

# Descomposición en Landscapes Elementales del Problema de Diseño de Redes de Radio con Aplicaciones

Francisco Chicano, Franco Arito y Enrique Alba

*Resumen*— En este trabajo se presenta la descomposición en *landscapes elementales* de un problema de optimización combinatoria: el problema de Diseño de Redes de Radio. La teoría de *landscapes* provee un marco formal en el cual un problema de optimización combinatoria puede ser caracterizado teóricamente como una suma de un tipo especial de *landscape* llamado *landscape elemental*. La descomposición de la función objetivo de un problema en sus componentes elementales aporta conocimiento adicional sobre el problema que puede utilizarse para realizar cálculos exactos sobre ciertos aspectos del problema o diseñar algoritmos eficientes para resolverlo. Además de la descomposición del problema, se presentan algunas de las posibles aplicaciones de esta descomposición.

*Palabras clave*— Teoría de *landscapes*, descomposición en *landscapes elementales*, diseño de redes de radio

## I. INTRODUCCIÓN

Un *landscape* es una terna  $(X, N, f)$ , donde  $X$  es un conjunto finito de *soluciones candidatas*,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es la *función objetivo* y  $N$  es una función que mapea elementos de  $X$  a elementos de su conjunto potencia es decir  $N : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  y se lo denomina *operador de vecindario*. Si  $y \in N(x)$  entonces se dice que  $y$  es un vecino de  $x$ .

Existe un tipo de *landscape* denominado *landscape elemental* que es de especial interés debido a sus propiedades [16]. Los *landscapes elementales* se encuentran caracterizados por la ecuación de onda de Grover [12]:

$$\text{avg}\{f(y)\}_{y \in N(x)} = f(x) + \frac{k}{d}(\bar{f} - f(x)) , \quad (1)$$

donde  $d = |N(x)|$  es el tamaño del vecindario, que se asume que es el mismo para todas las soluciones en el espacio de búsqueda,  $\bar{f}$  es la media de la función objetivo en el espacio de búsqueda completo,  $k$  es una constante característica y  $\text{avg}\{f(y)\}_{y \in N(x)}$  es el valor medio de la función objetivo  $f$  en el vecindario de una solución  $x$ :

$$\text{avg}\{f(y)\}_{y \in N(x)} = \frac{1}{|N(x)|} \sum_{y \in N(x)} f(y) . \quad (2)$$

El valor de  $k$  se puede obtener analizando el problema teóricamente y el valor de  $\bar{f}$  se calcula normalmente en tiempo polinomial a partir de los datos

Universidad de Málaga. E-mail: {chicano, eat}@lcc.uma.es, franco.arito@yahoo.com.ar.

del problema. Ambos suelen ser, por tanto, fáciles de obtener teóricamente. Sin embargo, también es posible obtener ambos valores empíricamente aplicando la ecuación de onda a soluciones aleatoriamente generadas y despejando  $k$  y  $\bar{f}$  de ella.

En este trabajo analizamos el problema del diseño de redes de radio [1] desde el punto de vista de la teoría de *landscapes*. La organización del artículo es como sigue. En la Sección II se presentarán las bases de la teoría de *landscapes* y en la Sección III se detallará el caso en que el espacio de búsqueda es un hipercubo binario. El problema de diseño de una red de radio se presenta en la Sección IV y su descomposición en *landscapes elementales* se detalla en la Sección V. Finalmente, la Sección VI presenta algunas aplicaciones de la teoría de *landscapes* y la Sección VII concluye el artículo.

## II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Llamamos *espacio de configuración* de un *landscape*  $(X, N, f)$  al par  $(X, N)$ , y puede ser representado usando un grafo  $G = (X, E)$  en el cual  $X$  es el conjunto de vértices y existe una arista dirigida  $(x, y)$  en  $E$  si  $y \in N(x)$  [3]. El vecindario se puede representar mediante su matriz de adyacencia:

$$A_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in N(x), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3)$$

La matriz de grado  $D$  se define como la matriz diagonal:

$$D_{xy} = \begin{cases} |N(x)| & \text{si } y = x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4)$$

La matriz Laplaciana del espacio de configuración se define como:

$$\Delta = A - D . \quad (5)$$

Cualquier función discreta,  $f$ , definida sobre el conjunto de soluciones candidatas se puede caracterizar con un vector de  $\mathbb{R}^{|X|}$ . Además, cualquier matriz de dimensión  $|X| \times |X|$  se puede interpretar como una aplicación lineal que actúa sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{|X|}$ . Por ejemplo, la matriz de adyacencia  $A$  actúa sobre la función  $f$  de la siguiente manera:

$$A f = \begin{pmatrix} \sum_{y \in N(x_1)} f(y) \\ \sum_{y \in N(x_2)} f(y) \\ \vdots \\ \sum_{y \in N(x_{|X|})} f(y) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

El componente  $x$  de este producto de matriz por vector se puede escribir como:

$$(A f)(x) = \sum_{y \in N(x)} f(y), \quad (7)$$

que es la suma del valor de la función de todos los vecinos de  $x$ . Este trabajo solo considera vecindarios regulares (todas las soluciones tienen el mismo número de vecinos) y simétricos (si  $y \in N(x)$  entonces  $x \in N(y)$ ). Bajo estas condiciones, la matriz Laplaciana se puede escribir como:  $\Delta = A - dI$ . Se denominan *landscapes elementales* a aquellos landscapes en los que la función  $f$  es un autovector (o autofunción) de la matriz Laplaciana del espacio de configuración, salvo por una constante [16].

