

Euskal Herriko

Unibertsitatea



indice

•1. El Problema
2. Estrategias de Gestión Activo-Pasivo
•3. Optimización
•4. La ley y las estrategias de ALM











PENSION FUNDS:
A Commonsense guide to a common goal.
Clay B Mansfield & Timothy W. Cunningham



El Problema



PROBLEMA

Supongamos que una entidad aseguradora toma como compromiso abonar, por ejemplo, 500.000 u.m. dentro de 5 años garantizando una rentabilidad anual del 4%.

Recauda...

$$500.000 \cdot (1 + 4\%)^{-5} = 410.963,55 \text{ u.m.}$$

Adquiere títulos de renta fija que abonen intereses periódicos (4%) a un plazo de 5 años, pero si una vez adquiridos esos títulos el tipo de interés de mercado desciende al 2%, no acumulará más que:

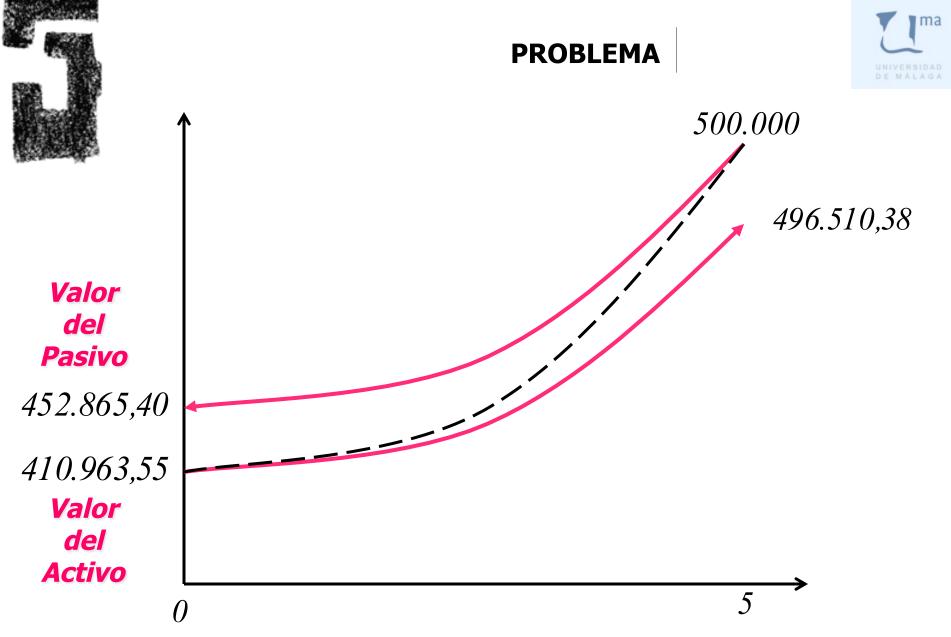
$$410.963,55 \cdot 4\% \cdot \mathbf{s}_{\overline{5}|\ 2\%} + 410.963,55 = 496.510,38 \ u.m.$$

El pasivo valorado a ese 2% (valor de mercado) es...



$$500.000 \cdot (1 + 2\%)^{-5} = 452.865,40 \text{ u.m.}$$







TEOREMA DE FISHER Y WEIL



Una cartera de valores compuesta por bonos estará inmunizada para un determinado periodo de tiempo si su valor al final de dicho periodo de tiempo es necesariamente y con independencia de cuál sea la evolución de los tipos de interés durante ese periodo, como mínimo, el valor que tendría si la función de los tipos de interés permanece constante a lo largo de dicho periodo de tiempo.

$$H - t = \frac{\sum_{h=t+1}^{n} (h-t) \cdot F_h \cdot (1 + i_t)^{-h+t}}{\sum_{h=t+1}^{n} F_h \cdot (1 + i_t)^{-h+t}} = D_A$$





Estrategias de Gestión Activo-Pasivo







INMUNIZACIÓN

Garantiza un objetivo con un mínimo de rentabilidad, neutralizando el riesgo de interés.

- 1. Congruencia Absoluta.
- 2. Congruencia Positiva.
- 3. Congruencia Temporal,





REDINGTON, F.M. (1.952)



Review of the Principles of Life-Office Valuation.

Journal of the Institute of Actuaries, 18.

LEGADO INTUITIVO

Regla 1: El valor medio de los fondos debe igualar al valor medio de las obligaciones de pago.

Regla 2: La variación sobre el valor medio de los fondos debe ser mayor que la variación sobre el valor medio de las obligaciones de pago.





REDINGTON, F.M. (1.952)



Review of the Principles of Life-Office Valuation. Journal of the Institute of Actuaries, 18.

