NOCIONES BÁSICAS DE ESTADÍSTICA ACTUARIAL VIDA

ANTONIO FERNÁNDEZ MORALES

MÁLAGA, 2006

Nociones Básicas de Estadística Actuarial Vida

Antonio Fernández Morales

Málaga, 2006

Con esta colección de dípticos se pretende ofrecer al estudiante de Estadística Actuarial Vida una conjunto de herramientas útiles para facilitar su proceso de aprendizaje de esta disciplina académica y profesional.

Cada díptico incluye, de manera condensada, la notación actuarial y los principales conceptos de una serie de materias, relativas a los modelos de mortalidad y supevivencia, fundamentales para el desarrollo y adquisición de las habilidades y competencias requeridas en el campo profesional actuarial.

Las materias incluidas son las siguientes:

- Teoría de la probabilidad
- Funciones del modelo biométrico
- Esperanza de vida
- Tablas de mortalidad
- Leyes de mortalidad
- Tablas de salida múltiple

Notación:
P(A) = Probabilidad de que el suceso A ocurra.
P(A|B) = Probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B (probabilidad condicionada).
$A \cap B$ = A *intersección* B.
$A \cup B$ = A *unión* B.

(a) $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$.
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, *siempre.*
(c) Si *A y B son mutuamente excluyentes*, $A \cup B = \varnothing$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
(d) Si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, entonces $P(A_1 \cup A_2 |B) = P(A_1|B) + P(A_2 |B)$.
(e) Si $A \subset B$, (A está incluido en B), entonces $P(A|B) = P(A) / P(B)$.
(f) $P(A \cap B)=P(A)P(B)$ si y sólo si los sucesos A y B son independientes.
(g) *Función de distribución de la variable aleatoria X: F(x)*
X de tipo discreto:
X toma valores en un conjunto discreto $\{x_1, x_2, \ldots\}$
$F(x)= \sum_{x_k \le x} P(X = x_k)$
X de tipo continuo:
Existe una función continua f(x) denominada *función de densidad de probabilidad*, tal que
$$P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt .$$
La función F(x) y la función f(x) para una variable aleatoria continua X están relacionadas a través de $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ para todo x donde exista dicha derivada.

(h) $P(X>x) = 1- F(x)$ [siempre, dado que $P(X \le x) + P(X>x) = 1$]
$= \sum_{x_k > x} P(X = x_k)$ [si X es de tipo discreto]
$= \int_{x}^{\infty} f(t)dt$ [si X es de tipo continuo]

(i) $P(x<X \le y) = F(y)- F(x)$ [siempre]
$= \sum_{x < x_k \le y} P(X = x_k)$ [si X es de tipo discreto]
$= \int_{x}^{y} f(t)dt$ [si X es de tipo continuo]

(j) Si X es una variable aleatoria de tipo continuo,
$$P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

Esperanza matemática (valor esperado) de X:

$$E(X) = \sum_{x_k} x_k P(X = x_k) \quad \text{[si X es de tipo discreto]}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{[si X es de tipo continuo]}$$

E(X+Y) = E(X) + E(Y),

E(kX) = kE(X) [k es una constante]

Varianza de X :

$\mathrm{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\mathrm{Var}(kX) = k^2 \mathrm{Var}(X)$

Var (X + Y) = Var (X) + Var (Y) +2 Cov (X, Y)

Donde Cov(X,Y) = E([X – E(X)] [Y – E(Y)]) es la *covarianza* de X e Y.

