Escuela de investigación: "Una introducción al Álgebra No Conmutativa"

(Escuela pre-CIMPA2015 Coclé)

Introducción a la teoría de módulos

Mercedes Siles Molina

Del 21 al 25 de julio de 2014.
Penonomé, Coclé

Índice

Motivación

El curso que se presenta tiene como objetivo principal la iniciación de aquellas personas que lo sigan en la Teoría de Módulos y de Anillos. Continuación de este curso, así como de los que se han impartido en la “Escuela pre-CIMPA 2015 Coclé”, será la escuela de investigación CIMPA “Non-commutative Algebra” que tendrá lugar en Coclé, del 19 al 28 de octubre de 2015 [1].

En dicha escuela se dictarán varios cursos sobre álgebras de caminos de Leavitt, por lo que resulta indispensable que la persona futura participante conozca los resultados básicos de la teoría de módulos y anillos para una buena comprensión de las álgebras de caminos de Leavitt.

Además, considero que es esencial en la formación matemática el conocimiento de estos temas. Tomaré prestadas las siguientes palabras de Lam en su libro [96]:

“La Teoría de Anillos es un tema de importancia central para el Álgebra. Históricamente, algunos de los descubrimientos más relevantes en Teoría de Anillos han ayudado a cambiar el curso del desarrollo del Álgebra abstracta moderna. Hoy en día, es un campo donde se encuentran expertos en Teoría de Grupos (anillos de grupo), Teoría de Representación (módulos), Análisis Funcional (álgebras de operadores), Teoría de Lie (álgebras envolventes, álgebras de derivaciones), Geometría Algebraica (álgebras finitamente generadas, operadores diferenciales, teoría de invariantes), Aritmética (órdenes, grupos de Brauer), Álgebra Universal (variedades de anillos) y Álgebra Homológica (cohomología de anillos, módulos proyectivos, grupo de Grothendiech y K-grupos de orden superior). A la vista de estas conexiones básicas entre la Teoría de Anillos y otras ramas de las Matemáticas, quizás no sea exagerado decir que un curso en Teoría de Anillos es una parte indispensable de la educación de cualquier algebrista en ciernes.”

[1] Puede encontrarse más información en: http://cimpa-icpam.org/spip.php?article667.

Quiero expresar mi agradecimiento a María Guadalupe Corrales García y a José Félix Solanilla Hernández, doctores, profesores de la Universidad de Panamá en su Centro Regional Universitario de Coclé, por la organización de esta escuela internacional. Asimismo, quede por escrito mi reconocimiento para Fulgencio Álvarez, Director de dicho centro, por su amplia visión acerca del significado de la cultura y por su valoración y apoyo de las Matemáticas como factor importante en el conocimiento y el desarrollo.

Panamá, julio de 2014.

Introducción

El concepto de módulo surge por primera vez en un trabajo de Dedekind en el año 1871, pero no tal y como lo estudiamos hoy. Para él los módulos se correspondían con lo que en terminología actual llamaríamos $\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{C}$. El primero que da ejemplos de módulos sobre anillos distintos de $\mathbb{Z}$ es Kronecker. Fue alrededor de 1920 que algebristas como Noether y Artin tratan de eliminar hipótesis no imprescindibles.

Dice I. Kleiner en su libro sobre historia del Álgebra Abstracta [90] que Noether fue la primera persona en usar la noción de módulo de manera abstracta, con un anillo como dominio de operadores, y de reconocer su potencial.

En sus inicios, los módulos fueron utilizados en el estudio de la teoría de representación. Hacia 1950, con la llegada de los métodos homológicos, la Teoría de Módulos fue adquiriendo más entidad, aunque parece que ésta no gozaba de mucha consideración. Para ilustrar esta afirmación sirva el ejercicio que Serge Lang incluía en la página 105 de su libro "Algebra", en la edición de 1965 [99]:

"Take any book on homological algebra and prove all the theorems without looking at the proofs given in that book".

Fue determinante el trabajo de Serre de caracterización de los anillos locales regulares usando álgebra homológica para que el sentimiento hacia esta disciplina cambiara (en la edición de 2002 del libro de Lang [100], el "sencillo" ejercicio de álgebra homológica ya no aparece).

La teoría de módulos engloba la de grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos), cuyo estudio había sido iniciado con anterioridad, y la de espacios vectoriales (módulos sobre el correspondiente cuerpo o anillo de división). En ocasiones resulta muy útil pensar en éstos últimos para comprender ciertas nociones de la teoría, aunque se ha de tener cuidado porque no todos los resultados válidos para espacios vectoriales se generalizan a módulos sobre anillos arbitrarios: por ejemplo, existen módulos que tienen bases de cardinal diferente.

En este curso introduciremos los resultados básicos de la Teoría de Módulos y estableceremos algunos de los resultados centrales de la misma como son el Teorema del refinamiento de Schreier, el Teorema de Jordan-Hölder o el Teorema de Krull-Schmidt.

Construiremos la teoría sobre anillos con unidad. En el último tema se han incluido algunas ideas para realizar posibles trabajos en los que se traten anillos sin unidad.

Sobre la bibliografía, decir que hemos incluido: básica, avanzada y más amplia. La primera incluye referencias en relación sobre el curso explicado; también sobre una teoría de módulos ampliada. Las demás bibliografías incluyen temas de teoría de anillos y módulos, así como referencias a trabajos sobre álgebras de caminos de Leavitt y otros relacionados.

Capítulo 1

Los básicos

1.1 Módulos. Submódulos. Módulo cociente.

En este primer tema se definen los conceptos de módulo por la izquierda (por la derecha) sobre un anillo que, salvo que se especifique lo contrario, se supondrá unitario, de submódulo y de módulo cociente, destacando en cada caso las propiedades universales que los caracterizan. Damos múltiples ejemplos y vemos algunas propiedades básicas.

Los módulos pueden verse como herramientas para estudiar anillos. Definimos los que se entiende por representación e introducimos ejemplos, como el anillo de grupo sobre un anillo conmutativo, los homomorfismos entre espacios vectoriales, etc.

Definición 1.1
Sea R un anillo y sea $(M, +)$ un grupo abeliano. Decimos que M es un *R-módulo por la izquierda* si existe una aplicación

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \to & M \\ (r, x) & \mapsto & rx \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

(i) $(r + s)x = rx + sx$.

(ii) $r(x + y) = rx + ry$

(iii) $(rs)x = r(sx)$

(iv) $1_R x = x$

cualesquiera que sean $r, s, \in R$, $x, y \in M$, donde 1_R denota la unidad del anillo R (cuando no haya lugar a dudas con respecto al anillo que se esté considerando, simplemente se escribirá 1 para denotarla).

La noción de módulo generaliza las de espacio vectorial y de grupo abeliano, como veremos en los ejemplos que siguen.

Ejemplos 1.2

(i) Sea K un cuerpo y sea V un espacio vectorial sobre K. Entonces V tiene estructura de K-módulo por la izquierda con la operación dada por:

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \to & V \\ (r, x) & \mapsto & rx \end{array}$$

donde rx es la operación en V como espacio vectorial sobre K.

(ii) Sea G un grupo abeliano. Podemos dotar a G de estructura de $\mathbb{Z}$-módulo por la izquierda con la operación dada por:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times G & \to & G \\ (m, g) & \mapsto & mg \end{array}$$

donde

$$mg = \begin{cases} \overbrace{g + \cdots + g}^{m} & \text{si} \quad m > 0 \\ 0 & \text{si} \quad m = 0 \\ \overbrace{(-g) + \cdots + (-g)}^{-m} & \text{si} \quad m < 0 \end{cases}$$

(iii) Si R es un anillo, R tiene estructura de módulo por la izquierda con la operación $r.x = rx$, cualesquiera que sean $r, x \in R$, donde la yuxtaposición denota el producto en el anillo R.

(iv) Sea K un cuerpo, y sea $\mathcal{M}_2(K)$ el álgebra de las matrices de tamaño 2×2 sobre K. Podemos considerar $\mathcal{M}_2(K)$ como módulo sobre K, o como módulo sobre $\mathcal{M}_2(K)$, con las operaciones naturales.

(v) Sea K un cuerpo y sea $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ el álgebra de las matrices de tamaño $m \times n$ sobre K. Se puede dotar a $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ de estructura de $\mathcal{M}_m(K)$ -módulo por la izquierda sobre K con el producto usual de matrices.

De manera análoga a como se ha definido R-módulo por la izquierda, puede definirse lo que se entiende por R-módulo por la derecha. En este curso consideraremos R-módulos por la izquierda. Sin embargo, toda la teoría que se tenga para R-módulos por la izquierda será análoga a la de R-módulos por la derecha, por la razón que explicaremos más tarde.

Supongamos que M es un R-módulo por la izquierda. Parece razonable pensar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} M \times R & \to & M \\ (x, r) & \mapsto & x.r := rx \end{array}$$

donde rx denota el producto en M como R-módulo por la izquierda, dota a M de estructura de R-módulo por la derecha. Si así fuera, $x.(rs)$ habría de coincidir con $((x.r).s)$. Sin embargo, $x.(rs) = (rs)x$ mientras que $((x.r).s) = s(rx) = (sr)x$, cualesquiera que sean los elementos $r, s \in R$, $x \in M$.

No es cierto en general que $(rs)x = (sr)x$, salvo que el anillo R sea conmutativo. Sin embargo, a la vista de los cálculos realizados, tenemos pistas sobre cómo lograr dotar a M de estructura de módulo por la derecha, aunque no sobre R sino sobre el anillo opuesto, R^{op}.

Definición 1.3
Sea R un anillo. Denotamos por R^{op} al anillo que se obtiene a partir de R considerando su misma estructura de grupo abeliano con la suma, y con producto $x.y = yx$, cualesquiera que sean $x, y \in R$. Este nuevo anillo se llama *anillo opuesto.*

No resulta difícil probar (hacerlo como ejercicio) el siguiente resultado.

