tados precisos, pero sólo para radios de la fibra superiores a $3 \mu\text{m}$. Se debe tener en cuenta que en las simulaciones se ha mantenido constante tanto el tamaño de la ventana de cómputo como la posición de las PML con independencia del tamaño del núcleo, por lo que quizá sea posible mejorar los resultados obtenidos con ocho armónicos para radios inferiores a $3 \mu\text{m}$ con una selección más adecuada de estos parámetros.

- El coeficiente de reflexión muestra un máximo para un radio de aproximadamente $1,434 \mu\text{m}$, que se corresponde con el punto en el que la fibra se convierte en multimodo. A partir de ahí disminuye lentamente, lo que está relacionado con la transferencia de parte de la potencia al segundo modo de la fibra [Imtaar1995].

6.3.1.2. Desalineamiento entre fibras

En la figura 6.9 se representa esquemáticamente un problema de desalineamiento entre dos fibras ópticas monomodo con la misma sección transversal. Cuando se incide por la izquierda con el modo fundamental y éste llega al interfaz entre las guías (ver figura 6.10(a)), una parte importante de la potencia incidente se acopla a la segunda fibra, excitando no sólo el modo guiado sino también una fracción de los modos radiados. Esto provoca que en las proximidades de la discontinuidad el campo no se propague de forma completamente paraxial, apareciendo una serie de oscilaciones que se asemejan a 'rebotes' contra el interfaz núcleo-cubierta de la fibra, tal y como se aprecia en la figura

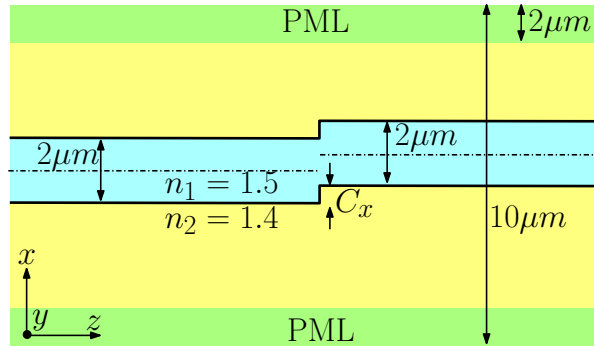
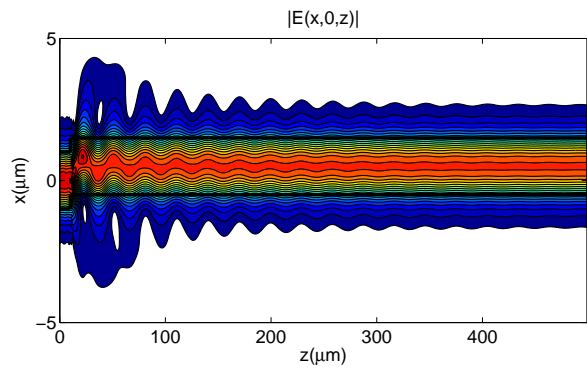


Figura 6.9: Desalineamiento entre fibras. Definición de la geometría.

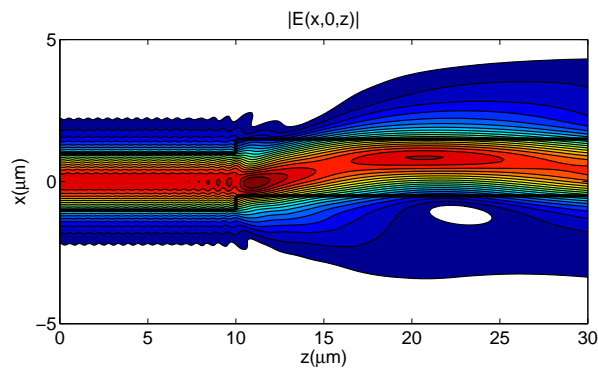
6.10(b). Evidentemente, la amplitud de las componentes no paraxiales decrece a medida que el campo se propaga alejándose de la discontinuidad, ya que éstas están asociadas al subconjunto de modos radiados excitados en la misma, que no cumplen la condición de reflexión total en el interfaz núcleo-cubierta. Esta situación se aprecia claramente en la figura 6.11(a), que representa la potencia remanente en la ventana de cómputo en función de la distancia para diferentes desplazamientos C_x . Tal y como era de esperar, justo después de la discontinuidad se produce en todos los casos una pérdida de potencia muy rápida, que se corresponde con la radiación de las componentes de campo menos paraxiales. Estas pérdidas son mayores cuanto más desplazadas se encuentran entre sí las fibras, de forma que por ejemplo, para $C_x = 1,5 \mu\text{m}$ se radia más del 50 % de la potencia incidente en sólo $40 \mu\text{m}$. A continuación las pendientes de las curvas se suavizan, ya que los factores de pérdidas de los modos radiados cercanos a la paraxialidad son mucho más bajos. Finalmente, a partir de $250 \mu\text{m}$ aproximadamente las curvas de potencia se estabilizan, lo que indica que ha finalizado el transitorio provocado por la discontinuidad y que sólo se está propagando ya el modo guiado.

Para terminar con el estudio de esta estructura, en la figura 6.11(b) se han representado los parámetros de transmisión y reflexión para el modo fundamental en función del desalineamiento entre las fibras. El comportamiento es el esperado, de forma que el $|S_{21}|$ parte de 0 dB para luego disminuir rápidamente a medida que las fibras se alejan entre sí. Por otro lado, la reflexión es nula para $C_x = 0$ y tiende a un valor de -31 dB cuando la separación entre las fibras es superior a $2 \mu\text{m}$. Este valor se encuentra muy próximo al coeficiente de reflexión teórico para una onda plana que incide normalmente sobre un interfaz entre dos medios homogéneos de índices de refracción 1,4 (cubierta) y 1,4477 (N_{eff} del modo fundamental de la fibra) respectivamente. Esta coincidencia se explica si se tiene en cuenta que para $C_x \geq 2 \mu\text{m}$, la segunda fibra se encuentra tan desplazada respecto a la primera que prácticamente no tiene influencia en el cálculo de la reflexión, por lo que el problema es muy parecido al de una única fibra radiando hacia un medio homogéneo de índice de refracción 1,4.

6 El Método de Expansión Modal de Fourier (Fourier-EEM)

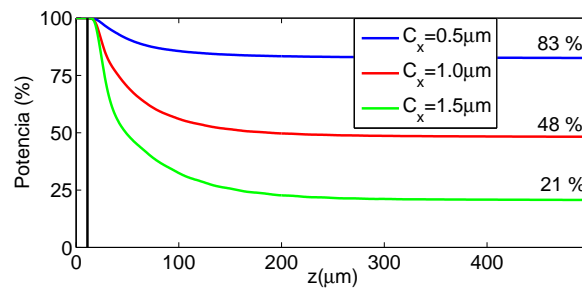


(a) Corte por $y = 0$.

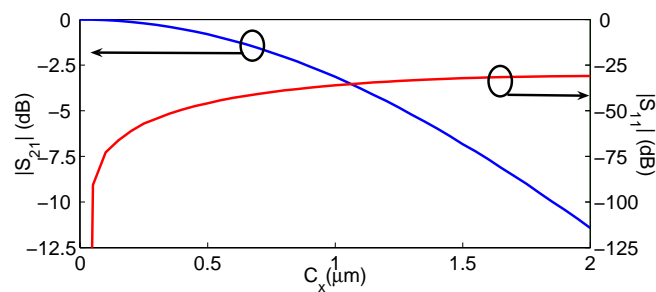


(b) Ampliación de la zona próxima a la discontinuidad.

Figura 6.10: Desalineamiento entre fibras. Propagación del campo eléctrico cuando se excita con el modo fundamental. $N_x = N_y = 20$, $C_x = 0,5 \mu\text{m}$, $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$.



(a) Potencia remanente en la ventana de cómputo.



(b) Parámetros S en función del desalineamiento.

Figura 6.11: Desalineamiento entre fibras. $N_x = N_y = 20$, $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$.

6.3.2. Análisis de un MMI 2x3

En la figura 6.12 se ha representado la geometría de un dispositivo de interferencia multimodal de dos entradas y tres salidas (MMI 2x3) fabricado en tecnología de bajo contraste *Silica-on-Silicon*. Si la longitud de la zona multimodo se escoge adecuadamente, este dispositivo se comporta como un divisor de potencia por tres, cuyos parámetros de transmisión ideales se corresponden con [Ortega2005]

$$\begin{aligned} S_{31} &= S_{52} = \frac{\exp(j\phi)}{\sqrt{3}} \\ S_{41} &= S_{42} = \frac{\exp(j(\phi - \pi))}{\sqrt{3}} \\ S_{51} &= S_{32} = \frac{\exp(j(\phi - 2\pi/3))}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Las dimensiones de las guías de acceso, cuadradas y de tipo buried, se han seleccionado para funcionar en régimen monomodo, mientras que la anchura de la región multimodo se ha elegido para que esta zona sea capaz de soportar diez modos guiados a las longitudes de onda de interés ($\lambda \approx 1,55 \mu\text{m}$). La longitud del MMI, diseñado inicialmente haciendo uso del principio de autoimagen, fue $L_{\text{MMI}} = 3620 \mu\text{m}$, valor que se optimizó posteriormente mediante simulación con el objetivo de minimizar el desbalanceo entre puertas. Tal y como se muestra en la figura 6.13, para una longitud $L_{\text{MMI}} = 3570 \mu\text{m}$ el desbalanceo entre las salidas 3 y 5 es de prácticamente 0 dB, mientras que entre las puertas 3 y 4 por un lado y 4 y 5 por otro, se mantiene por debajo de 0,21 dB. Hay que destacar que el coste computacional asociado al barrido en longitud que se representa en la figura 6.13 es mínimo. Esto se debe a que, al permanecer invariante la geometría transversal de cada una de las tres secciones que componen el MMI (guías de acceso, zona multimodo y guías de salida), no es necesario repetir para cada longitud incluida en la simulación el proceso de diagonalización, que es sin duda el más costoso en tiempo de cómputo. Respecto a los parámetros numéricos de simulación, conviene hacer notar que es necesario adaptar tanto el tamaño de la ventana de cómputo como el número de coeficientes empleado en cada dirección transversal a la geometría del problema, que es mucho más extenso en sentido horizontal que en sentido vertical. Por este motivo se ha elegido una ventana rectangular de tamaño $X_0 \times Y_0 = 77 \times 25 \mu\text{m}^2$ y un número de armónicos diferente en cada dirección ($N_x = 32$, $N_y = 8$). En la figura 6.14 se representa, manteniendo estos parámetros numéricos, la distribución de campo eléctrico obtenida cuando se excita el dispositivo de longitud óptima por el puerto de entrada 2, observándose claramente el fenómeno de interferencia en el interior de la zona multimodo y el acoplo de potencia a cada una de las guías de salida.