PRIMERA CONDICION :

$$L(i)_0 = A(i)_0$$

SEGUNDA CONDICION :

$$\sum_{h=0}^{s} h \cdot v^h \cdot L_h = \sum_{h=0}^{s} h \cdot v^h \cdot F_h$$

TERCERA CONDICION:

$$\sum_{h=0}^{s} h^2 \cdot v^h \cdot L_h \leq \sum_{h=0}^{s} h^2 \cdot v^h \cdot F_h$$





REDINGTON, F.M. (1.952)



Review of the Principles of Life-Office Valuation.

Journal of the Institute of Actuaries, 18.

CONCLUSIONES

- i. Soluciones Infinitas
- ii. Los ingresos del fondo no representan un tipo de interés.
- iii.Las soluciones cambian con el tiempo: Rebalanceo periódico.
- iv. La solución depende del tipo de interés de mercado.
- v. Cambios en el fondo o en los pagos alteran el balance.
- vi. Existe una solución particular única: La congruencia absoluta







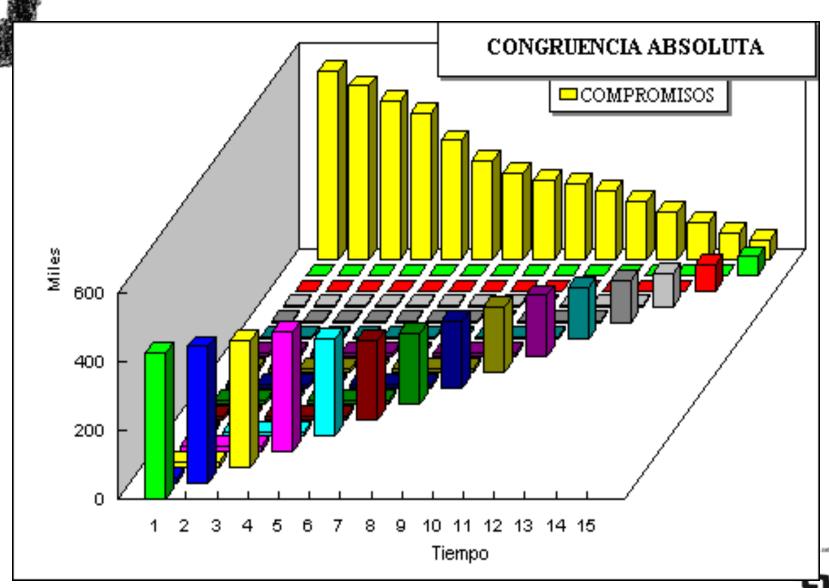
Creación de una cartera de inversiones de renta fija que genere una corriente de flujos económicos que case perfectamente, en cuantía y tiempo, con la corriente de flujos económicos de pagos a los que se desea hacer frente.

$$L_{t}^{j} + L_{t}^{m} + L_{t}^{i} + L_{t}^{r} = L_{t} =$$

$$= n_{1} \cdot F_{t}^{1} + n_{2} \cdot F_{t}^{2} + \dots + n_{w} \cdot F_{t}^{w}$$











SOLUCIÓN...

Ordenar en orden inverso y, el último plazo...

$$L_{t+s} = \left(P(i)_s + C^s \cdot i_c^s\right) \cdot X_s$$

El penúltimo...

$$L_{t+s-1} = \left(C^{s} \cdot i_{c}^{s}\right) \cdot X_{s} + \left(P(i)_{s-1} + C^{s-1} \cdot i_{c}^{s-1}\right) \cdot X_{s-1}$$

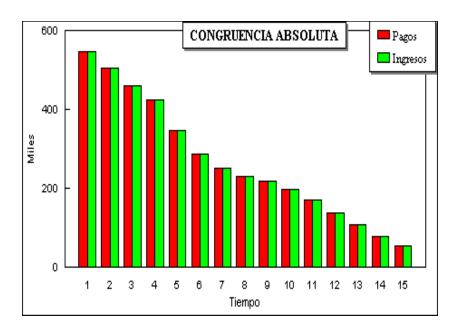
Así hasta llegar al primer ejercicio...

$$L_{t+1} = \sum_{h=2}^{s} \left(C^h \cdot i_c^h \right) \cdot X_h + \left(P(i)_1 + C^1 \cdot i_c^1 \right) \cdot X_1$$





Igualación en cuantía y tiempo de las obligaciones con los ingresos del fondo.