Lema 1.4
Si M es un R-módulo por la izquierda, la siguiente aplicación dota a M de estructura de R^{op}-módulo por la derecha:

$$\begin{array}{ccc} M \times R^{op} & \to & M \\ (x, r) & \mapsto & x.r := rx \end{array}$$

Gracias a este resultado, la teoría de R-módulos por la izquierda es equivalente a la teoría de R-módulos por la derecha, como decíamos.

La teoría de módulos es equivalente a la teoría de representaciones de anillos. En otros términos: sea $(M, +)$ un grupo abeliano, y sea R un anillo unitario. ¿Cuántas estructuras de R-módulo por la izquierda se pueden dar a M? La respuesta es que tantas como homomorfismos de anillos unitarios existan entre R y $\mathrm{End}(M)$, donde $\mathrm{End}(M)$ denota el anillo de los endomorfismos del grupo M. Expliquemos con más detenimiento esta idea.

Definición 1.5
Sea M un grupo abeliano y sea R un anillo unitario. Una *representación de R por M* es un homomorfismo φ de anillos unitarios, $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$.

Proposición 1.6
Sea M un grupo abeliano y sea R un anillo unitario.

(i) *Si M tiene estructura de R-módulo por la izquierda, entonces la aplicación*
$$\begin{array}{ccc} R & \to & \mathrm{End}(M) \\ r & \mapsto & \lambda_r \end{array}$$
donde $\lambda_r(x) = rx$, cualquiera que sea el elemento $x \in M$, es una representación de R por M.

(ii) *Supongamos que existe una representación φ de R por M. Entonces la siguiente aplicación dota a M de estructura de R-módulo por la izquierda:*
$$\begin{array}{ccc} R \times M & \to & M \\ (r, x) & \mapsto & rx := (\varphi(r))\,(x) \end{array}$$

Pasemos a estudiar las nociones de submódulo y de módulo cociente, así como las de suma e intersección de submódulos.

Definición 1.7
Un *submódulo* de un R-módulo por la izquierda es un subgrupo N de $(M, +)$ tal que ${}_RN$ es un R-módulo por la izquierda. En otras palabras, N es un submódulo de M si N es un subgrupo abeliano de $(M, +)$ y $RN \subseteq N$. Siempre que N sea un submódulo de M escribiremos $N \leq M$.

Ejemplos 1.8

(i) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Los submódulos de V son, precisamente, los subespacios vectoriales de V.

(ii) Sea G un grupo abeliano. Los submódulos de ${}_{\mathbb{Z}}G$ son, precisamente, los subgrupos de G.

(iii) Sea K un cuerpo, y consideremos $\mathcal{M}_2(K)$, el álgebra de las matrices de tamaño 2×2 sobre K. Se tiene que
$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad x \in K \right\}$$

es un K-módulo por la izquierda pero no es un $\mathcal{M}_2(K)$-módulo por la izquierda de $\mathcal{M}_2(K)$.

Sin embargo,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad x, y \in K \right\}$$

es un $\mathcal{M}_2(K)$-módulo por la izquierda de $\mathcal{M}_2(K)$ y también un K-módulo por la izquierda.

Los submódulos permiten construir módulos cociente.

Lema 1.9
Sea N un submódulo de un R-módulo por la izquierda M. El grupo cociente M/N puede dotarse de estructura de R-módulo por la izquierda como sigue:

$$r\overline{x} := \overline{rx}$$

cualesquiera que sean $r \in R$, $x \in M$.

Demostración.
Hacer como ejercicio.

Lema 1.10
Sea N un submódulo de un R-módulo por la izquierda M. Los submódulos de M/N son de la forma T/N, donde $N \subseteq T \leq M$.

Demostración.
Hacer como ejercicio. Téngase en cuenta que se ha de demostrar que todo submódulo de M/N es de la forma T/N, con $N \subseteq T \leq M$, y también el recíproco: que para cada submódulo T de M que contenga a N, se tiene que T/N es un submódulo de M/N.

1.2 Intersección y suma de submódulos. Suma directa

Comenzaremos con la definición de suma de submódulos y nos fijaremos en un tipo particular de suma: la directa. También estudiaremos la intersección de submódulos y otras nociones relacionadas.

Definición 1.11
Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia arbitraria de submódulos de un R-módulo por la izquierda M. Se define la suma de dichos submódulos, y se denota por

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha,$$

como el conjunto de las sumas finitas de elementos de M de la forma $x_1 + \cdots + x_n$, con $x_i \in N_{\alpha_i}$ para cierto $\alpha_i \in \Lambda$.

Lema 1.12
Usemos la notación de la Definición 1.11. Se tiene que $\sum_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ es el menor submódulo de M que contiene a todos los submódulos N_α.

Mientras que la unión de submódulos no es, necesariamente, un submódulo (dar un ejemplo de ello), se tiene lo siguiente:

Lema 1.13
Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia arbitraria de submódulos de un R-módulo por la izquierda M. Se tiene que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ es el mayor submódulo de M que está contenido en todos y cada uno de los submódulos N_α.

Definición 1.14
Sea X un subconjunto de un R-módulo por la izquierda M. Se define el *submódulo generado por* X como el menor submódulo de M que contiene a X. Se denota por $\langle X\rangle$.

Lema 1.15
Sea X un subconjunto de un R-módulo por la izquierda M.

(i) *El submódulo generado por X coincide con la intersección de todos los submódulos de M que contienen a X.*

(ii) *Si $X \neq \emptyset$ se tiene que $\langle X\rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$. Si $X = \emptyset$ se tiene que $\langle X\rangle = 0$.*

Definición 1.16
Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia arbitraria de submódulos de un R-módulo por la izquierda M. Se dice que $\sum_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ es una *suma directa* si:

$$N_\alpha \bigcap \sum_{\substack{\beta\in\Lambda\\ \beta\neq\lambda}} N_\beta = 0.$$

En tal caso, se escribe $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$.

Dado un R-módulo por la izquierda M, denotaremos por $\mathcal{L}(M)$ al retículo de los submódulos de M. Recordemos que un retículo es un conjunto parcialmente ordenado tal que, dados dos elementos, existe su máximo y su mínimo; en particular, el orden en $\mathcal{L}(M)$ viene dado por $\subseteq$ y el supremo y el ínfimo de dos submódulos N_1, N_2, vienen dados, respectivamente, por:

$$N_1 \vee N_2 = N_1 + N_2 \quad \text{y} \quad N_1 \wedge N_2 = N_1 \cap N_2.$$

1.3 Homomorfismos de módulos. Teoremas de isomorfía.

Los homomorfismos de R-módulos son aplicaciones entre R-módulos que preservan la estructura. En esta sección establecemos los Teoremas de isomorfía para módulos.

Definición 1.17
Sean M y M' dos R-módulos por la izquierda. Un *homomorfismo de R-módulos* es una aplicación $f : M \to M'$ tal que:

(i) f(x+y) = f(x) + f(y),

(ii) f(rx) = rf(x),

cualesquiera que sean $x, y \in M$, $r \in R$.

Lema 1.18
Sea $f : M \to M'$ un homomorfismo de R-módulos por la izquierda. Se tiene que $\mathrm{Ker} f$ *e* $\mathrm{Im} f$ *son submódulos de M y M', respectivamente.*

Demostración.
Se deja como ejercicio.

Teorema 1.19 (Primer Teorema de Isomorfía para módulos.)
Sea $f : M \to M'$ un homomorfismo de R-módulos por la izquierda. Se tiene que

$$M/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f.$$

Demostración.
Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M/\mathrm{Ker} f & \to & \mathrm{Im} f \\ & \overline{x} & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Es fácil ver que está bien definida y que es un isomorfismo de módulos (completar la demostración).

Teorema 1.20 (Segundo Teorema de Isomorfía para módulos.)
Sea M un R-módulo por la izquierda y sean N_1, N_2 submódulos de M. Se tiene que

$$(N_1 + N_2)/N_1 \cong N_2/(N_1 \cap N_2).$$

Demostración.
Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & N_1 + N_2 & \to & N_2/(N_1 \cap N_2) \\ & \overline{n_1 + n_2} & \mapsto & n_2 \end{array}$$

Se comprueba que está bien definida y que es un epimorfismo de módulos cuyo núcleo es N_1(completar los detalles). Por el Primer Teorema de Isomorfía se tiene un isomorfismo como se indica en el enunciado.

Teorema 1.21 (Tercer Teorema de Isomorfía para módulos.)
Sean N y T submódulos de un R-módulos por la izquierda M tales que $N \subseteq T$. Se tiene que

$$(M/N)/(T/N) \cong M/T.$$

Demostración.
Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M/N & \to & M/T \\ & \overline{x}^N & \mapsto & \overline{x}^T \end{array}$$

Compruébese que está bien definida y que es un epimorfismo de módulos cuyo núcleo es T/N(completar los detalles). Para terminar la demostración, aplíquese el Primer Teorema de Isomorfía.

Capítulo 2

Módulos artinianos y noetherianos. Teorema del refinamiento de Schreier. Teorema de Jordan-Hölder

Un R-módulo por la izquierda se dice *artiniano* (*noetheriano*) si verifica la condición de cadena descendente (ascendente) para sus submódulos. Equivalentemente, si verifica la condición minimal (maximal): toda cadena decreciente (respectivamente creciente) de submódulos es estacionaria.

El carácter artiniano (noetheriano) lo heredan los submódulos y los módulos cociente. Recíprocamente, si un R-módulo por la izquierda M contiene un submódulo artiniano (noetheriano) N tal que M/N es artiniano (noetheriano), entonces M tiene la misma propiedad. También el producto directo finito de R-módulos por la izquierda es artiniano (noetheriano) si y sólo si lo es cada factor. En el caso de coproductos infinitos no se obtiene este resultado ni siquiera cuando los R-módulos por la izquierda son espacios vectoriales.

Un anillo R se dice *artiniano por la izquierda* si como R-módulo por la izquierda es artiniano. Los conceptos de artiniano por la derecha, noetheriano por la izquierda y noetheriano por la derecha se definen de manera análoga.

