Investigación Operativa

Estadística e Investigación Operativa, 1º EII

Antoni Torres Signes

Área de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

- La investigación operativa (IO) es una disciplina para la solución de *problemas reales* que aglutina diversos enfoques.
    - Dirección y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización.
    - Forma de investigación similar a la utilizada en áreas científicas.
    - Resuelve posibles conflictos de intereses entre componentes de la organización en beneficio del conjunto.
- Construir un *modelo* científico (matemático) para formalizar la naturaleza del problema real.
- *Buscar el óptimo según un criterio* (optimización). Busca la mejor solución (aunque puede haber múltiples) para el modelo que representa el problema considerado.
- Proporcionar herramientas y técnicas para la solución de diversos problemas: producción, transporte, asignación, gestión de inventarios, toma de decisiones, teoría de colas, mantenimiento y reemplazamiento de equipos, etc.

- Un **modelo** es la representación de un proceso que describe un sistema real de manera que permite el estudio y análisis para favorecer el rendimiento del sistema.
  - **Modelos físicos**, en los que se consigue una representación concreta, a escala, como maquetas y prototipos.
  - **Modelos abstractos**, se representan mediante gran cantidad de símbolos abstractos: descripciones, dibujos, esquemas, lenguajes de computación, fórmulas matemáticas, etc.
  - **Modelos deterministicos**, representan fenómenos regulares donde es factible predecir su comportamiento, que puede incluir un margen de error.
  - **Modelos aleatorios**, representan fenómenos que pueden ser regulares pero en intervalos distintos, lo que dificulta la predicción de su comportamiento.

- En general, utilizamos la programación lineal (PL) para resolver problemas sobre la asignación de recursos limitados en diversas actividades de la mejor manera posible (óptima).
- La PL consiste en planificar las actividades para obtener un resultado óptimo según un modelo establecido mediante funciones lineales.
- La PL tiene una gran diversidad de áreas de aplicación. En Ingeniería es habitual en problemas de generación y transporte de energía, almacenamiento de materiales, mantenimiento de equipos, transporte y distribución, abastecimiento, planificación de equipamientos, inversiones, etc.

Problemas de Programación Lineal

- Los problemas de PL deben tener una única *función objetivo* (al menos en alguna fase de su resolución).
- Cada una de las alternativas del modelo se representa numéricamente mediante *variables*. Cuando solo toman valores enteros se habla de *PL entera*.El número de variables a considerar condiciona la resolución del mismo.
- Junto a las variables se consideran *constantes* (cantidades que no se pueden modificar) y *parámetros* (cantidades fijadas para la resolución). Antes de resolver el problema, se deciden las cantidades fijas, mientras que los posibles valores de las variables se obtienen como resolución del problema.
- Las *restricciones* son limitaciones del sistema, ya sean implícitas o explícitas que, en forma de ecuaciones e inecuaciones, restringen las variables de decisión a un rango de valores posibles.

Problemas de Programación Lineal

- Z, valor de la función objetivo, medida global del rendimiento.
- c_j, coeficientes de beneficio o coste, representa las unidades que cambia Z según unidad que aumenta el nivel de la actividad j.
- x_j, valor a determinar para el nivel de la actividad j, $j = 1, \dots n$.
- a_{ij}, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$, cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j.
- b_i, cantidad del recurso i, $i = 1, \dots m$, disponible para asignar actividades.
- En la resolución de un problema de PL, el modelo planteado busca el óptimo según los niveles de las actividades, con lo que $x_1, x_2, \dots x_n$ se conocen como *variables de decisión*.
- Cualquier vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que verifique todas las restricciones del problema se llama *solución factible*. Si dicha solución (o soluciones) proporciona el óptimo de la función objetivo, se llama *solución óptima*.