La respuesta en frecuencia de los parámetros de transmisión se muestra en la figura 6.15(a), en la que la referencia situada en $-4,7$ dB indica el reparto ideal de potencia entre los puertos. El hecho de que las curvas obtenidas con $N_x \times N_y = 32 \times 8$ y $N_x \times N_y = 64 \times 16$ aparezcan prácticamente superpuestas indica claramente que el con el primer conjunto de valores se ha alcanzado la convergencia, lo que justifica que hayan sido los utilizados en el resto de simulaciones. En las figuras 6.15(b)-(c) se han representado, en función de la longitud de onda, el desbalanceo entre las puertas de salida en módulo y fase respectivamente. Una vez más se pone de manifiesto el excelente comportamiento del dispositivo, ya que en el rango de $\pm 100\text{nm}$ en torno a la longitud de onda central ($\lambda = 1,55 \mu\text{m}$), el desbalanceo se mantiene por debajo de 0,3 dB en valor absoluto,

mientras que el error de fase respecto a los desfases ideales entre puertas (60° , -120° y -180°) es inferior a 5° . Por último, en la figura 6.16(a) se muestran los parámetros de reflexión en función de la longitud de onda. Como es característico en este tipo de dispositivos, las reflexiones son extraordinariamente bajas (siempre se encuentran por debajo de -55 dB), presentando un comportamiento oscilatorio que está relacionado con la interferencia entre las ondas reflejadas a la entrada y a la salida del MMI. Este fenómeno se aprecia con más claridad en la figura 6.16(b), en la que se ha ampliado el margen de frecuencias comprendido entre $1,55 \mu\text{m}$ y $1,551 \mu\text{m}$. Los mínimos de esta curva se corresponden con las longitudes de onda λ_k a las que las reflexiones que se producen a la entrada y a la salida del MMI se suman en contrafase,

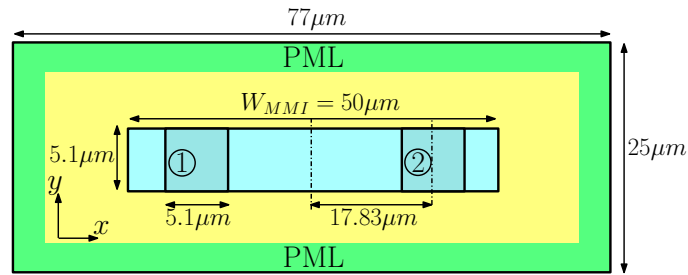
$$\beta(\lambda_k) \cdot (2 \cdot L_{\text{MMI}}) = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi \quad (6.35)$$

Evidentemente, el factor $2 \cdot L_{\text{MMI}}$ se justifica teniendo en cuenta que una de las ondas que participan en el proceso de interferencia recorre el MMI en los dos sentidos, primero hasta alcanzar la segunda discontinuidad y luego otra vez de vuelta hasta la de entrada. Por lo tanto, la separación entre mínimos consecutivos $\Delta\lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ debe cumplir con la siguiente condición

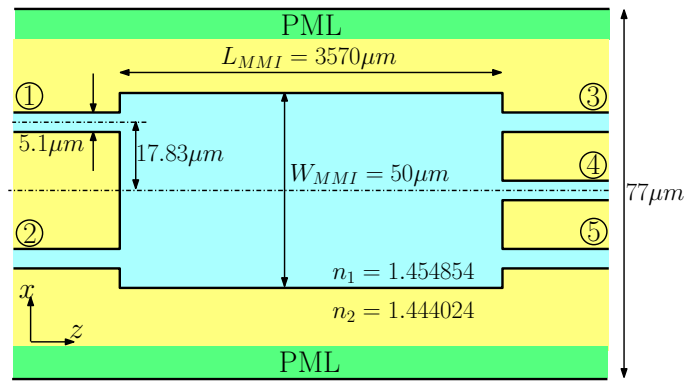
$$[\beta(\lambda_{k+1}) - \beta(\lambda_k)] \cdot (2 \cdot L_{\text{MMI}}) = [\beta(\lambda_k + \Delta\lambda) - \beta(\lambda_k)] \cdot (2 \cdot L_{\text{MMI}}) = 2 \cdot \pi \quad (6.36)$$

Se puede comprobar que, utilizando como constante de propagación β la correspondiente al modo fundamental del MMI, la expresión anterior proporciona una excelente aproximación al valor $\Delta\lambda$ que se observa en la figura 6.16(b).

Por último, en la figura 6.17 se han incluido los tiempos de cálculo en función del número de coeficientes empleado en la discretización transversal del problema. Como era previsible el crecimiento es exponencial, lo que pone de manifiesto la necesidad de trabajar con el menor número de armónicos posible. Por ejemplo, cuando se utilizan $N_x \times N_y = 32 \times 8$ coeficientes el tiempo de cómputo es de sólo 21 segundos, cantidad que se incrementa hasta 138 segundos cuando se duplica el número de coeficientes en dirección x . Es importante destacar que en estos tiempos de cómputo se incluyen todas las acciones necesarias para calcular la matriz de parámetros S multipuerto de la estructura, lo que en el caso que se está analizando implica resolver ocho problemas de autovalores: uno por cada una de las tres secciones que componen el dispositivo y otro por cada uno de sus cinco puertos de acceso. De hecho, ésta es sin duda la operación más costosa del proceso de caracterización de la estructura, consumiendo aproximadamente dos tercios del tiempo total de cómputo.



(a) Sección transversal.



(b) Vista superior.

Figura 6.12: MMI 2x3. Definición de la geometría.

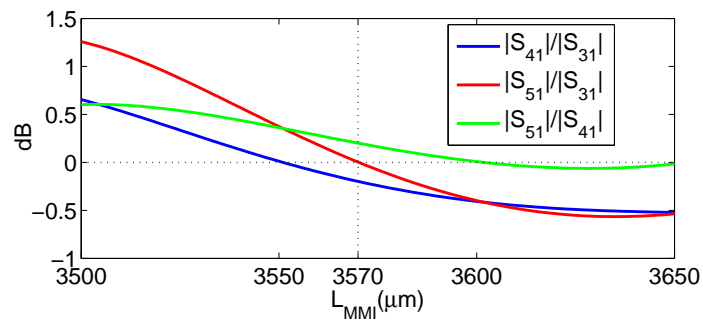


Figura 6.13: MMI 2x3. Desbalanceo (módulo en dB) entre las puertas de salida en función de la longitud del MMI. $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$. $N_x = 32$, $N_y = 8$.

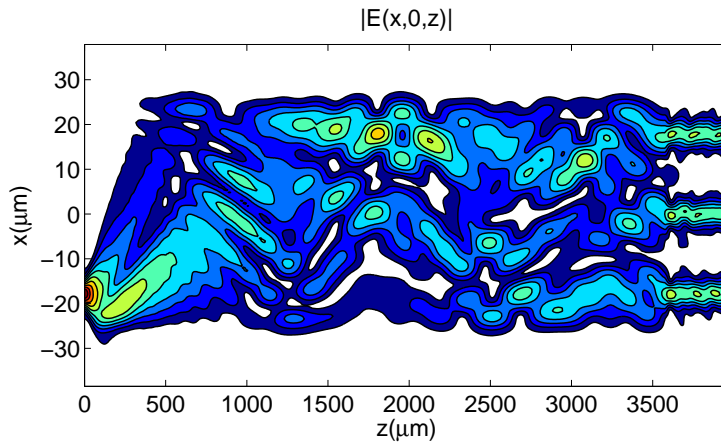
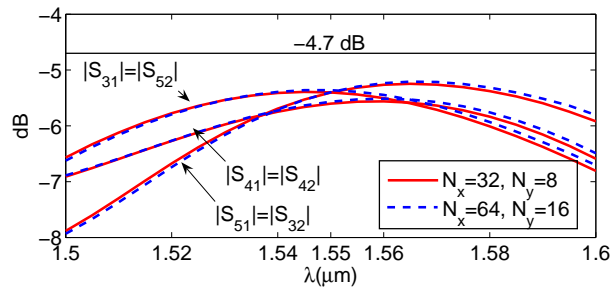
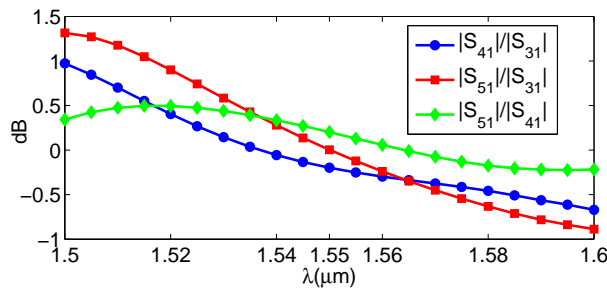


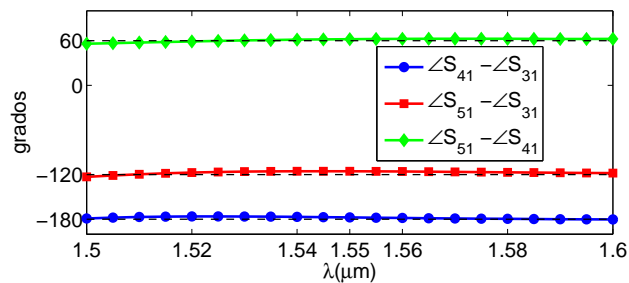
Figura 6.14: MMI 2x3. Propagación del campo eléctrico (corte por $y = 0$) cuando se excita por el puerto 2. $L_{MMI} = 3570 \mu\text{m}$, $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$. $N_x = 32$, $N_y = 8$.



(a) Módulo (dB) de los parámetros S.

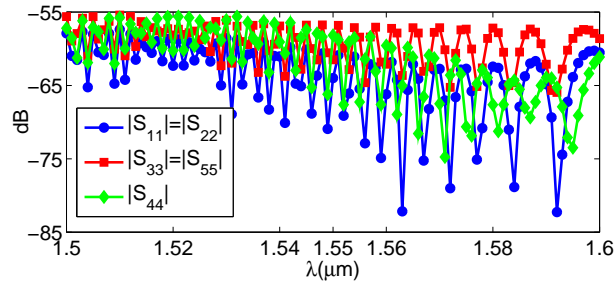


(b) Desbalanceo (dB) entre puerttas de salida.

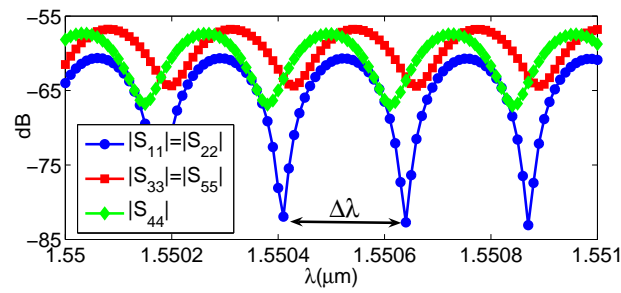


(c) Desbalanceo (grados) entre puerttas de salida.

Figura 6.15: MMI 2x3. Parámetros de transmisión en función de la longitud de onda.



(a) $\lambda \in (1,5 - 1,6) \mu\text{m}$.



(b) $\lambda \in (1,55 - 1,551) \mu\text{m}$.

Figura 6.16: MMI 2x3. Parámetros de reflexión (dB) en función de la longitud de onda.

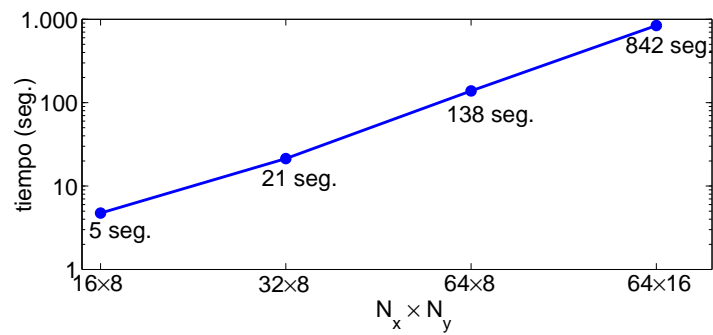


Figura 6.17: MMI 2x3. Tiempos de cómputo.