Lo primero que destacamos es que estas cuatro nociones no son equivalentes, y veremos ejemplos de ello (Ejemplos 2.13). En cuanto a las nociones de anillo artiniano / noetheriano por la izquierda / por la derecha, un anillo unitario artiniano por la izquierda / por la derecha es noetheriano por la izquierda / por la derecha. Sin embargo, el ser artiniano por la izquierda / por la derecha no se traslada a módulos arbitrarios, como mostramos con el

Ejemplo 2.14.

Los módulos que son tanto artinianos como noetherianos gozan de muy buenas propiedades. En concreto, admiten series de composición. Introduciremos la noción de serie de composición y probaremos que un módulo es artiniano y noetheriano si y sólo si tiene una serie de composición. Además, la longitud de dicha serie es única y los cocientes producidos en la serie son únicos salvo permutaciones (después explicaremos con detalle qué queremos decir). Este resultado será consecuencia del Teorema de Jordan-Hölder, que afirma que dos series de composición finitas de un mismo R-módulo por la izquierda tienen la misma longitud; es más, van a ser isomorfas.

2.1 Módulos artinianos y noetherianos

Definiciones 2.1
Un R-módulo por la izquierda se dice *artiniano* si toda cadena de submódulos

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

es estacionaria, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_m = M_n$ para todo $m \geq n$.

Un R-módulo por la izquierda se dice *noetheriano* si toda cadena de submódulos

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$$

es estacionaria, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_m = M_n$ para todo $m \geq n$.

Un anillo R se dice *artiniano*/*noetheriano* por la izquierda/por la derecha si R como R-módulo por la izquierda/por la derecha es artiniano/noetheriano.

Aunque en las definiciones anteriores hayamos tomado cadenas numerales de submódulos, en realidad no es necesario, aunque a la hora de hacer demostraciones es más cómodo que trabajar con cadenas arbitrarias. Expliquemos algo mejor lo que acabamos de afirmar.

Definición 2.2
Una *cadena* de submódulos de un módulo M es un conjunto $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ totalmente ordenado, esto es, tal que dados M_α, M_β en dicho conjunto, $M_\alpha \subseteq M_\beta$ o $M_\beta \subseteq M_\alpha$.

Definición 2.3
Sea M un R-módulo por la izquierda. Se dice que M satisface la *condición maximal* si toda cadena de submódulos de M tiene máximo. Se dice que M satisface la *condición minimal* si toda cadena de submódulos de M tiene mínimo.

Lema 2.4
Para un R-módulo por la izquierda M son equivalentes las siguientes condiciones:

(i) *M es artiniano (respectivamente, noetheriano).*

(ii) *M satisface la condición mimimal (respectivamente, maximal).*

(iii) *M satisface la condición de cadena descendente (respectivamente, ascendente) para sus submódulos.*

Demostración.
Se deja como ejercicio.

Ejemplos 2.5

(i) El módulo ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es noetheriano. Pruébese; para ello, téngase en cuenta que todos los ideales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$, y que $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales, es decir, que todo ideal está generado por un elemento. Aplíquese esto al ideal generado por la unión de una familia de ideales. Sin embargo, $\mathbb{Z}$ no es artiniano ya que, por ejemplo, la cadena

$$2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$$

no es estacionaria.

(ii) Todo dominio de ideales principales va a ser noetheriano. En particular, si K es un cuerpo, $K[x]$ es un dominio de ideales principales, por lo que va a ser noetheriano. (Probarlo como ejercicio.) Tampoco $K[x]$ va a ser artiniano ya que la siguiente cadena de ideales:

$$(x) \supsetneq (x^2) \supsetneq \cdots$$

no es estacionaria.

(iii) Todo módulo finito es tanto artiniano como noetheriano.

(iv) Los espacios vectoriales que son artinianos son los de dimensión finita, que también son noetherianos. Todo espacio vectorial de dimensión infinita no es ni artiniano ni noetheriano. Por ejemplo, si V tiene una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots\}$ entonces las cadenas siguientes:

$$0 \subsetneq < \{v_1\} > \subsetneq < \{v_1, v_2\} > \subsetneq \cdots$$

$$V \supsetneq < \mathcal{B} \setminus \{v_1\} > \supsetneq < \mathcal{B} \setminus \{v_1, v_2\} > \supsetneq \cdots$$

no se estacionan, lo que demuestra la afirmación que hemos hecho.

(v) Sea p un número primo, y definamos ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p$ como sigue:

$$ {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p := \left\{ \frac{m}{p^r} \mid m \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} $$

Se tiene que ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p$ es artiniano pero no noetheriano. Pruébese como ejercicio. (Antes, realícese el ejercicio que se propone en el Ejemplo 2.14).

Lema 2.6
Sea M un R-módulo por la izquierda.

(i) *Si M es artiniano/noetheriano, entonces todo submódulo de M también lo es.*

(ii) *Si M es artiniano/noetheriano y N es un submódulo de M, entonces M/N también lo es.*

(iii) *Si M es artiniano/noetheriano, y $f : M \to M'$ es un homomorfismo de R-módulos, entonces* $\mathrm{Im} f$ *también lo es.*

Demostración.
(i). Sea N un submódulo de M, y supongamos que $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$ es una cadena de submódulos de N. Como también es una cadena de submódulos de M, si M es artiniano, la cadena se estaciona, lo que prueba que N es también artiniano. Para noetheriano la demostración es análoga.

(ii) Sea $M_1/N \supseteq M_2/N \supseteq \cdots$ una cadena de submódulos de M/N. Se tiene que $N \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ es una cadena de submódulos de M, que se estaciona si M es artiniano. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_m$ para todo $m \geq n$. Entonces $M_n/N = M_m/N$ para todo $m \geq n$, lo que demuestra el carácter artiniano de M/N. El caso noetheriano es análogo.

(iii) Si M es artiniano/noetheriano, por el apartado (i), todo submódulo también lo es. En particular, $\mathrm{Ker} f$ lo es. Por (ii) se tiene que $M/\mathrm{Ker} f$ es artiniano/noetheriano. Por el Primer Teorema de isomorfía, $\mathrm{Im} f \cong M/\mathrm{Ker} f$, luego $\mathrm{Im} f$ es artiniano/noetheriano. $\square$

El siguiente objetivo es probar una especie de recíproco de (i) y (ii) del Lema 2.6. Para ello necesitamos antes un resultado adicional.

Lema 2.7 *Sea M un R-módulo por la izquierda, y sean N, A_1, A_2 submódulos de M tales que $A_1 \subseteq A_2$. Si $N + A_1 = N + A_2$ y $N \cap A_1 = N \cap A_2$, entonces $A_1 = A_2$.*

Demostración.
Sea $a_2 \in A_2$. Como $A_2 \subseteq N + A_2 = N + A_1$, se tiene que existen $n \in N$, $a_1 \in A_1$ tales que $a_2 = n + a_1$. Entonces $a_2 - a_1 = n \in N \cap A_2 = N \cap A_1$, así que $a_2 - a_1 \in A_1$. Como $a_1 \in A_1$, tenemos que $a_2 \in A_1$. $\square$

Proposición 2.8
Sea M un R-módulo por la izquierda, y sea N un submódulo de M. Si N y M/N son artinianos/noetherianos, entonces también lo es M.

Demostración.
Demostraremos el resultado en el caso noetheriano. Para el artiniano se trabaja de manera análoga.

Sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ una cadena de submódulos de M. A partir de aquí, consideremos las dos cadenas siguientes:

$$(M_1 + N)/N \subseteq (M_2 + N)/N \subseteq \cdots$$

$$M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq \cdots$$

Por la hipótesis, ambas cadenas son estacionarias. Supongamos que $n \in N$ es tal que las dos cadenas anteriores se estacionan a partir del lugar n, esto es, $(M_n + N)/N = (M_m + N)/N$ y $M_n \cap N = M_m \cap N$ y para todo $m \geq n$. De lo anterior se deduce que $M_n + N = M_m + N$, y por el Lema 2.7 se tiene que $M_n = M_m$, lo que concluye la demostración. $\square$

Corolario 2.9
La suma de un número finito de submódulos artinianos/noetherianos de un módulo es artiniano/noetheriano.

Demostración.
Basta demostrar el resultado para la suma de dos submódulos. Consideremos el caso artiniano. El noetheriano se demuestra de manera análoga.

Sea M un módulo, y sean M_1, M_2 dos submódulos artesianos. Por el Segundo Teorema de isomorfía, $M_1 + M_2/M_1 \cong M_2/M_1 \cap M_2$. Por el Lema 2.6 se tiene que $M_1 \cap M_2$ es artiniano; como M_2 también lo es, $M_2/M_1 \cap M_2$ es artiniano. Como el ser artiniano se conserva por isomorfismos tenemos que $M_1 + M_2/M_1$ es artiniano. Como M_1 también lo es, por la Proposición 2.8 resulta que $M_1 + M_2$ es artiniano. $\square$

Observación 2.10
La suma de un número arbitrario de módulos artiniano / noetherianos no es, necesariamente, artiniano / noetheriano. Dése un ejemplo.

Corolario 2.11
Todo módulo finitamente generado sobre un anillo de división es artiniano y noetheriano.

Demostración.
Hágase como ejercicio.

2.2 Anillos artinianos y noetherianos

Definición 2.12
Un anillo R se dice *artiniano/noetheriano* por la izquierda (respectivamente, por la derecha) si R como R-módulo por la izquierda (respectivamente, por la derecha) es artiniano/noetheriano.

Los conceptos de anillo artiniano/noetheriano por la izquierda/derecha no son equivalentes, como muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplos 2.13

(i) El anillo
$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$
es noetheriano por la izquierda, aunque no es noetheriano por la derecha. Tampoco es artiniano ni por la izquierda ni por la derecha.

(ii) El anillo
$$\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$
es artiniano y noetheriano por la izquierda pero no es ni artiniano ni noetheriano por la derecha. Demuéstrense las afirmaciones anteriores.