No aparece P₀

Libertad de elección

Influencia = L; F

Necesidad de títulos con n > 30 años

Desequilibrio => Reinversión





CONGRUENCIA POSITIVA



Estructuración de la cartera de inversiones a través de la igualación del plazo medio de los pagos probables futuros con el plazo medio de los ingresos futuros del fondo de inversiones a través del concepto de duración con el fin de buscar una distribución de títulos que permanezca inmune ante el riesgo de interés.

$$D_L = D_1 \cdot n_1 + D_2 \cdot n_2 + \dots + D_w \cdot n_w$$

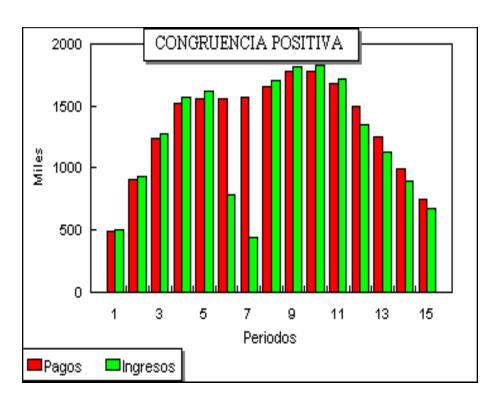




CONGRUENCIA POSITIVA



Basado en FISHER & WEIL



Múltiples soluciones

Libertad de elección

Influencia: F > L

Necesidad de títulos con n > 30 años

Desequilibrio => Reinversión

Necesidad de rebalanceo.



CONGRUENCIA TEMPORAL



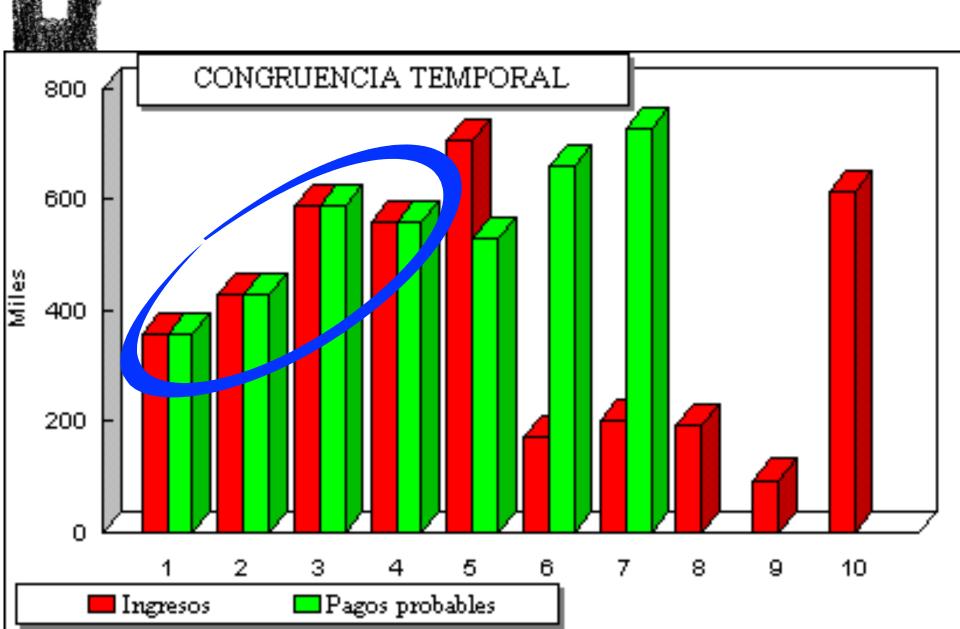
Estructuración de una cartera de inversiones de renta fija que genere una corriente de flujos económicos que case perfectamente con la corriente de flujos económicos de pagos en los z primeros periodos y que iguale su duración con la duración de los compromisos adquiridos.

$$D_{L} = D_{1} \cdot n_{1} + D_{2} \cdot n_{2} + ... + D_{w} \cdot n_{w}$$



CONGRUENCIA TEMPORAL







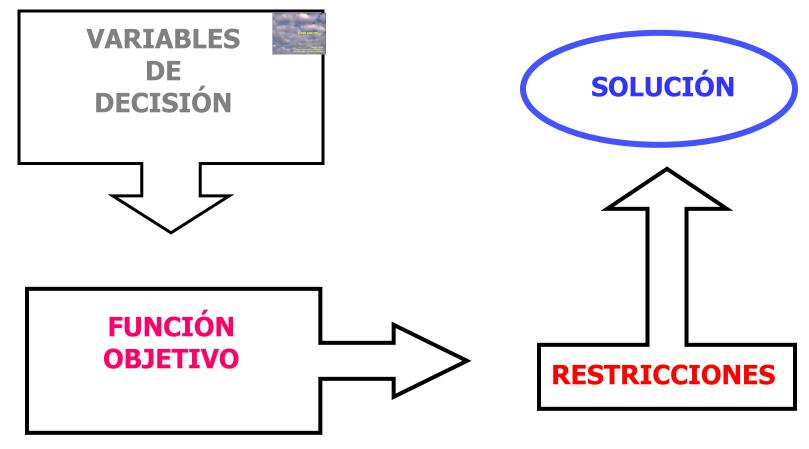
Optimización





MODELOS DE OPTIMIZACIÓN









Un plan de previsión social se dispone a planificar la cartera de inversiones de los compromisos por pensiones de jubilación para los próximos diez años. Del informe actuarial correspondiente se desprenden los siguientes importes a abonar en cada uno de los años siguientes:

Con el fin de llevar a cabo una congruencia absoluta en esta cartera de compromisos, acude al mercado financiero que actualmente tiene la siguiente estructura de tipos de interés al contado,

t	L_t
1	2.465.515
2	1.695.159
3	3.330.046
4	2.241.377
5	1.412.633
6	2.561.574
7	1.600.984
8	941.755
9	523.197
10	275.367

Plazo		2	3	4	5	6	7	8	9	10
$_{h}i_{0}$	3,00%	2,95%	3,12%	3,18%	3,25%	3,45%	3,65%	3,85%	4,05%	4,25%



elige los siguientes diez títulos del tesoro público como posible versión. Todos ellos son reembolsables a la par.

	Plazo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	Cupón	3%	3,15%	3,30%	3,45%	3,60%	3,75%	3,63%	3,51%	3,39%	3,27%

También analiza los siguientes diez títulos de renta fija pertenecientes a empresas de reconocida solvencia, reembolsables a la par:

Plazo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cupón	3,50%	3,65%	3,95%	4,10%	4,55%	4,75%	4,80%	4,90%	5,00%	5,25%
$PR(i)_{\theta}$	99,985	100,639	101,459	101,936	103,473	104,626	103,849	103,198	102,923	102,782

Los responsables del plan de previsión encargan a un actuario de inversiones que les estructure la cartera de inversiones entre los títulos elegidos, manifestando que desean al menos la mitad de la cartera asignada en títulos del tesoro. Bajo estas premisas, calculamos

- a) Para los compromisos de pago, su valor de mercado, duración esperada modificada y convexidad esperada modificada.
- b) Para los títulos de diferente calidad crediticia a los del tesoro, su diferencia real respecto a los títulos del tesoro.
- c) Estructure la cartera de inversiones acorde a las preferencias apuntadas por los responsables del plan de previsión.

Para los compromisos de pago, su valor de mercado, duración es erada modificada y convexidad esperada modificada.

t	L_t	$_{h}i_{0}$	$L_t \cdot v^t$	$t \cdot L_t \cdot v^{t+1}$	$t \cdot (t+1) \cdot L_t \cdot v^{t+2}$
1	2.465.515	3,00%	2.393.704	2.323.984	4.512.591
2	1.695.159	2,95%	1.599.403	3.107.144	9.054.331
3	3.330.046	3,12%	3.036.837	8.834.864	34.270.227
4	2.241.377	3,18%	1.977.575	7.666.503	37.151.111
5	1.412.633	3,25%	1.203.868	5.829.870	33.878.182
6	2.561.574	3,45%	2.089.892	12.121.174	82.018.578
7	1.600.984	3,65%	1.245.666	8.412.605	64.930.865
8	941.755	3,85%	696.123	5.362.527	46.473.511
9	523.197	4,05%	366.005	3.165.827	30.426.015
10	275.367	4,25%	181.615	1.742.108	18.381.960
			$L(i)_{\theta} = 14.790.688$	DEM = 3,960	CXEM = 24,414



Para los títulos de diferente calidad crediticia a los del tesoro, su diferencia real respecto a los títulos del tesoro.

Título	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DE	0,005160	0,003635	0,003159	0,004001	0,005382	0,004552	0,005621	0,006509	0,006614	0,007965

c) Estructure la cartera de inversiones acorde a las preferencias apuntadas por los responsables del plan de previsión.

CONGRUENCIA ABSOLUTA





$$Min \ A(i)_0 = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{20}$$

RESTRICCIONES:

$$X_{1} \cdot \frac{F_{1}^{1}}{P(i)_{0}^{1}} + X_{2} \cdot \frac{F_{1}^{2}}{P(i)_{0}^{2}} + \dots + X_{10} \cdot \frac{F_{1}^{10}}{P(i)_{0}^{10}} + X_{11} \cdot \frac{F_{1}^{11}}{PR(i)_{0}^{11}} + \dots + X_{20} \cdot \frac{F_{1}^{20}}{PR(i)_{0}^{20}} = L_{1}$$

$$X_{1} \cdot \frac{F_{10}^{1}}{P(i)_{0}^{1}} + X_{2} \cdot \frac{F_{10}^{2}}{P(i)_{0}^{2}} + \dots + X_{10} \cdot \frac{F_{10}^{10}}{P(i)_{0}^{10}} + X_{11} \cdot \frac{F_{10}^{11}}{PR(i)_{0}^{11}} + \dots + X_{20} \cdot \frac{F_{10}^{20}}{PR(i)_{0}^{20}} = L_{10}$$

$$A(i)_0 \le 14.790.688$$

$$> S(i)_{10} = A(i)_{10} - L(i)_{10} = 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{20} = A(i)_0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{10} = 50\% \cdot A(i)_0$$