Un landscape  $(X, N, f)$  no siempre es elemental, ya que puede que no se cumpla la ecuación de onda. Sin embargo, aún en este caso es posible caracterizar a la función  $f$  como una suma de landscapes elementales. En particular, si el vecindario  $N$  es simétrico entonces es posible encontrar bases ortogonales compuestas de funciones reales elementales. Por lo tanto, toda función regular (elemental o no) puede ser escrita como la suma de un conjunto de landscapes elementales. El proceso de descomponer un landscape en sus componentes elementales es lo que se conoce como *descomposición en landscapes elementales* [9].

### III. ESPACIOS DE BÚSQUEDA BINARIOS

Se denomina *hipercubo binario* a un espacio de configuración en el que el conjunto de soluciones  $X$  está formado por cadenas binarias de longitud  $n$ , esto es,  $X = \mathbb{B}^n = \mathbb{Z}_2^n = \{0, 1\}^n$ ; y donde dos soluciones cualesquiera  $x$  e  $y$  son vecinas si la distancia de Hamming entre ellas es 1, es decir, hay un bit que difiere entre las cadenas. El grafo asociado a un hipercubo binario es conexo, simétrico y regular [15]. Como consecuencia, existe al menos una base para el espacio de posibles funciones objetivo,  $\mathbb{R}^{|X|}$ , que está formada por autovectores de la matriz Laplaciana.

Clarifiquemos ahora la notación. Dado un elemento  $z \in \mathbb{B}^n$ , denotaremos con  $|z|$  el número de unos de  $z$  y con  $\bar{z}$  el complemento de la cadena binaria (todos los bits invertidos). Dado un conjunto de cadenas binarias  $W$  y una cadena  $u$  denotaremos con  $W \wedge u$  el conjunto de cadenas que resulta de calcular la AND componente a componente de cada cadena de  $W$  y  $u$ , es decir,  $W \wedge u = \{w \wedge u | w \in W\}$ . Por ejemplo,  $\mathbb{B}^4 \wedge 0101 = \{0000, 0001, 0100, 0101\}$ . Denotaremos con  $\dot{i}$  la cadena binaria con un 1 en la posición  $i$  y el resto a 0. Se omite la longitud de la

cadena  $n$ , pero quedará claro de acuerdo al contexto. Por ejemplo, si consideramos cadenas binarias en  $\mathbb{B}^4$  tenemos  $\underline{1} = 1000$  y  $\underline{3} = 0010$ . Usaremos el símbolo  $\oplus$  para denotar la suma componente a componente en  $\mathbb{Z}_2$  (XOR).

#### A. Funciones de Walsh

Un conjunto importante de autovectores de la matriz Laplaciana del hipercubo binario es el conjunto de *funciones de Walsh* [21]. Las funciones de Walsh forman una base ortogonal de autovectores en el espacio de configuración [18]. Esto significa que cualquier función  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$  puede ser escrita como una combinación lineal de funciones de Walsh. Por esta razón, el análisis de Walsh ha sido utilizado para encontrar la descomposición en landscapes elementales de otros problemas con representación binaria como es el caso de MAX-kSAT, la Suma de Subconjunto, la Optimización Cuadrática 0-1 Sin Restricción o el problema de Minimización de Conjuntos de Pruebas.

Una función de Walsh (no normalizada) con parámetro  $w \in \mathbb{B}^n$  se define como:

$$\psi_w(x) = \prod_{i=1}^n (-1)^{w_i x_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^n w_i x_i}, \quad (8)$$

donde  $w_i$  y  $x_i$  representan la  $i$ -ésima componente de las cadenas  $w$  y  $x$  respectivamente. Como se puede apreciar  $\psi_w : \mathbb{B}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ .

El orden de una función de Walsh  $\psi_w$  se define como  $|w| = \sum_{i=1}^n w_i$ , es decir, el número de unos en  $w$ . Una función de Walsh de orden  $p$  es elemental con autovalor  $\lambda = 2p$  [16]. A continuación se presentan sin demostración algunas de las propiedades que cumplen las funciones de Walsh.

*Proposición 1* (ver [6]) Las funciones de Walsh cumplen las siguientes igualdades:

$$\psi_w \cdot \psi_v = \psi_{w \oplus v}, \quad (9)$$

$$\psi_w^2 = 1, \quad (10)$$

$$\psi_0 = 1, \quad (11)$$

$$\overline{\psi_w} = 0 \quad \text{si } w \neq 0, \quad (12)$$

$$\psi_{\dot{i}}(x) = (-1)^{x_i} = 1 - 2x_i. \quad (13)$$

Como las funciones de Walsh forman una base ortogonal de  $\mathbb{R}^{2^n}$ , cualquier función pseudo-booleana puede ser escrita como la suma ponderada de funciones de Walsh de la siguiente manera:

$$f = \sum_{w \in \mathbb{B}^n} a_w \psi_w, \quad (14)$$

donde los valores  $a_w$  se denominan coeficientes de Walsh. Las funciones de Walsh del mismo orden, se pueden agrupar para encontrar la descomposición en landscapes elementales de la función:

$$f^{(p)} = \sum_{\substack{w \in \mathbb{B}^n \\ |w|=p}} a_w \psi_w, \quad (15)$$

donde cada  $f^{(p)}$  es una función elemental con autovalor  $2p$ . Por tanto, la función  $f$  puede ser escrita como una suma de  $n + 1$  componentes elementales:

$$f = \sum_{p=0}^n f^{(p)} . \quad (16)$$

De esta manera cualquier función puede ser descompuesta en una suma de a lo más  $n$  landscapes elementales, ya que el valor constante  $f^{(0)}$  se puede sumar a cualquiera de las otras componentes elementales.