6.3.3. Análisis Vectorial de una Transición Abrupta en Rib

Hasta ahora todas las estructuras analizadas lo han sido bajo la aproximación escalar, lo que redundaba en menores tiempos de cálculo y requerimientos de memoria. A continuación y como validación preliminar de la técnica propuesta en situaciones vectoriales, se va a realizar un análisis completamente vectorial del acoplo directo entre dos guías *rib* de diferentes sección transversal fabricadas en tecnología de alto contraste (InGaAsP/InP). Más concretamente, se van a calcular las pérdidas de inserción provocadas por la variación de la profundidad de grabado de la segunda guía³, tal y como se muestra en la figura 6.18.

La tabla 6.1 recoge las pérdidas de inserción obtenidas con el Fourier-EEM para dos profundidades de grabado diferentes ($D_{out} = 425nm$ y $D_{out} = 225nm$ respectivamente). A efectos de comparación, se han incluido también los valores obtenidos calculando la integral de solapamiento entre las distribuciones espaciales de campo⁴ simuladas con el software comercial FIMMWAVE. En todos los casos excepto en uno se observa un buen ajuste entre los resultados obtenidos con las diferentes herramientas, siendo el valor discordante el correspondiente al modo Quasi-TE incidiendo en la guía más profunda ($D_{out} = 225nm$). Sin embargo, aumentando el número de coeficientes hasta $N_x = N_y = 24$ las pérdidas de inserción se reducen hasta 0,34 dB, lo que parece indicar que la discrepancia en este caso se debe al uso de un número insuficiente de armónicos en la simulación.

Con la intención de visualizar cómo se produce el acoplo de potencia entre las guías, en la figura 6.19 se ha representado la propagación de la componente mayoritaria del campo eléctrico cuando se excita con el modo Quasi-TE de la *rib* de entrada. El interfaz entre las guías se ha situado en $z = 20 \mu m$, mientras que los cortes seleccionados en ambas direcciones transversales ($x = 0$, $y_c = 0,9 \mu m$ respectivamente) se corresponden con posiciones en las que el campo se encuentra próximo a su valor máximo. De estos resultados se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Al aumentar la profundidad de grabado el campo se confina más en dirección x , tal y como se muestra en las figuras 6.19(a) y (c).
- Aunque el nivel de las reflexiones que se producen en la discontinuidad parece bajo en ambos casos, se puede apreciar que es algo superior en la guía con mayor profundidad de grabado ($D_{out} = 225nm$).

³Este problema surgió en el marco de un contrato de colaboración de nuestro grupo de investigación con el Fraunhofer Heinrich-Hertz-Institut para el modelado y simulación de dispositivos fotónicos.

⁴Evidentemente, la validez de esta aproximación se restringe a problemas en los que las pérdidas por reflexión sean muy bajas.

	$D_{out} = 425nm$		$D_{out} = 225nm$	
	Quasi-TE	Quasi-TM	Quasi-TE	Quasi-TM
Fourier-EEM Escalar				
($N_x = N_y = 20$)		0,087 dB		0,248 dB
Fourier-EEM Vectorial				
($N_x = N_y = 20$)	0,112 dB	0,074 dB	0,407 dB	0,202 dB
FIMMWAVE				
(Solapamiento entre modos)	0,098 dB	0,075 dB	0,296 dB	0,215 dB

Tabla 6.1: Transición abrupta en *rib*. Pérdidas de inserción.

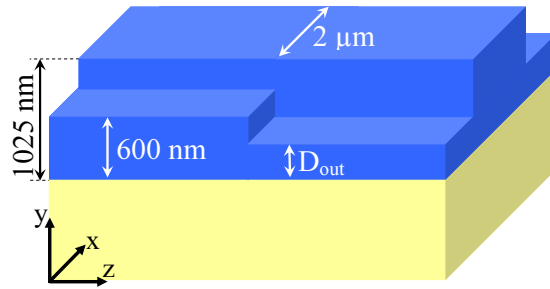


Figura 6.18: Transición abrupta en *rib*. Definición de la geometría.

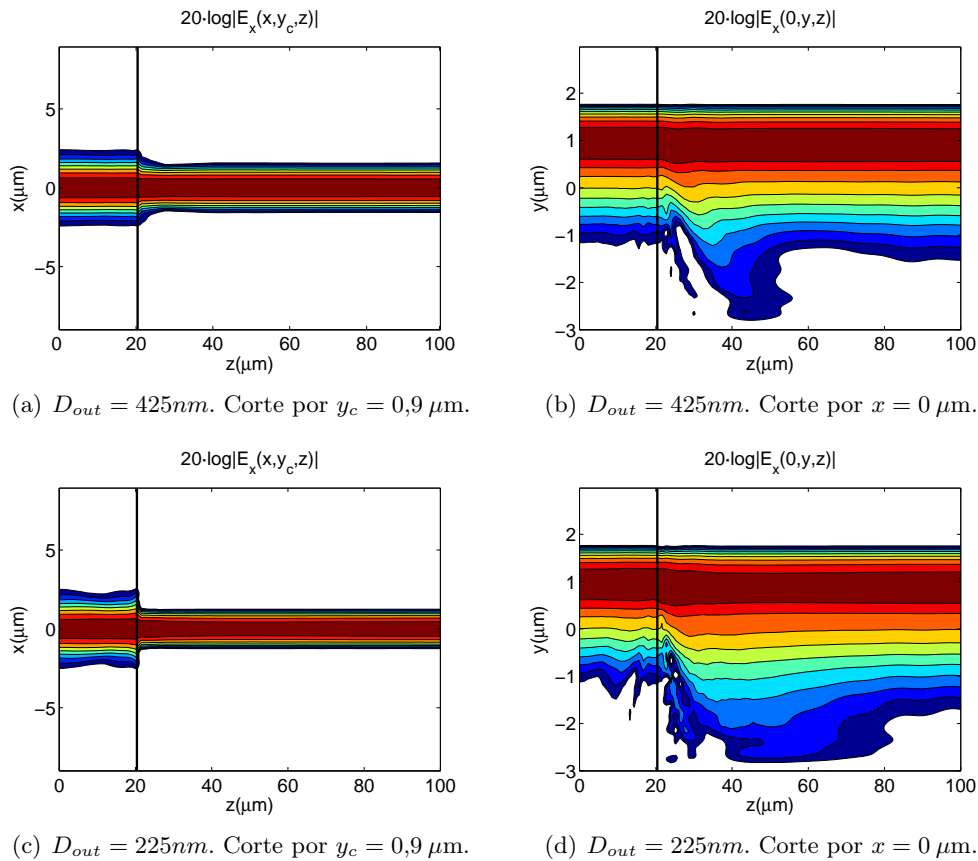


Figura 6.19: Transición abrupta en *rib*. Propagación de la componente mayoritaria del campo eléctrico (modo Quasi-TE).

- Las pérdidas de inserción se deben fundamentalmente a radiación de potencia hacia la zona del substrato. Esto se pone claramente de manifiesto en las figuras 6.19(b) y (d), donde además se observa que las PML están funcionando correctamente, absorbiendo la radiación saliente e impidiendo que ésta llegue a los extremos de la ventana de cómputo.
- En la guía con $D_{out} = 225nm$ el campo se desplaza sensiblemente hacia el substrato, lo que justifica un mayor nivel de radiación (claramente visible en dichas figuras) y por tanto unas mayores pérdidas de inserción.

6.3.4. Caracterización de Estructuras Periódicas

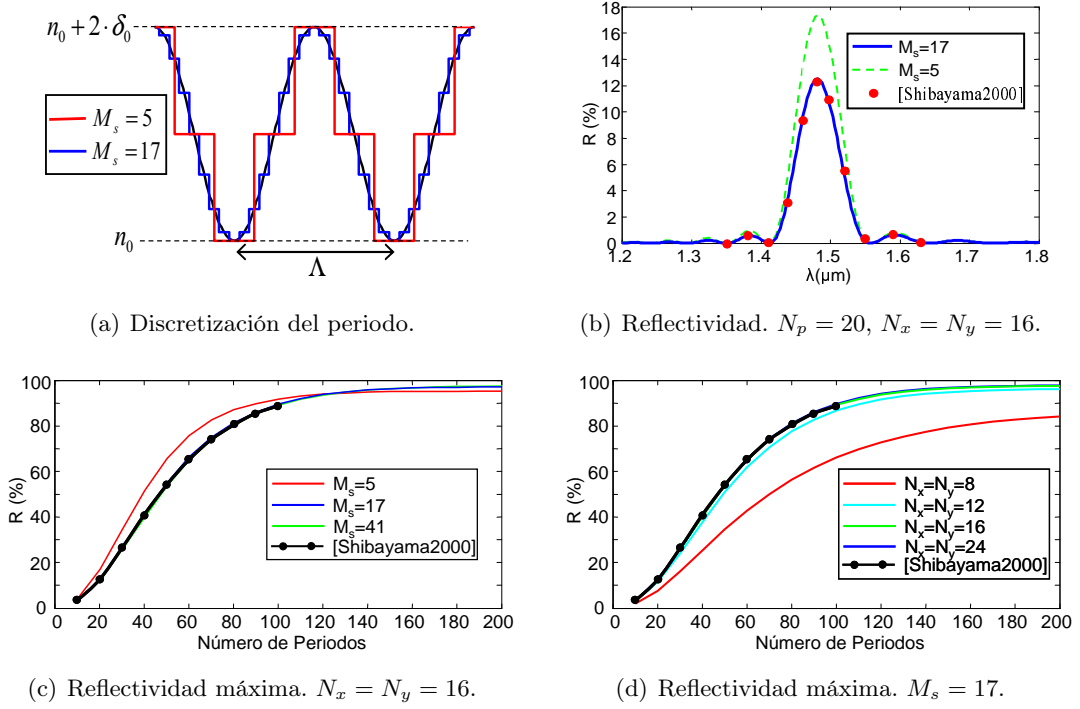
6.3.4.1. Análisis de un *Fiber Bragg Grating* monomodo

Para validar el funcionamiento del Fourier-EEM en el análisis de estructuras periódicas se ha decidido comenzar analizando un *Fiber Bragg Grating* (FBG) monomodo como el propuesto en [Shibayama2000], cuyo perfil transversal de índice de refracción viene dado por

$$n(r, z) = \begin{cases} n_0 + \delta_0 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} \cdot z\right)\right) & r \leq a \\ n_1 & r > a \end{cases} \quad (6.37)$$

siendo $a = 1 \mu\text{m}$ el radio del núcleo de la fibra, $\Lambda = 0,5 \mu\text{m}$ el periodo del *grating*, $n_0 = 1,5$ el índice de refracción original del núcleo y $n_1 = 1,45$ el de la cubierta. Por último, $\delta_0 = 0,025$ representa el incremento medio del índice de refracción del núcleo en un periodo.

