ZACATECAS-2014

Graduaciones y Álgebras de Lie simples

Tercer encuentro conjunto RSME-SMM

Cristina Draper

LOS INICIOS
(Y CONCEPTOS BÁSICOS)

Graduaciones: ¿Qué son?

Definición.

Sea G un grupo abeliano y $\mathcal{A}$ una $\mathbb{F}$-álgebra.

Una G-graduación Γ es una descomposición en espacios vectoriales $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$ tal que $\forall g, h \in G$,

$$\mathcal{A}_g \mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}_{g+h}.$$

G=grupo graduador, $\mathcal{A}_g$ componente homogénea de grado g,

$\mathrm{Supp}(\Gamma) = \{g \in G \mid \mathcal{A}_g \neq 0\}$ soporte de Γ.

Ejemplo.

$\mathcal{A} = \mathbb{F}[x]$ el álgebra de polinomios es $\mathbb{Z}$-graduada con

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} \mathbb{F}x^n & \forall n \geq 0 \\ 0 & \text{demás } n \end{cases}$$

Algún ejemplo

La descomposición en espacios raíces es una $\mathbb{Z}$-graduación en $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$L_0 = \langle h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$L_2 = \langle e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$L_{-2} = \langle f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\boxed{[h, e] = 2e,\ [h, f] = -2f,\ [e, f] = h}$$

Pero también hay una $\mathbb{Z}_2^2$-graduación en $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$
(dada por las llamadas matrices de Pauli):

$$L_{(\bar{1},\bar{1})} = \langle e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$L_{(\bar{0},\bar{1})} = \langle e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$L_{(\bar{1},\bar{0})} = \langle e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\boxed{[e_i, e_{i+1}] = e_{i+2} \quad \forall i}$$

Ejemplos en álgebras de matrices:

Con pocas piezas

$\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$.

Si $n = p + q$, la siguiente partición en bloques (pp, pq, qp y qq leyendo por filas) proporciona una $\mathbb{Z}_2$-graduación:

$$A = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)}_{\mathcal{A}_{\bar{0}}} \oplus \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array}\right)}_{\mathcal{A}_{\bar{1}}}$$

Ejemplos en álgebras de matrices:

Con muchas piezas

$\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$.

Denotemos por e_{ij} la matriz con un 1 en la posición (i, j) y 0 en las restantes. Estos elementos multiplican del siguiente modo: $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$.

$$\mathcal{A} = \langle e_{11}, e_{22}, ..., e_{nn}\rangle \oplus \langle e_{12}\rangle \oplus .... \oplus \langle e_{n-1,n}\rangle$$

es una $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduación con la asignación de grados (degrees):

$$\deg\langle e_{ij}\rangle = (0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{i}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$$

Ejemplo en un álgebra de Lie:

Con muchas piezas

$\mathcal{L} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = \{x \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$ álgebra de Lie simple de tipo A_{n-1}.

$$\mathcal{L} = \langle e_{11} - e_{22}, \ldots, e_{11} - e_{nn} \rangle \oplus \langle e_{12} \rangle \oplus \ldots . \oplus \langle e_{n-1,n} \rangle$$

es una $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduación heredada de la anterior, puesto que $\mathcal{L} \leq \mathcal{A}^{-} = (\mathcal{A}, [\ ,\ ])$ (y $\mathcal{L}_g = \mathcal{A}_g \cap \mathcal{L}\ \forall g$).

Ejemplo trascendental:
La descomposición en raíces

Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan (i.e., subálgebra semisimple maximal) de un álgebra de Lie compleja semisimple L de dimensión finita,

$$L = \oplus_{\alpha\in\mathfrak{h}^*} L_\alpha,$$
$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid L_\alpha \neq 0\}$ se llama sistema de raíces, L_α se llaman espacios raíces.

Siempre existe $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Phi$ una base de Φ, caracterizada por cumplir $\Phi \subset \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \cup \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i$. A l se le llama rango de L.