### B. Matrices de Krawtchouk

Cuando se trabaja con funciones de Walsh es habitual encontrar valores enteros que son elementos de matrices de Krawtchouk [10]. La  $n$ -ésima matriz de Krawtchouk, denotada  $\mathcal{K}^{(n)}$ , es una matriz entera de tamaño  $(n + 1) \times (n + 1)$  cuyos elementos se definen de acuerdo a la fórmula:

$$\mathcal{K}_{r,j}^{(n)} = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n-j}{r-l} \binom{j}{l} , \quad (17)$$

donde  $0 \leq r, j \leq n$  y se asume que  $\binom{a}{b} = 0$  si  $a > b$  o  $b < 0$ . Los elementos de las matrices de Krawtchouk también se pueden definir de acuerdo a la siguiente función generatriz:

$$(1 + x)^{n-j} (1 - x)^j = \sum_{r=0}^n x^r \mathcal{K}_{r,j}^{(n)} . \quad (18)$$

*Proposición 2* (ver [6]) Las matrices de Krawtchouk cumplen la siguiente identidad:

$$\mathcal{K}_{r,n-j}^{(n)} = (-1)^r \mathcal{K}_{r,j}^{(n)} . \quad (19)$$

Las siguientes proposiciones establecen una relación entre la suma de funciones de Walsh y los elementos de las matrices de Krawtchouk, y serán de utilidad para luego poder realizar la descomposición del problema de Diseño de Redes de Radio.

*Proposición 3* (ver [7]) Sea  $t \in \mathbb{B}^n$  una cadena binaria y  $0 \leq r \leq n$ . Se cumple la identidad:

$$\sum_{\substack{w \in \mathbb{B}^n \wedge t \\ |w|=r}} \psi_w(x) = \mathcal{K}_{r,|x \wedge t|}^{(|t|)} . \quad (20)$$

*Corolario 1:* Sea  $t \in \mathbb{B}^n$  una cadena binaria y  $0 \leq r \leq n$ . Se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{\substack{w \in \mathbb{B}^n \wedge t \\ |w|=r}} (-1)^{|w|} \psi_w(x) = (-1)^r \mathcal{K}_{r,|x \wedge t|}^{(|t|)} . \quad (21)$$

*Demostración:* El resultado se sigue de (20) al considerar que  $|w| = r$  es constante en el sumatorio. ■

## IV. PROBLEMA DE DISEÑO DE REDES DE RADIO

El problema de Diseño de Redes de Radio (RND, *Radio Network Design*) se puede definir como un

problema de cobertura de un área mediante un conjunto de antenas, donde se desea alcanzar máxima cobertura utilizando el menor número posible de antenas.

### A. Formulación discreta del problema

Sea  $L$  el conjunto de todas las ubicaciones a las que se desea dar servicio (cubrir) y sea  $M$  el conjunto de todas las ubicaciones posibles de las antenas. Sea  $G = (M \cup L, E)$  un grafo, donde  $E$  es el conjunto de aristas tal que cada ubicación de una antena está conectada con las ubicaciones que cubre, y sea  $x \in \mathbb{B}^{|M|}$  una solución al problema, donde  $x_i$  indica si la  $i$ -ésima antena forma parte de la solución o no. Como el área geográfica está discretizada, las ubicaciones potencialmente cubiertas se toman de un retículo, como se muestra en la Figura 1.

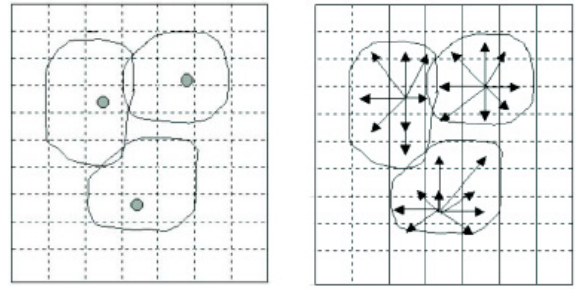


Fig. 1. Antenas y sus respectivas celdas sobre un retículo.

El objetivo es encontrar el mínimo subconjunto de antenas que cubran la máxima superficie, esto significa buscar un subconjunto  $M' \subseteq M$  tal que  $|M'|$  sea mínimo y  $|\text{Vecinos}(M', E)|$  sea máximo, donde:

$$M' = \{j \in M \mid x_j = 1\} ,$$

$$\text{Vecinos}(M', E) = \{u \in L \mid \exists v \in M', (u, v) \in E\} .$$

Esta definición pone de manifiesto que el problema RND es un problema bi-objetivo. Los objetivos son minimizar el número de antenas y maximizar la cobertura. En lo que sigue utilizaremos la siguiente nomenclatura para referirnos a las funciones objetivo:

- *antenas*( $x$ ): es el número de antenas utilizadas en la solución  $x$ ,
- *cobertura*( $x$ ): es el valor del área (o localizaciones) cubierta por la disposición de antenas en  $x$ .