$A(i)_0 = 14.594.235 < 14.790.688 = L(i)_0$

Título	$X_1 - X_{10}$	$X_{11} - X_{20}$	Título
1	1.904.463	0	11
2	1.195.786	0	12
3	1.831.675	1.056.685	13
4	0	1.912.573	14
5	0	1.163.493	15
6	2.365.194	0	16
7	0	1.506.976	17
8	0	889.096	18
9	0	499.384	19
10	0	268.911	20

t	L_t	F_t	S_t
1	2.465.515	2.465.515	0
2	1.695.159	1.695.159	0
3	3.330.046	3.330.046	0
4	2.241.377	2.241.377	0
5	1.412.633	1.412.633	0
6	2.561.574	2.561.574	0
7	1.600.984	1.600.984	0
8	941.755	941.755	0
9	523.197	523.197	0
10	275.367	275.367	0







LEGISLACIÓN ESPAÑOLA



Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, aprobado por el Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre.

- ii. Orden Ministerial de 23 de diciembre de 1998 por la que se desarrollan determinados preceptos de la normativa reguladora de los seguros privados y se establecen las obligaciones de información como consecuencia de la introducción del euro.
- iii.Real Decreto 239/2007 de 16 de febrero que modifica Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados.
- iv. Orden EHA/339/2007, de 16 de febrero, por la que se desarrollan determinados preceptos de la normativa reguladora de los seguros privados.

TIPO DE INTERÉS PARA PM



mpleamos un tipo de interés para delimitar el valor de la PM

Pero existe uno máximo.

Acorde a la Circular de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones sobre las tasas a utilizar para la valoración de determinados títulos de renta fija al cierre del cuarto trimestre del año, éstas se calculan teniendo en cuenta la media resultante del Mercado de Deuda Pública anotada del Banco de España teniendo en cuenta el volumen contratado

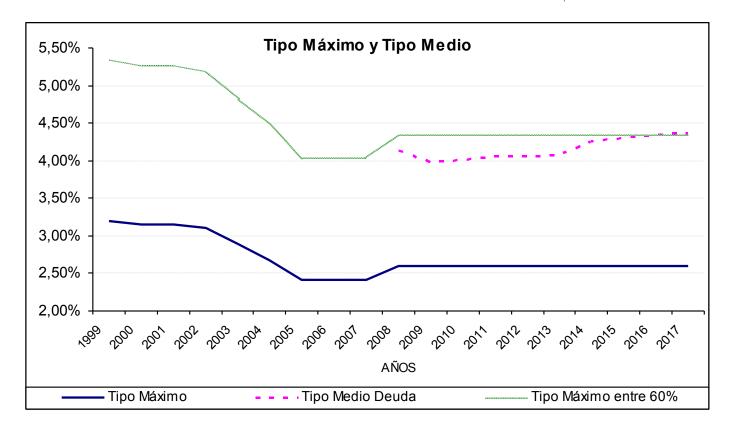
olumen contratado
$$im_{t} = 60\% \cdot \frac{n_{a} \cdot i_{a} + n_{b} \cdot i_{b} + \dots + n_{z} \cdot i_{z}}{n_{a} + n_{b} + \dots + n_{z}} = 60\% \cdot \frac{\sum_{b=a}^{z} n_{h} \cdot i_{b}}{\sum_{b=a}^{z} n_{b}}$$





TIPO DE INTERÉS PARA PM





	Tipos de interés anual máximos												
AÑO 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008										2008			
TIPO	3,20%	3,15%	3,15%	3,11%	2,89%	2,68%	2,42%	2,42%	2,42%	2,60%			

Pero se puede superar el tipo de interés máximo.

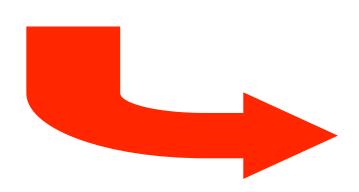




TIPO DE INTERÉS PARA PM



- 1. Así esté previsto en la base técnica correspondiente.
- 2. Para el caso que la entidad aseguradora haya asignado inversiones a esas operaciones de seguro.
- 3. El tanto de rendimiento interno de estas inversiones sea superior a aquel máximo prefijado.