Al ser el contraste de índice relativamente bajo, la utilización de la aproximación escalar no va a comprometer la precisión de los resultados obtenidos, permitiendo reducir significativamente los requerimientos de memoria y los tiempos de cómputo respecto al caso vectorial. Por otro lado, se hace necesario introducir un nuevo parámetro numérico que haga referencia a la discretización longitudinal de la estructura, ya que al ser continua la variación con z del índice de refracción del núcleo en un periodo, éste debe ser muestreado tal y como se muestra en la figura 6.20(a). El parámetro al que se acaba de hacer referencia es el número de secciones por periodo del *grating* M_s , que debe ser elegido convenientemente ya que de él depende tanto la precisión de los resultados obtenidos como los requerimientos computacionales. Evidentemente, a mayor número de secciones más costosa resulta la evaluación de la matriz de transferencia de un periodo, ya que se incrementa el número de problemas de autovalores y el de discontinuidades que hay que resolver. Por este motivo conviene mantener M_s al valor más bajo posible que garantice que los resultados han convergido. En la figura 6.20(b) se han representado, para un *grating* compuesto por $N_p = 20$ periodos, las curvas de reflectividad en función de la longitud de onda obtenidas con el método propuesto ($N_x = N_y = 16$ coeficientes) y dos valores diferentes del parámetro de discretización longitudinal M_s . Mientras que para $M_s = 17$ secciones por periodo la coincidencia con los resultados publicados en [Shibayama2000] es total en toda la banda, cuando este número se reduce hasta $M_s = 5$ los valores calculados se desvían visiblemente de los anteriores, lo que indica que este muestreo longitudinal es demasiado escaso como para obtener resultados precisos. En la figura 6.20(c) se ha representado la reflectividad máxima del *grating* en función del número de periodos N_p , tomando el número de secciones por periodo M_s como un parámetro y manteniendo constante el número de armónicos empleado en el desarrollo en serie de los campos ($N_x = N_y = 16$). En este caso los resultados obtenidos con $M_s = 17$ y $M_s = 41$ son prácticamente indistinguibles entre sí, coincidiendo a su vez con los que se presentan en [Shibayama2000]. Cuando el número de secciones por periodo se reduce a $M_s = 5$ se produce un error que llega a superar el 10 % para $N_p = 50$, pero que disminuye hasta mantenerse por debajo del 2 % para $N_p > 100$. En cuanto a la convergencia con el número de armónicos, a la vista de los resultados que se muestran en la figura 6.20(d) parece que el utilizado en las simulaciones anteriores ($N_x = N_y = 16$) es más que suficiente para obtener resultados precisos. Con este número de coeficientes y utilizando $M_s = 17$ secciones por periodo, el tiempo de cómputo es de unos 20 segundos aproximadamente en un PC de sobremesa.

Figura 6.20: Análisis de un *Fiber Bragg Grating* monomodo.

6.3.4.2. Análisis de un *Fiber Bragg Grating* multimodo

En FBG basadas en fibras multimodo, pueden existir longitudes de onda λ_r a las que dos modos diferentes cumplan la condición de fase del *grating*, que viene dada por la siguiente expresión [Mizunami2000]

$$\beta_1(\lambda_r) = \beta_2(\lambda_r) + \frac{2 \cdot \pi}{\Lambda} \quad (6.38)$$

donde β_1 y β_2 son las constantes de propagación asociadas a cada uno de esos modos⁵. Si además las distribuciones espaciales de campo de esos modos permiten el acoplo de potencia entre ambos, el espectro de reflectividad del dispositivo puede presentar picos a estas longitudes de onda, cuya amplitud va a depender de la eficiencia del acoplo entre dichos modos [Hill1997], [Mizunami2000], [Lu2006].

En este epígrafe se van a analizar dos FBG basados en fibra multimodo como los propuestos en [Lu2006], que se encuentran definidos por los siguientes parámetros físicos: $a = 5 \mu\text{m}$, $n_0 = 1,4545$, $n_1 = 1,43$, $\delta_0 = 0,0022$, $\Lambda = 0,535 \mu\text{m}$ y $N_p = 1500$. La diferencia entre ambas estructuras se encuentra en el perfil de variación del índice, que en un caso es cosenoidal como el definido por (6.37) mientras que en el otro, como resultado de una exposición muy larga durante el proceso de fabricación, se ha saturado y tiene forma cuadrada. A las longitudes de onda de interés, en torno a $1,55 \mu\text{m}$, la fibra original es capaz de soportar cinco modos guiados (LP_{01} , LP_{11} , LP_{21} , LP_{02} , LP_{31}), de los cuales sólo nos van a interesar en este estudio el LP_{01} y el LP_{02} , ya que son los únicos entre los que se va a producir acoplo de potencia. En la figura 6.21(a) se muestra la curva de reflectividad

⁵Por supuesto, para el mismo modo se tiene que $\beta_2 = -\beta_1$, con lo que aparece la condición de fase típica en FBG monomodo, esto es, $\beta_1(\lambda_r) = \pi/\Lambda$.

en función de la longitud de onda cuando el FBG con variación cosenoidal del índice se excita con el modo LP_{01} . En esta simulación se han utilizado $N_x = N_y = 16$ armónicos y $M_s = 17$ secciones por periodo, lo que proporciona resultados que son indistinguibles de los de la referencia [Shibayama2000]. El pequeño pico situado aproximadamente en $\lambda = 1,5473 \mu\text{m}$, cuya amplitud no es coherente con las de los lóbulos secundarios (que a esa longitud de onda deberían ser casi nulos), se corresponde precisamente con el acoplo entre los modos LP_{01} y el LP_{02} que predice la teoría.

En la figura 6.21(b) se ha representado la curva de reflectividad para el FBG con variación cuadrada del índice. Evidentemente ahora sólo es necesario utilizar dos secciones por periodo, lo que reduce significativamente el tiempo de cómputo. Como era de esperar, por un lado el lóbulo principal sigue centrado en la misma posición aunque se ensancha significativamente respecto al caso anterior. Por otro lado, los lóbulos laterales tienen mayor amplitud, llegando a superar los dos que rodean al principal una reflectividad del 40 %. Este comportamiento está relacionado con el hecho de que, al ser las variaciones del índice de refracción del núcleo más abruptas que en el *grating* cosenoidal, la onda incidente se refleja completamente antes de alcanzar el final del *grating*, con lo que la longitud efectiva del mismo es menor [Hill1997]. Al igual que antes, la suave elevación situada en $\lambda = 1,5473 \mu\text{m}$, de una amplitud máxima aproximadamente igual al 10 %, se debe al acoplo de potencia entre los modos LP_{01} y el LP_{02} . En comparación con los resultados que se presentan en [Lu2006], se observa un buen ajuste en el lóbulo principal pero no tanto en los secundarios, cuya amplitud difiere visiblemente. Aunque para asegurar cual de las dos curvas es más precisa sería necesario acudir a una tercera referencia, lo cierto es que los resultados proporcionados por el Fourier-EEM parecen más ajustados a la realidad, ya que los máximos de los picos de reflectividad decrecen monótonamente al alejarse de la longitud de onda central, lo que se corresponde con el comportamiento esperado. Asumiendo que efectivamente la curva calculada con el método propuesto es correcta, todavía quedaría encontrar una justificación a la falta de precisión de las simulaciones incluidas en [Lu2006]. Una posible explicación estaría relacionada con las limitaciones inherentes al método de resolución utilizado en esta referencia, basado en la teoría de modos acoplados y que plantea un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el que sólo tienen en cuenta los modos LP_{01} y el LP_{02} . Para resolver este sistema, en la referencia se propone utilizar un método de Runge-Kutta de cuarto orden junto con un algoritmo iterativo que guarda cierta similitud con el que se explicó en el epígrafe 6.2.3.1. Dado que como se explicó anteriormente, en el *grating* saturado las reflexiones son mayores que en el *grating* de variación cosenoidal del índice, es de esperar que ahora dicho algoritmo converja más lentamente, necesitando un número de iteraciones mucho mayor para conseguir caracterizar correctamente los lóbulos laterales de la curva de reflectividad. Si el criterio de parada del algoritmo iterativo no es lo suficientemente estricto, los resultados para el lóbulo principal serán precisos pero no ocurrirá así con el resto, lo que es coherente con la gráfica de reflectividad proporcionada para este caso en [Lu2006].

En la figura 6.21(c) se ha dibujado la curva de reflectividad del FBG con variación cuadrada del índice cuando se excita con los modos LP_{01} y LP_{02} simultáneamente y con la misma potencia. De estos resultados se debe destacar que:

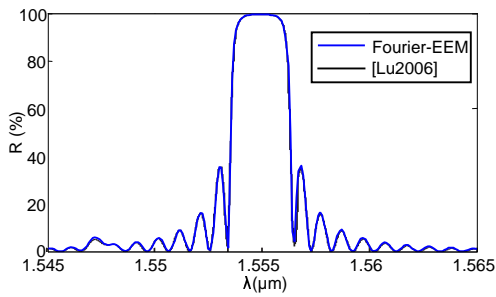
- Existen dos bandas de alta reflectividad centradas en $\lambda = 1,54 \mu\text{m}$ y $\lambda = 1,555 \mu\text{m}$, que se corresponden respectivamente con las longitudes de onda de *Bragg* de los modos LP_{02} y LP_{01} . La amplitud máxima de cada una de ellas es del 50 % aproximadamente, lo que indica que el modo LP_{02} es reflejado completamente en la

primera banda sin sufrir reflexión alguna en la segunda y viceversa.

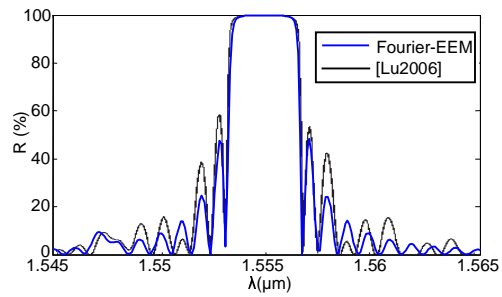
- Al igual que antes y probablemente por la misma causa, se consigue un buen ajuste con los resultados proporcionados en la referencia para los lóbulos principales de ambas bandas pero no para los secundarios.
- De nuevo aparece una elevación en la curva de reflectividad situada aproximadamente en $\lambda = 1,5473 \mu\text{m}$, que en la referencia tiene una amplitud cercana al 20 %, mientras que por el contrario con el Fourier-EEM sólo alcanza el 5 %. Una vez más el resultado presentado en [Lu2006] parece poco coherente ya que, aunque se sumaran en fase las reflexiones ocasionadas por el acoplo del modo LP_{01} al LP_{02} por un lado y del LP_{02} al LP_{01} por otro, su amplitud no podría nunca superar la fracción de potencia que se acopla entre dichos modos y que se encuentra en torno al 10 %.
- El Fourier-EEM predice una reflectividad del 10 % aproximadamente alrededor de $\lambda = 1,532 \mu\text{m}$, un valor muy superior al calculado en [Lu2006]. Esta discrepancia se debe a que parte de la potencia incidente se refleja y se acopla a los modos radiados de la fibra de entrada al *grating*, lo que no se puede tener en cuenta en la referencia anterior porque dichos modos no se incluyen en el cálculo.

Por último, en la figura 6.21(d) se muestran respectivamente las curvas de transmisividad y de pérdidas por radiación en el interior del *grating* cuando se excita con los modos LP_{01} y LP_{02} simultáneamente y con la misma potencia. Evidentemente, la transmisividad es la inversa de la reflectividad en toda la banda en la que no se produce acoplo de potencia a los modos radiados. En torno a $\lambda = 1,532 \mu\text{m}$ su valor desciende hasta aproximadamente el 83 %, correspondiendo el 10 % de la potencia que no llega al extremo del FBG a reflexiones a la entrada del dispositivo y el resto a pérdidas por radiación en su interior.