Calcular el valor de *antenas*( $x$ ) es simplemente contar el número de unos presentes en la solución, es decir:

$$\text{antenas}(x) = \sum_{i=1}^n x_i . \quad (22)$$

En la formulación discreta el valor de *cobertura*( $x$ ) es simplemente:

$$\text{cobertura}(x) = |\text{Vecinos}(M', E)| . \quad (23)$$

## B. Formulación general del problema

En general, una antena cubre un área de forma arbitraria y continua. En la versión general del problema eliminamos la suposición de que cada antena cubre un conjunto discreto de puntos y suponemos que puede cubrir una región bidimensional de cualquier tipo. Este cambio en la formulación no afecta a la función *antenas* pero sí a *cobertura*. Para entender estos cambios pongamos un ejemplo.

Supongamos que se desea calcular la superficie cubierta de un área particular de la ciudad de Málaga. La Figura 2 muestra una posible configuración de 22 regiones (numeradas  $R_1, R_2, \dots, R_{22}$ ) que corresponden a las regiones que cubren 22 antenas. En este caso todas las regiones tienen una forma circular o elíptica, pero esto no supone una restricción ya que se puede pensar en regiones arbitrarias de cualquier forma, incluso que una misma antena tenga asociada una región inconexa. Se debe notar que en este caso no se discretiza el área cubierta.

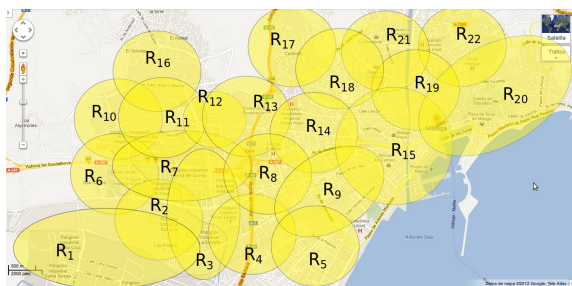


Fig. 2. Ejemplo de disposición de antenas en Málaga.

La dificultad que introduce la formulación más general radica en que para calcular la superficie cubierta por una solución, es necesario considerar lo que ocurre cuando dos o más regiones se solapan. Por ejemplo, en la Figura 2 la región  $R_1$  se solapa con las regiones  $R_6, R_2$  y  $R_3$ . Supongamos que se utilizan las antenas asociadas con las regiones  $R_1$  y  $R_2$ . El área cubierta no es simplemente la suma de las áreas de estas dos regiones, sino que debemos sustraer de dicha suma el área de la intersección entre las regiones, que se habrá contado dos veces, una por cada región. Cuando hay más regiones involucradas en los cálculos, las intersecciones a considerar son más y debemos recurrir al *principio de inclusión-exclusión*.

El principio de inclusión-exclusión permite calcular el cardinal de la unión de varios conjuntos a través de los cardinales de cada conjunto y de todas sus posibles intersecciones [14]. Sean  $A_1, \dots, A_n$  conjuntos finitos, la ecuación generalizada del principio de inclusión-exclusión es la siguiente:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|,$$

donde  $|A|$  denota el cardinal de  $A$ . Esta expresión puede escribirse también como sigue:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|. \quad (24)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (24) y de acuerdo a la definición de área en Teoría de la Medida<sup>1</sup> [19], podemos extender este principio para calcular la función *cobertura*( $x$ ) del problema RND bajo la formulación general del siguiente modo: considerando cada región como un conjunto (esto es válido ya que el área de una región es medible) y reemplazando la función del cardinal de conjunto por la función área (que es una función medible). La ecuación correspondiente al principio de inclusión-exclusión generalizada considerando áreas sería:

$$\text{area} \left( \bigcup_{i=1}^n R_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \text{area} \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right), \quad (25)$$

donde  $\text{area}(R)$  corresponde al valor del área de la región  $R$ , este valor puede ser calculado utilizando técnicas de teoría de la medida (o a través de una integral doble).

En el caso de la función *cobertura*( $x$ ) se desea calcular el área total teniendo en cuenta únicamente aquellas regiones que sean seleccionadas en la solución  $x$  (aquellas en las cuales  $x_i = 1$ ). Para lograr esto reemplazamos el término  $\text{area} \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right)$  de la ecuación (25) por  $\text{area} \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right) \cdot \prod_{i \in I} x_i$  donde  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , de esta manera podemos considerar sólo aquellas regiones que formen parte de la solución  $x$ . La expresión resultante para la función *cobertura*( $x$ ) es:

$$\text{cobertura}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \text{area} \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right) \cdot \left( \prod_{i \in I} x_i \right). \quad (26)$$

<sup>1</sup>La teoría de la medida define al área como una función medible a la cual se le puede asignar un valor real.

## V. DESCOMPOSICIÓN DEL PROBLEMA RND

Esta sección presenta la principal contribución del trabajo: la descomposición en landscapes elementales del problema RND. Analizaremos cada función objetivo por separado.

### A. Descomposición de antenas( $x$ )

La descomposición de la función  $antenas(x)$  se realiza reemplazando el valor de  $x_i$  de la ecuación (13) en la ecuación (22), es decir:

$$\begin{aligned} antenas(x) &= \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1 - \psi_{\underline{i}}(x)}{2} \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_{\underline{i}}(x) . \end{aligned} \quad (27)$$

De aquí se deduce que la función  $antenas(x)$  está compuesta por dos funciones elementales:

$$\begin{aligned} antenas^{(0)}(x) &= \frac{n}{2} , \\ antenas^{(1)}(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_{\underline{i}}(x) \\ &= antenas(x) - \frac{n}{2} . \end{aligned} \quad (28)$$

Como la primera función elemental es una constante, que puede ser añadida a la segunda, deducimos que la función  $antenas(x)$  junto con el vecindario de inversión de bits es un landscape elemental.