Método gráfico para resolver un problema de PL

- Un problema de PL de pequeñas dimensiones (por ejemplo, dos variables de decisión, x_1 y x_2, que se corresponden con los ejes del plano) se puede resolver mediante un gráfico.
- En la construcción del gráfico, primeramente identificamos la *región factible*, es decir, los valores posibles de $(x_1,\ x_2)$ que cumplen las restricciones del problema.
- Finalmente, buscamos la solución óptima del problema a partir de la función objetivo. Anulando las variables de decisión $x_1 = x_2 = 0$, obtenemos un valor para la función objetivo y la recta de puntos $(x_1,\ x_2)$ que proporcionan dicho valor z.
- Para cualquier punto, podemos comprobar que una recta paralela a la anterior (con misma pendiente) nos dará puntos $(x_1,\ x_2)$ con igual valor de z. Entonces, desplazando estas rectas paralelas según el sentido que define la función objetivo, si se trata de maximizar (o sentido opuesto si se trata de minimizar), obtenemos la solución óptima, si existe, en algún punto de la frontera de la región factible.

Ejemplo de problema de PL

Ejemplo 1

Una planta de envasado de agua mineral cuenta con botellas de plástico y de vidrio. La planta se divide en tres zonas. La primera se dedica al plástico, con botellas de 1.5 litros y garrafas de 5 litros. La segunda zona se dedica a vidrio, con botellas de 0.5 litros. La tercera zona se dedica a terminar el embotellado y empaquetar en lotes de 6 botellas o palés de 160 garrafas. En un intento de aumentar las ganancias, la empresa estudia las posibilidades de producción de dos nuevos productos a partir de agua con gas para envasar en botellas de 1.5 y 0.5 litros en envases del mismo tipo con los que ya cuenta. Se asume que la empresa podría vender cualquier cantidad de cualquiera de los dos nuevos productos que pudiera producir. Pero tienen recursos limitados en la producción de cada zona. ¿Cuál debe ser la producción de estos nuevos productos para maximizar el beneficio de la empresa?

Ejemplo de problema de PL

Ejemplo 1 (Continuación)

- Para responder a la pregunta, el responsable de IO pide los siguientes datos a la empresa:
  - Número de minutos al día disponibles para nueva producción según zona y producto.
  - Minutos que se tarda en producir un lote según zona y producto.
  - Beneficio según lote producido de cada producto.
- La empresa responde lo siguiente:
  - La zona 1 tiene 15 minutos disponibles al día y para la producción de un lote tipo 1 necesitaría 15 segundos.
  - La zona 2 tiene 25 minutos disponibles al día y para la producción de un lote tipo 2 necesitaría 10 segundos.
  - La zona 3 tiene 30 minutos disponibles, para la producción de lotes de tipo 1 y 2 necesitaría 20 y 10 segundos, respectivamente.
  - El beneficio por lote tipo 1 y 2 es de 20 y 30 céntimos respectivamente.

Ejemplo de problema de PL

- Consideramos Z como el total de beneficio diario a partir de la nueva producción. Lo podemos expresar en euros.
- Consideramos x_1 y x_2 como el número diario de lotes tipo 1 y 2 a producir, respectivamente.
- Sabiendo el beneficio por cada lote y producto, llegamos a la función objetivo, a maximizar en este caso.
- La función objetivo está sujeta a restricciones impuestas por la capacidad de producción de cada zona. La propia naturaleza del problema nos da también restricciones, en este caso, la no negatividad de las variables.

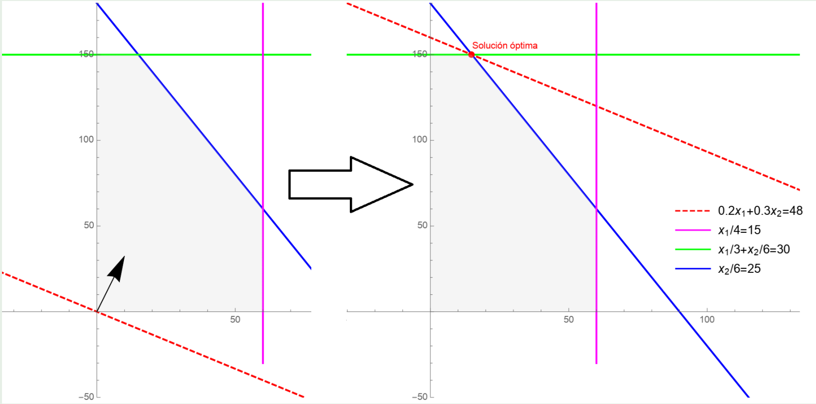
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar (max.)} & Z = 0.2x_1 + 0.3x_2, \\ \text{sujero a (s. a)} & \begin{array}{rcl} \frac{x_1}{4} & \leq & 15 \\ \frac{x_2}{6} & \leq & 25 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} & \leq & 30 \end{array} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