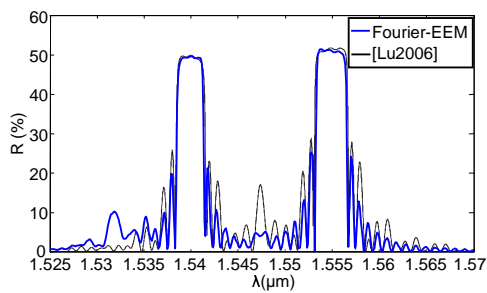
6 El Método de Expansión Modal de Fourier (Fourier-EEM)



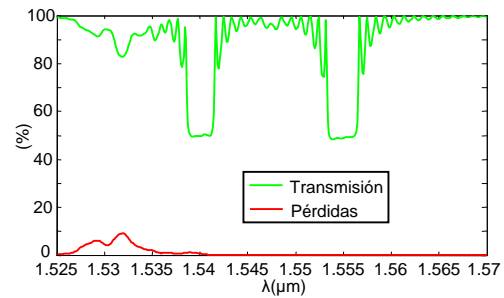
(a) Modulación cosenoidal del índice. Reflectividad cuando se excita con el modo LP_{01} .



(b) Modulación cuadrada del índice. Reflectividad cuando se excita con el modo LP_{01} .



(c) Modulación cuadrada del índice. Reflectividad cuando se excita simultáneamente con los modos LP_{01} y LP_{02} .



(d) Modulación cuadrada del índice. Transmisividad y pérdidas por radiación cuando se excita simultáneamente con los modos LP_{01} y LP_{02} .

Figura 6.21: Análisis de un *Fiber Bragg Grating* multimodo.

7 Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

7.1. Conclusiones

EN esta Tesis se han desarrollado y validado tres herramientas numéricas de simulación dedicadas al análisis y diseño de dispositivos fotónicos. Estas herramientas pertenecen a la familia de los *Métodos Espectrales* y son por tanto una alternativa a los *Métodos Locales* como las *Diferencias Finitas* o los *Elementos Finitos*. Como se explicó en el **Capítulo 3**, los métodos espectrales se caracterizan por utilizar una estrategia de discretización transversal de carácter global, en la que la función que se desea calcular se desarrolla en una serie de funciones base globales (definidas en todo el dominio computacional) como las de *Fourier* o *Hermite-Gauss*. Aplicando seguidamente la estrategia de *Galerkin*, estos métodos consiguen plantear un sistema matricial denso que constituye una aproximación numérica al problema original. De esta forma, la ecuación de análisis modal que se dedujo en el **Capítulo 2** se transforma en un problema de autovalores y autovectores, que se corresponden respectivamente con las constantes de propagación complejas y los coeficientes del desarrollo en serie de los modos que soporta la estructura. Evidentemente hay tres factores que influyen de forma decisiva en el coste computacional y la precisión de los resultados obtenidos: i) el espacio funcional elegido, ii) las condiciones de contorno aplicadas y iii) la estrategia de resolución del problema de autovalores utilizada. A lo largo del trabajo desarrollado en esta Tesis ha sido necesario superar muchos de los problemas intrínsecos de los métodos espectrales clásicos. Estas dificultades, que se encuentran íntimamente relacionadas con los factores que se acaban de enumerar, han venido limitando en el pasado las prestaciones de dichos métodos, haciéndolos poco atractivos en comparación con los métodos locales. Las aportaciones realizadas en esta Tesis han contribuido a mejorar la competitividad de los métodos espectrales en aplicaciones de gran interés práctico, como la caracterización modal precisa de fibras de cristal fotónico o el análisis y diseño de dispositivos ópticos integrados como los MMI. A continuación se van a presentar de forma resumida las contribuciones más relevantes propuestas en este Tesis Doctoral.

1. El Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo (A-HGDM)

Los *Métodos de Descomposición de Hermite-Gauss* (HGDM) constituyen una familia de técnicas espectrales para el análisis modal de dispositivos ópticos que se caracteriza por utilizar como espacio funcional las funciones base de Hermite-Gauss. En los HGDM se justifica la elección del espacio funcional por el gran parecido entre las funciones base y los modos guiados de la estructura que se desea analizar. Si se cumple esta hipótesis, el número de términos que se debe emplear en el desarrollo en serie de los campos puede ser muy reducido, lo que finalmente redundará en un menor coste computacional. Sin embargo, el parámetro de escalado que ajusta el ancho de las funciones base a la geometría del problema a resolver influye de forma determinante en el cumplimiento de la hipótesis anterior, de manera que si no se

elige adecuadamente las tasas de convergencia con el número de armónicos pueden llegar a ser extraordinariamente bajas. El parámetro de escalado que se utiliza habitualmente proporciona buenos resultados cuando se aplica al análisis de modos muy confinados en la zona de guiado. Sin embargo, aplicado a modos próximos al corte se encuentra lejos de ser el óptimo, lo que perjudica gravemente las prestaciones del método. Por otro lado, los métodos existentes en la bibliografía no incluyen parámetros de centrado que permitan una mejor adaptación de las funciones base a problemas asimétricos, lo que también contribuye a reducir su velocidad de convergencia. El *Método de Descomposición de Hermite-Gauss Adaptativo* (A-HGDM) introduce dos mejoras importantes respecto a los HGDM clásicos, ya que:

- Utiliza el concepto de transformación de variables, definiendo una transformación de tipo lineal que incorpora dos parámetros diferentes, asociados respectivamente al factor de escalado y al centro de las funciones base. Este último parámetro es necesario para analizar problemas en los que las distribuciones espaciales de campo de los modos no sean simétricas.
- Implementa una estrategia adaptativa de optimización de parámetros, que permite determinar con un coste computacional reducido los parámetros óptimos de la transformación. A diferencia de otras técnicas de optimización anteriores, la estrategia propuesta se basa en la minimización del ancho de banda espectral de la distribución de campo, lo que permite reducir al mínimo el número de veces que es necesario formular y resolver el problema de autovalores.

El funcionamiento del A-HGDM ha sido verificado de forma exhaustiva en problemas escalares, habiendo demostrado unas prestaciones muy superiores a las de los métodos anteriores cuando se aplica a la caracterización de modos cercanos al corte o al análisis de dispositivos asimétricos como el acoplador direccional en *rib*. Las pruebas llevadas a cabo en situaciones vectoriales son aún preliminares, pero parecen confirmar el buen comportamiento de la técnica propuesta incluso en estos casos.

2. El Método de Caracterización Modal Basado en la FFT (FFT-MS)

Bajo la denominación de *Métodos de Descomposición de Fourier* (FDM) se agrupan un conjunto muy amplio de técnicas numéricas diferentes con aplicaciones muy variadas, que van desde el análisis modal a la determinación de las características de transmisión y reflexión de estructuras periódicas tipo *grating*. Todas ellas tienen en común el uso del espacio funcional de Fourier para el desarrollo en serie de la función buscada, que en el ámbito de la óptica suele ser la distribución espacial de campo eléctrico o magnético. Dentro de esta familia, las *Técnicas de Análisis Modal basadas en la FFT* (FFT-MS) forman a su vez un subconjunto de métodos caracterizados por:

- En lugar de realizar la diagonalización completa de la matriz del sistema, utilizan una técnica iterativa de cálculo que permite determinar de forma eficiente y selectiva uno o varios autovalores/autovectores de ésta, que generalmente se corresponden con los modos guiados de la estructura analizada.
- Reemplazan el cálculo directo de los operadores producto por convoluciones rápidas basadas en la transformada rápida de Fourier (FFT), cuya eficiencia

computacional es mucho mayor.

- No requieren calcular ni almacenar de forma explícita la matriz del sistema, lo que reduce enormemente los requerimientos de memoria y permite aumentar de forma muy notable el número de armónicos que se pueden emplear en el desarrollo en serie de los campos.

Respecto a los FFT-MS publicados anteriormente en la bibliografía, el método propuesto en esta Tesis proporciona dos ventajas importantes:

- Independiza el número de puntos de discretización transversal del número de armónicos, lo que permite aumentar la densidad de mado espacial sin incrementar el tamaño del problema de autovalores. Actuando de esta forma es posible mejorar espectacularmente la precisión de los resultados obtenidos en problemas vectoriales de guiado fuerte sin incrementar el tamaño del problema de autovalores.
- Incorpora condiciones de contorno absorbentes perfectamente adaptadas del tipo PML coordenada compleja. En problemas de análisis modal, las PML permiten estimar de forma precisa las pérdidas por confinamiento de los modos *leaky*, que aparecen por ejemplo en estructuras como las fibras de cristal fotónico (PCF) con un número finito de agujeros de aire. Por otro lado, también facilitan la selección de los modos guiados durante el proceso iterativo de cálculo de autovalores, filtrando las soluciones espurias que aparecen como resultado de la periodización del problema asociada al uso del espacio funcional de Fourier y que no tienen sentido físico.

Para la evaluación de las prestaciones de esta técnica de análisis modal se han realizado simulaciones completamente vectoriales de: i) guías *rib* compuestas por materiales con y sin pérdidas, ii) PCF idealizadas formadas por un número finito de agujeros de aire circulares en torno al defecto y iii) PCF realistas en las que, como resultado del proceso de fabricación, la forma de los agujeros de aire es irregular. Siempre que ha sido posible se han comparado los resultados de las simulaciones (índice efectivo, pérdidas de confinamiento, longitud de acoplo, birrefringencia, etc.) con los disponibles en la bibliografía, obtenidos a su vez con una gran variedad de técnicas numéricas de primer nivel. En todos los casos analizados el método propuesto ha demostrado un excelente comportamiento en cuanto a precisión y coste computacional, siendo sus prestaciones comparables e incluso superiores a las de cualquiera de las otras técnicas.

3. El Método de Expansión Modal de Fourier (Fourier-EEM)

El *Método de Expansión Modal de Fourier* (Fourier-EEM) es el resultado de aplicar de forma conjunta la estrategia de discretización transversal propia de los FDM con la técnica de expansión modal (*Eigenmode Expansion Method* (EEM)). El Fourier-EEM incluye también condiciones de contorno absorbentes perfectamente adaptadas del tipo PML coordenada compleja y permite el análisis eficiente de estructuras y dispositivos ópticos que presenten discontinuidades abruptas en la dirección de propagación como los MMI. En su versión escalar, el método propuesto ha demostrado ser una herramienta de simulación de gran utilidad para el diseñador de dispositivos ópticos, ya que resultó imprescindible durante el proceso de análisis y diseño del circuito fotónico integrado en tecnología de bajo contraste *Silica-on*

Silicon propuesto en [Molina2005]. Por otro lado, con la reciente incorporación del formalismo de los *modos Floquet* ha sido posible abordar el análisis de dispositivos periódicos compuestos por cientos e incluso miles de periodos como los *Fiber Bragg Grating* (FBG). En cuanto a su extensión al caso vectorial, hay que decir que la formulación ha sido desarrollada completamente y está operativa una versión simplificada del mismo capaz de analizar discontinuidades aisladas, que ha sido utilizada con éxito para caracterizar el acoplo directo entre guías *rib* de alto contraste y diferente sección transversal.