En el caso de anillos unitarios, artiniano por la izquierda (derecha) implica noetheriano por la izquierda (derecha). Demuéstrense. No ocurre lo mismo para R-módulos arbitrarios.

Ejemplo 2.14
El $\mathbb{Z}$-módulo $P/\mathbb{Z}$, donde $P = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p$, es artiniano pero no es noetheriano. Pruébese como ejercicio.

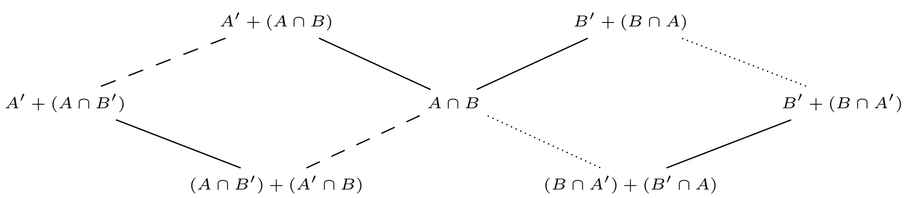
2.3 Teorema del Refinamiento de Schreier. Teorema del Jordan-Hölder

El siguiente objetivo será demostrar el Teorema del Refinamiento de Schreier, que nos servirá para probar el Teorema del Jordan-Hölder. Antes necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 2.15 (Lema de Zassenhaus o Lema de la mariposa.)
Sea M un R-módulo por la izquierda, y sean A, A', B, B' submódulos de M tales que $A' \leq A$ y $B' \leq B$. Entonces:

$$\frac{A' + (A \cap B)}{A' + (A \cap B')} \cong \frac{B' + (B \cap A)}{B' + (B \cap A')}$$

<u>Demostración</u>
Consideremos el siguiente diagrama en retículo. Después de contemplarse se comprende el nombre de "Lema de la mariposa".



Pruébese que, efectivamente, se trata de un retículo en el que la intersección de dos submódulos consecutivos de la fila central es el inmediatamente inferior que conecta con ambos, y que la sumas de dos submódulos consecutivos de la fila central es el módulo que está en la primera fila y que conecta con ambos. Es decir, que:

$$(A' + (A \cap B')) \cap (A \cap B) = (A \cap B') + (A' \cap B).$$

$$(A' + (A \cap B')) + (A \cap B) = A' + (A \cap B).$$

$$(B' + (B \cap A')) \cap (B \cap A) = (B \cap A') + (B' \cap A).$$

$$(B' + (B \cap A')) + (B \cap A) = B' + (B \cap A).$$

Por el Segundo Teorema de Isomorfía los lados punteados paralelos producen isomorfismos, y lo mismo ocurre con los lados rayados, esto es,

$$(A' + (A \cap B)) \,/\, (A' + (A \cap B')) \cong (A \cap B)/((A \cap B') + (A' \cap B)), \text{ y}$$

$$(B' + (B \cap A)) \,/\, (B' + (B \cap A')) \cong (B \cap A)/((B \cap A') + (B' \cap A))$$

Dado que los lados de la derecha en los isomorfismos anteriores son lo mismo, tenemos que

$$(A' + (A \cap B)) \,/\, (A' + (A \cap B')) \cong (B' + (B \cap A)) \,/\, (B' + (B \cap A')) \,,$$

que era lo que se quería demostrar. □

Definiciones 2.16
Sea M un R-módulo por la izquierda, y sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_m$ una cadena de submódulos de M. Un *refinamiento* de esta cadena es una cadena $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_n$ tal que $N_1 = M_1$, $N_n = M_m$ y $\{M_i\}_{i=1}^m \subseteq \{N_j\}_{j=1}^n$.

Dada una cadena $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_m$, decimos que m es la *longitud* de dicha cadena.

Dos cadenas de la misma longitud $\{M_i\}_{i=1}^m$ y $\{N_i\}_{i=1}^m$ se dicen *isomorfas* si existe una permutación $\sigma \in S_m$ tal que $M_r/M_{r-1} \cong N_{\sigma(r)}/N_\sigma(r-1)$ para todo $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 2.17
Un refinamiento de la cadena

$$0 \subseteq 32\mathbb{Z} \subseteq 8\mathbb{Z}$$

es la cadena

$$0 \subseteq 32\mathbb{Z} \subseteq 16\mathbb{Z} \subseteq 8\mathbb{Z}$$

Lema 2.18 (Teorema del refinamiento de Schreier.)
Sea M un R-módulo por la izquierda. Dos cadenas

$$A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_m \quad \text{y} \quad B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n$$

tales que $A_1 = B_1$ y $A_m = B_n$ admiten refinamientos de la misma longitud isomorfos.

Demostración
La idea es insertar entre A_i y A_{i+1} una serie de módulos construidos a partir de la cadena segunda. Sean:

$$A_{ij} = A_i + (A_{i+1} \cap B_j); \qquad B_{rs} = B_r + (B_{r+1} \cap A_s).$$

Si consideramos las cadenas $\{A_{ij}\}$ y $\{B_{rs}\}$, ambas tienen la misma longitud, y son refinamientos de las cadenas iniciales. Veamos que los refinamientos que acabamos de construir son isomorfos.

$$\frac{A_{ij+1}}{A_{ij}} = \frac{A_i + (A_{i+1} \cap B_{j+1})}{A_i + (A_{i+1} \cap B_j)} =^{(1)} \frac{B_i + (B_{i+1} \cap A_{j+1})}{B_i + (B_{i+1} \cap A_j)} = \frac{B_{ij+1}}{B_{ij}}.$$

(1) Por el Lema de la mariposa. $\square$

Definición 2.19
Una *serie de composición* de un R-módulo por la izquierda es una cadena estrictamente creciente de submódulos que no puede ser refinada propiamente.

Ejemplos 2.20

(i) Sea V un espacio vectorial con base $\{v_1, v_2\}$. Entonces

$$0 \subsetneq < \{v_1\} > \subsetneq V$$

es una serie de composición.

(ii) Sea $R = \mathcal{M}_2(K)$, donde K es un cuerpo, y sea $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$0 \subsetneq Re \subsetneq R$$

es una serie de composición.

Como consecuencia del Teorema del refinamiento de Schrerier obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.21 (Teorema de Jordan-Hölder.)
Dos series de composición de longitud finita de un mismo R-módulo por la izquierda son isomorfas y tienen la misma longitud.

Demostración
Sean
$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n \quad \text{y} \quad N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \ldots \subsetneq N_m$$
dos series de composición de un módulo M. Por el Teorema del refinamiento de Schreier, ambas cadenas admiten refinamientos de la misma longitud isomorfos. Como son series de composición, no admiten refinamientos, por lo que la longitud es la misma. $\square$

A la vista del resultado probado, la siguiente definición adquiere sentido.

Definición 2.22
Sea M un R-módulo por la izquierda que admite una serie de composición. Llamamos *longitud* de M, y lo denotamos por $l(M)$ a la longitud de cualquiera de las series de composición que se pueden construir con submódulos de M.

Concluimos este tema probando el siguiente resultado.

Teorema 2.23
Un R-módulo por la izquierda no nulo M es artiniano y noetheriano si y sólo si admite una serie de composición de longitud finita.

Demostración
Supongamos primero que M es artiniano y noetheriano. Definamos $A_1 = \{0\}$. Consideremos
$$\mathcal{C} = \{N \subseteq M \quad | \quad A_1 \subsetneq N\}.$$
Como M es artiniano, satisface la condición minimal en $\mathcal{C}$. Esto significa que existe mínimo en $\mathcal{C}$. Llamémosle A_2. Si $A_2 = M$ hemos terminado. De lo contrario, proseguimos como indicamos. Consideremos
$$\mathcal{C}' = \{N \subseteq M \quad | \quad A_2 \subsetneq N\}.$$
Nuevamente por el carácter artiniano de M, existe un mínimo en $\mathcal{C}'$, llamémosle A_3. Si $A_3 = M$, hemos terminado. De lo contrario proseguimos. Observemos que este proceso hemos de terminarlo en un número finito de pasos ya que M es noetheriano.

Por construcción, la cadena construida es una serie de composición.

Para el recíproco, supongamos que M admite una serie de composición de longitud n. Sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ una cadena de submódulos de M. Si la cadena no se estacionara en n, tendríamos una cadena de longitud $> n$ que podría ser refinada hasta una serie de composición, pero esto es una longitud ya que dicha serie tendría longitud $> n$, una contradicción. $\square$

Capítulo 3

Módulos indescomponibles.Teorema de Krull-Schmidt

Diremos que un R-módulo por la izquierda es *descomponible* si puede escribirse como suma directa de dos submódulos propios no triviales; en caso contrario se dice que es *indescomponible*. Los módulos indescomponibles se caracterizan como aquéllos cuyo anillo de endomorfismos no tiene más idempotentes que 0 y 1.

No todo R-módulo por la izquierda puede escribirse como suma directa de un número finito de submódulos indescomponibles y, en caso de poder hacerlo, las componentes indescomponibles, valga la redundancia, no están necesariamente determinadas de forma única salvo isomorfismos. Hay, sin embargo, una condición que asegura esta unicidad salvo isomorfismos: la de que el módulo sea artiniano y noetheriano:

Un R-módulo por la izquierda no nulo artiniano y noetheriano es suma directa finita de submódulos indescomponibles y, Teorema de Krull-Schmidt, dadas dos descomposiciones del tipo anterior, ambas tienen el mismo número de sumandos que son, salvo permutación de los mismos, isomorfos dos a dos.

Por ejemplo, si R es un anillo semiperfecto, ${}_RR$ es suma directa finita de ideales por la izquierda indescomponibles. Un capítulo que podría incluirse, aunque nosotros no lo hemos hecho, por no hacer demasiado extenso el programa, es el dedicado a los anillos semiperfectos, donde se profundizaría en la estructura de los mismos.