Función Objetivo:

$$Min \ A(_h i_0)_0 = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_h + ... + X_w$$

Restricciones:

$$\left(n_1 \cdot F_{h-\theta}^1 + n_2 \cdot F_{h-\theta}^2 + \dots + n_w \cdot F_{h-\theta}^w\right) \cdot \left(1 + \theta f_h\right)^\theta = L_h$$







Restricciones Particulares: Saldos Intermedios

$$F_h = L_h$$

Pero....
$$F_{h-\theta} \cdot (1 + f_h)^{\theta} \ge L_h$$

$$S_h = \sum_{\theta=1}^{30} F_{h-\frac{\theta}{30}} \cdot (1 + {}_{l}f_h)^{\frac{30-\theta}{365}} - L_h \cdot (1 + {}_{l}f_h)^{\frac{15}{365}} \ge 0$$

$$S_h < 0$$

\acute{o} si S_{i} < 0 entonces

$$S_{h+1} = S_h \cdot (1 + {}_{l}f_h \cdot 1, 5)^{1/12} + \sum_{\theta=1}^{30} F_{h+\frac{\theta}{30}} \cdot (1 + {}_{l}f_h)^{\frac{30-\theta}{365}} - L_h \cdot (1 + {}_{l}f_h)^{\frac{15/365}{365}}$$

$$\leq \sum_{\theta=1}^{30} L_{h+\frac{\theta}{30}} + \sum_{\theta=1}^{30} L_{h-1+\frac{\theta}{30}} + \sum_{\theta=1}^{30} L_{h-2+\frac{\theta}{30}}$$

$$S_{31/12/h} \le 12,5\% \cdot \sum_{\theta=1}^{30} L_{h+\frac{\theta}{365}}$$







Restricciones Particulares: Operaciones a plazo de más de 10 años

$$A(h_0^i)_0^{RV} \le 25\% \cdot PM(h_0^i)_0^0$$

$$A(i_0)_0^{RV} \le \sum_{h=10}^{s} L_h \cdot (1 + i_0)^{-h}$$

$$A({}_{h}i_{t})_{t}^{RV} \leq \sum_{h=10}^{s} L_{t+h} \cdot (1+{}_{h}i_{t})^{-h}$$

$$A(h_i i_t)_t^{RV} \leq 50\% \cdot PM(h_i i_t)_t$$

Negociación > 80% días hábiles en el último trimestre

R asignada < \acute{o} = Obligaciones del Estado a duración L_t







Función Objetivo:

$$Min \ A(_h i_0)_0 = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_h + \ldots + X_w$$

Restricciones:

$$DM_{A} = \frac{\sum_{h=t+1}^{s} (h-t) \cdot L_{h} \cdot (1+_{h-t}i_{t})^{-h+t}}{\sum_{h=t+1}^{s} L_{h} \cdot (1+_{h-t}i_{t})^{-h+t}} = DME_{L}$$

$$0.8 \le \frac{DM_A}{DEM_L} \le 1.2$$





Restricciones Generales

$$DM_{A} = \frac{1}{A(_{h}i_{t})_{t}} \cdot [DM_{1} \cdot X_{1} + DM_{2} \cdot X_{2} + ... + DM_{w} \cdot X_{w}] = DEM_{L_{t}}$$

$$CXM_{A} = \frac{1}{A(_{h}i_{t})_{t}} \cdot [CXM_{1} \cdot X_{1} + CXM_{2} \cdot X_{2} + ... + CXM_{w} \cdot X_{w}] = CXEM_{L_{t}}$$

$$0,8 \le \frac{DM_{A}}{DEM_{A}} \le 1,2$$

$$A(h_i^i)_t \ge PM(h_i^i)_t$$

$$S(i)_{S} = A(I)_{S} - L(i)_{S} = 0$$







Equivalencia en la sensibilidad ante variaciones de tipos de interés

$$0.8 \le \frac{\frac{A(h_i i_0) - A(h_i i_0 + \varepsilon)}{A(h_i i_0)}}{\frac{L(h_i i_0) - L(h_i i_0 + \varepsilon)}{L(h_i i_0)}} \le 1.2$$

$$L(h_i i_0)$$

$$\left| \frac{A(_{h}i_{0}) - A(_{h}i_{0} + \varepsilon)}{A(_{h}i_{0})} - \frac{L(_{h}i_{0}) - L(_{h}i_{0} + \varepsilon)}{L(_{h}i_{0})} \right| < \begin{cases} 0,0010 & para 5 o más años \\ 0,0008 & para 4 años \\ 0,0003 & para 3 años \\ 0,0001 & para 2 o menos años \end{cases}$$







Restricciones Particulares: Operaciones a plazo de más de 10 años

$$A(h_0^i)_0^{RV} \le 25\% \cdot PM(h_0^i)_0^0$$

$$A(i_0)_0^{RV} \le \sum_{h=10}^{s} L_h \cdot (1 + i_0)^{-h}$$

$$A({}_{h}i_{t})_{t}^{RV} \leq \sum_{h=10}^{s} L_{t+h} \cdot (1+{}_{h}i_{t})^{-h}$$

$$A(h_i^i)_t^{RV} \leq 50\% \cdot PM(h_i^i)_t$$

Negociación > 80% días hábiles en el último trimestre

R asignada < \acute{o} = Obligaciones del Estado a duración L_t





ACTIVOS APTOS



Valores negociables de RF.