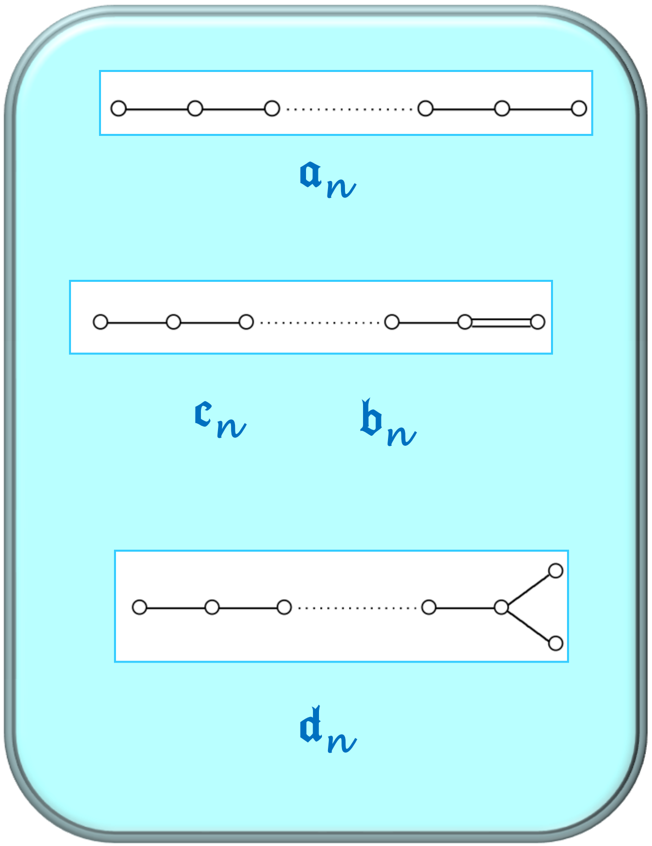
Es una graduación por el grupo $\sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i \cong \mathbb{Z}^l$ con soporte $\Phi \cup \{0\}$.

Ejemplo: la $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduación de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ de la transparencia anterior es precisamente la descomposición en raíces relativa a $\mathfrak{h}$ = matrices diagonales de traza nula

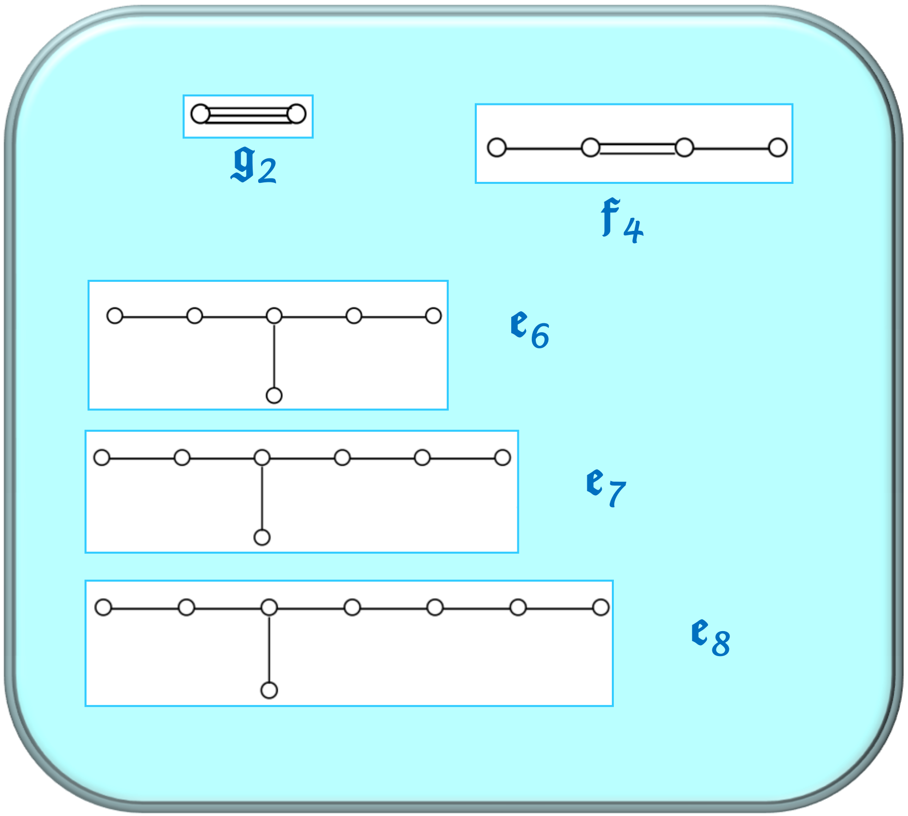
Papel de esta graduación I

Fue clave para clasificar las álgebras de Lie simples f-d complejas:

Clásicas



Excepcionales



Killing y Cartan , 1907

Papel de esta graduación II

Y es clave en teoría de representaciones:

Una representación de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ es un homomorfismo

$$\rho\colon \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V) = (\mathrm{End}(V))^-$$

(O sea, un modo de escribir L como un conjunto de matrices)

Al espacio vectorial V también se le llama L-módulo.
Se dice que V es irreducible si no tiene submódulos propios ($\neq 0$ y V).

RESUMEN DE LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES:

Si L es f-d semisimple compleja, todo módulo f-d es suma directa de submódulos irreducibles y cada irreducible es isomorfo a un cierto $V(\lambda)$ donde $\lambda \in \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{\geq 0}\lambda_i$ es combinación lineal de los pesos fundamentales, que son $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ caracterizados por $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle =$ matriz de Cartan.

Una aplicación de la teoría de representaciones:

a la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales

◇ Consideramos la EDP:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1.$$

Sea $V = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid f \text{ solución } \mathcal{C}^\infty \text{ de la ecuación}\}$.