### B. Descomposición de cobertura( $x$ )

Para encontrar la descomposición de  $cobertura(x)$  también se utilizan funciones de Walsh. Definimos  $\alpha(I) = area(\bigcap_{i \in I} R_i)$  con  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ . La definición de  $cobertura(x)$  resultante es:

$$cobertura(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \alpha(I) \prod_{i \in I} x_i . \quad (30)$$

Reescribamos (30) utilizando la ecuación (13):

$$\begin{aligned} cobertura(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \alpha(I) \prod_{i \in I} x_i \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \alpha(I) \prod_{i \in I} \frac{1 - \psi_{\underline{i}}(x)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \frac{\alpha(I)}{2^k} \prod_{i \in I} (1 - \psi_{\underline{i}}(x)) . \end{aligned} \quad (31)$$

Desarrollando el producto podemos escribir:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} (1 - \psi_{\underline{i}}(x)) &= \sum_{W \in \mathcal{P}(I)} (-1)^{|W|} \prod_{j \in W} \psi_{\underline{j}}(x) \\ &= \sum_{w \in \mathbb{B}^n \wedge I} (-1)^{|w|} \psi_w(x) , \end{aligned} \quad (32)$$

donde, abusando de notación, usamos  $I$  para representar, además de un conjunto, una cadena binaria con 1's en las posiciones correspondientes a los elementos del conjunto  $I$ . Usando (32) en (31) podemos escribir:

$$\begin{aligned} cobertura(x) &= \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \frac{\alpha(I)}{2^k} \sum_{w \in \mathbb{B}^n \wedge I} (-1)^{|w|} \psi_w(x) . \end{aligned} \quad (33)$$

Cada componente elemental está compuesta por la suma de funciones de Walsh ponderadas que tienen el mismo orden, es decir:

$$\begin{aligned} cobertura^{(p)}(x) &= \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \frac{\alpha(I)}{2^k} \sum_{\substack{w \in \mathbb{B}^n \wedge I \\ |w|=p}} (-1)^{|w|} \psi_w(x) . \end{aligned} \quad (34)$$

La ecuación (34) se puede simplificar teniendo en cuenta las Proposiciones 1 y 2, junto con el hecho de que  $|I| - |x \wedge I| = |\bar{x} \wedge I|$ :

$$\begin{aligned} cobertura^{(p)}(x) &= \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \frac{\alpha(I)}{2^k} \sum_{\substack{w \in \mathbb{B}^n \wedge I \\ |w|=p}} (-1)^{|w|} \psi_w(x) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \frac{\alpha(I)}{2^k} (-1)^p \mathcal{K}_{p, |x \wedge I|}^{(|I|)} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \frac{\alpha(I)}{2^k} \mathcal{K}_{p, |I| - |x \wedge I|}^{(|I|)} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \frac{\alpha(I)}{2^k} \mathcal{K}_{p, |\bar{x} \wedge I|}^{(|I|)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \alpha(I) \mathcal{K}_{p, |\bar{x} \wedge I|}^{(|I|)} \\ &= - \sum_{k=1}^n \left( \frac{-1}{2} \right)^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \alpha(I) \mathcal{K}_{p, |\bar{x} \wedge I|}^{(|I|)} \\ &= - \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \left( \frac{-1}{2} \right)^{|I|} \alpha(I) \mathcal{K}_{p, |\bar{x} \wedge I|}^{(|I|)} , \end{aligned} \quad (35)$$

donde  $0 \leq p \leq n$ . La función  $cobertura(x)$  se puede escribir:

$$cobertura(x) = \sum_{p=0}^n cobertura^{(p)}(x) . \quad (36)$$

### C. Análisis de la descomposición

La descomposición de la función  $cobertura$  brinda información importante, si se analiza en detalle la ecuación (35). A partir de la descomposición se

puede deducir que el número máximo de componentes elementales de la función está acotado por el máximo número de solapamientos entre regiones que exista en algún punto dado.

Esto se infiere si se tiene en cuenta lo siguiente: supongamos que se tiene un punto dentro de la instancia del problema que está cubierto por el máximo número de antenas  $k$ . Esto quiere decir que cuando se calcule el área de las intersecciones para  $|I| > k$ , la función  $\alpha(I) = 0$  (de lo contrario el valor de  $k$  no sería el máximo número de antenas que se solapan en el punto seleccionado). Esto implica que la componente de orden  $p$  es una suma ponderada de elementos de la fila  $p$  de matrices de Krawtchouk de orden menor o igual que  $k$ . Para el resto de casos en los que  $p > k$  la componente valdrá cero. En cuanto a la complejidad de calcular el valor de la componente  $p$  se observa que al tener  $\alpha(I) = 0$  para  $|I| > k$ , el tiempo requerido para el cálculo será  $O(n^k)$ .

## VI. APLICACIONES DE LA TEORÍA

En esta sección repasamos algunas de las aplicaciones de la teoría de landscapes desarrolladas en los últimos años. En particular, nos centramos en seis aplicaciones relacionadas con la optimización combinatoria.