El llamado Teorema de Krull-Schmidt fue formulado por primera vez por J. H. M. Wedderburn en 1909. Su demostración contenía un error que fue subsanado por R. Remak en 1911. Posteriormente, W. Krull extendería el resultado a grupos abelianos con operadores y de aquí a módulos, en 1925. En 1928 O. Schmidt lo enunció para grupos arbitrarios con operadores. Durante algún tiempo fue llamado Teorema de Wedderburn-Remak-Krull-Schmidt, nombre que quedó posteriormente acortado.

En 1932 Krull planteó la cuestión de si dicho teorema seguiría siendo válido para módulos artinianos. La respuesta, negativa, la dieron Facchini, Herbera, Levy y Vámos en un artículo publicado en 1995: véase [57]. Este trabajo fue presentado en el Congreso Ring Theory Conference que tuvo lugar en Miskolc, Hungría, durante los días 15 al 20 de julio de 1995.

Para probar el Teorema de Krull-Schmidt utilizamos la noción de *módulo fuertemente indescomponible*: aquél no nulo cuyo anillo de endomorfismos es local (los únicos idempotentes que tiene son los triviales: 0 y 1). Demostraremos que si un R-módulo por la izquierda se expresa como suma de un número finito de indescomponibles y como suma de un número finito de fuertemente indescomponibles, entonces el número de sumandos coincide en ambos casos, y éstos son isomorfos dos a dos. A partir de aquí y usando el Lema de Fitting, que para cada endomorfismo de un R-módulo por la izquierda artiniano y noetheriano nos da una descomposición del mismo en dos submódulos tales que la restricción del endomorfismo al primero es un automorfismo y al segundo es nilpotente, obtenemos lo que deseábamos.

Partiendo del Teorema de Krull-Schmidt se puede demostrar el teorema de estructura de los grupos abelianos finitos.

Definición 3.1
Sea M un R-módulo por la izquierda. Diremos que M es *descomponible* si existen dos submódulos N_1, N_2 no nulos tales que $M = N_1 \oplus N_2$. Un módulo que no sea descomponible diremos que es *indescomponible*.

Ejemplos 3.2
El ejemplo más sencillo de módulo indescomponible es cualquier módulo simple. No todos los módulos indescomponibles son simples. Un ejemplo es $\mathbb{Z}$, que no es simple pero tampoco es descomponible. Este resultado se deja como ejercicio.

Proposición 3.3
Sea M un R-módulo por la izquierda. Entonces M es indescomponible si y sólo si End(M) *no tiene más idempotentes que* 0 *y* 1_M *(donde* 1_M *denota la identidad de* End(M)*).*

Demostración.
Supongamos en primer lugar que M es indescomponible, y sea f un idempotente de End(M). Descompongamos $M = f(M) \oplus (1-f)(M)$ (donde para cualquier $x \in M$, la notación $(1-f)x$ representa $x - f(x)$. Como M es indescomponible, uno de los dos sumandos ha de ser cero. En el primer caso, $f(M) = 0$ significa $f = 0$. En el segundo caso, $x - f(x) = 0$ para todo $x \in M$ lo que significa que $f(x) = x$ para todo $x \in M$, esto es, $f = 1_M$.

Recíprocamente, supongamos que End(M) no tiene más indempotentes que 0 y 1_M. Sean N_1 y N_2 dos submódulos de M tales que $M = N \oplus T$. Consideremos las aplicaciones siguientes:

$$\begin{array}{rccc} \pi_1: & N_1 \oplus N_2 & \to & N_1 \\ & x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \lambda_1: & N_1 & \to & N_1 \oplus N_2 \\ & x_1 & \mapsto & x_1 \end{array}$$

Resulta que $\lambda_1\pi_1$ es un idempotente de End(M). Por la hipótesis, es 0 o 1_M. En el primer caso tenemos que $N_1 = 0$. En el segundo, que $N_2 = 0$, lo que prueba el carácter indescomponible de M. $\square$

Además de la noción de módulo indescomponible, existe la de fuertemente indescomponible. Jugar con dos descomposiciones de un módulo en submódulos indescomponibles y en fuertemente indescomponibles nos va a permitir demostrar la unicidad de la descomposición (esto es, precisamente, lo que dice el Teorema de Krull-Schmidt).

Definición 3.4
Un anillo R se dice *local* si el conjunto de sus elementos no inversibles es un ideal del anillo.

Lema 3.5
Si R es un anillo local, entonces los únicos idempotentes que tiene son 0 y 1.

Demostración.
Sea e un idempotente de R. Como $e^2 = e$ tenemos que $e(1-e) = 0$. Esto significa que e y $1-e$ son no inversibles. Por la hipótesis ambos pertenecen a un ideal: el de los elementos no inversibles, luego su suma también pertenece a dicho ideal. Pero la suma es 1 y lo que estamos diciendo es que 1 es no inversible, lo que supone una contradicción. $\square$

Corolario 3.6
Sea M un R-módulo por la izquierda tal que End(M) *es local. Entonces M es indescomponible.*

Demostración.
Por el Lema 3.5, End(M) no tiene más idempotentes que 0 y 1_M. Por la Proposición 3.3 el módulo M es indescomponible. □

Definición 3.7
Un R-módulo por la izquierda M se dice *fuertemente indescomponible* si $M \neq 0$ y End(M) es local.

En virtud del Corolario 3.6, todo módulo fuertemente indescomponible es indescomponible.

Lema 3.8
Sean M y N dos R-módulos por la izquierda, con N fuertemente indescomponible, y sean $f : M \to N$, $g : N \to M$ dos homomorfismos de R-módulos por la izquierda tales que gf es un isomorfismo. Entonces f y g son isomorfismos.

Demostración.
Dado que gf es un isomorfismo, es biyectivo, así que existe un endomorfismo de módulos $h : M \to M$ tal que $gfh = 1_M$ y $hgf = 1_M$. De cada una de estas identidades se desprende que g es sobreyectiva y que f es inyectiva, respectivamente. Ahora, consideremos el endomorfismo de N siguiente: fhg. Observemos que es un idempotente ya que $fhgfhg = fh(gfh)g = fh1_Mg = fhg$. Como N es fuertemente indescomponible, End(N) es local, esto es, no tiene más idempotentes que 0 y 1_N por lo que $fhg = 0$ o $fhg = 1_N$. El primer caso no se puede dar porque, al ser f inyectiva, implicaría que $hg = 0$, lo que contradice que h sea biyectiva. Por lo tanto, $fhg = 1_N$, lo que implica que f es sobreyectiva y que g es inyectiva, concluyendo así la demostración. □

Teorema 3.9 (Teorema de Krull-Schmidt)
Sea M un R-módulo por la izquierda, y supongamos que admite dos descomposiciones como sigue:

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n,$$

con M_i fuertemente indescomponible y N_j indescomponible, cualesquiera que sean i, j. Entonces $m = n$ y existe una permutación σ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para todo i.

Demostración.
Vamos a probar el resultado por inducción sobre m. Supongamos que $m = 1$. En este caso, $M = M_1 = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. Como M_1 es indescomponible, $n = 1$ y hemos terminado.

Supongamos el resultado cierto para descomposiciones de $m-1$ sumandos y probémoslo para m.

Definamos

$$\begin{array}{rccc} e_i: & M_1\oplus\cdots\oplus M_m & \to & M_i \\ & x_1+\cdots+x_m & \mapsto & x_i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_j: & N_1\oplus\cdots\oplus N_n & \to & N_j \\ & y_1+\cdots+y_n & \mapsto & x_j \end{array}$$

y consideremos las composiciones siguientes:

$$M \xrightarrow{e_1} M_1 \xrightarrow{f_j} N_j$$

$$M \xrightarrow{f_j} N_j \xrightarrow{e_1} M_1$$

Sean $h_j = f_j e_1$, $k_j = e_1 f_j$. Tenemos que $\sum_j k_j h_j = \sum_j e_1 f_j f_j e_1 = e_1 \left(\sum_j f_j f_j\right) e_1 = e_1 \left(\sum_j f_j\right) e_1 = e_1 1_M e_1 = e_1^2 = e_1$.

En las líneas que siguen usaremos la notación e_1' para denotar la restricción de la aplicación e_1 a M_1; en general, la prima denotará la restricción de la aplicación sobre la que se haya escrito al dominio que corresponda. Así,

$$1_{M_1} = e_1' = \left(\sum_j k_j h_j\right)' = \sum_j (k_j h_j)'.$$

Como M_1 es fuertemente indescomponible, su anillo de endomorfismos es local, por lo que el conjunto de los no inversibles es un ideal, y de la identidad anterior se deduce que alguno de los sumandos ha de ser biyectivo (de no serlo ninguno, la suma, que es la identidad de M_1, no sería inversible, algo que es absurdo). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el elemento no inversible es el que corresponde a $j=1$.

Esta sería la situación:

$$(k_1h_1)': \qquad N_1 \xrightarrow{f_1e_1} M_1 \xrightarrow{e_1f_1} N_1$$

es inversible y M_1 es fuertemente indescomponible. Por el Lema 3.9 las aplicaciones $(f_1e_1)'$ y $(e_1f_1)'$ son ambas biyectivas, es decir, M_1 y N_1 son isomorfos.

Volviendo a la hipótesis de inducción en la que estábamos, y usando lo que acabamos de decir, afirmamos que $M = N_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_m$ (haga quien esto lea las comprobaciones oportunas). Así, $N_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n$ implica $M_2 \oplus \cdots \oplus M_m = N_2 \oplus \cdots \oplus N_n$, donde ahora tenemos $m-1$ sumandos fuertemente indescomponibles. Por la hipótesis de inducción $m=n$ y existe una permutación τ del conjunto $\{2,\ldots,m\}$ tal que $M_i \cong N_{\tau(i)}$ para todo $i \in \{2,\ldots,m\}$. Esto concluye la demostración. □

Una consecuencia interesante de este teorema es que los módulos artinianos y noetherianos se pueden descomponer en una suma directa de módulos indescomponibles. Además, esta descomposición es única salvo permutaciones de los sumandos. Veámoslo.