◇ El grupo $\mathrm{O}(2)$ actúa en V:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$ y $f \in V$, entonces

$f_A(x, y) = f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ también es solución ($f_A \in V$).

◇ Por tanto V es suma de $\mathrm{O}(2)$-módulos irreducibles, que son todos de dimensión 1 o 2...

(Las representaciones del grupo de Lie y del álgebra de Lie están estrechamente relacionadas)

CONTINUANDO CON LOS INICIOS

GRADUACIONES SOBRE GRUPOS CÍCLICOS

Un poco de Motivación para estudiar graduaciones sencillas

$\mathbb{Z}_2$-graduaciones:

♡ Superálgebras

♡ Espacios simétricos

$\mathbb{Z}$-graduaciones:

♣ $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ implica que $J = L_1$ es un álgebra Jordan y $L = TKK(J)$.

♣ $L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ implica que L_1 es un álgebra estructurable y L=construcción de Kantor de L_1.

♣ $L = L_{-n} \oplus \cdots \oplus L_0 \oplus \cdots \oplus L_n$ sii L_n es un ideal interno abeliano. Se tiene que (L_{-n}, L_n) es un par de Jordan simple.

♣ Relacionados con las subálgebras parabólicas: $\mathfrak{p} = L_0 \oplus \cdots \oplus L_n$ es una subalg. parabólica, pues contiene a la subálgebra de Borel (=soluble maximal) $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha$

Ejemplo de $\mathbb{Z}_2$-graduación

La descomposición en matrices simétricas y antisimetricas da una $\mathbb{Z}_2$-graduación:

$\mathcal{L} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{0}} &= \{x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) \mid x^t = -x\} \cong \mathfrak{so}(n, \mathbb{F}) \\ \mathcal{L}_{\bar{1}} &= \{x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) \mid x^t = x\} \end{aligned}$$

Esa $\mathbb{Z}_2$-graduación más general

Si $A = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ y $\varphi\colon A \to A$ es una involución (antihom., $\varphi^2 = \mathrm{id}$),
$\implies$ Existe $b\colon \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ forma bilineal simétrica o antisimétrica no degenerada tal que
φ es la adjunción respecto a b ($b(x \cdot v, w) = b(v, \varphi(x) \cdot w)$)

Además $A = \mathrm{Skew}(A, \varphi) \oplus \mathrm{Sym}(A, \varphi)$ es una $\mathbb{Z}_2$-graduación, donde

$$\mathrm{Skew}(A, \varphi) \cong \mathfrak{o}(n, \mathbb{F}) \text{ si } \varphi \text{ es inv. ortogonal}$$
$$\mathrm{Skew}(A, \varphi) \cong \mathfrak{sp}(n, \mathbb{F}) \text{ si } \varphi \text{ es inv. simpléctica}$$

Una $\mathbb{Z}_3$-graduación

ayudando a entender la estructura del álgebra

Si $\mathbb{O}$ álgebra de octoniones, $\mathrm{der}(\mathbb{O})$ es un álgebra de Lie simple de tipo $\mathfrak{g}_2$.

DE OTRO MODO:

Sea V espacio vectorial de dimensión 3 y consideramos

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathfrak{sl}(V)}_{\mathcal{L}_{\bar{0}}} \oplus \underbrace{V}_{\mathcal{L}_{\bar{1}}} \oplus \underbrace{V^*}_{\mathcal{L}_{\bar{2}}}$$

con producto de $\mathcal{L}_{\bar{0}}$ en $\mathcal{L}_{\bar{i}}$ las acciones natural y dual, y

- ♡ $[u, v] = u \wedge v$
- ♡ $[f, g] = f \wedge g$
- ♡ $[u, f] = f(\ )u - \frac{1}{3} f(u)\,\mathrm{id}$

donde hemos fijado una aplicación trilineal alternada no nula $\det\colon \wedge^3 V \to \mathbb{F}$, $u \wedge v = \det(u, v, -)$ y $f \wedge g = \det^*(f, g, -)$ para $\det^*$ la aplicación dual de det.

$$\mathcal{L} \cong \mathfrak{g}_2$$

Relación con automorfismos (orden finito)

$\mathbb{F}$ alg. cerrado, $\omega \in \mathbb{F}$, $\omega^3 = 1$

♡ Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{2}}$ es una $\mathbb{Z}_3$-graduación,

$$\Longrightarrow f : \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ x \in \mathcal{L}_{\bar{i}} & \mapsto & \omega^i x \end{array} \quad \text{automorfismo de orden 3}$$

♡ Y si $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ automorfismo de orden 3, entonces la diagonalización $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{2}}$ es una $\mathbb{Z}_3$-graduación.

Obviamente hay la misma relación entre $\mathbb{Z}_m$-graduaciones y automorfismos de orden m

¿Y las $\mathbb{Z}$-graduaciones?