### A. Autocorrelación

El *coeficiente de autocorrelación*,  $\xi$ , de un problema es un parámetro propuesto por Angel y Zisisimopoulos [2] que constituye una medida de la rugosidad del landscape. Los autores mostraron en un estudio empírico que  $\xi$  parece estar relacionado con el rendimiento del algoritmo de Enfriamiento Simulado. Otra medida de rugosidad definida por García-Pelayo y Stadler es la *longitud de correlación* [11], denotada con  $\ell$ . La longitud de correlación es especialmente importante en optimización debido a la *conjetura de la longitud de autocorrelación*, que afirma que en muchos landscapes el número de óptimos locales  $M$  se puede estimar usando la expresión [17]:

$$M \approx \frac{|X|}{|X(x_0, \ell)|}, \quad (37)$$

donde  $X(x_0, \ell)$  es el conjunto de soluciones alcanzables desde  $x_0$  en  $\ell$  o menos movimientos locales. Puede ser útil comparar el número estimado de óptimos locales de dos instancias del mismo problema. De hecho, para un problema en el que (37) sea válida, a mayor valor de  $\ell$  le corresponde un menor número de óptimos locales. En un landscape con un bajo número de óptimos locales, una estrategia de búsqueda local puede encontrar *a priori* el óptimo global con menos pasos de cómputo.

La teoría de landscapes permite calcular de forma exacta  $\xi$  y  $\ell$  a partir de los datos del problema [5].

Las ecuaciones resultantes son:

$$\xi = \left( \sum_{i \neq 0} W_i \frac{\lambda_i}{d} \right)^{-1}, \ell = \sum_{s=0}^{\infty} r(s) = d \sum_{i \neq 0} \frac{W_i}{\lambda_i}. \quad (38)$$

donde los valores  $W_i$  se denominan *coeficientes espectrales* y se definen así:

$$W_i = \frac{\overline{f^{(i)^2}} - \overline{f^{(i)}}^2}{\overline{f^2} - \overline{f}^2}. \quad (39)$$

Usando las ecuaciones previas se han obtenido algoritmos eficientes para calcular de forma exacta los coeficientes en problemas como la Asignación Cuadrática (QAP), la Optimización Cuadrática sin restricciones (UQO), MAX-3SAT, etc.

### B. Correlación Fitness-Distancia

La *Correlación Fitness-Distancia* (FDC) es una medida introducida por Jones y Forrest [13] para medir la dificultad de resolución de un problema. A partir de todas las soluciones del espacio de búsqueda, se calcula el coeficiente de correlación entre los valores de fitness de las soluciones y la distancia de Hamming de éstas al óptimo global más cercano.

El FDC  $r$  es un valor entre  $-1$  y  $1$ . Cuanto menor sea el valor de  $r$ , más difícil se supone que resulta resolver el problema de optimización. El siguiente teorema proporciona una expresión exacta para la FDC en el caso en que sólo exista un óptimo global  $x^*$  y conozcamos la descomposición en landscapes elementales de  $f$ .

*Teorema 1* (ver [4]) Sea  $f$  una función objetivo cuya descomposición en landscapes elementales es  $f = \sum_{p=0}^n f^{(p)}$ , donde  $f^{(0)}$  es la función constante  $f^{(0)}(x) = \overline{f}$  y cada  $f^{(p)}$  con  $p > 0$  es la función del landscape elemental de orden  $p$  con *offset* cero. Si existe solo un óptimo global  $x^*$  en el espacio de búsqueda, la FDC se puede calcular de forma exacta como:

$$r = \frac{-f^{(1)}(x^*)}{\sigma_f \sqrt{n}}. \quad (40)$$

El teorema anterior muestra que lo único que necesitamos conocer acerca del óptimo global es el valor del primer componente elemental (el de orden 1). Con esta información podemos calcular de forma exacta la FDC. Si la función objetivo es elemental, entonces la expresión para la FDC exacta se simplifica:

$$r = \begin{cases} \frac{\overline{f} - f(x^*)}{\sigma_f \sqrt{n}} & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p > 1. \end{cases} \quad (41)$$

La ecuación anterior afirma que solo los landscapes elementales de orden  $p = 1$  tienen un FDC no zero. Los resultados anteriores abren una interesante discusión que pone en cuestión el uso de FDC como medida de “dificultad” de un problema. Los lectores interesados pueden referirse a [4].

### C. Distribución de fitness tras cruce uniforme y mutación por inversión de bits

El cruce uniforme y la mutación por inversión de bits son dos operadores muy populares utilizados en los algoritmos genéticos para generar nuevas soluciones en una iteración del algoritmo cuando la representación usada es un espacio binario. Usando la descomposición de Walsh, Chicano et al. [7] proporcionaron fórmulas para el cálculo exacto del valor esperado de fitness de una solución que resulta de aplicar estos dos operadores en el orden habitual (primero cruce y después mutación). El valor esperado es:

$$\mathbb{E}\{f(M_\mu(U_\rho(x, y)))\} = \sum_{r,l=0}^n A_{x,y}^{(r,l)} (1-2\rho)^r (1-2\mu)^l, \quad (42)$$

donde  $a_w$  con  $w \in \mathbb{B}^n$  son los coeficientes de Walsh de  $f$ ,  $\rho$  es la probabilidad de seleccionar un bit del primer padre ( $x$ ) en el cruce,  $\mu$  es la probabilidad de invertir un bit y los coeficientes  $A_{x,y}^{(r,l)}$  vienen definidos por:

$$A_{x,y}^{(r,l)} = \sum_{\substack{w \in \mathbb{B}^n, |w|=l \\ |(x \oplus y) \wedge w|=r}} a_w \psi_w(y), \quad (43)$$

y  $A_{x,y}^{(r,l)} = 0$  para  $r > l$ .