7.2. Líneas Futuras de Investigación

1. FFT-MS: Implementar estrategias de mallado adaptativo

En su estado actual, una de las principales limitaciones del FFT-MS es la necesidad de imponer una densidad de mallado uniforme para cada una de las direcciones transversales del problema. En la práctica, para una estructura como la representada en la figura 7.1(a), que se corresponde con una guía ARROW (*Antiresonant Reflecting Optical Waveguide*) [Duguay1986], esta restricción obliga a utilizar un número de puntos de discretización transversal muy elevado. Esto es así porque, tal y como se muestra esquemáticamente en la figura 7.1(b), utilizando mallado uniforme esa es la única forma de garantizar que se ha muestreado correctamente la lámina de Si_3N_4 , cuyo grosor es muy inferior al resto de dimensiones del problema. De hecho, algo similar ocurre siempre que se desee obtener una descripción precisa de la posición de los interfaces de una estructura, aunque esta última dificultad se soluciona habitualmente suavizando levemente el índice de refracción, tal y como se explicó en el epígrafe 3.6.2. La alternativa al muestreo espacial uniforme es bien conocida y consiste en utilizar un mallado adaptativo que proporcione mayor densidad de muestras en aquellas zonas de la estructura que posean mayor complejidad espacial, tal y como se ha representado en la figura 7.1(c). Sin embargo, la adopción de un esquema de discretización transversal no uniforme dista mucho de ser inmediata en los métodos basados en la FFT, ya que la transformada rápida de Fourier implica necesariamente la utilización de vectores de muestras equiespaciadas. Afortunadamente, esta dificultad se puede superar haciendo uso de las conocidas *técnicas de transformación de variables*, que ya fueron aplicadas con éxito hace algunos años para solucionar los problemas de periodicidad de la ventana de cómputo en los métodos de Fourier [Hewlett1995], [Wanguemert2001]. Aunque en un principio pudiera parecer que el uso de estas técnicas de transformación de variables va a aumentar notablemente el coste computacional, lo cierto es que en problemas que precisen la utilización de condiciones de contorno PML esto no es así. El motivo es que, tal y como se explicó en el epígrafe 2.7.4, las propias PML en su versión variable compleja no son otra cosa que una transformación de variables, por lo que es posible combinarlas con el mallado adaptativo definiendo una única transformación que combine ambas funciones.

2. FFT-MS: Eliminar el fenómeno de Gibbs.

Es un hecho bien conocido que, al desarrollar en serie una función discontinua utilizando un espacio funcional de funciones continuas, el error punto a punto en las proximidades de dicha discontinuidad no converge uniformemente a cero con

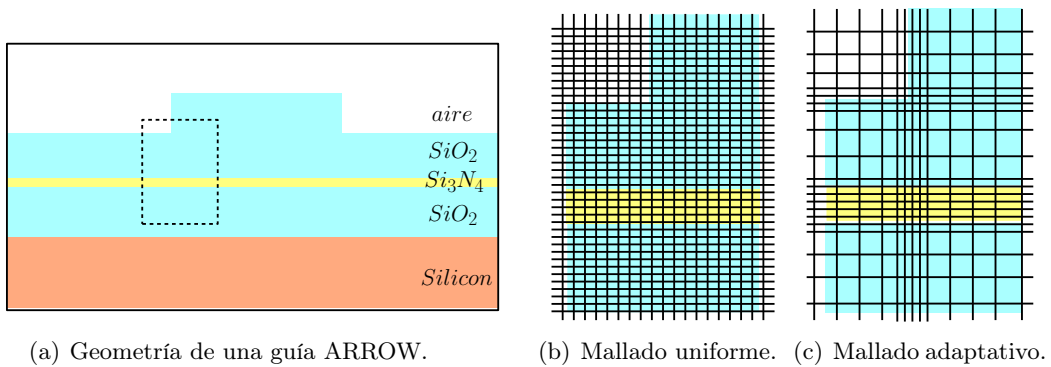


Figura 7.1: Estrategias de mallado.

el número de armónicos. En el caso de utilizar el espacio funcional de Fourier esta característica recibe el nombre de *fenómeno de Gibbs* y se traduce finalmente en un comportamiento oscilatorio de la función aproximada alrededor de los puntos de discontinuidad de la función original. En problemas electromagnéticos que impliquen campos eléctricos fuertemente discontinuos, el fenómeno de Gibbs compromete gravemente la precisión de los resultados obtenidos, disminuyendo la competitividad de los métodos espectrales respecto a los basados en estrategias de discretización local como los elementos finitos. En los FDM clásicos, esta dificultad se supera haciendo uso de la denominada *Regla Inversa* [Li1996], [Hugonin2005], [David2006], una nueva regla de factorización que sustituye a la conocida *Regla de Laurent* para la evaluación de las convoluciones. Lamentablemente esta técnica no es aplicable a los FFT-MS, lo que limita la precisión que se puede alcanzar con esta familia de métodos cuando se analizan estructuras como el *Photonic Wire* representado en la figura 7.2(a), que soporta modos cuya distribución transversal de campo es fuertemente discontinua, como se muestra en la figura 7.2(b). Por este motivo, en los últimos tiempos los esfuerzos se han centrado en desarrollar una estrategia que permita eliminar el fenómeno de Gibbs y conseguir así solucionar los problemas de precisión del FFT-MS en esos casos. Recientemente se han publicado una serie de trabajos en los que se incluyen resultados que, aunque todavía preliminares, permiten ser optimistas ante el futuro de los métodos de simulación basados en la FFT [Wanguemert2007]. En la figura 7.2(c) se ha representado un corte de la distribución de campo del modo fundamental (Quasi-TE) obtenida con el método propuesto en esta Tesis (FFT-MS) y con la nueva versión que elimina el fenómeno de Gibbs, denominado *Spectrum-Splitting-FFT-MS* (SS-FFT-MS). La mejora obtenida con la nueva técnica es más que evidente, quedando especialmente de manifiesto en las proximidades de la discontinuidad, tal y como se muestra en la figura 7.2(d). Obviamente esto va a tener un reflejo directo en la precisión de las constantes de propagación calculadas, cuyas curvas de convergencia se han representado en la figura 7.2(e) y que muestran una mejora de prestaciones espectacular. A pesar de los buenos resultados preliminares obtenidos con el SS-FFT-MS, lo cierto es que en esta línea de trabajo todavía queda mucho por hacer. Por un lado, parece muy recomendable combinar la técnica de eliminación del fenómeno de Gibbs con el mallado adaptativo al que se hizo referencia en el punto anterior. Por otro lado, es imprescindible dotar al nuevo método de condiciones de contorno absorbentes tipo PML, ya que éstas van a ser necesarias, por ejemplo, para evaluar las pérdidas

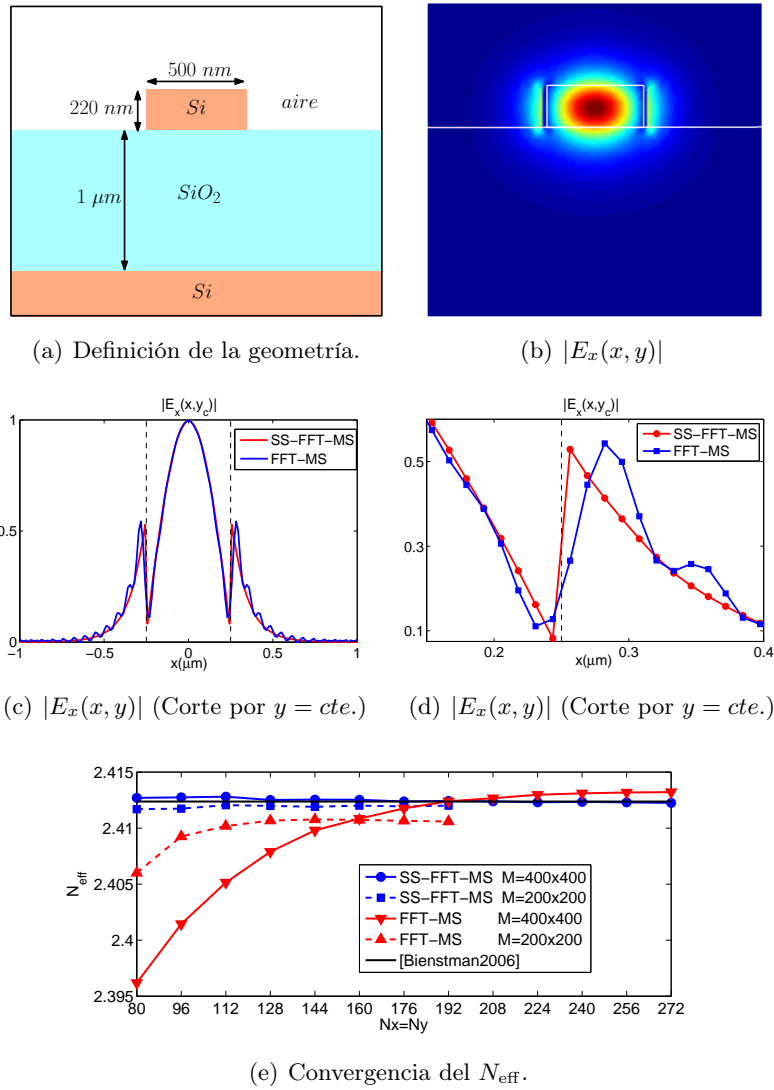


Figura 7.2: Análisis del modo Quasi-TE de un *Photonic Wire* fabricado en tecnología *Silicon on Insulator* (Acción Europea COST P11, [Bienstman2006]).

por radiación en el sustrato de los modos de un *Photonic Wire*.

3. FFT-MS: Acelerar la convergencia del cálculo de autovalores

Como ya se adelantó en el epígrafe 3.5.2, es posible aumentar considerablemente la velocidad de convergencia del algoritmo de cálculo de autovalores si, en lugar de buscar un valor extremo (el de mayor o menor módulo, parte real o parte imaginaria), se seleccionan aquellos autovalores que más se aproximan a un valor determinado σ . Puesto que en un problema de análisis modal es fácil disponer de una estimación aproximada del autovalor correspondiente al modo que se desea calcular, ésta sería una opción muy interesante para mejorar los tiempos de cómputo. Lamentablemente, la aplicación de esta idea al FFT-MS no es en absoluto obvia. La razón es que el algoritmo iterativo requiere en este caso la evaluación de productos del tipo $(\overline{\overline{M}} - \sigma \overline{\overline{I}})^{-1} \cdot \Phi$, que son difíciles de llevar a cabo si la matriz del

sistema $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ no se determina de forma explícita. La forma de superar este problema es utilizar un resolutor iterativo de sistemas de ecuaciones lineales que sea capaz de encontrar de forma eficiente las soluciones del sistema $(\overline{\overline{\mathbf{M}}} - \sigma \overline{\overline{\mathbf{I}}}) \cdot \mathbf{y} = \overline{\overline{\Phi}}$ en base a productos $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \overline{\overline{\Phi}}$, que son los que sabemos calcular fácilmente vía FFT. Estos resolutores iterativos de sistemas de ecuaciones lineales afortunadamente existen (un ejemplo es la función `gmres.m` de Matlab), pero presentan serios problemas de convergencia si el sistema no se preconditiona de la forma adecuada, lo cual es una dificultad añadida [Pearce2005] que se deberá tener en cuenta.

4. Fourier-EEM: Mejorar la versión vectorial

En su concepción actual, el Fourier-EEM pertenece a la familia de métodos FDM clásicos, entendiéndose como tales aquellos que calculan la matriz del sistema de forma explícita para luego diagonalizarla completamente. Esto proporciona como base para la expansión modal todos los modos guiados más un subconjunto del continuo de modos radiados, que depende de las condiciones de contorno y del número de armónicos con los que se esté analizando el problema. La experiencia ha venido a demostrar que esta forma de actuar es razonable en problemas escalares, en los que la complejidad computacional se mantiene acotada. Por el contrario, la aplicación de esta estrategia a situaciones vectoriales no parece apropiada, ya que los tiempos de cómputo crecen enormemente y la limitación en el número de armónicos va a impedir obtener resultados precisos en condiciones de guiado fuerte. Como alternativa a la técnica propuesta en esta Tesis, una futura línea de trabajo debería abordar una estrategia combinada, que por un lado calcule de forma eficiente y precisa los modos guiados mediante el FFT-MS, mientras que por el otro utilice el FDM con resolución limitada en número de armónicos para realizar el muestreo de los modos radiados. La principal ventaja de esta nueva técnica radicaría en que los modos guiados, que son habitualmente los que más influyen en la precisión del método de expansión modal, se encontrarían ahora muy bien calculados.