Si X e Y son independientes, Cov(X,Y) = 0 y Var (X+Y) = Var(X) + Var(Y)

Ejemplos de distribuciones:

1. Distribución de Bernoulli (X de tipo discreto): $X \sim$ Bernoulli(p),

X toma los valores 0 o 1 (éxito o fracaso);

$P(X=1) = p; \quad P(X=0) = q; \quad p+q=1$

$E(X) = p; \; Var(X) = pq$

2. Distribución Binomial (X de tipo discreto): $X \sim B(n,p)$,

X toma los valores 0, 1, 2, …, n;

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \; p+q=1$$

E(X) = np; Var(X) = npq

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son mutuamente independientes y $X_j \sim$Bernoulli(p) para todo j entonces

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim B(n,p)$$

3. Distribución Uniforme en [a,b] (X de tipo coninuo): $X \sim U(a,b)$,

X toma cualquier valor entre a y b

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a,b]$ y f(x)=0 en el resto

$P(c \le X \le d) = (d-c) / (b-a)$, para todo $a \le c < d \le b$

E(X) = (a+b)/2; $\mathrm{Var}(X) = (b-a)^2 / 12$

4. Distribución Exponencial (X de tipo continuo): $X \sim E(\beta)$,

X puede tomar cualquier valor no negativo

$f(x) = \dfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$ si $x \ge 0$ y f(x)=0 en el resto.

$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$ si $x \ge 0$ y F(x)=0 en el resto.

$E(X) = \beta$; $\mathrm{Var}(X) = \beta^2$.

Notación:

X = Variable aleatoria edad de muerte.
Asumimos que X es continua, con función de distribución F(x) conocida y F(0)=0.

S(x) = P(X>x) = 1-F(x)
S(x) es la función de supervivencia. Representa la probabilidad de que un individuo alcance la edad exacta x.

(x) representa un individuo del colectivo con edad exacta x.

${}_np_x$ indica la probabilidad de que (x) alcance la edad exacta x+n

$$= P(X>x+n \mid X>x)$$

$$= \frac{P(X > x+n)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{S(x+n)}{S(x)}$$

${}_nq_x$ indica la probabilidad de que (x) muera antes de alcanzar la edad exacta x+n

$$= P(x < X \le x+n \mid X>x)$$

$$= \frac{P(x < X \le x+n)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{F(x+n) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{S(x) - S(x+n)}{S(x)}$$

$$= 1 - {}_np_x$$

Cuando n=1 el prefijo se omite.

$p_x = P(X > x+1 \mid X>x)$

$q_x = P(x<X \le x+1 \mid X>x)$

$_{m|n}q_x$ indica la probabilidad de que (x) sobreviva m años y muera antes de alcanzar la edad exacta x+m+n

$= P(x+m < X \leq x+m+n \mid X>x)$

$$= \frac{S(x+m) - S(x+m+n)}{S(x)}$$

Las relaciones siguientes se pueden verificar directamente:

$_{m|n}q_x = {}_mp_x - {}_{m+n}p_x$

$_{m|n}q_x = {}_mp_x \cdot {}_nq_{x+m}$

Tanto instantáneo de mortalidad, μ_x.

Se define como $\mu_x = \lim_{n\to 0} \frac{_{|n}q_x}{n}$

También se puede obtener como $\mu_x = \dfrac{\frac{-dS(x)}{dx}}{S(x)} = \dfrac{-dLn[S(x)]}{dx} = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$

La función μ_x especifica la distribución de la variable X, integrando se obtiene

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$$_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt}$$

La esperanza completa de vida $\overset{\circ}{e}_x$.

Notación:

X = Variable aleatoria edad de muerte.

Y_x = Variable aleatoria tiempo de vida residual a la edad x, o tiempo de vida futura de (x).
= X -x

Si la función de distribución de probabilidad de X es conocida, F(x), entonces la distribución de probabilidad de Y_x se puede obtener condicionando la probabilidad de X-x al suceso X>x:

$$G_{Y_x}(y) = P(X - x \leq y \mid X > x) = \frac{F(x+y) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{S(x) - S(x+y)}{S(x)};$$

$$g_{Y_x}(y) = {}_y p_x \mu_{x+y}$$

La esperanza matemática de la variable Y_x se denomina esperanza completa de vida, $\overset{\circ}{e}_x$, y representa el valor esperado del tiempo de vida futura a la edad x.

$$\overset{\circ}{e}_x = E(Y_x) = \int_0^\infty y g_{Y_x}(y) dy = \int_0^\infty y \; {}_y p_x \mu_{x+y} dy$$

Disponemos de una versión más simple de $\overset{\circ}{e}_x$

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt.$$

La esperanza reducida de vida (*curtate expectation of life*) e_x.

