

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS
CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

ÁREA DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CONFERENCIA-TALLER:

AVANCES EN EXPERIENCIAS DE CÁLCULO MENTAL

Dr. Moisés Coriat Benarroch
Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Resumen

La conferencia se caracteriza por un formato tipo taller, en el que se prioriza la participación activa de los asistentes. Los contenidos tratados en una sesión de 3 horas en el horario y en la fecha que figuran en el cartel de difusión pública del evento, que se adjunta al presente documento, son los siguientes:

- Idea de la aritmética rápida
- Actividades de suma, resta, multiplicación y división rápidas
- Estimación y resultado exacto
- Aritmética rápida y pre-álgebra
- Aritmética rápida y...

Suma

Resta

Multiplicación (un poco)

División

Necesidad de la Aritmética rápida:

Las personas difieren mucho en sus destrezas matemáticas, al igual que difieren en sus destrezas físicas. Todos podemos "ir deprisa"; unos lo harán con muletas, otros en silla de ruedas; la mayoría apresurará el paso, casi todos correrán, pero ¿alguno ganará la medalla de oro de los 100 m? Si la gana, ¿tendrá capacidad para ganar también la medalla de oro del maratón?.

Lo mismo ocurre con las destrezas de aritmética rápida: en un extremo, está la persona que no puede practicarlo y en el otro están los que compiten por calcular de memoria con 10 o 20 cifras decimales la raíz cúbica de algún número de 30 o 40 cifras.

El supuesto es que tenemos un poco de memoria y queremos aprovecharla algo mejor en los cálculos con números, pero sin llegar a ser calculistas de élite.

En este ámbito reducido también se dan diferencias entre las personas, dado que, en la aritmética rápida, intervienen las capacidades, el gusto, el esfuerzo y el apoyo recibido.

En este taller respetaremos las cuatro condiciones. Es posible que de aquí a tres horas alguien llegue a hartarse, porque deje de gustarle; en ese caso, no debería quedarse desde el momento en que el gusto desaparezca. También es posible que de aquí a tres horas alguien deje de querer esforzarse. Sobre el apoyo recibido no podemos hacer nada, ya que me refiero al apoyo que habéis tenido en vuestra vida ANTES de llegar aquí. Mañana, para algunos, este taller habrá añadido algo a ese apoyo recibido.

Sentido numérico:

La aritmética rápida se apoya en algo más general que, vagamente, denominamos "sentido numérico": esta expresión remite a la colección de nuestros sentimientos o sensaciones individuales cuando tenemos que manejar números y cifras.

En general, aceptamos que si una persona tiene un buen sentido numérico cabe decir de ella todo lo que sigue:

- (1) Esa persona disfruta la aritmética, no la odia.
- (2) Presta más atención a las cantidades numéricas que a las cifras que las componen.
- (3) Tiene soltura en la búsqueda de relaciones, como "5 es el doble de 10", "5 es la raíz cuadrada de 25" o "5 es un divisor de 3240".
- (4) Ante cuentas elementales, "ve" solamente la respuesta. Por ejemplo, si se le muestra "4+3", ve "7", no "cuatro más tres".
- (5) Trabaja de izquierda a derecha. Por ejemplo, ante 27, ve "dos (decenas) y siete", no "siete y dos (decenas)".
- (6) Maneja expresiones más simples o más adecuadas. Por ejemplo, 0'20 € son 20 céntimos o $\frac{1}{5}$ de euro; 98 es 100 menos 2; 24 es igual a 16 más la mitad de 8.

El sentido numérico varía enormemente entre dos personas cualesquiera.

Sin duda, el cálculo "de cabeza" exige entrenamiento. El taller, aislado, no dará mucho entrenamiento. El escaso entrenamiento genera la pérdida de anclajes a trucos personales, hechos y convenios. Esto es inevitable. Las bases de la aritmética rápida no se olvidan, salvo enfermedad; es como ir en bicicleta.

Comentario sobre la calculadora.