Ejemplo de problema de PL

- Primero identificamos la región factible, es decir, los valores $(x_1,\ x_2)$ que verifican las restricciones. Para ello, dibujamos las rectas que cumplen la igualdad en las restricciones y nos quedamos con el semiplano que cumple la restricción.
- Obtenemos la región factible a partir de la intersección de todas las restricciones graficadas.
- La solución óptima estará formada por los puntos de la región factible que maximizan (minimizan) la función objetivo.
- Tomando $Z = 0$, obtenemos fácilmente la pendiente de la recta para posibles valores de la función objetivo. Posteriormente desplazamos esta recta a través de la región factible aumentando Z (disminuyendo si el criterio fuera minimizar).
- Siguiendo este procedimiento en el Ejemplo 1, se llega al punto de la región factible, (15, 150), que maximiza la función objetivo, $Z = 48$ euros. Por lo tanto, la solución óptima es $x_1 = 15,\ x_2 = 150$.

Ejemplo de problema de PL

Ejemplo 1



Soluciones de un problema de PL

- La *región factible* es el conjunto de puntos que satisfacen todas las restricciones, es decir, el conjunto de soluciones factibles del problema de PL. La región factible puede estar acotada o no.
- *Vértice* es cada uno de los puntos de corte de las rectas dadas por las restricciones del problema.
- Cada segmento que se forma al unir dos vértices, en las rectas de restricciones, se conoce como *arista* o *cara* de la región factible.
- El conjunto de soluciones factibles situado sobre las aristas forma la *frontera* de la región facitble
- El conjunto de soluciones factibles que no están en la frontera se conoce como *interior* de la región factible.

Soluciones de un problema de PL

Solución Óptima

- Un problema de PL puede tener múltiples soluciones óptimas. De hecho, si hay más de una solución óptima entonces tiene infinitas soluciones óptimas. En caso de tener múltiples óptimos, el conjunto de soluciones óptimas puede estar acotado o no.
- La solución óptima de un problema de PL puede ser finita o infinita, tanto si la región factible está acotada o si no lo está.
- Puede que ningún punto verifique todas las restricciones de un problema de PL. En ese caso se dice que tiene *región factible vacía* y el problema es *no factible* o *inconsistente*, con lo que no existe solución óptima.

- Los *procesos estocásticos* tratan conjuntos de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ para un conjunto T de índices, finito o infinito, numerable o no numerable, acotado o no. De esta manera, se habla de *proceso estocástico en tiempo discreto o continuo*, según la naturaleza del conjunto T.
- Al conjunto de todos los posibles valores que toma el proceso, ya sea el caso discreto, X_t, o continuo, $X(t)$, se llama *espacio de estados* del proceso estocástico, que se suele denotar por $\mathcal{S}$. Según el espacio de estados, se dice *proceso estocástico discreto o continuo*, independientemente del espacio paramétrico T donde se define el proceso.

Definición y ejemplos

Definición 1 (Proceso Estocástico)

Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias $X(t)$ definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde t es un parámetro perteneciente al *espacio paramétrico* T, y cada variable aleatoria $X(t)$ toma valores en el espacio de estados $\mathcal{S}$.

- Proceso de Bernoulli
- Recorrido aleatorio
- Proceso de Poisson

Función de valor medio

Definición 2 (Función media)

Sea $\{X(t) : t \in T\}$ un proceso estocástico. Su *función de valor medio* se denota por $\mu(t)$ y se define como:

$$\mu(t) = E[X(t)], \quad \forall t \in T.$$

Incrementos de un proceso estocástico

Definición 3 (Incrementos independientes)

Un proceso estocástico $\{X(t) : t \in T\}$ se dice de *incrementos independientes* si para cualesquiera $t_1 < \cdots < t_n$, con $n \geq 3$ las variables aleatorias $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes

Definición 4 (Incrementos estacionarios)

Un proceso estocástico $\{X(t) : t \in T\}$ se dice de *incrementos estacionarios* si la distribución de los incrementos $X(t+h) - X(t)$, con h tal que $t + h \in T$, depende solo de la longitud h del intervalo y no del instante de tiempo t.