Lema 3.10 (Lema de Fitting)
Sea M un R-módulo por la izquierda artiniano y noetheriano, y sea $f \in$ End(M). Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \mathrm{Ker}\ f^n \oplus \mathrm{Im}\ f^n$. Además, f restringido a $\mathrm{Ker}\ f^n$ es nilpotente y f restringido a $\mathrm{Im}\ f^n$ es un automorfismo.

Demostración.
Consideremos las cadenas de submódulos de M siguientes:

$$\mathrm{Ker}\ f \subseteq \mathrm{Ker}\ f^2 \subseteq \dots$$

$$\mathrm{Im}\ f \supseteq \mathrm{Im}\ f^2 \supseteq \dots$$

Ambas son estacionarias ya que M es artiniano y noetheriano, por lo que podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que ambas cadenas se estacionan a partir del término n-ésimo. Probemos que tenemos la descomposición que se indica en el enunciado.

Primero veamos que la suma de $\mathrm{Ker}\ f^n$ y de $\mathrm{Im}\ f^n$ es directa. Si $f^n(x) \in \mathrm{Ker}\ f^n \cap \mathrm{Im}\ f^n$, entonces $f^n(f^n(x)) = 0$, esto es, $x \in \mathrm{Ker}\ f^{2n} = \mathrm{Ker}\ f^n$ por lo que $f^n(x) = 0$.

Ahora probemos que $M = \mathrm{Ker}\ f^n \oplus \mathrm{Im}\ f^n$. Para ello, basta ver que $M \subseteq \mathrm{Ker}\ f^n \oplus \mathrm{Im}\ f^n$. Sea $x \in M$. Como $f^n(x) \in \mathrm{Im}\ f^n = \mathrm{Im}\ f^{2n}$, existe $y \in M$ tal que $f^n(x) = f^{2n}(y)$ Escribamos $x = f^n(y) + (x - f^n(y))$. Ciertamente $f^n(y) \in \mathrm{Im}\ f^n$; por otro lado, $f^n(x - f^n(y)) = f^n(x) - f^{2n}(y) = f^n(x) - f^n(y) = 0$, es decir, $x - f^n(y) \in \mathrm{Ker}\ f^n$, lo que concluye la prueba. □

Corolario 3.11
Sea M un R-módulo por la izquierda que es artiniano y noetheriano. Entonces:

(i) *Si M es indescomponible, entonces todo endomorfismo de M es nilpotente o inversible.*

(ii) *M es indescomponible si y sólo si es fuertemente indescomponible.*

Demostración.
(i). Sea f un endomorfismo de M. Por el Lema de Fitting podemos escribir $M = \text{Ker } f^n \oplus \text{Im } f^n$ para cierto natural n. Como M es indescomponible, $\text{Ker } f^n = 0$ en cuyo caso $\text{Im } f^n = M$, lo que implica que f^n es un automorfismo y, por tanto, f es un automorfismo, o $\text{Ker } f^n = M$ en cuyo caso $\text{Im } f^n = 0$, y así $f^n = 0$, lo que significa que f es nilpotente.

(ii). Ya sabemos que fuertemente indescomponible implica indescomponible. Para probar el recíproco, supongamos M indescomponible y probemos que $\text{End}(M)$ es un anillo local, es decir, que el conjunto de los no inversibles, llamémosle I, es un ideal. Por el apartado (i) sabemos que I coincide con el conjunto de los elementos nilpotentes de M. Sean $f, g \in I$, $k \in \text{End}(M)$. Resulta que fk tiene que ser, necesariamente, nilpotente, ya que de no serlo sería inversible, es decir, existiría $h \in \text{End}(M)$ tal que $fkh = 1_M$. Esto significa que f es sobreyectiva. Pero una aplicación nilpotente no puede ser sobreyectiva, lo que es una contradicción.

Para probar que $f + g \in I$, supongamos por el contrario que no es cierto. En este caso $f + g$ sería inversible. Sea $h \in \text{End}(M)$ su inversa. Se tiene que $(f + g)h = 1$, esto es, $fh + gh = 1$. Como $f, g \in I$, por el apartado (i) tenemos que $fh, gh \in I$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $(fh)^n = 0$. Entonces $1 = (1 - (fh)^n) = (1 - fh)(fh + (fh)^2 + \dots (fh)^{n-1})$, lo que implica que $1 - fh = fg$ es inversible. Esto contradice $fg \in I$. $\square$

Teorema 3.12
Sea M un R-módulo por la izquierda artiniano y noetheriano. Entonces existen submódulos $M_1, \dots, M_n$ tales que cada M_i es indescomponible (y fuertemente indescomponible) y $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. Además, esta descomposición es única salvo por el orden de los sumandos.

Demostración.
Sabemos (Teorema 2.23) que un módulo es artiniano y noetheriano si y sólo si admite una serie de composición, y también que tiene sentido definir la longitud de M como la de una serie de composición cualquiera. Así que podemos hacer la demostración por inducción sobre la longitud de M.

Supongamos en primer lugar que $l(M) = 1$. En este caso M ha de ser indescomponible ya que si $M = M_1 \oplus M_2$, con M_1 y M_2 no nulos, entonces $0 \subsetneq M_1 \subsetneq M$ es una cadena que puede ser refinada a una serie de composición que, necesariamente tiene más de tres términos lo que significa que la longitud de M es al menos dos, una contradicción con nuestra hipótesis.

Supongamos el resultado probado para $l(M) = n$ y probémoslo para longitud $n + 1$. Si ahora M no fuera indescomponible, podríamos escribir

$M = M_1 \oplus M_2$, siendo M_1 y M_2 no nulos. Como $l(M_i) < l(M)$, podemos aplicar la hipótesis de inducción y tenemos que M_i puede escribirse como suma directa de indescomponibles, lo que implica que M se escribe como suma directa de indescomponibles, y hemos terminado.

Que los indescomponibles son también fuertemente indescomponibles se sigue del Corolario 3.11.

Finalmente, la unicidad salvo por el orden es consecuencia del Teorema de Krull-Schmidt. $\square$

Otra consecuencia es el Teorema de estructura de los grupos abelianos finitos.

Teorema 3.13
Sea G un grupo abeliano finito. Entonces $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \times \cdots \mathbb{Z}_{p_r^{m_r}}$, donde los p_i son primos, todos distintos. Además, esta descomposición es única salvo isomorfismos y salvo por el orden de los factores.

Demostración.
Consideremos G como $\mathbb{Z}$-módulo. Como G es finito, en particular es artiniano y noetheriano, así que admite una descomposición en suma directa de indescomponibles. Sea $H \leq G$ indescomponible. Observemos que, en este caso, el orden de H ha de ser potencia de un primo ya que si fuera $q_1^{m_1} \ldots q_s^{m_s}$, H tendría subgrupos de órdenes con los $q_i^{m_i}$ primos distintos, $H = H_1 \times \cdots \times H_{m_s}$, donde el orden de H_i es $q_i^{m_i}$; esto contradice el carácter indescomponible de H. Se deja que el lector complete los detalles de la demostración. $\square$

Capítulo 4

Módulos sobre anillos no unitarios

Hemos incluido este último capítulo con el objetivo de indicar posibles opciones para que quienes se interesen encuentren inspiración para posibles trabajos de iniciación a la investigación.

Existen diferentes contextos donde lo “natural”, o lo “abundante”, no son los anillos unitarios o los módulos sobre anillos unitarios (las álgebras de caminos de Leavitt son un ejemplo de ello), por lo que resulta de interés estudiar algunas de las nociones ya vistas pero en este otro ambiente: el no unitario, en particular, considerando anillos con unidades locales, o con suficientes idempotentes, o s-unitarios, etc. Tal sería el caso de proyectividad, inyectividad, planitud y carácter libre de módulos. Estos conceptos son estudiados en [11] al objeto de describir las álgebras de caminos de Leavitt débilmente regulares por la derecha y las autoinyectivas.

Se puede plantear el estudio de los anillos regulares autoinyectivos por un lado simples y puramente infinitos (lo que, según la clasificación de Kaplansky, se llaman factores de tipo III). El punto de partida serían los capítulos 9 y 10 del libro de Goodearl [74]. Después podría seguirse el artículo de Hanna [76] donde se explica cómo es el anillo de cocientes por la izquierda maximal de n anillo R en función de cómo es el anillo (por ejemplo, si R es simple, su maximal por la izquierda también lo es). Podría completarse el trabajo estudiando la descripción de las álgebras de caminos de Leavitt autoinyectivas.

Un trabajo bonito, aunque no exento de dificultad, consistiría en estudiar el artículo [57], donde se prueba que el Teorema de Krull-Schmidt es falso cuando se rebajan las hipótesis, esto es, cuando se consideran módulos artinianos.

Como puede apreciarse, el hacer estos trabajos requiere de más conocimientos que los que se adquirirán tras haber estudiado el Capítulo 1. Los hemos incluido aquí por estar directamente relacionados con el tema que nos ocupa.

Bibliografía básica

[46] P. M. Cohn, *Algebra, vol. 2* , John Wiley & Sons (1989).

[67] J. S. Golan, T. Head, T. *Modules and the structure of rings*, Marcel Dekker, Inc. (1991).

[72] K.R. Goodearl *Ring theory. Nonsingular rings and modules*, Marcel Dekker, Inc. (1976).

[84] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W. H. Freeman Company (1980).

[90] I. Kleiner, *A history of abstract algebra*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (2007).

[94] T. Y. Lam, *Exercises in Classical Ring Theory*, Springer-Verlag (1995).

[95] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics, **189** Springer-Verlag, New York (1999).

[96] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings. Second edition*, Graduate texts in Mathematics **131**, Springer-Verlag, New York (2001).

[97] T. Y. Lam, *Exercises in modules and rings.* Problem Books in Mathematics. Springer, New York (2007).

[98] J. Lambek, *Lectures on modules and rings*, Chelsea Publising Company (1976).

[99] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA (1965).

[100] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag New York, Inc. (2002).