La expresión anterior resulta ser polinomial en  $\rho$  y  $\mu$  que son los parámetros de los operadores. En [7] se proporcionan también expresiones concretas para el caso de dos problemas: Onemax y MAX-SAT. Las expresiones anteriores pueden utilizarse también para calcular otros momentos estadísticos de la distribución de fitness tras aplicar los operadores. Para ello no hay más que cambiar  $f$  por la potencia deseada de  $f$ , dependiendo del momento que queramos calcular. Así, por ejemplo, si queremos conocer el valor de la desviación estándar, necesitaremos aplicar las fórmulas anteriores a  $f$  y  $f^2$ . A partir de los momentos de orden superior es posible esbozar la forma de distribución de probabilidad y estimar la probabilidad de mejorar una solución en una iteración del algoritmo, o incluso calcular los valores de los parámetros  $\rho$  y  $\mu$  que maximizan la probabilidad de mejora en un paso.

### D. Tiempo de ejecución de $(1 + \lambda)$ -EA

Siguiendo con la idea anterior de calcular la probabilidad de mejora en un paso, en un artículo reciente, Chicano et al. [6], desarrollaron un marco teórico para calcular la distribución de probabilidad tras aplicar una mutación por inversión de bits a un problema con representación binaria y lo aplicaron a MAX-SAT y un problema que generaliza a Onemax. En el caso particular de Onemax, fue posible ir más allá que estudiar una simple iteración (como se describe en la subsección anterior): se obtuvieron expresiones exactas para la esperanza del tiempo de ejecución de un algoritmo  $(1 + \lambda)$ -EA. Este tiempo

depende de la probabilidad  $p$  de invertir un bit y del número de individuos generados  $\lambda$ . A modo de ilustración, se presentan a continuación las expresiones exactas de la esperanza del tiempo de ejecución para  $\lambda = 1$  y  $n = 2$  en función de  $p$ .

$$\mathbb{E}\{\tau\} = \frac{7 - 5p}{4(p-2)(p-1)p}. \quad (44)$$

Estas expresiones exactas permiten calcular el valor óptimo para la probabilidad de mutación (aquél que hace que el algoritmo encuentre el óptimo global en menos evaluaciones de la función objetivo). Por ejemplo, para  $n = 2$  este valor resulta ser:

$$p_2^* = \frac{1}{5} \left( 6 - \sqrt[3]{\frac{2}{23 - 5\sqrt{21}}} - \sqrt[3]{\frac{23 - 5\sqrt{21}}{2}} \right) \approx 0.561215.$$

Los autores de [6] implementaron un algoritmo eficiente para el cálculo de estos valores óptimos y proporcionaron los valores hasta  $n = 100$ , comprobando que resultan ser ligeramente mayores que el clásico valor  $p = 1/n$ .

### E. Búsqueda local eficiente

Las aplicaciones de la teoría de landscapes mostradas hasta ahora son todas cálculos exactos de valores estadísticos relacionados con el problema. Sin embargo, el análisis del landscape de un problema también ha resultado ser de utilidad para diseñar algoritmos nuevos que pueden explorar el espacio de búsqueda de forma más eficiente o efectiva. En esta subsección y la siguiente presentamos dos aplicaciones en esta línea.

Los algoritmos de *hill climbing* se encuentran presentes en muchas propuestas para resolver problemas de optimización. En general, estos algoritmos exploran completamente un vecindario en torno a la solución actual para buscar una mejor solución. En el caso binario, podemos definir un vecindario de radio  $r$  (considerando la distancia de Hamming) alrededor de una solución, una  $r$ -bola. Si el número de bits  $n$  es mucho mayor que  $r$ , entonces el número de soluciones en la  $r$ -bola es  $\Theta(n^r)$  y su exploración requerirá un tiempo al menos del orden de  $n^r$ , es decir,  $\Omega(n^r)$ .

Chicano et al. [8] propusieron una estrategia para explorar una  $r$ -bola en tiempo constante  $O(1)$  (independiente de  $n$ ) y con unos requisitos de memoria de orden lineal en  $n$ :  $O(n)$ . La estrategia se puede aplicar a cualquier problema binario, pero su eficiencia solo se manifiesta cuando el problema tiene epistasis acotada, es decir, problemas cuya función objetivo se puede escribir como suma de funciones que dependen de, a lo sumo, un número constante  $k$  de variables. Además, cada variable debería aparecer en un número acotado de funciones.

Estas restricciones no resultan demasiado fuertes, ya que, por un lado, se conocen algoritmos polinomiales que transforman cualquier problema binario en uno con epistasis acotada. Por otro lado, existen importantes familias de problemas NP-duros que encajan con la clasificación anterior. Dos ejemplos sobresalientes son NK-landscapes y MAX-kSAT.

Los resultados empíricos presentados en [8] muestran que la estrategia propuesta es capaz de encontrar el óptimo global de instancias de NK-landscapes con  $N = 10.000$  en menos de 2,1 segundos.

#### F. Cruce eficiente basado en particiones

Uno de los problemas de los algoritmos de búsqueda local es su facilidad para estancarse en óptimos locales. La estrategia propuesta en [8] no es una excepción. La posibilidad de explorar vecindarios mayores de forma eficiente permite que este estancamiento suceda en una etapa más tardía de la búsqueda, pero no puede evitarlo.