Nota 1

Un proceso con incrementos estacionarios verifica que la distribución de $X(t+h) - X(t)$, es la misma que la de $X(s+h) - X(s)$.

Proceso de Poisson

Definición 5 (Proceso de Poisson)

Sea $N(t)$ el número de ocurrencias en el intervalo $[0, t]$. Estas ocurrencias se dice que constituyen un proceso de Poisson de razón λ, con $\lambda > 0$, si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $N(0) = 0$.

(2) Se cumple la independencia para el número de ocurrencias si se consideran intervalos de tiempo disjuntos.

(3) La distribución del número de ocurrencias en un intervalo dado depende solamente de la amplitud del intervalo, pero no de su localización.

(4) $\lim_{h\to 0} \dfrac{P(N(h)=1)}{h} = \lambda$, además, $\lim_{h\to 0} \dfrac{P(N(h)>1)}{h} = 0$.

Así, para un proceso de Poisson de razón λ,

$$P(N(t)=k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad E(N(t)) = \lambda t, \ \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

Proceso de Poisson

Definición 6 (Tiempos entre llegadas)

- Consideramos ahora T_1 como el tiempo en que se da la primera ocurrencia en un proceso de Poisson.
- De forma general, para $n > 1$, consideramos T_n como el tiempo transcurrido entre la ocurrencia $n-1$ y la ocurrencia n en un proceso de Poisson.
- La secuencia $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ se conoce como secuencia de *tiempos entre llegadas*.

Proposición 1

Para un proceso de Poisson de razón λ, la secuencia asociada de tiempos entre llegadas $T_1, T_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ.

Proceso de Poisson

Ejemplo 2

Una panadería recibe encargos de tartas especiales con una tasa de Poisson $\lambda = 1$ al día.

a. ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que se encargue la décima tarta especial?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre el encargo de la décima y undécima tartas supere los dos días?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que entre mañana y pasado reciba 3 encargos de estas tartas?

Sol.: 10 días; 0.1353; 0.1804.

Propiedades de la distribución exponencial

- Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial, entonces, su función de densidad es *estrictamente decreciente* en t
- *Falta de memoria.* Para los tiempos entre llegadas, la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial describe la situación en que el tiempo hasta la siguiente llegada no se ve afectado por el tiempo en que se produjo la última llegada.
- Para todo $t > 0$, $P(T \leq t + h \mid T > t) \approx \lambda h$, siendo h pequeño.
- El *mínimo* de n variables aleatorias exponenciales independientes, de parámetros $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ tiene distribución exponencial, de parámetro $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Elementos de un sistema de colas

- La *teoría de colas* estudia los *sistemas* de líneas de espera en la búsqueda de *modelos de colas* que ayuden a gestionar de manera eficaz dichos sistemas. Es decir, llegar a un equilibrio entre el coste derivado del servicio y el tiempo de espera.
- Estos modelos tienen en cuenta la forma en que llegan clientes que se unen a una cola, entrando así en un sistema en el que por alguna regla y en algún momento se les da algún tipo de servicio que hace que el cliente salga del sistema.
- Consideramos un modelo en que los clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad λ, con lo que los tiempos entre llegadas se distribuyen de forma exponencial, y el tiempo de servicio tiene también distribución exponencial con esperanza $1/\mu$. Aspectos a tener en cuenta:
  - La regla por la que se atiende a los clientes
  - Número de colas
  - Capacidad del sistema para los clientes
  - Distribución de los tiempos de servicio
  - Servicio a clientes individual o grupal

Elementos de un sistema de colas

- Número de servidores
- Número de servidores por cliente

  ...