[108] J. C. Mc Connell, J. C. Robson, *Noncommutative noetherian rings*, John Wiley and Sons (1987).

[124] J. Rotman, *An introduction to homological algebra. Second edition*, Universitext. Springer New York (2009).

Bibliografía avanzada

[1] G. Abrams, Morita equivalence for rings with local units, *Comm. Algebra* **11** (1983), 801–837.

[4] G. Abrams, G. Aranda Pino, Purely infinite simple Leavitt path algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, **207** (2006), 553-563.

[13] P. N. Ánh, Morita equivalence and tensor product rings, *Comm. Algebra* **17** (1989), 2717–2737.

[11] G. Aranda, K. Rangaswamy, M. Siles Molina, Weakly regular and self-injective Leavitt path algebras over arbitrary graphs. (Preprint 2009.)

[17] P.Ara, Rings without identity which are Morita equivalent to regular rings, *Algebra Colloq.* **11** (2004), 533–540.

[21] P. Ara, M. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Local rings of exchange rings, *Comm. in Algebra* **26** (1998), 4191–4205.

[28] G. Aranda Pino, M. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Morita invariance and maximal left quotient rings, *Comm. Algebra* **32** (2004), 3247–3256.

[31] G. Aranda Pino, K. R. Goodearl, F. Perera, M. Siles Molina, Non-simple purely infinite rings, *Am. J. Math.* (Por aparecer.)

[57] A. Facchini, D. Herbera, L. Levy, P. Vámos, Krull-Schmidt fails for Artinian modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3587–3592.

[66] J. L. García, J. J. Simón, Morita equivalence for idempotent rings. *J. Pure Appl. Algebra* **7**6 (1991), 39–56.

[69] M. A. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Left quotient associative pairs and Morita invariant properties, *Comm. Algebra* **32** (2004), 2841–2862.

1. K. R. Goodearl, *Von Neumann regular rings*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, second edition (1991).

[76] J. Hanna, Ideals in regular self-injective rings and quotient rings of group algebras, *Proc. London Math. Soc.* **42 (3)** (1981), 533–558.

[93] S. Kyuno, Equivalence of module categories. *Math. J. Okayama Univ.* **28** (1974), 147–150.

Bibliografía

[1] G. Abrams, Morita equivalence for rings with local units, *Comm. Algebra* **11** (1983), 801–837.

[2] G. Abrams, P. N. Ánh, A. Louly, E. Pardo, The classification question for Leavitt algebras, *J. Algebra* **320** (2008), 1983–2026.

[3] G. Abrams, G. Aranda Pino, The Leavitt path algebra of a graph, *J. Algebra* **293** (2005), 319-334.

[4] G. Abrams, G. Aranda Pino, Purely infinite simple Leavitt path algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, **207** (2006), 553-563.

[5] G. Abrams, G. Aranda Pino, The Leavitt path algebras of arbitrary graphs, *Houston J. Math.* **34 (2)** (2008), 423–442.

[6] G. Abrams, G. Aranda Pino, F. Perera, M. Siles Molina, Chain conditions for Leavitt path algebras. *Forum Math.* (Por aparecer.)

[7] G. Abrams, G. Aranda Pino, M. Siles Molina, Finite-dimensional Leavitt path algebras, *J. Pure Appl. Algebra.* **209 (3)** (2007), 753–762.

[8] G. Abrams, G. Aranda Pino, M. Siles Molina, Locally finite Leavitt path algebras, *Israel J. Math.* **165** (2008), 329–348.

[9] G. Abrams, A. Louly, E. Pardo, C. Smith, Flow invariants in the classification of Leavitt path algebras, *arXiv:0812.0553v3 [math.RA], 11 June 2009.*

[10] G. Abrams and K.M. Rangaswamy, Regularity conditions for arbitrary Leavitt path algebras, *Algebr. Represent. Theory.* (Por aparecer.)

[11] G. Abrams, K.M. Rangaswamy, M. Siles Molina, The socle series of a Leavitt path algebra. *Israel J. Math.* (Por aparecer.)

[12] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and categories of modules. Second edition*, Universitext. Springer-Verlag New York, Inc. (1992).

[13] P. N. Ánh, Morita equivalence and tensor product rings, *Comm. Algebra* **17** (1989), 2717–2737.

[14] P. N. Ánh, L. Márki, Morita equivalence for rings without identity, *Tsukuba J. Math.* **11** (1987), 1–16.

[15] Ánh,P. N.; Márki, L., Moore-Penrose localization, *J. Algebra Appl.* **3 (1)** (2004), 1–8.

[16] P. Ara, Extensions of Exchange Rings, *J. Algebra* **197** (1997), 409–423.

[17] P.Ara, Rings without identity which are Morita equivalent to regular rings, *Algebra Colloq.* **11** (2004), 533–540.

[18] P. Ara, The exchange property for purely infinite simple rings, *Proc. A.M.S.* **132 (9)** (2004), 2543–2547.

[19] P. Ara, M. Brustenga, The regular algebra of a quiver, *J. Algebra*, **309** (2007), 207–235.

[20] P. Ara, M. Brustenga, K_1 of corner skew Laurent polynomial rings and applications, *Comm. Algebra* **33(7)** (2005), 2231–2252.

[21] P. Ara, M. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Local rings of exchange rings, *Comm. in Algebra* **26** (1998), 4191–4205.

[22] P. Ara, K. R. Goodearl, E. Pardo, K_0 of purely infinite simple regular rings, *K-Theory*, **26** (2007), 157-178.

[23] P. Ara, M.A. González-Barroso, K.R. Goodearl, E. Pardo, Fractional skew monoid rings, *J. Algebra* **278** (2004), 104–126.

[24] P. Ara, K. R. Goodearl, K. C. O'Meara, E. Pardo, Separative cancellation for projective modules over exchange rings, *Israel J. Math.* **105** (1998), 105–137.

[25] P. Ara, M.A. Moreno, E. Pardo, Nonstable K-theory for graph algebras, *Algebras & Representation Theory*, **10** (2007), 157-178.

[26] P. Ara, E. Pardo, Stable rank for graph algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136 (7)** (2008), 2375–2386.

[27] P. Ara, F. Perera, Multipliers of von Neumann regular rings, *Comm. in Algebra*, **28 (7)** (2000), 3359–3385.

[28] G. Aranda Pino, M. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Morita invariance and maximal left quotient rings, *Comm. Algebra* **32** (2004), 3247–3256.

[29] G. Aranda Pino, D. Martín Barquero, C. Martín González, M. Siles Molina, The socle of a Leavitt path algebra *J. Pure Appl. Algebra* **212 (3)** (2008), 500-509.

[30] G. Aranda Pino, D. Martín Barquero, C. Martín González, M. Siles Molina, Socle theory for Leavitt path algebras of arbitrary graphs *Rev. Mat. Iberoamericana.* (Por aparecer.)

[31] G. Aranda Pino, K. R. Goodearl, F. Perera, M. Siles Molina, Non-simple purely infinite rings, *Am. J. Math.* (Por aparecer.)

[32] G. Aranda Pino, E. Pardo, M. Siles Molina, Exchange Leavitt path algebras and stable rank, *J. Algebra* **305 (2)** (2006), 912–936.

[33] G. Aranda Pino, E. Pardo, M. Siles Molina, Prime spectrum and primitive Leavitt path algebras, *Indiana Univ. Math. J.* **58 (2)** (2009), 869–890.

[34] G. Aranda Pino, F. Perera, M. Siles Molina, eds., *Graph algebras: bridging the gap between analysis and algebra*, Universidad de Málaga Press (2007), ISBN: 978-84-9747-177-0

[35] G. Aranda Pino, K. M. Rangaswamy, M. Siles Molina, Weakly regular and self-injective Leavitt path algebras over arbitrary graphs. (Preprint.)

[36] T. Bates, J.H. Hong, I. Raeburn, W. Szymański, The ideal structure of the C^*-algebras of infinite graphs, *Illinois J. Math.* **46 (4)** (2002), 1159–1176.

[37] T. Bates, D. Pask, Flow equivalence of graph algebras, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24** (2004), 367-382.

[38] T. Bates, D. Pask, I. Raeburn, W. Szymański, The C^*-algebras of row-finite graphs, *New York J. Math.* **6** (2000), 307–324 (electronic).

[39] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3rd, A. V. Mikhalev, *Rings with generalized identities*, Marcel Dekker (1996).

[40] G. Bergman, Coproducts and some universal ring constructions, *Trans. A.M.S.* **200** (1974), 33–88.

[41] B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[42] L. G. Brown, G. K. Pedersen, C^*-algebras of real rank zero, *J. Funct. Anal.* **99 (1)** (1991), 131–149.

[43] J. R. Brox López, *Teoría de anillos para álgebras de caminos de Leavitt*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Málaga (2009).

[44] M. Brustenga, '*Àlgebres associades a un buirac*, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, (2007).

[45] P. M. Cohn, *Universal algebra* , D. Reidel Pub. Co. (1981).

[46] P. M. Cohn, *Algebra, vol. 2* , John Wiley & Sons (1989).

[47] W. Crawley-Boevey, Lectures on Representations of Quivers (notes from an Oxford University Lecture Series, Spring 1992) 1–38. http://www.amsta.leeds.ac.uk/ pmtwc/quivlecs.pdf .

[48] P. Crawley, B. Jónsson, Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems, *Pacific J. Math.* **14** (1964), 797-855.

[49] J. Cuntz, Simple C*-algebras generated by isometries, *Comm. Math. Physics* **57** (1977), 173–185.

[50] J. Cuntz, K-theory for certain C*-algebras, *Annals of Math.* **113** (1981), 181–197.

[51] J. Cuntz, W. Krieger, A class of C*-algebras and topological Markov chains, *Invent. Math.* **63** (1981), 25–40.

[52] K.R. Davidson, "C^*-algebras by example", Fields Institute Monographs, 6. American Mathematical Society, Providence, RI (1996).

[53] K. Deicke, J.H. Hong, W. Szymański, Stable rank of graph algebras. Type I graph algebras and their limits, *Indiana Univ. Math. J.* **52(4)** (2003), 963–979.

[54] J. Djundji, *Topology* , Allyn & Bacon (1966).

[55] M. Enomoto, Y. Watatani, A graph theory for C^*-algebras, *Math. Japon.* **25 (4)** (1980), 435–442.

[56] E.G. Evans, Krull-Schmidt and cancellation over local rings, *Pacific J. Math.* **46** (1973), 115–121.

[57] A. Facchini, D. Herbera, L. Levy, P. Vámos, Krull-Schmidt fails for Artinian modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3587–3592.

[58] C. Faith, Y. Utumi, On a new proof of Litoff's Theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1**4 (1963), 369–371.

[59] C. Faith, Y. Utumi, Maximal quotient rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**6 (5) (1965), 1084–1089.

[60] B. Farb, R. K. Dennis, *Noncommutative Algebra* , Springer-Verlag (1993).

[61] J. Farina and C. Pendergrass-Rice, A few properties of just infinite algebras, *Comm. Algebra* **35 (5)** (2007), 1703–1707.

[62] D. Farkas, L. Small, Algebras which are nearly finite dimensional and their identities, *Israel J. Math.* **127** (2002), 245-251.

[63] M. H. Fenrick, T. *Introduction to the Galois correspondence*, Birkhäuser (1992).

[64] J. Fountain, V. Gould, orders in rings without identity, *Comm. in Algebra*, **18)** (1990), 3085–3110.

[65] J. B. Fraleigh, T. *A first course in abstract algebra*, Addison-Wesley (1982).

[66] J. L. García, J.J. Simón, Morita equivalence for idempotent rings. *J. Pure Appl. Algebra* **7**6 (1991), 39–56.

[67] J. S. Golan, T. Head, T. *Modules and the structure of rings*, Marcel Dekker, Inc. (1991).

[68] M. A. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Quotient rings and Fountain-Gould left orders by the local approach, *Acta Math. Hungar* **97 (4)** (2002), 287–301.

[69] M. A. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Left quotient associative pairs and Morita invariant properties, *Comm. Algebra* **32** (2004), 2841–2862.

[70] M. A. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Morita invariance and maximal left quotient rings, *Comm. Algebra* **32** (2004), 3247–3256.

[71] M. A. Gómez Lozano, M. Siles Molina, Local rings of rings of quotients, *Algebr. Represent. Theor.* **11** (2008),425–436.

[72] K.R. Goodearl *Ring theory. Nonsingular rings and modules*, Marcel Dekker, Inc. (1976).

[73] K. R. Goodearl, Leavitt path algebras and direct limits. *Contemp. Math.* **480** (200), 165–187.

[74] K. R. Goodearl, *Von Neumann regular rings*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, second edition (1991).

[75] K. R. Goodearl, R. B. Warfield, Jr, Algebras over zero-dimensional rings, *Math. Ann.* **223** (1976), 157-168.

[76] J. Hanna, Ideals in regular self-injective rings and quotient rings of group algebras, *Proc. London Math. Soc.* **42 (3)** (1981), 533–558.

[77] R.H. Herman, L.N. Vaserstein, The stable range of C^*-algebras, *Invent. Math.* **77** (1984), 553–555.

[78] I. N. Herstein *Noncommutative rings*, The carus Mathematical Monographs (1968).

[79] I. N. Herstein *Topics in Algebra* , Wiley (1975).

[80] P. Hilton, Y. C. Wu, *Curso de Álgebra moderna*, Reverté (1977).

[81] N. Jacobson, Some remarks on one-sided inverses, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 352–355.

[82] N. Jacobson, *Structure of Rings*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1956).

[83] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman & Company (1980).

[84] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W. H. Freeman & Company (1980).

[85] J.A. Jeong, G.H. Park, Graph C*-algebras with real rank zero, *J. Funct. Anal.* **188** (2002), 216–226.

[86] J.A. Jeong, G.H. Park, D.Y. Shin, Stable rank and real rank of graph C^*-algebras, *Pacific J. Math.* **200(2)** (2001), 331–343.

[87] M. Kanuni, Dense ideals and maximal quotient rings of incidence algebras, *Comm. in Algebra*, **31 (11)** (2003), 5287–5304.

[88] E. Kirchberg, The classification of purely infinite C*-algebras using Kasparov theory, *Preprint*.

[89] E. Kirchberg, M. Rørdam, Non-simple purely infinite C*-algebras, *Amer. J. Math.* **122** (2000), 637–666.

[90] I. Kleiner, *A history of abstract algebra*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (2007).

[91] A. Kumjian, D. Pask, I. Raeburn, J. Renault, Graphs, groupoids, and Cuntz-Krieger algebras, *J. Funct. Anal.* **144 (2)** (1997), 505–541.

[92] A. Kumjian, D. Pask, I. Raeburn, Cuntz-Krieger algebras of directed graphs, *Pacific J. Math.* **184 (1)** (1998), 161–174.

[93] S. Kyuno, Equivalence of module categories. *Math. J. Okayama Univ.* **28** (1974), 147–150.

[94] T. Y. Lam, *Exercises in Classical Ring Theory*, Springer-Verlag (1995).

[95] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics, **189** Springer-Verlag, New York (1999).

[96] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*. Graduate texts in Mathematics **131**, Springer-Verlag, New York (2001).

[97] T. Y. Lam, *Exercises in modules and rings*. Problem Books in Mathematics. Springer, New York (2007).

[98] J. LAMBEK, *Lectures on modules and rings*, Chelsea Publising Company (1976).

[99] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA (1965).

[100] S. LANG, *Algebra*, Springer-Verlag New York, Inc. (2002).

[101] S. LANNING, The maximal symmetric ring of quotients, *J. Algebra* **179** (1996), 47–91.

[102] W.G. LEAVITT, The module type of a ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* **42** (1962), 113–130.

[103] F. LLEDÓ, Operator algebras: an informal overview, *arXiv:0901.0232v1 [math.OA], 2 January 2009.*

[104] T.A. LORING, *Lifting solutions to perturbing problems in C^*-algebras*, Fields Institute Monographs, 8. American Mathematical Society, Providence, RI (1997).

[105] W. S. MARTINDALE, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra* **12** (1969), 576–584.

[106] S. MAC LANE, *Categories for the working Mathematician*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1971).

[107] S. MAC LANE, *Selected papers*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1979).

[108] J. C. MC CONNELL, J. C. ROBSON, *Noncommutative noetherian rings*, John Wiley and Sons (1987).

[109] G.J. MURPHY, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, London (1990).

[110] C. NĂSTĂSESCU, F. VAN OYSTAEYEN, *Graded ring theory*, North-Holland, Amsterdam (1982).

[111] W. K. NICHOLSON, Lifting idempotents and exchange rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **229** (1977), 269-278.

[112] E. ORTEGA, Rings of quotients of incidence algebras and path algebras, *J. Algebra* **303** (2006), 225–243.

[113] E. PARDO, M. SILES MOLINA, *Algebras and Graphs*, Apuntes de la asignatura (2008).

[114] B. Pareigis, *Categories and functors*, Academic Press (1970).

[115] W. L. Paschke, The crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism, *Proc. Amer. Math. Soc.* **80 (1)** (1980), 113–118.

[116] N.C. Phillips, A classification theorem for nuclear purely infinite simple C*-algebras, *Doc. Math.* **5** (2000), 49-114.

[117] I. Raeburn, *Graph algebras.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **103**, American Mathematical Society, Providence (2005). ISBN 0-8218-3660-9

[118] Z. Reichstein, D. Rogalski, J. J. Zhang, Projectively simple rings, *Adv. Math* **203 (2)** (2006), 365–407.

[119] P. Ribenboim, *Rings and Modules*, Interscience Publishers (1969).

[120] M.A. Rieffel, Dimension and stable rank in the K-theory of C*-algebras, *Proc. London Math. Soc.* **46** (1983), 301–333.

[121] M. Rørdam, Classification of certain infinite simple C^*-algebras, *J. Funct. Anal.* **131 (2)** (1995), 415–458.

[122] M. Rørdam, F. Larsen, N.J. Laustsen, An Introduction to K-Theory for C^*-Algebras, Cambridge University Press, LMS Student Texts 49 (2000).

[123] J. Rosenberg, *Algebraic K-Theory and its applications*, Springer-Verlag, GTM 147 (1994).

[124] J. Rotman, *An introduction to homological algebra. Second edition*, Universitext. Springer New York (2009).

[125] L. H. Rowen, *Ring theory I*, Accademic Press, Inc. (1988).

[126] L. H. Rowen, *Ring theory II*, Accademic Press, Inc. (1988).

[127] M. Siles Molina, *Regularidad fuerte e inversos generalizados en sistemas de Jordan*, Tesis Doctoral (1992).

[128] M. Siles Molina, Abelian regular Jordan Pairs, *Alg. Gr. and Geom.* **10** (1993), 215–225.

[129] M. Siles Molina, Orders in rings with involution, *Comm. in Algebra* **29 (1)** (2001), 1–10.

[130] M. Siles Molina, Algebras of quotients of path algebras, *J. Algebra* **319 (12)** (2008), 329–348.

[131] B. Stenström, *Rings of quotients*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1971).

[132] M. Tomforde, Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt path algebras, *J. Algebra* **318** (2007), 270-299.

[133] Y. Utumi, On quotient rings. *Osaka J. Math.* **8** (1956), 1–18.

[134] L.N. Vaserstein, Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces, *Funct. Anal. Appl.* **5** (1971), 102–110.

[135] J. v. Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und der Theorie der normalen Operatoren, *Math. Ann.* **102** (1929), 307–427.

[136] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*, Oxford University Press, Oxford (1993).

[137] S. Zhang, A property of purely infinite C*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **109** (1990), 717–720.

[138] S. Zhang, Certain C^*-algebras with real rank zero and their corona and multiplier algebras I, *Pacific J. Math.* **155** (1992), 169–197.