Depósitos en entidades de calidad crediticia

Tesorería

GRUPO	Categoría	Penalización% _P
1	AAA y AA	95%
2	Α	92%
3	BBB	89%



PM CON RENTABILIDAD DE MERCADO



$$ir = r'_{1} \cdot \frac{X_{1}}{A(h_{i_{o}})} + r'_{2} \cdot \frac{X_{2}}{A(h_{i_{o}})} + \dots + r'_{w} \cdot \frac{X_{w}}{A(h_{i_{o}})}$$

$$PM(ir)_{t} = L(ir)_{t} - I(ir)_{t} =$$

$$= \sum_{h=t+1}^{s} L_{h} \cdot (1+ir)^{-h+t} - \sum_{h=t+1}^{n} F_{h} \cdot (1+ir)^{-h+t}$$



APLICACIÓN

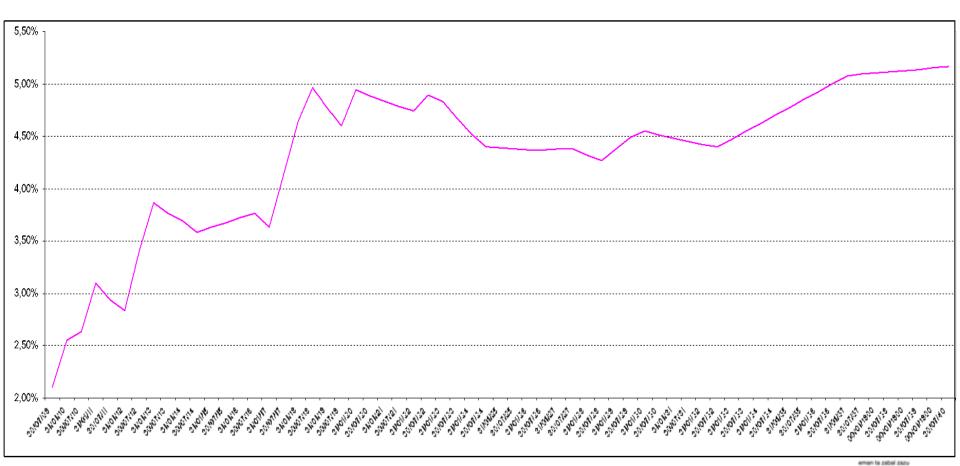
Seguro de fallecimiento de 300.000 € contratado por el asegurado en el 2003, a los 50 años y para un plazo de 15 años (hasta la edad de jubilación normal), empleando para ello las tablas de mortalidad suizas GR-95 masculinas y el tipo de interés máximo vigente en aquel momento.

	Prima Periódica	Prima Única		Prima Periódica	Prima Única
$P(2,89\%)_{50} =$	2.805,23	48.685,47	$(Cfa)(2,60\%)_{55} =$	23.925,79	-
$(Va)(2,60\%)_{55} =$	25.971,23	25.971,23	$PM(2,60\%)_{55} =$	2.045,44	25.971,23





Tipos de interés al contado observados en España a 30 de diciembre de 2008.



APLICACIÓN



t	Precio	Cupón	t	Precio	Cupón
1	100,452	3,02%	6	100,106	3,63%
2	98,801	2,47%	7	102,477	4,10%
3	100,740	3,10%	8	103,994	4,20%
4	96,547	2,88%	9	93,702	3,62%
5	100,852	3,85%	10	100,084	4,58%

t	Precio	Cupón	t	Precio	Cupón
11	100,271	4,74%	16	95,497	3,97%
12	100,251	4,67%	17	104,572	4,74%
13	102,917	4,89%	18	100,293	4,38%
14	97,806	4,45%	19	98,941	4,24%
15	97,910	4,26%	20	94,992	3,98%





APLICACIÓN

		Periódica		Única		Saldo Máx.		
h	Pagos	Ingresos	Balance	Saldo	Ingresos	Balance	Saldo	Negativo
1	2.022,77	3.716,52	1.693,76	1.693,76	2.022,77	0,00	0,00	- 505,69
2	2.175,42	2.941,21	765,79	2.521,46	2.175,42	0,00	0,00	- 543,85
3	2.340,23	2.916,13	575,90	3.155,44	5.400,27	3.060,04	3.060,04	- 585,06
4	2.518,12	2.875,84	357,72	3.735,17	617,05	- 1.901,07	1.374,27	- 629,53
5	2.709,79	2.844,58	134,79	3.981,44	617,05	- 2.092,73	- 677,45	- 677,45
6	2.915,87	2.948,08	32,21	4.145,84	2.898,09	- 17,78	- 728,97	- 728,97
7	3.136,74	2.772,56	- 364,18	3.958,96	3.128,28	- 8,45	- 784,18	- 784,18
8	3.351,80	2.739,21	- 612,58	3.464,92	9.489,84	6.138,04	5.318,64	- 837,95
9	3.549,95	2.772,53	- 777,42	3.142,07	47,29	- 3.502,66	2.513,73	- 887,49
10	3.744,65	416,45	- 3.328,20	_	1.082,01	- 2.662,64	-	