Para mejorar la exploración del espacio de búsqueda, Tinós et al. [20] propusieron un cruce, basado en las mismas ideas de descomposición de la función objetivo que aparecen en la exploración eficiente de la  $r$ -bola, para analizar de forma eficiente un número exponencial de soluciones usando un esfuerzo computacional lineal. Este cruce, inspirado en un cruce similar para el problema del viajante de comercio de Whitley et al. [22], es aplicable a funciones binarias con epistasis acotada. Los resultados empíricos muestran que cuando el cruce se aplica a soluciones que son óptimos locales, el conjunto de soluciones que explora implícitamente está formado por una mayoría de óptimos locales.

### VII. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado la descomposición en componentes elementales de las funciones objetivos del problema de diseño de una red de radio. El análisis indica que la función que cuenta el número de antenas es elemental mientras que la función que mide la cobertura tiene tantos componentes elementales como el máximo número de antenas que pueden cubrir un punto cualquiera.

Hemos repasado también las aplicaciones conocidas que tiene la teoría de landscapes en optimización combinatoria, mostrando resultados recientes. En este aspecto, hemos podido comprobar que la teoría es útil no solo para realizar cálculos eficientes de aspectos estadísticos del problema de optimización, sino también para diseñar estrategias de búsqueda eficientes.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Universidad de Málaga, Andalucía Tech, el Ministerio de Ciencia e Innovación y FEDER con contrato TIN2011-28194 (proyecto roadME) y la Universidad Técnica de Os-trava con contrato OTRI 8.06/5.47.4142.

### REFERENCIAS

- [1] Enrique Alba and J. Francisco Chicano. On the behavior of parallel genetic algorithms for optimal placement of antennae in telecommunications. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 16(2):343–359, 2005.
- [2] Eric Angel and Vassilis Zissimopoulos. On the classification of NP-complete problems in terms of their correlation coefficient. *Discrete Applied Mathematics*, 99(1-3):261–277, 2000.
- [3] Türker Biyikoglu, Josef Leydold, and Peter F. Stadler. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*, volume 1915 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2007.
- [4] Francisco Chicano and Enrique Alba. Exact computation of the fitness-distance correlation for pseudoboolean functions with one global optimum. In *EvoCOP*, volume 7245 of *LNCS*, pages 111–123. Springer, 2012.
- [5] Francisco Chicano, Gabriel Luque, and Enrique Alba. Problem understanding through landscape theory. In *GECCO Companion*, pages 1055–1062. ACM, 2013.
- [6] Francisco Chicano, Andrew M. Sutton, L. Darrell Whitley, and Enrique Alba. Fitness probability distribution of bit-flip mutation. *Evolutionary Computation*, 2015. (in press).
- [7] Francisco Chicano, Darrell Whitley, and Enrique Alba. Exact computation of the expectation surfaces for uniform crossover along with bit-flip mutation. *Theor. Comput. Sci.*, 545:76–93, 2014.
- [8] Francisco Chicano, Darrell Whitley, and Andrew M. Sutton. Efficient identification of improving moves in a ball for pseudo-boolean problems. In *GECCO*, pages 437–444, 2014.
- [9] Francisco Chicano, L. Darrell Whitley, and Enrique Alba. A methodology to find the elementary landscape decomposition of combinatorial optimization problems. *Evol. Comput.*, 19(4):597–637, 2011.
- [10] Philip Feinsilver and Jerzy Kocik. Krawtchouk polynomials and krawtchouk matrices. In Ricardo Baeza-Yates, Joseph Glaz, Henryk Gzyl, Jürgen Hüsler, and José Luis Palacios, editors, *Recent Advances in Applied Probability*, pages 115–141. Springer US, 2005.
- [11] Ricardo García-Pelayo and Peter F. Stadler. Correlation length, isotropy and meta-stable states. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 107(2-4):240–254, September 1997.
- [12] Lov K. Grover. Local search and the local structure of np-complete problems. *Operations Research Letters*, 12(4):235–243, 1992.
- [13] Terry Jones and Stephanie Forrest. Fitness distance correlation as a measure of problem difficulty for genetic algorithms. In *GECCO*, pages 184–192. Morgan Kaufmann, 1995.
- [14] Ivan Nieven. *Mathematics of Choice*. Mathematical Association of America, 1965.
- [15] Y. Saad and M.H. Schultz. Topological properties of hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, 37:867–872, 1988.
- [16] Peter Stadler. Towards a theory of landscapes. In Ramón López-Peña, Henri Waelbroeck, Riccardo Capovilla, Ricardo García-Pelayo, and Federico Zertuche, editors, *Complex Systems and Binary Networks*, volume 461-461 of *Lecture Notes in Physics*, pages 78–163. Springer Berlin / Heidelberg, 1995. 10.1007/BFb0103571.
- [17] Peter F. Stadler. *Biological Evolution and Statistical Physics*, chapter Fitness Landscapes, pages 183–204. Springer, 2002.
- [18] Andrew M. Sutton, L. Darrell Whitley, and Adele E. Howe. A polynomial time computation of the exact correlation structure of k-satisfiability landscapes. In *GECCO*, pages 365–372, 2009.
- [19] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory*, volume 126 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2011.
- [20] Renato Tinós, Darrell Whitley, and Francisco Chicano. Partition crossover for pseudo-boolean optimization. In *FOGA*, 2015. (to appear).
- [21] J. L. Walsh. A closed set of normal orthogonal functions. *American Journal of Mathematics*, 45(1):5–24, 1923.
- [22] Darrell Whitley, Doug Hains, and Adele Howe. Tunneling between optima: Partition crossover for the traveling salesman problem. In *GECCO*, pages 915–922, 2009.