La variable aleatoria de tipo discreto K_x representa el número de años completos de vida que le quedan a un individuo con edad exacta x. La función de probabilidad de K_x se computa

$$
\begin{aligned}
P(K_x = k) &= P(k \le Y_x < k+1) \\
&= P(k < Y_x \le k+1) \\
&= P(Y_x > k) - P(Y_x > k+1) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_{k|}q_x
\end{aligned}
$$

El valor esperado de K_x se denomina esperanza reducida de vida y se denota como e_x:

$$
\begin{aligned}
e_x = E(K_x) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\,{}_kp_x - \sum_{k=0}^{\infty} k\,{}_{k+1}p_x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\,{}_kp_x - \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\,{}_kp_x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x
\end{aligned}
$$

Por definición, $K_x \le Y_x \le K_x + 1$, por tanto, tomando esperanza y para todo x,

$$e_x \le \mathring{e}_x \le e_x + 1$$

Aunque están relacionadas no hay una expresión explícita entre e_x y $\mathring{e}_x$. Sin embargo, empleando una interpolación lineal se puede la aproximación

$$\mathring{e}_x \cong e_x + 1/2$$

Las tablas de mortalidad (o tablas de supervivencia) contienen estimaciones de los valores de las funciones del modelo biométrico para las edades exactas x = 0, 1, 2, …

l_x, d_x, p_x, q_x, y $\overset{\circ}{e}_x$ son ejemplos de las funciones que se incluyen generalmente en las tablas de mortalidad.

La interpretación de las funciones de la tabla de mortalidad se realiza para edades exactas x = 0, 1, 2, …

$p_x = \dfrac{l_{x+1}}{l_x}$ probabilidad de que (x) sobreviva a x+1.

$q_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ probabilidad de que (x) muera antes de alcanzar x+1.

$d_x = l_x - l_{x+1}$ número esperado de individuos con edad x que mueren antes de cumplir x+1.

$e_x = \dfrac{1}{l_x}\sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}$ número esperado de años de vida completos tras cumplir x.

${}_s p_x = \dfrac{l_{x+s}}{l_x}$ probabilidad de que (x) sobreviva a x+s.

${}_s q_x = \dfrac{l_x - l_{x+s}}{l_x}$ probabilidad de que (x) muera antes de alcanzar x+s.

${}_{r|s} q_x = \dfrac{l_{x+r} - l_{x+r+s}}{l_x}$ probabilidad de que (x) muera con una edad comprendida entre x+r y x+r+s.

Las expresiones que relacionan las funciones p_x, q_x, y $\overset{\circ}{e}_x$ con l_x se pueden derivar empleando sus relaciones con la función de supervivencia S(x), ya que $l_x = l_0$ S(x). Por ejemplo,

$${}_s q_x = \frac{S(x) - S(x+s)}{S(x)} = \frac{l_0 S(x) - l_0 S(x+s)}{l_0 S(x)} = \frac{l_x - l_{x+s}}{l_x}$$

Las tablas de mortalidad no se construyen observando un conjunto de l_0 individuos desde el nacimiento hasta el fallecimiento del último superviviente. Se estiman observando la mortalidad experimentada por una población durante varios años consecutivos.

Tablas con periodo de selección

La mortalidad depende de la edad y del tiempo transcurrido desde el suceso "selección". Los individuos que entran en el colectivo a la edad de selección x experimentan una mortalidad distinta que el resto del colectivo durante un periodo de tiempo (periodo de selección).

Notación:

$[x]$	edad de selección.
$([x]+k)$	un individuo con edad x+k, seleccionado con edad x.
$p_{[x]}$	probabilidad de que un individuo sobreviva al menos un año tras la selección.
$p_{[x]+k}$	probabilidad de que un individuo que fue seleccionado con edad x y tiene x+k sobreviva al menos un año.
${}_nq_{[x]+k}$	probabilidad de que in individuo que fue seleccionado con edad x y tiene x+k fallezca en n años (no alcance la edad x+k+n).
$\overset{\circ}{e}_{[x]+k}$	esperanza completa de vida de un individuo que fue seleccionado con edad x y tiene x+k.
$l_{[x]+k}$	número esperado de supervivientes a la edad x+k de un grupo de $l_{[x]}$ individuos que fueron seleccionados con edad x.

Durante el periodo de selección (s años)

$$ {}_np_{[x]+k} = \frac{l_{[x]+k+n}}{l_{[x]+k}},\ n > 0, k = 1,2,\ldots,k < s $$

$$ {}_nq_{[x]+k} = 1 - {}_np_{[x]+k} = \frac{l_{[x]+k} - l_{[x]+k+n}}{l_{[x]+k}},\ n > 0, k = 1,2,\ldots,k < s $$

Fuera del periodo de selección (s años) la mortalidad es la misma que la de la población general. Si $k \geq s$ no hay diferencia entre ([x]+k) y (x+k) en cuanto a mortalidad, por ejemplo,

$p_{[x]+k} = p_{x+k}$; para todo $k \geq s$.

Tablas de mortalidad dinámicas o generacionales.

La mortalidad del individuo depende no sólo de su edad, sino también de la generación a la que pertenece. Las tasas de mortalidad futuras tienen en cuenta la disminución esperada de la mortalidad entre el momento presente y el futuro.

Tablas PERM/F 2000: Tablas de mortalidad generacionales para garantías de supervivencia en España.

La tabla base corresponde al año 2000.

Las tasas de mortalidad futuras se calculan partiendo de la tabla base, reduciéndolas exponencialmente con un factor fijo λ_A:

$$ q_{x,A} = q_{x,BASE}\, e^{-t\lambda_x} $$

A: Año de nacimiento.

t: Tiempo (años) que debe transcurrir desde 2000 hasta que un nacido en A cumpla X, t=x-(2000-A).

Históricamente ha habido diversos intentos de descripción de la mortalidad humana mediante una ley de mortalidad, especificando una función matemática para μ_x o para S(x).

Algunos ejemplos famosos:

Ley de De Moivre (1725) $S(x)= 1 - w/x,\ 0\leq x\leq w$.

Ley de Gompertz (1825) $\mu_x= Bc^x,\ B>0,\ c>1,\ x\geq 0$.

Ley (1ª) de Makeham (1859) $\mu_x= A + Bc^x,\ A\geq -B,\ B>0,\ c>1,\ x\geq 0$.

Ley (2ª) de Makeham (1889) $\mu_x= A + Hx + Bc^x,\ A\geq -B-H,\ B>0,\ c>1,\ x\geq 0$.

La más importante es la 1ª ley de Makeham. El término A representa la mortalidad por accidente o azar y el término Bc^x, representa la mortalidad debida a la edad.

Si A=0 se obtiene el modelo de Gompertz.

Si c=1 se obtiene un tanto instantáneo de mortalidad constante (La variable X se distribuye exponencialmente).

Para rangos de edades no muy amplios se puede encontrar combinaciones de A, B y c que generan un modelo de Makeham que se ajuste bien a los datos observados. Sin embargo, estas leyes no describen bien la mortalidad humana para todo el rango de edades posible.

Dada la función μ_x de una ley de mortalidad se puede obtener la función de supervivencia S(x) asociada (y viceversa). Por ejemplo, para la ley de Makeham:

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-Ax-\frac{B}{Ln(c)}\left(c^x-1\right)} = s^x g^{c^x-1}, \quad s = e^{-A}, g = e^{-\frac{B}{Ln(c)}}$$

Interpolación para edades fraccionarias de valores de la tabla de supervivencia

Interpolación lineal (Distribución uniforme de los fallecimientos):

Si conocemos l_x solo para valores enteros de x, podemos aproximar l_{x+t}, $0 \le t \le 1$ asumiendo la función lineal

$$l_{x+t} = l_x - td_x;\ x = 0,1,2,\ldots;\ 0 \le t \le 1.$$

Asumiendo esta función podemos usar las aproximaciones,

$l_{x+t} \cong (1-t)l_x + t\, l_{x+1};\ x = 0,1,2,\ldots;\ 0 \le t \le 1.$

$S(x+t) \cong (1-t)S(x) + tS(x+1);\ x = 0,1,2,\ldots;\ 0 \le t \le 1.$

${}_{n+t}p_x \cong (1-t)\, {}_np_x + t\, {}_{n+1}p_x;\ x = 0,1,2,\ldots;\ 0 \le t \le 1.$

El número esperado de fallecimientos en un intervalo $[x+t; x+t+\Delta t]$ es ${}_{\Delta t}d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+\Delta t}$

Aplicando la interpolación lineal,

$${}_{\Delta t}d_{x+t} \cong l_x - t\, d_x - [l_x - (t + \Delta t)\, d_x] = \Delta t\, d_x$$

Esto significa que en un intervalo de amplitud temporal Δt el número de fallecimientos esperado es $\Delta t\, d_x$ (la densidad de los fallecimientos entre x y x+1 es d_x, constante). Por tanto, la interpolación lineal implica la distribución uniforme de los fallecimientos dentro de un año de edad (y viceversa).

Interpolación exponencial (Tanto instantáneo de mortalidad constante en un año de edad):

Asumiendo la hipótesis $\mu_{x+t} = \mu_x$, $0 \le t \le 1$, que es equivalente a

$Ln(S(x+t)) = Ln(S(x)) - t\,[Ln(S(x) - Ln(S(x+t))]$, podemos aproximar:

$${}_tq_x \cong 1 - e^{-t\mu_x}, \quad 0 \le t \le 1$$

$${}_{1-t}q_{x+t} \cong 1 - e^{-(1-t)\mu_x}, \quad 0 \le t \le 1$$

Interpolación hiperbólica (Hipótesis de Balducci):

Asumiendo la hipótesis $S(x+t) = \frac{1}{S(x)} - t\left(\frac{1}{S(x)} - \frac{1}{S(x+1)}\right), \quad 0 \le t \le 1$, podemos emplear la siguiente aproximación:

$${}_{1-t}q_{x+t} \cong (1-t)q_x$$

Que se conoce como hipótesis de Balducci.

Un individuo está expuesto a varias causas independientes que pueden ocasionar su salida del colectivo.

Modelo:

T_x: vida residual del individuo (x), con función de distribución marginal $F_{T_x}(t)$. (x) está expuesto a m causas diferentes de salida. La variable J=1, 2, …, m indica la causa de salida.

La función de densidad conjunta de T_x y J es $f_{T_x,J}(t,j)$, con densidad y distribución marginales para T_x iguales a $f_{T_x}(t)=\sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t,j)$ y $F_{T_x}(t)=\int_0^t f_{T_x}(u)du$.

$${}_tq_x^j = P(T_x \le t, J=j) = \int_0^t f_{T_x,J}(u,j)du,\ t\ge 0,\ j=1,2,...,m$$ Probabilidad de salir en t años por la causa j.

$${}_tq_x^T = P(T_x \le t) = F_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^{m} P(T_x \le t, J=j) = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^j$$ Probab. de salir en t años por cualquier causa.

$${}_tp_x^T = P(T_x > t) = 1 - {}_tq_x^T$$ Probabilidad de sobrevivir t años.

$$\mu_x^j(t) = \frac{\dfrac{\partial\, {}_tq_x^j}{\partial t}}{{}_tp_x^T} = \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{{}_tp_x^T}$$ Tanto instantáneo de mortalidad por causa j.

$$\mu_x^T(t) = \frac{f_{T_x}(t)}{1-F_{T_x}(t)} = \frac{\dfrac{\partial\, {}_tq_x^T}{\partial t}}{{}_tp_x^T} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\partial\, {}_tq_x^j}{\partial t}}{{}_tp_x^T} = \sum_{j=1}^{m}\mu_x^j(t)$$

Tabla de mortalidad de salida múltiple

l_x^T Supervivientes esperados con edad exacta x.

$d_x^T = l_x^T - l_{x+1}^T = l_x^T q_x^T$ Salidas totales esperadas con edades exactas comprendidas entre x y x+1.

$d_x^j = l_x^T q_x^j$ Salidas esperadas por la causa j con edades exactas comprendidas entre x y x+1.

Otras relaciones:

$$d_x^T = \sum_{j=1}^{m} d_x^j \qquad d_x^j = \int_0^1 l_{x+t}^T \cdot \mu_{x+t}^j dt \qquad d_x^T = \int_0^1 l_{x+t}^T \cdot \mu_{x+t}^T dt$$

Tablas individuales asociadas:

${}_tq'^j_x$ Probabilidad de salir en t años por la causa j asumiendo que sólo existe la causa j de salida (tabla individual de salida por la causa j).

${}_tp'^j_x = e^{-\int_0^t \mu_x^j(u)du}$ Probabilidad de sobrevivir t años, suponiendo que sólo existe la causa j de salida.

$${}_tp_x^T = e^{-\int_0^t \mu_x^T(u)du} = e^{-\int_0^t \left(\mu_x^1(u)+...+\mu_x^m(u)\right)du} = ... = {}_tp'^1_x \cdot ... \cdot {}_tp'^m_x$$

Como $0 \le {}_tp'^j_x \le 1$, ${}_tp_x^T \le {}_tp'^j_x$, ${}_tp_x^T \cdot \mu_{x+t}^j \le {}_tp'^j_x \cdot \mu_{x+t}^j$ y $\int_0^1 {}_tp_x^T \cdot \mu_x^j(t)dt \le \int_0^1 {}_tp'^j_x \cdot \mu_x^j(t)dt$. Por tanto,

$$q_x^j \le q'^j_x$$

Deducción de las tablas individuales asociadas y construcción de una tabla múltiple contando con las tablas individuales: Se necesita conocer la relación entre q'^{j}_{x} y q^{j}_{x}. Dado que los datos conocidos (tabulados) son anuales es necesario asumir ciertas hipótesis de comportamiento dentro de cada año.

1.- Distribución uniforme de las salidas en la tabla múltiple dentro de cada año:

$${}_{t}q^{j}_{x} = t\cdot q^{j}_{x},\quad 0 \le t \le 1,\ j = 1,2,...,m,\ {}_{t}q^{T}_{x} = t\cdot q^{T}_{x},\quad 0 \le t \le 1.$$

$$\mu^{j}_{x}(t) = \frac{\frac{\partial\, {}_{t}q^{j}_{x}}{\partial t}}{{}_{t}p^{T}_{x}} = \frac{q^{j}_{x}}{1 - t\cdot q^{T}_{x}}$$

$${}_{s}p'^{j}_{x} = e^{-\int_{0}^{s}\mu^{j}_{x}(t)dt} = e^{-\int_{0}^{s}\frac{q^{j}_{x}}{1-t\cdot q^{T}_{x}}dt} = e^{-\frac{q^{j}_{x}}{q^{T}_{x}}\int_{0}^{s}\frac{q^{T}_{x}}{1-t\cdot q^{T}_{x}}dt} = e^{\frac{q^{j}_{x}}{q^{T}_{x}}Ln(1-s\cdot q^{T}_{x})}\ ;\ {}_{s}p'^{j}_{x} = \left[{}_{s}p'^{T}_{x}\right]^{\frac{q^{j}_{x}}{q^{T}_{x}}}$$

Para s=1, $p'^{j}_{x} = \left[p'^{T}_{x}\right]^{\frac{q^{j}_{x}}{q^{T}_{x}}}$

2.- Tanto instantáneo de las salidas en la tabla múltiple constante dentro de cada año:

$$\mu^{j}_{x}(t) = \mu^{j}_{x}, 0 \le t < 1\ ;\ \mu^{T}_{x}(t) = \mu^{j}_{x}, 0 \le t < 1$$

$${}_{t}p'^{j}_{x} = e^{-t\mu^{j}_{x}}\ ;\ {}_{t}p^{T}_{x} = e^{-t\mu^{T}_{x}}\ ;\ \frac{Ln\left({}_{t}p'^{j}_{x}\right)}{Ln\left({}_{t}p^{T}_{x}\right)} = \frac{\mu^{j}_{x}}{\mu^{T}_{x}}$$

$${}_{s}q^{j}_{x} = \int_{0}^{s}{}_{t}p^{T}_{x}\,\mu^{j}_{x}(t)dt = \frac{\mu^{j}_{x}}{\mu^{T}_{x}}\int_{0}^{s}{}_{t}p^{T}_{x}\,\mu^{T}_{x}dt = \frac{Ln\left({}_{s}p'^{j}_{x}\right)}{Ln\left({}_{s}p^{T}_{x}\right)}{}_{s}q^{T}_{x}$$

$${}_{t}p'^{j}_{x} = \left[{}_{t}p'^{T}_{x}\right]^{\frac{{}_{s}q^{j}_{x}}{{}_{s}q^{T}_{x}}}$$, Para r=1 y s=1, $p'^{j}_{x} = \left[p'^{T}_{x}\right]^{\frac{q^{j}_{x}}{q^{T}_{x}}}$

3.- Distribución uniforme de las salidas en las tablas independientes dentro de cada año (2 causas):

$${}_{t}p'^{j}_{x} = 1 - t\cdot q'^{j}_{x},\quad 0 \le t \le 1,\ j = 1,2,...,m,\quad \mu^{j}_{x}(t) = \frac{\frac{\partial\, {}_{t}q'^{j}_{x}}{\partial t}}{{}_{t}p'^{j}_{x}}$$

$$q^{1}_{x} = \int_{0}^{1}{}_{t}p^{T}_{x}\,\mu^{1}_{x}(t)dt = \int_{0}^{s}{}_{t}p^{1}_{x}\mu^{1}_{x}(t)\,{}_{t}p^{2}_{x}dt = q'^{1}_{x}\int_{0}^{s}(1 - t\cdot q^{2}_{x})dt = q'^{1}_{x}(1 - \frac{1}{2}q'^{2}_{x})$$

$q^{2}_{x} = q'^{2}_{x}(1 - \frac{1}{2}q'^{1}_{x})$. También se demuestra que $q^{1}_{x} + q^{2}_{x} = 1 - (1 - q'^{1}_{x})(1 - q'^{2}_{x}) = q^{T}_{x}$.

4.- Tasas centrales como pasarela (*central rate bridge*). Asumimos:

Distribución uniforme de las salidas $\quad {}_{t}q'^{j}_{x} = t\cdot q'^{j}_{x},\quad 0 \le t \le 1$

$\quad {}_{t}q^{j}_{x} = t\cdot q^{j}_{x},\quad 0 \le t \le 1$

Tasas centrales de mortalidad idénticas $\quad m'^{j}_{x} = m^{j}_{x},\quad j = 1,2,...,m$

$$m^{j}_{x} = \frac{d^{j}_{x}}{\int_{0}^{1} l^{T}_{x+t}dt} = \frac{q^{j}_{x}}{\int_{0}^{1}\left(1 - {}_{t}q^{T}_{x}\right)dt} = \frac{q^{j}_{x}}{\int_{0}^{1}\left(1 - t\cdot q^{T}_{x}\right)dt} = \frac{q^{j}_{x}}{1 - \frac{1}{2}q^{T}_{x}},\ m'^{j}_{x} = \frac{d'^{j}_{x}}{\int_{0}^{1} l'^{j}_{x+t}\,dt} = \frac{q'^{j}_{x}}{\int_{0}^{1}(1 - {}_{t}q'^{j}_{x})dt} = \frac{q'^{j}_{x}}{1 - \frac{1}{2}q'^{j}_{x}}$$

Igualando y despejando q'^{j}_{x},

$$q'^{j}_{x} = \frac{q^{j}_{x}}{1 - \frac{1}{2}q^{T}_{x} + \frac{1}{2}q^{j}_{x}} = \frac{q^{j}_{x}}{1 - \frac{1}{2}q^{-j}_{x}}$$, donde $q^{-j}_{x} = q^{T}_{x} - q^{j}_{x}$