♡ Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-m} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_m$ es una $\mathbb{Z}$-graduación,

$$\Longrightarrow d: \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ x \in \mathcal{L}_n & \mapsto & nx \end{array} \quad \text{derivación}$$

$$\Longrightarrow \exp(d): \mathcal{L} \to \mathcal{L} \quad \text{automorfismo}$$

Para el recíproco, necesitamos ser un poco más sutiles:

♡ Si $\mathcal{L} = \oplus_{-m}^{m} \mathcal{L}_n$ es una $\mathbb{Z}$-graduación, y $z \in \mathbb{C}^\times$,

$$\Longrightarrow f_z: \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ x \in \mathcal{L}_n & \mapsto & z^n x \end{array} \quad \text{automorfismo}$$

$$\Longrightarrow \{f_z \mid z \in \mathbb{C}^\times\} \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{L})$$

♡ Y si $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \to & \mathrm{Aut}(\mathcal{L}) \\ z \in \mathbb{C}^\times & \mapsto & f_z \end{array}$ automorfismo de grupos,

entonces $d\varphi(1)(1) \in \mathrm{der}(\mathcal{L})$ tiene valores propios enteros, produciendo así una $\mathbb{Z}$-graduación.

Combinando las $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_m$

$\mathcal{L}$ álgebra sobre $\mathbb{C}$ (o sobre $\mathbb{F}$ alg. cerrado de característica 0)

Graduaciones en $\mathcal{L}$
sobre grupos abelianos finitamente generados

$\Updownarrow$

Colección de automorfismos de $\mathcal{L}$
simultáneamente diagonalizables

$\Updownarrow$

Subgrupo abeliano de $\mathrm{Aut}(\mathcal{L})$
(cuasitoro=producto de copias de $\mathbb{F}^\times$ y $\mathbb{Z}_k$'s)

Más sobre $\mathbb{Z}$-graduaciones

Dada $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ base del sistema de raíces Φ de $\mathcal{L}$ relativo a alguna CSA $\mathfrak{h}$, elegimos $s_1, \ldots, s_l \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{L}_n = \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cup \{0\}} \{L_\alpha \mid \alpha = \sum \alpha_i p_i, \sum s_i p_i = n\}$$

proporciona una $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{L}$ y

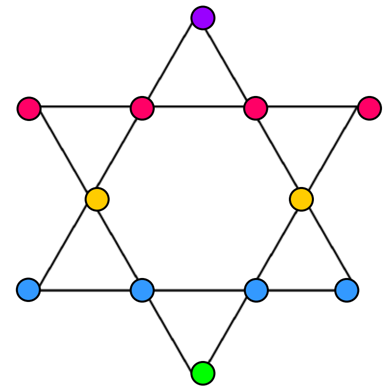
toda $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{L}$ es así.

Ejemplo: una $\mathbb{Z}$-graduación en $\mathfrak{g}_2$

La graduación inducida por $s_1 = 1, s_2 = 0$ es

$$\mathcal{L}_n = \oplus_{\alpha \in \Phi \cup \{0\}} \{ L_\alpha \mid \alpha = \sum_1^2 \alpha_i p_i, \sum p_1 = n \}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_2 = L_{2\alpha_1+3\alpha_2} \\ \mathcal{L}_1 = L_{\alpha_1+3\alpha_2} \oplus L_{\alpha_1+2\alpha_2} \oplus L_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus L_{\alpha_1} \\ \mathcal{L}_0 = L_{-\alpha_2} \oplus L_{\alpha_0} \oplus L_{\alpha_2} \\ \mathcal{L}_{-1} = L_{-\alpha_1-3\alpha_2} \oplus L_{-\alpha_1-2\alpha_2} \oplus L_{-\alpha_1-\alpha_2} \oplus L_{-\alpha_1} \\ \mathcal{L}_{-2} = L_{-2\alpha_1-3\alpha_2} \end{cases} \longrightarrow$$



ÚLTIMAS TENDENCIAS

GRADUACIONES FINAS

Concepto de fina

Def. Sean dos graduaciones $\Gamma : \mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ y $\Gamma' : \mathcal{A} = \oplus_{h\in H}\mathcal{A}'_h$. Se dice que Γ es un refinamiento de Γ' (o Γ' un "coarsening" de Γ) si cada $\mathcal{A}_g \subset$ algún $\mathcal{A}'_h$.

Ejemplo. La $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduación de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ era un refinamiento de las $\mathbb{Z}_2$-graduaciones que consideramos eligiendo p y $q = n - p$.

Def. Una graduación es fina si no tiene refinamientos propios.

Ejemplo de fina:
En álgebras de matrices

$\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$, ξ raíz primitiva cúbica de la unidad.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \xi^{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \xi^{n-1} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X^n = 1 = Y^n, \qquad YX = \xi XY}$$

$\mathcal{A}$ está $\mathbb{Z}_n^2$-graduada: $\mathcal{A} = \oplus_{(\bar{i},\bar{j})\in\mathbb{Z}_n^2}\mathcal{A}_{(\bar{i},\bar{j})}$, $\qquad \mathcal{A}_{(\bar{i},\bar{j})} = \mathbb{F}X^iY^j$

(graduación de Pauli)

Ejemplo de fina:
En Octoniones

El álgebra de octoniones se obtiene aplicando al cuerpo $\mathbb{F}$ el proceso de Cayley-Dickson 3 veces:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}i & i^2 &= -1 \\ \mathbb{H} &= \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}j & j^2 &= -1 \\ \mathbb{O} &= \underbrace{\mathbb{H}}_{\bar{0}} \oplus \underbrace{\mathbb{H}l}_{\bar{1}} & l^2 &= -1 \end{aligned}$$

El proceso de Cayley-Dickson proporciona una $\mathbb{Z}_2$-graduación, por tanto obtenemos una $\mathbb{Z}_2^3$-graduación (fina) en los octoniones:

$\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{0},\bar{0})} = \mathbb{F}1$	$\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})} = \mathbb{F}l$
$\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{0},\bar{0})} = \mathbb{F}i$	$\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{0},\bar{1})} = \mathbb{F}il$
$\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{1},\bar{0})} = \mathbb{F}j$	$\mathbb{O}_{(\bar{0},\bar{1},\bar{1})} = \mathbb{F}jl$
$\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{1},\bar{0})} = \mathbb{F}ij$	$\mathbb{O}_{(\bar{1},\bar{1},\bar{1})} = \mathbb{F}(ij)l$

Lo bueno de las finas:
Todas las graduaciónes pueden obtenerse de ellas

- Obviamente toda graduación es coarsening de una fina.
- Pero las coarsenings de una graduación fija se pueden calcular fácilmente:

  If $\Gamma : \mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ es una G-graduación,
  y $\pi : G \to H$ es un epimorfismo de grupos,
  $\Longrightarrow \Gamma^\pi : \mathcal{A} = \oplus_{h\in H}\mathcal{M}_h$
  es una H-graduación
  para $\mathcal{M}_h = \sum_{\pi(g)=h}\mathcal{A}_g$.

- Y si G es el *grupo graduador universal*, toda coarsening se obtiene de esa forma.

Un ejemplillo de graduación fina en $\mathfrak{g}_2$

- Si $V = \oplus_{g\in G} V_g$ descomposición en subespacios vectoriales, $\Longrightarrow E := \mathrm{End}(V) = \oplus_{g\in G} E_g$ es graduado con

$$E_g = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f(V_h) \subset V_{g+h}\}$$

$\Longrightarrow \mathfrak{gl}(V) = (\mathrm{End}(V))^-$ también.

Estas graduaciones se llaman graduaciones elementales, que quiere decir inducidas por el módulo V. Serán fundamentales en la teoría.

- Si $V = A$ cualquier álgebra graduada, su álgebra de derivaciones $\mathrm{der}(A) = \{d \in \mathrm{End}(A) \mid d(xy) = d(x)y + xd(y)\ \forall x, y \in A\}$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(A)$ que hereda la graduación.
- La $\mathbb{Z}_2^3$-graduación de $\mathbb{O}$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{O}_{(\bar 0,\bar 0,\bar 0)} = \mathbb{F}1 & \mathbb{O}_{(\bar 0,\bar 0,\bar 1)} = \mathbb{F}l \\ \mathbb{O}_{(\bar 1,\bar 0,\bar 0)} = \mathbb{F}i & \mathbb{O}_{(\bar 1,\bar 0,\bar 1)} = \mathbb{F}il \\ \mathbb{O}_{(\bar 0,\bar 1,\bar 0)} = \mathbb{F}j & \mathbb{O}_{(\bar 0,\bar 1,\bar 1)} = \mathbb{F}jl \\ \mathbb{O}_{(\bar 1,\bar 1,\bar 0)} = \mathbb{F}ij & \mathbb{O}_{(\bar 1,\bar 1,\bar 1)} = \mathbb{F}(ij)l \end{array}}$$

induce una $\mathbb{Z}_2^3$-graduación en $\mathrm{der}(\mathbb{O}) \cong \mathfrak{g}_2$.

Hechos sobre esta graduación de $\mathfrak{g}_2$

- La correspondencia entre graduaciones en $\mathbb{O}$ y graduaciones en $\mathrm{der}(\mathbb{O})$ es más fuerte, debido al isomorfismo $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}) \cong \mathrm{Aut}(\mathrm{der}(\mathbb{O}))$
- Esta graduación no tiene nada que ver con la descomposición en raíces: su naturaleza es completamente diferente
- TODO ELEMENTO HOMOGÉNEO ES SEMISIMPLE:

$$(\mathfrak{g}_2)_g = \begin{cases} 0 & g = e \\ \text{subálgebra de Cartan} & g \neq e \end{cases}$$

(las componentes homogéneas son indistinguibles)

Parte de la motivación para estudiar graduaciones finas

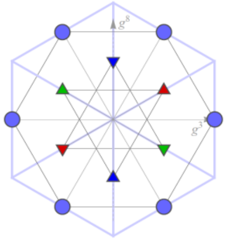
En Matemáticas:

- ♡ Son los análogos de la descomposisión en raíces: **incontables aplicaciones**
- ♡ Proporcionan nuevas bases con propiedades poco comunes: **¡todo elemento homogéneo es o semisimple o nilpotente!**
- ♡ Es un modo de estudiar (los grupos de) las simetrías del álgebra
- ♡ Están relacionadas con modelos o presentaciones particulares del álgebra

En Física:

- ♠ Proporcionan conjuntos maximales de observables cuánticos con números cuánticos aditivos
- ♠ Deformaciones y contracciones de las álgebras de Lie

$G2$		V_β	g^3	g^8
●	$g^{r\bar{g}}$	$(T_2 - iT_1)$	1	0
●	$g^{\bar{r}g}$	$(-T_2 - iT_1)$	-1	0
●	$g^{r\bar{b}}$	$(T_5 - iT_4)$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
●	$g^{\bar{r}b}$	$(-T_5 - iT_4)$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
●	$g^{\bar{g}b}$	$(-T_7 - iT_6)$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
●	$g^{g\bar{b}}$	$(T_7 - iT_6)$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$
▲	q^r	$[1, 0, 0]$	$1/2$	$1/2\sqrt{3}$
▼	$\bar{q}^r$	$[1, 0, 0]$	$-1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
▲	q^g	$[0, 1, 0]$	$-1/2$	$1/2\sqrt{3}$
▼	$\bar{q}^g$	$[0, 1, 0]$	$1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
▲	q^b	$[0, 0, 1]$	0	$-1/\sqrt{3}$
▼	$\bar{q}^b$	$[0, 0, 1]$	0	$1/\sqrt{3}$



Objetivo de las investigaciónes

Clasificar las graduaciones (sobre grupos abelianos) finas en las álgebras de Lie simples, salvo "equivalencia"

Estado actual

CLASIFICADOS	$\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$	$\mathbb{F}$ a.c. $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$	$\mathbb{F}$ a.c. $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$	$\mathbb{F}$ a.c. $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = p$
Graduaciones finas salvo equivalencia	G_2	$A_l,\ B_l,\ C_l,\ D_l,\ F_4$	$D_4,\ E_6$	—
Graduaciones salvo isomorfismo	G_2	$A_l,\ B_l,\ C_l,\ D_l,\ F_4$	—	Witt, especial (tipo Cartan)

Referencia principal, 2013:

CLASIFICACIÓN DE
GRADUACIONES FINAS
EN ÁLGEBRAS DE LIE SIMPLES FIN-DIM

Técnicas
para trabajar con graduaciones

$\mathbb{F}$ alg cerrado, G grupo abeliano finitamente generado.

Carac 0 G-graduación en A $\Longleftrightarrow$ Monomorfismo de grupos algebraicos $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{F}) \to \mathrm{Aut}(A)$

$A = \oplus_{g \in G} A_g$ $\longrightarrow$ $\chi \mapsto \varphi_\chi : A \to A$ si $a \in A_g$, $\varphi_\chi(a) := \chi(g)a$

---

donde si $G = \mathbb{Z}^n \times T$, para T subgrupo de torsión, entonces $\hat{G} = (\mathbb{F}^\times)^n \times T$ es un cuasitoro.
Así que las graduaciones en A están en correspondencia biyectiva con los cuasitoros de $\mathrm{Aut}(A)$.

Carac p G-graduación en A $\Longleftrightarrow$ Monomorfismo de esquemas afines alg. $G^D \to \mathbf{Aut}(A)$

---

donde $G^D : \mathrm{Alg}_{\mathbb{F}} \to \mathrm{Grp}$ esquema afín representado por el álgebra de Hopf $\mathbb{F}G$, o sea,
$G^D(R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{F}G, R)$ y $\mathbf{Aut}(A)(R) = \mathrm{Aut}(A \otimes R)$ para cada $\mathbb{F}$-álgebra R.

Algunas de las Técnicas
empleadas para graduaciones de álgebras de Lie simples f-d

◇ **Clásicas.**

- (1998, Patera et al.) Métodos computacionales para dar listas de subgrupos maximales abelianos diagonalizables ($\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$, a.c.) del grupo de automorfismos.
- (2010, Elduque) Asigna unos invariantes a cada graduación fina. Basado en el estudio de las graduaciones en álgebras asociativas.

◇ **Excepcionales.**

- (2006, D.&Martín) Mecanismos de transferencia para $\mathfrak{g}_2$ desde $\mathbb{O}$
- (2009, D.&Martín) Para $\mathfrak{f}_4$, los cuasitoros de $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{f}_4$ están contenidos en el normalizador de un toro maximal de $\mathcal{G}$. Esto da algún control sobre ellos.
- (2012, D.&Viruel) Para $\mathfrak{e}_6$, se trabaja con p-grupos elementales y sus centralizadores, combinando métodos previos.
- (2014, Yu, arXiv) Busca subgrupos cerrados abelianos F de grupos de Lie compactos tales que $\dim(F) = \dim(\text{subálgebra del álgebra de Lie fijada por } F)$.

Graduaciones en álgebras de matrices

$\mathbb{F}$ alg cerrado de característica cero desde ahora.

$\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ G-graduada.

Existen $k, l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$ con $kl_1 \dots l_r = n$ tales que $\mathcal{A}$ es isomorfa (como álgebra graduada) a:

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_k(\mathbb{F})}_{\substack{\mathbb{Z}^{k-1}\text{-grad} \\ \text{elemental}}} \otimes \underbrace{\mathrm{Mat}_{l_1}(\mathbb{F})}_{\substack{\mathbb{Z}_{l_1}^2\text{-grad} \\ \text{de Pauli}}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathrm{Mat}_{l_r}(\mathbb{F})}_{\substack{\mathbb{Z}_{l_r}^2\text{-grad} \\ \text{de Pauli}}}$$

Graduaciones en álgebras de Lie tipos B, C y D

Si $\mathcal{L} \in \begin{cases} \mathfrak{so}(n, \mathbb{F}) & n \geq 5, n \neq 8 \\ \mathfrak{sp}(n, \mathbb{F}) & n \geq 6, n \text{ par} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ existe $\mathcal{A}$ álgebra de matrices tal que $\mathcal{L} = \mathrm{Skew}(\mathcal{A}, \varphi)$.

Toda graduación de $\mathcal{L}$ es restricción de una de $\mathcal{A}$:

Existe $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$ tal que $\mathcal{L}_g = \mathcal{A}_g \cap \mathcal{L}$

Graduaciones en álgebras de Lie tipo A

Si $\mathcal{L} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, $\mathcal{L} \leq \mathcal{A}^-$ para $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{F})$.
Observemos que $\varphi(x) = -x^t$ cumple $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}$ pero $\varphi \notin \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$.

Tipo I- Si $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ es una graduación, entonces

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{A}_g \cap \mathcal{L} \text{ da una graduación de } \mathcal{L}$$

Tipo II- Si $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ es una graduación y φ involución graduada ($\varphi(A_g) \subset A_g$), entonces dado $h \in G$ de orden 2,

$$\mathcal{L}_g = \mathrm{Skew}(\mathcal{A}_g, \varphi) \oplus (\mathrm{Sym}(\mathcal{A}_{gh}, \varphi) \cap \mathcal{L})$$

da una graduación de $\mathcal{L}$

Toda graduación de $\mathcal{L}$ es de tipo I o II

(de tipo I si $n = 2$)

Graduaciones en álgebras de Lie tipo G

$\mathfrak{g}_2 = \mathrm{der}(\mathbb{O})$

* Graduaciones finas:
  - $\mathbb{Z}_2^3$-graduación Γ_1 heredada de la de $\mathbb{O}$.
  - $\mathbb{Z}^2$-graduación Γ_2 dada por la descomposición en raíces.
* Una graduación cualquiera:
  - Todas son isomorfas a Γ_1 o Γ_2^π para $\pi\colon \mathbb{Z}^2 \to G$ epimorfismo de grupos.
  - Hay 25 salvo equivalencia.

Para álgebras de Lie tipo F

$\mathfrak{f}_4 = \mathrm{der}(\mathbb{A})$ donde $\mathbb{A}$ es el álgebra de Albert:

matrices hermíticas 3×3 con coeficientes en octoniones

respecto a $*$ involución estándar de $\mathbb{O}$ $(n(x) = xx^*)$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \{x = (x_{ij}) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{O}) \mid x_{ij} = x_{ji}^*\} \\ &= \mathbb{F}E_1 \oplus \mathbb{F}E_2 \oplus \mathbb{F}E_2 \oplus \iota_1(\mathbb{O}) \oplus \iota_2(\mathbb{O}) \oplus \iota_3(\mathbb{O}) \end{aligned}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\iota_1(a) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \iota_2(a) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \iota_3(a) = 2\begin{pmatrix} 0 & \bar{a} & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graduaciones finas en $\mathbb{A}$

$\mathbb{Z}_2^5$: $\mathbb{A}$ tiene una $\mathbb{Z}_2^2$-graduación natural,

$$\mathbb{A}_{(\bar{0},\bar{0})} = \mathbb{F}E_1 \oplus \mathbb{F}E_2 \oplus \mathbb{F}E_3,$$
$$\mathbb{A}_{(\bar{1},\bar{0})} = \iota_1(\mathbb{O}), \quad \mathbb{A}_{(\bar{0},\bar{1})} = \iota_2(\mathbb{O}), \quad \mathbb{A}_{(\bar{1},\bar{1})} = \iota_3(\mathbb{O}),$$

que combina con la $\mathbb{Z}_2^3$-graduación de $\mathbb{O}$.

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3$: Sea $R_x : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ el operador de multiplicación ($R_X(Y) = X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$)
Sea $d = 2[R_{\iota_1(1)}, R_{E_1}] \in \mathrm{der}(\mathbb{A})$, que diagonaliza $\mathbb{A}$ con valores propios enteros.

Así induce una $\mathbb{Z}$-graduación, que combina con la $\mathbb{Z}_2^3$-graduación de $\mathbb{O}$.

$\mathbb{Z}_3^3$: $\mathbb{A}$ puede verse como el álgebra grupo torcida $\mathbb{F}^\sigma \mathbb{Z}_3^3$ con

$$\sigma(\alpha, \beta) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega^{\psi(\alpha,\beta)} & \text{si } \{\alpha, \beta\} \text{ son } \mathbb{Z}_3\text{-l.i.} \\ \omega^{\psi(\alpha,\beta)} & \text{si no} \end{cases}$$

para $\psi(\alpha, \beta) = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(\alpha_3 - \beta_3)$.

Graduaciones finas en álgebras de Lie tipo F

Las graduaciones finas de $\mathfrak{f}_4 = \mathrm{der}(\mathbb{A})$:

- $\mathbb{Z}_2^5$-graduación heredada de la de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3$-graduación heredada de la de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{Z}_3^3$-graduación heredada de la de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{Z}^4$-graduación: descomposición en raíces (también heredada de la de $\mathbb{A}$).

$\mathfrak{e}_6$		$\mathfrak{e}_7$		$\mathfrak{e}_8$	
Univ. group	Model	Univ. group	Model	Univ. group	Model
$\mathbb{Z}^6$	Roots	$\mathbb{Z}^7$	Roots	$\mathbb{Z}^8$	Roots
$\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2$	$T(\mathbb{K}, H_3(\mathbb{O}))$	$\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^2$	$T(\mathbb{Q}, H_3(\mathbb{O}))$	$\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^3$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{O}))$
$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_3^2$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{K}))$	——		$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_3^3$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{O}))$
$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2^3$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{K}))$	$\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2^3$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{Q}))$	——	
$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2^3$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{F})))$	$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2^4$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{K})))$	$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2^5$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$
——		$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3^3$	$T(\mathbb{Q}, H_3(\mathbb{O}))$	——	
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^5$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{F})))$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^6$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{K})))$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^7$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q})))$
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^4$	$T(\mathbb{K}, H_3(\mathbb{O}))$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^5$	$T(\mathbb{Q}, H_3(\mathbb{O}))$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^6$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{O}))$
——		$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{K})))$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4^3$	$\mathrm{Kan}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q})))$
$\mathbb{Z}_3^4$	$g(pK, Ok)$	——		$\mathbb{Z}_3^5$	$g(Ok, Ok)$
$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_3^2$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{K}))$	——		——	
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^3$	$T(\mathbb{K}, H_3(\mathbb{O}))$	$\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3^3$	$T(\mathbb{Q}, H_3(\mathbb{O}))$	$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_3^3$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{O}))$
$\mathbb{Z}_2^7$	$\mathfrak{stu}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{F}))))$	$\mathbb{Z}_2^8$	$\mathfrak{stu}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{K}))))$	$\mathbb{Z}_2^9$	$\mathfrak{stu}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$
$\mathbb{Z}_2^6$	$T(\mathbb{K}, H_3(\mathbb{O}))$	$\mathbb{Z}_2^7$	$T(\mathbb{Q}, H_3(\mathbb{O})))$	$\mathbb{Z}_2^8$	$T(\mathbb{O}, H_3(\mathbb{O})))$
$\mathbb{Z}_4^3$	$\mathrm{Der}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$	$\mathbb{Z}_4^3 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathfrak{str}_0(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$	$\mathbb{Z}_4^3 \times \mathbb{Z}_2^2$	$\mathfrak{stu}_3(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^4$	$\mathrm{Der}(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^5$	$\mathfrak{str}_0(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^6$	$\mathfrak{stu}_3(\text{C-D}(H_4(\mathbb{Q}))))$
——		$\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2^3$	$\mathfrak{stu}_3(\text{C-D}(H_4(\mathbb{K}))))$	——	
——		——		$\mathbb{Z}_5^3$	Jordan grading

Thank you for your attention!