Bibliografía

- [Agrawal1995] AGRAWAL, G. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 1995.
- [Anderson1999] ANDERSON, E., Z. BAI, Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., y Sorensen D. *LAPACK User's Guide*. SIAM, 1999.
- [Berenger1994] BERENGER, J. P. «A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves.» *Journal of Computational Physics*, 114, (1994), 185–200.
- [Bienstman2001] BIENSTMAN, P. *Rigorous and Efficient Modelling of Wavelength Scale Photonic Components*. Tesis Doctoral, Universiteit Gent. Vakgroep Informatietechnologie., 2001.
- [Bienstman2004] —. «Two-Stage Mode Finder for Waveguides with a 2D Cross-Section.» *Optical and Quantum Electronics*, 36, (2004), 5–14.
- [Bienstman2006] BIENSTMAN, P., S. SELLERI, L. ROSA, H. URANUS, W. HOPMAN, R. COSTA, A. MELLONI, L. ANDREANI, J. HUGONIN, P. LALANNE, D. PINTO, S. OBAYYA, M. DEMS, y K. PANAJOTOV. «Modelling Leaky Photonic Wires: A Mode Solver Comparison.» *Optical and Quantum Electronics*, 38, (2006), 731–759.
- [Blanco2006] BLANCO, F. J., M. AGIRREGABIRIA, J. BERGANZO, K. MAYORA, J. ELIZALDE, A. CALLE, C. DOMINGUEZ, , y L. M. LECHUGA. «Microfluidic-Optical Integrated CMOS Compatible Devices for Label-Free Biochemical Sensing.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16, (2006), 1006–1016.
- [Boyd1989] BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Springer-Verlag, 1989.
- [Chew1997] CHEW, W. C., J. M. JIN, y E. MICHELSEN. «Complex Coordinate Stretching as a Generalized Absorbing Boundary Condition.» *Microwave and Optical Technology Letters*, 15, (1997), 363–369.
- [Chew1994] CHEW, W. C., y W.H. WEEDON. «A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwells Equations with Stretched Coordinates.» *Microwave and Optical Technology Letters*, 7, (1994), 599–604.
- [Collin1990] COLLIN, Robert E. *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press, 1990.
- [David2006] DAVID, Aurélien, Henri BENISTY, y Claude WEISBUCH. «Fast Factorization Rule and Plane-Wave Expansion Method for Two-Dimensional Photonic Crystals with Arbitrary Hole-Shape.» *PHYSICAL REVIEW B*, 73, (2006), 075107–1 – 075107–7.

Bibliografía

- [Davidson1996] DAVIDSON, C.R. «Undersea Lightwave Transmission Technology and Techniques.» *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, (1996), 1299–1302.
- [Dems2005] DEMS, M., R. KOTYNSKI, y K. PANAJOTOV. «PlaneWave Admittance Method. A Novel Approach for Determining the Electromagnetic Modes in Photonic Structures.» *Optics Express*, 13, (2005), 3196–3207.
- [Densmore2006] DENSMORE, A., D.X. XU, P. WALDRON, S. JANZ, P. CHEBEN, J. LAPOINTE, A. DELÂGE, B. LAMONTAGNE, J. H. SCHMID, y E. POST. «A Silicon-on-Insulator Photonic Wire Based Evanescent Field Sensor.» *IEEE Photonic Technology Letters*, 23, (2006), 2520–2522.
- [Dorazio2003] D´ORAZIO, Antonella, Marco DE SARIO, Vincenzo PETRUZZELLI, y Francesco PRUDENZANO. «Bidirectional Beam Propagation Method Based on the Method of Lines for the Analysis of Photonic Band Gap Structures.» *Optical and Quantum Electronics*, 35, (2003), 629–640.
- [Dorazio2000] D´ORAZIO, Antonella, Marco DE SARIO, Vincenzo PETRUZZELLI, Francesco PRUDENZANO, y Leonardo SASSI. «Demonstration of a Fabry-Perot Active Switch by the Bidirectional MoL-BPM.» En *Proceedings of the 10th Mediterranean Electrotechnical Conference, Melecon 2000, Vol. I, 265-268*. 2000.
- [Duguay1986] DUGUAY, M. A., Y. KOKUBUN, T. L. KOCH, y L. PFEIFFER. «Anti-resonant Reflecting Optical Waveguides in SiO₂-Si Multilayer Structures.» *Applied Physic Letters*, 49, (1986), 13–15.
- [Feit1978] FEIT, M. D., y J.A. FLECK. «Light Propagation in Graded-Index Optical Fibers.» *Applied Optics*, 17, (1978), 3390–3398.
- [Ferrando2001] FERRANDO, A., E. SILVESTRE, P. ANDRÉS, J.J. MIRET, y M.V. ANDRÉS. «Designing the Dispersion Properties of Dispersion-Flattened Photonic Crystal Fibers.» *Optics Express*, 9, (2001), 687–697.
- [FTTH2007] FTTH, Council. <http://www.ftthcouncil.org/>.
- [Gallawa1991] GALLAWA, R.L., I.C. GOYAL, Y. TU, y A.K. GHATAK. «Optical Waveguide Modes: An Approximate Solution Using Galerkin Method with Hermite-Gauss Basis Functions.» *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 27, (1991), 518–522.
- [Hadley1992] HADLEY, G. Ronald. «Transparent Boundary Condition for the Beam Propagation Method.» *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28, (1992), 363–370.
- [Helfert2002] HELFERT, S.F., y R. PREGLA. «The Method of Lines: A Versatile Tool for the Analysis of Waveguide Structures.» *Electromagnetics*, 22, (2002), 615–637.

- [Henry1989] HENRY, C.H., y B.H. VERBEEK. «Solution of the Scalar Wave Equation for Arbitrarily Shaped Dielectric Waveguides by Two-Dimensional Fourier Analysis.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 7, (1989), 308–313.
- [Hewlett1995] HEWLETT, S.J., y F. LADOUCEUR. «Fourier Decomposition Method Applied to Mapped Infinite Domains: Scalar Analysis of Dielectric Waveguides Down to Modal Cutoff.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 13, (1995), 375–383.
- [Hill1997] HILL, K. O., y G. MELTZ. «Fiber Bragg Grating Technology. Fundamental and Overview.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 15, (1997), 1263–1276.
- [Hill1997a] HILL, K.O., y G. MELTZ. «Lightwave Applications of Fiber Bragg Gratings.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 15, (1997), 1391–1403.
- [Hugonin2005] HUGONIN, J.P., P. LALANNE, I. DEL VILLAR, y I.R. MATÍAS. «Fourier Modal Methods for Modeling Optical Dielectric Waveguides.» *Optical and Quantum Electronics*, 37, (2005), 107–119.
- [IBM2005] IBM, ZRL Photonics Group. «Optical Interconnects. Intra-System Data Transfer With Light.» *Inf. téc.*, IBM Corporation, 2005.
- [Ilic1996] ILIC, I., R. SCARMOZZINO, y R.M. Osgood JR. «Investigation of the Padé Approximant-Based Wide-Angle Beam Propagation Method for Accurate Modeling of Waveguiding Circuits.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 14, (1996), 2813–2822.
- [Imtaar1995] IMTAAR, M., y S.J. A. BADER. «Analysis of Diffraction from Abruptly-Terminated Optical Fibers by Method of Lines.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 13, (1995), 137–141.
- [Itoh1989] ITOH, T. (ed.) *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter Wave Passive Structures*. John Wiley & Sons, 1989.
- [Johnson2001] JOHNSON, S.G., y J.D. JOANNOPOULOS. «Block-Iterative Frequency-Domain Methods for Maxwell's Equations in a Planewave Basis.» *Optics Express*, 8, (2001), 173–190.
- [Kaczmariski1988] KACZMARSKI, P., y P. E. LAGASSE. «Bidirectional Beam Propagation Method.» *Electronic Letters*, 24, (1988), 675–676.
- [Koshiba2003] KOSHIBA, M., y K. SAITOH. «Polarization-Dependent Confinement Losses in Actual Holey Fibers.» *IEEE Photonic Technology Letters*, 15, (2003), 691–693.
- [Lehoucq1996] LEHOUCQ, R.B., y D.C. SORENSEN. «Deflation Techniques for an Implicitly Re-Started Arnoldi Iteration.» *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 17, (1996), 789–821.

Bibliografía

- [Lehouck1998] LEHOUCQ, R.B., D.C. SORESENSEN, y C. YANG. *ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. SIAM Publications, 1998.
- [Li1996] LI, Lifeng. «Use of Fourier Series in the Analysis of Discontinuous Periodic Structures.» *Journal of the Optical Society of America A*, 13, (1996), 1870–1876.
- [Lifante2003] LIFANTE, Ginés. *Integrated Photonics Fundamentals*. John Wiley & Sons, 2003.
- [Lopez2005] LOPEZ DOÑA, J.M., J.G. WANGÜEMERT PEREZ, y I. MOLINA FERNANDEZ. «Fast Fourier Based Three Dimensional Full Vectorial Beam Propagation Method.» *IEEE Photonic Technology Letters*, 17, (2005), 2319–2321.
- [Lou2003] LOU, T., y D. YEVICK. «A Vectorial Boundary Element Method Analysis of Integrated Optical Devices.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 21, (2003), 1793–1807.
- [Lu2006] LU, Changgui, y Yiping CUI. «Fiber Bragg Grating Spectra in Multimode Optical Fibers.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 24, (2006), 508–604.
- [Ma1996] MA, F., C.L. XU, y W.P. HUANG. «Wide-Angle Full Vectorial Beam Propagation Method.» *IEE Proceedings Optoelectronic*, 143, (1996), 139–143.
- [Maiman1960] MAIMAN, T. H. «Stimulated Optical Radiation in Ruby Masers.» *Nature*, 187, (1960), 493–494.
- [Marcuse1992] MARCUSE, D. «Solution of the Vector Wave Equation for General Dielectric Waveguides by the Galerkin Method.» *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28, (1992), 459–465.
- [Maruyama1994] MARUYAMA, S., M. KOSHIBA, y K. HIRAYAMA. «A Vector Finite Element Method with the High-Order Mixed-Interpolation-Type Triangular Elements for Optical Waveguiding Problems.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 12, (1994), 495–502.
- [Mears1987] MEARS, R.J., L.REEKIE, I.M.JAUNCEY, y D.N.PAYNE. «Low-Noise Erbium-Doped Fibre Amplifier at $1,54\mu$ m.» *Electronic Letters*, 23, (1987), 1026–1028.
- [Miller1969] MILLER, S. E. «Integrated Optics: An Introduction.» *Bell System Technical Journal*, 48, (1969), 2059–2069.
- [Mizunami2000] MIZUNAMI, Toru, Tzvetanka V. DJAMBOVA, Tsutomu NIIHO, y Sanjay GUPTA. «Bragg Gratings in Multimode and Few-Mode Optical Fibers.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 18, (2000), 230–235.