- *Estado del sistema.* Se trata del número de clientes en el sistema en un instante t, $t \geq 0$.
- *Estado estable.* El sistema alcanza este estado cuando la distribución de probabilidad del número de clientes no cambia con el paso del tiempo. Bajo esta condición, consideramos los siguientes términos:
  - P_n, probabilidad de que haya exactamente n clientes en el sistema
  - L, número esperado de clientes en el sistema
  - L_q, número esperado de clientes en cola
  - W, tiempo esperado de permanencia en el sistema
  - W_q, tiempo esperado de permanencia en cola
  - *Fórmula de Little*:
    $$L = \lambda W, \qquad L_q = \lambda W_q.$$
  - Además, al ser constante el tiempo medio de servicio,
    $$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Modelo $M/M/c$

- *Tiempos entre llegadas*: T_n. Así, T_1 es el tiempo de llegada del primer cliente y, en general, T_n consiste en el tiempo entre la llegada del cliente $n-1$ y el cliente n.
- *Tiempos de servicio*: S_n. Así, S_n representa el tiempo de servicio para el n-ésimo cliente.
- *Sistema de colas $M/M/c$*. Los tiempos entre llegadas y de servicio forman un conjunto de variables aleatorias independientes, donde las llegadas se distribuyen siguiendo un proceso de Poisson y los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial idéntica, con una línea de espera donde los clientes son servidos según el orden de llegada por c servidores en paralelo.
- Consideramos los tiempos medios entre llegadas y de servicio, $E(T_n) = 1/\lambda$ y $E(S_n) = 1/\mu$.
- *Factor de utilización*, $\rho = \lambda/(c\mu)$, consiste en la fracción esperada de tiempo que los servidores están ocupados. Asumimos $\rho < 1$.

Modelo $M/M/c$

Modelo $M/M/c$, con $c = 1$

Tasa media de llegadas, λ, y de servicio, μ, independientes al estado del sistema.

$$P_n = \rho^n P_0, \qquad P_0 = 1 - \rho.$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\left(\frac{1}{\mu}\right) = W\rho$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Modelo $M/M/c$

Ejemplo 3 (Modelo *M/M/1*)

Un dependiente de un comercio atiende a un ritmo de 6 minutos por cliente. Los clientes llegan según un proceso de Poisson a un ritmo de un cliente cada 7 minutos.

a. ¿Cuál es el número medio de clientes en el comercio?
b. ¿Qué tasa de llegadas provocaría que el tiempo medio en el comercio se duplicara?

Sol.: 6; 0.1548.

Modelo $M/M/c$

Modelo $M/M/c$, con $c > 1$

En este caso, la tasa media de servicio es $n\mu$, si $n \leq c$, y $c\mu$, si $n \geq c$.

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & \text{si } 1 \leq n \leq c \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c! c^{n-c}} P_0, & \text{si } n \geq c \end{cases} \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}$$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^c \rho}{c!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda \left(W_q + \frac{1}{\mu} \right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Modelo $M/M/c$

Ejemplo 4 (Modelo $M/M/c$)

Una gasolinera de prepago tiene dos cajas. Los clientes llegan a la gasolinera según un proceso de Poisson a un ritmo de 200 clientes por hora. Estos clientes son atendidos en un tiempo que sigue una distribución exponencial con una media de 30 segundos. Los clientes que encuentran las dos cajas ocupadas, esperan en una única cola a que una caja quede libre y por orden de llegada son atendidos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tenga que esperar en cola?
b. El dueño de la gasolinera se plantea sustituir las dos cajas por una nueva mucho más eficiente que reduce el tiempo medio de servicio a 15 segundos. ¿Cómo afectaría este cambio a los tiempos medios de permanencia?

Sol.: 0.7576; se reduciría el tiempo medio de permanencia en el sistema (de 1.6364 a 1.5 minutos), mientras que el tiempo medio de espera en cola aumentaría (de 1.1364 a 1.25 minutos).

Bibliografía

- De la Fuente, J. L.: *Técnicas de Cálculo para Sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal y Programación Entera.* Editorial Reverté, 1997
- Hernández, V.; Ramos, E.; Vélez, R.: *Modelos Probabilísticos y Optimización.* Ediciones Académicas, 2010
- Hillier, F. S.; Lieberman, G. J.: *Introduction to Operations Research.* McGraw-Hill, 2010
- Rios, S.: *Investigación Operativa: modelos determinísticos y estocásticos.* Centro de estudios Ramón Areces, D.L., 2004
- Ross, S. M.: *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Elsevier, 2009

Investigación Operativa

Estadística e Investigación Operativa, 1º EII

Antoni Torres Signes

Área de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA