

Un nuevo Algoritmo Evolutivo de Optimización Multiobjetivo basado en Preferencias: WASF-GA

Rubén Saborido, Ana Belén Ruiz y Mariano Luque

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Málaga

rsain@uma.es, abruiz@uma.es, mluque@uma.es

Resumen Para resolver problemas de optimización multiobjetivo, los *algoritmos evolutivos basados en preferencias* incorporan información preferencial en el proceso evolutivo, con el objetivo de encontrar un conjunto de soluciones Pareto óptimas acordes a las preferencias del decisor (DM). En este trabajo, se propone un nuevo algoritmo evolutivo basado en preferencias que aproxima la región de la frontera Pareto óptima que mejor se ajusta a los valores de aspiración que el decisor desea alcanzar en cada objetivo. Estos valores constituyen las componentes de lo que se conoce como *punto de referencia*. El algoritmo hace uso de la conocida función escalarizada de logro de Wierzbicki para clasificar los individuos de cada generación en diferentes fronteras. Dicha clasificación se realiza en base a los valores que la función de logro alcanza para el punto de referencia proporcionado, considerando un conjunto de vectores de pesos. Los experimentos realizados sobre conocidos problemas test muestran unos resultados prometedores en cuanto a la calidad de las soluciones obtenidas, en comparación a otros algoritmos existentes basados en puntos de referencia.

Keywords Optimización multiobjetivo, algoritmo evolutivo basado en preferencias, punto de referencia, función escalarizada de logro.

1. Introducción

En la vida real, muchos problemas consisten en optimizar conjuntamente varios criterios, que normalmente se encuentran en conflicto. En general, un *problema de optimización multiobjetivo* puede formularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \\ &\text{sujeto a} && \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \tag{1}$$

siendo $f_i : S \rightarrow \mathbf{R}$, para cada $i = 1, \dots, k$, las k ($k \geq 2$) funciones objetivo a minimizar y S el conjunto factible de vectores de decisión $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

La imagen del conjunto factible $Z = \mathbf{f}(S)$ está compuesta por vectores criterio $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^T$, para algún $\mathbf{x} \in S$.

Por lo general, el conflicto existente entre los objetivos imposibilita encontrar una solución en la que todos los objetivos alcancen sus óptimos individuales simultáneamente. Sin embargo, hay un conjunto de soluciones en las que no se puede mejorar ningún objetivo sin empeorar algún otro: las denominadas *soluciones eficientes, no dominadas* o *Pareto óptimas*. Dados dos vectores $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbf{R}^k$, decimos que \mathbf{z} *domina* a \mathbf{z}' si y solo si $z_i \leq z'_i$ para todo $i = 1, \dots, k$, y existe algún $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $z_j < z'_j$. Se considera que $\mathbf{x} \in S$ es una solución *Pareto óptima* del problema (1) si no existe ningún $\mathbf{x}' \in S$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}')$ domine a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. El conjunto de todas las soluciones Pareto óptimas es conocido como el *conjunto eficiente* o *conjunto óptimo de Pareto*, denotado por E . Su imagen en el espacio de objetivos es denominado *frontera eficiente* o *frente óptimo de Pareto*, denotado por $\mathbf{f}(E)$.

Desde el punto de vista matemático todas las soluciones eficientes son equivalentes, por lo que es necesaria cierta información preferencial de algún decisor (DM) para encontrar la solución final. Una forma natural de expresar preferencias consiste en indicar valores deseables para cada función objetivo que constituyen las componentes del denominado punto de referencia. En concreto, un *punto de referencia* viene dado por $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k)^T$, donde q_i es un valor de aspiración para el objetivo f_i proporcionado por el DM, para cada $i = 1, \dots, k$. Se dice que un punto de referencia es *alcanzable* si los correspondientes valores de aspiración pueden ser simultáneamente alcanzados o mejorados por alguna solución factible; en caso contrario, se dice que el punto de referencia es *inalcanzable*.

A lo largo de los años, se han desarrollado una gran variedad de métodos para resolver problemas de optimización multicriterio. Entre ellos, pueden destacarse la *Toma de Decisiones Multicriterio (Multiple Criteria Decision Making, MCDM)* [13, 17] y la *Optimización Multiobjetivo Evolutiva (Evolutionary Multiobjective Optimization, EMO)* [3, 5, 10]. El principal objetivo de MCDM es ayudar al DM a elegir la solución más adecuada considerando sus preferencias. Por el contrario, EMO pretende obtener un conjunto bien distribuido de soluciones que aproximen el frente óptimo de Pareto, haciendo uso de algoritmos basados en población que emulan el proceso de evolución natural de las especies.

Aunque los métodos MCDM muestran al DM únicamente soluciones que se ajustan a sus preferencias, en algunos casos no son capaces de resolver problemas con variables de decisión enteras o binarias, o con funciones objetivo no convexas, discontinuas o no diferenciables. Por el contrario, aunque los algoritmos EMO pueden tratar problemas de complicada naturaleza, no consideran información preferencial alguna en el proceso de resolución. Según esto, el DM tiene que analizar un número elevado de soluciones para encontrar la solución final, lo que supone un gran esfuerzo cognitivo. Además, dado que las preferencias del DM acotan al conjunto de soluciones eficientes, no es necesaria la aproximación completa del frente óptimo de Pareto para encontrar la solución final al problema.

Durante los últimos años, ha surgido una nueva vertiente de algoritmos evolutivos basados en preferencias [1, 4, 14]. Éstos, se basan en la evolución de una población de soluciones considerando las preferencias del DM en el proceso evolutivo, con el fin de guiar la búsqueda de nuevas soluciones hacia la zona interés del frente óptimo de Pareto. De esta forma, se reduce la carga cognitiva del DM ya que se reduce el número de soluciones que tiene que revisar, las cuales, a su vez, se ajustan a sus preferencias.

Entre los algoritmos evolutivos existentes basados en preferencias se encuentra el método *Reference-Point-Based NSGA-II* (R-NSGA-II) [8]. A partir de uno o varios puntos de referencia definidos por el DM, R-NSGA-II reemplaza la crowding distance del NSGA-II [7] por una distancia preferencial, basada en la distancia euclídea de cada solución a los puntos de referencia. En [15], se propone un nuevo criterio de dominancia, denominado *r-dominancia*, que distingue soluciones no dominadas entre sí en función de sus distancias euclídeas a un punto de referencia proporcionado por el DM, dando mayor prioridad a aquéllas más cercanas a dicho punto. Los autores reemplazan el criterio de dominancia usual en el NSGA-II por la *r-dominancia*, denominando al algoritmo resultante r-NSGA-II. Otros algoritmos evolutivos basados en preferencias son *Guided Multi-Objective Evolutionary Algorithm* (G-MOEA) [2], *Reference Direction Based NSGA-II* (RD-NSGA-II) [6], *Preference Based Evolutionary Algorithm* (PBEA) [18], *Preference-based Interactive Evolutionary Algorithm* (PIE) [16] o *interactive MOEA/D* (iMOEA/D) [12].

En este artículo, se propone un nuevo algoritmo evolutivo basado en preferencias denominado WASF-GA (*Weighting Achievement Scalarizing Function Genetic Algorithm*). A partir de un punto de referencia determinado por el DM, WASF-GA aproxima la región de la frontera eficiente proyectable desde el punto de referencia. Para ello, hace uso de la función escalarizada de logro de Wierzbicki [19], clasificando por fronteras los individuos de cada generación. Una función escalarizada de logro es una función real que combina las funciones objetivo originales con cierta información preferencial, expresada, por ejemplo, mediante un punto de referencia. Al minimizar una función de logro sobre S , se obtiene la solución Pareto óptima que 'mejor' se ajusta al punto de referencia empleado, proyectándolo en una dirección determinada por un vector de pesos.

En cada generación de WASF-GA, la clasificación de individuos en fronteras se realiza atendiendo a los valores de la función de logro propuesta en [19] para cada solución, teniendo en cuenta el punto de referencia proporcionado por el DM y un conjunto de vectores de pesos. Para obtener una buena distribución de soluciones, los vectores de pesos empleados deben ser equidistribuidos en el espacio de pesos $(0, 1)^k$. Esto, junto con el uso de la función de logro, permite que la población final de soluciones de WASF-GA se ajuste al punto de referencia dado.

En este trabajo se comparan WASF-GA, R-NSGA-II y r-NSGA-II, haciendo uso de una métrica basada en hipervolumen [11, 21] adaptada a la región de interés proyectable desde el punto de referencia. Para ello se han usado puntos de referencia alcanzables e inalcanzables, generados de forma aleatoria.

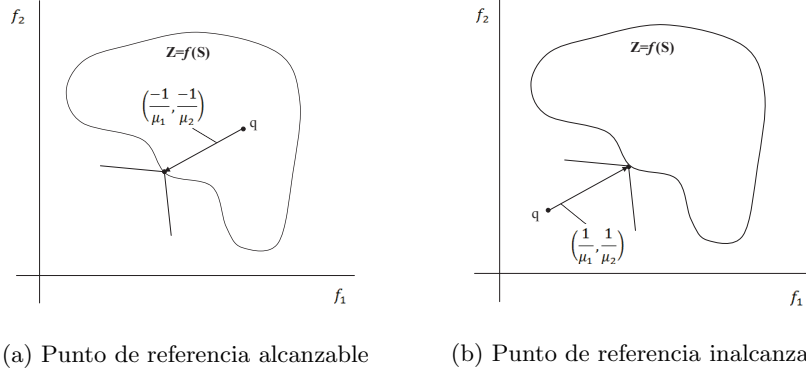


Figura 1. Idea gráfica de la minimización de (2) para un problema con dos objetivos.

El artículo se organiza como sigue. En la sección 2, se describe WASF-GA detalladamente. Algunos experimentos sobre diferentes problemas test se muestran en la sección 3 y, finalmente, se concluye con la sección 4.

2. El Algoritmo WASF-GA

WASF-GA aproxima la región del frente óptimo de Pareto proyectable desde un punto de referencia \mathbf{q} , proporcionado por el DM. Se basa en el uso de la función escalarizada de logro propuesta en [19], dada por la expresión siguiente:

$$s(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mu) = \max_{i=1, \dots, k} \{ \mu_i (f_i(\mathbf{x}) - q_i) \} + \rho \sum_{i=1}^k (f_i(\mathbf{x}) - q_i), \quad (2)$$

donde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ es un vector de pesos, con $\mu_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, k$ y $\rho > 0$ un valor real suficientemente pequeño (normalmente 0,001). La solución factible que minimiza (2) es una solución Pareto óptima de (1)[13].

En la práctica, si \mathbf{q} es inalcanzable, minimizar (2) equivale a la distancia minmax. Si \mathbf{q} es alcanzable, la solución que minimiza (2) mejora los valores de aspiración de \mathbf{q} tanto como sea posible. En caso de que los pesos considerados sean estrictamente positivos, minimizar (2) significa proyectar \mathbf{q} sobre el conjunto eficiente en la dirección determinada por la inversa de los vectores de pesos. La Figura 1 da una idea de lo que significa dicha minimización para un problema como (1) con dos funciones objetivos, tanto para puntos de referencia alcanzables como inalcanzables.

WASF-GA hace uso del concepto de región proyectable desde un punto de referencia. Consideramos que la *región proyectable de la frontera eficiente desde un punto de referencia* \mathbf{q} es el conjunto de soluciones Pareto óptimas que se obtienen al minimizar (2) sobre S , variando el vector de pesos μ en todo $(0, 1)^k$. De esta forma, si \mathbf{q} es alcanzable, la región proyectable estará formada por el conjunto de soluciones eficientes que dominan \mathbf{q} (esto es, los $\mathbf{x} \in E$ tales que

$f_i(\mathbf{x}) \leq q_i$, para todo $i = 1, \dots, k$). En caso contrario, si \mathbf{q} es inalcanzable, la región proyectable estará formada por las soluciones eficientes más próximas a \mathbf{q} respecto a la distancia minmax. Esto significa que, en el caso inalcanzable, la región proyectable podrá estar formada por los $\mathbf{x} \in E$ tales que $f_i(\mathbf{x}) \geq q_i$, para todo $i = 1, \dots, k$, aunque esto no tiene por qué ser así en todos los casos. En la Figura 2, se muestran dos gráficas correspondientes a un problema con dos objetivos como el dado en (1), en las que se ha resaltado la región proyectable, tanto en el caso alcanzable como en el inalcanzable.

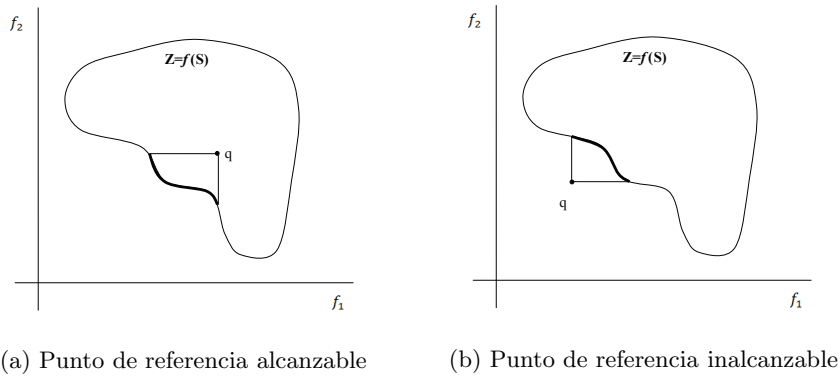


Figura 2. Región proyectable para un problema con dos objetivos.

Cualquier solución Pareto óptima de (1) puede obtenerse minimizando (2) variando el punto de referencia y/o el vector de pesos [13]. Según esto, cualquier solución eficiente dentro de la región proyectable del punto de referencia \mathbf{q} se puede obtener minimizando (2) sobre S variando el vector de pesos en todo $(0, 1)^k$. Basándose en este hecho, WASF-GA aproxima la región proyectable mediante la proyección de \mathbf{q} en el frente óptimo de Pareto, considerando una muestra equidistribuida de vectores de pesos.

En lo siguiente, N es el tamaño de la población, $N_\mu > 0$ el número de vectores de pesos considerados, h la generación actual y P_h la población de individuos en la generación h . A continuación, se describe el funcionamiento de WASF-GA:

- **Paso 1. Inicialización.** Definir una muestra equidistribuida de N_μ vectores de pesos $W = \{\mu^j \in (0, 1)^k : j = 1, \dots, N_\mu\}$, inicializar $h = 0$ y obtener P_0 mediante la generación aleatoria de N individuos.
- **Paso 2. Recombinación y mutación.** Aplicar los operadores de recombinación y mutación a P_h (población de padres) para obtener una población de N hijos. Combinar las poblaciones de padres e hijos en una nueva población P de tamaño $2N$.

- **Paso 3. Clasificación por fronteras.** Para cada solución factible $\mathbf{x} \in P$, calcular $s(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mu^j)$ para cada $j = 1, \dots, N_\mu$. La primera frontera, F_1^h , la componen las soluciones factibles de P que alcanzan el menor valor de $s(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mu^j)$ para cada $j = 1, \dots, N_\mu$ (se permite repetir soluciones si fuera necesario). Se eliminan temporalmente de P los individuos de F_1^h . La segunda frontera, F_2^h , la forman las soluciones factibles de P que alcanzan el (segundo) menor valor de $s(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mu^j)$ para cada $j = 1, \dots, N_\mu$. Nuevamente, se eliminan temporalmente de P los individuos de F_2^h . Este proceso continúa hasta que todas las soluciones factibles de P han sido clasificadas. Posteriormente, se clasifican las soluciones infactibles de P atendiendo a la violación acumulada de las restricciones.
- **Paso 4. Selección.** Actualizar $h = h + 1$, $P_h = \emptyset$ y sea $n = 1$. Si el $\#(P_h \cup F_n^{h-1}) \leq N$, entonces $P_h = P_h \cup F_n^{h-1}$. Actualizar $n = n + 1$ y repetir este proceso hasta que $\#(P_h \cup F_n^{h-1}) > N$, en cuyo caso se incluirán en P^h los individuos de F_n^{h-1} que alcancen los menores valores de la función de logro hasta tener N individuos en P_h .
- **Paso 5. Criterio de parada.** Si se verifica el criterio de parada, los individuos de F_1^{h-1} forman la salida final de WASF-GA. En caso contrario, ir al paso 2.

Con este procedimiento, se da más importancia a aquellas soluciones con menor valor de la función de logro para cada uno de los N_μ vectores de pesos.

Si todas las soluciones de una generación son factibles, cada frontera se compone de N_μ soluciones, a excepción de la última, que puede contener menos. Por ello, se considera que $N_\mu \leq N$ si se desea tener, al menos, una solución correspondiente a cada vector de pesos en la siguiente generación. Asimismo, como las soluciones que se muestran al DM son las de la primera frontera de la última generación, el DM tiene que revisar exactamente N_μ soluciones para determinar la solución final. Por defecto se considera que $N_\mu = \frac{N}{2}$, aunque el DM puede determinar el valor de N_μ indicando el número de soluciones que desea obtener.

En cada generación, la clasificación por fronteras realizada por WASF-GA define un orden parcial estricto entre las soluciones, que además es completo con la Pareto dominancia¹, debido a que, si \mathbf{x}_1 domina a \mathbf{x}_2 , se verifica que $s(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \mu) < s(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{x}_2), \mu)$, para cualquier vector de pesos μ estrictamente positivo [13]. De esta forma, se puede asegurar que si una solución domina a otra, la primera pertenecerá a una frontera de orden inferior a la de la segunda.

Como se indicó en el Paso 3, una solución puede aparecer varias veces en una misma frontera si dicha solución minimiza simultáneamente (2) para varios vectores de pesos. Esto asegura que dentro de una frontera no existan soluciones dominadas entre sí.

¹ Si \triangleright es una relación binaria donde $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y}$ implica que \mathbf{x} es preferido a \mathbf{y} , se dice que \triangleright es *completo con la Pareto dominancia* si y solo si \mathbf{x} Pareto domina a \mathbf{y} implica que $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y}$.

3. Experimentos

Para evaluar el funcionamiento de WASF-GA se han realizado una serie de experimentos sobre varios problemas test y se han comparado los resultados obtenidos con los generados por otros algoritmos evolutivos basados en punto de referencia, r-NSGA-II [15] y R-NSGA-II [8]. Los tres métodos han sido implementados en lenguaje C++ usando la Standard Template Library (STL).

Los experimentos se han realizado sobre problemas de las familias ZDT [20] (con dos funciones objetivo y 30 variables) y DTLZ [9] (con tres objetivos y 22 variables).

El número de generaciones se ha fijado en 300, y el tamaño de población en 120 individuos para los problemas de 2 objetivos y en 200 individuos para los problemas con 3 objetivos. Los índices de distribución de los operadores de recombinación SBX [5] y de mutación polinomial [5] se han definido como 10 y 20, respectivamente. La probabilidad de recombinación se ha establecido a 0.9, mientras que la de mutación se ha fijado a $1/n$, siendo n el número de variables. Se han llevado a cabo 30 ejecuciones independientes de cada algoritmo.

r-NSGA-II hace uso de un parámetro $\delta \in [0, 1]$ que controla la presión de selección de la r -dominancia. En los experimentos realizados, el valor de δ se ha fijado usando el procedimiento adaptativo propuesto por los autores en [15], donde δ evoluciona de forma progresiva desde cero hasta un valor δ_0 , prefijado de antemano. Por el contrario, R-NSGA-II controla la diversidad de soluciones mediante una estrategia de selección basada en distancias a través de un parámetro ϵ . Puesto que la densidad o distribución de soluciones de las poblaciones finales de r-NSGA-II y de R-NSGA-II dependen de estos dos parámetros, sus valores han sido ajustados, por ensayo y error, para cada problema test y punto de referencia. Así, las poblaciones finales son comparables a la generada por WASF-GA, ya que las aproximaciones del frente óptimo de Pareto se ajustan a la región proyectable desde el punto de referencia considerado. La elección de los puntos de referencia alcanzables e inalcanzables, generados de forma aleatoria, reflejan el interés del decisor en una región concreta de la frontera eficiente.

La Tabla 1 muestra, para cada problema test, los puntos de referencia considerados y los valores de los parámetros δ_0 and ϵ empleados en r-NSGA-II y en R-NSGA-II, respectivamente.

Tabla 1. Parámetros δ_0 y ϵ en r-NSGA-II y R-NSGA-II, respectivamente.

Número de objetivos	Problema test	Alcanzable (A)			Inalcanzable (I)		
		\mathbf{q}	δ_0	ϵ	\mathbf{q}	δ_0	ϵ
2	ZDT1	(0.8, 0.6)	0.91	0.0064	(0.2, 0.4)	0.73	0.0016
	ZDT2	(0.8, 0.8)	0.83	0.0045	(0.5, 0.3)	0.93	0.0049
	ZDT3	(0.3, 0.8)	0.8405	0.0018	(0.2, 0)	0.71	0.0016
3	DTLZ2	(0.6, 0.7, 0.7)	0.65	0.07	(0.4, 0.4, 0.4)	0.6	0.078
	DTLZ7	(0.1, 0.8, 6)	0.8	0.07	(0.1, 0.1, 4)	0.8	0.06

Tabla 2. Media y desv. típica de la métrica basada en hipervolumen en 30 ejecuciones.

Problema	q	WASF-GA	r-NSGA-II	R-NSGA-II
ZDT1	A	1,76e - 01 _{1,95e-05}	1,76e - 01 _{3,85e-04}	1,76e - 01 _{3,26e-04}
	I	4,67e - 01 _{6,53e-05}	4,65e - 01 _{2,58e-03}	4,67e - 01 _{6,10e-04}
ZDT2	A	6,90e - 02 _{1,12e-05}	6,91e - 02 _{9,20e-05}	6,93e - 02 _{4,26e-05}
	I	2,65e - 01 _{4,42e-05}	2,65e - 01 _{6,93e-04}	2,64e - 01 _{1,61e-03}
ZDT3	A	6,88e - 02 _{7,30e-07}	6,80e - 02 _{2,07e-03}	6,55e - 02 _{1,77e-03}
	I	7,36e - 01 _{6,59e-05}	7,36e - 01 _{2,92e-03}	7,31e - 01 _{1,71e-03}
DTLZ2	A	3,05e - 03 _{8,85e-07}	2,03e - 03 _{1,95e-04}	1,73e - 03 _{1,10e-04}
	I	1,80e - 01 _{2,71e-04}	1,82e - 01 _{1,88e-03}	1,74e - 01 _{2,89e-03}
DTLZ7	A	4,15e - 02 _{1,52e-03}	3,68e - 02 _{1,50e-03}	3,72e - 02 _{1,23e-03}
	I	7,54e - 01 _{3,81e-04}	7,85e - 01 _{5,47e-03}	7,84e - 01 _{3,98e-03}

Para determinar la calidad de la aproximación realizada por cada algoritmo, se ha hecho uso de un indicador basado en hipervolumen [11] adaptado a la región de interés. Esta métrica estima el volumen del espacio de objetivos (acotado por un punto de referencia alcanzable, denotado por \mathbf{r}) dominado por un conjunto de soluciones. Cuanto mayor es su valor, mejor es la aproximación. En los experimentos realizados, \mathbf{r} se ha igualado al punto de referencia, si éste era alcanzable. En el caso inalcanzable, se considera que \mathbf{r} es el vector formado por los peores valores de cada objetivo (*vector nadir*). En cualquier caso, para el cálculo del hipervolumen se tienen en cuenta únicamente las soluciones de la población final que pertenecen a la región proyectable. La Tabla 2 muestra el valor medio y la desviación típica del indicador en 30 ejecuciones de cada algoritmo para cada problema (considerando los parámetros y puntos de referencia descritos en la Tabla 1), resaltando en negrita los mejores valores. Como puede observarse, las soluciones finales generadas por WASF-GA poseen un mayor valor medio de esta métrica, según lo cual puede considerarse que realiza una mejor aproximación de la región proyectable en comparación a r-NSGA-II y R-NSGA-II. Atendiendo a los valores de la desviación típica es posible puntualizar que el algoritmo propuesto es más estable, ya que genera aproximaciones similares en diferentes ejecuciones. Además, la complejidad computacional de WASF-GA es $O(k \cdot N \cdot N_\mu)$ y la de r-NSGA-II y R-NSGA-II $O(k \cdot N^2)$. Dado que hemos considerado $N_\mu = \frac{N}{2}$, la complejidad del primero es menor que la de los otros dos algoritmos.

4. Conclusiones

El principal propósito de los algoritmos evolutivos basados en preferencias es aproximar la región del frente óptimo de Pareto que mejor se ajusta a las preferencias del DM. Considerando un punto de referencia dado por el DM, el algoritmo WASF-GA propuesto en este artículo tiene como objetivo aproximar

la región del frente óptimo de Pareto que puede ser proyectada desde dicho punto de referencia. Cuando el punto de referencia es alcanzable, esta región contiene todas las soluciones eficientes que lo dominan. Para un punto de referencia inalcanzable, la región proyectable está formada por las soluciones eficientes más cercanas a este punto, con respecto a la distancia minmax. En este caso, consideramos que estas soluciones son las de mayor interés para el DM puesto que empeoran en menor medida los valores de referencia.

WASF-GA clasifica los individuos en cada generación por fronteras teniendo en cuenta los valores de la función escalarizada de logro de Wierzbicki para un conjunto de vectores de pesos. Para aproximar la región proyectable desde un punto de referencia con una buena distribución de soluciones, la muestra de vectores de pesos debe estar equidistribuida.

Una característica importante de WASF-GA desde el punto de vista del DM, es que éste únicamente debe proporcionar un punto de referencia. Por el contrario, tanto r-NSGA-II como R-NSGA-II requieren de un parámetro adicional, que debe ser ajustado en cada problema.

WASF-GA aproxima la región proyectable desde el punto de referencia con N_μ soluciones. El DM puede indicar de antemano el número de soluciones deseadas, aunque, por defecto, puede establecerse que $N_\mu = \frac{N}{2}$.

Se han realizado una serie de experimentos sobre varios problemas test, comparando los resultados obtenidos por WASF-GA con los generados por otros dos métodos evolutivos basados en punto de referencia, r-NSGA-II y R-NSGA-II. Según la complejidad computacional y la calidad de las aproximaciones de los tres algoritmos, consideramos que WASF-GA es más eficiente y consigue una mejor aproximación de la región proyectable desde el punto de referencia, según la métrica empleada basada en hipervolumen. No obstante, parece sugerente realizar nuevos experimentos en problemas test más complejos, como pueden ser las familias WFG y UF. Asimismo, un análisis estadístico de los hipervolumenes obtenidos, por cada método en cada una de las ejecuciones independientes, permitiría determinar el nivel de confianza estadística de los resultados presentados en los experimentos realizados.

Desde el punto de vista preferencial, WASF-GA sería susceptible de ser adaptado para considerar varios puntos de referencia al mismo tiempo, lo que permitiría aproximar simultáneamente diferentes regiones del frente óptimo de Pareto.

Referencias

- [1] J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, and R. Slowinski, editors. *Multiobjective Optimization. Interactive and Evolutionary Approaches*, volume 5252 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2008.
- [2] J. Branke, T. Kaussler, and H. Schemeck. Guidance in evolutionary multi-objective optimization. *Advances in Engineering Software*, 32:499–507, 2001.
- [3] C. A. C. Coello, G. B. Lamont, and D.A.V. Veldhuizen. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems. Second Edition*. Springer, New York, 2007.
- [4] C.A.C. Coello. Handling Preferences in Evolutionary Multiobjective Optimization: A Survey. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 30–37, 2000.

- [5] K. Deb. *Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Wiley, Chichester, 2001.
- [6] K. Deb and A. Kumar. Interactive Evolutionary Multi-Objective Optimization and Decision-Making using Reference Direction Method. In *9th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation (GECCO-2007)*, pages 781–788, 2007.
- [7] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197, 2002.
- [8] K. Deb, J. Sundar, B. Ubay, and S. Chaudhuri. Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithm. *International Journal of Computational Intelligence Research*, 2(6):273–286, 2006.
- [9] K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, and E. Zitzler. Scalable multi-objective optimization test problems. In *Congress on Evolutionary Computation (CEC-2002)*, pages 825–830, 2002.
- [10] M. Ehrgott and X. Gandibleux. *Multiple Criteria Optimization: State of the Art. Annotated Bibliographic Surveys*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [11] C.M. Fonseca, L. Paquete, and M. Lopez-Ibanez. An improved dimension-sweep algorithm for the hypervolume indicator. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC-2006)*, pages 1157 – 1163, 2006.
- [12] M. Gong, F. Liu, W. Zhang, L. Jiao, and Q. Zhang. Interactive MOEA/D for multi-objective decision making. In *13th annual conference on Genetic and evolutionary computation, GECCO '11*, pages 721–728, 2011.
- [13] K. Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [14] L. Rachmawati and D. Srinivasan. Preference Incorporation in Multiobjective Evolutionary Algorithms. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 3385–3391, 2006.
- [15] L. Ben Said, S. Bechikh, and K. Ghedira. The r-dominance: A new dominance relation for interactive evolutionary multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 14(5):801–818, 2010.
- [16] K. Sindhya, A.B. Ruiz, and K. Miettinen. A Preference Based Interactive Evolutionary Algorithm for Multi-objective Optimization: PIE. In R. Takahashi, K. Deb, E. Wanner, and S. Greco, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, volume 6576 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 212–225, 2011.
- [17] R. E. Steuer. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. John Wiley, New York, 1986.
- [18] L. Thiele, K. Miettinen, P. Korhonen, and J. Molina. A preference-based evolutionary algorithm for multi-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 17(3):411–436, 2009.
- [19] A. P. Wierzbicki. The use of reference objectives in multiobjective optimization. In G. Fandel and T. Gal, editors, *Multiple Criteria Decision Making, Theory and Applications*, pages 468–486. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [20] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 8(2):173–195, 2000.
- [21] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - A comparative case study. In A. Eiben, T. Bäck, M. Schoenauer, and H.P. Schwefel, editors, *Parallel Problem Solving from Nature*, volume 1498 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 292–301. Springer-Verlag, Berlin, 1998.