- [Molina2005] MOLINA FERNANDEZ, I., J. G. WANGÜEMERT PEREZ, A. ORTEGA MOÑUX, A. R. G. BOSISIO, y K. WU. «Planar Lightwave Circuit Six-Port Technique for Optical Measurements and Characterizations.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 23, (2005), 2148–2157.
- [Molina1998] MOLINA FERNANDEZ, I., y J.G. WANGÜEMERT PEREZ. «Variable Transformed Series Expansion Approach for the Analysis of Nonlinear Guided Waves in Planar Dielectric Waveguides.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 16, (1998), 1354–1363.
- [Marz1995] MÄRZ, Reinhard. *Integrated Optics: Design and Modeling*. Artech House, 1995.
- [Obayya2005] OBAYYA, S.S.A., B.M.A. RAHMAN, y K.T.V. GRATTAN. «Accurate Finite Element Modal Solution of Photonic Crystal Fibres.» *IEEE Proceedings Optoelectronics*, 152, (2005), 241–246.
- [Obayya2002] OBAYYA, S.S.A., B.M.A. RAHMAN, K.T.V. GRATTAN, y H.A. ELMIKATI. «Full Vectorial Finite-Element-Based Imaginary Distance Beam Propagation Solution of Complex Modes in Optical Waveguides.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 20, (2002), 1054–1060.
- [Oliner1981] OLINER, A.A., S. T. PENG, T. I. HSU, y A. SANCHEZ. «Guidance and Leakage Properties of a Class of Open Dielectric Waveguides. II. New Physical Effects.» *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 29, (1981), 855–869.
- [Oliva2006] DE OLIVA RUBIO, José. *Desarrollo y Validación de Técnicas de Diferencias Finitas para el Análisis y Diseño de Dispositivos Ópticos Lineales y No-Lineales*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga, Málaga (Spain), 2006.
- [Olympios] OLYMPIOS. <http://www.c2v.nl>.
- [Ortega2005] ORTEGA MOÑUX, A., I. MOLINA FERNANDEZ, y J.G. WANGÜEMERT PEREZ. «3D-Scalar Fourier Eigenvector Expansion Method (Fourier-EEM) for Analyzing Optical Waveguide Discontinuities.» *Optical and Quantum Electronics*, 37, (2005), 213–228.
- [Ortega2003] ORTEGA MOÑUX, A., J. G. WANGÜEMERT PEREZ, y I. MOLINA FERNANDEZ. «Adaptive Hermite-Gauss Decomposition Method to Analyze Optical Dielectric Waveguides.» *Journal of the Optical Society of America A*, 20, (2003), 557–568.
- [Ortega2006] ORTEGA MOÑUX, A., J.G. WANGÜEMERT PEREZ, I. MOLINA FERNANDEZ, E. SILVESTRE, y P. ANDRÉS. «Enhanced Accuracy in Fast Fourier Based Methods for Full-Vector Modal Analysis of Dielectric Waveguides.» *IEEE Photonic Technology Letters*, 18, (2006), 1128–1130.
- [Ortega2007] ORTEGA MOÑUX, A., J.G. WANGÜEMERT PÉREZ, y I. MOLINA FERNANDEZ. «Accurate Analysis of Photonic Crystal Fibers by Means

Bibliografía

- of the Fast-Fourier-Based Mode Solver.» *IEEE Photonic Technology Letters*, 19, (2007), 414–417.
- [Ortigosa2000] ORTIGOSA BLANCH, A., J. C. KNIGHT, W. J. WADSWORTH, J. ARRIAGA, B. J. MANGAN, T. A. BIRKS, y P. S. J. RUSSELL. «Highly Birefringent Photonic Crystal Fibers.» *Optics Letters*, 25, (2000), 1325–1327.
- [Page1992] PAGE, J.E., J.M. REBOLLAR, J.A. ENCINAR, C. CAMACHO, y J. ESTEBAN. *Temas Avanzados en Teoría Electromagnética*. Universidad Politécnica de Madrid, 1992.
- [Pavesi2003] PAVESI, L. «Will Silicon Be the Photonic Material of the Third Millennium?» *Journal of Physics: Condensed Matter*, 15, (2003), R1169–R1196.
- [Pearce2005] PEARCE, G. J., T. D. HEDLEY, y D. M. BIRD. «Adaptive Curvilinear Coordinates in a Plane-Wave Solution of Maxwell’s Equations in Photonic Crystals.» *PHYSICAL REVIEW B*, 71, (2005), 195108–1 – 195108–10.
- [Pregla1992] PREGLA, R. «Vectorial Analysis of Optical Waveguides by the Method of Lines.» *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1992. AP-S. 1992 Digest.*, (1992), 253–256.
- [Pregla1989] PREGLA, R., y W. PASCHER. *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter Wave Passive Structures*. John Wiley Publ., 1989.
- [Radke1996] RADKE, Richard J. *A Matlab Implementation of the Implicitly Restarted Arnoldi Method for Solving Large-Scale Eigenvalue Problems*. Tesis Doctoral, Rice University, Houston, Texas, 1996.
- [Rao1999] RAO, H., R. SCARMOZZINO, y R. M. Osgood JR. «A Bidirectional Beam Propagation Method for Multiple Dielectric Interfaces.» *IEEE Photonic Technology Letters*, 11, (1999), 830–832.
- [Rasmussen1993] RASMUSSEN, T., J. H. POVLSEN, A. BJARKLEV, O. LUMHOLT, B. PEDERSEN, y K. ROTTWITT. «Detailed Comparison of Two Approximate Methods for the Solution of the Scalar Wave Equation for a Rectangular Optical Waveguide.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 11, (1993), 429–433.
- [Reed2005] REED, Graham T., y Andrew P. KNIGHTS. *Silicon Photonics An Introduction*. John Wiley & Sons, 2005.
- [Roberts2001] ROBERTS, P. J., y T. J. SHEPHERD. «The Guidance Properties of Multi-Core Photonic Crystal Fibers.» *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 3, (2001), S133–S140.
- [Rogge1993] ROGGE, U., y R. PREGLA. «Method of Lines for the Analysis of Dielectric Waveguides.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 11, (1993), 2015–2020.

- [Rozzi1997] ROZZI, T., y M. MONGIARDO. *Open Electromagnetic Waveguides*. The Institution of Electrical Engineers, 1997.
- [Sacks1995] SACKS, Z.S., D.M. KINGSLAND, R. LEE, y J. LEE. «A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Boundary Condition.» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43, (1995), 1460–1463.
- [Saitoh2005] SAITOH, K., y M. KOSHIBA. «Numerical Modeling of Photonic Crystal Fibers.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 23, (2005), 3580–3590.
- [Salib2004] SALIB, Mike, Ling LIAO, Richard JONES, Mike MORSE, Ansheng LIU, Dean SAMARA-RUBIO, Drew ALDUINO, y Mario PANICCIA. «Silicon Photonics.» *Intel Technology Journal*, 8, (2004), 143–160.
- [Scarmozzino2000] SCARMOZZINO, R., A. GOPINATH, R. PREGLA, y S. HELFERT. «Numerical Techniques for Modeling Guided-Wave Photonic Devices.» *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6, (2000), 150–162.
- [Selleri2001] SELLERI, S., y J. PETRÁČEK. «Modal Analysis of Rib Waveguide Through Finite Element and Mode Matching Methods.» *Optical and Quantum Electronics*, 33, (2001), 373–386.
- [Shibayama2000] SHIBAYAMA, J., T. TAKAHASHI, J. YAMAUCHI, y H. NAKANO. «Efficient Time-Domain Finite-Difference Beam Propagation Methods for the Analysis of Slab and Circularly Symmetric Waveguides.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 18, (2000), 437–442.
- [Silvestre1998] SILVESTRE, E., M.V. ANDRÉS, y P. ANDRÉS. «Biorthonormal-Basis Method for the Vector Description of Optical-Fiber Modes.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 16, (1998), 923–928.
- [Silvestre2005] SILVESTRE, E., T. PINHEIRO ORTEGA, P. ANDRÉS, J.J. MIRET, y A. ORTIGOSA BLANCH. «Analytical Evaluation of Chromatic Dispersion in Photonic Crystal Fibers.» *Optics Letters*, 30, (2005), 453–455.
- [Smit1996] SMIT, Meint K., y Cor VAN DAM. «PHASAR-Based WDM-Devices: Principles, Design and Applications.» *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 2, (1996), 236–250.
- [Snyder1983] SNYDER, A., y J. LOVE. *Optical Waveguide Theory*. Cahpman and Hall, 1983.
- [Soref2006] SOREF, R. «The Past, Present, and Future of Silicon Photonics.» *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 12, (2006), 1678–1687.
- [Sorensen1992] SORENSEN, D.C. «Implicit Application of Polynomial Filters in a k-Step Arnoldi Method.» *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 13, (1992), 357–385.

Bibliografía

- [Sudbo1993] SUDBO, A. S. «Film Mode Matching: A Versatile Numerical Method for Vector Mode Field Calculations in Dielectric Waveguides.» *Pure Applied Optics*, 2, (1993), 211–233.
- [Tamir1988] TAMIR, Theodor (ed.) *Guided-Wave Optoelectronics*. Springer-Verlag, 1988.
- [Teixeira1997] TEIXEIRA, F., y W. CHEW. «Systematic Derivation of Anisotropic PML Absorbing Media in Cylindrical and Spherical Coordinates.» *Microwave Guided wave Letters*, 7, (1997), 371–373.
- [Uranus2004] URANUS, H.P., H.J.W.M. HOEKSTRA, y E. VAN GROESEN. «Galerkin Finite Element Scheme with Bayliss-Gunzburger-Turkel-Like Boundary Conditions for Vectorial Optical Mode Solver.» *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 13, (2004), 175–194.
- [Vassallo1997] VASSALLO, C. «1993–1995 Optical Mode Solvers.» *Optical and Quantum Electronics*, 29, (1997), 95–114.
- [Wanguemert1999] WANGÜEMERT PEREZ, J. G. *Desarrollo y Validación de Métodos Espectrales para el Análisis y Diseño de Dispositivos Ópticos Lineales y no Lineales*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga, Málaga (Spain), 1999.
- [Wanguemert2007] WANGÜEMERT PEREZ, J.G., R. GODOY RUBIO, A. ORTEGA MOÑUX, y I. MOLINA FERNANDEZ. «Removal of the Gibbs Phenomenon and its Application to Fast-Fourier-Transform-Based Mode Solvers.» *Journal of the Optical Society of America A*, 24, (2007), 3772–3780.
- [Wanguemert2001] WANGÜEMERT PEREZ, J.G., y I. MOLINA FERNANDEZ. «Analysis of Dielectric Waveguides by a Modified Fourier Decomposition Method With Adaptive Mapping Parameters.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 19, (2001), 1614–1627.
- [Wanguemert2004] WANGÜEMERT PEREZ, J.G., I. MOLINA FERNANDEZ, y M.A. LUQUE NIETO. «A Novel Fourier Based 3D Full-Vectorial Beam Propagation Method.» *Optical and Quantum Electronics*, 36, (2004), 285–301.
- [Weisshaar1995] WEISSHAAR, A., J. LI, R.L. GALLAWA, y I.C. GOYAL. «Vector and Quasivector Solutions for Optical Waveguide Modes Using Efficient Galerkin Method with Hermite-Gauss Basis Functions.» *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 13, (1995), 1795–1800.
- [Wik2005] WIK, M., D. DUMAS, y D. YEVICK. «Comparison of Vector Finite Difference Techniques for Modal Analysis.» *Journal of the Optical Society of America A*, 22, (2005), 1341–1347.
- [Yevick1994] YEVICK, D. «A Guide to Electric Field Propagation Techniques for Guided-Wave Optics.» *Optical and Quantum Electronics*, 26, (1994), 185–197.
- [Young2004] YOUNG, Ian. «Intel Introduces Chip-to-Chip Optical I/O Interconnect Prototype.» *Inf. téc.*, Intel Corporation, 2004.