Es un lugar común lo que copio a continuación:

"La proliferación de las calculadoras en la década de los sesenta en adelante, poco a poco ha sido menos necesario el cálculo mental y a día de hoy está algo "desterrado". El problema es que aunque tengamos en el móvil una preciosa calculadora, nunca está mal por uno mismo y por ser práctico en muchas situaciones cotidianas, tener recursos para poder hacer rápidamente algunos pequeños cálculos mentales." (Fuente: Carazo Gil, en [http://www.reddeautores.com/matematicas/consejos-para-calculo-mental-facil-y-rapido-porcentajes/.](http://www.reddeautores.com/matematicas/consejos-para-calculo-mental-facil-y-rapido-porcentajes/))

Este autor, en mi modesta opinión, equivoca la cuestión. La aritmética rápida es más necesaria ahora porque tenemos que controlar el resultado en previsión de posibles errores al copiar, teclear o leer.

Por ejemplo, si multiplicamos con calculadora 325 por 1,25 tenemos que esperar un resultado de unos 400 y algo. Si dividimos 325 por 24,9 tenemos que esperar un resultado entre 10 y 15.

Variantes: exacto, estimado, aproximado

Consideremos estas tres expresiones:

$$12 \times 125 = 1500$$

$12 \times 125 \times 1440$, uso el cuadrado de 12 y lo multiplico por 10.

$$12 \times 125 = 1440, \text{ con error menor que } 100.$$

La primera es un ejemplo de cálculo exacto; la segunda es un ejemplo de estimación; la tercera es un ejemplo de aproximación. El cálculo exacto no siempre es posible, salvo que se usen expresiones simbólicas; así, es una expresión exacta, también lo es π , pero ya no es posible mejorar la expresión en el sentido de la exactitud. Lo normal es dar un valor estimado y solamente en trabajos de matemáticos profesionales hallaremos el error cometido al escribir el anterior valor numérico.

Los tres tipos de cálculos son adecuados, y se adaptan a diferentes circunstancias.

$32+49 = 81$; según el caso, me valdrá $32+49 \approx 30 + 50 = 80$. (Se trata de una aproximación con error algo mayor del 1%, por eso, como estimación, es muy buena.)

Sus técnicas son muchas y variadas. Veremos algunas de ellas.

Por ejemplo, para calcular un producto de dos números que distan la misma cantidad de un múltiplo de 10 (como 31×29 , 45×35 , 103×97 , etc.) se suele usar la famosa fórmula que nuestros profesores nos obligaron a aprender de memoria y que casi todos olvidaron: $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$. Ahora digo

$$31 \times 29 = (30 + 1) \times (30 - 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899.$$

Usos

Se conocen muchos trucos como el que acabo de mencionar. De hecho, cuando los usamos, a veces dejamos boquiabiertos a los que hablan con nosotros. (O nos sorprenden.)

Debo confesar que yo no uso el cálculo de cabeza para estas cosas, sino para tener una idea del resultado ANTES de usar una calculadora o, incluso, antes de comprobar que lo he hecho bien usando otro método.

En la vida cotidiana, cuando hacemos aritmética rápida, muchos procuran que "no se note", con ello sorprenden. En cambio, en este taller, explicaremos los pasos.

-Usos escolares

La aritmética rápida, el dictado, la redacción o la lectura en voz alta, han desaparecido de las escuelas. Se aprende un poquito de todo, pero no se inculca ni cultiva. No lo digo para quejarme, sino para que deduzcáis que estáis aquí, en este taller, para pasar un buen rato, no para aprender técnicas necesarias, imprescindibles o que serán fabulosas para los niños a los que enseñéis. Cálculo rápido, dictado, redacción o lectura en voz alta están (escolarmente hablando) muy malitos en España.

Suma

dos métodos generales para la suma rápida. Uno, se inspira en el sorobán y el otro en las conocidas tablas de sumar. Manejaremos básicamente el segundo, pero empezaré contando algo del primero.

La clave es “no pasar de 10”. Por ejemplo, para sumar, $14+7$, hacemos “ $4-3=1$ ” y “ $1+1=2$ ”: resultado; 21.