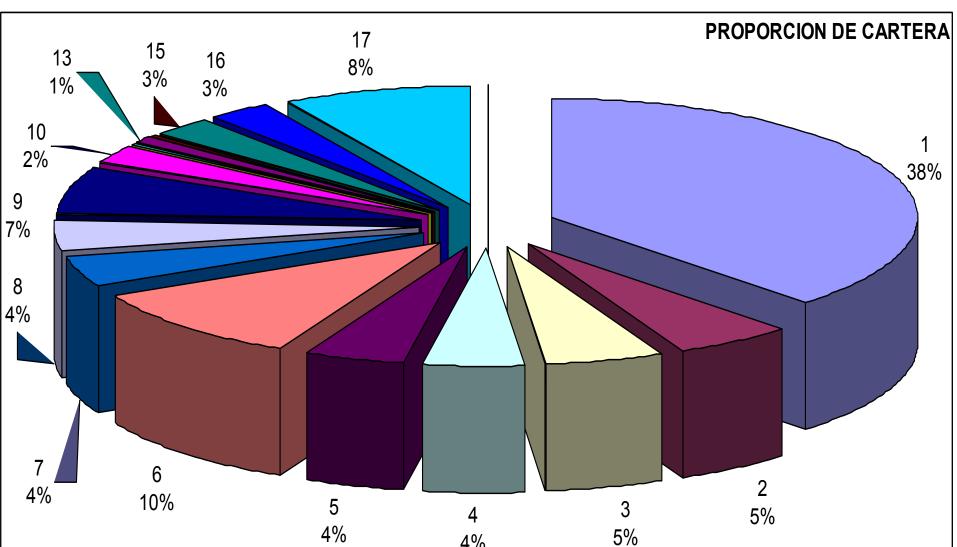
	Prima Periódica	Prima Única
DM	4,44	5,32
DEM	5,47	5,47
DM/DEM	0,81	0,97
CXM	42,45	42,45
CXEM	42,45	42,45
Ratio	1,1867016	1,1085253







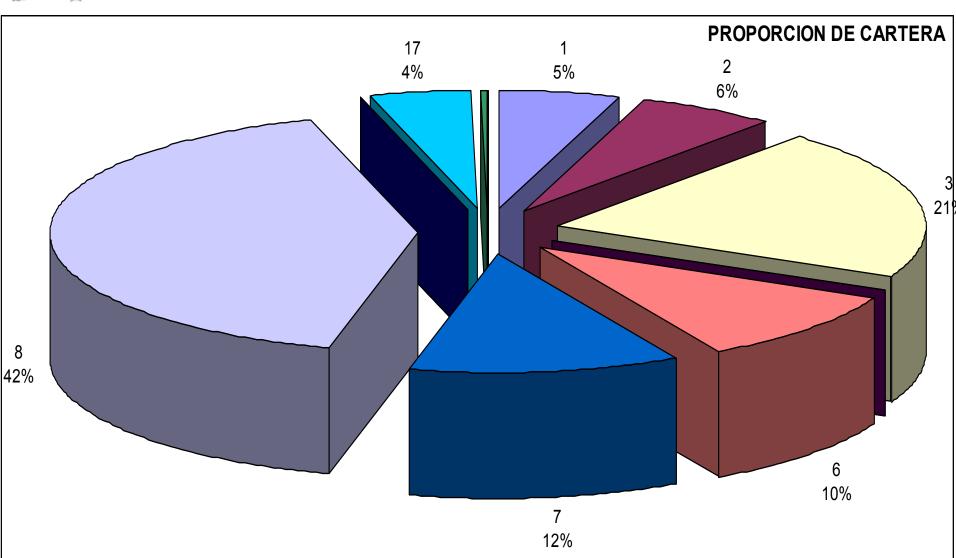
Activos asignados en la cartera inmunizada del seguro de prima periódica.







Activos asignados en la cartera inmunizada del seguro de prima Única.



Provisión Matemática bajo inversiones afectas.

	Prima Periódica	Prima Pura
TIR BRUTA	3,360258%	3,410834%
TIR NETA	3,192246%	3,240292%
$L(ir)_t$	25.102,31	25.033,68
$I(ir)_t$	23.288,15	0
$PM(ir)_t$	1.814,17	25.033,68

	Prima Periódica	Prima Única
PM (2,60%)	2.045,44	25.971,23







"As a profession we are apt to be accurate, cautious, consistent, and reticent, and in these lies our strength; but if they do not leave enough room for impulse and imagination, they can be a weakness.

The actuary who is only an actuary is not an actuary."

--> Frank Mitchell Redington



Muchas gracias por su atención



Euskal Herriko Universidad del País Vasco Unibertsitatea

J. Iñaki De La Peña jinaki.delapena@ehu.es