Suma rápida con el soroban:

Por ejemplo, para sumar, $14+7$, hacemos “ $4-3=1$ ” y “ $1+1=2$ ”: resultado; 21.

¿De dónde sale el 3? 3 es el complemento a 10 del 7. Al número dado le restamos el complemento y le sumamos una unidad.

Suma rápida con las tablas:

Estrategia 1: Buscar parejas que suman 10.

(1+9 2+8 3+7 4+6 5+5)

Estrategia 2: Añadir números de dos cifras: 11, 12, 13, 14, ...

Estrategia 3: Parejas que suman hasta 18.

Estrategia 4: Tríos que suman hasta 27...

Resta

Resta rápida con llevadas

Método de la decena de apoyo

El primer algoritmo, se basa en lo siguiente: si a los elementos de una resta les sumamos la misma cantidad, la resta no varía. Esta propiedad general se practica sumando 10 al minuendo (m) y al sustraendo (s), 100, 1000, etc.:

$$m - s = (m+10) - (s+10) = (m+100) - (s+100) = \dots$$

La cosa funciona porque sumamos 10 a la cifra de las unidades, EN EL MINUENDO, y 10 a la cifra de las decenas, EN EL SUSTRAENDO; esto se repite sucesivamente, si es necesario, en las decenas, las centenas, etc.

Ejemplo: $337-148$.

(a) Sumamos 10 al 7 (17 unidades) y a 17 unidades le restamos 8; también sumamos 1 decena al 4.

(b) Sumamos 10 al 3 (13 decenas) y a 13 decenas le restamos 5 (4+1) decenas; también sumamos 1 centena al 1.

Ya no es necesario aplicar más la propiedad indicada; el resultado es 189.

Método del préstamo.

Si en la cifra de las unidades no hay bastantes unidades para restar las unidades del minuendo, las decenas se reducirán en una, que se prestará a las unidades. El proceso se repite todas las veces que convenga en las diferentes cifras.

En este método, solamente modificamos el minuendo.

Ejemplo: $337-148$.

(a) Descomponemos 337 así: $320+17$; a 17 le restamos 8.

(b) Descomponemos ahora 320 así: $200+120$; a 120 le restamos 40 (a 12 decenas le restamos 4 decenas)

Finalmente, a 200 le restamos 100 (a 2 centenas le restamos 1 centena); el resultado es 189

Es mucho más rápido restar de izquierda a derecha que hacerlo usando el sentido aprendido en la escuela (de derecha a izquierda).

Es conveniente tener en cuenta las posibles situaciones...

Situaciones posibles:

1^a) No hay llevadas 2^a) Sí las hay.

Dentro de la segunda hay varios casos.

Hay un cero (o más) en el minuendo

Ejemplos: $408 - 135$; $4008 - 135$

Hay dos cifras iguales en la misma posición relativa y me llevo algo de la cifra anterior.

Ejemplos: $324 - 126$; $872 - 477$

Si las dos cifras iguales son "9", ¿cambia algo?

Ejemplos: $394 - 196$; $2991 - 997$

Se abordan por último técnicas de multiplicación y división rápida utilizando las tablas, la suma, la resta, la factorización y los cuadrados

Referencias

Sticker, H. 1955. How to Calculate Quickly. Dover Publications, Inc. (Reimpresión de The Art of Calculation.)

Stoddard, E. 1965. Speed Mathematics Simplified. Dover Publications, Inc. (Reedición de 1994.)

Benjamin, A. and Shermer, M. 2006. Secrets of Mental Math. New York: Three Rivers Press.

Coriat Benarroch, M. 2010. Educación Matemática Infantil. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.



**DIDACTICA DE LA MATEMATICA,
DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y
DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES**

CONFERENCIA TALLER

AVANCES EN EXPERIENCIAS DE CÁLCULO MENTAL

Dr. D. Moisés Coriat Benarroch

**Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada**

**Jueves, 12 de Diciembre de 2013
De 10:30 a 13:30**

Aula 2.25

Facultad de Ciencias de la Educación